marker BA 公式推导

李代数求导基础

有四种方式进行李代数的求导： gtsam作者笔记里的推导方式，strasdat博士论文里的推导方式，TUM kerl硕士论文里的推导方式，最后就是barfoot的state esitamtion for robotics一书中的推导了。最直观简介的是gtsam和kerl的推导，最完备最可扩展的推导是barfoot的方式，也就是高翔书上的推导。

目的：空间中一点P_w,通过T_{cw}转换到相机坐标系下P_c,高斯牛顿的时候需要不断调整优化T_{cw}.

这时就有了两个思路：

1. 假设$T_{c'c} = exp(\hat{\delta\xi})$是微小增量, $T_{c'w} = exp(\hat{\delta\xi})T_{cw} = exp(\hat{\delta\xi})exp(\hat{\xi})$。注意小增量是直接放在李代数的。在推导前，先熟悉一个性质,下面公式中粗体$\mathbf{P}$是P的齐次坐标形式。

   $$\hat{\xi}\mathbf{P} = \begin{bmatrix}\hat{\omega} & \mathbf{v} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P \\ 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\omega \times P + \mathbf{v} \\ \mathbf{0}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\hat{P} & \mathbf{I}_3 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\omega \\ \mathbf{v}\end{bmatrix}$$

   有了这个性质，可以开始推导了，推导过程省略齐次坐标最后一行

   $$\begin{aligned}\frac{\partial(P_{c'})}{\partial(\delta\xi)} &= \frac{\partial(exp(\hat{\delta\xi})T_{cw}P_w)}{\partial(\delta\xi)} \\ &\approx \frac{\partial((I+\hat{\delta\xi})P_c)}{\partial(\delta\xi)} = \frac{\partial(\hat{\delta\xi}P_c)}{\partial(\delta\xi)} = [[-P_c]_\times, \mathbf{I}_3]_{3\times 6} \\ &= \begin{pmatrix}0 & z & -y & 1 & 0 & 0 \\ -z & 0 & x & 0 & 1 & 0 \\ y & -x & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}_{3\times 6}\end{aligned}$$

   这里$[*]_\times$**和**$\hat{(*)}$**都是表示把向量转换成反对称矩阵**,采用两种形式纯粹是为了书写清楚，有的时候式子太长了，用hat括不下。

2. 另一个思路是$T_{c'w} = exp([\delta\xi + \xi]_\times)$。这里是直接在李代数上叠加一个微小变量。

   $$\frac{\partial(exp(\hat{\xi})P_w)}{\partial(\delta\xi)} = \lim_{\delta\xi \to 0}\frac{exp([\delta\xi + \xi]_\times)P_w - exp(\hat{\xi})P_w}{\delta\xi}$$

   注意分子上面减去的那一部分和$\delta\xi$没关系，可以直接忽视，问题是

   $$exp([\delta\xi + \xi]_\times) = exp([\delta\xi]_\times + [\xi]_\times) \neq exp([\delta\xi]_\times)exp([\xi]_\times)$$

   这是因为矩阵的幂指数可不能随便展开，需要引入专门解决这个问题的**BCH公式**:

   $$ln(exp(\hat{\xi_1})exp(\hat{\xi}_2)) \approx \begin{cases}\mathbf{J}_\ell(\xi_2)^{-1}\xi_1 + \xi_2 & if \quad \xi_1 \quad is \quad small \\ \xi_1 + \mathbf{J}_\mathbf{r}(\xi_1)^{-1}\xi_2 & if \quad \xi_2 \quad is \quad small\end{cases}$$

   具体参见barfoot书公式(7.80)。上面等式中，不妨假设$\xi_1 = \delta\xi$,则有:

$$exp(\hat{\delta\xi})exp(\hat{\xi}) = exp([\xi + \mathbf{J}_\ell(\xi)^{-1}\delta\xi]_\times)$$

或者

$$exp([\delta\xi + \xi]_\times) = exp([\mathbf{J}_\ell(\xi)\delta\xi]_\times)exp(\hat{\xi})$$

回到求导的公式：

$$\begin{aligned}\lim_{\delta\xi\to 0}\frac{exp([\delta\xi+\xi]_\times)P_w - exp(\hat{\xi})P_w}{\delta\xi} &= \lim_{\delta\xi\to 0}\frac{exp([\mathbf{J}_\ell(\xi)\delta\xi]_\times)exp(\hat{\xi})P_w}{\delta\xi}\\ &= \lim_{\delta\xi\to 0}\frac{(\mathbf{I}+[\mathbf{J}_\ell(\xi)\delta\xi]_\times)exp(\hat{\xi})P_w}{\delta\xi}\\ &= \lim_{\delta\xi\to 0}\frac{[\mathbf{J}_\ell(\xi)\delta\xi]_\times P_c}{\delta\xi} = [[-P_c]_\times, \mathbf{I}_3]_{3\times 6}\mathbf{J}_\ell\end{aligned}$$

上述两种方式都没问题，相差一个$\mathbf{J}_\ell$,但是思路 1 更简单明了，也是gtsam作者采用的推导方式。

Bundle Adjustment中的雅克比

和上节一样，相机位姿为T_{cw},世界坐标系一点P_w，投影方程为

$$p = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \pi(P_c) = \begin{pmatrix} \frac{xf_x}{z} + c_x \\ \frac{yf_y}{z} + c_y \end{pmatrix}$$

容易得到

$$\frac{\partial p}{\partial P_c} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \end{pmatrix}_{2\times 3} = \begin{pmatrix} \frac{f_x}{z} & 0 & \frac{-xf_x}{z^2} \\ 0 & \frac{f_y}{z} & \frac{-yf_y}{z^2} \end{pmatrix}_{2\times 3}$$

其中$P_c = (x, y, z)^T$.

图像坐标误差对相机位姿增量求导

世界坐标系中 3 d点到像素坐标的转换为：

$$p = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \pi(T_{cw}P_w)$$

联立上文的两个偏导得

$$\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial(\delta\xi)} &= \frac{\partial p}{\partial P_c}\cdot\frac{\partial P_c}{\partial(\delta\xi)}\\ &= \begin{pmatrix} -\frac{xy}{z^2}f_x & (1+\frac{x^2}{z^2})f_x & -\frac{y}{z}f_x & \frac{1}{z}f_x & 0 & -\frac{x}{z^2}f_x \\ -(1+\frac{y^2}{z^2})f_y & \frac{xy}{z^2}f_y & \frac{x}{z}f_y & 0 & \frac{1}{z}f_y & -\frac{y}{z^2}f_y \end{pmatrix}_{2\times 6}\end{aligned} \tag{1}$$

图像坐标误差对坐标P_w求导

$$P_c = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = T_{cw}P_w = \begin{pmatrix} x_w r_1 + y_w r_2 + z_w r_3 + t_1 \\ x_w r_4 + y_w r_5 + z_w r_6 + t_2 \\ x_w r_7 + y_w r_8 + z_w r_9 + t_3 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial P_c}{\partial P_w} = \begin{pmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \\ r_4 & r_5 & r_6 \\ r_7 & r_8 & r_9 \end{pmatrix} = \mathbf{R}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial (P_w)} &= \frac{\partial p}{\partial P_c} \cdot \frac{\partial P_c}{\partial (P_w)} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{f_x}{z} & 0 & \frac{-x f_x}{z^2} \\ 0 & \frac{f_y}{z} & \frac{-y f_y}{z^2} \end{pmatrix}_{2\times 3} \cdot \mathbf{R} \end{aligned}$$

注意，上面的导数有的程序里面在前面都多了一个负号，这是由误差向量的定义是$e = p - p_{img}$还是$e = p_{img} - p$造成的,其中p_{img}是检测到的图像坐标，p是理论计算得到的坐标，上面我们采用的误差向量是$e = p - p_{img}$，orbslam中采用的是$e = p_{img} - p$。

marker bundle adjustment中的雅克比

marker作为一个平面，四个角点之间有空间位置的约束，因此不能简单把marker的ba问题当成四个点的ba问题。在这里，ba的时候，我们采用优化调整marker坐标系姿态来调整marker各角点的空间位置，优化变量从角点的位置变成了marker坐标系的 6 个变量。

marker以marker中心为原点，垂直于纸面向上为z,正对marker水平向右为x轴。marker坐标系到世界坐标系的转换T_{mw}。 marker边长为$size = 2s$，四个角点P_m^i在marker坐标系中的表示如下图所示。

已知图像某个角点坐标为$p_{img} = (u, v)^T$,为了和orbslam代码统一，这里我们采用$e = p_{img} - p$。

$$p = \pi(T_{cw}T_{mw}^{-1}P_m)$$

所以偏导数是两部分，一个是对相机T_{cw}，一个是对markerT_{mw}

角点图像坐标误差对相机位姿增量求导

和之前单点ba中的雅克比推导一样，这里可以直接将角点坐标P_m^i转换到相机坐标系下，$P_c^i = T_{cm}P_m^i$，雅克比的计算只需要把坐标P_c^i代入公式 1 即可，同时由于误差向量多了个负号，所以公式 1 前面要加一个负号。

角点图像坐标对marker位姿增量的求导

先把求雅克比时最难部分的表达式写出来： $P_c = T_{cw}T_{mw}^{-1}P_m$

$$\delta\xi = \xi_{m'm} \rightarrow \xi_{m'w} = \xi_{mw} + \delta\xi$$

有了表达式就可以依葫芦画瓢，跟思路 1 一样，推导过程如下：不过前面推导的时候，我们省略了齐次坐标的最后一行，这里我们先不省略。

$$
\begin{aligned}
\lim_{\delta\xi\to 0}\frac{\partial \mathbf{P_c}}{\partial(\delta\xi)} &= \lim_{\delta\xi\to 0}\frac{exp(\hat{\xi}_{cw})[exp(\hat{\delta\xi})exp(\hat{\xi}_{mw})]^{-1}\mathbf{P_m} - exp(\hat{\xi}_{cw})[exp(\hat{\xi}_{mw})]^{-1}\mathbf{P_m}}{\delta\xi} \\
&= \lim_{\delta\xi\to 0}\frac{exp(\hat{\xi}_{cw})exp(\hat{\xi}_{mw})^{-1}exp(\hat{\delta\xi})^{-1}\mathbf{P_m}}{\delta\xi} \\
&= \lim_{\delta\xi\to 0}\frac{T_{cw}T_{wm}exp(-\hat{\delta\xi})\mathbf{P_m}}{\delta\xi} \\
&= \lim_{\delta\xi\to 0}\frac{T_{cm}(I-\hat{\delta\xi})\mathbf{P_m}}{\delta\xi} \\
&= \lim_{\delta\xi\to 0}\frac{T_{cm}(-\hat{\delta\xi})\mathbf{P_m}}{\delta\xi} \\
&= T_{cm} * \begin{bmatrix} [P_m]_\times & -\mathbf{I}_3 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{cm} & \mathbf{t}_{cm} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [P_m]_\times & -\mathbf{I}_3 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

去掉最后一行对应的齐次坐标，可以得到没有其次坐标时的偏导数如下：

$$
\frac{\partial P_c}{\partial(\delta\xi)} = \mathbf{R}_{cm}\left[\, [P_m]_\times \quad -\mathbf{I}_3 \,\right]
$$

到这一步就知道为啥不省略齐次坐标最后一行了

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial p}{\partial(\delta\xi)} &= \frac{\partial p}{\partial P_c}\cdot\frac{\partial P_c}{\partial(\delta\xi)} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{f_x}{z} & 0 & \frac{-xf_x}{z^2} \\ 0 & \frac{f_y}{z} & \frac{-yf_y}{z^2} \end{pmatrix}_{2\times 3} \cdot \mathbf{R}_{cm} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -z & y & -1 & 0 & 0 \\ z & 0 & -x & 0 & -1 & 0 \\ -y & x & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}_{3\times 6}
\end{aligned} \tag{2}
$$