7 Logik

In diesem Modul erwirbst du Grundkenntnisse über die logischen, zahlentheoretischen, elektronischen und analytischen Begriffe, die für ein tieferes Verständnis der Datenverarbeitung unerlässlich sind. In der ersten Lerneinheit sehen wir uns ein- und zweistellige aussagenlogische Verknüpfungen und deren umgangssprachliche Formulierungen an. Die Unschärfe der Umgangssprache wird an einfachen Beispielen demonstriert. Lerneinheit 2 beschäftigt sich mit dem logischen Aufbau und der Darstellung elektrischer und elektronischer Schaltkreise sowie mit den in heutigen Computern verwendeten Elementarbausteinen. In Lerneiheit 3 lernst du den Aufbau, die Konstruktionsweisen und die Programmierung von Robotern kennen.

Die Lerneinheiten 4 bis 6, die sich mit komplexeren Bereichen der Logik beschäftigen, kannst du dir über SbX herunterladen. Die Lerneinheit 4 bietet eine Einführung in die Fuzzy-Logik. Die wesentlichen Definitionen, die wichtigsten Funktionen sowie die Operationen mit unscharfen Mengen werden anhand praktischer Beispiele erläutert. Lerneinheit 5, Symbolverarbeitung und Syntaxanalyse, analysiert die gebräuchlichsten Verfahren zur Sprachdefinition sowie Chomsky-Grammatiken und Syntaxdiagramme. Die Syntaxanalyse von Programmiersprachen sehen wir uns exemplarisch anhand endlicher Automaten an. In der Lerneinheit 6, Zahlensysteme, lernst du die allgemeinen Prinzipien, die diesen zugrunde liegen, auführlich im Dezimalsystem kennen.

Lerneinheit 1: Aussagenlogik

Lerneinheit 3: Roboter und Sensoren

Lerneinheit 2: Schaltalgebra

SbX **PDF-Downloads der Lerneiheiten 4, Fuzzy-Logik, 5, Symbolverarbeitung und Syntaxanalyse, und 6, Zahlensysteme, findest du unter der SbX-ID: 1330.**

SbX
Alle SbX-Inhalte zu dieser Lerneinheit findest du unter der ID: 1330.

Lerneinheit 1
Aussagenlogik

Im dieser Lerneinheit erfährst du Grundlegendes über ein- und zweistellige aussagenlogische Verknüpfungen und deren umgangssprachliche Formulierungen. Die Unschärfe der Umgangssprache wird an einfachen Beispielen mittels Wahrheitstafeln demonstriert, wobei du Erfahrungen im Hinblick auf die Programmentwicklung gewinnst. Anschließend werden Denksportaufgaben mittels Wahrheitstafeln gelöst.

Weiters werden die Formalisierung und Klassifizierung von Formeln, zwei wichtige Operationen mit Formeln sowie Junktoren, die zwar teilweise in der Umgangssprache keine Entsprechung haben, aber in der Schaltalgebra sowie in Programmiersprachen wichtig sind, behandelt.

Lernen

1 Aussagen
Was versteht man in der Aussagenlogik unter einer Aussage?

Beschreibung des Grundbegriffs „Aussage"

Als Aussage wollen wir in etwa das verstehen, was wir als Aussagesatz aus dem Deutschunterricht kennen. Mindestbestandteile einer Aussage sind ein Satzgegenstand (Subjekt) und eine Satzaussage.

L 1: Aussagen

„2 x 2 = 4"	wahre Aussage
„Schüler passen immer auf."	falsche Aussage
„Alle Menschen sind sterblich."	wahre Aussage
„Es ist Nacht."	wahr oder falsch
„Die Erde ist der einzige bewohnte Planet."	wahr oder falsch

Keine Aussagen sind z. B.:

„Wird es morgen regnen?"	Fragesatz (Interrogativsatz)
„Setz dich nieder!"	Befehlssatz (Imperativsatz)
„Das die der oben unten Hut"	„sinnloser" Satz, kein Inhalt erkennbar, vielleicht moderne Literatur oder Geheimsprache

In der sogenannten klassischen (zweiwertigen oder alternären) Aussagenlogik geht man vom Prinzip aus, dass eine Aussage nur entweder wahr oder falsch sein kann. Eine der beiden Möglichkeiten muss zutreffen, eine dritte Möglichkeit gibt es nicht. Dieses Prinzip nennt man das „Prinzip vom ausgeschlossenen Dritten" (tertium non datur). Wahr und Falsch werden als **Wahrheitswerte** bezeichnet. Es kommt dabei nicht darauf an, ob man den Wahrheitsgehalt einer Aussage feststellen kann.

Charakteristisch für die Aussagenlogik ist, dass elementare Aussagen, sofern sie nicht aus mehreren Aussagen zusammengesetzt sind, nicht weiter zerlegt werden können und dass der Inhalt einer Aussage nicht unmittelbar von Interesse ist. Aus letzterem Grund wollen wir nicht mehr von (inhaltlich) wahren oder falschen Sätzen sprechen, sondern wir sagen, dass den Aussagen die Wahrheitswerte Wahr bzw. Falsch zugeordnet werden. Es gibt auch Logiken, die sich nicht auf zwei Wahrheitswerte beschränken.

Wir beschäftigen uns mit den Verknüpfungen von Aussagen und den dabei entstehenden Wahrheitswerten. Dabei treffen wir folgende Vereinbarung bezüglich der Schreibweise:

1. Wir kürzen Aussagen mit den Kleinbuchstaben p, q, r, s … (eventuell indiziert p_1, p_2, p_3 etc.), den sogenannten **Aussagenvariablen,** ab, allgemeine Aussagen bzw. **Aussagenverknüpfungen** durch die Kleinbuchstaben a, b, c, d … Diese stehen ähnlich wie Variablen in der Mathematik oder in einer Programmiersprache als Platzhalter für konkrete Aussagen.
2. Die **Wahrheitswerte Wahr und Falsch** werden durch w bzw. f abgekürzt.

Aussagen (Sätze) werden in der Umgangssprache durch Bindewörter wie „und", „oder", „wenn dann" etc. miteinander auf vielfache Art zu neuen Aussagen verknüpft; ferner entsteht durch Verneinung einer Aussage wieder eine Aussage, die sogenannte negierte Aussage der ursprünglichen.

Wir werden nun die gängigsten umgangssprachlichen Verknüpfungen formal nachbilden und dadurch beschreiben, indem wir den Wahrheitswert einer zusammengesetzten Aussage in Abhängigkeit der einzelnen Teilaussagen bestimmen. Dies geschieht durch sogenannte **Wahrheitstafeln** oder **Wahrheitstabellen.**

2 Verknüpfungen

Verwendung von Junktoren in der Aussagenlogik

Verknüpfungen können sich auf einen Satz beziehen, können aber auch zwei oder mehrere Sätze miteinander verbinden. In der Logik spricht man dementsprechend von ein-, zwei- oder mehrstelligen **Junktoren** (aussagenlogischen Operatoren).

Als ersten wichtigen einstelligen Junktor zur Bildung neuer Aussagen betrachten wir die Verneinung, die wir als **Negation** bezeichnen und durch das Zeichen ¬ abkürzen.

a	(¬a)
w	f
f	w

Die Negation bildet die umgangssprachlichen Formulierungen wie „nicht", „es ist nicht der Fall, dass", die Vorsilben „un-", „in-" usw. nach, die, an geeigneter Stelle im Satz stehend, diesen verneinen.

L 2: Negation

Die Sonne geht auf.

Die Sonne geht nicht auf.	richtige Verneinung
Es ist nicht richtig, dass die Sonne aufgeht.	richtige Verneinung
Nicht die Sonne geht auf.	falsche Verneinung

Alle Menschen sind sterblich.

Es ist nicht wahr, dass alle Menschen sterblich sind.	richtige Verneinung
Nicht alle Menschen sind sterblich.	richtige Verneinung
Alle Menschen sind nicht sterblich.	falsche Verneinung

Verneint wird also die Satzaussage.

Beispiele für Verneinung durch Vorsilben:

schön – unschön
stabil – instabil
legal – illegal
mobil – immobil
rational – irrational
normal – abnormal
symmetrisch – asymmetrisch
Harmonie – Disharmonie

In der Aussagenlogik gilt das **Prinzip der doppelten Negation,** das heißt, eine doppelte Negation liefert den ursprünglichen Wahrheitswert. Im österreichischen Dialekt ist dies nicht der Fall, eine doppelte Verneinung bedeutet hier eine Verstärkung der Verneinung.

L 3: Doppelte Negation

Ich habe kein Geld nicht.
Umgangssprachlich bedeutet das, dass man tatsächlich kein Geld hat, aussagenlogisch heißt das, dass man sehr wohl Geld besitzt!

Nicht einmal ignorieren.
Umgangssprachlich bedeutet das, dass man überhaupt keine Beachtung schenkt, aussagenlogisch, dass man sehr wohl beachtet!

Als erste zweistellige aussagenlogische Verknüpfung betrachten wir die **Konjunktion,** die dem umgangssprachlichen „und" entspricht und mit dem Zeichen ∧ dargestellt wird.

- Ich gehe in die Schule und lerne dort viel.
- Der Tag beginnt und die Sonne geht auf.

Der Wahrheitsgehalt einer durch „und" entstandenen Aussage wird durch folgende Tabelle festgelegt:

a	b	(a ∧ b)
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

Die zweite Zeile dieser Tabelle kann wie folgt gelesen werden: Wenn die Aussage a wahr ist und die Aussage b falsch ist, dann ist die Aussage (a ∧ b) falsch.

Beachte

Eine **Konjunktion** (a ∧ b) ist nur dann wahr, wenn beide Teilaussagen wahr sind.

Eine andere Sprechweise für „und" ist **„sowohl – als auch".** Dabei können auch Aussagen, die inhaltlich nichts miteinander zu tun haben, miteinander verknüpft werden, weil es nur auf die Wahrheitswerte der einzelnen Teilaussagen ankommt: In dieser Hinsicht besteht ein Unterschied zur umgangssprachlichen Verwendung von „und".

Ein weiterer Unterschied zur Verwendung in der Umgangssprache ist, dass „und" gelegentlich auch eine zeitliche Reihenfolge ausdrückt. Die beiden Aussagen „Frau B heiratete und bekam ein Kind." bzw. „Frau B. bekam ein Kind und heiratete." werden nicht als gleichwertig empfunden. Eine mögliche zeitliche Komponente geht jedenfalls in der Aussagenlogik verloren.

„Und" wird in der Umgangssprache auch manchmal als mathematisches „plus" verwendet, wie etwa in dem Satz „drei und vier ist sieben".

Eine weitere aussagenlogische Verknüpfung, das einschließende „oder", wird durch das Zeichen ∨ dargestellt und als **Disjunktion** bezeichnet – z. B. „Ich gehe in die Schule oder ins Kino.".

a	b	(a ∨ b)
w	w	w
w	f	w
f	w	w
f	f	f

Beachte

Eine **Disjunktion** (a ∨ b) ist nur dann falsch, wenn beide Teilaussagen falsch sind.

Das ausschließende „oder", das in der Umgangssprache durch „entweder – oder" seinen Ausdruck findet, wird als **Alternative** oder **Antivalenz** bezeichnet und manchmal mit $\underline{\vee}$ abgekürzt.

Beispiel: Entweder sehe ich fern oder ich lese ein Buch.

a	b	(a $\underline{\vee}$ b)
w	w	f
w	f	w
f	w	w
f	f	f

Beachte

Eine **Antivalenz** ist nur dann wahr, wenn beide Teilaussagen verschiedene Wahrheitswerte haben.

Die nächste Verknüpfung, die aussagenlogisch vielleicht wichtigste, soll das umgangssprachliche „wenn – dann", „aus – folgt" „impliziert" nachbilden. Sie wird als **Implikation** oder **Subjunktion** bezeichnet, durch das Zeichen → dargestellt und durch folgende Wahrheitstafel definiert:

a	b	(a → b)
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

Beispiele:

- Wenn ich fleißig lerne, dann bekomme ich gute Noten.
- Wenn ein Dreieck rechtwinkelig ist, dann gilt der pythagoräische Lehrsatz.

Die Aussage, die auf der linken Seite von → steht, nennt man **Prämisse, Voraussetzung, Vorderglied der Implikation** oder **Antecedens.** Die Aussage, die auf der rechten Seite von → steht, heißt **Konklusion, Hinterglied der Implikation, Schluss** oder **Folgerung.**

Beachte

Eine **Implikation** ist nur dann falsch, wenn die Prämisse wahr und die Konklusion falsch ist.

Lesarten für Aussagen der Form (a → b):

- „Wenn a dann b"
- „Wenn a so b"
- „Aus a folgt b"
- „a impliziert b"

Die Implikation weicht am deutlichsten von der umgangssprachlichen Verwendung ab. Wenn eine Prämisse falsch ist, verwendet die Umgangssprache oft den Konjunktiv.

Beispiele:

- „Wenn ein Viereck rund wäre, wäre 4 kleiner als 2."
- „Wenn die Sonne ein Mond wäre, wäre die Erde bewohnt."
- „Wenn meine Großmutter Radln hätt', wär' sie ein Omnibus."

Diese Sätze sind im Sinn der Aussagenlogik wahr, obwohl sie in der Umgangssprache eher sinnlos erscheinen. Das liegt daran, dass umgangssprachlich eine Kausalbeziehung wie bei einem Naturgesetz bzw. eine inhaltliche Verbindung zwischen Prämisse und Konklusion erwartet wird. In der Aussagenlogik sind jedoch die Inhalte der Aussagen unwesentlich!

Die letzte zweiwertige aussagenlogische Verknüpfung, die wir nun behandeln, ist die **Äquivalenz**, dargestellt durch das Zeichen ↔. Die entsprechenden umgangssprachlichen Formulierungen sind „genau dann, wenn" oder „dann, und nur dann, wenn". Der Wahrheitsverlauf wird durch folgende Tabelle festgelegt:

a	b	(a ↔ b)
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	w

7 Logik

Beachte

Eine **Äquivalenz** ist nur dann wahr, wenn beide Teilaussagen den gleichen Wahrheitswert besitzen.

Deshalb wird die Äquivalenz auch logische Gleichheit genannt. Sie besitzt die gleichen Eigenschaften wie die Gleichheit in der Mathematik.

Beispiele:

- Eine Zahl ist genau dann gerade, wenn sie durch zwei teilbar ist.
- Ein Dreieck ist dann und nur dann gleichseitig, wenn es drei gleiche Winkel (je 60°) hat (genau dann, wenn es drei gleiche Seiten hat).

Man kann sich leicht überzeugen, dass man durch Negation einer Äquivalenz eine Antivalenz erhält. Deshalb wird die Antivalenz manchmal durch einen durchgestrichenen Doppelpfeil $\nleftrightarrow$ dargestellt.

In vielen Programmiersprachen gibt es die meisten dieser aussagenlogischen Verknüpfungen, allerdings wird dafür oft das englische Bindewort verwendet, z. B. in Pascal und Fortran

- **NOT** für die Negation,
- **AND** für die Konjunktion,
- **OR** für die Disjunktion und
- **XOR** für die Antivalenz.

Dadurch ist es möglich, kompliziertere Bedingungen in Abfragen in der jeweiligen Programmiersprache kompakt und einfach zu formulieren. In Assemblersprachen kommen die logischen Operationen als Bitoperationen vor. In C/C++ gibt es diese Operationen sowohl als logische Verknüpfungen als auch als Bitoperationen. Dabei ist zu beachten, dass bei den logischen Operationen der Wert 0 dem Wahrheitswert „Falsch" entspricht und alle Werte ungleich 0 dem Wahrheitswert „Wahr" entsprechen.

Operation	logischer Operator	bitweiser Operator
Negation	!	~
Konjunktion	&&	&
Disjunktion	||	|
Antivalenz (XOR)	gibt es (noch) nicht	^

3 Aussagenlogische Ausdrücke (Formeln)

Bildung komplexer Aussagen

Mit den oben definierten Junktoren lassen sich aus gegebenen Aussagen kompliziertere Aussagen aufbauen: z. B. $(p \rightarrow (q \vee r))$

Für diese zusammengesetzte Aussage lässt sich durch **Aufstellen von Wahrheitstafeln** der Wahrheitswert der Gesamtaussage in Abhängigkeit der Wahrheitswerte der einzelnen Teilaussagen berechnen.

L 4: Wahrheitstafeln

Beim Aufstellen von Wahrheitstafeln gehen wir systematisch vor: Wir zählen zuerst die in der Aussage auftretenden verschiedenen Aussagenvariablen. Es sind dies die drei Variablen p, q und r. Da jeder der drei Variablen, unabhängig von den anderen, der Wahrheitswert w bzw. f zugeordnet werden kann, gibt es $2 \times 2 \times 2 = 2^3 = 8$ verschiedene Zuordnungsmöglichkeiten. Diese können z. B. folgendermaßen erzeugt werden:

- Die auftretenden Variablen werden in alphabetischer Reihenfolge angeschrieben.
- Man schreibt unter der am weitesten rechts stehenden Variablen ein w; in den links davon stehenden Spalten wird die Anzahl der w jeweils verdoppelt:

p	q	r	(p → (q ∨ r))
w	w	w	
w	w		
w			
w			

- Nun schreiben wir in der ersten Spalte so viele f darunter, wie es w gibt. In den folgenden Spalten werden abwechselnd Gruppen von jeweils so vielen f und w geschrieben, wie w darüber stehen, bis das Ende der ersten Spalte erreicht ist.

p	q	r	(p → (q ∨ r))
w	w	w	
w	w	f	
w	f	w	
w	f	f	
f	w	w	
f	w	f	
f	f	w	
f	f	f	

- Jetzt kann mit der Auswertung der Formel begonnen werden: Wie in der Mathematik werden die Ausdrücke von „innen nach außen" ausgewertet, d. h., zuerst wird der Ausdruck (q ∨ r) berechnet, wobei das Resultat unter den jeweiligen Junktor geschrieben wird.
- Dabei ist der „innerste" Ausdruck bei Vorhandensein aller Klammern der Ausdruck links neben der ersten schließenden Klammer.

p	q	r	(p → (q ∨ r))
w	w	w	w
w	w	f	w
w	f	w	w
w	f	f	f
f	w	w	w
f	w	f	w
f	f	w	w
f	f	f	f

- Nun werden die der Variablen p zugeordneten Wahrheitswerte mit dem Resultat von (q ∨ r) durch die Implikation verknüpft. Das Ergebnis der Auswertung wird durch Einrahmen und Schattieren der entsprechenden Spalte hervorgehoben.

p	q	r	(p → (q ∨ r))	
w	w	w	w	w
w	w	f	w	w
w	f	w	w	w
w	f	f	f	f
f	w	w	w	w
f	w	f	w	w
f	f	w	w	w
f	f	f	w	f

Beispiel: $(\neg ((p \leftrightarrow (q \wedge r)) \rightarrow (s \vee (\neg q))))$

Wir werten sofort die beiden innersten Klammerausdrücke aus.

p	q	r	s	$(\neg((p \leftrightarrow (q \wedge r)) \rightarrow (s \vee (\neg q))))$	
w	w	w	w	w	f
w	w	w	f	w	f
w	w	f	w	f	f
w	w	f	f	f	f
w	f	w	w	f	w
w	f	w	f	f	w
w	f	f	w	f	w
w	f	f	f	f	w
f	w	w	w	w	f
f	w	w	f	w	f
f	w	f	w	f	f
f	w	f	f	f	f
f	f	w	w	f	w
f	f	w	f	f	w
f	f	f	w	f	w
f	f	f	f	f	w

Nun werden die Ausdrücke mit der **Äquivalenz** bzw. mit der **Disjunktion** ausgewertet.

p	q	r	s	$(\neg((p \leftrightarrow (q \wedge r)) \rightarrow (s \vee (\neg q))))$			
w	w	w	w	w	w	w	f
w	w	w	f	w	w	f	f
w	w	f	w	f	f	w	f
w	w	f	f	f	f	f	f
w	f	w	w	f	f	w	w
w	f	w	f	f	f	w	w
w	f	f	w	f	f	w	w
w	f	f	f	f	f	w	w
f	w	w	w	f	w	w	f
f	w	w	f	f	w	f	f
f	w	f	w	w	f	w	f
f	w	f	f	w	f	f	f
f	f	w	w	w	f	w	w
f	f	w	f	w	f	w	w
f	f	f	w	w	f	w	w
f	f	f	f	w	f	w	w

Danach wird die **Implikation** berechnet:

p	q	r	s	$(\neg((p \leftrightarrow (q \wedge r)) \rightarrow (s \vee (\neg q))))$				
w	w	w	w	w	w	w	w	f
w	w	w	f	w	w	f	f	f
w	w	f	w	f	f	w	w	f
w	w	f	f	f	f	w	f	f
w	f	w	w	f	f	w	w	w
w	f	w	f	f	f	w	w	w
w	f	f	w	f	f	w	w	w
w	f	f	f	f	f	w	w	w
f	w	w	w	f	w	w	w	f
f	w	w	f	f	w	w	f	f
f	w	f	w	w	f	w	w	f
f	w	f	f	w	f	f	f	f
f	f	w	w	w	f	w	w	w
f	f	w	f	w	f	w	w	w
f	f	f	w	w	f	w	w	w
f	f	f	f	w	f	w	w	w

Das Resultat steht unter der links stehenden Negation. In Hinkunft wollen wir einen aussagenlogischen Ausdruck sofort in einer Tabelle auswerten und geben dabei die Reihenfolge der Auswertung als in Klammern gesetzte Nummer unter der entsprechenden Spalte an.

p	q	r	s	(¬((p ↔ (q ∧ r)) → (s ∨ (¬q))))					
w	w	w	w	f	w	w	w	w	f
w	w	w	f	w	w	w	f	f	f
w	w	f	w	f	f	f	w	w	f
w	w	f	f	f	f	f	w	f	f
w	f	w	w	f	f	f	w	w	w
w	f	w	f	f	f	f	w	w	w
w	f	f	w	f	f	f	w	w	w
w	f	f	f	f	f	f	w	w	w
f	w	w	w	f	f	w	w	w	f
f	w	w	f	f	f	w	w	f	f
f	w	f	w	f	w	f	w	w	f
f	w	f	f	w	w	f	f	f	f
f	f	w	w	f	w	f	w	w	w
f	f	w	f	f	w	f	w	w	w
f	f	f	w	f	w	f	w	w	w
f	f	f	f	f	w	f	w	w	w
				(6)	(3)	(1)	(5)	(4)	(2)

Da die Ausdrücke (q ∧ r) und (¬q) unabhängig voneinander berechnet werden können, können die Schritte (1) und (2) miteinander vertauscht werden. Aus demselben Grund kann auch (3) mit (4) vertauscht werden. Alle übrigen Schritte dürfen jedoch nicht vertauscht werden!

Das nächste Beispiel zeigt die Ungenauigkeit der Umgangssprache:

L 5: Umgangssprache

Aus einem Autoprospekt: „Unsere Modelle sind mit Servolenkung und Differentialsperre oder Vierradantrieb lieferbar." Wie ist dieser Satz zu verstehen?

Wir versuchen eine formale Übersetzung und definieren:
p … „Unsere Modelle sind mit Servolenkung lieferbar."
q … „Unsere Modelle sind mit Differentialsperre lieferbar."
r … „Unsere Modelle sind mit Vierradantrieb lieferbar."

Damit erhalten wir vorderhand den Ausdruck p ∧ q ∨ r. Aus der Umgangssprache ist nicht erkennbar, ob (p ∧ q) ∨ r oder p ∧ (q ∨ r) gemeint ist. Aus der Wahrheitstabelle sehen wir, dass die beiden Übersetzungen verschiedene Sachverhalte beschreiben:

p	q	r	p ∧ (q ∨ r)	
w	w	w	w	w
w	w	f	w	w
w	f	w	w	w
w	f	f	f	f
f	w	w	f	w
f	w	f	f	w
f	f	w	f	w
f	f	f	f	f
			(2)	(1)

p	q	r	(p ∧ q) ∨ r	
w	w	w	w	w
w	w	f	w	w
w	f	w	f	w
w	f	f	f	f
f	w	w	f	w
f	w	f	f	f
f	f	w	f	w
f	f	f	f	f
			(1)	(2)

Wir erkennen, dass die Resultatsspalten in der 5. und 7. Zeile unterschiedliche Ergebnisse aufweisen. In beiden Fällen sind die Modelle mit

1. Servolenkung, Differentialsperre und Vierradantrieb,
2. Servolenkung und Differentialsperre,
3. Servolenkung und Vierradantrieb

ausgestattet.

7 Logik

Darüber hinaus trifft im zweiten Fall der Satz auch dann zu, wenn das Auto

4. mit Differentialsperre und Vierradantrieb,
5. nur mit Vierradantrieb

zur Verfügung steht.

Um Klarheit in der Umgangssprache zu erzielen, können wir einerseits die jeweils zutreffenden Möglichkeiten einzeln aufzählen oder die Sätze anders formulieren: „Unsere Modelle sind mit Servolenkung und zusätzlich mit Differentialsperre oder Vierradantrieb lieferbar." bzw. „Unsere Modelle sind mit Vierradantrieb oder sowohl mit Servolenkung als auch Differentialsperre lieferbar."

4 Anwendung von Wahrheitstafeln

Lösen von Denksportaufgaben mithilfe von Wahrheitstabellen

L 6: Wer ist der Täter?

Kommissar Klug hat drei Tatverdächtige, die wir kurz P, Q und R nennen wollen. Er weiß folgende Tatbestände:

1. Ist R schuldig, so ist P Mittäter.
2. Wenn sich Q oder R als Täter herausstellen, so ist P unschuldig.
3. Ist P oder R unschuldig, dann muss Q ein Täter bzw. Mittäter sein.

Wer ist schuldig, wer nicht?

Wir formalisieren zuerst die drei Teilaussagen:

p … P ist ein (Mit-)Täter. (P ist schuldig.)
q … Q ist ein Täter.
r … R ist ein Täter.

Damit erhalten wir folgende formale Übersetzungen:

1. $r \rightarrow p$
2. $q \vee r \rightarrow \neg p$
3. $\neg p \vee \neg r \rightarrow q$

Wir haben nun eine formale Beschreibung der drei Aussagen erhalten. Den Fall zu lösen heißt nun, diejenigen Wahrheitswerte für p, q und r zu finden, für die die Konjunktion der drei Aussagen wahr ist.

Lösung mithilfe einer Wahrheitstafel:

p	q	r	(r → p)	∧	(q ∨	r →	¬ p)	∧	(¬ p	∨	¬ r	→ q)
w	w	w	w	f	w	f	f	f	f	f	f	w
w	w	f	w	f	w	f	f	f	f	w	w	w
w	f	w	w	f	w	f	f	f	f	f	f	w
w	f	f	w	w	f	w	f	f	f	w	w	f
f	w	w	f	f	w	w	w	f	w	w	f	w
f	w	f	w	w	w	w	w	w	w	w	w	w
f	f	w	f	f	w	w	w	f	w	w	f	f
f	f	f	w	w	f	w	w	f	w	w	w	f
			(1)	(9)	(2)	(4)	(3)	(10)	(5)	(7)	(6)	(8)

Wir sehen, dass die Gesamtaussage nur dann wahr ist, wenn p den Wahrheitswert f, q den Wahrheitswert w und r den Wahrheitswert f annimmt. Somit hat Kommissar Klug den Fall gelöst: P und R sind unschuldig und Q ist der Täter. Dieser Fall hat sich für Kommissar Klug als sehr leicht erwiesen, da er ihn eindeutig lösen konnte. Wäre in der Resultatsspalte mehr als ein w gestanden, wären zu wenige Angaben zur eindeutigen Lösung vorhanden gewesen. Stünde in der Resultatsspalte kein w, so wären die Angaben widersprüchlich. Stünde nur in der letzten Zeile ein w, so wäre der Täter in einem anderen Personenkreis zu suchen.

L 7: Lügengeschichte

In folgender Lügengeschichte soll herausgefunden werden, wer lügt und wer die Wahrheit spricht. Gegeben seien folgende Aussagen:

1. Anton sagt: „Wenn Christian lügt, dann lügt auch Berta."
2. Berta sagt: „Anton und Christian sagen die Wahrheit."
3. Christian sagt: „Anton lügt."

Wir wählen zuerst eine geeignete Formalisierung:

a … Anton sagt die Wahrheit.
b … Berta sagt die Wahrheit.
c … Christian sagt die Wahrheit.

Versuchen wir, eine geeignete Übersetzung für die erste Aussage zu finden. Sie besagt, wenn Anton die Wahrheit sagt, dann gilt das, was er behauptet (also $a \rightarrow (\neg c \rightarrow \neg b)$). Da man aber nicht sicher sein kann, dass Anton die Wahrheit sagt, muss auch der Fall betrachtet werden, dass er lügt. In diesem Fall gilt klarerweise die Negation seiner Behauptung (also $\neg a \rightarrow \neg(\neg c \rightarrow \neg b)$). Die richtige Formalisierung besteht daher in der Konjunktion beider Möglichkeiten:

1. $(a \rightarrow (\neg c \rightarrow \neg b)) \wedge (\neg a \rightarrow \neg(\neg c \rightarrow \neg b))$

Mittels **Wahrheitstabelle** kann überprüft werden, dass die einfachere Formel

$a \leftrightarrow (\neg c \rightarrow \neg b)$

den gleichen Sachverhalt beschreibt. Anton sagt daher genau dann die Wahrheit, wenn das zutrifft, was er behauptet.

Analoges gilt für die beiden anderen Aussagen:

2. $b \leftrightarrow (a \wedge c)$
3. $c \leftrightarrow \neg a$

Um nun festzustellen, wer die Wahrheit spricht und wer lügt, müssen wir diejenigen Wahrheitsannahmen finden, für die die Konjunktion der drei Aussagen wahr ist.

a	b	c	(a ↔	¬ c	→	¬ b)	∧	(b ↔	a ∧ c)	∧	(c ↔	¬ a)
w	w	w	w	f	w	f	w	w	w	f	f	f
w	w	f	f	w	f	f	f	f	f	f	w	f
w	f	w	w	f	w	w	f	f	w	f	f	f
w	f	f	w	w	w	w	w	w	f	w	w	f
f	w	w	f	f	w	f	f	f	f	f	w	w
f	w	f	w	w	f	f	f	f	f	f	f	w
f	f	w	f	f	w	w	f	w	f	f	w	w
f	f	f	f	w	w	w	f	w	f	f	f	w
			(4)	(1)	(3)	(2)	(7)	(6)	(5)	(10)	(9)	(8)

Wir ersehen aus der Wahrheitstafel, dass Anton die Wahrheit sagt, Berta und Christian lügen. Auch bei diesem Beispiel war die Lösung wieder eindeutig.

Generell gibt es drei Möglichkeiten für die Ergebnisspalte:

- Die angenehme, bei der es nur ein einziges Ergebnis gibt.
- Den Fall, das es mehrere w in der Ergebnisspalte gibt. Dann werden zusätzliche Angaben benötigt, um eine eindeutige Lösung zu finden.
- Den unangenehmen Fall, dass kein w in der Ergebnisspalte vorkommt. Dann sind die Angaben widersprüchlich und man muss von vorne beginnen.

5 Wohlgeformte Formeln

Formalisierung von Formeln

Sinngemäß gilt Punkt 2 auch für Junktoren, die nicht in dieser Liste vorkommen und die wir zum Teil erst später kennenlernen werden.

Wir können eine genauere Beschreibung der **formalen aussagenlogischen Ausdrücke** – wir nennen sie auch **wohlgeformte Formeln** – angeben:

1. Die Aussagenvariablen p, q, r … werden eventuell mit einem Index versehen, die immer wahre Aussage w und die immer falsche Aussage f sind aussagenlogische Ausdrücke (Formeln).
2. Bevor wir Wohlformungsregeln angeben können, benötigen wir noch den zulässigen Zeichenvorrat, auch Alphabet genannt:
   - Wir verwenden p, q, r, … manchmal auch mit einem sogenannten Unterscheidungsindex p_1, p_2, p_3 als Variablen,
   - die Zeichen $\neg \wedge \vee \rightarrow \leftrightarrow$ für Junktoren und
   - ( ) als Hilfszeichen.

Die **Konstruktionsvorschrift** lautet nun:

1. Aussagenvariablen p, q, r … eventuell mit einem Unterscheidungsindex versehen, sowie die immer wahre Aussage w und die immer falsche Aussage f sind aussagenlogische Ausdrücke (Formeln).
2. Sind a und b aussagenlogische Formeln, so sind (a), $(\neg a)$, $(a \wedge b)$, $(a \vee b)$, $(a \rightarrow b)$ und $(a \leftrightarrow b)$ aussagenlogische Formeln.

Formeln, die nach obigen Regeln gebildet werden, heißen **wohlgeformte Formeln** der Aussagenlogik.

Klammerersparnisregeln

Um aussagenlogische Formeln eindeutig mit möglichst wenig Klammern schreiben zu können, treffen wir folgende Vereinbarung **(Klammerersparnisregeln, Prioritäten, Bindungsstärken von Junktoren, Vorrangregeln):**

1. **Außenklammern dürfen weggelassen werden.**
2. **Ähnlich wie in der Arithmetik („Punktrechnung vor Strichrechnung") legen wir eine von links nach rechts abnehmende Reihenfolge für die Auswertung der Formeln fest (Prioritäten):**
   - $\neg$
   - $\wedge$
   - $\vee$
   - $\rightarrow$
   - $\leftrightarrow$

   Fehlen Klammern, so bindet z. B.: $\neg$ stärker als $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ und $\leftrightarrow$ (wird als Erstes ausgewertet) bzw. $\vee$ bindet stärker als $\rightarrow$ und $\leftrightarrow$.
3. **Für gleiche Junktoren gelten folgende Regeln:**
   - Einstellige werden von rechts nach links,
   - zweistellige werden von links nach rechts ausgewertet.
4. **Aus Gründen der leichteren Lesbarkeit können und sollen Klammersymbole trotzdem gesetzt werden. Das bedeutet, dass diese Regeln Kannregeln aber keine Mussregeln sind.**

Beachte

Die Formel $((((\neg p) \wedge q) \rightarrow (r \vee s)) \leftrightarrow ((r \wedge ((p \vee q) \vee r)) \rightarrow s))$ kann, ohne an Eindeutigkeit zu verlieren, auch folgendermaßen geschrieben werden:

$$\neg p \wedge q \rightarrow r \vee s \leftrightarrow r \wedge (p \vee q \vee r) \rightarrow s$$

Einteilung und Eigenschaften aussagenlogischer Formeln

Tautologien und aussagenlogisch indeterminierte Sätze werden auch **erfüllbare Aussagensagen** genannt. In der Aussagenlogik ist man u. a. an der Charakterisierung und Erzeugung von Tautologien interessiert.

Befassen wir uns nun mit speziellen Eigenschaften aussagenlogischer Ausdrücke. Dazu benötigen wir zuerst einige Begriffe:

Eine aussagenlogische Formel a heißt

1. eine **TAUTOLOGIE** (ein immer wahrer Satz), wenn, unabhängig von den Wahrheitswerten der in a vorkommenden Aussagenvariablen, a den Wahrheitswert Wahr hat. Zum Beispiel: $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$
2. eine **KONTRADIKTION** (ein immer falscher Satz), wenn, unabhängig von den Wahrheitswerten der in a vorkommenden Aussagenvariablen, a den Wahrheitswert Falsch hat. Zum Beispiel: $(p \leftrightarrow \neg p) \vee (r \wedge \neg r)$

3. **aussagenlogisch indeterminiert,** wenn a für mindestens eine Belegung der in a vorkommenden Aussagenvariablen den Wahrheitswert Wahr und für mindestens eine andere Belegung den Wahrheitswert Falsch annimmt. Zum Beispiel: $p \to q \vee r$

6 Einsetzung und Ersetzung

Operationen, die gewisse Formeleigenschaften unverändert lassen

Die Einsetzung

Wir bezeichnen mit a[p/b] diejenige Formel, die aus a dadurch entsteht, dass für **jedes** Vorkommen der **Aussagenvariablen p** in a die Formel **b eingesetzt** wird.

Zum Beispiel: Sei a: $p \to q \to p$ und b: $(r \vee s)$, dann ist a[p/b]: $(r \vee s) \to q \to (r \vee s)$

Nun gilt folgende Eigenschaft **(Einsetzungstheorem):** Ist a eine Tautologie bzw. eine Kontradiktion, dann auch a[p/b]. Das heißt, durch Einsetzen entstehen aus Tautologien wieder Tautologien und aus Kontradiktionen wieder Kontradiktionen. Da die Formel a: $p \vee \neg p$ eine Tautologie ist, ist auch die aus a durch Einsetzung entstehende Formel a[p/(r → s)]: $(r \to s) \vee \neg(r \to s)$ eine Tautologie.

Die Ersetzung

Um die Ersetzung erklären zu können, benötigen wir den Begriff **Teilformel (Unterformel):**

a) Jede Formel a ist Teilformel von sich selbst.
b) Ist a eine zusammengesetzte Formel, etwa $\neg b$, $b \vee c$, $b \to c$ usw., dann sind auch b und c Teilformeln von a.
c) Jede Teilformel einer Teilformel von a ist ebenfalls eine Teilformel von a.

L 8: Teilformeln

Sei a: $p \to ((\neg q \vee r) \to s)$

Teilformeln von a:	$p \to ((\neg q \vee r) \to s)$	lt. a)
	p, $(\neg q \vee r) \to s$	lt. b)
	$\neg q \vee r$, s	lt. c)
	$\neg q$, r	lt. c)
	q	lt. c)

Wir bezeichnen nun mit a[[b/c]] eine derjenigen Formeln, die aus a dadurch entsteht, dass **beliebig viele** (keines, eines … alle) Vorkommnisse der Teilformel b von a durch die Formel c **ersetzt** werden.

L 9: Ersetzung

Sei a: $(p \to (q \vee \neg r)) \leftrightarrow (\neg(q \vee \neg r) \to s)$
b: $q \vee \neg r$
c: $p \to q$

dann bezeichnet a[[b/c]] eine der folgenden Formeln:

$(p \to (q \vee \neg r)) \leftrightarrow (\neg(q \vee \neg r) \to s)$	keine Ersetzung
$(p \to (p \to q)) \leftrightarrow (\neg(q \vee \neg r) \to s)$	eine Ersetzung
$(p \to (q \vee \neg r)) \leftrightarrow (\neg(p \to q) \to s)$	eine Ersetzung
$(p \to (p \to q)) \leftrightarrow (\neg(p \to q) \to s)$	alle Teilformeln wurden ersetzt

Das bedeutet, dass eine Ersetzung mehrdeutig ist.

Beachte

Wir nennen zwei Formeln a und b **äquivalent** oder **logisch gleich,** wenn die Formel $a \leftrightarrow b$ eine Tautologie ist. Nun gilt folgende Eigenschaft **(Ersetzungstheorem):**
Wenn $b \leftrightarrow c$ ist, dann ist $a \leftrightarrow$ a[[b/c]].

Das bedeutet, wenn zwei Formeln b und c äquivalent sind, dann lässt sich die Teilformel b von a durch die Formel c an beliebig vielen Stellen ersetzen, ohne dass sich dabei der Wahrheitswert der Formel a ändert. Die Ersetzung finden wir in der Mathematik zum Beispiel beim Lösen von Gleichungssystemen („Gleiches darf durch Gleiches ersetzt werden").

L 10: Lügengeschichte

Lösen der obigen Lügengeschichte durch Ersetzen.

Wir erinnern uns an die drei Aussagen:
1. $a \leftrightarrow (\neg c \rightarrow \neg b)$
2. $b \leftrightarrow (a \wedge c)$
3. $c \leftrightarrow \neg a$

Da wegen 3. die Formel c mit $\neg a$ äquivalent ist, kann c in der Aussage 2. durch $\neg a$ ersetzt werden, wobei die Aussage $b \leftrightarrow (a \wedge \neg a)$ entsteht. Da $(a \wedge \neg a)$ eine Kontradiktion ist, muss auch b der Wahrheitswert f zugeordnet werden. Verwenden wir dieses Ergebnis in der Aussage 1., so wird daraus, falls b durch den äquivalenten Ausdruck $(a \wedge \neg a)$ ersetzt wird:
$a \leftrightarrow (\neg c \rightarrow \neg(a \wedge \neg a))$.

Da $(a \wedge \neg a)$ eine Kontradiktion ist, ist deren Negation eine Tautologie. Diese Tautologie tritt als Konklusion einer Implikation auf, womit, laut Wahrheitstafel der Implikation, auch diese wahr wird und somit auch a. Ist aber a wahr, so muss wegen Punkt 3. die Formel c den Wahrheitswert Falsch annehmen, womit das Rätsel gelöst ist. Diese Methode kann bei geschickter Vorgangsweise und bei eindeutiger Lösung rascher zu Ergebnissen führen, allerdings benötigt man eine gewisse Erfahrung beim Ersetzen.

Wichtige Äquivalenzen

Viele der angeführten Äquivalenzen haben traditionelle Namen:

$a \leftrightarrow a$	Reflexivität der Äquivalenz
$\neg\neg a \leftrightarrow a$	Gesetz der doppelten Negation
$a \vee a \leftrightarrow a$	Idempotenz der Disjunktion
$a \vee w \leftrightarrow w$	
$a \vee f \leftrightarrow a$	
$a \vee b \leftrightarrow b \vee a$	Kommutativität der Disjunktion
$a \vee (b \vee c) \leftrightarrow (a \vee b) \vee c$	Assoziativität der Disjunktion
$a \vee (b \wedge c) \leftrightarrow (a \vee b) \wedge (a \vee c)$	Distributivität der Disjunktion bezüglich der Konjunktion
$a \vee (a \wedge b) \leftrightarrow a$	Verschmelzungs-(Absorptions-)Gesetz
$\neg(a \vee b) \leftrightarrow (\neg a \wedge \neg b)$	Gesetz von DE MORGAN
$a \vee b \leftrightarrow \neg a \rightarrow b$	
$a \wedge a \leftrightarrow a$	Idempotenz der Konjunktion
$a \wedge w \leftrightarrow a$	
$a \wedge f \leftrightarrow f$	
$a \wedge b \leftrightarrow b \wedge a$	Kommutivität der Konjunktion
$a \wedge (b \wedge c) \leftrightarrow (a \wedge b) \wedge c$	Assoziativität der Konjunktion
$a \wedge (b \vee c) \leftrightarrow (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$	Distributivität der Konjunktion bezüglich der Disjunktion
$a \wedge (a \vee b) \leftrightarrow a$	Verschmelzungs-(Absorptions-)Gesetz
$\neg(a \wedge b) \leftrightarrow (\neg a \vee \neg b)$	Gesetz von DE MORGAN
$a \wedge b \leftrightarrow \neg(a \rightarrow \neg b)$	
$a \rightarrow b \leftrightarrow \neg a \vee b$	
$a \rightarrow b \leftrightarrow \neg(a \wedge \neg b)$	
$a \rightarrow (b \rightarrow c) \leftrightarrow b \rightarrow (a \rightarrow c)$	Vertauschungsgesetz für Prämissen
$(a \leftrightarrow b) \leftrightarrow (b \leftrightarrow a)$	Kommutativität der Äquivalenz
$(a \leftrightarrow (b \leftrightarrow c)) \leftrightarrow ((a \leftrightarrow b) \leftrightarrow c)$	Assoziativität der Äquivalenz
$(a \leftrightarrow b) \leftrightarrow (a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b)$	
$(a \leftrightarrow b) \leftrightarrow (\neg a \vee b) \wedge (a \vee \neg b)$	
$(a \leftrightarrow b) \leftrightarrow (a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow a)$	

Wie wir aus obiger Tabelle erkennen können, ergeben sich weitere **Folgerungen aus dem Ersetzungstheorem:**

- Ein Junktor lässt sich durch andere ersetzen.
- Wegen der Assoziativität von $\wedge$, $\vee$, $\leftrightarrow$ können wir Klammern sparen.
- Wegen der Kommutativität von $\wedge$, $\vee$, $\leftrightarrow$ können die Formeln beliebig vertauscht werden.

Diese Möglichkeiten werden wir, ohne weiters darauf hinzuweisen, ausgiebig gebrauchen.

Beispiele:

- $a \to b$ durch $\neg a \vee b$
- $a \wedge b$ durch $\neg(a \to \neg b)$ oder durch $\neg(\neg a \vee \neg b)$
- Statt $((b \wedge d) \wedge c) \wedge a$ schreiben wir $a \wedge b \wedge c \wedge d$

Wichtige Tautologien

Manche der angeführten Tautologien haben traditionelle Namen:

$a \to a$	
$a \vee \neg a$	Gesetz vom ausgeschlossenen Dritten (tertium non datur)
$a \to \neg\neg a$	
$\neg\neg a \to a$	
$a \wedge \neg a \to b$	e falso quodlibet
$a \wedge b \to a$	
$a \wedge b \to b$	
$a \to a \vee b$	Verdünnungsgesetz
$a \wedge (a \to b) \to b$	modus ponens (Abtrennungsgesetz)
$(a \to b) \wedge \neg b \to \neg a$	modus tollens (Widerlegungsgesetz)
$(a \to b) \to (\neg b \to \neg a)$	schwache Kontraposition
$(a \to b) \wedge (b \to c) \to (a \to c)$	Transitivitätsgesetz
$a \to (b \to a)$	verum e quodlibet
$(a \to (b \to c)) \to ((a \to b) \to (a \to c))$ . . .	Transitivität der Implikation
$(\neg a \to \neg b) \to (b \to a)$	starke Kontraposition

7 Weitere Junktoren und Junktorenbasen

Umgang mit logischen Operatoren

Wir wenden uns zunächst der Frage zu, wie viele ein-, zwei- und n-stellige Junktoren es gibt. Es gibt **vier einstellige Junktoren:**

p	e_0	e_1	e_2	e_3
w	w	w	f	f
f	w	f	w	f

Von diesen vier Junktoren haben wir einen, nämlich die Negation e_2, explizit kennengelernt. e_0 bzw. e_3 liefern die Tautologie bzw. die Kontradiktion. e_1 ist die identische Abbildung, sie lässt die Wahrheitswerte unverändert.

Es gibt s**echzehn zweistellige Junktoren:**

p	q	j_0	j_1	j_2	j_3	j_4	j_5	j_6	j_7	j_8	j_9	j_a	j_b	j_c	j_d	j_e	j_f
w	w	w	w	w	w	w	w	w	w	f	f	f	f	f	f	f	f
w	f	w	w	w	w	f	f	f	f	w	w	w	w	f	f	f	f
f	w	w	w	f	f	w	w	f	f	w	w	f	f	w	w	f	f
f	f	w	f	w	f	w	f	w	f	w	f	w	f	w	f	w	f

Von diesen sechzehn haben wir folgende schon kennengelernt: j_1 ist die Disjunktion, j_4 die Implikation, j_6 die Äquivalenz, j_7 die Konjunktion und j_9 die Antivalenz. j_0 bzw. j_f liefern die Tautologie bzw. die Kontradiktion. Einer der Gründe, warum die anderen Junktoren, bis auf einige wenige, keinen eigenen Namen haben, ist folgender: Jeder dieser sechzehn Junktoren lässt sich durch eine geeignete Kombination anderer Junktoren äquivalent ersetzen. Eine Menge von Junktoren, mit deren Hilfe sich alle anderen Junktoren äquivalent darstellen lassen, heißt **Junktorenbasis.**

Beachte

Wichtige Junktorenbasen sind:

a) $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ in der Aussagenlogik
b) $\neg, \wedge, \vee$ in der Schaltalgebra
c) $\neg, \wedge$
d) $\neg, \vee$
e) $\neg, \rightarrow$ in der Beweistheorie

Junktorenbasen, die bei Streichung eines Junktors keine Junktorenbasen mehr sind, heißen **Minimalbasen.** c), d) und e) sind Minimalbasen, a) und b) nicht.

Darüber hinaus bildet jeder der beiden Junktoren $\downarrow$ bzw. $\uparrow$, die wir in obiger Tabelle mit j_e bzw. j_8 bezeichnet haben, für sich allein eine Junktorenbasis:

p	q	$p \downarrow q$
w	w	f
w	f	f
f	w	f
f	f	w

p	q	$p \uparrow p$
w	w	f
w	f	w
f	w	w
f	f	w

Diese beiden Junktoren spielen in der Schaltalgebra eine ganz wichtige Rolle. Der Junktor $\downarrow$ heißt **NOR (Nicod'sche Funktion** oder **Peirce-Operator)** und wird umgangssprachlich durch „weder – noch" ausgedrückt. Der Junktor $\uparrow$ heißt **NAND (Sheffer-Strich** oder **Exklusion;** er wird auch häufig durch das Zeichen / dargestellt). Die folgenden Wahrheitstafeln zeigen, dass jeder dieser Junktoren eine Minimalbasis bildet.

q	$p \downarrow q$
w	f
f	w

q	$p \uparrow p$
w	f
f	w

Dadurch lässt sich jeweils die **Negation** darstellen.

p	q	$(p \downarrow q)$	$\downarrow$	$(p \downarrow q)$
w	w	f	w	f
w	f	f	w	f
f	w	f	w	f
f	f	w	f	w

p	q	$(p \uparrow p)$	$\uparrow$	$(p \uparrow p)$
w	w	f	w	f
w	f	w	f	w
f	w	w	f	w
f	f	w	f	w

Hiermit können Disjunktion bzw. Konjunktion dargestellt werden. Im Allgemeinen gibt es $2^{(2n)}$ verschiedene n-stellige Junktoren. n-stellige Junktoren sind solche, die n Aussagevariablen miteinander verknüpfen. Jeder davon lässt sich durch eine der bekannten Junktorenbasen äquivalent darstellen. Ausgehend von einer aussagenlogischen Formel a können wir diese in eine äquivalente Formel b umwandeln, in der nur spezielle Junktoren vorkommen. Bei dieser Umwandlung können wir u. a. die Äquivalenzen verwenden, die wir bereits kennengelernt haben. Diesen Vorgang nennt man auch **Umformen** oder **Umrechnen.**

L 11: Äquivalenzen

Der Ausdruck $p \rightarrow q$ ist in einen äquivalenten Ausdruck umzuwandeln, in dem nur der Junktor $\uparrow$ vorkommt.

$p \rightarrow q \leftrightarrow \neg(p \wedge \neg q)$ siehe wichtige Äquivalenzen
$p \rightarrow q \leftrightarrow \neg(p \wedge (q \uparrow q))$ Negationsbildung
$p \rightarrow q \leftrightarrow p \uparrow (q \uparrow q)$ Definition von NAND

Da, wie wir sehen werden, den aussagenlogischen Junktoren in der Schaltalgebra Schaltungen entsprechen, die aber oft nicht auf einfache Art verwirklicht werden können, ist es wichtig zu wissen, wie sich gewisse Junktoren durch andere darstellen lassen und dass dies überhaupt möglich ist.

? Meine Fragen:

1. Warum ist die Kenntnis von Junktoren so wichtig?
2. Was ermöglichen Wahrheitstafeln?
3. Was ermöglicht das Ersetzungstheorem?

! Deine Antworten:

1. Sie werden in Programmiersprachen ebenfalls so verwendet und außerdem bei elektronischen Schaltungen.
2. Man kann damit den Wahrheitsverlauf von sehr komplexen Aussagen berechnen, ohne nachdenken zu müssen (also beispielsweise durch ein Computerprogramm).
3. Es erlaubt, eine Aussage in einer anderen durch eine logisch gleichwertige zu ersetzen, ohne dass sich dadurch der Wahrheitswert ändert.

Üben

SbX ID: 1331

Übungsbeispiele

Ü 1:

Gegeben seien folgende Aussagen:

i) Es regnet.
ii) Die Straße ist nass.
iii) Der Sprühwagen ist gefahren.

Wähle geeignete Aussagenvariablen für die drei Aussagen und formalisiere folgende zusammengesetze Aussagen:

a) Wenn es regnet, dann ist die Straße nass.
b) Wenn die Straße nicht nass ist, dann regnet es nicht.
c) Wenn die Straße nass ist, dann regnet es oder der Sprühwagen ist gefahren.
d) Es ist nicht wahr, dass die Straße nicht nass ist, wenn es regnet und der Sprühwagen gefahren ist.
e) Die Straße ist genau dann nass, wenn es regnet oder der Sprühwagen gefahren ist.
f) Entweder der Sprühwagen ist gefahren oder es regnet, wenn die Straße nass ist.

Ü 2:

Übersetze folgende Sätze in die formalisierte Sprache der Aussagenlogik:

„Wenn du böse bist, werde ich dir weder den ersten noch den zweiten Wunsch erfüllen."

„Wenn du nicht fleißig trainierst, wirst du weder die nächste noch die folgenden Partien gewinnen."

Bilde eine umgangssprachlich Verneinung dieser beiden Aussagen, die du auch vor einem Deutschprofessor vertreten könntest, formalisiere diese und überprüfe die Richtigkeit deiner Verneinung durch Erstellen der entsprechenden Wahrheitstafeln.

Ü 3:

Erstelle Wahrheitstafeln für folgende Formeln:

a) $((p \vee \neg q) \wedge r) \rightarrow (r \rightarrow r \leftrightarrow \neg q)$
b) $(p \rightarrow q) \vee \neg(q \rightarrow r)$
c) $(\neg p \leftrightarrow q) \vee (r \rightarrow \neg p)$
d) $(p \rightarrow \neg r) \rightarrow ((q \wedge s) \leftrightarrow \neg p)$
e) $(p \wedge q \wedge r) \leftrightarrow (s \vee \neg q \vee r)$
f) $(\neg(p \wedge q) \wedge r) \leftrightarrow ((s \rightarrow \neg q) \vee r)$
g) $(r \rightarrow \neg(s \vee p)) \wedge \neg((q \leftrightarrow \neg r) \vee \neg p)$

Ü 4:

Ein weiterer Kriminalfall von Kommissar Klug:

Der Kommissar steht unmittelbar vor der Aufklärung eines komplizierten Falles. Er weiß, dass die Täter unter den Personen P, Q, R und S zu suchen sind und dass mindestens zwei an dem Verbrechen beteiligt waren. Könnte er die Schuld von Q beweisen, wüsste er, dass auch P und S mitbeteiligt waren. Aus der Beteiligung von R könnte er dagegen auf die Unschuld von S schließen. „In Ordnung", murmelt er leise vor sich hin, „der Fall ist noch nicht vollständig geklärt, aber eine Verhaftung kann ich trotzdem bereits jetzt vornehmen."

Wer wird verhaftet?

Ü 5:

Gegeben sind folgende drei Aussagen:

- Albert sagt: „Birgit spricht die Wahrheit oder Curt lügt."
- Birgit sagt: „Wenn Curt die Wahrheit sagt, dann lügt Albert."
- Curt sagt: „Albert lügt und Birgit sagt die Wahrheit."

Gib eine geeignete Formalisierung der drei Aussagen an und stelle fest, wer lügt und wer die-Wahrheit sagt.

Ü 6:

Gegeben sind folgende drei Aussagen:

- Rudi sagt: „Es kann nicht sein, dass weder Susi noch Toni die Wahrheit sagt."
- Susi sagt: „Toni lügt, wenn Rudi die Wahrheit sagt."
- Toni sagt: „Dass beide anderen lügen, schließe ich aus."

Wer sagt die Wahrheit, wer lügt?

Ü 7:

Gib alle Unterformeln folgender Formeln an:

a) $(q \rightarrow (q \vee \neg p)) \leftrightarrow (\neg(\neg r \wedge q) \vee s)$
b) $\neg(\neg\neg(p \rightarrow \neg q) \wedge s) \wedge \neg(r \vee \neg\neg p)$
c) $(s \wedge \neg(q \rightarrow r)) \vee (q \rightarrow r) \leftrightarrow (p \rightarrow (q \wedge r))$

Ü 8:

Gegeben sind folgende Formeln:

a) a: $(q \rightarrow q \vee \neg p) \rightarrow (\neg(\neg r \wedge q) \vee s) \leftrightarrow q \vee \neg p$
   b: $q \vee \neg p$
   c: $(r \rightarrow s) \leftrightarrow \neg q$
b) a: $(s \wedge \neg(q \rightarrow r)) \vee q \wedge r \leftrightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))$
   b: $q \rightarrow r$
   c: $q \vee \neg r$

Gib alle Formeln an, die durch a[[b/c]] angesprochen werden können. Achte auf Prioritäten!

Ü 9:

Gegeben ist die folgende aussagenlogische Formel a

$\neg p \vee q \wedge \neg r \rightarrow s \leftrightarrow p \wedge \neg q \rightarrow s \vee r$

a) Bestimme alle Unterformeln der Formel a
b) Bestimme die Ergebnisse von a[[p/($\neg s \rightarrow q \vee \neg r$)]]
c) Bestimme das Ergebnis von a[r/($p \leftrightarrow s$)]

Ü 10:

Gib für die Konjunktion, die Disjunktion, die Implikation, die Antivalenz und die Äquivalenz zweier Aussagen äquivalente Formeln an, in denen

a) der Peirce-Operator,
b) der Sheffer-Operator

jeweils als einziger Junktor vorkommt.

SbX

Zusätzliche Übungsbeispiele zur Aussagenlogik findest du unter der ID: 1331.

Ü 11:

Gib eine zur Formel $\neg(\neg\neg(p \leftrightarrow \neg q) \wedge s) \rightarrow \neg(r \vee \neg p)$ äquivalente Formel an, in der als einziger Junktor der

a) Peirce-Operator,
b) Sheffer-Operator

vorkommt (schwer).

Sichern

Projektarbeit „Lügengeschichten"

Versuche herauszufinden, wie Lügengeschichten nach dem Muster der Beispiele, die wir gemacht haben, aufgebaut sein müssen, um eine eindeutige Lösung zu erhalten.

Anleitung: Formuliere beliebig die Aussagen für die ersten beiden Aussagen und versuche dann, durch Probieren die dritte Aussage zu finden.

Besondere Herausforderung: Dasselbe für vier Personen!

Wissen

Kontrollfragen und -aufgaben

1. Was ist eine Aussage?
2. Nenne einprägsame Merkregeln für den Wahrheitsverlauf der
   - Negation,
   - Disjunktion,
   - Konjunktion,
   - Implikation,
   - Äquivalenz,
   - Antivalenz.
3. Worin liegt der Vorteil von Wahrheitstafeln?
4. Wozu dienen Klammernersparnisregeln?
5. Was sind Formeln, die keine Tautologien sind? Was ist die Negation einer Tautologie?
6. Welche Eigenschaften hat die Einsetzung?
7. Welche Unterschiede bestehen zwischen Ein- und Ersetzung?
8. Wo sind NAND und NOR wichtig?
9. Warum ist die Negation der einzige wichtige einstellige Junktor?
10. Warum werden in der Umgangssprache höchstens die vier zweistelligen Junktoren verwendet, die wir besprochen haben?
11. Was ist eine Junktorenbasis, was eine Minimalbasis?
12. Nenne die Vorrangregeln, die wir besprochen haben!

SbX

Alle SbX-Inhalte zu dieser Lerneinheit findest du unter der ID: 1332.

Lerneinheit 2

Schaltalgebra

Im dieser Lerneinheit erfährst du Grundlegendes über die elementaren Bausteine eines elektronischen Systems, die sogenannten Halbleiterbausteine, auch Gatter genannt. Des Weiteren werden wir den engen Zusammenhang zwischen Aussagenlogik und elektronischen Schaltungen kennenlernen und sehen, dass binäre Rechenoperationen durch logische Verknüpfungen realisiert werden.

Zuerst werden elektronische Schaltungen vorgestellt und anhand eines Addierwerkes realisieren wir eine praktische Anwendung. Dann sehen wir uns die Funktionsweise von Flip-Flops genauer an und wir beschäftigen uns mit weiteren Schaltungen sowie der Steuerung in Form von Zählern.

Lernen

1 Schalter und Schaltertypen

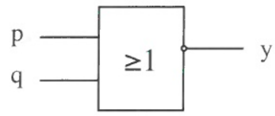
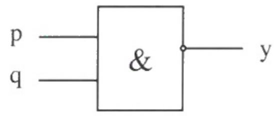
Funktionsweise von elektronischen Schaltungen

Wir wollen bei unseren Überlegungen über den **Aufbau und die Wirkungsweise von Schaltnetzen** die physikalisch bedingten Schalt- und Verzögerungszeiten der Einfachheit halber außer Betracht lassen.

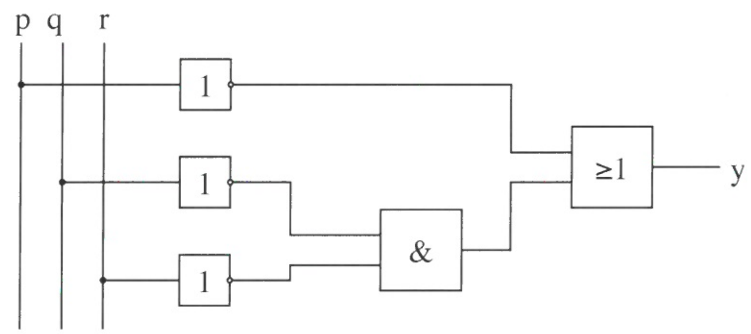
In der Elektronik werden gewisse Schaltungstypen als Halbleiterbausteine realisiert, die zum Aufbau von Schaltnetzen verwendet werden. Unter einem **Schaltnetz** verstehen wir eine Anordnung, in der mehrere Eingänge, sogenannte **Schaltvariablen,** so miteinander verknüpft werden, dass die Werte an den Ausgängen des Netzes von den Werten der Eingangsvariablen abhängig sind. Die jeweils auftretenden Werte nehmen dabei zwei verschiedene Spannungszustände ein.

In grafischen Darstellungen werden für einfache Halbleiterkomponenten **(Gatter)** oftmals folgende **Normsymbole** (DIN, ÖNORM) verwendet:

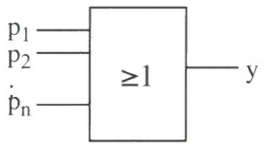
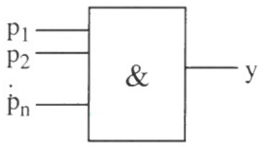
Bezeichnung	Symbol	Logische Funktion
Inverter	p — [1] —o y	**y ↔ ¬ p**
OR-Gatter	p, q — [≥1] — y	**y ↔ p ∨ q**
AND-Gatter	p, q — [&] — y	**y ↔ p ∧ q**
XOR-Gatter	p, q — [=1] — y	**y ↔ ¬ (p ↔ q)**
XNOR-Gatter	p, q — [=1] —o y	**y ↔ (p ↔ q)**

Bezeichnung	Symbol	Logische Funktion
NOR-Gatter		**$y \leftrightarrow \neg (p \lor q)$**
NAND-Gatter		**$y \leftrightarrow \neg (p \land q)$**

In der folgenden Abbildung siehst du eine beispielhafte **Schaltung für $\neg p \lor (\neg q \land \neg r)$:**

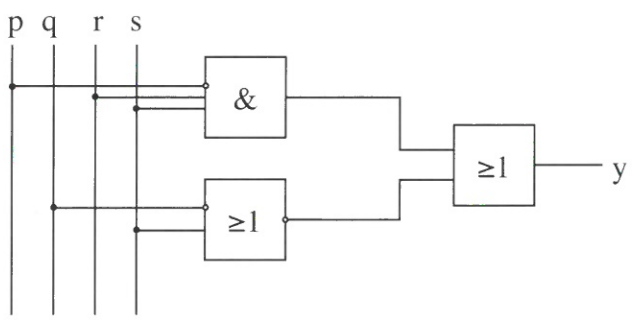


Da die ausschließliche Verwendung der oben angegebenen Gatter die Darstellung umfangreicherer Schaltnetze unübersichtlich machen würde, werden außerdem sogenannte **Schaltkurzzeichen** festgelegt:

Schaltkurzzeichen	Schaltfunktion
	$y \leftrightarrow p_1 \lor p_2 \lor \ldots \lor p_n$
	$y \leftrightarrow p_1 \land p_2 \land \ldots \land p_n$

Die Verwendung eines kleinen offenen Kreises in einem Schaltsymbol deutet die Umkehrung des entsprechenden Wertes der Variablen an. Diese Konvention wurde bereits bei den Symbolen für das NOR-, NAND- und XNOR-Gatter sowie beim Symbol für den Inverter angewendet.

In der Abbildung siehst du eine beispielhafte **Schaltung für $(\neg p \land r \land s) \lor \neg(\neg q \lor s)$:**



Mit der **Aussagenlogik** haben wir uns in Lerneinheit 1 intensiv auseinandergesetzt .

Die folgende Tabelle beschreibt den **Zusammenhang zwischen Aussagenlogik und elektronischen Schaltkreisen:**

Aussagenlogik	Elektronischer Schaltkreis
Aussagenvariable	Leitung
Aussagenlogischer Ausdruck	Gatter bzw. Schaltnetz
wahr (w)	Spannungszustand
falsch (f)	Spannungszustand
Wahrheitsverlauf	Schaltfunktion
Negation	Inverter
Konjunktion	AND-Gatter
Disjunktion	OR-Gatter
Antivalenz	XOR-Gatter
Äquivalenz	XNOR-Gatter
Peirce-Operator	NOR-Gatter
Sheffer-Operator	NAND-Gatter

Da **Peirce-** bzw. **Sheffer-Operator** in der Aussagenlogik jeweils für sich eine Junktorenbasis bilden, haben auch NOR- und NAND-Gatter die Eigenschaft, dass sich sämtliche Schaltfunktionen durch ausschließliche Verwendung einer dieser beiden Gatter aufbauen lassen.

Wir entwickeln eine Schaltung, die es uns ermöglicht, zwei Dualziffern p und q zu addieren. Eine solche Schaltung wird als **Halbaddierwerk** bezeichnet. Wir rufen uns die **Rechenregeln für die Addition im Dualsystem** in Erinnerung:

- 0 + 0 = 0
- 0 + L = L
- L + 0 = L
- L + L = L0

Bei der **Addition L + L** entsteht ein Übertrag auf die nächste Stelle, der von der Summenziffer getrennt angegeben werden soll. Betrachten wir die Summenziffer s und den Übertrag u getrennt, so ergeben sich folgende **Wahrheitstabellen:**

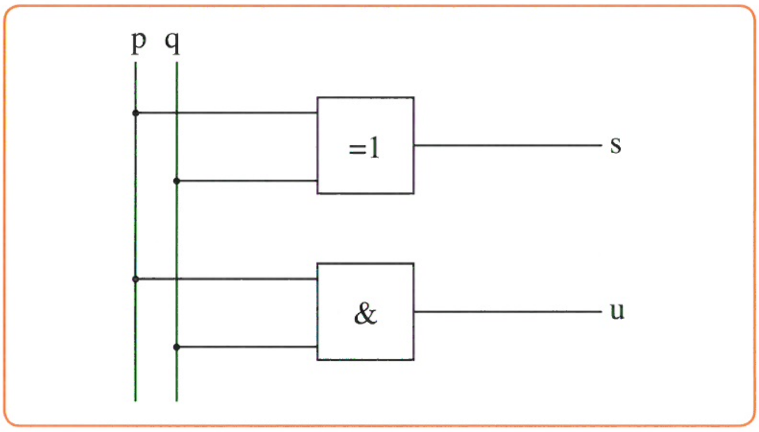
p	q	Summenziffer s
L	L	0
L	0	L
0	L	L
0	0	0

p	q	Übertrag u
L	L	L
L	0	0
0	L	0
0	0	0

Daraus ergeben sich für **Summe und Übertrag** folgende **Schaltfunktionen:**

$$\mathbf{s \leftrightarrow \neg(p \leftrightarrow q)} \qquad\qquad \mathbf{y \leftrightarrow p \land q}$$

Aus diesen können wir unmittelbar eine **Schaltung** konstruieren:

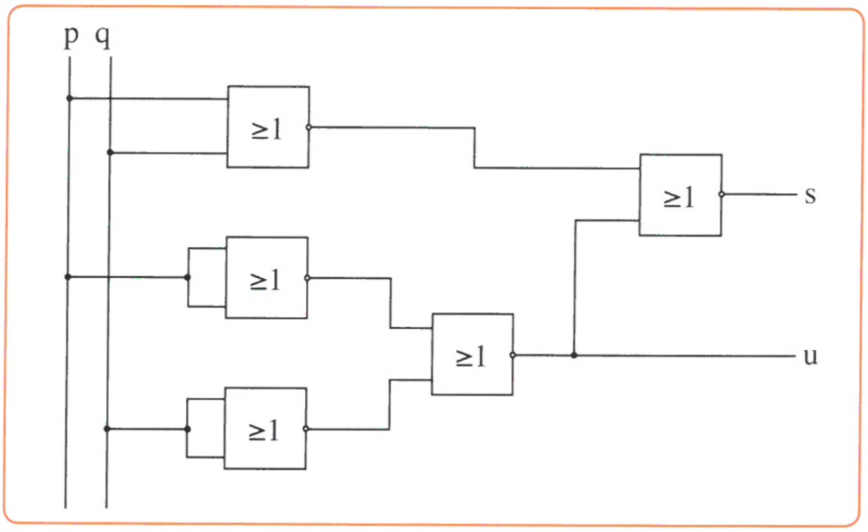


Beachte

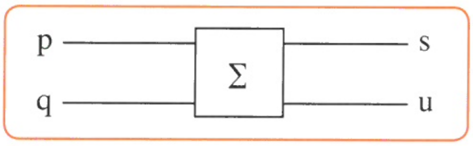
Verwenden wir zur Realisierung dieser Schaltung ausschließlich **NOR-Gatter,** so müssen wir zuerst für s und u Umformungen vornehmen:

$s \leftrightarrow \neg (p \leftrightarrow q)$	
$\leftrightarrow \neg((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q))$	siehe wichtige Äquivalenzen
$\leftrightarrow \neg(\neg(\neg p \vee \neg q) \vee \neg(p \vee q))$	Regeln von De Morgan
$u \leftrightarrow p \wedge q$	
$\leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q)$	Regeln von De Morgan

Den Übertrag haben wir schon als Teilformel bei der Summe gebildet. Daraus können wir folgende Schaltung konstruieren, wobei wir Negationen der Variablen wie in der Aussagenlogik im Abschnitt 7 „Weitere Junktoren und Junktorenbasen" durch **NOR-Gatter mit zwei gleichen Eingängen** erzielen:



Da das **Halbaddierwerk** in diversen Schaltungen mehrfach vorkommt, wird für seine Darstellung ebenfalls ein **eigenes Symbol** verwendet:



Bei der **Addition zweier Zahlen P und Q** genügt es nicht, jeweils nur die entsprechenden Ziffernstellen p_i und q_i zu addieren, sondern es muss auch noch der beim vorhergehenden Additionsschritt aufgetretene Übertrag u_{i-1} berücksichtigt werden.

p_i	q_i	u_{i-1}	u_i	s_i
L	L	L	L	L
L	L	0	L	0
L	0	L	L	0
L	0	0	0	L
0	L	L	L	0
0	L	0	0	L
0	0	L	0	L
0	0	0	0	0

Wir können (der Beweis wird nicht erbracht) die **Summe s_i** durch folgende Formel beschreiben:

$$s_i = (p_i \leftrightarrow q_i) \leftrightarrow u_{i-1}$$

7 Logik

Die **Schaltung für die Summe** kann nun mithilfe zweier XNOR-Gatter verwirklicht werden. Da aber, wie sich mithilfe von Wahrheitstabellen nachweisen lässt,

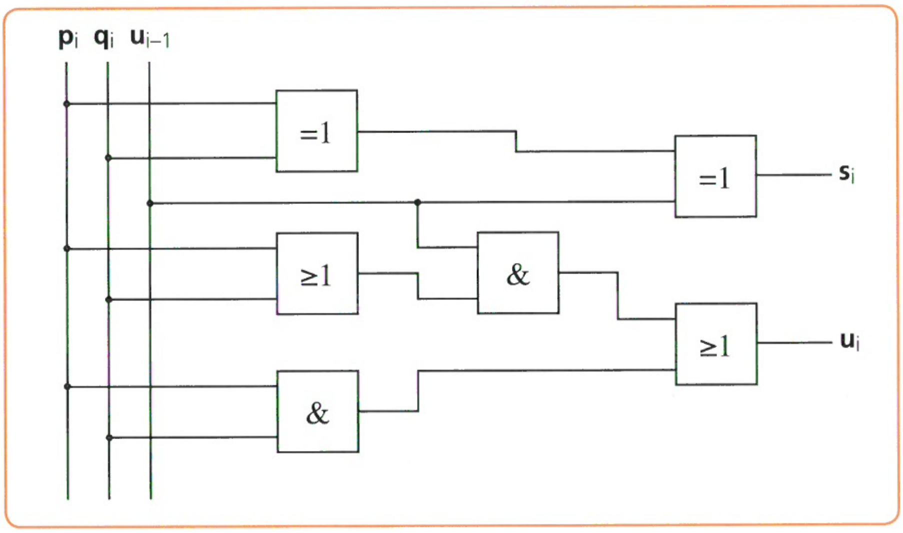
$$s_i = \neg(\neg(p_i \leftrightarrow q_i) \leftrightarrow u_{i-1})$$

ebenfalls gilt, können dafür auch zwei XOR-Gatter verwendet werden.

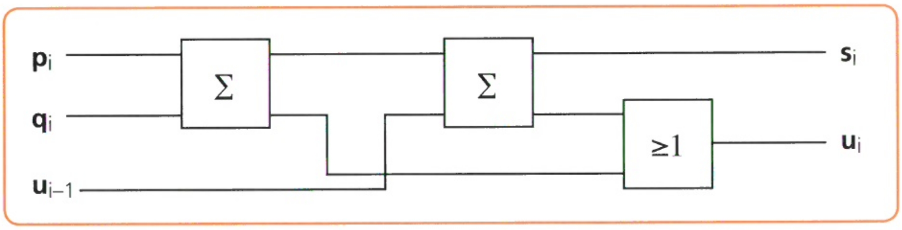
Da ein Übertrag stattfindet, wenn mindestens zwei der drei Ziffern 1 sind, erhalten wir nach Herausheben für u_i:

$$u_i = (p_i \wedge q_i) \vee ((p_i \vee q_i) \wedge u_{i-1})$$

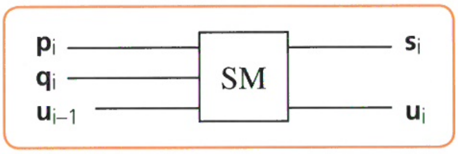
Unter Verwendung von XOR-Gattern für die Summe ergibt sich nachstehendes **Schaltbild:**



Eine andere Überlegung zur Addition dreier Ziffern wäre, zuerst zwei Ziffern zu addieren und zur Summe dieser beiden die dritte Ziffer dazuzuzählen. Dafür können wir die bereits besprochenen **Halbaddierwerke** verwenden. Wir müssen dabei berücksichtigen, dass die beiden Teilüberträge einen Beitrag zum tatsächlichen Übertrag leisten.



Da nie an beiden Halbaddierwerken gleichzeitig ein Übertrag auftreten kann, müssen nur die entstehenden Teilüberträge durch ein OR-Gatter verbunden werden. Darüber hinaus haben wir durch diese Überlegungen gegenüber dem ersten Entwurf ein Gatter eingespart. Diese Schaltung wird als **Volladdierwerk** bezeichnet und durch folgendes Symbol dargestellt:



? Meine Fragen

1. Welcher Zusammenhang besteht zwischen Aussagenlogik und Schaltalgebra?
2. Warum kann durch mehrfaches Addieren von zwei Ziffern beim Volladdierwerk ein Gatter gegenüber dem ersten Entwurf eingespart werden?

! Deine Antworten

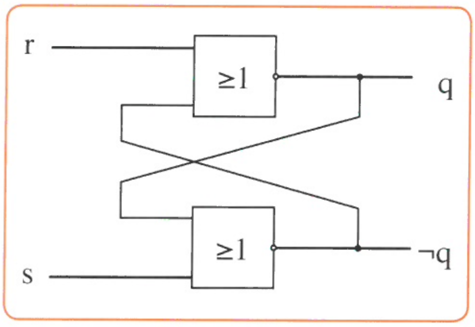
1. Beide sind verschiedene Erscheinungsformen von dem gleichen Prinzip.
2. Weil im zweiten Fall zur Realisierung zwei Halbaddierwerke verwendet wurden, die anderen Formeln entsprechen, welche aber äquivalent zu den ursprünglichen Formeln für Summe und Übertrag sind.

2 Sequenzielle Schaltalgebra

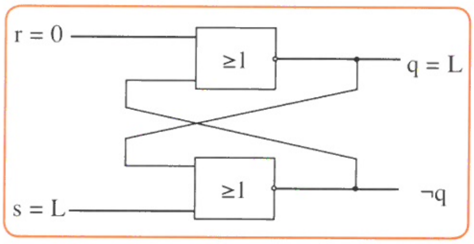
Funktionsweise und Einsatzgebiete von Flip-Flops

Bei den bisher beschriebenen Schaltungen wurde der **zeitliche Ablauf** nicht berücksichtigt. Es wurde angenommen, dass die Ergebnisse an sämtlichen Gattern gleichzeitig auftreten und so lange erhalten bleiben, wie die zugehörigen Eingangswerte an die Schaltung angelegt sind. Wir benötigen jedoch Bauelemente, die Informationen auch dann noch speichern, wenn die entsprechenden Eingangswerte nicht mehr anliegen. Eine solche Speicherwirkung kann durch **zwei gegenseitig rückgekoppelte NOR-Gatter** erzielt werden:

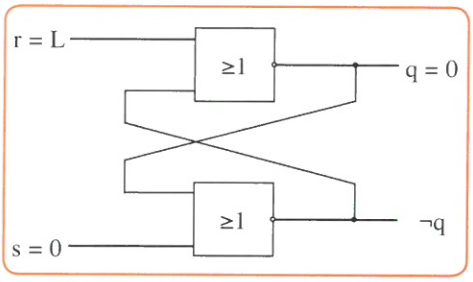
Auch mit **NAND-Gattern** kann eine solche Speicherwirkung realisiert werdem.



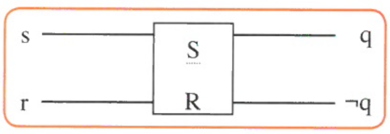
Wird am **s-Eingang** (Set-Eingang) kurzzeitig eine **Eins** angelegt, so wird der **Ausgang q = L.** Aufgrund der Rückkoppelung bleibt L am Ausgang auch dann erhalten, wenn der s-Eingang wieder Null wird.



Erst wenn am **r-Eingang** (Reset-Eingang) eine **Eins** angelegt wird, erscheint am **Ausgang q** wieder **Null.** Diese 0 bleibt so lange erhalten, bis am s-Eingang wieder eine Eins angelegt wird.



Auf diese Weise ist eine Speicherung einer Eins oder einer Null möglich. Eine solche Schaltung wird als **RS-Flip-Flop** bezeichnet und durch ein eigenes Symbol dargestellt:



Meist steht der **verneinte Ausgang,** der am unteren NOR-Gatter entsteht, ebenfalls zur Verfügung. Wegen der Rückkoppelung ist der Zustand des RS-Flip-Flops nicht nur von den beiden Eingangsgrößen, sondern auch vom Zustand des Ausgangs q abhängig. Um die zeitliche Zustandsänderung beschreiben zu können, betrachten wir diskrete, kurz aufeinanderfolgende Zeitpunkte, die wir uns durchnummeriert denken. Werden zum Zeitpunkt n an die Eingänge die Werte r_n und s_n gelegt und befindet sich der Ausgang im Zustand q_n, ist damit der neue Zustand q_{n+1} zum darauffolgenden Zeitpunkt n+1 bestimmt.

7 Logik

Diese **Zustandsänderung** kann auch durch eine **Wahrheitstabelle** beschrieben werden:

s_n	0	0	0	0	L	L	L	L
r_n	0	0	L	L	0	0	L	L
q_n	0	L	0	L	0	L	0	L
q_{n+1}	0	L	0	0	L	L	0	0

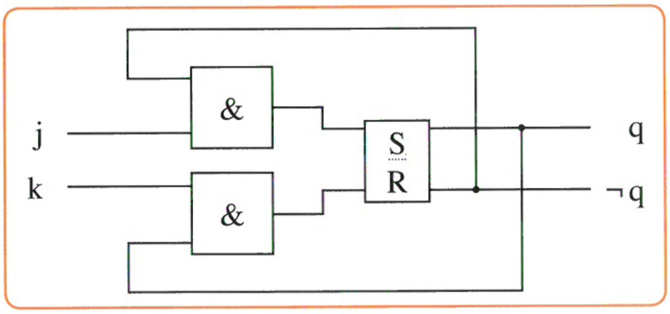
Falls an beiden Eingängen eine Eins anliegt, ist der Folgezustand logisch definiert – an beiden Ausgängen erscheint eine Null. Bei einer Änderung der Eingänge entsteht jedoch ein **instabiler bzw. nicht definierter Folgezustand!** Dies ist nicht erwünscht. Daher darf in einer Schaltung ein RS-Flip-Flop nur dann verwendet werden, wenn sichergestellt ist, dass nicht an beiden Eingängen gleichzeitig eine Eins anliegt.

Der **Zustand q_{n+1}** kann als aussagenlogische Formel beschrieben werden:

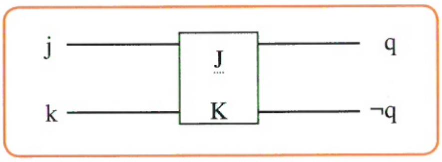
$$q_{n+1} = \neg r_n \wedge (s_n \vee q_n)$$

Nebenbedingung: $r_n \wedge s_n = 0$

Diese Beziehung heißt **charakteristische Gleichung** des RS-Flip-Flops. Mithilfe zweier AND-Gatter kann vermieden werden, dass an den beiden Eingängen gleichzeitig eine Eins anliegt:



Am s-Eingang liegt nur dann eine Eins an, wenn $q_n = 0$. In diesem Fall ändert das Flip-Flop seinen Zustand (Ausgangswert q). Ebenso wird der r-Eingang nur dann Eins, wenn $q_n = L$. Auch in diesem Fall ändert das Flip-Flop seinen Zustand. Dieses erweiterte RS-Flip-Flop wird als **JK-Flip-Flop** bezeichnet und durch folgendes Kurzsymbol dargestellt:



Der j-Eingang dient zum Setzen, der k-Eingang zum Löschen des JK-Flip-Flops: Liegt am j-Eingang eine Eins, so wird eine Eins gespeichert. Liegt am k-Eingang eine Eins, so entsteht am Ausgang eine Null. Liegen an beiden Eingängen Nullen, so bleibt der gespeicherte Wert erhalten, und sind beide Eingänge Eins, so ändert das JK-Flip-Flop seinen Zustand.

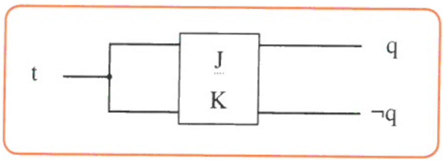
Die Wahrheitstabelle für das JK-Flip-Flop lautet somit:

j_n	0	0	0	0	L	L	L	L
k_n	0	0	L	L	0	0	L	L
q_n	0	L	0	L	0	L	0	L
q_{n+1}	0	L	0	0	L	L	L	0

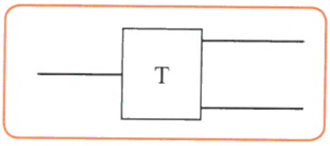
Die **charakteristische Gleichung für das JK-Flip-Flop** sieht wie folgt aus:

$$q_{n+1} = (j_n \wedge \neg q_n) \vee (\neg k_n \wedge q_n)$$

Die Eigenschaft, dass das JK-Flip-Flop seinen Zustand ändert, wenn an beiden Eingängen eine Eins anliegt, wird im sogenannten **T-Flip-Flop** ausgenutzt.



Das T-Flip-Flop ist eigentlich ein JK-Flip-Flop, dessen Eingänge kurzgeschlossen sind. Mit jeder Eins am Eingang ändert das T-Flip-Flop seinen Zustand (ähnlich wie ein Schalter). Häufig wird folgende **Kurzdarstellung** verwendet:

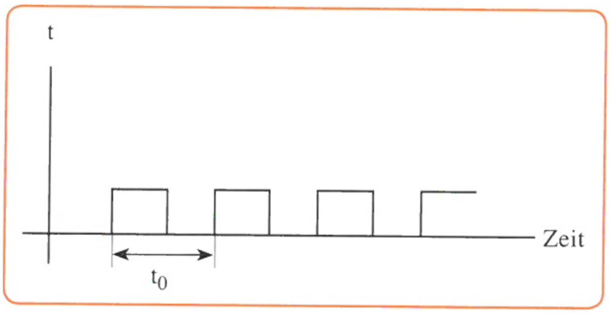


Die **charakteristische Gleichung für das T-Flip-Flop** kann unmittelbar aus der Wahrheitstabelle entnommen werden und entspricht genau der charakteristischen Gleichung des JK-Flip-Flops, wenn für j_n und k_n t_n eingesetzt wird:

t_n	0	0	L	L
q_n	0	L	0	L
q_{n+1}	0	L	L	0

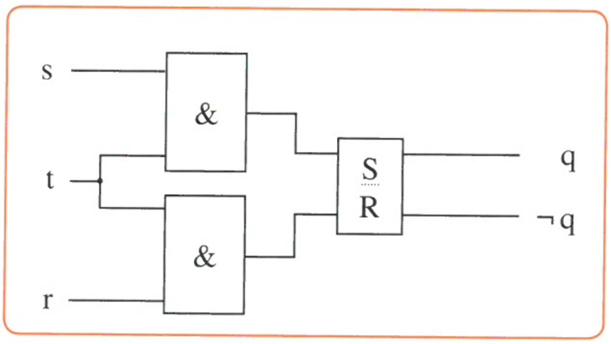
Charakteristische Gleichung: $q_{n+1} = (t_n \wedge \neg q_n) \vee (\neg t_n \wedge q_n)$

Um den zeitlichen Ablauf der Zustandsänderungen in einem Schaltnetz, das Flip-Flops enthält **(sequentielles Netzwerk),** beschreiben zu können, wird der Zustand der Schaltung (die Werte der Schaltfunktion) immer nur zu aufeinanderfolgenden diskreten Zeitpunkten betrachtet. Zu diesen Zeitpunkten sollen sich weder die Eingangssignale noch die Zustände der Flip-Flops ändern. Sämtliche Zustandsänderungen erfolgen ausschließlich zwischen den betrachteten Zeitpunkten. Um dieses Verhalten zu verwirklichen, werden alle Flip-Flops durch einen gemeinsamen **Taktimpuls** (nicht zu verwechseln mit dem t-Eingang eines T-Flip-Flops) gesteuert.

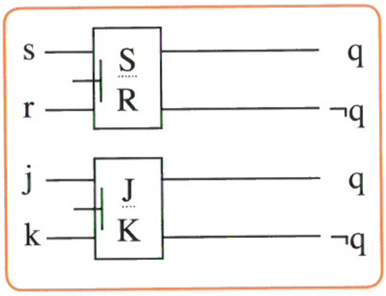


Der zeitliche Abstand zwischen den einzelnen Taktimpulsen wird mit t_0 bezeichnet. Daraus ergibt sich die **Taktfrequenz** mit **$f_0 = 1/t_0$.**

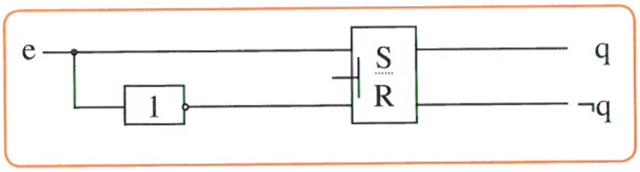
Das **Vorschalten zweier AND-Gatter** bewirkt, dass nur während eines Taktimpulses die Eingangssignale an ein Flip-Flop gelangen.



Ein Netzwerk, in dem sämtliche Flip-Flops taktgesteuert sind, wird als **synchrones Netzwerk** bezeichnet. Gelegentlich werden **taktgesteuerte Flip-Flops** auch als **RST-Flip-Flops** bzw. **JKT-Flip-Flops** bezeichnet und durch ein eigenes Schaltsymbol dargestellt:



Ein taktgesteuertes RS-Flip-Flop, an dessen r-Eingang der verneinte s-Eingang liegt, ermöglicht es, das **Eingangssignal um einen Taktimpuls zu verzögern:**



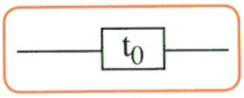
Setzt man in der charakteristischen Gleichung des RS-Flip-Flops

$$\mathbf{q_{n+1} = \neg r_n \wedge (s_n \vee q_n)}$$

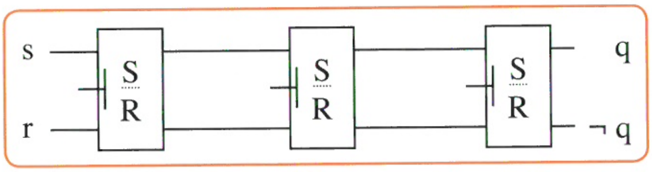
für $s_n = e_n$ und für $r_n = \neg e_n$, so erhalten wir nach Anwendung des Verschmelzungsgesetzes

$$\mathbf{q_{n+1} = e_n,}$$

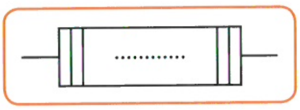
was bedeutet, dass am Ausgang der um das Taktintervall t_0 verzögerte Eingang liegt. Daher wird dieses elektronische Bauelement auch **Verzögerungselement** oder auch **D-Flip-Flop** genannt und besitzt gelegentlich ein eigenes Schaltsymbol:



Schalten wir eine Folge solcher Verzögerungselemente hintereinander, so erhalten wir eine Verzögerungskette, die als **Schieberegister** bezeichnet wird. Zur besseren Übersicht wollen wir in Hinkunft die Taktleitungen nur andeuten und nicht miteinander verbinden:

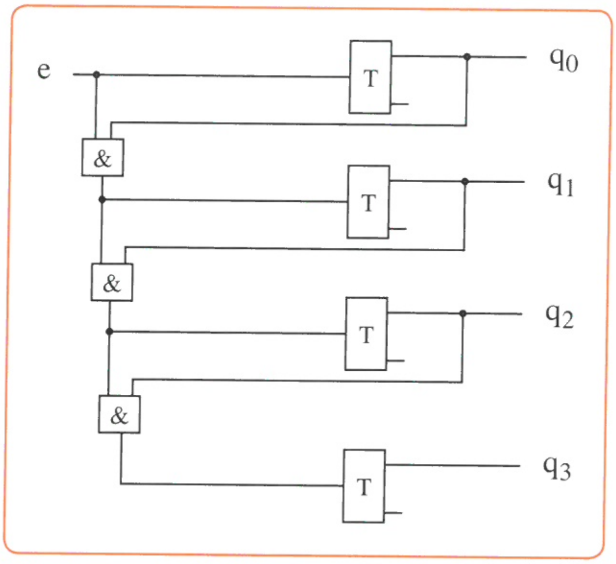


Da jedes Flip-Flop auch den negierten Ausgang zur Verfügung stellt, erübrigt sich mit Ausnahme des allerersten Flip-Flops hier die Verwendung der Negationselemente. Folgendes **Kurzsymbol** wird für ein **Schieberegister** verwendet:



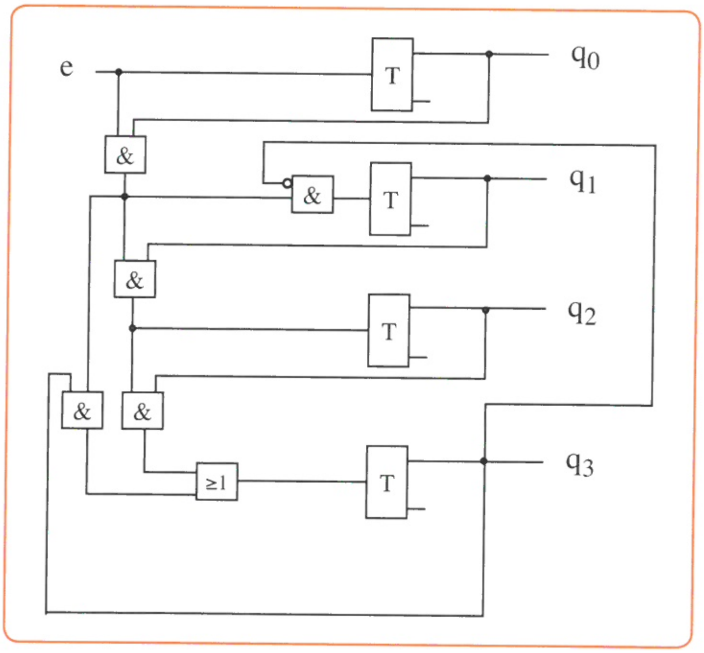
Weil jedes einzelne Flip-Flop eine Dualziffer speichern kann, kann ein aus n Flip-Flops bestehendes Schieberegister eine n-stellige Dualzahl speichern. Die einzelnen Binärziffern werden der Reihe nach an den Eingang angelegt und mit jedem Taktimpuls um eine Stelle verschoben. Am Ausgang des Schieberegisters stehen die Ziffern dann zur weiteren Verarbeitung zur Verfügung. Koppeln wir den Ausgang mit dem Eingang, so kann eine gespeicherte Zahl innerhalb des Registers rotieren. Schieberegister werden häufig verwendet, um Operanden und Resultate arithmetischer Operationen zu speichern.

Eine weitere Anwendung von Flip-Flops sind zum Beispiel Zählwerke. Solche **Zähler** erhalten wir durch die folgende Anordnung von T-Flip-Flops. Wir lassen bei der Schaltskizze die Taktleitungen völlig weg:



Werden n T-Flip-Flops auf diese Weise zusammengeschaltet, so kann eine **n-stellige Binärzahl** gespeichert werden, die sich bei jedem Impuls am Eingang e um Eins erhöht, wobei bis $2^n - 1$ gezählt werden kann. Die Ausgänge q_0, q_1, q_2 ... der einzelnen T-Flip-Flops stellen die Ziffern des Zählerstandes dar. Das erste T-Flip-Flop ändert seinen Zustand mit jedem Impuls, alle übrigen ändern ihren Zustand dann, wenn das vorhergehende von Eins auf Null schaltet. Die $\neg q$-Ausgänge der Flip-Flops zählen von $2^n - 1$ nach Null herunter.

Wie wir erkennen können, kann mit **vier T-Flip-Flops** eine **Hexadezimalziffer** gespeichert werden. Um einen Dezimalzähler bauen zu können, muss der Zähler nach der Binärdarstellung der Zahl 9 beim folgenden Impuls wieder auf die Binärdarstellung der Zahl 0 wechseln. Das erreichen wir durch entsprechendes Vorschalten von Gattern, die verhindern, dass das zweite und dritte T-Flip-Flop schalten, das erste und vierte T-Flip-Flop aber ihre Zustände ändern. Da das erste T-Flip-Flop beim nächsten Impuls ohnehin schaltet, muss Vorsorge getroffen werden, dass das zweite nicht schaltet. Das dritte T-Flip-Flop würde in dieser Situation nicht schalten, also muss nur noch das vierte dazu gebracht werden, seinen Zustand zu ändern.



Zähler werden in der Praxis für die verschiedensten Zahlensysteme benötigt: Quarzuhren, Datums-, Zeit- und andere digitale Anzeigen etc.

Nach dem gleichen Prinzip können auch Zähler konstruiert werden, die

- in beliebigen Zahlensystemen zählen,
- ab einem bestimmten Wert zählen oder die
- ab einem bestimmten Wert hinunterzählen.

7 Logik

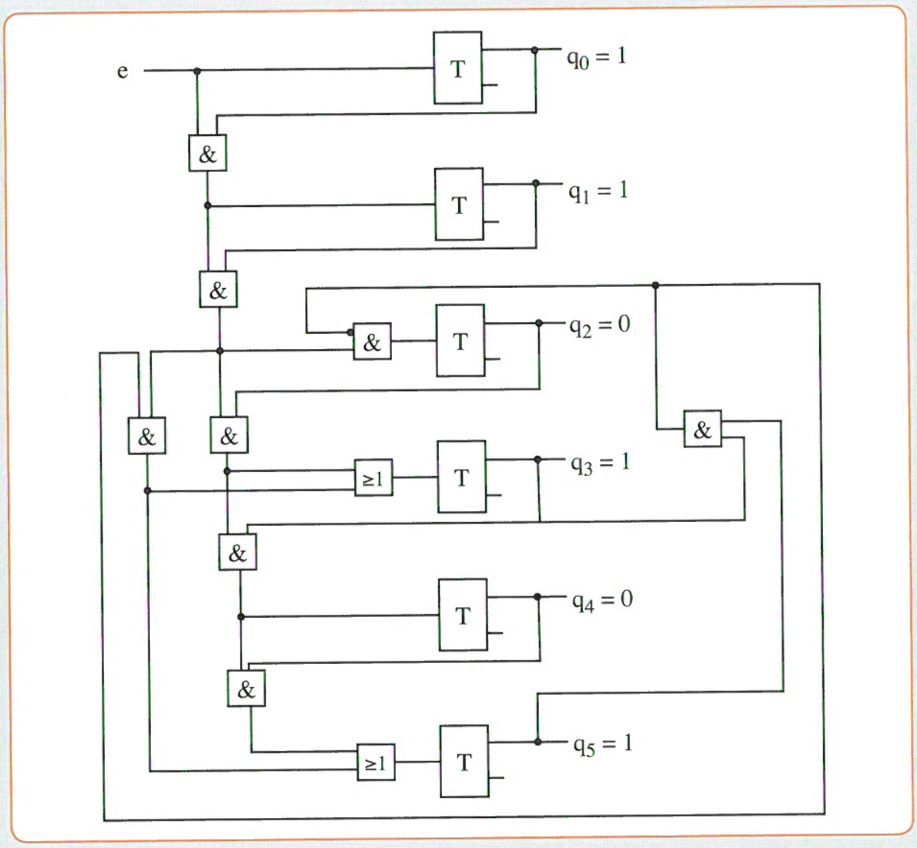
Betrachten wir einen Binärzähler, der beispielsweise von 0 bis 15 zählt, so wird an den negierten Ausgängen von 15 bis 0 hinuntergezählt. Die verneinten Ausgänge stellen binär das Einerkomplement dar. Für den Dezimalzähler bedeutet das ein Herunterzählen von 15 bis 6.

L 1: Konstruktion von Zählern

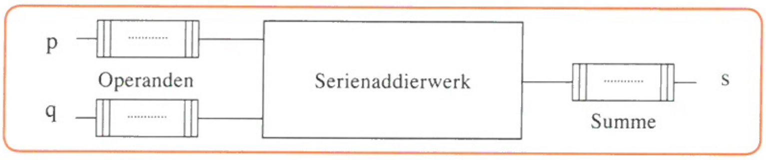
Wir wollen nun versuchen, ein **allgemeines Prinzip zur Konstruktion von Zählern** herauszuarbeiten. Dazu überlegen wir uns Folgendes: Falls die Binärdarstellung der Zahl, bei der wieder auf Null zurückgesetzt werden soll, nicht aus lauter Einsen besteht (= reiner Binärzähler), dann gibt es in der Binärdarstellung dieser Zahl mindestens eine Null. Wir betrachten nun die am weitesten rechts stehende Null (dahinter kann höchstens eine eventuell leere Folge von Einsen stehen) und bedenken weiters, dass diese Null beim nächsten Ereignisimpuls schalten würde. Das verhindern wir, indem wir die Ausgänge der Flip-Flops, die bei der Binärdarstellung Eins sind und links von der am weitesten rechts stehenden Null stehen, in ein UND-Gatter schicken.

Den Ausgang dieses UND-Gatters verbinden wir mit dem negierten Eingang eines weiteren UND-Gatters, das wir vor das T-Flip-Flop der am weitesten rechts stehenden Null setzen. Der andere Eingang dieses UND-Gatters ist die ursprüngliche Leitung. Dies bewirkt das **Sperren des „0"-Flip-Flops** ab dem Zeitpunkt, ab dem die links davon stehenden „1"-Flip-Flops Eins geworden sind. Beim endgültigen Zurücksetzen des Zählers auf Null müssen wir erzwingen, dass die links von der am weitesten rechts stehenden Null befindlichen „1"-Flip-Flops auf Null wechseln. Dieser Schaltvorgang darf nur dann durchgeführt werden, wenn alle entsprechenden T-Flip-Flops der Binärdarstellung Eins geworden sind. Um eine **vorzeitige Rückstellung auf Null zu verhindern,** müssen wir zusätzlich den Ereignisimpuls in unsere Überlegung miteinbeziehen. Die UND-Verknüpfung aller „1"-Flip-Flops und des Ereignisimpulses legen wir an ODER-Gatter, die wir den „1"-Flip-Flops links der betrachteten Null vorschalten.

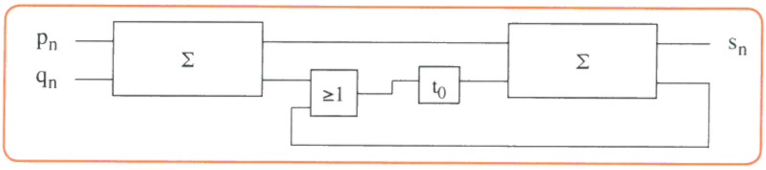
Nun wollen wir einen **Zähler** konstruieren, **der bis 43 zählt** und dann wieder auf Null zurückspringt. Die Binärdarstellung von 43 ist 101**0**11. Die am weitesten rechts stehende Null ist durch Fettdruck hervorgehoben.



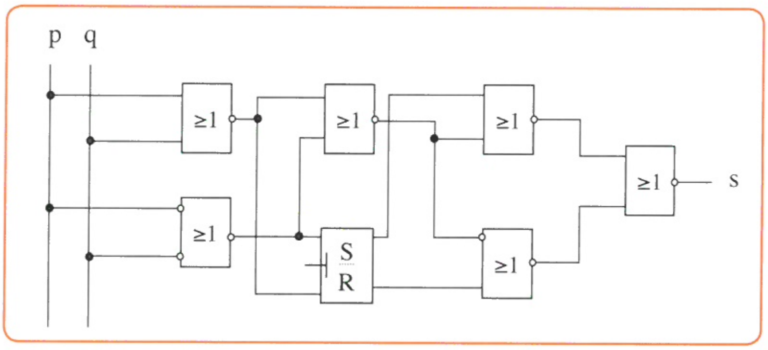
Eine weitere Anwendung von Flip-Flops, Verzögerungselementen und Schieberegistern ist ein funktionsfähiges Addierwerk, das sogenannte **Serienaddierwerk.**



Ausgehend vom Volladdierwerk müssen wir Vorsorge treffen, dass die Überträge zum richtigen Zeitpunkt anliegen, was durch Einbau eines **Verzögerungselementes** erreicht werden kann. Die Ein- und Ausgabe übernehmen Schieberegister. In der folgenden Schaltskizze stellen wir nur das Serienaddierwerk dar:



Wenn wir für das Serienaddierwerk nur NOR-Gatter verwenden wollen, wobei wir an den Eingängen auch Negationen erlauben, so erhalten wir folgende Schaltskizze:



Vor Beginn der Addition muss das RS-Flip-Flop gelöscht sein!

Die korrekte **Berücksichtigung des Übertrags** wird durch das **RS-Flip-Flop** gewährleistet.

Das **Serienaddierwerk** kann also ohne Änderung der Hardware sowohl zum Addieren als auch zum Subtrahieren verwendet werden!

Eine **Subtraktion von Binärzahlen** wird durch Addition des Zweierkomplements durchgeführt. Legen wir an die Eingänge des Serienaddierwerks anstelle von q den Wert ¬q an (Einerkomplement von q) und setzen wir das RS-Flip-Flop vor Beginn der Rechenoperation auf Eins (Addition von Eins), so entsteht aus dem Serienaddierwerk ein **Seriensubtrahierwerk.**

Grundsätzlich wäre es möglich, alle mathematischen Operationen auf interne Rechengenauigkeit mit dem Serienaddierwerk durchzuführen. In der Praxis werden jedoch häufig eigene, für die entsprechende Operation besser geeignete Rechenwerke erzeugt (Multiplizierer, Rechenwerk für trigonometrische Funktionen etc.). Andere Operationen werden näherungsweise mit den implementierten Rechenwerken realisiert.

? Meine Fragen

1. Wie kann erreicht werden, dass Werte gespeichert werden, ohne dass Spannung anliegt?
2. Was ist ein synchrones Netzwerk?
3. Warum reicht ein Halbaddierer nicht aus, um allgemein binär addieren zu können?

! Deine Antworten

1. Durch zwei rückgekoppelte NOR- bzw. NAND-Gatter
2. Alle Flip-Flops werden vom gleichen Takt gesteuert.
3. Weil beim Addieren von zwei Binärzahlen ab der zweiten Stelle auch der Übertrag von der vorhergehenden beachtet werden muss.

Üben

SbX ID: 1333

Übungsbeispiele

Ü 1:
Der Vorstand eines Vereines besteht aus Vorsitzendem (V), Präsidenten (P), Schriftführer (S) und Kassier (K). Ein Antrag wird positiv entschieden, wenn entweder die Mehrheit der Vorstandsmitglieder ohne Vorsitzenden oder der Vorsitzende und ein weiteres Vorstandsmitglied mit „Ja" stimmen.

Konstruiere eine möglichst einfache elektronische Schaltung, die bei positivem Ausgang einer Abstimmung eine grüne Lampe aufleuchten lässt, ansonsten eine rote.

Ü 2:
An einen Stromkreis sind vier Geräte (A–D) mit folgenden Leistungen angeschlossen:

A .... 650 W   B .... 400 W   C .... 800 W   D .... 950 W

Gesucht ist eine möglichst einfache Schaltung, die eine Warnlampe aufleuchten lässt, wenn die eingeschalteten Geräte mehr als 1500 W verbrauchen. Versuche, das Ergebnis mit umgangssprachlichen Worten zu formulieren!

Ü 3:
Konstruiere eine möglichst einfache elektronische Schaltung, die die Phasen einer Verkehrsampel steuert:

Grün – Gelb – Rot – Rot/Gelb

Ü 4:
Konstruiere unter Verwendung von T-Flip-Flops einen Zähler, der

a) bis 5,
b) bis 13,
c) bis 26

zählt, und dann wieder auf 0 zurückspringt.

Ü 5:
Das Resultat einer Schaltfunktion für vier Schaltvariable p, q, r und s sei – dezimal von 15 bis 0 nummeriert:

1 1 1 0 0 0 1 0 0 1 1 0 0 1 1 0

a) Gib eine möglichst einfache Schaltung an, die nur AND- und OR-Gatter sowie Inverter verwendet.
b) Gib dazu eine Schaltung an, die nur NAND- (bzw. nur NOR-) Gatter verwendet.
c) Versuche unter Verwendung beliebiger Gatter eine Schaltung zu entwerfen, die mit möglichst wenig Gattern auskommt.

Ü 6:
Steuere mithilfe eines Zählers folgende vier Zustände von sechs Geräten, die sich in dieser Reihenfolge wiederholen:

Zustand 0: Gerät 1, 2 und 3 eingeschaltet
Zustand 1: Gerät 2, 4 und 6 eingeschaltet
Zustand 2: Gerät 1 und 4 eingeschaltet
Zustand 3: Gerät 3 und 5 eingeschaltet

SbX
Zusätzliche Übungsbeispiele zur Schaltalgebra findest du unter der ID: 1333.

Sichern

Projektarbeit „Montageplatz für einen Accesspoint“

Entwickle systematisch mithilfe von JKT-Flip-Flops eine Schaltung, die eine Leuchttafel mit zwei Segmenten a und b in folgender Phasenfolge steuert:

a: … 1 1 0 1 0 0
b: … 0 1 0 1 1 0

Anleitung: Verwende ein zusätzliches Flip-Flop zur Steuerung!

Wissen

Kontrollfragen

1. Welche Gatter kennst Du?
2. Welcher Zusammenhang besteht zwischen Aussagenlogik und elektronischen Schaltkreisen?
3. Wie können zwei Binärziffern addiert werden und was ist dabei zu beachten?
4. Wodurch kann erreicht werden, dass Werte auch bei Fehlen von Eingangsspannungen gespeichert werden?
5. Wann sind JK-Flip-Flops RS-Flip-Flops vorzuziehen?
6. Wie wirkt ein T-Flip-Flop?
7. Was ist ein synchrones Netzwerk?
8. Wie funktioniert ein allgemeiner Zähler?
9. Wie kann ein funktionsfähiges Addierwerk gebaut werden?
10. Warum wird kein Subtrahierwerk benötigt?

Lerneinheit 3

Roboter und Sensoren

SbX
Alle SbX-Inhalte zu dieser Lerneinheit findest du unter der ID: 1334.

Roboter werden seit etwa 20 – 30 Jahren in der industriellen Fertigung erfolgreich eingesetzt und erlangen in letzter Zeit auch in Haushaltsgeräten, wie in Staubsaugern oder Rasenmähern, eine immer größere Bedeutung. In dieser Lerneinheit erfährst du einige Grundlagen über Aufbau, Konstruktionsweisen, Programmierung und Einsatz von Robotern. Im Anschluss daran wollen wir uns kurz mit dem Thema Sensoren beschäftigen, die nicht elektrische, physikalische Größen in elektrische Ströme umsetzen.

Lernen

SbX ID: 1335

1 Geschichte und Definition von Robotern

Schaffung von künstlichen Menschen

R.U.R. = Rossums Universal Roboter
robot (slawisch) = Fronarbeit

Karel Capek (1890–1938), einer der wichtigsten tschechischen Schriftsteller des 20 . Jahrhunderts

Das **Wort Roboter** verwendete als erster **Karel Capek** um 1920 in seinem Schauspiel „R.U.R." für Maschinen, die von Menschen konstruiert wurden, diese Menschen vernichten und die Weltherrschaft übernehmen.

Bei jedem Technologieschub, den die Menschheit hervorbrachte, tauchte auch der Wunsch auf, künstliche Menschen zu schaffen. Die diesbezüglichen Versuche reichen von den Schachautomaten des 18. Jahrhunderts über Golem bis zu Frankensteins Monster. Die Filmindustrie des 20. Jahrhunderts prägte den Ausdruck **Androiden** für diese menschenähnlichen Maschinen. Als Geburtsstunde des modernen Roboterzeitalters gilt das Jahr 1956, in dem ein Antrag auf die Erteilung eines Patentes für Industrieroboter gestellt wurde.

Nach der Definition des **Robot Institute of America** von 1979 sind Roboter „programmierbare, multifunktionale Manipulationswerkzeuge, die dazu entwickelt wurden, um Materialien, Teile oder Werkzeuge zu bewegen, oder spezialisierte Geräte, die mit verschiedenen vorprogrammierten Bewegungsabläufen eine Reihe von Aufgaben erledigen können".

Das **Webster Dictionary** definiert den Roboter als „ein automatisiertes Gerät, das Tätigkeiten ausführt, die normalerweise von Menschen durchgeführt werden, oder als Maschine in Form eines Menschen".

Definition

Ein Roboter kann also als eine stationäre oder mobile Maschine beschrieben werden, die mit Sensoren ausgestattet und mit einem Mikroprozessor gesteuert vorprogrammierte Bewegungsabläufe durchführt.

Mechatronik ist der Sammelbegriff für Mechanik, Elektronik und Datenverarbeitung.

An der **Entwicklung von Robotern** ist eine Reihe von Disziplinen gemeinsam und gleichzeitig beteiligt:

- **Mechanik** – für den mechanischen Aufbau der Roboter und ihrer beweglichen Teile
- **Elektronik** – für die Steuerung der Bewegungsabläufe
- **Datenverarbeitung** – Interpretation und Verarbeitung der Signale, die von Sensoren aufgenommen werden; Weiterverarbeitung und Weitergabe der Ergebnisse an die Aktoren (Greifarme, Bewegungsapparat)

? Meine Fragen

1. Worin liegt der grundlegende Unterschied zwischen der Definition eines Roboters im Webster Dictionary und jener des Robot Institute of America?
2. Was bedeutet das Wort „Roboter" im Deutschen?

! Deine Antworten

1. Das Webster Dictionary nimmt ausdrücklich Bezug auf den Menschen, das Robot Institute of America sieht Roboter vorwiegend als Werkzeug.
2. Fronarbeit

2 Einteilung von Robotern nach Anwendungsgebieten

Wofür werden Roboter verwendet?

Heute werden Roboter in unterschiedlichsten Bereichen eingesetzt, um ursprünglich menschliche Arbeit zu verrichten.

Einsatzbereiche

1 Industrieroboter

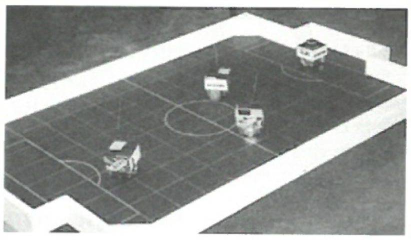
Dies sind Geräte, die anderen Maschinen Teile zu- oder abführen oder selbst mechanische Tätigkeiten, wie Schweißen oder Montieren, ausführen.

Für Tätigkeiten, die der menschlichen Gesundheit schaden könnten, wie Gussputzen, Lackieren von Teilen, Arbeiten in radioaktiver oder explosionsgefährdeter Umgebung (Entschärfen von Landminen oder Bomben) werden heute vielfach Roboter eingesetzt. In Fällen, wo die Roboter noch nicht über genügend eigene Intelligenz verfügen, wird eine Videokamera auf diesen montiert, um eine Fernsteuerung durch Menschen zu ermöglichen.

Schweißen eines Eisenbahnwaggons mithilfe eines Roboters
(Quelle: Werkfoto igm Robotersysteme AG)

2 Forschungsroboter

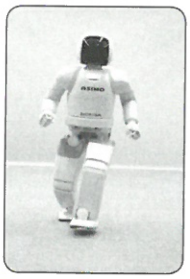
An Universitäten und Forschungsabteilungen mancher Firmen werden Roboter zur Erforschung spezieller Eigenschaften entwickelt. Die Fußballroboter der TU Wien werden beispielsweise dafür verwendet, um zu erforschen, wie Roboter Gegenstände (Mitspieler, Gegner, Ball, Tor, Bande …) erkennen können. Das Team der TU Wien hat mit seinen Robotern in den letzten Jahren mehrfach Weltmeister im Fußball gestellt!



Fußballroboter der TU Wien

SbX

Links zu Filmen über den Einsatz von Robotern in Haushalt und Garten findest du unter der ID: 1335.



Die Firma Honda hat mit ASIMO den ersten sicher auf zwei Beinen gehenden Roboter vorgestellt.

3 Haushaltsroboter

Staubsaugen und Rasenmähen sind im Haushalt meist ungeliebte Tätigkeiten, aber menschliche Helfer können heute schon durch spezielle Roboter ersetzt werden!

4 Kampfmaschinen (Drohnen)

Das Militär hat naturgemäß großes Interesse an Robotern – egal, ob es sich dabei um den Abwurf von Bomben durch unbemannte Flugobjekte oder um Kampfmaschinen handelt. Ein erfreulicherer Aspekt ist der Einsatz von Robotern zur Räumung verminter Landstriche.

Minenräumroboter

5 Humanoide Roboter

Das sind Roboter, die sich wie Menschen auf zwei Beinen bewegen können und über ein Gehäuse in Menschenform verfügen (z.B. ASIMO, Fa. Honda, 2000). Humanoide Roboter könnten als Serviceroboter in Therapie und Diagnose, in der Alten-, Kranken- und Säuglingspflege eingesetzt werden. ASIMO wird ständig weiterentwickelt.

6 Spielzeugroboter (Lego, Spieltiere)

Spielzeugroboter werden einerseits als Kinderspielzeug, andererseits zur Funktionserforschung durch Amateure eingesetzt.

? Meine Fragen

1. Was kann mit Forschungsrobotern erforscht werden?
2. Welche Tätigkeiten können Industrieroboter durchführen?

! Deine Antworten

1. Beispielsweise die Bild- und Spracherkennung
2. Die Handhabung von Teilen, Schweißen, einfache, aber gesundheitsgefährdende Tätigkeiten

3 Einteilung von Robotern nach ihrer Bauart

Ortsfeste und mobile Roboter

Ortsfeste Roboter

Greifarmroboter

Greifarmroboter

Üblicherweise kann der Roboter mit einem handähnlichen Instrument (Klaue) das Werkstück an einem Ort aufnehmen und an einem anderen Ort ablegen. Probleme, die auftreten können, sind allerdings die Verbiegung des Roboterarmes durch die Masse des Werkstückes oder die dynamische Verformung des Roboterarmes bei schnellen Bewegungen. Dadurch können Ungenauigkeiten in der Positionierung des Roboterarmes, insbesondere bei wechselnden Belastungen, entstehen.

Portalroboter in einer Autowaschstraße (Quelle: A. Rohé Holding GmbH)

Portalroboter

Ein einfaches Beispiel für einen Portalroboter ist eine Autowaschstraße. Sensoren erkennen Länge, Breite, Höhe und Position der Räder des Fahrzeuges und steuern die Bürsten für den Waschvorgang automatisch, nachdem der Benutzer das gewünschte Programm ausgewählt und bezahlt hat.

Mobile Roboter

Das **Rad** wurde (vor über 5000 Jahren) von der Menschheit erfunden. Sein Einsatz setzt allerdings eine halbwegs ebene Fahrbahn ohne Hindernisse mit entsprechend rauer Oberfläche voraus.

Um **Radfahrzeuge** auch im Gelände beweglich zu machen, greift man auf das Tausendfüßerprinzip zurück. Statt drei oder vier Rädern werden sechs, acht oder mehr Räder montiert und angetrieben. Ist das Gelände so uneben, dass Radfahrzeuge sich nicht bewegen können, werden Kettenfahrzeuge eingesetzt.

In der Natur bewegen sich viele Tiere mit Beinen fort. Diese Idee führte zur Entwicklung von **Gehmaschinen.** Noch nicht vollständig gelöst ist das Problem des Haltens des Gleichgewichtes, insbesondere bei zweibeinigen Gehmaschinen.

Gehmaschine

Die **Energieversorgung** aller beweglichen Roboter stellt ein weiteres, zentrales Problem dar. Akkumulatoren sind im Vergleich zu ihrer Energiekapazität relativ schwer – aber ohne Strom gibt es heute noch keinen funktionierenden Computer.

? Meine Fragen

1. Kann ein Greifarmroboter gleichzeitig ein mobiler Roboter sein?
2. Welche Fortbewegungsmittel setzen bewegliche Roboter ein?
3. Wofür setzt man Greifarmroboter ein?

! Deine Antworten

1. Ja, wenn der Greifarm auf einem Fahrzeug montiert wird
2. Räder, Ketten oder Beine
3. Zur Handhabung von Gegenständen

4 Einteilung von Robotern nach der Programmierung

On- und Offline-Programmierung


Offline-Programmierung

Bei der **Offline-Programmierung** werden die Bewegungsabläufe mit einem Computer vorprogrammiert, das fertige Programm wird in den Speicher des Roboters übertragen. Der Vorteil dieser Art der Programmierung ist, dass die Roboter währenddessen andere Arbeiten durchführen können, z.B. in Fertigungsstraßen der Automobilindustrie oder in der Kleinserienfertigung, wie das Schweißen von Gartenzäunen. Der Nachteil ist allerdings, dass erst beim Betrieb des Roboters klar wird, ob beispielsweise der Robotergreifarm mit festen Hindernissen oder anderen Robotern kollidiert.


Roboterstraße

Bei der **Online-Programmierung** wird der Robotergreifarm von einem Menschen geführt und die Bewegungskoordinaten werden als Programm aufgezeichnet. So können Kollisionen sicher verhindert werden. Allerdings steht der Roboter während der Programmierung für andere Aufgaben nicht zur Verfügung.

? Meine Fragen

1. In welchen Fällen wird ein Roboter offline programmiert?
2. Wann wird ein Roboter eher online programmiert?

Manche Bewegungsabläufe, wie das Lackieren von Flächen mit Druckluftspritzpistolen durch einen geübten Lackierer, sind online kaum programmierbar.

! Deine Antworten

1. Der Roboter muss für die Produktion zur Verfügung stehen; Kollisionen sind nicht zu erwarten oder können anderweitig ausgeschlossen werden.
2. Der Roboter wird für die Produktion nicht unbedingt benötigt; Kollisionen sind zu erwarten; der Vorgang kann nicht leicht programmiert werden.

5 Sensoren

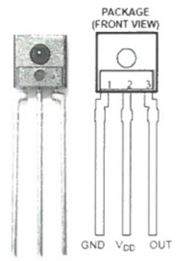
Wofür werden Sensoren eingesetzt?

Sensoren setzen nicht elektrische, physikalische Größen in elektrische Ströme um. An dieser Stelle soll nur ein kurzer Überblick über die wichtigsten Arten von Sensoren gegeben werden, die Details werden üblicherweise im Physikunterricht besprochen. Die folgende Liste von Sensoren ist daher keineswegs vollständig.

Arten von Sensoren

❶ Licht, UV, IR

In einem **Halbleiterübergang** (p-n-Schicht) wird der Durchfluss elektrischen Stromes durch Photonen ermöglicht. Die Stromstärke ist ausschlaggebend für die Beleuchtungsstärke und damit ein indirektes Maß für die Lichtstärke. Ein mit lichtempfindlichen Sensoren bestückter Roboter kann z.B. so programmiert werden, dass er die **Lichtquelle als Ziel** ansteuert. Verdecken Hindernisse den direkten „Blickkontakt" zwischen Sensor und Lichtquelle, müssen andere Methoden zur Zielansteuerung verwendet werden.



Lichtsensor

❷ Schall, Ultraschall

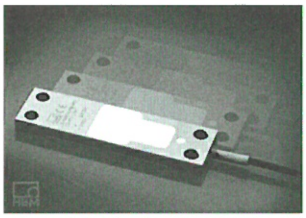
Mikrofone verschiedenster Bauart liefern den Strom, der ein Maß für die Schallintensität ist. Die **Interpretation von Schallsignalen** ist eine sehr komplexe Aufgabe, wenn die Schallquelle nicht ähnlich einer Lichtquelle verwendet wird.

❸ Gase, Gerüche

Ein sehr schwieriges Unterfangen ist die **Analyse von Gasgemischen,** die umgangssprachlich Gerüche genannt werden. In der Chemie werden dafür Gaschromatografen eingesetzt, die Ergebnisse von Fachleuten ausgewertet. Für Roboteranwendungen ist diese Vorgangsweise zu langsam und zu teuer. Ein Lösungsansatz ist ein Kamm mit verschieden langen Zungen aus Halbleitermaterial, die bei Biegung unterschiedliche Widerstände aufweisen, ein anderer die Wärmeleitfähigkeit des Gases.

4 Druck

Dehnungsmessstreifen bestehen aus Metallen, die bei Zug- oder Druckausübung ihren elektrischen Widerstand ändern. Diese Widerstandsänderung führt zu einer Änderung der Stromstärke des durchfließenden Stromes.



Dehnungsmessstreifen

5 Länge

Die Länge eines Weges, ein Abstand, wird indirekt über die Laufzeit von Schallwellen oder Licht gemessen. Beispiele dafür sind **Ultraschall- und Laserlängenmessgeräte,** die in jedem Baumarkt erhältlich sind.

6 Position

GPS = General Positioning System

DGPS = Differential GPS, GPS mit Hilfssignal zu Genauigkeitserhöhung

Eine (scheinbar) einfache Fragestellung: **Wie findet ein Roboter zurück zu seiner Basisstation, z. B. zum Wiederaufladen der Akkumulatoren?** Dafür muss der Roboter seine aktuelle Position und die Position der Basisstation kennen. Neben Schall- und Lichtleitstrahlen kann dafür GPS genutzt werden, solange dessen Genauigkeit (durchschnittlich 10 m Abweichung) ausreicht, wie beispielsweise bei der elektronischen Navigation für Fahrzeuge. Sollte eine höhere Positionsgenauigkeit erforderlich sein, muss ein zusätzliches Hilfssignal ausgewertet werden.

Lasermessgerät

7 AnalogDigitalwandler (A/D-Wandler)

SbX **Informationen zur Funktion eines A/D-Wandlers findest du unter der ID: 1335.**

Der letzte Schritt nach Auslösung eines Stromes durch einen Sensor ist die Umwandlung des analogen in einen digitalen Wert. Abhängig von der erforderlichen Genauigkeit (und der Rechengeschwindigkeit des beteiligten Prozessors) speichert man die erhaltenen Zahlenwerte in einem oder mehreren Bytes.

? Meine Fragen

1. Was „kann" ein Sensor?
2. Womit wandelt man einen analogen Strom in einen digitalen Wert um?

! Deine Antworten

1. Ein Sensor setzt nicht elektrische, physikalische Größen in Strom um.
2. Mit einem A/D-Wandler

6 Interpretation der Messwerte von Sensoren

Sprach- und Bilderkennung

Sehr viel aufwendiger und schwieriger ist die Interpretation der von einem Sensor aufgenommenen Signale. Stellvertretend für alle Interpretationen besprechen wir die Sprach- und Bilderkennung in ihren Grundzügen.

Spracherkennung

Wie du aus der Physik weißt, gelten Ton, Geräusch, Klang und Knall als Schallereignisse. Mit einem Mikrofon kann man prinzipiell feststellen, ob ein Schallereignis vorliegt. Von welcher Art das Schallereignis ist, kann ohne **Oszilloskop** oder einem sehr feinen Gehör nicht festgestellt werden. Noch viel schwieriger ist es, herauszufinden, ob das Schallereignis gesprochene Wörter sind. Besonders kompliziert ist die **Erfassung der Bedeutung** dieser Wörter.

Allerdings ist Spracherkennung auf einige wenige physikalische Größen beschränkt: Lautstärke bzw. Schallintensität und ein Tonfrequenzgemisch.

Durch den **Vergleich gespeicherter Wortmuster** lassen sich einzelne Wörter erkennen. Dieser Vorgang ist aber von der Stimme des Sprechers abhängig. Daher muss die Spracherkennung trainiert werden, d. h., die Wortmuster müssen für jeden einzelnen Sprecher gespeichert werden. Schon ein Schnupfen kann die Spracherkennung funktionsunfähig machen.

Sehr intensiv wird daran geforscht, die **Semantik gesprochener Sätze** elektronisch zu erfassen. Ohne weitere Angaben ist ein Satz wie „der gefangene floh" nicht interpretierbar. Die Schreibweisen „Der Gefangene floh" und „der gefangene Floh" lassen eine Interpretation zu – die gesprochenen Wörter unterscheiden sich aber nicht. Wird in einer Nachrichtenmeldung im Rundfunk über einen Gefängnisausbruch berichtet, wird für den menschlichen Zuhörer die Sequenz „der gefangene floh" eindeutig verständlich. Offen ist aber, wie dieser Zusammenhang elektronisch zu erfassen ist.

Bilderkennung

Wesentlich schwieriger gestaltet sich das **Erkennen von Objekten in einem Bild.** Die physikalischen Größen Farbe, Beleuchtung, Helligkeit, Schattenwurf, Form des Gegenstandes und vieles andere mehr spielen hier eine Rolle. Denke nur an die unterschiedliche Farbwiedergabe ein und desselben Bildes auf einem Monitor und ausgedruckt auf Papier! Oder an Stimmungen, die durch Lichtfarben (Kerze, Leuchtstoffröhre) hervorgerufen werden.

In einfachen Situationen, wie bei der Montage eines Autorades auf der Radnabe in der Serienfertigung im Automobilbau, gelingt es, die Bolzen der Radnabe zu erkennen. Damit kann ein Roboter das Rad samt Felge so drehen, dass er das Rad montieren kann.

Radmontage durch Roboter

An komplexeren Bildern scheitert die Softwareinterpretation heute noch und es ist offen, ob sie jemals gelingen wird. Der Ausweg in dieser Situation ist derzeit die Übertragung der Bilder, die die Kamera eines Roboters aufnimmt, an einen menschlichen Beobachter, der das Bild auswertet und die entsprechenden Befehle gibt.

Sprachausgabe

Dieses Problem ist weitgehend gelöst, sofern die Ausgabe auf bestimmte Wörter oder Sätze beschränkt ist. Viele Geräte im Konsumerbereich verfügen über eine Sprachausgabe.

Beispiele:

- Autos, die den fälligen Servicedienst oder bald leeren Treibstofftank ankündigen
- Heiße Elektrokochplatten, die vor Berührung warnen
- Waschmaschinen, die Defekte melden
- Navigationsgeräte für Auto- und Motorradfahrer, die die einzuschlagende Richtung ansagen

? Meine Fragen

1. Was sind Schallereignisse?
2. Was versteht man unter Semantik?
3. Was ist einfacher: Sprach- oder Bilderkennung?

! Deine Antworten

1. Ton, Geräusch, Knall, Klang
2. Den Sinnzusammenhang
3. Spracherkennung; Sie beschränkt sich im Gegensatz zur Bilderkennung auf eine einzelne physikalische Größe.

Üben

Übungsbeispiele

Ü 1:
Suche im Internet nach Roboterherstellern. Versuche herausfinden, für welche Anwendungen sie eingesetzt werden.

Ü 2:
Welche Voraussetzungen sind für den Einsatz eines Roboterrasenmähers in deinem Garten zu schaffen?

Ü 3:
Stelle mit einem GPS-Gerät die geografische Länge und Breite deines Schulstandortes fest. Mit diesen Daten „fütterst" du z. B. Google-Earth und bekommst ein Bild dieses Standortes.

Ü 4:
Stelle mehrere Aufnahmen eines gelesenen Textes (z. B. den ersten Absatz dieser Lerneinheit) her:
- Ein Sprecher liest den Text einmal leise, einmal laut.
- Ein Mädchen und ein Bub lesen den Text mit gleicher Lautstärke.
- Eure Lehrerin oder euer Lehrer liest den Text. Vergleiche die Kurvenformen der Aufnahmen!

Ü 5:
Finde Beispiele ähnlich „der gefangene floh".

Sichern

Projektarbeit „Einteilung von Robotern"
Die Google-Suche nach „roboter" liefert mehr als 6 Millionen Einträge. Suche nach Roboterherstellern und versuche, deren Produkte nach den erklärten Kriterien einzuteilen.

Projektarbeit „Sensoren" gemeinsam mit dem Physikunterricht
Welche Sensoren besitzt die physikalische Sammlung eurer Schule? Versucht, deren Funktionsweise zu klären. Wofür kann man diese Sensoren im Physikunterricht und sonst einsetzen?

Wissen

Kontrollfragen
1. Woher kommt das Wort Roboter?
2. Welche Merkmale zeichnen einen Roboter aus?
3. Welche Wissenschaftsdisziplinen sind an der Entwicklung von Robotern beteiligt?
4. Wo könnten humanoide Roboter eingesetzt werden?
5. Über welche Sensoren verfügt der menschliche Körper?
6. Welcher Sensor nutzt eine Widerstandsänderung, welcher einen Halbleiterübergang?