

Satunnaiskävelyt ja niiden kasvattamat puut

Joonas Laukka

Perustieteiden korkeakoulu

Kandidaatintyö

Espoo 1.5.2018

Vastuopettaja

TkT Riikka Korte

Työn ohjaaja

Prof. Lasse Leskelä

Copyright © 2018 Joonas Laukka

Tekijä Joonas Laukka

Työn nimi Satunnaiskävelyt ja niiden kasvattamat puut

Koulutusohjelma Teknillinen fysiikka ja matematiikka

Pääaine Matematiikka ja systeemitieteet

Pääaineen koodi SCI3029

Vastuupettaja TkT Riikka Korte

Työn ohjaaja Prof. Lasse Leskelä

Päivämäärä 1.5.2018

Sivumäärä 17+2

Kieli Suomi

Tiivistelmä

Nykymaailma on täynnä erilaisia verkkorakenteita Internetistä sosiaalisiin piireihin. Verkkojen kasvun mallintaminen onkin kiinnittänyt tutkijoiden huomion kuluneen vuosikymmenen aikana. Yksi tällainen kasvumalli on *No Restart Random Walk* (NRRW), jossa satunnaiskävelijä kasvattaa suuntaamatonta verkkoa kulkiessaan siinä. Kävelijä lähtee alkusolmusta, kulkee s :n kaaren läpi satunnaiseen solmuun, jonka naapuriksi lisätään uusi solmu. Uuden solmun asteluku on aina yksi. Tätä prosessia jatketaan satunnaiskävelijän viimeisimmästä tilasta, ja prosessin toistaminen kasvattaa satunnaisten puurakenteen. Mallin ominaisuudet määrää siis askelparametri, s .

Tällainen NRRW-malli mukailee reaali maailman verkoille tyypillisiä ominaisuuksia, kuten *preferential and local attachment*. Mallissa satunnaiskävelyprosessi ja verkkoa kuvaavan satunnaishetken prosessi ovat voimakkaasti riippuvaisia. Prosessin käsittelyä voidaan helpottaa osoittamalla, että se on yhdenmukainen yksinkertaisemmän stokastisen prosessin kanssa. Näytän, että NRRW-malli on stokastisesti yhdenmukainen rakentamani riippumattomien, tasajakautuneiden satunnaishetken määräämän mallin kanssa. Lopuksi käytän tätä vaihtoehtoista esitystapaa puun solmujen palautuvuutta koskevan lauseen todistukseen.

Avainsanat Satunnaiskävely, puu, verkko, NRRW

Author Joonas Laukka

Title Random Walks and the Trees they Grow

Degree programme Engineering Physics and Mathematics

Major Mathematics and System Analysis

Code of major SCI3029

Supervisor DSc (Tech.) Riikka Korte

Advisor Prof. Lasse Leskelä

Date 1.5.2018

Number of pages 17+2

Language Finnish

Abstract

The modern world is full of networks from the Internet to social circles. Modeling the growth of graphs has caught the attention of many researchers during the last decade. One such growth model is a *No Restart Random Walk* (NRRW). In an NRRW, a random walker grows an undirected graph while it is traversing it. The walker starts from the root vertex and crosses s edges to end up in a random destination vertex. Then, a new vertex with degree 1 is added as its neighbour. This process is repeated starting from the destination vertex and consequently, a random tree is generated. The properties of the model are unambiguously determined by the step parameters, s .

The NRRW model conforms to many properties that are common in real life graphs such as preferential and local attachment. The random walk process and the random graph process are mutually dependent. Examining these dependent processes can be simplified by proving that they are equivalent with a simpler stochastic process. I will show that the NRRW model is stochastically equivalent to a model seeded by a sequence of independent, uniformly distributed random numbers. Finally, I will use this alternative model to prove a theorem about the recurrence of the vertices in an NRRW generated graph.

Keywords Random walk, graph, tree, NRRW

Esipuhe

Otaniemi, 15.9.2017

Joonas Laukka

Sisällysluettelo

Tiivistelmä	3
Tiivistelmä (englanniksi)	4
Esipuhe	5
Sisällysluettelo	6
Symbolit ja lyhenteet	7
1 Johdanto	8
2 Malli	9
2.1 Yleiskatsaus	9
2.2 Satunnaisverkko ja -kävely	10
2.2.1 Satunnaisverkko	10
2.2.2 Satunnaiskävely	11
2.3 Kokonaisuus	11
2.3.1 Siirtymätodennäköisyydet	12
2.4 Parillinen prosessi	13
3 Stokastinen esitys	13
3.1 Teoria	13
3.2 Propositio	14
3.3 Todistus	14
Viitteet	16
A Esimerkki liitteestä	18
B Toinen esimerkki liitteestä	19

Symbolit ja lyhenteet

Symbolit

\mathbb{N}_0 ei-negatiiviset kokonaisluvut $(0, 1, 2, \dots)$

Operaattorit

$\mathbb{1}\{X\}$ indikaattorifunktio ehdolla X
 $\mathbb{P}[X]$ tapahtuman X todennäköisyys

Lyhenteet

NRRW No Restart Random Walk
 i.i.d. riippumaton ja identtisesti jakautunut

1 Johdanto

TODO: Esimerkkejä reaalimaailman verkoista!

Mallin rakenne pyritään valitsemaan siten, että se mukailee parhaalla mahdollisella tavalla todellisia verkostoja. Niille on tyypillistä preferential ja local attachment sekä se, että verkon solmujen astejakauma ei ole eksponentiaalisesti rajoitettu (*heavy-tailed distribution*). Yksi lupaava kasvumalli on *No Restart Random Walk* (NRRW), jossa satunnaiskävelijä kasvattaa suuntaamatonta verkkoa kulkiessaan siinä. Nimen mukaisesti satunnaiskävely ei ala koskaan alusta, vaan jatkuu katkeamatta verkon kasvaessa. Prosessin ominaisuudet määrää askelparametri, s , ja se kehittyy seuraavanlaisen algoritmin mukaisesti:

0. Aluksi verkossa on yksi solmu, juuri, josta on kaari itseensä. Satunnaiskävelyn alkutila on juurisolmu.
1. Satunnaiskävely ottaa s askelta verkossa.
2. Verkkoon lisätään uusi solmu ja se liitetään satunnaiskävelyn senhetkiseen sijaintiin.
3. Palataan kohtaan 1.

Prosessin simulointi ja matemaattinen analyysi osoittaa, että parametrin s parillisuus vaikuttaa voimakkaasti satunnaiskävelyn ja satunnaisverkon luonteisiin:

Askelparametri	Satunnaiskävely	Satunnaisverkko
$s = 1$	Väistynyt	Solmujen asteluku on geometrisen jakauman stokastisesti dominoima.
$s = 2n$	Palautuva	Sisäsolmujen asteluku ei ole eksponentiaalisesti rajoitettu.

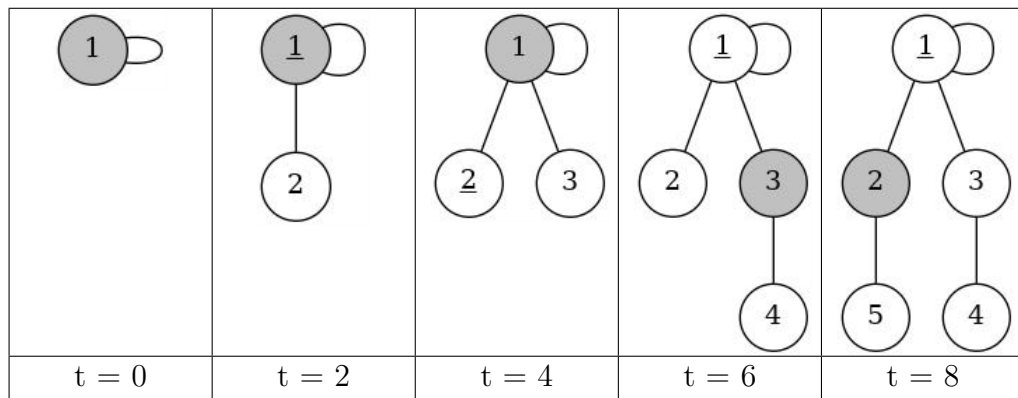
NRRW-prosessi voidaan nähdä joko satunnaisena verkkona tai satunnaiskävelynä. Näkemyksestä riippumatta satunnaiskävelyn palautuvuus ja sen kasvattaman verkon luonne ovat kietoutuneet toisiinsa. Näiden toisistaan riippuvien prosessien käsittelyä voidaan helpottaa osoittamalla, että koko prosessi on yhdenmukainen yksinkertaisemman stokastisen prosessin kanssa. Tässä kandidaatin työssä näytän, että NRRW-prosessi on stokastisesti yhdenmukainen riippumattomien, tasajakautuneiden satunnaislukujen määräämisen prosessin kanssa. Lopuksi käytän tätä vaihtoehtoista esitystapaa puun solmujen palautuvuutta koskevan lauseen todistukseen.

2 Malli

2.1 Yleiskatsaus

NRRW-prosessi on kahden toisistaan riippuvan stokastisen prosessin pari, $(G_t^s, W_t)_{t \geq 0}$. Molemmat prosessit ovat kytkeytyneet vahvasti toisiinsa, mutta niitä voidaan jaksoittain tarkastella myös erillisinä. Taulukko 1 esittää yhden mahdollisen NRRW-prosessin realisaation askelparametrilla $s = 2$ ja parillisilla ajanhetkillä.

Taulukko 1: Yksi mahdollinen NRRW-prosessin realisaatio askelparametrilla $s = 2$. Satunnaiskävely on harmaan värin osoittamassa tilassa ja uusi solmu on juuri lisätty sen naapuriksi. Satunnaiskävely siirtyi nykyiseen tilaansa alleviivatun solmun kautta.

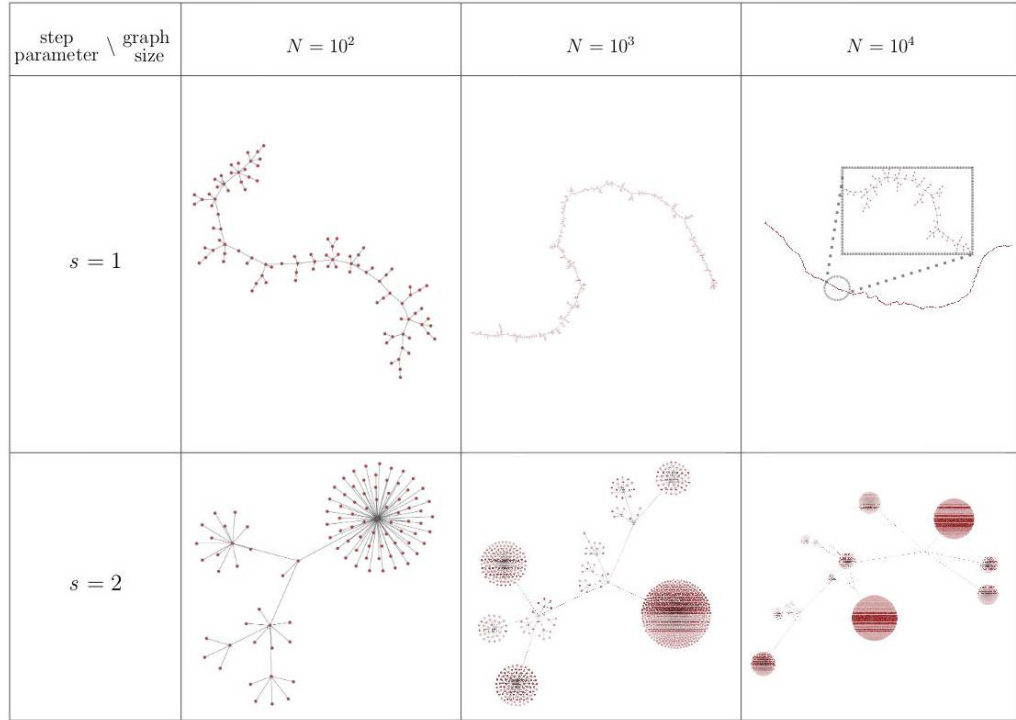


Askelparametri vaikuttaa huomattavasti siihen, millaisia verkkoja NRRW-prosessi kasvattaa. Tämä ilmenee hyvin tietokonesimuloiduista realisaatioista kuvassa 1. Parametrilla $s = 1$ jokaiseen satunnaiskävelyn vierailemaan tilaan lisätään uusi solmu. Tämä johtaa korkeisiin puihin, joissa solmut jakautuvat tasaisesti parillisille ja parittomille tasoille. Satunnaiskävelyn kaikki tilat ovat väistyviä.

Sen sijaan parillinen askelparametri ($s \in 2\mathbb{N}_0$) johtaa hyvin toisenlaisiin verkkoihin. Simulaatiotulokset viittaavat solmujen kasaantuvan suurissa määrin joidenkin yksittäisten solmujen jälkeläisiksi. Kyseessä on niin sanottu *preferential attachment*-ilmiö, jossa jotain mitattavaa suuretta kertyy sellaisille joukon alkioille, joilla on jo ennestään paljon kyseistä suuretta. Satunnaisverkossa tämä ilmenee siten, että uusia solmuja liitetään todennäköisimmin sellaisiin verkon solmuihin, joilla on jo ennestään korkea asteluku.

Parillisen askelparametrin NRRW-prosesseihin liittyy myös toinen erikoisuus. Koska uusi solmuja lisätään vain parillisen askelmäärän välein, niitä kertyy vain verkon parillisille tasoille, ellei satunnaiskävely kulje juurisolmun silmukkakaaren läpi. Silloin satunnaiskävelyn pariteetti vaihtuu ja uusia solmuja lisätään vain parittomille tasoille.

Parillisen askelparametrin NRRW-prosessin ominaisuudet vastaavat paremmin todellisia verkostoja, kuten Internetiä ja sosiaalisia piirejä [2]. Rajoitun siis tarkastelemaan vain parillisen askelparametrin NRRW-prosesseja.



Kuva 1: NRRW-prosessin realisaatioita tietokonesimulaatioissa. [1]

2.2 Satunnaisverkko ja -kävely

2.2.1 Satunnaisverkko

$(G_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$, on satunnaisverkko, johon lisätään uusi solmu s aikayksikön välein. Satunnaisprosessin tilajoukko on kaikkien suuntaamattomien, yhtenäisten ja syklittömien verkkojen eli puiden joukko.

Määritelmä: Suuntaamaton verkko G on pari (V, E) , missä joukko V on verkon solmujen joukko ($v_i \in V$) ja E on suuntaamattomien kaarien joukko. Kaarien joukon alkiot ovat muotoa $\{v_i, v_j\}$. Kaari $\{v_i, v_j\}$ yhdistää solmut v_i ja v_j toisiinsa.

Kasvavan verkon käsittelyn helpottamiseksi satunnaisverkon $(G_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$ solmut indeksoidaan kokonaisluvuilla $(0, 1, 2, \dots)$ lisäysjärjestyksen mukaan. Juurisolmu on siis v_0 ja hetkelä $t = sn$, $n \in \mathbb{N}_0$ lisätään solmu v_n . Jos satunnaisverkkoa $(G_t^s)_{t \in \mathbb{N}_0}$ tarkastellaan itsenäisenä prosessina sen siirtymätodennäköisyydet pois nykytilasta ovat nollasta poikkeavia vain ajanhetkillä $t = sn$, $n \in \mathbb{N}_0$. Ne määrää satunnaiskävelyn $(W_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$ siirtymämatriisi hetkellä $t = sn$, P_t :

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left[G_{t+s}^s = (V_t \cup \{v_{n+1}\}, E_t \cup \{(v_i, v_{n+1})\}) \mid G_t = (V_t, E_t) \right] \\ = \mathbb{P} [W_{t+s} = v_i \mid W_t = v_n, G_t = (V_t, E_t)] = (P_t^s)_{n,i} \end{aligned} \quad (1)$$

2.2.2 Satunnaiskävely

Vastaavasti satunnaiskävelyprosessin $(W_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$ tilajoukon ja siirtymätodennäköisyydet määrää sen kasvattama satunnaisverkko. Molemmat näistä muuttuvat aina, kun verkkoon lisätään uusi solmu. Lisäyshetkien välillä tilajoukko on kuitenkin vakio ja satunnaiskävelyprosessi voidaankin silloin nähdä tavallisena äärellisen tilajoukon Markov-ketjuna. Jos satunnaiskävely on solmussa i hetkellä t , valitaan seuraava tila satunnaisesti valitsemalla yksi solmusta i lähtevä kaari ja siirtymällä sen osoittamaan solmuun. Todennäköisyysmassa on tasajakautunut kaikkien solmun i kaarien kesken.

Koska NRRW-prosessi rakentaa puita, ei verkossa ole muita syklejä, kuin juuren kaari itseensä. Verkkoteoriassa kaaret solmusta itseensä lasketaan kahdesti. Merkitään solmun v_i solmuun v_j yhdistävien kaarien määrää

$$\psi^{(t)}(v_i, v_j) = \begin{cases} \mathbb{1}\{\{v_i, v_j\} \in E_t\} & \text{jos } v_i \neq v_j \\ 2 \cdot \mathbb{1}\{v_i = v_0\} & \text{muulloin} \end{cases}$$

missä E_t on verkon G_t kaarien joukko. Nyt todennäköisyys siirtyä solmusta v_i solmuun v_j on

$$\mathbb{P}[W_{t+1} = v_j \mid W_t = v_i] = \frac{\psi^{(t)}(v_i, v_j)}{d_t(v_i)} \quad (2)$$

missä $d_t(v_i)$ on solmun v_i asteluku hetkellä t . Toisin sanoen

$$d_t(v_i) = \sum_{w \in V} \psi^{(t)}(v_i, w) \quad (3)$$

eli kaikkien solmuun v_i yhdistyvien kaarien lukumäärä.

2.3 Kokonaisuus

Satunnaisverkon ja satunnaiskävelyn erillinen tarkastelu paljastaa, että näistä jälkimmäinen on NRRW-prosessin todellinen satunnaisuuden lähde. Satunnaiskävely muuttaa liikkeillään sen omaa tilajoukkoa eli verkkoa G_t^s . Kun verkko muuttuu, myös satunnaiskävelyn siirtymätodennäköisyydet muuttuvat. Selvästi satunnaiskävelyprosessi on siis ajassa epähomogeeninen stokastinen prosessi. Satunnaisverkko sen sijaan kasvaa satunnaiskävelyn realisaation ohjaamana. Kokonaisuutena NRRW-prosessi on siis ajassa epähomogeeninen äärettömän tilajoukon Markov-prosessi.

Olkoon V kaikkien solmujen numeroituvasti ääretön joukko. Jos n :n solmun joukkoa merkitään $V_n = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset V$ niin n :n solmun suuntaamattomien verkkojen joukko on

$$\mathcal{G}_n = \{(V_n, E) \mid E \subset V_n \times V_n\}$$

NRRW-prosessiin kuuluu myös satunnaiskävely, jonka tilajoukko n :n solmun verkkoa kulkiessa sen solmujen joukko V_n . Selvästi n :n solmun NRRW-prosessin tilajoukko on $S_n = V_n \times \mathcal{G}_n$. Kaikkien solmujen joukkoa merkitään numeroituvasti äärettömällä joukolla V . Vastaavasti kaikkien verkkojen joukkoa voidaan äärettömällä unionilla

$$\mathcal{G} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{G}_n \quad (4)$$

Koska satunnaisverkko kasvaa NRRW-prosessin edetessä, täytyy sen tilajoukon sisältää kaikki eri solmulukumäärien mahdollistamat tilat. NRRW-prosessin tilajoukko onkin siis

$$S = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n \quad (5)$$

2.3.1 Siirtymätodennäköisyydet

NRRW-prosessin siirtymätodennäköisyydet ovat ajassa epähomogeenisia, sillä satunnaiskävelyn realisaatio kasvattaa sen omaa tilajoukkoa, eli NRRW-prosessin verkkoa, vain kun $t \bmod s = 0$. Siirtymätodennäköisyyksiä on siten syytä tarkastella kahdessa eri tapauksessa ajanhetken jaollisuuden mukaan.

Merkitään NRRW-prosessin tilaa hetkellä t yksinkertaisesti $X_t = (W_t, \mathcal{G}_t^s)$. Jos $v_i, v_j \in V$ ja $G_i, G_j \in \mathcal{G}$, niin NRRW-prosessin siirtymätodennäköisyydet saavat esityksen

$$\begin{aligned} P_{i,j} &= \mathbb{P} \left[(W_{t+1}, \mathcal{G}_{t+1}^s) = (v_i, G_i) \mid (W_t, \mathcal{G}_t^s) = (v_j, G_j) \right] \\ &= \mathbb{P} \left[W_{t+1} = v_i, \mathcal{G}_{t+1}^s = G_i \mid W_t = v_j, \mathcal{G}_t^s = G_j \right] \end{aligned}$$

missä viimeinen yhtäsuuruus seuraa todennäköisyyden ehdollistamisesta satunnaisverkon \mathcal{G}_{t+1}^s realisaation suhteen ja tarpeettoman ehdon ($\mathcal{G}_{t+1}^s = G_i$) poistamisesta.

Kun $t + 1 \bmod s \neq 0$, satunnaisverkko \mathcal{G}_t^s pysyy muuttumattomana todennäköisyydellä 1. Siten

$$\mathbb{P} \left[\mathcal{G}_{t+1}^s = G_j \mid \mathcal{G}_t^s = G_j \right] = 1$$

ja sen komplementti on mahdoton. Lausekkeen ?? mukaisesti

$$\begin{aligned} P_{i,j} &= \mathbb{P} \left[W_{t+1} = v_i, \mathcal{G}_{t+1}^s = G_i \mid W_t = v_j, \mathcal{G}_t^s = G_j \right] \\ &= \mathbb{P} \left[\mathcal{G}_{t+1}^s = G_i \mid W_t = v_j, \mathcal{G}_t^s = G_j \right] \mathbb{P} \left[W_{t+1} = v_i \mid \mathcal{G}_t^s = G_j, W_t = v_j \right] \\ &= \underbrace{\mathbb{P} \left[\mathcal{G}_{t+1}^s = G_j \mid \mathcal{G}_t^s = G_j \right]}_{=1} \mathbb{P} \left[W_{t+1} = v_i \mid \mathcal{G}_t^s = G_j, W_t = v_j \right] \\ &\quad + \underbrace{\mathbb{P} \left[\mathcal{G}_{t+1}^s \neq G_j \mid \mathcal{G}_t^s = G_j \right]}_{=0} \mathbb{P} \left[W_{t+1} = v_i \mid \mathcal{G}_t^s = G_j, W_t = v_j \right] \\ &= \mathbb{P} \left[W_{t+1} = v_i \mid \mathcal{G}_t^s = G_j, W_t = v_j \right] = \frac{\psi^{(t)}(v_i, v_j)}{d_t(v_i)} \end{aligned}$$

missä viimeinen yhtäsuuruus pohjautuu kaavan 2 lausekkeeseen.

Kun $t + 1 \bmod s = 0$, satunnaisverkko \mathcal{G}_t^s muuttuu satunnaiskävelyn W_{t+1} realisaation mukaisesti.

$$\begin{aligned} P_{i,j} &= \mathbb{P} \left[W_{t+1} = v_i, \mathcal{G}_{t+1}^s = G_i \mid W_t = v_j, \mathcal{G}_t^s = G_j \right] \\ &= \mathbb{P} \left[W_{t+1} = v_i \mid W_t = v_j, \mathcal{G}_t^s = G_j \right] \mathbb{P} \left[\mathcal{G}_{t+1}^s = G_i \mid W_{t+1} = v_i, W_t = v_j, \mathcal{G}_t^s = G_j \right] \end{aligned}$$

Uusi solmu lisätään nyt siihen satunnaisverkon \mathcal{G}_t^s solmuun, johon satunnaiskävely siirtyy ajanhetkellä $t + 1$. Kun verkkoja G_i ja G_j merkitään verkon määritelmän (TODO: referenssi?) mukaisina solmujen ja kaarien pareina (V_i, E_i) ja (V_j, E_j) ,

$$\begin{aligned} P_{i,j} &= \mathbb{P} \left[\mathcal{G}_{t+1}^s = (V_i, E_i) \mid W_{t+1} = v_i, W_t = v_j, \mathcal{G}_t^s = (V_j, E_j) \right] \\ &\quad \cdot \mathbb{P} [W_{t+1} = v_i \mid W_t = v_j, \mathcal{G}_t^s = (V_j, E_j)] \\ &= \mathbb{1} \{ G_i = (V_j \cup \{v_i\}, E_j \cup \{\{v_i, v_j\}\}) \} \mathbb{P} [W_{t+1} = v_i \mid W_t = v_j, \mathcal{G}_t^s = (V_j, E_j)] \\ &= \mathbb{1} \{ G_i = (V_j \cup \{v_i\}, E_j \cup \{\{v_i, v_j\}\}) \} \frac{\psi^{(t)}(v_i, v_j)}{d_t(v_i)} \end{aligned}$$

2.4 Parillinen prosessi

TODO: Erityishuomioita?

3 Stokastinen esitys

3.1 Teoria

Olkoon $(\omega_t)_{t \geq 0}$ jono riippumattomia välin $[0, 1]$ tasajakautuneita satunnaislukuja. Toisin sanoen $w_t \sim \text{Tas}(0, 1)$. Tällaista satunnaislukujen sarjaa voidaan käyttää monimutkaisemman stokastisen prosessin algoritmiseen simulointiin [3]. Simulointi rakennetaan etsimällä deterministinen funktio $\phi : S \times [0, 1] \rightarrow S$, joka liittää stokastisen prosessin tilan ja välin $[0, 1]$ reaaliluvun prosessin seuraavaan tilaan. Funktion ϕ tulee toteuttaa yhtälö

$$\mathbb{P} [\phi(x, \omega_t) = y] = \int_0^1 \mathbb{1} \{ \phi(x, w) = y \} dw \quad (6)$$

$$= \mathbb{P} [X_{t+1} = y \mid X_t = x] = P_{x,y} \quad \forall x, y \in S \quad (7)$$

Yhtälön 7 toteuttavaa funktiota ϕ ja satunnaislukujonoa $(\omega_t)_{t \geq 0}$ kutsutaan siirtymä-matriisiin P *stokastiseksi esitykseksi*.

Jos stokastisen prosessin alkutila on $X_0 = x_0$, sitä voidaan simuloida sen stokastisen esityksen avulla rekursiivisesti:

$$X_{t+1} = \phi(X_t, \omega_t) \quad (8)$$

Mikäli stokastinen prosessi on epähomogeeninen ajassa, vaaditaan stokastiseen esitykseen jono deterministisiä funktioita $(\phi^{(t)})_{t \geq 0}$, jotka ovat muotoa $\phi^{(t)} : S \times [0, 1] \rightarrow S \quad \forall t \geq 0$. Funktioiden $\phi^{(t)}$ tulee toteuttaa yhtälöä 7 vastaava ehto $\forall t \geq 0$:

$$\mathbb{P} [\phi^{(t)}(x, \omega_t) = y] = \mathbb{P} [X_{t+1} = y \mid X_t = x] = P_{x,y}^{(t)} \quad \forall x, y \in S \quad (9)$$

Prosessin simulointi tehdään, kuten homogeenisessa tilanteessa, mutta rekursio-funktio valitaan funktiojonosta $(\phi^{(t)})_{t \geq 0}$ järjestyksessä:

$$X_{t+1} = \phi^{(t)}(X_t, \omega_t) \quad (10)$$

3.2 Propositio

Edellä havaittiin, että NRRW-prosessi on epähomogeeninen ajassa. Sen stokastinen esitys on siis muotoa $(\phi_t, \omega_t)_{t \geq 0}$, missä funktiot ϕ_t toteuttavat ehdon 9. Muodostetaan sopiva jono deterministisiä funktioita NRRW-prosessille. Prosessin tilat ovat muotoa (v, G) , missä $G = (V, E)$ on verkko ja $v \in V$ on verkon G solmu. Jakamalla rekursiofunktioit satunnaiskävely- ja satunnaisverkko-osiin saadaan niille korkeatasoinen muoto

$$\phi^{(t)}((v, G), w) = (\lambda((v, G), w), \mu^{(t)}(\lambda((v, G), w), G)) \quad (11)$$

missä λ on satunnaiskävelyn $(W_t)_{t \geq 0}$ stokastisen esityksen rekursiofunktio parametriseksi annetussa verkossa G ja μ päivittää verkkoa G satunnaiskävelyn realisaation mukaisesti. Satunnaiskävelyn rekursiofunktio

$$\lambda((v_i, G), w) = \begin{cases} v_1 & w \in [0, \rho(G)_{i,1}) \\ v_2 & w \in [\rho(G)_{i,1}, \rho(G)_{i,1} + \rho(G)_{i,2}) \\ \vdots & \\ v_{\lfloor \frac{t}{s} \rfloor} & w \in [\rho(G)_{i, \lfloor \frac{t}{s} \rfloor - 1}, \rho(G)_{i, \lfloor \frac{t}{s} \rfloor - 1} + \rho(G)_{i, \lfloor \frac{t}{s} \rfloor}) \end{cases} \quad (12)$$

missä ρ on funktio verkosta sen siirtymämatriisiin. Hyödyntäen määritelmän 2.2.2 funktiota solmuja yhdistävien kaarien määrälle, saadaan kuvaukselle ρ alkioittainen määritelmä

$$\rho(G)_{i,j} = \rho((V, E))_{i,j} = \frac{\psi^{(t)}(i, j)}{d_t(i)} = \frac{\psi^{(t)}(i, j)}{\sum_{w \in V} \psi^{(t)}(v_i, w)} \quad (13)$$

missä kaksi viimeistä yhtäsuuruutta seuraa kaavoista 2 ja 3.

Stokastisen esityksen verkkoa päivittävä funktio määritellään

$$\mu^{(t)}(v, (V, E)) = \begin{cases} (V \cup v_t, E \cup \{v, v_t\}) & \text{kun } t \bmod s = 0 \\ (V, E) & \text{muulloin} \end{cases} \quad (14)$$

Se siis lisää verkon solmuun v uuden solmun v_t aina kun aika on jaollinen askelparametrillä s . Muulloin verkkoa ei muuteta.

3.3 Todistus

Esitän, että stokastisen esityksen $(\phi^{(t)}, \omega_t)_{t \geq 0}$ simuloima stokastinen prosessi on todellakin NRRW-prosessi askelparametrillä s . NRRW-prosessin siirtymätodennäköisyydet on laskettu kappaleessa 2.3.1. NRRW-prosessin käyttäytyminen ajanhetkellä t riippuu siitä, onko t jaollinen askelparametrillä s . Osoitetaan stokastisen esitykseen yhdenmukaisuus NRRW-prosessin kanssa molemmissa tapauksissa. Olkoon $X_t = (W_t, \mathcal{G}_t^s)$ NRRW-prosessin tila hetkellä t .

Kun $t + 1 \bmod s \neq 0$

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}[\phi(x, \omega_t) = y] &= \int_0^1 \mathbb{1}\{\phi(x, w) = y\} dw \\
 &= \int_0^1 \mathbb{1}\left\{\left(\lambda((v_x, G_x), w), \mu^{(t)}(\lambda((v_x, G_x), w), G_x)\right) = (v_y, G_y)\right\} dw \\
 &= \int_0^1 \mathbb{1}\{\lambda((v_x, G_x), w) = v_y\} \mathbb{1}\{\mu^{(t)}(\lambda((v_x, G_x), w), G_x) = G_y\} dw \\
 &= \mathbb{1}\{G_x = G_y\} \int_0^1 \mathbb{1}\{\lambda((v_x, G_x), w) = v_y\} dw
 \end{aligned}$$

Jos $G_y = G_x$

$$\mathbb{P}[\phi(x, \omega_t) = y] = \int_0^1 \mathbb{1}\{\lambda((v_x, G_x), w) = v_y\} dw = \rho(G_x)_{x, x+1} = \frac{\psi^{(t)}(v_i, v_j)}{d_t(v_i)}$$

Jos $G_y \neq G_x$ niin $\mathbb{P}[\phi(x, \omega_t) = y] = 0$. Selvästi nyt

$$\mathbb{P}[\phi(x, \omega_t) = y] = \mathbb{P}[X_{t+1} = y \mid X_t = x]$$

kun $t + 1 \bmod s \neq 0$.

Kun $t + 1 \bmod s = 0$...

Viitteet

- [1] Kauranen, I., Mustakallio, M. ja Palmgren, V. *Tutkimusraportin kirjoittamisen opas opinnäytetyön tekijöille*. Espoo, Teknillinen korkeakoulu, 2006.
- [2] Itkonen, M. *Typografian käsikirja*. 3. painos. Helsinki, RPS-yhtiöt, 2007.
- [3] Koblitz, N. *A Course in Number Theory and Cryptography. Graduate Texts in Mathematics 114*. 2. painos. New York, Springer, 1994.
- [4] Bardeen, J., Cooper, L. N. ja Schrieffer, J. R. Theory of Superconductivity. *Physical Review*, 1957, vol. 108, nro 5, s. 1175–1204.
- [5] Deschamps, G. A. Electromagnetics and Differential Forms. *Proceedings of the IEEE*, 1981, vol. 69, nro 6, s. 676–696.
- [6] Sihvola, A. et al. Interpretation of measurements of helix and bihelix superchiral structures. Teoksessa: Jacob, A. F. ja Reinert, J. (toim.) *Bianisotropics '98 7th International Conference on Complex Media*. Braunschweig, 3.–6.6.1998. Braunschweig, Technische Universität Braunschweig, 1998, s. 317–320.
- [7] Lindblom-Yläne, S. ja Wager, M. Tieteellisten opinnäytetöiden ohjaaminen. Teoksessa: Lindblom-Yläne, S. ja Nevgi, A. (toim.) *Yliopisto- ja korkeakouluopettajan käsikirja*. Helsinki, WSOY, 2004, s. 314–325.
- [8] Miinusmaa, H. Neliskulmaisen reiän poraamisesta kolmikulmaisella poralla. Diplomityö, Teknillinen korkeakoulu, konetekniikan osasto, Espoo, 1977.
- [9] Loh, N. C. High-Resolution Micromachined Interferometric Accelerometer. Master's Thesis, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Massachusetts, 1992.
- [10] Lönnqvist, A. Applications of hologram-based compact range: antenna radiation pattern, radar cross section, and absorber reflectivity measurements. Väitöskirja, Teknillinen korkeakoulu, sähkö- ja tietoliikennetekniikan osasto, 2006.
- [11] SFS 5342. Kirjallisuusviitteiden laatiminen. 2. painos. Helsinki, Suomen standardisoimisliitto, 2004. 20 s.
- [12] Palmgren, V. Suunnittelija. Teknillinen korkeakoulu, kirjasto. Otaniementie 9, 02150 Espoo. Haastattelu 15.1.2007.
- [13] Ribeiro, C. B., Ollila, E. ja Koivunen, V. Stochastic Maximum-Likelihood Method for MIMO Propagation Parameter Estimation. *IEEE Transactions on Signal Processing*, verkkolehti, vol. 55, nro 1, s. 46–55. Viitattu 19.1.2007. Lehti ilmestyy myös painettuna. DOI: 10.1109/TSP.2006.882057.
- [14] Stieber, T. GnuPG Hacks. *Linux Journal*, verkkolehti, 2006, maaliskuu, nro 143. Viitattu 19.1.2007. Lehti ilmestyy myös painettuna. Saatavissa: <http://www.linuxjournal.com/article/8732>.

- [15] Pohjois-Koivisto, T. Voiko kone tulevaisuudessa arvata tahtosi? *Apropos*, verkkolehti, helmikuu, nro 1, 2005. Viitattu 19.1.2007. Saatavissa: <http://www.apropos.fi/1-2005/prima.php>.
- [16] Adida, B. Advances in Cryptographic Voting Systems. Verkkodokumentti. Ph.D. Thesis, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Massachusetts, 2006. Viitattu 19.1.2007. Saatavissa: <http://crypto.csail.mit.edu/~cis/theses/adida-phd.pdf>.
- [17] Kilpeläinen, P. WWW-lähteisiin viittaaminen tutkielmatekstissä. Verkkodokumentti. Päivitetty 26.11.2001. Viitattu 19.1.2007. Saatavissa: <http://www.cs.uku.fi/~kilpelai/wwwlahteet.html>.

A Esimerkki liitteestä

Liitteet eivät ole opinnäytteen kannalta välttämättömiä ja opinnäytteen tekijän on kirjoittamaan ryhtyessään hyvä ajatella pärjäävänsä ilman liitteitä. Kokemattomat kirjoittajat, jotka ovat huolissaan tekstiosan pituudesta, paisuttavat turhan helposti liitteitä pitääkseen tekstiosan pituuden annetuissa rajoissa. Tällä tavalla ei synny hyvää opinnäytettä.

Liite on itsenäinen kokonaisuus, vaikka se täydentääkin tekstiosaa. Liite ei siten ole pelkkä listaus, kuva tai taulukko, vaan liitteessä selitetään aina sisällön laatu ja tarkoitus.

Liitteeseen voi laittaa esimerkiksi listauksia. Alla on listausesimerkki tämän liitteen luomisesta.

```
\clearpage
\appendix
\addcontentsline{toc}{section}{Liite A}
\section*{Liite A}
...
\thispagestyle{empty}
...
tekstiä
...
\clearpage
```

Kaavojen numerointi muodostaa liitteissä oman kokonaisuutensa:

$$d \wedge A = F, \tag{A1}$$

$$d \wedge F = 0. \tag{A2}$$

B Toinen esimerkki liitteestä

Liitteissä voi myös olla kuvia, jotka eivät sovi leipätekstin joukkoon: Liitteiden taulu-

Kuva B1: Kuvateksti, jossa on liitteen numerointi

koiden numerointi on kuvien ja kaavojen kaltainen: Kaavojen numerointi muodostaa

Taulukko B1: Taulukon kuvateksti.

9.00–9.55	Käytettävyystestauksen tiedotustilaisuus (osanottajat ovat saaneet sähköpostitse valmistautumistehtävät, joten tiedotustilaisuus voidaan pitää lyhyenä).
9.55–10.00	Testausalueelle siirtyminen

liitteissä oman kokonaisuutensa:

$$T_{ik} = -pg_{ik} + wu_i u_k + \tau_{ik}, \quad (\text{B1})$$

$$n_i = nu_i + v_i. \quad (\text{B2})$$