Übungsblatt 2

Aufgabe 2

1.

$17 + 22 + 45 \le c \cdot 1 \quad \Rightarrow \quad 84 \le c \quad \Rightarrow \quad 17 + 22 + 45 \in O(1)$

2.

$5n^3 + 12n^2 + 3n + 5 \ge c \cdot n^3$

$5 + \frac{12}{n} + \frac{3}{n^2} + \frac{5}{n^3} \ge c$

$\lim\limits_{n \to \infty} (5 + \frac{12}{n} + \frac{3}{n^2} + \frac{5}{n^3}) = 5 \ge c \Rightarrow$

$\Rightarrow 5n^3 + 12n^2 + 3n + 5 \in \Omega(n^3)$

3.

$2^{n+1} \le c \cdot 2^n$

$2 \cdot 2^n \le c \cdot 2^n$

$2 \le c \quad \Rightarrow \quad 2^{n+1} \in O(2^n)$

$2^{2n} = 4^n$

$4^n \notin O(2^n)$

4.

Für $n \to \infty$: $log(n!) = log(\sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n)$

$log(\sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n) = log(\sqrt{2\pi}) + \frac{1}{2}log(n) + n\ log(n) \approx n\ log\ n$

$\Rightarrow log(n!) \in \Theta(n\ log\ n)$

5.

$2^n \le c \cdot n!$

$\frac{2^n}{n!} \le c$

$\lim\limits_{n \to \infty} \frac{2^n}{n!} = 0 \le c$

$\Rightarrow 2^n \in O(n!)$

$n! \le c \cdot n^n$

$\lim\limits_{n \to \infty} \frac{n!}{n^n} = 0 \le c$

$\Rightarrow n! \in O(n^n)$

6.

$6^{-5}n^{1,25} = \Theta(\sqrt{n}) \Rightarrow 6^{-5}n^{1,25} = O(\sqrt{n})$
$6^{-5}n^{1,25} \leq c \cdot \sqrt{n}$
$\frac{n^{1,25}}{6^5 n^{0,5}} = 6^{-5}n^{0,75} \leq c$
$\Rightarrow\ 6^{-5}n^{1,25} \notin O(\sqrt{n})\ \Rightarrow\ 6^{-5}n^{1,25} \notin \Theta(\sqrt{n})$

Aufgabe 3

$IA:\ f(0, m) = m + 1\ \rightarrow\ \ terminiert\ \forall\ m$
$IV\ :\ f(n-1, m)\ terminiert\ \forall m\ \Rightarrow\ f(n, m)\ terminiert\ \forall m$
$IS:$

$IA'\ (m = 0):\ f(n, m) = f(n-1, 1)\ \rightarrow\ terminiert\ nach\ IV$
$IV':\ f(n, m-1)\ terminiert\ \ \Rightarrow\ f(n, m)\ terminiert$
$IS':\ f(n, m) = f(n-1,\ f(n, m-1))$
$f(n, m-1)\ terminiert\ nach\ IV'\ \Rightarrow$
$\Rightarrow f(n, m) = f(n-1, v)\ \ \rightarrow\ terminiert\ nach\ IV$

Aufgabe 4

1.

$T(n) = 4T(n/2) + n =$
$= 4(4T(n/4) + n/2) + n = 4^2 T(n/2^2) + (2^2 - 1)n =$
$= 4(4(4T(n/8) + n/4) + n/2) + n = 4^3 T(n/2^3) + (2^3 - 1)n =$
$= 4^i T(n/2^i) + (2^i - 1)n$
Für welches i wird $T(1)$ erreicht
$n/2^i = 1\ \Rightarrow\ log\ n = i$
Einsetzen:
$4^{log\ n} T(n/2^{log\ n}) + (2^{log\ n} - 1)n =$
$= 2^{log\ n} \cdot 2^{log\ n} \cdot T(1) + (n-1)n =$
$= n^2 + n^2 - n = \Theta(n^2)$

2.

$T(n) = 2T(n/4) + \sqrt{n} =$
$= 2(2T(n/16) + \sqrt{n}/2) + \sqrt{n} = 2^2 T(n/4^2) + 2\sqrt{n} =$
$= 2(2(2T(n/64) + \sqrt{n}/4) + \sqrt{n}/2) + \sqrt{n} = 2^3 T(n/4^3) + 3\sqrt{n} =$
$= 2^i T(n/4^i) + i\sqrt{n}$
Für welches i wird $T(1)$ erreicht

$n/4^i = 1 \;\Rightarrow\; log_4\, n \;=\; i$

Einsetzen:

$2^{log_4 n}\, T(n/4^{log_4 n}) + log_4 n \cdot \sqrt{n} =$

$= \sqrt{n}\; T(1) + log_4 n \cdot \sqrt{n} = (1 + log_4 n)\sqrt{n}$

$= \Theta(\sqrt{n}\; log\; n)$

3.

$T(n) = 2T(n-1) + n^2 =$

$= 2(2T(n-2) + (n-1)^2) + n^2 =$

$= 2(2(2T(n-3) + (n-2)^2) + (n-1)^2) + n^2 =$

$= 2^i T(n-i) + \sum_{k=0}^{i-1} 2^k (n-k)^2$

Für welches i wird $T(3)$ erreicht:

$n - i = 3 \;\Rightarrow\; i = n - 3$

Einsetzen:

$2^{n-3} T(3) + \sum_{k=0}^{n-4} 2^k (n-k)^2 = 2^{n-3} + (n^2 + 2(n-1)^2 + ... + 2^{n-4} 4^2) =$

$= 2^{n-3} + \sum_{k=4}^{n} 2^{n-k} k^2 = \frac{1}{8} \cdot 2^n + 2^n \cdot \sum_{k=4}^{n} \frac{k^2}{2^k}$

Quotientenmethode:

$\lim_{n \to \infty} \frac{(n+1)^2 \cdot 2^n}{n^2 \cdot 2^{n+1}} = \lim_{n \to \infty} \frac{n^2 + 2n + 1}{2n^2} = \lim_{n \to \infty} \frac{1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}{2} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow\; \frac{1}{8} \cdot 2^n + 2^n \cdot \sum_{k=4}^{n} \frac{k^2}{2^k} = \frac{1}{8} \cdot 2^n + c \cdot 2^n = \Theta(2^n)$