# Aula de Revisão

Edison Z. da Silva

Curso de Física Geral F-128

$1^0$ semestre, 2016

# Resumo: cinco equações cinemáticas

- Movimento unidimensional com aceleração constante:

$$v(t) = v_0 + at$$

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2} a t^2$$

$$\overline{v}_{0\to t} = \tfrac{1}{2}[v_0 + v(t)]$$

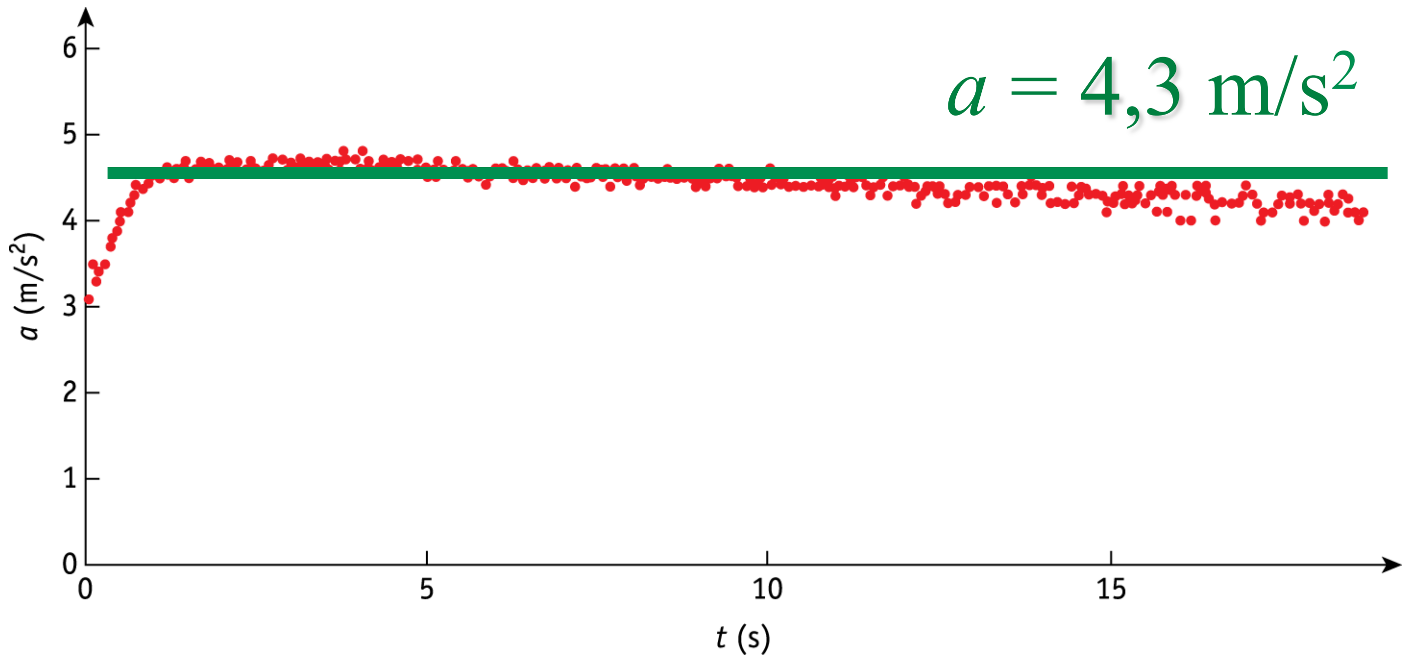
$$x(t) = x_0 + \overline{v}_{0\to t}\, t$$

$$v(t)^2 - v_0^2 = 2a[x(t) - x_0]$$

- Resolvem praticamente qualquer problema unidimensional

# Exemplo: decolagem de avião (1)

- Experimento: medir a aceleração durante a decolagem de um avião
- Resultado: Aceleração constante é uma boa aproximação



# Exemplo: decolagem de avião (2)

*Questão 1:*

- Presumindo uma aceleração constante de $a$ =4,3 m/s$^2$, começando do repouso, qual é a velocidade de decolagem da aeronave alcançada depois dos 18s?

*Resposta 1:*

- A aeronave acelera de um ponto de partida parado: velocidade inicial é igual a 0

$$v(t) = v_0 + at$$

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2} a t^2$$

$$\bar{v}_{0\to t} = \tfrac{1}{2}[v_0 + v(t)]$$

$$x(t) = x_0 + \bar{v}_{0\to t} t$$

$$v(t)^2 - v_0^2 = 2a[x(t) - x_0]$$

$$a = 4{,}3\, {}^{m}\!/_{s^2}$$

$$v_0 = 0$$

$$t_1 = 18s$$

$$\xleftrightarrow{v(t_1)?}$$

$$v(t_1) = v_0 + at_1 = 0 + (4{,}3 \text{ m/s}^2)(18 \text{ s}) = 77{,}4 \text{ m/s } (175 \text{ mph})$$

# Exemplo: decolagem de avião (3)

*Questão 2:*

- Que distância o avião percorreu até a decolagem?

*Resposta 2:*

$$a = 4{,}3\, m/s^2$$
$$v_0 = 0$$
$$x_0 = 0$$
$$t_1 = 18\, s$$

$$\xleftrightarrow{x(t_1)?}$$

$$v(t) = v_0 + at$$
$$x(t) = x_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2} a t^2$$
$$\bar{v}_{0\to t} = \tfrac{1}{2}[v_0 + v(t)]$$
$$x(t) = x_0 + \bar{v}_{0\to t}\, t$$
$$v(t)^2 - v_0^2 = 2a[x(t) - x_0]$$

$$x(t_1) = x_0 + v_0 t_1 + \tfrac{1}{2} a t_1^{\,2} = \tfrac{1}{2}(4{,}3\ \mathrm{m/s^2})(18\ \mathrm{s})^2$$
$$= 697\ \mathrm{m}\ (2{,}290\ \mathrm{ft})$$

A pista principal no aeroporto de Lansing tem 7500 pés

# Vetores de posição, velocidade e aceleração

- Relacionados por derivadas e integrais

$$x(t)$$

$$\Downarrow$$

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

$$\Downarrow$$

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt}$$

$$x(t) = x_0 + \int_0^t v(t')dt'$$

$$\Uparrow$$

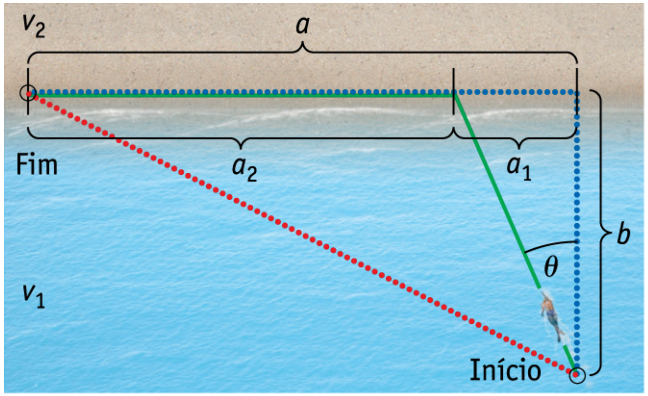
$$v(t) = v_0 + \int_0^t a(t')dt'$$

$$\Uparrow$$

$$a(t)$$

# Aquathlon (1)

- O Aquathlon consiste em duas partes, uma prova de natação (distância b) seguida de uma corrida (distância a).
  $a = 3\ \text{km}; b = 1{,}5\ \text{km}$
- O atleta nada com velocidade escalar
  $v_1 = 3{,}5\ \text{km/h}$ e corre com velocidade escalar
  $v_2 = 14\ \text{km/h}$




*Questão:*

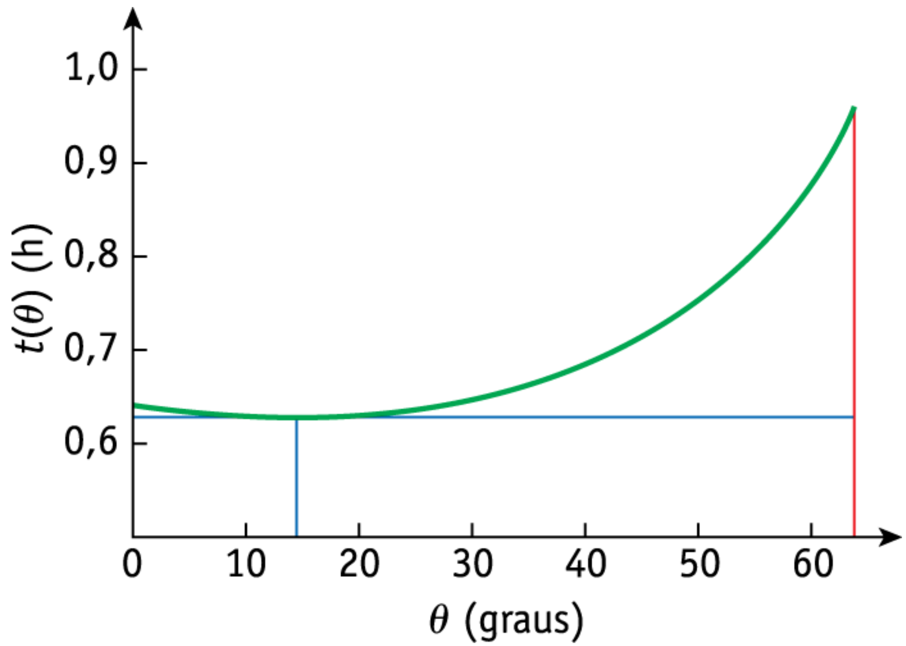
Que ângulo $\theta$ resultará no menor tempo de chegada?

*Resposta:*

1) A linha vermelha pontilhada marca a menor distância entre o ponto de partida e a linha de chegada.

$$\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1{,}5^2 + 3^2}\ \text{km} = 3{,}354\ \text{km}$$

# Aquathlon (2)




$$t(\theta)=\frac{\sqrt{a_1^2+b^2}}{v_1}+\frac{a_2}{v_2}=\frac{\sqrt{(1+\tan^2\theta)b^2}}{v_1}+\frac{a-b\tan\theta}{v_2}=\frac{b}{v_1\cos\theta}+\frac{a-b\tan\theta}{v_2}$$

# Aquathlon (3)

- Para encontrar o tempo mínimo, obtemos a derivada de $t(\theta)$ referente a $\theta$

$$\frac{d}{d\theta}\left(\frac{b}{v_1\cos\theta}\right)=\frac{b}{v_1}\sec\theta\tan\theta=\frac{b\tan\theta}{v_1\cos\theta}$$ (primeira parte)

$$\frac{d}{d\theta}\left(\frac{a-b\tan\theta}{v_2}\right)=\frac{d}{d\theta}\left(\frac{a}{v_2}\right)-\frac{d}{d\theta}\left(\frac{b\tan\theta}{v_2}\right)=0=\frac{b}{v_2}\sec^2\theta=\frac{b}{v_2\cos^2\theta}$$ (segunda parte)

$$\frac{dt(\theta)}{d\theta}=\frac{b\tan\theta}{v_1\cos\theta}-\frac{b}{v_2\cos^2\theta}=\frac{b\left(\text{sen}\,\theta/\cos\theta\right)}{v_1\cos\theta}-\frac{b}{v_2\cos^2\theta}=\frac{b\,\text{sen}\,\theta}{v_1\cos^2\theta}-\frac{b}{v_2\cos^2\theta}$$

- Agora encontramos o ângulo $\theta_m$ em que a derivada é zerada

$$\frac{dt(\theta)}{d\theta}=0\Rightarrow v_2\,\text{sen}\,\theta_m=v_1\Rightarrow \text{sen}\,\theta_m=\frac{v_1}{v_2}$$

- O resultado do melhor trajeto não depende das distâncias *a* e *b*

$$\theta_m=\text{sen}^{-1}(3{,}5/14)=14{,}48°$$ Divirta-se com cálculo!

Mas sim da razão entre as velocidades escalares na água $v_1$ e em terra $v_2$

# Aceleração da gravidade

Nesse caso $a_y = -g$ e $a_x = 0$. Na direção x, $v_x$ é constante!

componente x de ***r***

$$x = x_0 + v_{0x}t$$

componente x de ***v*** (constante)

$$v_x = v_{0x}$$

componente y de ***r***

$$y = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$$

componente y de ***v***

$$v_y = v_{0y} - gt$$

em t =0

$$\boldsymbol{r_0} = x_0\boldsymbol{i} + y_0\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{v_0} = v_{0x}\boldsymbol{i} + v_{0y}\boldsymbol{j}$$

# Aceleração da gravidade

Se tomamos $x_0 = y_0 = 0$ (saindo da origem)

de $x = v_{0x}\,t$ temos $t = x/v_{0x}$

substituindo na equação para $y$
encontramos a equação da trajetória

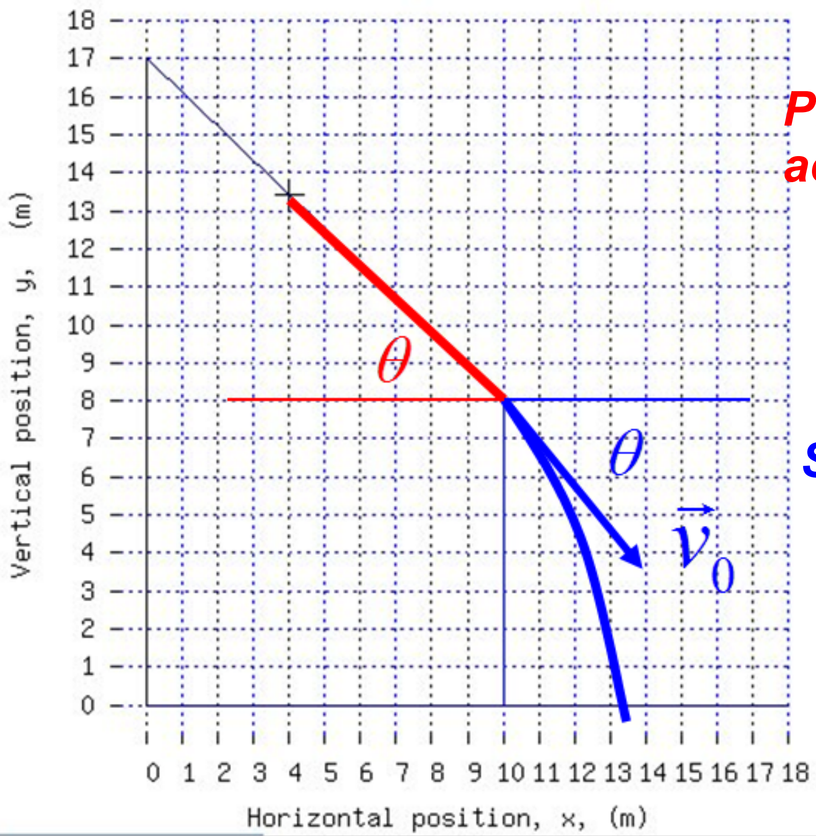
$$y = \frac{v_{0y}}{v_{0x}}x - \frac{1}{2}\frac{g}{v_{0x}^2}x^2$$

Equação de uma parábola!

Foto estroboscópica do movimento parabólico

# Exemplo: problema da moeda (1)

Planet X has an acceleration due to gravity of 6.00 m/s$^2$. An astronaut places a coin at the position marked with (+) on the large incline outlined on the graph below and lets it slide, releasing it at rest. Assume that there is no friction for the coin on the incline. Calculate the horizontal distance from the edge of the ramp to where the coin hits the ground (i.e., y=0).




*Primeira parte: movimento em linha reta com aceleração constante (eixo x = plano inclinado)*

$$a = g' \operatorname{sen}\theta$$

*Adquire velocidade ao longo do plano*

*Segunda parte: movimento ideal de projéteis*

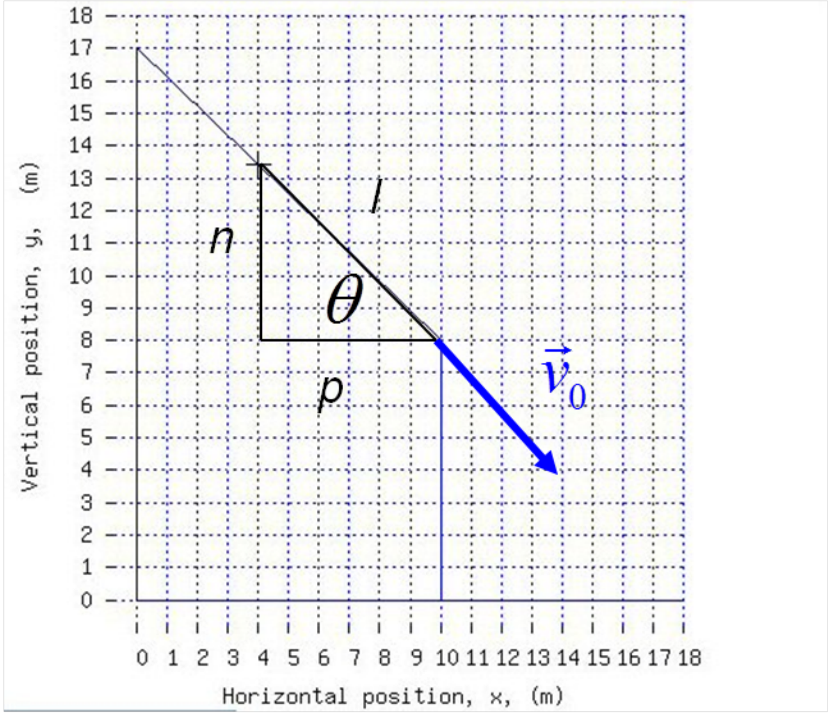
$$\vec{a} = -g'\hat{e}_y$$

$$x_0 = 10 \qquad v_{0x} = v_0 \cos\theta$$

$$y_0 = 8 \qquad v_{0y} = v_0 \operatorname{sen}\theta$$

# Exemplo: problema da moeda (2)

- Movimento em linha reta




$$a = g'\operatorname{sen}\theta$$

$$\tan\theta = \frac{n}{p}$$

$$"v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)"$$

$$l = \frac{p}{\cos\theta}$$

$$v = \sqrt{2al} = \sqrt{2g'\operatorname{sen}\theta \, \frac{p}{\cos\theta}} = \sqrt{2g'n}$$

Second Part

$$v_0 = \sqrt{2g'n}$$

# Exemplo: problema da moeda (3)

- Movimento ideal de projéteis $y = \left( y_0 - \frac{v_{y0} x_0}{v_{x0}} - \frac{g x_0^2}{2 v_{x0}^2} \right) + \left( \frac{v_{y0}}{v_{x0}} + \frac{g x_0}{2 v_{x0}^2} \right) x - \frac{g}{2 v_{x0}^2} x^2$

$$y = \left( y_0 - x_0 \left\{ \frac{v_{y0}}{v_{x0}} \right\} - \frac{g' x_0^2}{2 \left\{ v_{x0}^2 \right\}} \right) + \left( \left\{ \frac{v_{y0}}{v_{x0}} \right\} + \frac{g' x_0}{2 \left\{ v_{x0}^2 \right\}} \right) x - \frac{g'}{2 \left\{ v_{x0}^2 \right\}} x^2$$

with $v_{x0} = v_0 \cos\theta_0$ Remember $\langle \theta_0 < 0 \rangle$

and $v_{y0} = v_0 \operatorname{sen}\theta_0$

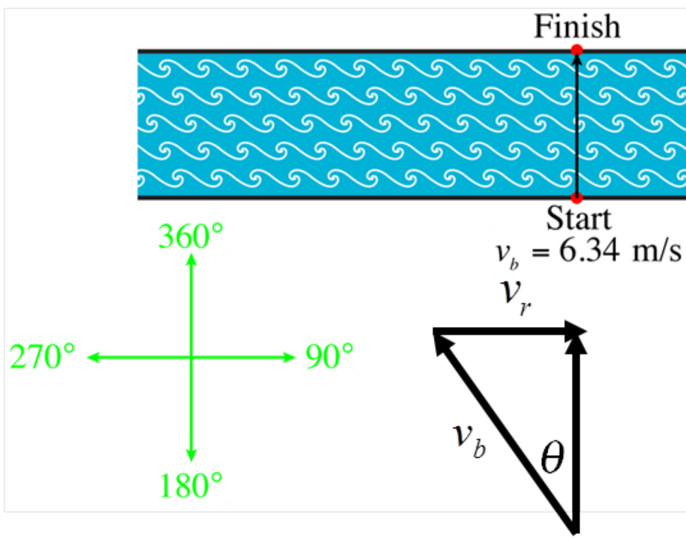
$$y = \left( y_0 - x_0 \tan\theta_0 - \frac{g' x_0^2}{2 \cos^2\theta_0 v_0^2} \right) + \left( \tan\theta_0 + \frac{g' x_0}{2 \cos^2\theta_0 v_0^2} \right) x - \frac{g'}{2 \cos^2\theta_0 v_0^2} x^2$$

- (positivo) valor de $x$-$x_0$ tal que $y(x) = 0$? $ax^2 + bx + c = 0$

=> Equação quadrática de $x$ para resolver $y = y_0 + x \tan\theta_0 - \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2\theta_0} x^2$

# Travessia de balsa

- O capitão de uma balsa quer viajar diretamente através de um rio que flui para leste com uma velocidade escalar de 1,07 m/s. Ele começa na margem sul do rio e quer chegar até a margem norte viajando em linha reta. O barco tem velocidade escalar de 6,34 m/s referente à água. Para qual direção, em graus, o capitão deve guiar o barco? Note que a 90º está o leste, a 180º está o sul, a 270º está o oeste, e a 360º está o norte.




$$\operatorname{sen}\theta = \frac{v_r}{v_b}$$

$$\theta = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{v_r}{v_b}\right) = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{1{,}07\ \text{m/s}}{6{,}34\ \text{m/s}}\right) = 9{,}71°$$

Captain must steer 360° - 9,71° = 350,3°

# Leis de Newton

- Primeira lei de Newton:
  - Na ausência de uma força externa sobre um objeto, o objeto permanecerá em repouso se já estava em repouso; ou se estivesse em movimento, permanecerá em movimento com a mesma velocidade.
- Segunda lei de Newton:
  - Se existe uma força externa resultante $\vec{F}_{net}$ atuando sobre um objeto com massa, a força causará uma aceleração, : $\vec{a}$

$$\vec{F}_{net} = m\vec{a}$$

- Terceira lei de Newton
  - As forças que dois objetos em interação exercem entre si são sempre exatamente iguais em módulo e com sentidos opostos.

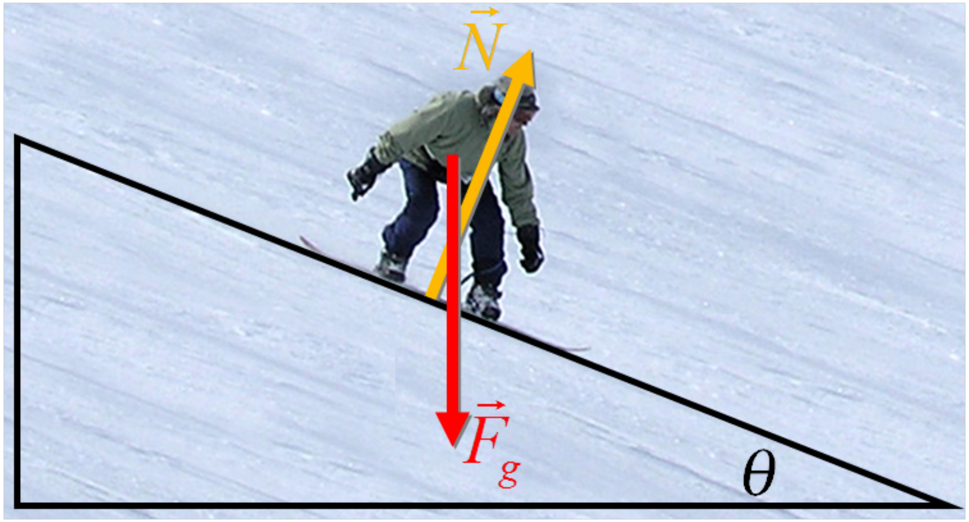
$$\vec{F}_{1,2} = -\vec{F}_{2,1}$$

# Plano inclinado (1)

- Situação típica: um objeto escorrega para baixo por um plano com algum ângulo em relação à horizontal
- Exemplo: *snowboard*

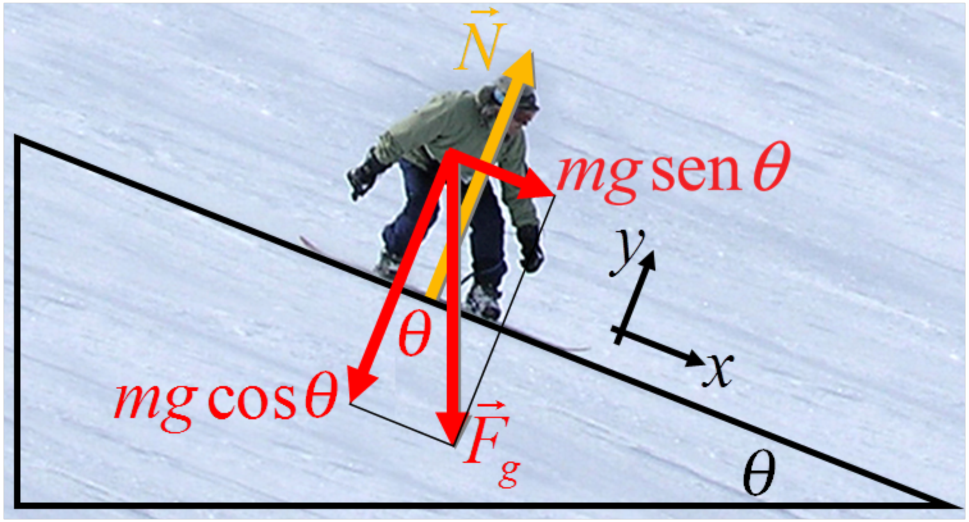
# Plano inclinado (2)

- Primeiro passo: Desenhe o plano e o ângulo
- Desenhe todas as forças que agem sobre o objeto deslizante
  - Neste caso: gravidade e força normal
  - Em geral também há atrito (despreze por enquanto)
- Primeira observação importante: Os vetores força somados não são 0!



# Plano inclinado (3)

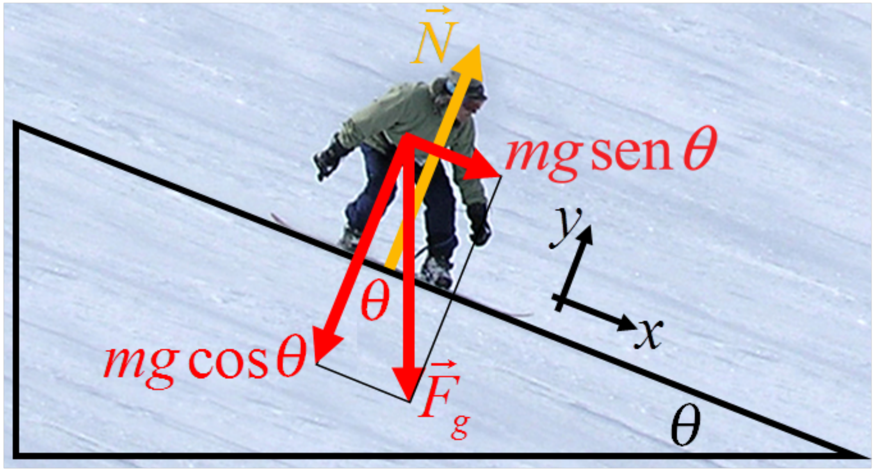
- Segundo passo: escolha um sistema de coordenadas conveniente
- Para problemas de plano inclinado, use o eixo *x* ao longo do plano (positivo para a direita, e o eixo *y* perpendicular a ele, obviamente)
- Nota: a força normal tem apenas uma componente no sentido *y*
- Decomponha a força peso em componentes



# Plano inclinado (5)

- Não há movimento no sentido y => não há força resultante no sentido y
- A soma de todas as componentes tem que ser igual a 0 neste sentido

$$F_{net,y} = F_{g,y} + N = 0$$
$$\Rightarrow -mg\cos\theta + N = 0$$
$$\Rightarrow N = mg\cos\theta$$




(resultado bastante comum)

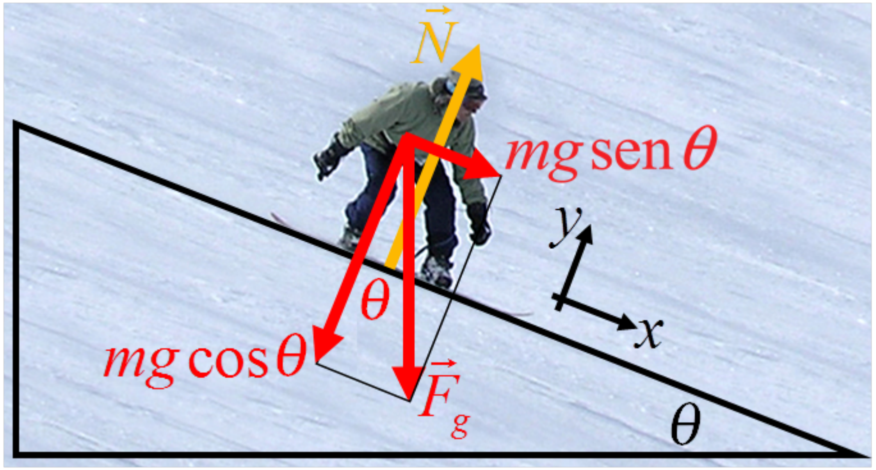
- Esta equação determina a força normal
- A força normal equilibra a componente y do peso do esquiador

# Plano inclinado (6)

- Exemplo: *snowboard* (continuação) - componente *x*
  - A componente de força no sentido x já foi dada.
  - Agora podemos usar a segunda lei de Newton para determinar a aceleração

$$F_{net,x} = F_{x,g} = mg \operatorname{sen} \theta = ma_x$$

$$\Rightarrow a_x = g \operatorname{sen} \theta$$

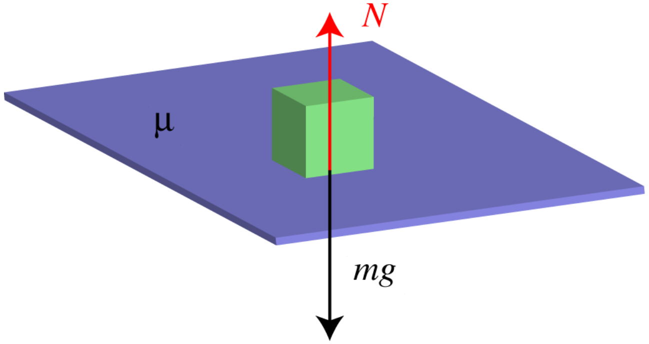



  - Observe que a massa do objeto foi anulada nesta equação => Todos os objetos tem a mesma aceleração neste plano, independente de sua massa.
  - Podemos escrever a equação do vetor aceleração: $\vec{a} = (g \operatorname{sen} \theta)\hat{x}$
  - Repare: a aceleração se aproxima de 0 na medida em que o ângulo se aproxima de 0. Conforme esperado!

# Dois tipos de atrito

- Existem dois tipos de atrito
  - Atrito cinético
    - Objeto em movimento
  - Atrito estático
    - Objeto em repouso; a força de atrito estático tem um valor máximo
- Ambos os tipos de atrito são proporcionais à força normal

$$f = \mu N$$



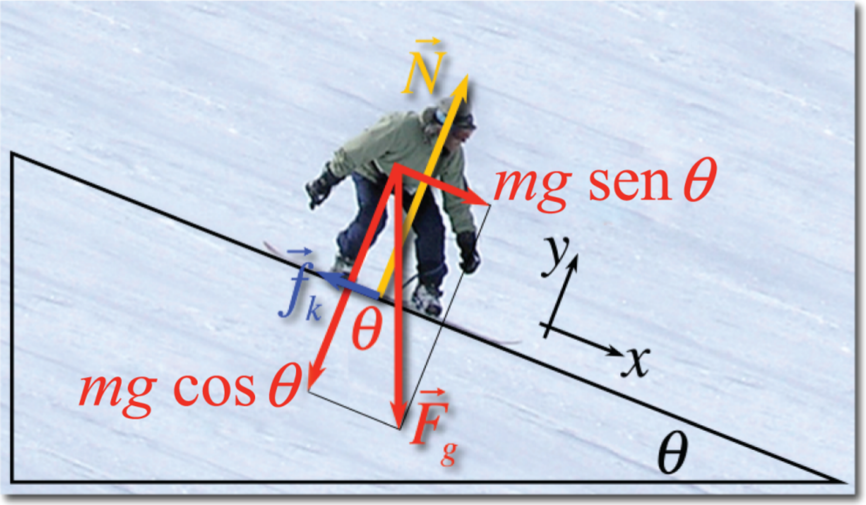

- O coeficiente $\mu$ sempre é maior que zero e normalmente é menor que 1
- O coeficiente é diferente para o atrito cinético e para o atrito estático

# Plano inclinado + atrito

- Agora acrescente a força de atrito (repare na seta azul)
  - Sentido: oposto ao movimento, ou seja, para cima da montanha
  - Módulo (use atrito cinético, o esquiador está em movimento)

$$f_k = \mu_k N = \mu_k mg\cos\theta$$

  - A segunda lei de Newton no sentido x:




$$\sum_i F_{x,i} = mg\,\mathrm{sen}\,\theta - \mu_k mg\cos\theta = ma_x$$

  - Resultado final: $a_x = g(\mathrm{sen}\,\theta - \mu_k\cos\theta)$

# Forças de arraste e velocidade terminal

Velocidades altas

Velocidades baixas

$$F_D = bv + cv^2$$

Um barco navega vom velocidade $v_0$ devido a força de seu motor. No tempo $t_0$ o motor é desligado. A partir deste momento o barco começa a diminuir sua velocidade até parar.

a) Descreva o diagrama de forças antes do tempo $t_0$.
b) Descreva o diagrama de forças para tempos $t_0$ posteriores a $t_0$.
c) Encontre a forma da diminuição da velocidade neste movimento.

a) $t < t_0$ $F_m = F_v$ 1ª Lei $v = v_0$


b) $T > t_0$ $F_v$


c) $v(t) = v_0 \exp[-b/m\ (t-t_0)]$