Øving 3

Del 5 og 6

Spørsmål, mulige feil og annen hjelp tas via Piazza.
Gjennomgås 26.02.18

Oppgave 1 - Repetisjonsspørsmål til del 5

(a) Hva skal maksimeres i MAX SAT?

(b) Hva skal maksimeres i MAX CUT?

(c) Hvordan velges verdien til x_i i den randomiserte 1/2-approksimeringsalgoritmen for MAX SAT?

(d) Hva er MAX E3SAT?

(e) Hvordan velger man om en node $v \in V$ skal plasseres i U eller W i den randomiserte 1/2-approksimeringsalgoritmen for MAX CUT?

(f) Hva kaller de metoden de bruker for derandomisering i boka?

(g) Hvilken approksimasjonsgrad har den randomiserte avrundingsalgoritmen for MAX SAT?

(h) Hvordan greide vi å oppnå randomisert $\frac{3}{4}$-approksimeringsalgoritme for MAX SAT?

Svarene finner du bakerst i dette dokumentet. Prøv å svare før du ser!

Oppgave 2

Tatt fra Williamson & Schmoys – exercise 5.1

In the *maximum k-cut problem*, we are given an undirected graph $G = (V, E)$, and nonnegative weights $w_{ij} \geq 0$ for all $(i, j) \in E$. The goal is to partition the vertex set V into k parts $V_1, \ldots, V_k$ so as to maximize the weight of all edges whose endpoints are in different parts (i.e., $max_{(i,j)\in E:i\in V_a, j\in V_b, a\neq b} w_{ij}$).

Give a randomized $\frac{k-1}{k}$-approximation algorithm for the MAX k-CUT problem.

! Husk å begrunne at algoritmen du oppgir er en $\frac{k-1}{k}$-approksimeringsalgoritme.

Oppgave 3

Tatt fra Williamson & Schmoys – exercise 5.3

In the *maximum directed cut problem* (sometimes called MAX DICUT) we are given as input a directed graph $G = (V, A)$. Each directed arc $(i, j) \in A$ has nonnegative weight $w_{ij} \geq 0$. The goal is to partition V into two sets U and $W = V - U$ so as to maximize the total weight of the arcs going from U to W (that is, arcs (i, j) with $i \in U$ and $j \in W$).

Give a randomized $\frac{1}{4}$-approximation algorithm for this problem.

! Husk å begrunne at algoritmen du oppgir er en $\frac{1}{4}$-approksimeringsalgoritme.

Oppgave 4

Derandomiser den enkle randomiserte algoritmen for MAX CUT fra seksjon 5.1 (s. 99). Hvordan velger du om en node skal med i U eller W?

Oppgave 5 - Repetisjonsspørsmål til del 6

(a) Hvorfor er primal-dual-algoritmer ofte raske i praksis sammenlignet med algoritmer som må løse lineærprogram?

(b) Hvordan velger man neste element i primal-dual-algoritmen for mendgedekking?

(c) Hva er sykelkritisk nodemengde-problemet (feedback vertex set problem)?

(d) I primal-dual-algoritmen for sykelkritisk nodemengde kunne vi ikke øke hvilken som helst dual-variabel. Hvilken valgte vi å øke i hver iterasjon?

(e) I primal-dual-algoritmen for korteste vei returnerte vi ikke alle kantene vi la til i løsningen underveis. Hvilke returnerte vi?

Svarene finner du bakerst i dette dokumentet. Prøv å svare før du ser!

Oppgave 6

Tatt fra Williamson & Schmoys – exercise 7.2

Consider the *multicut problem in trees.* In this problem, we are given a tree $T = (V, E)$, k pairs of vertices (s_i, t_i), and costs $c_e \geq 0$ for each edge $e \in E$. The goal is to find a minimum-cost set of edges F such that for all i, s_i and t_i are in different connected components of $G' = (V, E - F)$.

Let P_i be the set of edges in the unique path in T between s_i and t_i. Then we can formulate the problem as the following integer program:

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \sum_{e \in E} c_e x_e \\ \text{subject to} \quad & \sum_{e \in P_i} x_e \geq 1, \qquad && 1 \leq i \leq k, \\ & x_e \in \{0, 1\}, e \in E. \end{aligned}$$

Suppose we root the tree at an arbitrary vertex r. Let $depth(v)$ be the number of edges on the path from v to r. Let $lca(s_i, t_i)$ be the vertex v on the path from s_i to t_i whose depth is minimum. Suppose we use the primal-dual method to solve this problem, where the dual variable we increase in each iteration corresponds to the violated constraint that maximizes $depth(lca(s_i, t_i))$.

Prove that this gives a 2-approximation algorithm for the multicut problem in trees.

Hint: Prøv å følge samme framgangsmåte som i boka. Her følger noen punkter du kan gjøre/tenke på.

1. Sett opp dualen.
2. Sett opp primal-dual-algoritmen for dette problemet på måten det beskrives i oppgaven.
3. Kan du fjerne unødvendige elementer i løsningen slik som i seksjon 7.3?
4. Sett opp et uttrykk for målverdien uttrykt med dual-variablene, og deretter prøv å omskrive til å bruke kardinaliteten av en mengde.
5. Greier du å begrense størrelsen til denne kardinaliteten? Og hvordan kan du bruke det til å gi en approksimasjonsgaranti?

Fremdeles vanskelig eller står du fast? Spør om hjelp eller gå gjennom framgangsmåten i boka en gang til.

! Svar på repetisjonsspørsmålene på neste side !

Svar på repetisjonsspørsmål i oppgave 1

(a) Summen av vektene til de oppfyllte termene (clauses)

(b) Summen av vektene til kantene som går på tvers av de to nodemengdene U og W.

(c) Den settes tilfeldig med lik sannsynlighet til enten **sann** eller **usann**.

(d) Det er en variant av MAX SAT der alle termer har lengde 3 - altså $l_j = 3$ for alle j. Alle termer har 3 literaler.

(e) De plasserer tilfeldig med lik sannsynlighet i enten U eller W.

(f) "Betinget sannsynlighet-metoden" - the method of conditional expectations

(g) $1 - \frac{1}{e}$

(h) Vi velger den beste løsningen når vi bruker både den enkle randomiserte algoritmen fra seksjon 5.1 og den randomiserte avrundingsalgoritmen.

Svar på repetisjonsspørsmål i oppgave 5

(a) Fordi den er kombinatorisk.

(b) Man velger bare et element som er udekket.

(c) Dette beskrives i starten av seksjon 7.2 (s. 124).

(d) Den som tilhørte den sykelen med færrest noder med grad 3 eller mer.

(e) De som ligger på en sti mellom s og t.