BED4

10. desember 2021

09:00 - 13:15

NHH

Kandidatnummer

68

Oppgave 1)

Variabler: A → Antall vare A som skal produseres

B → Antall vare B som skal produseres

→ DB per enhet er positivt, men usikkert.

z → Variabel for DB for vare A

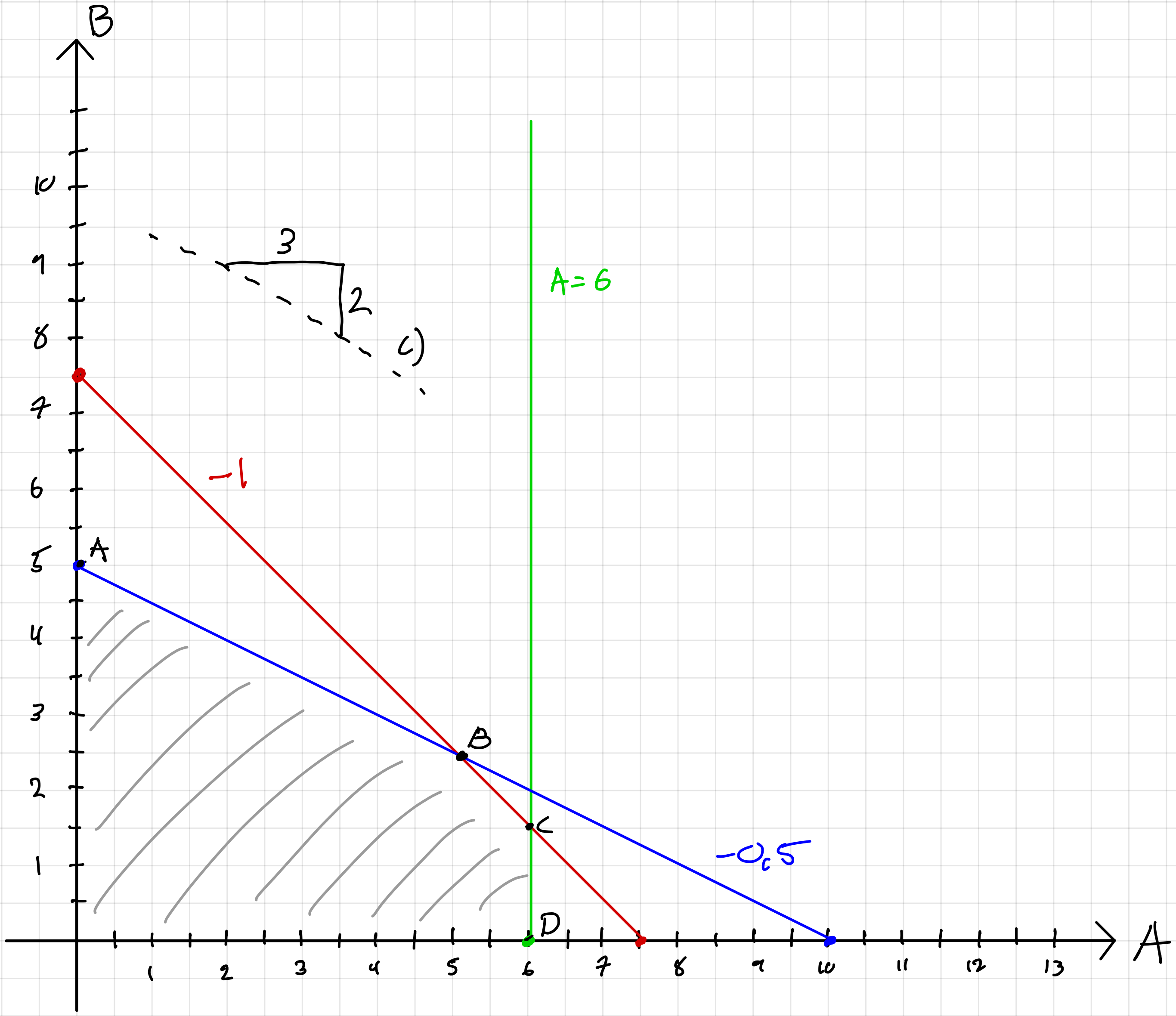
y → ″ ″ B

LP-modell:

$$\text{MAX: } z \cdot A + y \cdot B$$

Limit:

$A + B \leq 7{,}5$	| Råvare 1
$0{,}25 \cdot A + 0{,}5 \cdot B \leq 2{,}5$	| Råvare 2
$A \leq 6$	| Råvare 3
$A, B \geq 0$	| A og B må ha verdier over 0



Begrensningene sine stigningstall og brytningspunkt:

Råvare 1: $1 \cdot A + 1 \cdot B \leq 7{,}5 \Rightarrow$ Stigningstall: $-\frac{1}{1} = \underline{-1}$

Råvare 2: $0{,}25 \cdot A + 0{,}5 \cdot B \leq 2{,}5 \Rightarrow$ Stigningstall: $-\frac{0{,}25}{0{,}5} = \underline{-0{,}5}$

Råvare 3: $A \leq 6 \Rightarrow A = 6$

Mulighetsområdet er gravert ut i den grafiske fremstillingen, og ligger mellom origo, A, B, C, D

b) For å finne optimal løsning på et grafisk LP-problem trenger man en målfunksjon, som man bruker for å finne det ytterstliggende punktet (ved maksimering), som gir optimal produksjon og utnyttelsene av begrensningene

For eksempel, vil punkt A være optimal løsning dersom $-z/y > -0{,}5$, punkt B vil være optimalt dersom $-1 \leq -z/y < -0{,}5$ og punkt C optimalt dersom $-z/y < -1$.

Punkt D vil ikke være optimal dersom $z, y > 0$

Forutsetningen for positiv DB har ikke så veldig mye å si, da en kan anta at en bedrift ikke ønsker å selge et produkt med negativ DB. Dersom dette produktet har andre positive effekter for bedriften en vare inntjening, bør verdien av dette legges til modellen. Ellers er ikke det en urimelig forutsetning

c) Antar $z = 100$ og $y = 150$

Ny målfunksjon i LP-modellen fra oppg. a)

MAX: $100 \cdot A + 150 \cdot B$

Vi kan finne stigningstallet til målfunksjonen:

Målfunksjon: $-100 / 150 = \underline{-2/3} \Rightarrow$ Tegner dette inn i modellen

Som en ser grafisk (og ut ifra intuisjonen fra b)) kan en se at $-1 \leq -2/3 < -0{,}5$. Dette betyr at optimal produksjonsplan ligger i punkt B

Dette punktet har en verdi på $(5, 2{,}5)$

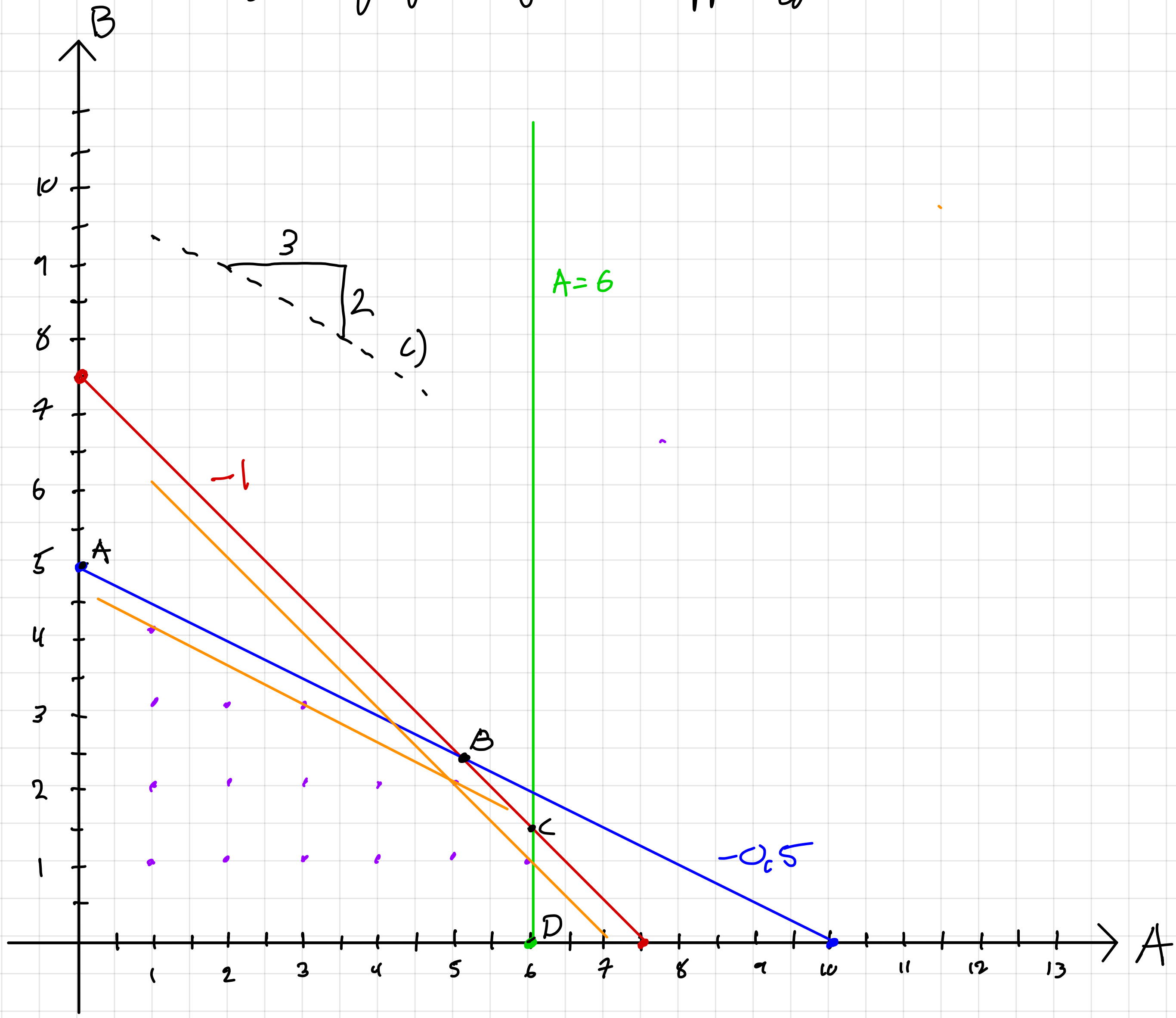
Som gir en produksjonsplan på $A = 5$
$B = 2$

Total DB: $100 \cdot 5 + 150 \cdot 2{,}5 = 500 + 375 = \underline{\underline{875}}$

d) En heltallsbegrensning vil under alle omstendigheter gi en total DB som er lavere enn løsningen uten en slik restriksjon. Dette er fordi alle gyldige løsninger med en heltallsbegrensning er også gyldig uten denne begrensningen, men ikke motsatt. Dette betyr at optimalløsningen vil være lavere enn i den presenterte modellen i a) og c)

e) Optimal målfunksjonsverdi:

Hvis vi tegner grafen fra A opp igjen:



Vi antar at de lilla prikkene er de lovlige løsningene:

Grenseverdiene for en optimal målfunksjonsverdi er de målfunksjonene som krysser mellom 2 eller flere ytterpunkt av de lilla punktene.
Vi kan tegne disse opp med en oransje linje:

Det er litt vanskelig å se, men en optimal målfunksjonsverdi må altså ha et stigningstall mellom $-1 < m < -0,5$

Oppgave 2)

Beslutningstabell:

	P=0,5 Høy	P=0,5 Lav
Produsere	80 m i)	-20 m ii)
Kjøpe	60 m iii)	30 m iv)
Ingenting	0	0

i) 200m - 120m = 80m
ii) 100m - 120m = -20m
iii) 200000 · 300 = 60m
iv) 100000 · 300 = 30m

For å finne forventet verdi:

$NPV_{Produsere} = 80 \cdot 0,5 + (-20) \cdot 0,5 = 30$

$NPV_{Kjøpe} = 60 \cdot 0,5 + 30 \cdot 0,5 = \underline{45}$ ✓

$NPV_{Ingenting} = 0 \cdot 0,5 + 0 \cdot 0,5 = 0$

Kjøpe er beste alternativ dersom man ønsker å maksimere forventet verdi.

Vi kan se bort ifra alternativ 3, "Ingenting", da det er ingen fordeler det alternativet kontra det å kjøpe fra underleverandør
De har:
- Lik risiko
- Ingenting har lavere NPV

⇒ Kan se bort ifra "Ingenting"

b) For å finne forventet nytte, kan vi lage en ny formel, en Utility formel: $U(X) = \sqrt{x+30}$. Antar at 30 er i millioner i denne funksjonen.

Produsere: $U(80) = \sqrt{80+30} = 10,49$
$U(-20) = \sqrt{-20+30} = 3,16$

Kjøpe: $U(60) = \sqrt{60+30} = 9,48$
$U(30) = \sqrt{30+30} = 7,75$

Forventet nytte:

Produsere: $10,49 \cdot 0,5 + 3,16 \cdot 0,5 = 6,78$

Kjøpe: $9,48 \cdot 0,5 + 7,75 \cdot 0,5 = 8,615$

En risikoavers beslutningstaker vil derfor også velge "Kjøpe"-alternativet, noe som tilsier at i tillegg til å ha høyest forventet NPV har dette alternativet også lavest risiko, gitt nyttefunksjonen i oppgaven.

Hvor mye er de villig til å selge rettighetene for?

Det må være et beløp som gir lik nytte som "Kjøpe"-alternativet, altså: 8,615. Vi setter derfor dette inn i nyttefunksjonen igjen og løser for X:

$$U(X) = \sqrt{X + 30} = 8{,}615$$

$$X + 30 = 8{,}615^2$$

$$X = 8{,}615^2 - 30$$

$$\underline{\underline{X = 44{,}21}}\ m$$

Dette gir en risikopremie på $45 - 44{,}21 = \underline{0{,}79\,m}$

c) Gjennomføre markedsundersøkelse:

i) Hva kan en markedsundersøkelse maksimalt være verdt?
Hvis vi antar perfekt informasjon vil beslutningstaker velge Produsere ved høy etterspørsel, og kjøpe ved lav etterspørsel. Dette gir en Verdi med perfekt informasjon på:

$$EV_{\text{perfekt info}} = 80 \cdot 0{,}5 + 30 \cdot 0{,}5 = 55$$
$$EVPI = 55 - 45 = \underline{\underline{10}}$$

EVPI blir derfor lik 10, som er maksimalbeløpet en er villig til å betale for perfekt info.

ii) Antar at faste kostnader er gitt ved FK:
Setter opp et diagram
Viktige punkt:
- Kjøpe alternativet er upåvirket av FK
- Optimal løsning kan endre seg når FK endres

Gjennomførte løsningen i Excel, kan sees på neste side:

Ferdig diagram:

	B	C	D	E	F	H	I	J	L	N	O	Q	R
2	Produsere												
3	Inntjening		DB			Kjøpe							
4	Høy	Lav	Høy	Lav	NPV	Høy	Lav	NPV	FK	Optimal Høy	Optimal Lav	EV /w PI	EVPI
5	200	100	130	30	80	60	30	45	70	130	30	80	0
6	200	100	110	10	60	60	30	45	90	110	30	70	10
7	200	100	95	-5	45	60	30	45	105	95	30	62,5	17,5
8	200	100	80	-20	30	60	30	45	120	80	30	55	10
9	200	100	60	-40	10	60	30	45	140	60	30	45	0
11	P(H) =	0,5											
12	P(L) =	0,5											

EVPI

Formelvisning:

	B	C	D	E	F	H	I	J	L	N	O	Q	R
2	Produsere												
3	Inntjening		DB			Kjøpe							
4	Høy	Lav	Høy	Lav	NPV	Høy	Lav	NPV	FK	Optimal Høy	Optimal Lav	EV /w PI	EVPI
5	200	100	=+B5-L5	=+C5-L5	=+(D5*C11)+(E5*C12)	60	30	=+(H5*C11)+(I5*C12)	70	=+MAX(D5;H5)	=+MAX(E5;I5)	=(N5*C11)+(O5*C12)	=Q5-MAX(F5;J5)
6	200	100	=+B6-L6	=+C6-L6	=+(D6*C11)+(E6*C12)	60	30	=+(H6*C11)+(I6*C12)	90	=+MAX(D6;H6)	=+MAX(E6;I6)	=(N6*C11)+(O6*C12)	=Q6-MAX(F6;J6)
7	200	100	=+B7-L7	=+C7-L7	=+(D7*C11)+(E7*C12)	60	30	=+(H7*C11)+(I7*C12)	105	=+MAX(D7;H7)	=+MAX(E7;I7)	=(N7*C11)+(O7*C12)	=Q7-MAX(F7;J7)
8	200	100	=+B8-L8	=+C8-L8	=+(D8*C11)+(E8*C12)	60	30	=+(H8*C11)+(I8*C12)	120	=+MAX(D8;H8)	=+MAX(E8;I8)	=(N8*C11)+(O8*C12)	=Q8-MAX(F8;J8)
9	200	100	=+B9-L9	=+C9-L9	=+(D9*C11)+(E9*C12)	60	30	=+(H9*C11)+(I9*C12)	140	=+MAX(D9;H9)	=+MAX(E9;I9)	=(N9*C11)+(O9*C12)	=Q9-MAX(F9;J9)
11	P(H) =	0,5											
12	P(L) =	0,5											

Verdien av FK der EVPI er høyest viste seg å være når FK = 105. For ytterverdiene var EVPI = 0, noe som er verdt å merke seg

d) Beslutningstre:

Markedsanalysen kan gi signal om "H" = høy etterspørsel og "L" = Lav etterspørsel

Ut ifra oppgaveteksten:

$$P(\text{"H"} \mid H) = 0{,}8 \qquad P(\text{"L"} \mid L) = 0{,}9 \quad \Rightarrow \quad P(\text{"L"} \mid H) = 0{,}2 \qquad P(\text{"H"} \mid L) = 0{,}1$$

For å lage et beslutningstre trenger man:

$P(H \mid \text{"H"})$, $P(L \mid \text{"L"})$, $P(H \mid \text{"L"})$, $P(L \mid \text{"H"})$.

Bruker bayes lov:

$$P(H \mid \text{"H"}) = \frac{P(\text{"H"} \mid H) \cdot P(H)}{P(\text{"H"} \mid H) \cdot P(H) + P(\text{"H"} \mid L) \cdot P(L)}$$

$$= \frac{0{,}8 \cdot 0{,}5}{0{,}8 \cdot 0{,}5 + 0{,}1 \cdot 0{,}5} = 0{,}888\ldots 9 = \underline{\frac{8}{9}}$$

Bruker samme formel og regner ut de andre betingede sannsynlighetene;

$P(H \mid \text{"L"}) = 0{,}1818 = 2/11$

$P(L \mid \text{"L"}) = 0{,}8182 = 9/11$

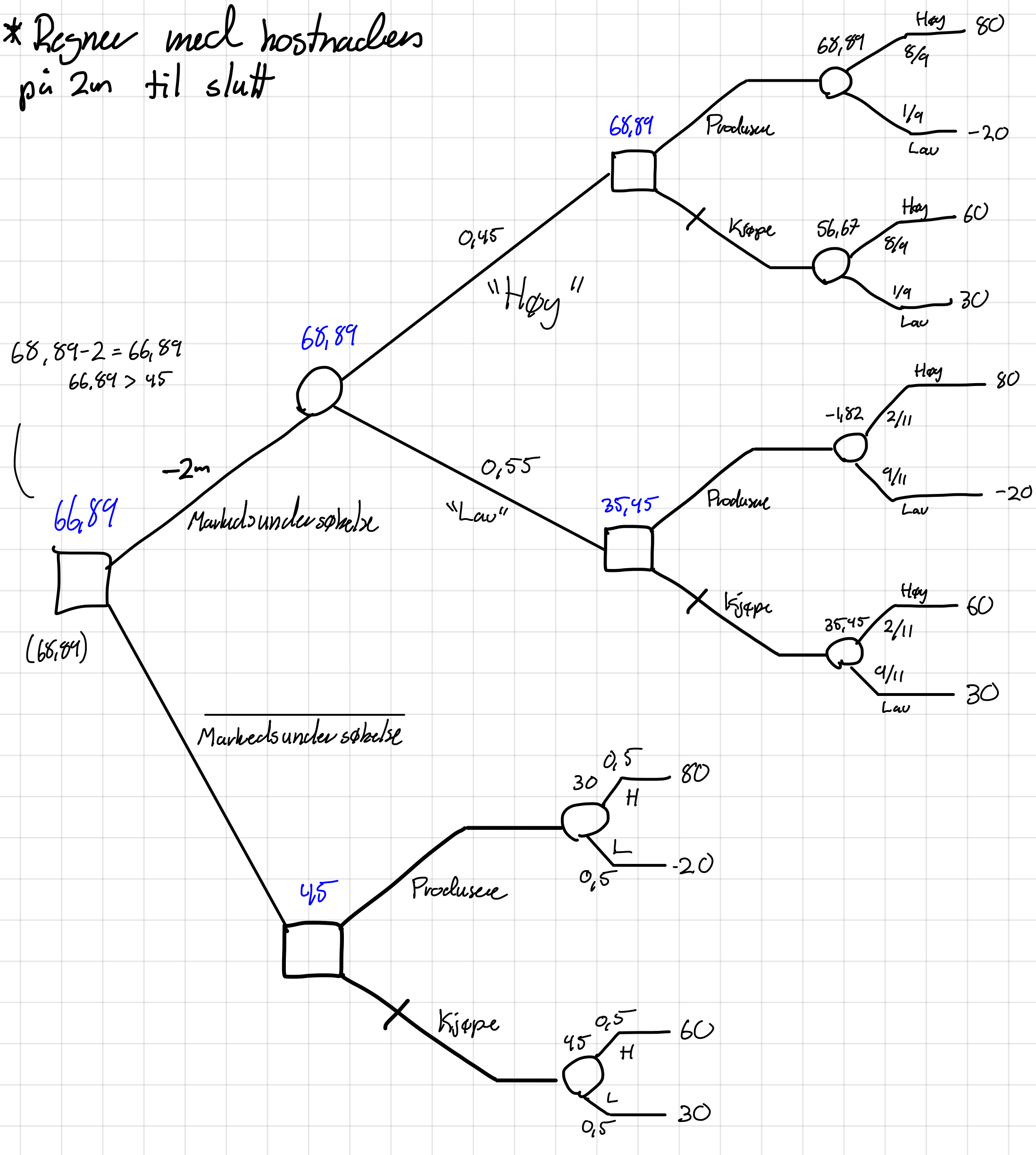
$P(L \mid \text{"H"}) = 0{,}111\ldots = 1/9$

$\Rightarrow P(\text{"H"}) = (0{,}8 \cdot 0{,}5) + (0{,}1 \cdot 0{,}5) = \underline{0{,}45}$

$P(\text{"L"}) = (0{,}2 \cdot 0{,}5) + (0{,}9 \cdot 0{,}5) = \underline{0{,}55}$

Setter opp et beslutningstre:

* Regner med kostnaden på 2m til slutt



Ut ifra beslutningstreet kan en se at å gjennomføre en markedsundersøkelse til 2m ved de oppgitte sannsynlighetene er gunstig!

Oppgave 4)

a) Hvordan fungerer modellen?

Modellen er lagt opp slik at for en gitt alder har en person en gitt sannsynlighet for å dø. Modellen genererer et tilfeldig tall mellom 0 og 1, og hvis dette genererte tallet er under den gitte sannsynligheten vil personen regnes for å være død fra og med dette året.

Videre er det flere usikre momenter i modellen. Renten på innskuddet er tatt ut ifra en normalfordeling gitt av forventningsverdi i N2 og SD i N3. Uttaket er også usikkert da det er avhengig av inflasjonen det gitte året. Inflasjonen er generert utifra en fordeling med minimumsverdi på 0,02, maksimum 0,05 og mest sannsynlig på 0,3.

Dødsåret blir presentert på slutten, sammen med formuen ved dødstidspunkt for den siste ektefellen.

b) Forventet formue ved død

Vi kan se i Figur 2 at ved 500 trekninger, så vil den forventede formuen ved dødstidspunkt ligge på kr. 1 075 417,09

For å regne ut konfidensintervallet til denne forventede verdien kan en bruke denne formelen:

$$\bar{y} \pm 1{,}96 \frac{SD}{\sqrt{n}}$$

Da finner vi et konfidensintervall som vil være på:

$$= \pm 1{,}96 \cdot \frac{SD}{\sqrt{n}}$$

$$= \pm 1{,}96 \cdot \frac{548\,229{,}36}{\sqrt{500}}$$

$$= \pm 48054{,}42$$

Noe som gir et konfidensintervall på:

$$[1070\,6116{,}5 \quad , \quad 1123471{,}512]$$

c) Sannsynligheten for at formue < 0 ved dødstidspunkt

For å regne ut denne sannsynligheten, kan vi også se på Figur 2. Øverst kan en se en rød strek nederst. Der angis hvor mange av simuleringene som havnet over og under 0.

Da kan vi se at sannsynligheten å havne på en formue under 0 i disse trekningene var 5,60%

Konfidensintervallet til denne sannsynligheten kan finnes ved formelen:

$$\bar{p} \pm 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{\bar{p} \cdot (1-\bar{p})}{n}}$$

Hvis vi setter inn det vi vet fra før, kan en se:

$$0{,}056 \pm 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}056 \cdot (1-0{,}056}{500}}$$

$$0{,}056 \pm 0{,}02015$$

$$\Rightarrow [0.03585 \;,\; 0.07615]$$

Dette er i grunn en ganske lav sannsynlighet, men samtidig er det ganske stor usikkerhet i estimatet, da det ligger på rundt ±2% i konfidensintervall

d) Redusere konfidensintervall til ± 1000

Ettersom konfidensintervallet i oppgave (c) er på ±48054,92 må man gjøre en av tre ting:

i) Redusere standardavvik
ii) Øke antall trekninger
iii) Litt av begge.

$$\Leftarrow 1{,}96 \cdot \frac{\overset{SD}{s}}{\underset{\text{Trekningen}}{\sqrt{n}}}$$

Standardavviket er vanskeligere å redusere enn det å øke antall trekninger er.

Jeg ville derfor foreslått å foreta 10 000 trekninger på simuleringen, da dette vil gi oss et sikrere estimat på formuen, da 500 er relativt lavt i simuleringer som er såpass komplekse med stort utfallsrom.

Noen ulemper ved dette vil være at en trenger en god datamaskin for å gjennomføre disse simuleringene, og kan være mindre gunstig dersom man ønsker å endre verdier, for da må man kjøre 10 000 simuleringer på nytt igjen.

e) Hvordan vil en forenkling av modellen påvirke nøyaktigheten til modellen?

En kan tenke seg frem, ut ifra det matematiske grunnlaget til modellen at alder er én sentral faktor for gjenstående dødsfall. Ettersom formuen synker for hvert år (se Figur 1) så vil en lengre levetid føre direkte til en lavere formue ved død. Dette gir mening, så lenge ikke avkastning overstiger uttaket.

I modellen er renter, inflasjon og alder de ulike momentene. Modellen handler da i grunn om rentene er høyere enn inflasjonen i tidsperioden fra pensjon til man er 77 år. Dette ender ut på formålet med modellen.

Derfor vil en viktig del av formueutregningen gå tapt ettersom alder er konstant. Som en ser i Figur 3, er det noen svingninger i de ulike simuleringene, men det ser ut som at det er alder som er den store forskjellen på hvordan formuen vil gå ut.

En kan også se at ingen av trekningene får en formue under 0 før fylt 85 år. Det er viktig å huske at dette er 5 av 500 simuleringer, men det tyder på at en alder på 77 ikke vil være representativ for formueutviklingen dersom en av personene skulle leve lenger enn 77 år.

Et alternativ er å slutte simuleringene på det 77 året, da dette vil være noe mindre unøyaktig, men samlet sett vil det påvirke nøyaktigheten til modellen ganske drastisk å sette en slik grense på alder, selv om modellen er kompleks

f) Hvis en gjennomfører flere trekninger (som var forslaget fra Oppg d)) så kan det utjevne noe av usikkerheten, da inflasjonen og renten er de resterende variablene. Det vil derimot ikke kompensere tapet av alder som en uavhengig variabel, og modellen vil i sum være mer unøyaktig enn den presentert i Figur 1, gitt at alle parameterne i den modellen gir en noenlunde god refleksjon av virkelige verden.

↳ Nei, en slik endring vil ikke ha noe signifikant påvirkning på usikkerheten til modellen

Oppgave 3) <u>Prosess AS</u>

Etterspørsel er ubegrenset.

Antar at X_A og X_B beskriver antall produserte varer av type A og B.

Derfor vil totalkostnaden av å produsere X_i produkter være gitt ved:

Produkt A: $800 \cdot x_A + 0{,}05 \cdot x_A^2$

Produkt B: $750 \cdot x_B + 0{,}025 \cdot x_B$

Dekningsbidrag per enhet er gitt ved:

$DB_A = 850 - [800 \cdot x_A + 0{,}05 \cdot x_A^2]$

$DB_B = 1000 - [750 \cdot x_B + 0{,}025 \cdot x_B^2]$

Produksjon:

	A	B	Begrensninger
Arbeidstimer	5 t	4 t	8700 t
Material 1	9 kg	6 kg	9900 kg
Material 2	3 kg	4 kg	5900 kg
Salgspris	850	1000	–

a) Setter opp en matematisk modell for dette problemet.

Variabler: $X_A \Rightarrow$ Antall enheter av produkt A produsert
$X_B \Rightarrow$ Antall enheter av produkt B produsert

Lager en målfunksjon:

$$TDB_A = (-0{,}05 \cdot x_A^2 - 800 \cdot x_A) + 850 \cdot x_A$$
$$= (-0{,}05 \cdot x_A - 800 + 850) \cdot x_A$$
$$= (-0{,}05 \cdot x_A + 50) \cdot x_A$$

$$TDB_B = (-0{,}025 \cdot x_B^2 - 750 \cdot x_B^2) + 1000 \cdot x_B$$
$$= (-0{,}025 \cdot x_B - 750 + 1000) \cdot x_B$$
$$= (-0{,}025 \cdot x_B + 250) \cdot x_B$$

MAX: $-0{,}05 \cdot x_A^2 + 50x_A - 0{,}025 \cdot x_B^2 + 250x_B$

Limit:
$$5 \cdot x_A + 4 \cdot x_B \leq 8700$$
$$9 \cdot x_A + 6 \cdot x_B \leq 9900$$
$$3 \cdot x_A + 4 \cdot x_B \leq 5900$$
$$x_A, x_B \geq 0$$

b) Optimal produksjonsplan + slakk

Ut ifra utskriften i oppgaveteksten kan en se at den optimale produksjonsplanen ligger på: $x_A = 0$
$x_B = 1475$

For å finne slakk, kan vi sette produksjonsplanen "inn" i begrensningene og se om det er noe unyttede ressurser i den optimale løsningen.

Slakk

Arbeidskraft: $8700 - [5 \cdot x_A + 4 \cdot x_B] =$

$8700 - [5 \cdot 0 + 4 \cdot 1475] =$

$8700 - [5900] = \underline{2800}$ slakk arbeidskraft

Material 1: $9900 - [9 \cdot x_A + 6 \cdot x_B] =$

$9900 - [9 \cdot 0 + 6 \cdot 1475] =$

$9900 - [8850] = \underline{1050}$ slakk Material 1

Material 2: $5900 - [3 \cdot x_A + 4 \cdot x_B] =$

$5900 - [3 \cdot 0 + 4 \cdot 1475] =$

$5900 - [5900] = \underline{0}$ Ingen slakk i Materiale 2

c) Er løsningen et globalt optimum?

I et NLP problem (som dette er) finner man ikke optimal løsning i hjørnepunkt på samme måte som i LP problemer.

Hvis optimeringsmodellen har et konvekst mulighetsområde, og gitt at målfunksjonen er konkav, sier man ofte at modellen er konveks. Dette betyr at for to gitte punkter i mulighetsområde kan man trekke en linje mellom dem og hele linjen vil være innenfor området. I en slik modell vil lokal optima være lik global optima.

For ikke-konvekse problemer kan det være flere lokale optimumspunkt, men bare ett globalt optimumspunkt.

Ut ifra utskriften fra solver kan vi se at det er funnet et lokalt optima, men vi vet ikke om dette er globalt.

Utifra målfunksjonen, har den både + og - fortegn foran sine variabler. Dette tyder på at målfunksjonen lager et ikke-konvekst område, er kravet til konveksitet ikke oppfylt. Dette betyr at det er flere lokale optima, og vi kan ikke vite om solver har funnet det globale optimumspunktet.

d) Når vi skal se på hvorvidt man ønsker å øke tilgangen på en ressurs i en av begrensningene kan vi først utelukke de ikke-bindende begrensningene, der disse har slakk og blir fra før av ikke benyttet fullt med dagens begrensninger.

Derfor kan vi se på den bindende begrensningen, som er begrensningen på material 2. Hvis vi skulle økt tilgangen på en ressurs måtte det vært denne.

Hva hadde man vært villig til å betale for ekstra ressurser av material?

Her må vi finne skyggeprisen til Material 2. Denne kan finnes ved å øke tilgangen på høyresiden av begrensningen med 1 enhet, for å så løse problemet på nytt. MEN! dette er en NLP modell, noe som gjør denne metoden ugyldig. Vi må derfor ty til andre metoder for å finne et anslag på skyggeprisen til Material 2

Vi må derfor se på sensitivitetsanalysen i oppgaveteksten for å finne Lagrange-Multiplieren, som i småinkrementer vil være lik skyggeprisen til Materiale 2

↳ Her ser vi at Lagrange Multiplieren til Material $2 = \underline{\underline{44{,}0625}}$

En kan derfor si at $\lambda M2 \approx 44{,}0625$, og si at bedriften er villig til å betale 44,0625 kr per kilo ekstra av Materiale 2 de kan kjøpe

e) Hvor høy må prisen til A være for at det skal være lønnsomt å produsere produktet?

For å finne ut av dette trenger vi redusert kostnad for Produkt A. Igjen, som i oppgave d), så er ikke denne lett å regne seg fram til slik som i en LP-modell, da dette er en NLP-modell.

Heldigvis, får vi også oppgitt Reduced Gradient i sensitivitetsrapporten. Denne vil i dette tilfellet være ekvivalent med den reduserte kostnaden til A.

Vi kan se i utskriften at Reduced Gradient = $\underline{-82,1875}$

Hvis vi da sier at redusert kostnad $\approx -82,1875$, kan vi si at dekningsbidraget til Produkt A må øke med minst 82,1875 kr for at bedriften skal tjene penger på å produsere dette produktet.

f) Marginalkostnaden av et produkt kan anskaffes ved å derivere funksjonen som representerer kostnaden til et produkt. I A sitt tilfelle er denne funksjonen gitt ved:

$$k(x_A) = 0,5x_A^2 + 800 \cdot x_A$$

Derivert:

$$k'(x_A) = 0,25 \cdot x_A + 800$$

Dette vil si at for et gitt punkt, vil kostnaden av å produsere en ekstra enhet av A være lik 800 pluss 0,25 multiplisert med hvilket nummer produktet er i produksjonsrekken. MC stiger derfor ved hver x_A.

Hvordan denne marginale kostnaden relaterer til Oppg e) er jeg litt usikker på, men med bedre tid hadde jeg nok undersøkt alternativkostnaden til Material 2 sin skyggepris og integrert dette i den marginale kostnadsmodellen. Kanskje dette hadde gitt noe samsvar med 82,1875.