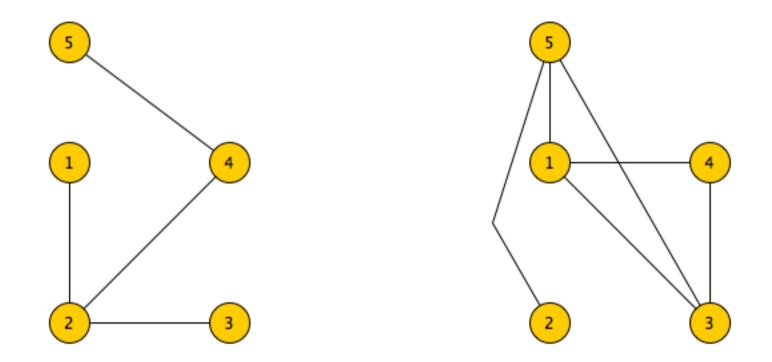
Progettazione di algoritmi

ESERCIZI 2

Esercizio 0:

Dato un grafo G il suo grafo complementare G^c è un grafo che ha gli stessi nodi di G ma in cui un arco è presente se e solo se manca a G.

Ad esempio, di seguito a sinistra un grafo G e a destra il suo complemento G^c

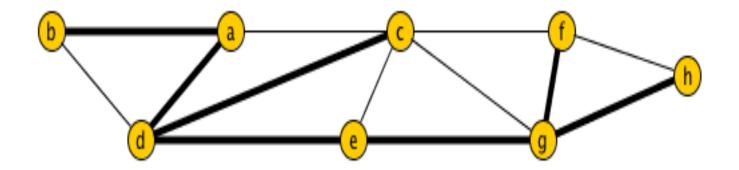


Dimostrare che, per ogni grafo G, almeno uno dei grafi G e G^c è connesso.

Esercizio 1:

Si consideri il grafo G nella figura qui sotto e l'albero T formato dagli archi marcati.

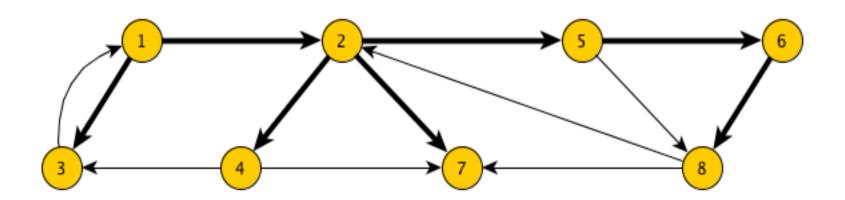
• L'albero T può essere stato prodotto da una DFS? In caso affermativo, esibire una rappresentazione di G tramite liste di adiacenza in grado di produrre T e specificare il nodo da cui parte la visita e il numero di archi all'indietro che si ottengono a seguito della visita.



Esercizio 2:

Si consideri il grafo diretto G nella figura qui sotto e l'albero (arborescenza) T formato dagli archi marcati.

• L'albero T può essere stato prodotto da una DFS? In caso affermativo, esibire una rappresentazione di G tramite liste di adiacenza in grado di produrre T e specificare il numero di archi all'indietro, in avanti e di attraversamento che si ottengono a seguito della visita.



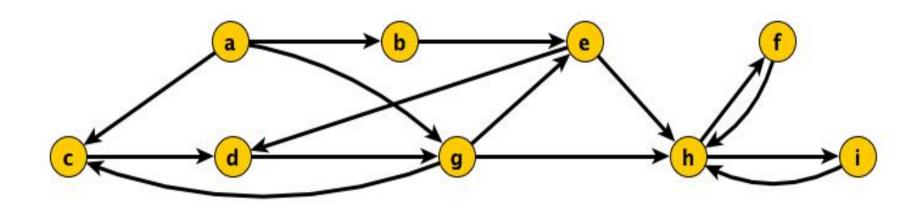
Per un grafo diretto G, diciamo che un arco da u a v è interno se u e v appartengono alla stessa componente fortemente connessa e altrimenti diciamo che è esterno. In relazione ad una qualsiasi DFS, rispondere alle seguenti domande:

- 1) un arco in avanti può essere esterno?
- 2) un arco di attraversamento può essere interno?
- 3) un arco di attraversamento può essere esterno?
- 4) un arco all'indietro può essere esterno?

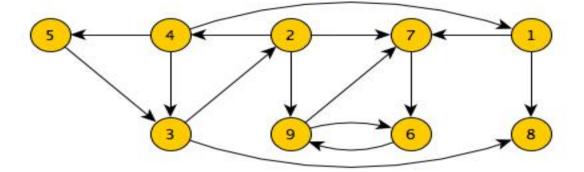
Per ognuna, in caso affermativo esibire un esempio e altrimenti dimostrare l'impossibilità.

Applicando l'algoritmo di Tarjan al grafo nella figura qui sotto, partendo dal nodo a, (si assuma che il grafo è rappresentato tramite liste di adiacenza e che i nodi compaiono in queste liste in ordine lessicografico crescente) determinare le componenti fortemente connesse numerandole nell'ordine in cui sono trovate dall'algoritmo e per ognuna indicare la sua c-root.

Cosa cambia se i nodi compaiono nelle liste di adiacenza in ordine lessicografico decrescente?



Si consideri il grafo G nella figura qui sotto



si assuma che il grafo sia rappresentato tramite liste di adiacenza e che in ciascuna lista i nodi appaiono in ordine crescente.

- a) Determinare l'ordine con cui le componenti fortemente connesse di G vengono individuate dall'algoritmo di Tarjan e per ogni componente l'ordine con cui i nodi della componente sono prodotti.
- b) Come cambia l'ordine determinato al punto a) se si assume che nelle liste di adiacenza i nodi compaiono in ordine decrescente?

Dato un albero di n nodi rappresentato tramite il vettore dei padri P (per convenzione il padre del nodo radice è il nodo stesso) e due nodi dell'albero u e v, dare lo pseudocodice di un algoritmo che in tempo O(n) calcola la distanza tra u e v nell'albero.

Ad esempio per

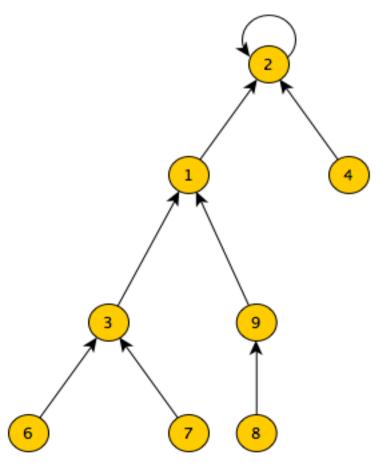
u = 9 e v = 4 deve restituire 3 mentre u = 3 e v = 6 deve restituire 1.

Ad esempio per

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 2 & 4 & 3 & 3 & 9 & 1 \end{bmatrix}$$

u = 9 e v = 4 deve restituire 3

u = 3 e v = 6 deve restituire 1.



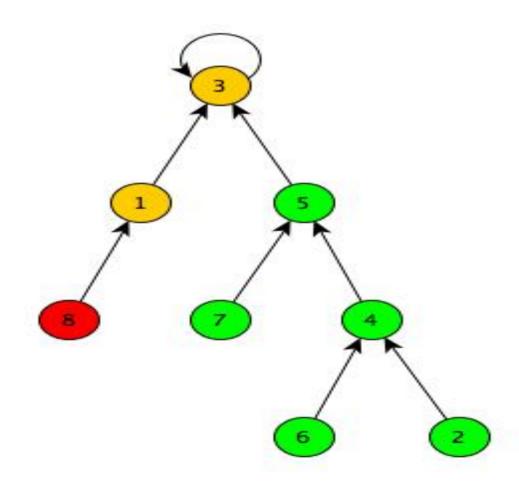
Dato un albero di n nodi rappresentato tramite il vettore dei padri P (per covenzione il padre del nodo radice è il nodo stesso) e un suo nodo x, dare lo pseudocodice di un algoritmo che in tempo O(n) produce la lista dei nodi di T presenti nel sottoalbero radicato in x.

Ad esempio per

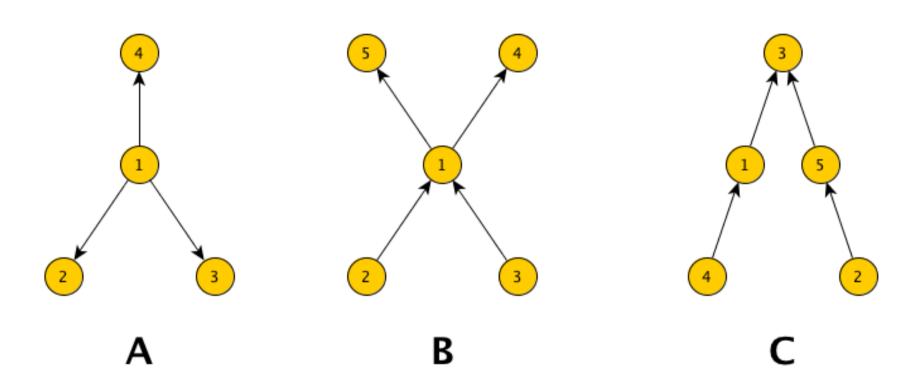
e x=5 deve restituire l'insieme $\{2,4,5,6,7\}$ mentre per x=8 deve restituire $\{8\}$

Ad esempio per

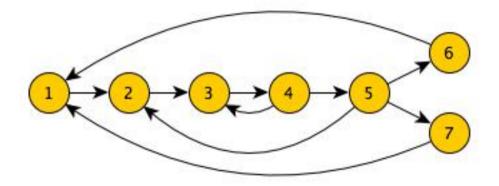
e x=5 deve restituire l'insieme $\{2,4,5,6,7\}$ mentre per x=8 deve restituire $\{8\}$



Per ognuno dei grafi diretti A, B e C qui sotto disegnati dare il numero di ordinamenti topologici possibili motivando le risposte.



Si consideri il grafo G nella figura qui sotto



- a) Determinare il numero minimo di archi che bisogna eliminare da G perché il grafo ammetta ordinamenti topologici **Motivare bene la risposta**
- b) Determinare i possibili ordinamenti topologici per il nuovo grafo ottenuto eliminando da G gli archi individuati al punto a)

Che caratteristiche deve avere un grafo connesso perché le visite DFS e BFS del grafo producano alberi di visita uguali? Motivare la risposta.