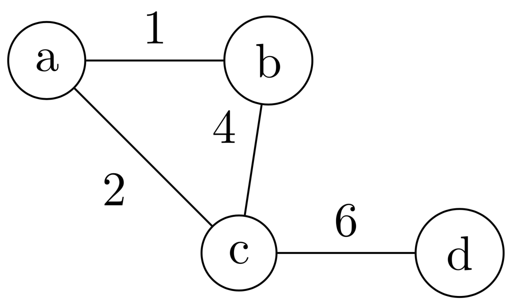
Algoritmekonstruksjon: Øving 2

Simen Keiland Fondevik

15. februar 2018

1 Oppgave 1

Skriv ut eksplisitt den grafiske matroiden for grafen i Figure 1.



Figur 1: Graf for oppgave 1.

Løsning. Den grafiske matroiden kan skrives som $M = (E, S)$ der E er mengden av kanter i grafen og S er alle delmengder av kanter som danner en skog i grafen. Det vil si,

$$
\begin{aligned}
E =& \{(a,b),\ (a,c),\ (b,c),\ (c,d)\} \\
S =& \{\{(a,b)\},\ \{(a,c)\},\ \{(b,c)\},\ \{(c,d)\}, \\
& \{(a,b),\ (b,c)\},\ \{(a,b),\ (a,c)\},\ \{(a,b),\ (c,d)\},\ \{(b,c),\ (c,d)\} \\
& \{(a,b),\ (a,c),\ (c,d)\},\ \{(a,b),\ (b,c),\ (c,d)\},\ \{(a,c),\ (b,c),\ (c,d)\}\}.
\end{aligned}
$$

□

Skriv ut hva T er for hver iterasjon i den gråadige algoritmen anvendt på denne matroiden.

Løsning. Den grådige algoritmen, gjengitt under, sorterer kantene i grafen etter ikke-økende vekter og velger grådig så fremt kanten ikke danner en sykel.

```
GREEDY(E, S, w; T):
1.       order the elements of E according to their weight such that
         E = {e1, e2, ...em} with w(e1) >= w(e2) >= ... >= w(em);
```

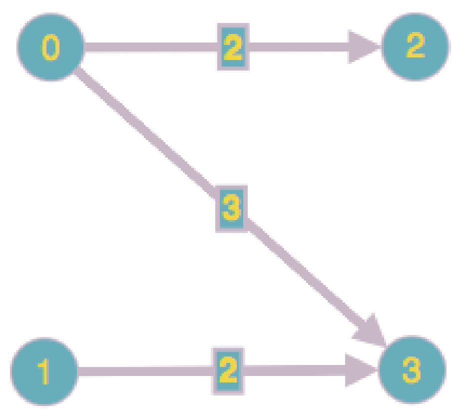
```
2.        T = empty set;
3.        for k = 1 to m:
4.                if T + {ek} in S then T = T + {ek};
```

For vår instans velges altså kantene (c,d), (b,c) og (a,c), i den rekkefølgen, dvs $T_0 = \emptyset$, $T_1 = \{(c,d)\}$, $T_2 = \{(c,d),\ (b,c)\}$, $T_3 = \{(c,d),\ (b,c),\ (a,c)\}$. □

2 Oppgave 2

Vis at matchingen i en graf G generelt ikke danner en matroide, selv ikke når G er bipartit.

Bevis. Vi kan definere en matroide som et uavhengighetssystem der det tilhørende optimeringsproblemet løses korrekt med den grådige algoritmen over. Påstanden kan enkelt vises ved et moteksempel. La G være den bipartitte grafen vist i Figure 2. Den grådige algoritmen vil velge kanten med vekt 3 og terminere. Dette er imidlertid ikke optimalt, da å velge de to andre kantene gir en samlet vekt på 4. Den grådige algoritmen feiler, og matching selv i bipartitte grafer □



Figur 2: Moteksempel for oppgave 2.

3 Oppgave 3

La $G = (E, V)$ være en sammenhengende graf som ikke er et tre. Vis at delmengder av E som inneholder ikke mer enn én sykel danner en matroide på E. Holder tilsvarende påstand om vi tillater to sykler?

Bevis. Teorem 5.2.1 i Jungickel gir en ekvivalens mellom at M er en matoride og at det for en hver $J, K \in S$ der $|J| = |K| + 1$ alltid finnes et element $a \in J \backslash K$ slik at $K \cup \{a\} \in S$. Anta problemet danner en matroide. Det betyr at for en J og K i S finnes et element a som beskrevet over. Eneste måten a ikke kan eksistere er hvis K er en en delmengde av J samtidig som det ekstra elementet i J danner en ny sykel i K om den legges til der (for ellers kunne en bare valgt som a et hvilket som helst annet element i $J \backslash K$). Dette betyr imidlerid at J i utgangspunktet har to sykler, og dermed er $J \notin S$. Vi har en selvmotisgelse, og dermed må problemet danne en matroide. (En kan eventuelt se på antall sammenkoplede komponenter i J og K, der vi feks.vet at antall komponenter i K er $|V| - |K| + 1$ hvis den har en sykel, og deretter bruke skuffeprinsippet og se at det alltid finnes en trygg kant å legge til).

Vi ser enkelt at samme argumentasjon kan generaliseres til at S inneholder alle delmengder med et vilkårlig antall sykler. □

4 Oppgave 4

***Vis at følgende algoritme er en** $1/2$**-approksimasjon for Knapsack.** Sorter først alle objektene etter synkende pris per størrelse slik at $v_1/s_1 \geq v_2/s_2 \geq \cdots \geq v_n/s_n$. La objektet med størst verdi betegnes $v^* = v_{i^*}$. Algoritmen velger de k første objektene som får plass i sekken, slik at $\sum_{i=1}^{k} v_i \leq B$ og $\sum_{i=1}^{k+1} v_i \geq B$, der B er kapasiteten til sekken. Returner* $\max(i^*, \ \{1, 2, \cdots k\})$

Bevis. Hvis vi kunne tatt med $k+1$ objekter ville vi fått verdien $\sum_{i=1}^{k+1} v_i > OPT$ der OPT er den optimale løsningen på instansen. Ulikheten kommer av at algoritmen i grunn fungerer som den grådige, korrekte, algoritmen for fractional knapsack, der fractional knapsack som kjent alltid har en minst like høy målfunksjonsverdi som tilsvarende 0-1-innstans. Siden fractional knapsack bare ville fått plass til deler av element $k+1$, ville dens optimale verdi blitt $\sum_{i=1}^{k} v_i + \alpha \cdot v_{k+1} \geq OPT$ for en konstant $0 \leq \alpha < 1$. Venstresiden av denne likningen består av to ledd, slik at skuffeprinsippet gir at minst ett av dem er større enn eller lik $OPT/2$. Første ledd er normaltilfellet av algoritmen over, mens for det andre leddet har vi alltid $v_{k+1} \leq v^*$. Vi ser dermed at algoritmen alltid resturer noe som ikke er mindre enn halvparten av den optimale løsningen. □

5 Oppgave 5

***Gitt følgende oppgaver å prosessere på formatet** (r_i, p_i) **der** r_i **er når oppgave** i **blir tilgjengelig og** p_i **er hvor lang tid det tar å utføre denne oppgaven. Hvilken oppgaveplan vil avrundingsalgoritmen generere, og hva er målverdien til denne løsningen?** Instans:* $(0, 10)$, $(8, 1), (11, 2)$, $(12, 2)$, $(11, 3)$.

Løsning. Avrundingsalgoritmen finner først en optimal løsning gitt at prosesser kan avbrytes og fortsettes på et senere tidspunkt. Dette kan gjøres i polynomtid med SRPT-regelen: Fra $t = 0$ til $t = 8$ gjøres deler av den første jobben. Deretter starter jobb 2, som fullføres ved $t = 9$. Jobb 1 får så fortsette til den er ferdig ved $t = 11$. Herfra starter jobb 3 siden denne vil fullføre først. Den er ferdig ved $t = 13$. Til slutt gjøres jobb 4 og 5, i den rekkefølgen, og disse fullfører ved henholdsvis $t = 15$ og $t = 18$. Dette er altså optimalt hvis prosessene kan deles opp. Avrundingsalgorimen planlegger nå jobbene i stigende rekkefølge etter utregnede fullførelsestider over. Det vil si; fra $t = 8$ til $t = 9$ utføres jobb 2, fra $t = 9$ til $t = 19$ gjøres jobb 1, i intervallet (19, 21) utføres jobb 3, deretter jobb 4 fra $t = 21$ til $t = 23$ og til sist jobb 5 fra $t = 23$ til $t = 26$. Summen av sluttidene, som er målfunksjonen, blir da $9 + 19 + 21 + 23 + 26 = 98$. □

Hva er den optimale oppgaveplanen for instansen over, og hva er målverdien til denne løsningen?

Løsning. Optimal planlegging vil for denne instansen være å utføre oppgavene i rekkefølgen de er oppgitt. Det git en verdi på målfunksjonen lik $10 + 11 + 13 + 15 + 18 = 67$. □

Lag en instans med minst tre oppgaver som overlapper der avrundingsalgoritmen vil gi optimalt svar.

Løsning. En instans der vi kun har tre oppgaver som alle starter likt vil åpenbart løses optimalt med avrundingsalgoritmen. □

6 Oppgave 6

Avrundingsalgoritmen for mengdedekkeproblemet runder opp løsningene hvis $x_J^* \geq 1/f$. Vis at vi også får en f-approksimasjon ved å runde opp løsningene hvis $x_J^* > 0$.

Bevis. Ved komplimentær slakkhet har vi at

$$x_j^* > 0 \Rightarrow \sum_{i:e_i \in S_j} y_i^* = w_j.$$

Å ta med alle mengder der restriksjonen er stram, er det samme som gjøres i kapittel 1.4 *Roudning a dual solution* i Williamson og Shmoys. Teorem 1.8 gir at algoritmen over er en f-approksimasjon. □