Algoritmekonstruksjon: Øving 3

Simen Keiland Fondevik

20. mars 2018

1 Oppgave 1

Finn en randomisert $1 - 1/k$-approksimasjon for maks k-kutt-problemet gitt en graf $G = (V, E)$ og ikke-negative kantvekter w_{ij} for alle $(i, j) \in E$.

Løsning. Maks 2-kutt er kjent fra pensum. Der ble noder fordelt tilfeldig med lik sannsynlighet er i hver mengde. Forsøker det samme her. La

$$X_{ij} = \begin{cases} 1, \ \exists a, b \ (i \in v_a, \ j \in v_b, \ a \neq b) \\ 0, \ \text{ellers} \end{cases} \tag{1}$$

slik at vi ønsker maksimere

$$Z = \sum_{(i,j) \in E} w_{i,j} X_{i,j}. \tag{2}$$

Forventningsverdien blir

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Z] &= \mathbb{E}\left[\sum_{(i,j)\in E} w_{i,j} X_{i,j}\right] = \sum_{(i,j)\in E} \mathbb{E}\left[w_{i,j} X_{i,j}\right] & (3) \\ &= \sum_{(i,j)\in E} w_{i,j} \Pr\left[\exists a, b \ (i \in v_a, \ j \in v_b, \ a \neq b)\right] & (4) \\ &= \Pr\left[(i,j) \text{ er i et kutt}\right] \sum_{(i,j)\in E} w_{i,j} & (5) \\ &= \frac{k-1}{k} \sum_{(i,j)\in E} w_{i,j} \geq \frac{k-1}{k} \, OPT = (1 - 1/k) \, OPT. & (6) \end{aligned}$$

Sannsynligheten kommer av at blant de k mulige mengdene kan b kun legges i $k-1$ mengder for ikke havne sammen med a. $\square$

2 Oppgave 2

***Gitt en graf* $G = (V, E)$ *og ikke-negative kantvekter* w_{ij} *for alle* $(i, j) \in E$*, finn en randomisert* $1/4$*-approksimasjon for maks rettede kutt-problemet med to mengder* U*,* W**

Løsning. Kjører samme metodikk som forrige oppgave; fordeler 50/50. La

$$X_{ij} = \begin{cases} 1, \ \exists a, b \ (i \in U, \ j \in W) \\ \quad 0, \ \text{ellers} \end{cases} \tag{7}$$

slik at vi ønsker maksimere

$$Z = \sum_{(i,j) \in E} w_{i,j} X_{i,j}. \tag{8}$$

Forventningsverdien blir

$$\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}\left[\sum_{(i,j)\in E} w_{i,j} X_{i,j}\right] = \sum_{(i,j)\in E} \mathbb{E}\left[w_{i,j} X_{i,j}\right] \tag{9}$$

$$= \sum_{(i,j)\in E} w_{i,j} \Pr\left[\exists a, b \ (i \in U, \ j \in W)\right] \tag{10}$$

$$= \Pr\left[i \text{ er i } U \text{ og } j \text{ er i } W\right] \sum_{(i,j)\in E} w_{i,j} \tag{11}$$

$$= \frac{1}{4} \sum_{(i,j)\in E} w_{i,j} \geq \frac{1}{4} \, OPT \tag{12}$$

$$\tag{13}$$

der sannsynligheten følger av produktregelen med sannsynlighet 0.5 for hver av hendelsene. □

3 Oppgave 3

Derandomiser den randomiserte algoritmen for maks kutt i seksjon 5.1 lærerboka. Hvordan velges om en node skal med i* U *eller* W*?

Løsning. Boka viser at for $Z = \sum_{(i,j)\in E} w_{i,j} X_{i,j}$ har vi $\mathbb{E}[Z] \geq \frac{1}{2}$. Sammenlikn $\mathbb{E}[Z|v_i \to U]$ og $\mathbb{E}[Z|v_i \to W]$ og velg den beste. Pil indikerer at en node plasseres i en mengde. La videre β_k betegne at $v_1 \to B_1 \wedge v_2 \to B_2 \wedge ... \wedge v_k \to B_k$, $B_i \in \{U, W\}$. Lov om total- og betinget sannsynlighet gir da at

$$\mathbb{E}[Z|\beta_k] = \mathbb{E}[Z|\beta_k, v_{k+1} \to U] \Pr\left[v_{k+1} \to U\right] + \mathbb{E}[Z|\beta_k, v_{k+1} \to W] \Pr\left[v_{k+1} \to W\right] \tag{14}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\mathbb{E}[Z|\beta_k, v_{k+1} \to U] + \mathbb{E}[Z|\beta_k, v_{k+1} \to W]\right). \tag{15}$$

Skuffeprinsippet gir da at enten $\mathbb{E}[Z|\beta_k, v_{k+1} \to U]$, $\mathbb{E}[Z|\beta_k, v_{k+1} \to W]$ eller begge er minst like stor som $\mathbb{E}[Z|\beta_k]$. Ved å velge den beste av disse to er vi altså garantert $\mathbb{E}[Z|\beta_{k+1}] \geq \mathbb{E}[Z|\beta_k]$, som ved induksjon impliserer $\mathbb{E}[Z|\beta_{|V|}] \geq \mathbb{E}[Z] \geq \frac{1}{2}\, OPT$. Siste ulikhet kommer av det boka allerede har utledet, og induksjonens grunntrinn, $\beta = \emptyset$, er trivielt. Hver enkelt forventningsverdi er dessuten enkel å regne ut; $\mathbb{E}[Z|\beta_k] = \sum_{(i,j)\in E} w_{i,j}\mathbb{E}[X_{i,j}|\beta_k]$. Valgene gjøres altså basert på forventningsverdi.

$\square$