

Satunnaiskävelyt ja niiden kasvattamat puut

Joonas Laukka

Perustieteiden korkeakoulu

Kandidaatintyö
Espoo 1.5.2018

Vastuuopettaja

TkT Riikka Korte

Työn ohjaaja

Prof. Lasse Leskelä



Copyright © 2018 Joonas Laukka

Tekijä Joonas Laukka

Työn nimi Satunnaiskävelyt ja niiden kasvattamat puut

Koulutusohjelma Teknillinen fysiikka ja matematiikka

Pääaine Matematiikka ja systeemitieteet**Pääaineen koodi** SCI3029

Vastuuopettaja TkT Riikka Korte

Työn ohjaaja Prof. Lasse Leskelä

Päivämäärä 1.5.2018**Sivumäärä** 21+1**Kieli** Suomi

Tiivistelmä

Nykymailma on täynnä erilaisia verkostoja Internetistä sosiaalisiin piireihin. Verkkojen kasvun ymmärtäminen ja mallintaminen onkin kiinnittänyt lukuisen tutkijoiden huomion kuluneiden vuosikymmenien aikana. *No Restart Random Walk* (NRRW) on uudenlainen malli satunnaisverkon generoimiseen. Mallissa satunnaiskävelijä kasvattaa suuntaamatonta verkkoa kulkissaan siinä. Kävelijä lähtee alkusolmesta, kulkee s :n kaaren läpi satunnaiseen solmuun, ja sen naapuriksi lisätään uusi solmu. Uuden solmun asteluku on aina yksi. Tätä prosessia jatketaan satunnaiskävelijän viimeisimmästä tilasta, ja prosessin toistaminen kasvattaa satunnaisen puurakenteen. Mallin ominaisuudet määräät siis askelparametri, s . NRRW-malli mukailee reaalimaailman verkoille tyypillistä suosivaa kiinnitymistä. Sen rakentaman verkon ominaisuudet riippuvat kuitenkin voimakkaasti askelparametrista. Malli ei generoi skaalautumattomia verkkuja, mutta se demonstroili innostavan yhteyden satunnaisverkon astelukujen jakauman ja sitä kasvattavan satunnaiskulun palautuvuuden välillä. Tämän yhteyden ymmärtäminen on askel kohti entistä realistisempia verkkojen kasvumalleja. Tässä kandidaatintyössä keskityn tarkastelemaan parillisen askelparametrin NRRW-malleja. Muodostan NRRW-prosessille erään stokastisen esityksen, todistan sen oikeaksi ja hyödynnän sitä parillisen askelparametrin NRRW-mallin ominaisuuksien tutkimiseen.

Avainsanat Satunnaiskävely, puu, verkkو, NRRW

Author Joonas Laukka

Title Random Walks and the Trees they Grow

Degree programme Engineering Physics and Mathematics

Major Mathematics and System Analysis**Code of major** SCI3029

Supervisor DSc (Tech.) Riikka Korte

Advisor Prof. Lasse Leskelä

Date 1.5.2018

Number of pages 21+1

Language Finnish

Abstract

The modern world is full of networks from the Internet to social circles. Modeling the growth of graphs has caught the attention of many researchers during the last decades. One such growth model is a *No Restart Random Walk* (NRRW). In an NRRW, a random walker grows an undirected graph while it is traversing it. The walker starts from the root vertex and crosses s edges to end up in a random destination vertex. Then, a new vertex with degree 1 is added as its neighbour. This process is repeated starting from the destination vertex and consequently, a random tree is generated. The properties of the model are unambiguously determined by the step parameters, s .

The NRRW model conforms to many properties that are common in real life graphs such as preferential attachment. The random walk process and the random graph process are mutually dependent. Examining these dependent processes can be simplified by proving that they are equivalent with a simpler stochastic process. I will show that the NRRW model is stochastically equivalent to a model seeded by a sequence of independent, uniformly distributed random numbers. Finally, I will use this alternative model to prove a theorem about the recurrence of the vertices in an NRRW generated graph.

Keywords Random walk, graph, tree, NRRW

Esipuhe

Otaniemi, 15.9.2017

Joonas Laukka

Sisällysluettelo

Tiivistelmä	3
Tiivistelmä (englanniksi)	4
Esipuhe	5
Sisällysluettelo	6
Symbolit ja lyhenteet	7
1 Johdanto	8
2 Malli	10
2.1 Yleiskatsaus	10
2.2 Satunnaisverkko ja -kävely	11
2.2.1 Satunnaisverkko	11
2.2.2 Satunnaiskävely	12
2.3 Kokonaisuus	12
2.3.1 Tilajoukko	13
2.3.2 Siirtymätodennäköisyydet	13
3 Stokastinen esitys	14
3.1 Yleistä teoriaa	15
3.2 Prosessin esitys	15
4 Parillinen prosessi	17
4.1 Astelukujen jakauma	18
4.2 Palautuvuus	19
5 Yhteenvetö	20
Viitteet	21
A Simulaatioiden lähdekoodi	22

Symbolit ja lyhenteet

Symbolit

\mathbb{N}_0 ei-negatiiviset kokonaisluvut $(0, 1, 2, \dots)$

Operaattorit

$\mathbf{1}\{X\}$ indikaattorifunktio ehdolla X
 $\mathbb{P}[X]$ tapahtuman X todennäköisyys

Lyhenteet

NRRW No Restart Random Walk
i.i.d. riippumaton ja identtisesti jakautunut

1 Johdanto

Nykymaailma on täynnä erilaisia verkostoja Internetistä sosiaalisiin piireihin ja niiden syvällinen ymmärtäminen on tärkeämpää kuin koskaan. Verkkoteoria on matematiikan ala, joka pyrkii ymmärtämään solmuista ja niitää yhdistävistä kaarista rakentuvia abstrakteja verkkooja. Koska verkostoja tarkastellaan riittävän abstraktilla tasolla, verkkoteorian tulokset pätevät sovelluskohteesta riippumatta. Sama looginen rakenne, verkko, voi kuvata niin kaupunkien välisiä tieyhteyksiä kuin nettisivujen välisiä linkkejäkin, ja verkkoteorian tulokset ovat aina yhtä oleellisia. Vain verkon tulkinta vaihtuu.

Yksi tärkeä askel kohti kaikenlaisten reaalimaailman verkkojen ymmärtämistä on erilaisten kasvumallien luominen. Kun tiedämme, miten ja miksi verket kehittyvät sellaisiksi kuin ne ovat, pystymme simuloimaan niitä ja ennustamaan niiden kehitystä. Kuluneina vuosikymmeninä onkin kehitetty lukuisia erilaisia verkkojen kasvumalleja. Niiden generoimien verkkojen topologiassa on kiinnitetty huomioita moniin erilaisiin ominaisuuksiin, mutta yksi kiinnostavimmista piirteistä on solmujen astelukujen jakauma. Empiiriset kokeet ovat osoittaneet, että monet suuret ja kiinnostavat verket, kuten Internet, ovat skaalautumattomia (eng. scale-free) [1]. Skaalautumattoman verkon solmujen astelukujen jakauman määrittää jokin potenssilaki ($\mathbb{P}[k] = k^\gamma$). Yksinkertaistaen tämä tarkoittaa sitä, että ääriarvot, eli sellaiset solmut, joilla on hyvin korkea astelu, ovat skaalautumattomissa verkoissa verrattain yleisiä. [2]

Monet tosielämän verket syntyvät näennäisesti hyvinkin toisistaan poikkeavista prosesseista, mutta niille on kuitenkin tyypillistä juuri skaalautumaton rakenne. Tämä viittaa siihen, että kyseisten verkkojen kasvu pohjautuu samankaltaisiin stokastiisiin mekanismiin. Näyttääkin siltä, että skaalautumattomia verkkooja syntyy erityisesti sellaisista prosesseista, jotka noudattavat kasvaessaan suosivaa kiintymistä (eng. preferential attachment) [3]. Suosivalla kiintymisellä tarkoitetaan satunnaisverkkojen yhteydessä sitä, että uusia solmuja liitetään todennäköisimmin sellaisiin solmuihin, joilla on jo ennestään korkea astelu. Koska suosiva kiintyminen näyttäisi olevan tosielämässä esiintyvien skaalautumattomien verkkojen kasvun taustalla, on siihen perustuvien kasvuprosessien kehittäminen kiinnittänyt tutkijoiden huomion kuluneen vuosikymmenen aikana.

Yksi suosivaa kiintymistä ilmentävä kasvumalli on *No Restart Random Walk* (NRRW), jossa satunnaiskävelijä kasvattaa suuntaamatonta verkkoa kulkissaan siinä. Nimensä mukaisesti NRRW-prosessin satunnaiskulku ei ala koskaan alusta, vaan jatkuu katkeamatta verkon kasvaessa. Jokaisen s askeleen välein verkkoon lisätään uusi solmu, ja se liitetään siihen solmuun, johon satunnaiskulku on juuri siirtynyt. Prosesсин simulointi ja matemaattinen analyysi osoittavat, että parametrin s parillisuus vaikuttaa voimakkaasti satunnaiskävelyn ja satunnaisverkon luontesiin:

NRRW-prosessin luonnetta voidaan tarkastella joko satunnaisen verkon tai satunnaiskävelyn näkökulmasta. Satunnaiskävelyn palautuvuus ja sen kasvattaman verkon topologia ovat kuitenkin kietoutuneet selvästi toisiinsa. [4]

Koska NRRW-prosessin kasvattamat verket ilmentävät sekä skaalautumatonta että skaalautuvaa sisäsolmujen rakennetta, ovat ne epäilemättä kiinnostavia perinteitä.

Askelparametri	Satunnaiskulku	Satunnaisverkko
$s = 1$	Väistytävä	Sisäsolmujen astelukujen jakauma on geometrisen jakauman ylhäältä rajoittama.
$s = 2n$	Palautuva	Sisäsolmujen astelukujen jakauma on potenssilain alhaalta rajoittama.

Taulukko 1: NRRW-prosessin askelparametrin vaikutus taustalla vaikuttavan satunnaiskulun ja sen generoiman satunnaisverkon ominaisuuksiin.

sen verkkoanalyysin näkökulmasta. Osuvimmat sovelluskohteet löytynevät kuitenkin sellaisista systeemeistä, joissa satunnaiskulun ja verkon kasvun yhteys on prosessin sisäänrakennettu, kiistaton ominaisuus. Yksi tällainen systeemi esiintyy uudenlaisen kryptovaluutan, IOTA:n, toteutuksessa. Toisin kuin perinteiset kryptovaluutat, IOTA ei perustu lohkaketjuteknologiaan. Lohkoketjun sijaan transaktiot tallennetaan suuntaamattomaan, syklittömään verkkoon. Kun uusi transaktio saapuu, on sen vahvistettava kaksi aiempaa transaktiota liittymällä niihin transaktiopuussa. Koska transaktioiden vahvistusmekanismi ei perustu louhimiseen (eng. mining), ei transaktioihin liity myöskään transaktiokustannuksia. Tämä on huomattava etu verrattuna perinteisiin kryptovaluuttoihin, sillä se mahdollistaa muun muuassa mikromaksujen maksamisen. [5]

IOTA:n transaktiopuun stabiilius ja turvallisuus ovat kuitenkin monimutkaisia kysymyksiä. Puuta mallinnetaan suuntaamattomia ja syklittömiä verkkoja rakentavalla stokastisella prosessilla, Tanglella, jossa uusien solmujen liitoskohdat valitaan satunnaiskulun avulla [6]. NRRW-prosessi on pohjimmiltaan satunnaiskulku satunnaisessa verkossa, ja siten sen ymmärtäminen on osa matemaattista kivijalkaa, jonka päälle Tanglen kaltaiset tietotekniset sovellukset rakennetaan.

Tässä kandidaatintyössä perehdyn sellaisiin NRRW-prosessin ominaisuuksiin, joita on käsitelty Giulio Iacobellin, Daniel Figueiredon ja Giovanni Neglian paperissa "Transient and Slim versus Recurrent and Fat: Random Walks and the Trees they Grow". Keskityn erityisesti parillisen askelparametrin prosessiin, sillä sen generoimien verkkojen sisäsolmut muodostavat monien kasvumallien sovelluksien kannalta kiinnostavan skaalautumattoman verkon. Formuloin NRRW-prosessille stokastisen esityksen, todistan sen oikeaksi ja hyödynnän sitä parillisen askelparametrin ominaisuuksien tarkasteluun.

2 Malli

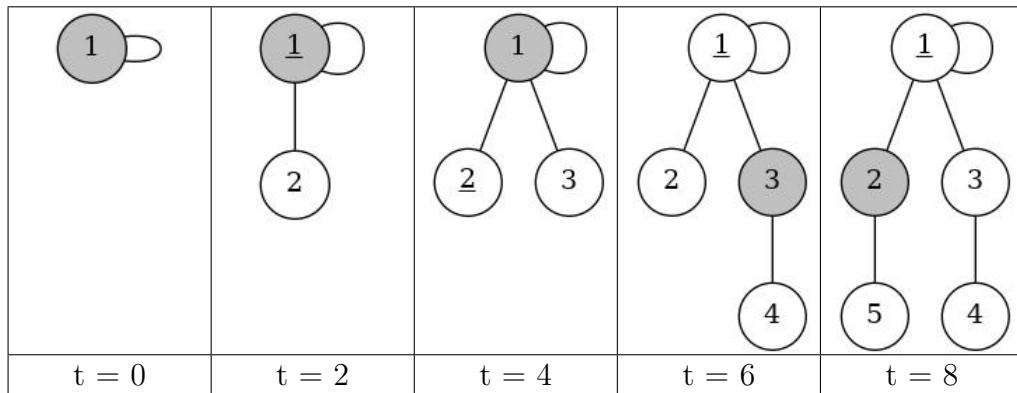
2.1 Yleiskatsaus

NRRW-prosessi askelparametrilla s käyttää seuraavanlaisen algoritmin mukaisesti:

0. Aluksi verkossa on yksi solmu, juuri, josta on kaari itseensä. Satunnaiskävelyn alkutila on juurisolmu.
1. Satunnaiskävely ottaa s askelta verkossa.
2. Verkkoon lisätään uusi solmu ja se liitetään satunnaiskävelyn senhetkiseen sijaintiin.
3. Palataan kohtaan 1.

Matemaattisesti prosessi on kahden toisistaan riippuvan stokastisen prosessin pari, $(\mathcal{G}_t^s, \mathcal{W}_t)_{t \geq 0}$. Molemmat prosessit ovat kytkeytyneet vahvasti toisiinsa, mutta niitä voidaan jaksoittain tarkastella myös erillisinä. Taulukko 2 esittää yhden mahdollisen NRRW-prosessin realisaation askelparametrilla $s = 2$ ja parillisilla ajanhetkillä. Askelparametri vaikuttaa huomattavasti siihen, millaisia verkkоя NRRW-prosessi

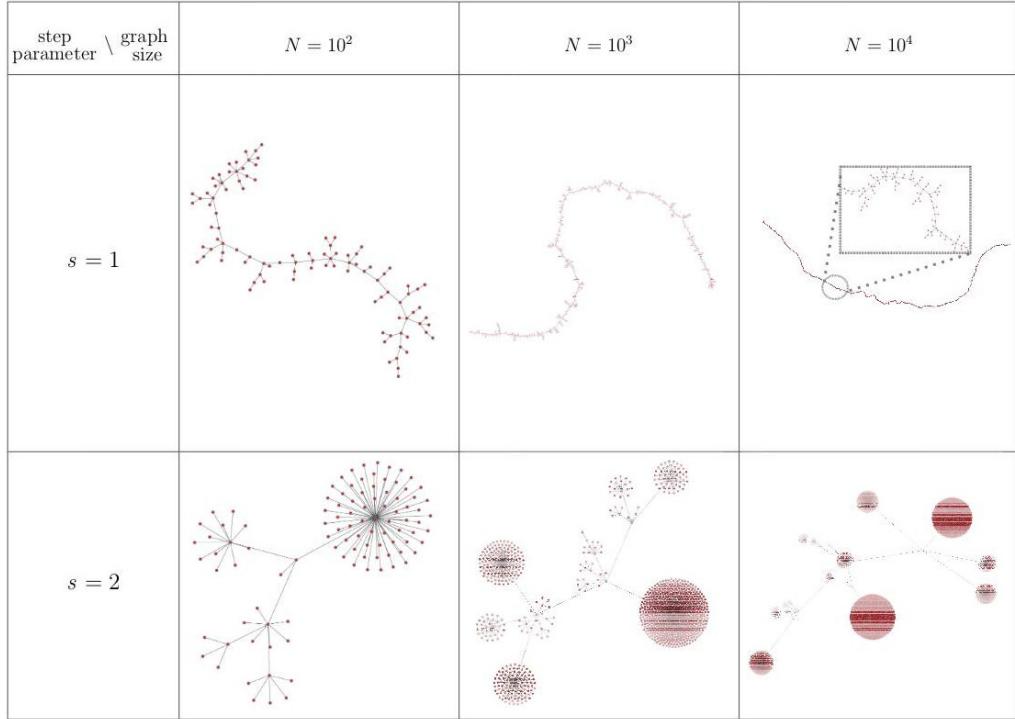
Taulukko 2: Yksi mahdollinen NRRW-prosessin realisaatio askelparametrilla $s = 2$. Satunnaiskävely on harmaan värin osoittamassa tilassa ja uusi solmu on juuri lisätty sen naapuriksi. Satunnaiskävely siirtyi nykyiseen tilaan alleviivatun solmun kautta.



kasvattaa (katso 1). Tämä ilmenee hyvin tietokonesimuloituista realisaatioista kuvassa 1. Parametrilla $s = 1$ jokaiseen satunnaiskävelyn vierailemaan tilaan lisätään uusi solmu. Tämä johtaa korkeisiin puihin, joissa solmut jakutuvat tasaisesti parillisille ja parittomille tasoille. Satunnaiskävelyn kaikki tilat ovat väistyviä.

Sen sijaan parillinen askelparametri ($s \in 2\mathbb{N}_0$) johtaa hyvin toisenlaisiin verkkoihin. Simulaatiotulokset viittaavat solmujen kasaantuvan suurissa määrin joidenkin yksittäisten solmujen jälkeläisiksi. Kyseessä on niin sanottu suosivan kiinnityksen ilmiö, jossa jotain mitattavaa suuretta kertyy sellaisille joukon alkioille, joilla on jo ennestään paljon kyseistä suuretta. Satunnaiskävelyn kaikki tilat ovat väistyviä.

solmuja liitetään todennäköisimmin sellaisiin verkon solmuihin, joilla on jo ennestään korkea asteluku. Suosiva kiinnityminen on yhteydessä skaalautumattomiin verkoihin [3].



Kuva 1: NRRW-prosessin realisaatioita tietokonesimulaatioissa. Kuva on kopioitu aiemmasta tutkimuksesta (Iacobelli et al.) [1].

2.2 Satunnaisverkko ja -kävely

NRRW-prosessin ominaisuudet ovat seurausta satunnaiskulun ja sen kasvattaman satunnaisen verkon välisestä vuorovaikutuksesta. Malli on monimutkainen ja yksinkertaisuuden vuoksi on ensin syytä tarkastella satunnaisverkkoa ja satunnaiskulkua erillisinä prosesseina. Tämä mahdollistaa erillisiin malleihin liittyvän terminologian ja yksityiskohtien esittelyn ennen NRRW-prosessin kokonaisuuteen paneutumista.

2.2.1 Satunnaisverkko

Olkoon $(\mathcal{G}_t^s)_{t \in \mathbb{N}_0}$ satunnaisverkko, johon lisätään uusi solmu s aikayksikön välein. Satunnaisprosessin tilajoukko on kaikkien suuntaamattomien, yhtenäisten ja syklitömien verkkojen eli puiden joukko.

Määritelmä 1. *Suuntaamatona verkko G on pari (V, E) , missä joukko V on verkon solmujen joukko ($v_i \in V$) ja E on suuntaamattomien kaarien joukko. Kaarien joukon alkiot ovat muotoa $\{v_i, v_j\}$. Kaari $\{v_i, v_j\}$ yhdistää solmut v_i ja v_j toisiinsa.*

Kasvavan verkon käsittelyn helpottamiseksi satunnaisverkon $(\mathcal{G}_t^s)_{t \in \mathbb{N}_0}$ solmut indeksoidaan kokonaisluvuilla $(0, 1, 2, \dots)$ lisäysjärjestyksen mukaan. Juurisolmu on siis v_0 ja hetkellä $t = sn$, $n \in \mathbb{N}_0$ lisätään solmu v_n . Jos satunnaisverkkoa $(\mathcal{G}_t^s)_{t \in \mathbb{N}_0}$ tarkastellaan itsenäisenä prosessina sen siirtymätodennäköisyydet pois nykytilasta ovat nollasta poikkeavia vain ajanhettillä $t = sn$, $n \in \mathbb{N}_0$. Ne määritetään satunnaiskävelyn $(\mathcal{W}_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$ siirtymätodennäköisyydet hetkellä $t = sn$:

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} [\mathcal{G}_{t+s}^s = (V_t \cup \{v_{j+1}\}, E_t \cup \{(v_i, v_{j+1})\}) \mid \mathcal{G}_t^s = (V_j, E_j), \mathcal{W}_t = v_j] \\ &= \mathbb{P} [\mathcal{W}_{t+s} = v_i \mid \mathcal{W}_t = v_n, G_t = (V_t, E_t)] \end{aligned} \quad (1)$$

2.2.2 Satunnaiskävely

Vastaavasti satunnaiskävelyprosessin $(\mathcal{W}_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$ tilajoukon ja siirtymätodennäköisyydet määritetään sen kasvattama satunnaisverkko. Sekä tilajoukko että siirtymätodennäköisyydet muuttuvat aina, kun verkkoon lisätään uusi solmu. Lisäyshetkien välillä tilajoukko on kuitenkin vakio ja satunnaiskävelyprosessi voidaan silloin nähdä tavallisena äärellisen tilajoukon Markov-ketjuna. Jos satunnaiskävely on solmissa v_i hetkellä t , määrätyy seuraava tila satunnaisesti valitsemalla yksi solmesta v_i lähevä kaari ja siirtymällä sen osoittamaan solmuun. Todennäköisyysmassa on tasajakautunut kaikkien solmun v_i karien kesken.

Koska NRRW-prosessi rakentaa puita, ei verkossa ole muita syklejä kuin juuren kaari itseensä. Verkkoteoriassa kaaret solmesta itseensä lasketaan kahdesti. Merkitään solmun v_i solmuun v_j yhdistävien kaarien määritettävä verkossa G_i

$$\psi_{G_i}(v_i, v_j) = \begin{cases} \mathbb{1}\{\{v_i, v_j\} \in E_i\} & \text{jos } v_i \neq v_j \\ 2 \cdot \mathbb{1}\{v_i = v_0\} & \text{muulloin} \end{cases}$$

missä E_i on verkon G_i kaarien joukko. Nyt todennäköisyys siirtyä solmesta v_i solmuun v_j on yksinkertaisesti

$$\mathbb{P} [\mathcal{W}_{t+1} = v_j \mid \mathcal{W}_t = v_i, \mathcal{G}_t^s = G_i] = \frac{\psi_{G_i}(v_i, v_j)}{d_{G_i}(v_i)} \quad (2)$$

sillä oletuksella, että satunnaiskävely tapahtuu verkossa G_i . Kaavassa $d_{G_i}(v_i)$ on solmun v_i asteluku verkossa G_i . Toisin sanoen

$$d_{G_i}(v_i) = \sum_{w \in V_i} \psi_{G_i}(v_i, w) \quad (3)$$

eli kaikkien solmuun v_i yhdistyvien kaarien lukumäärä.

2.3 Kokonaisuus

Satunnaisverkon ja satunnaiskävelyn erillinen tarkastelu paljastaa, että näistä jälkimmäinen on NRRW-prosessin todellinen satunnaisuuden lähe. Satunnaiskävely muuttaa liikkeillään sen omaa tilajoukkoa eli satunnaisverkkoa \mathcal{G}_t^s . Kun verkko muuttuu, myös satunnaiskävelyn siirtymätodennäköisyydet muuttuvat. Satunnaisverkko

sen sijaan kasvaa satunnaiskävelyn realisaation ohjaamana. Kokonaisuutena NRRW-prosessi on siis ajassa epähomogeeninen äärettömän tilajoukon Markov-prosessi. Proseszin epähomogeenisuus johtuu siitä, että satunnaisverkko voi muuttua vain s :llä jaollisilla ajanhetkillä.

2.3.1 Tilajoukko

Olkoon $V = \{v_1, v_2, \dots\}$ kaikkien solmujen numeroituvasti ääretön joukko. Jos n :n solmun joukkoa merkitään $V_n = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset V$ niin n :n solmun suuntaamattonien verkkojen joukko on

$$\mathbb{G}_n = \{(V_n, E) \mid E \subset V_n^2\}$$

missä $V_n^2 = \{e \subset V_n : |e| = 2\}$ on solmujoukon V_n järjestämättömien parien joukko. NRRW-prosessiin kuuluu myös satunnaiskävely, jonka tilajoukko n :n solmun verkkoa kulkissa sen solmujen joukko V_n . Selvästi n :n solmun NRRW-prosessin tilajoukko on $S_n = V_n \times \mathbb{G}_n$.

Kaikkien solmujen joukkoa merkitään numeroituvasti äärettömällä joukolla V . Vastaavasti kaikkien verkkojen joukkoa voidaan merkitä äärettömällä unionilla

$$\mathbb{G} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{G}_n \quad (4)$$

Koska satunnaisverkko kasvaa NRRW-prosessin edetessä, täytyy sen tilajoukon sisältää kaikki eri solmulukumäärien mahdollistamat tilat. NRRW-prosessin tilajoukko onkin siis

$$S = V \times \mathbb{G} \quad (5)$$

2.3.2 Siirtymätodennäköisydet

NRRW-prosessin siirtymätodennäköisydet ovat ajassa epähomogeenisia, sillä satunnaiskävelyn realisaatio kasvattaa sen omaa tilajoukkoa, eli NRRW-prosessin verkkoa vain kun $t \bmod s = 0$. Siirtymätodennäköisyksiä on siten syytä tarkastella kahdessa eri tapauksessa ajanhetken jaollisuuden mukaan.

Merkitään NRRW-prosessia hetkellä t $(\mathcal{W}_t, \mathcal{G}_t^s)$. Jos $v, v' \in V$ ja $G, G' \in \mathbb{G}$, niin NRRW-prosessin siirtymätodennäköisydet saavat esityksen

$$P((v', G'), (v, G)) = \mathbb{P}[(\mathcal{W}_{t+1}, \mathcal{G}_{t+1}^s) = (v', G') \mid (\mathcal{W}_t, \mathcal{G}_t^s) = (v, G)] \quad (6)$$

$$= \mathbb{P}[\mathcal{W}_{t+1} = v, \mathcal{G}_{t+1}^s = G \mid \mathcal{W}_t = v', \mathcal{G}_t^s = G'] \quad (7)$$

Kun $t + 1 \bmod s \neq 0$, ei prosessin verkkoon lisätä uusia solmuja. Satunnaisverkko \mathcal{G}_{t+1}^s on siis varmasti sama kuin sen edeltäjä \mathcal{G}_t^s . Siten $\mathbb{P}[\mathcal{G}_{t+1}^s = G \mid \mathcal{G}_t^s = G] = 1$ riippumattomasti satunnaiskävelyn tilasta. Selvästi tapahtuman komplementti

$(\mathcal{G}_{t+1}^s \neq G)$ on mahdoton. Lausekkeen 7 mukaisesti

$$\begin{aligned}
 P((v', G'), (v, G)) &= \mathbb{P} [\mathcal{W}_{t+1} = v, \mathcal{G}_{t+1}^s = G \mid \mathcal{W}_t = v', \mathcal{G}_t^s = G'] \\
 &= \mathbb{P} [\mathcal{G}_{t+1}^s = G \mid \mathcal{W}_t = v', \mathcal{G}_t^s = G'] \\
 &\quad \times \mathbb{P} [\mathcal{W}_{t+1} = v \mid \mathcal{W}_t = v', \mathcal{G}_t^s = G', \mathcal{G}_{t+1}^s = G] \\
 &= \mathbb{P} [\mathcal{G}_{t+1}^s = G \mid \mathcal{G}_t^s = G'] \mathbb{P} [\mathcal{W}_{t+1} = v \mid \mathcal{W}_t = v', \mathcal{G}_t^s = G'] \\
 &= \mathbb{1}\{G = G'\} \mathbb{P} [\mathcal{W}_{t+1} = v \mid \mathcal{W}_t = v', \mathcal{G}_t^s = G'] \\
 &= \mathbb{1}\{G_i = G_j\} \frac{\psi_{G_i}(v_i, v_j)}{d_{G_i}(v_i)}
 \end{aligned}$$

missä viimeinen yhtäsuuruus pohjautuu kaavan 2 lausekkeeseen.

Kun $t + 1 \bmod s = 0$, satunnaisverkko \mathcal{G}_{t+1}^s määräytyy satunnaiskävelyn \mathcal{W}_{t+1} realisaatiosta.

$$\begin{aligned}
 P((v', G'), (v, G)) &= \mathbb{P} [\mathcal{W}_{t+1} = v, \mathcal{G}_{t+1}^s = G \mid \mathcal{W}_t = v', \mathcal{G}_t^s = G'] \\
 &= \mathbb{P} [\mathcal{W}_{t+1} = v \mid \mathcal{W}_t = v', \mathcal{G}_t^s = G'] \\
 &\quad \times \mathbb{P} [\mathcal{G}_{t+1}^s = G \mid \mathcal{W}_{t+1} = v, \mathcal{W}_t = v', \mathcal{G}_t^s = G']
 \end{aligned}$$

Uusi solmu lisätään nyt siihen verkon G' solmuun, johon satunnaiskävely siirtyy ajanhetkellä $t + 1$. Selvästi mahdollisia satunnaisverkon \mathcal{G}_{t+1}^s realisaatioita ovat vain sellaiset verkot, jotka on saatu liittämällä verkkoon G' yksi uusi solmu, $v^+ = v_{\lfloor \frac{t+1}{s} \rfloor}$. Kun verkkojen G ja G' merkitään verkon määritelmän (1) mukaisina solmujen ja kaarien pareina (V, E) ja (V', E') ,

$$\begin{aligned}
 P((v', G'), (v, G)) &= \mathbb{P} [\mathcal{W}_{t+1} = v \mid \mathcal{W}_t = v', \mathcal{G}_t^s = (V', E')] \\
 &\quad \times \mathbb{P} [\mathcal{G}_{t+1}^s = (V, E) \mid \mathcal{W}_{t+1} = v, \mathcal{W}_t = v', \mathcal{G}_t^s = (V', E')] \\
 &= \mathbb{1}\{(V, E) = (V' \cup \{v^+\}, E' \cup \{\{v, v^+\}\})\} \\
 &\quad \times \mathbb{P} [\mathcal{W}_{t+1} = v' \mid \mathcal{W}_t = v', \mathcal{G}_t^s = (V', E')] \\
 &= \mathbb{1}\{G = (V' \cup \{v^+\}, E' \cup \{\{v, v^+\}\})\} \frac{\psi_{G'}(v, v')}{d_{G'}(v')}
 \end{aligned}$$

missä viimeinen yhtäsuuruus perustuu kaavan 2 lausekkeeseen.

3 Stokastinen esitys

NRRW-prosessin tarkastelu osoittaa, että kyseessä on monimutkainen ja epähomogeeninen äärettömän tilajoukon stokastinen prosessi. Sen käsittelyä voidaan kuitenkin helpottaa tukeutumalla prosessin kanssa yhdenmukaiseen mutta yksinkertaisempaan malliin, NRRW-prosessin stokastiseen esitykseen.

3.1 Yleistä teoriaa

Olkoon $(\omega_t)_{t \geq 0}$ jono riippumattomia välin $[0, 1]$ tasajakautuneita satunnaislukuja. Toisin sanoen $w_t \sim \text{Tas}(0, 1)$. Tällaista satunnaislukujen sarjaa voidaan käyttää monimutkaisemman stokastisen prosessin algoritmiseen simulointiin. Simulointi rakennetaan etsimällä deterministinen funktio $\phi : S \times [0, 1] \rightarrow S$, joka liittää stokastisen prosessin tilan ja välin $[0, 1]$ reaaliluvun prosessin seuraavaan tilaan. Funktion ϕ tulee toteuttaa yhtälö

$$\mathbb{P}[\phi(x, \omega_t) = y] = \int_0^1 \mathbf{1}\{\phi(x, w) = y\} dw \quad (8)$$

$$= \mathbb{P}[X_{t+1} = y \mid X_t = x] = P_{x,y} \quad \forall x, y \in S \quad (9)$$

Yhtälön 9 toteuttavaa funktiota ϕ ja satunnaislukujonoa $(\omega_t)_{t \geq 0}$ kutsutaan siirtymämatruiisina *P stokastiseksi esitykseksi*. Jos stokastisen prosessin alkutila on $X_0 = x_0$, sitä voidaan simuloida sen stokastisen esityksen avulla rekursiivisesti:

$$X_{t+1} = \phi(X_t, \omega_t)$$

Mikäli stokastinen prosessi on epähomogeeninen ajassa, vaaditaan stokastiseen esitykseen jono deterministisiä funktioita $(\phi^{(t)})_{t \geq 0}$, jotka ovat muotoa $\phi^{(t)} : S \times [0, 1] \rightarrow S \quad \forall t \geq 0$. Funktioiden $\phi^{(t)}$ tulee toteuttaa yhtälöä 9 vastaava ehto $\forall t \geq 0$:

$$\mathbb{P}[\phi^{(t)}(x, \omega_t) = y] = \mathbb{P}[X_{t+1} = y \mid X_t = x] = P_{x,y}^{(t)} \quad \forall x, y \in S \quad (10)$$

Prosessin simulointi tehdään, kuten homogenisessa tilanteessa, mutta rekursiofunktio valitaan funktiojonosta $(\phi^{(t)})_{t \geq 0}$ järjestyksessä. [7]

3.2 Prosessin esitys

Edellä havaittiin, että NRRW-prosessi on epähomogeeninen ajassa. Sen stokastinen esitys on siis muotoa $(\phi_t, \omega_t)_{t \geq 0}$, missä funktiot ϕ_t toteuttavat ehdon 10. Muodostetaan sopiva jono deterministisiä funktioita NRRW-prosessille. Proseszin tilat ovat muotoa (v, G) , missä $G = (V, E)$ on verkko ja $v \in V$ on verkon G solmu. Jakamalla rekursiofunktioit satunnaiskävely- ja satunnaisverkko-osiin saadaan niille korkeatasoinen muoto

$$\phi^{(t)}((v, G), w) = (\lambda((v, G), w), \mu^{(t)}(\lambda((v, G), w), G)) \quad (11)$$

missä λ on satunnaiskulun $(\mathcal{W}_t)_{t \geq 0}$ stokastisen esityksen rekursiofunktio parametriksi annetussa verkossa G , ja μ päävittää verkkoa G satunnaiskulun realisaation mukaisesti. Satunnaiskulun rekursiofunktio

$$\lambda((v_i, G), w) = \begin{cases} v_1 & w \in [0, \rho(G)_{i,1}) \\ v_2 & w \in [\rho(G)_{i,1}, \rho(G)_{i,1} + \rho(G)_{i,2}) \\ \vdots & \\ v_{|V|} & w \in [\rho(G)_{i,|V|-1}, \rho(G)_{i,|V|-1} + \rho(G)_{i,|V|}) \end{cases} \quad (12)$$

missä ρ on funktio verkosta sen siirtymämatriisiin ja $|V|$ on verkon G solmujen lukumäärä. Hyödyntäen määritelmän 2.2.2 funktiota solmuja yhdistävien kaarien määälle, saadaan kuvaikselle ρ alkioittainen määritelmä

$$\rho(G)_{i,j} = \frac{\psi_G(i,j)}{d_G(i)}. \quad (13)$$

Tämä seuraa suoraan kaavasta 2. Lopuksi Stokastisen esityksen verkkoa päivittävä funktio

$$\mu^{(t)}(v, (V, E)) = \begin{cases} (V \cup \{v_{t/s}\}, E \cup \{\{v, v_{t/s}\}\}) & \text{kun } t \bmod s = 0 \\ (V, E) & \text{muulloin} \end{cases} \quad (14)$$

Se siis lisää verkon solmuun v uuden solmun $v_{t/s}$ aina kun aika t on jaollinen askelparametrillä s . Muulloin verkkoa ei muuteta.

Lause 1. Olkoon $(\omega_t)_{t \geq 0}$ jono riippumattomia välin $[0, 1]$ tasajakautuneita satunnaislukuja. Kaavojen 11-14 määrittelemä jono deterministisiä funktioita $(\phi^t)_{t \geq 0}$ muodostaa yhdessä satunnaislukujonon $(\omega_t)_{t \geq 0}$ kanssa NRRW-prosessin stokastisen esityksen.

Todistus. Esitän, että stokastisen esityksen $(\phi^{(t)}, \omega_t)_{t \geq 0}$ simuloima stokastinen prosessi on todellakin NRRW-prosessi askelparametrillä s . NRRW-prosessin siirtymätodennäköisyydet on laskettu kappaleessa 2.3.1. Prosessin käyttäytyminen ajanhetkellä t riippuu siitä, onko t jaollinen askelparametrilla s . Osoitetaan stokastisen esitykseen yhdenmukaisuus NRRW-prosessin kanssa molemmissa tapauksissa. Olkoon $X_t = (\mathcal{W}_t, \mathcal{G}_t^s)$ NRRW-prosessin tila hetkellä t .

On näytettävä kaavan 10 mukaisesti, että

$$\mathbb{P}[\phi^{(t)}(x, \omega_t) = y] = \mathbb{P}[X_{t+1} = y \mid X_t = x]$$

kaikilla $x, y \in S$ ja $t \in \mathbb{N}_0$, missä S on kaavan 5 määrittelemä NRRW-prosessin tilajoukko. Sijoittamalla aiemmin määritelty stokastinen esitys yhtälön vasempaan puoleen saadaan

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[\phi^{(t)}(x, \omega_t) = y] &= \int_0^1 \mathbf{1}\{\phi^{(t)}(x, w) = y\} dw \\ &= \int_0^1 \mathbf{1}\left\{\left(\lambda((v_x, G_x), w), \mu^{(t)}(\lambda((v_x, G_x), w), G_x)\right) = (v_y, G_y)\right\} dw \\ &= \int_0^1 \mathbf{1}\{\lambda((v_x, G_x), w) = v_y\} \mathbf{1}\{\mu^{(t)}(\lambda((v_x, G_x), w), G_x) = G_y\} dw \end{aligned}$$

Kun $t + 1 \bmod s \neq 0$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P} [\phi^{(t)}(x, \omega_t) = y] &= \int_0^1 \mathbb{1}\{\lambda((v_x, G_x), w) = v_y\} \mathbb{1}\{\mu^{(t)}(\lambda((v_x, G_x), w), G_x) = G_y\} dw \\
&= \mathbb{1}\{G_x = G_y\} \int_0^1 \mathbb{1}\{\lambda((v_x, G_x), w) = v_y\} dw \\
&= \mathbb{1}\{G_x = G_y\} \rho(G_x)_{x,y} = \mathbb{1}\{G_x = G_y\} \frac{\psi_{G_x}(v_x, v_y)}{d_{G_x}(v_x)} \\
&= \mathbb{P}[X_{t+1} = y \mid X_t = x]
\end{aligned}$$

Kun $t + 1 \bmod s = 0$

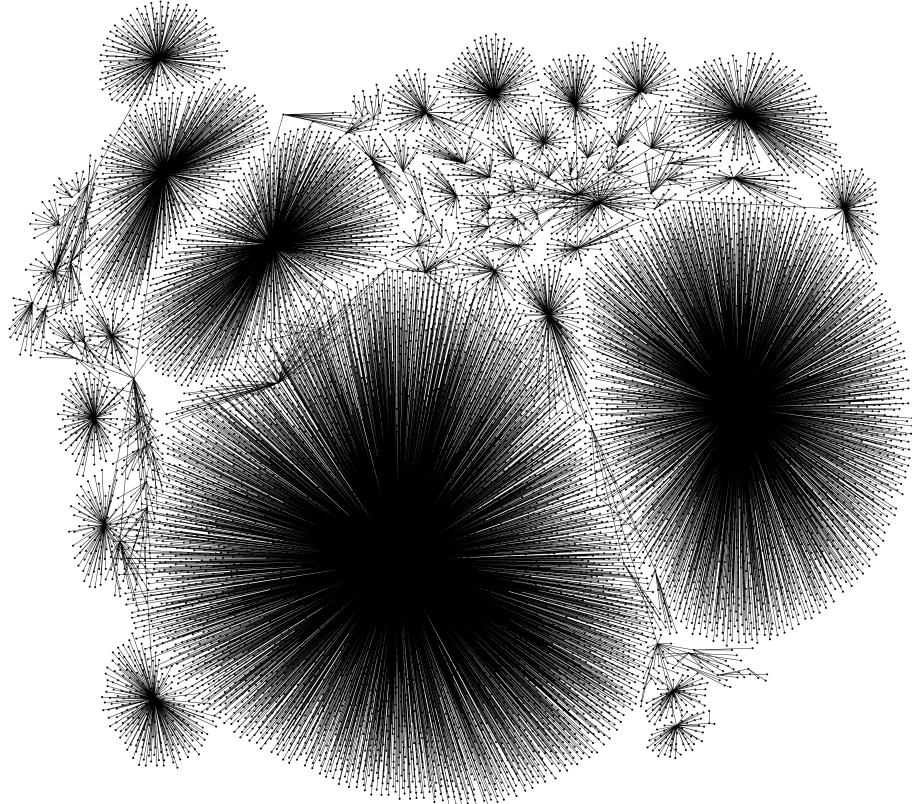
$$\begin{aligned}
\mathbb{P} [\phi^{(t)}(x, \omega_t) = y] &= \int_0^1 \mathbb{1}\{\lambda((v_x, G_x), w) = v_y\} \mathbb{1}\{\mu^{(t)}(\lambda((v_x, G_x), w), G_x) = G_y\} dw \\
&= \mathbb{1}\{G_y = (V_x \cup \{v_y\}, E_x \cup \{\{v_x, v_y\}\})\} \int_0^1 \mathbb{1}\{\lambda((v_x, G_x), w) = v_y\} dw \\
&= \mathbb{1}\{G_y = (V_x \cup \{v_y\}, E_x \cup \{\{v_x, v_y\}\})\} \rho(G_x)_{x,y} \\
&= \mathbb{1}\{G_y = (V_x \cup \{v_y\}, E_x \cup \{\{v_x, v_y\}\})\} \frac{\psi^{(t)}(v_i, v_j)}{d_t(v_i)} \\
&= \mathbb{P}[X_{t+1} = y \mid X_t = x]
\end{aligned}$$

Selvästi rakentamani stokastinen esitys on ekvivalentti NRRW-prosessin kanssa. \square

4 Parillinen prosessi

NRRW-prosessin käyttäytymiseen vaikuttaa voimakkaasti askelparametrin s parillisuus. Parillisen parametrin prosessissa satunnaiskävely $(\mathcal{W}_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$ on palautuva eli se vieraillee kaikkissa sen tilajoukon solmuissa äärettömän monta kertaa lähes varmasti. Sen sijaan ainakin askelparametrin $s = 1$ satunnaiskulku on väistytty. Askelparametrin parillisuus vaikuttaa yhtä radikaalisti satunnaisverkkojen ominaisuuksiin. Parillisen askelparametrin satunnaisverkon $(\mathcal{G}_t^s)_{t \in \mathbb{N}_0}$ sisäsolmujen astelukujen jakauma on potenssilain alhaalta rajoittama, kun taas askelparametrin $s = 1$ solmujen astelukujen jakauma on geometrisen jakauman ylhäältä rajoittama.

Erityisesti vain parillisen askelparametrin NRRW-prosessissa kaksi peräkkäistä uutta solmua voidaan lisätä samaan verkon solmuun. Parittoman askelparametrin prosessissa tämä ei ole mahdollista muualla kuin puun juuressa, sillä satunnaiskävely siirtyy s :ssä askeleessa puun parittomalta tasolta parilliselle ja parilliselta tasolta parittomalle. Parillisen askelparametrin prosessissa satunnaiskävelyn pariteetti muuttuu vain, jos satunnaiskävely kulkee puun juuren silmukan läpi.



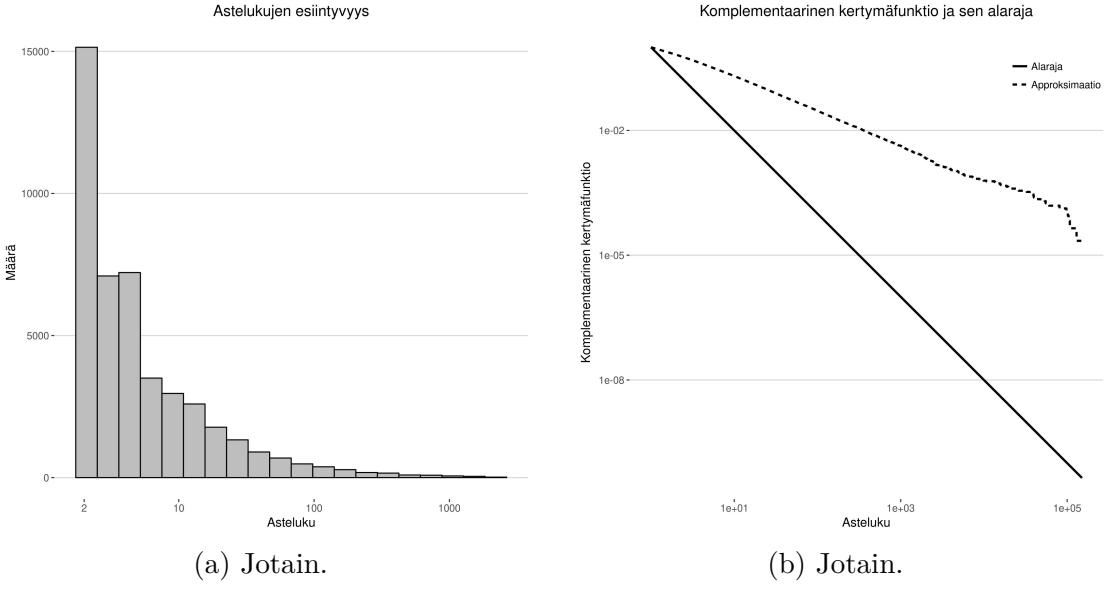
Kuva 2: Tietokonesimuloitu NRRW-prosessi parillisella askelparametrilla $s = 4$.

Uuden, peräkkäisen solmun lisääminen samaan solmuun parillisessa NRRW-verkossa on paitsi mahdollista niin myös sitä todennäköisempää mitä suurempi kyseisen solmun asteluku on. Koska uusia solmuja lisätään ennen kaikkea saman pariteetin tasoille puussa, jäävät uudet solmut lehdiksi (*eng. leaf*), kunnes prosessin pariteetti vaihtuu. Lehtisolmuista voi siirtyä vain takaisin lähtöpisteeseen, joten todennäköisyys palata johonkin satunnaisverkon solmuun suurenee, kun solmussa vierailaan ja sen asteluku kasvaa. Kuvaaja 2 havainnollistaa, kuinka lehtisolmuja kasaantuu tähtimaiseen muodostelmaan joidenkin solmujen ympärille.

Tämä parillisen prosessin ominaisuus liittyy vahvasti suovisaan kiinnitymiseen (*eng. preferential attachment*), sillä uusia solmuja kertyy erityisen todennäköisesti sellaisille verkon solmuille, joilla on jo ennestään paljon naapureita. Kuten aiemmin on todettu, suoiva kiinnityminen on tosielämän verkkorakenteiden kannalta kiinnostava ominaisuus. Käsite on yhteydessä sosialogiseen Matteus-efektiin, joka tarkoittaa etujen kasaantumista niille, joilla niitä on jo ennestään. Efektiin ydinajatus tiivistetään usein lausahdukseen: "Rikkaat rikastuu ja köyhät köyhtyy". Keskeytynkin tässä kandidaatintyössä parillisen NRRW-prosessin ominaisuuksia käsittelemiseen.

4.1 Astelukujen jakauma

Parillisen askelparametrin ja askelparametrin $s = 1$ NRRW-prosessit generoivat hyvin erilaisia verkkoja. Ehkä tärkein ero prosessien rakentamien verkkojen välillä liittyy



Kuva 3: Test

sisäsolmujen astelukujen jakaumiin. Parillinen prosessi nimittäin rakentaa verkkoja, joissa sisäsolmujen astelukujen jakauma on potenssilain alhaalta rajoittama (eng. heavy tail), kun taas parametrin $s = 1$ vastaava jakauma on geometrisen jakauman ylhäältä rajoittama (eng. exponential tail). Parillisen prosessin jakauma mukailee erityisesti lauseen 2 alarajaa [4].

Lause 2. Olkoon NRRW-prosessin askelparametri s parillinen. Oletetaan, että T_j on se ajanhetki, jolloin solmuun j lisätään sen ensimmäinen naapuri. Tällöin kaikilla $t \geq T_j$ ja $k \in \{1, \dots, \lfloor \frac{t-T_j}{s} \rfloor + 1\}$ pätee, että

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[d_t(j) \geq k+1 \mid T_j < \infty] &\geq k^{-\frac{s}{2}}, \quad \text{jos } j \neq \text{juuri} \\ \mathbb{P}[d_t(j) \geq k+2] &\geq \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^{-\frac{s}{2}}, \quad \text{jos } j = \text{juuri}\end{aligned}$$

Arviodakseni lauseen 2 uskottavuutta simuloin rinnakkain kuudentoista eri askelparametrin $s = 4$ NRRW-prosessin kehitystä 600000 askeleen päähän alkutilasta. Kuvaaja 3 esittää simulaatoidun otoksen sisäsolmujen astelukujen jakaumaa (a) ja vertaa approksimoitua sisäsolmujen asteluvun komplementaarista kertymäfunktiota lauseen 2 mukaiseen alarajaan (b).

4.2 Palautuvuus

Lause 3. Olkoon i solmu ja $\{i, j\}$ kaari NRRW-prosessin verkossa. Jos i on palautuva, niin satunnaiskävely $(\mathcal{W}_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$ kulkee kaaren $\{i, j\}$ läpi äärettömän monta kertaa lähes varmasti.

Todistus. TODO: INSERT PROOF HERE!

□

Lause 4.

Todistus.

□

5 Yhteenveton

Viitteet

- [1] Clauset, A., Shalizi, C. R. ja Newman, M. E. Power-law distributions in empirical data. Department of Computer Science, University of New Mexico, Albuquerque, USA, 2009.
- [2] Barabási, A. Linkit - verkostojen uusi teoria. Helsinki, Terra Gognita Oy, 2002. ISBN 952-5202-66-6.
- [3] Barabási, A., Albert, R. Emergence of Scaling in Random Networks. Department of Physics, University of Notre-Dame, Notre-Dame, France, 1999.
- [4] Iacobelli, G., Figueiredo, D. R., Neglia, G. Transient and Slim versus Recurrent and Fat: Random Walks and the Trees they Grow. Istituto de Matemática, Federal University of Rio de Janeiro, Brazil, 2017.
- [5] Popov, S. The Tangle. Viitattu 3.5.2018. Saatavissa: https://iota.org/IOTA_Whitepaper.pdf.
- [6] Popov, S., Saa, O., Finardi, P. Equilibria in the Tangle. Department of Statistics, Institute of Mathematics, Statistics and Scientific Computation, University of Campinas, Brazil, 2017.
- [7] Häggström O. Finite Markov Chains and Algorithmic Applications. 4. painos. Cambridge, Cambridge University Press, 2007. ISBN 978-0-521-89001-4.

A Simulaatoiden lähdekoodi

Simuloin NRRW-prosessia itse kirjoittamallani C++-kielisellä ohjelmalla. Lähdekoodin käänntäminen vaatii vähintään C++11-versiota tukevan käännejän, asennetun *Boost Graph Library*:n (BGL) ja *OpenMP*-tuen rinnakkaisuuden mahdollistamiseksi.

Ohjelma tulostaa jokaista simuloitua NRRW-prosessia kohden kaksi tiedostoa työskentelykansion *output*-alikansioon. Tiedostot ovat CSV- ja DOT-formaatteissa ja niiden nimet ovat muotoa *degrees_N.csv* ja *graph_N.dot*. Näistä ensimmäinen sisältää N:n simulaation kaikkien solmujen asteluvut listana. Jälkimmäinen tiedosto sisältää N:n simuloidun verkon esityksen DOT-kielillä. Verkon DOT-kielinen esitys voidaan muuttaa verkkoa esittäväksi kuvaksi esimerkiksi *sdfp*-työkalulla.

```

1 #include <iostream>
2 #include <random>
3 #include <iterator>
4 #include <fstream>
5 #include <memory>
6
7 #include <boost/config.hpp>
8 #include <boost/graph/adjacency_list.hpp>
9 #include <boost/graph/graphviz.hpp>
10
11 template <typename RandomGenerator = std::default_random_engine>
12 struct random_selector {
13     public:
14         random_selector(RandomGenerator g = RandomGenerator(std::random_device("dev/urandom")()))
15             : gen(g) {}
16
17         template <typename Iter>
18         Iter select(Iter start, Iter end) {
19             std::uniform_int_distribution<> dist(0, std::distance(start, end) - 1);
20             std::advance(start, dist(gen));
21             return start;
22         }
23
24     private:
25         RandomGenerator gen;
26     };
27
28 template <typename Graph>
29 struct graph_writer {
30     public:
31         graph_writer(Graph& g) : graph(g) {}
32
33         void write_graphviz(const std::string& filename) const {
34             std::ofstream file(filename);
35             boost::write_graphviz(file, graph, v_writer, boost::default_writer(),

```

```

36         g_writer);
37     file .close ();
38 }
39
40 private:
41     const Graph& graph;
42
43     struct vertex_property_writer {
44         template <class VertexOrEdge>
45         void operator()(std::ostream& out, const VertexOrEdge& v) const {
46             out << "[label="<< v;
47         }
48     } v_writer;
49
50     struct graph_property_writer {
51         void operator()(std::ostream& out) const {
52             out << "graph [ranksep=4 nodesep=1]" << std::endl;
53             out << "node [shape=point]" << std::endl;
54         }
55     } g_writer;
56 };
57
58 struct nrrw_process {
59     public:
60         typedef boost::adjacency_list<boost::listS, boost::vecS, boost::undirectedS,
61                                     boost::no_property, boost::no_property> graph_t;
62
63         typedef boost::graph_traits<graph_t>::vertex_descriptor vertex_t;
64         typedef boost::graph_traits<graph_t>::edge_descriptor edge_t;
65
66         nrrw_process(const unsigned int& p) : parameter(p), counter(0), writer(graph) {
67             current = boost::add_vertex(graph);
68             boost::add_edge(current, current, graph);
69         }
70
71         std::vector<unsigned int> get_degrees() const {
72             typename boost::graph_traits<graph_t>::vertex_iterator start, end;
73             boost::tie(start, end) = boost::vertices(graph);
74
75             const unsigned int size = boost::num_vertices(graph);
76             std::vector<unsigned int> degrees(size);
77             std::transform(start, end, degrees.begin(),
78                           [this](vertex_t v){return this->degree(v);});
79             return degrees;
80         }
81
82         void simulate(unsigned int steps) {
83             counter = 0;

```

```

82         while (step() < steps) {}
83     }
84
85     void write_graphviz(const std::string& filename) {
86         writer.write_graphviz(filename);
87     }
88
89 private:
90     graph_t graph;
91     vertex_t current;
92
93     random_selector<> selector;
94     graph_writer<graph_t> writer;
95
96     unsigned int counter = 0;
97     const unsigned int& parameter;
98
99     unsigned int step() {
100         // choose an outgoing edge randomly
101         typename boost::graph_traits<graph_t>::out_edge_iterator start, end;
102         boost::tie(start, end) = boost::out_edges(current, graph);
103
104         auto random_iter = selector.select(start, end);
105         const edge_t& random_edge = *random_iter;
106
107         // move to the random vertex
108         current = boost::target(random_edge, graph);
109         counter++;
110
111         // add a new vertex to the graph if necessary
112         if (counter % parameter == 0) {
113             vertex_t new_vertex = boost::add_vertex(graph);
114             boost::add_edge(current, new_vertex, graph);
115         }
116
117         return counter;
118     }
119
120     unsigned int degree(vertex_t vertex) const {
121         return boost::out_degree(vertex, graph);
122     }
123 };
124
125 int main(int argc, char* argv[]) {
126     if (argc < 3) {
127         std::cerr << "Usage: " << argv[0] << " PARAMETER STEPS [COUNT]" <<
128         std::endl;
129     }
130     return 1;

```

```

129     }
130
131     const std::string directory = "output";
132     const int parameter = atoi(argv[1]);
133     const int steps = atoi(argv[2]);
134
135     int count = 1;
136     if (argc == 4) {
137         count = atoi(argv[3]);
138     }
139
140     std::vector<std::unique_ptr<nrrw_process>> simulations;
141     for (int i = 0; i < count; i++) {
142         simulations.push_back(
143             std::unique_ptr<nrrw_process>(new nrrw_process(parameter)));
144     }
145
146 #pragma omp parallel for
147 for (int i = 0; i < simulations.size(); i++) {
148     auto& process = simulations.at(i);
149     process->simulate(steps);
150
151     auto degrees = process->get_degrees();
152
153     std::string degrees_path = directory + "/degrees_" + std::to_string(i) + ".csv";
154     std::ofstream degrees_file(degrees_path);
155     for (auto it = degrees.cbegin(); it != degrees.cend(); it++) {
156         degrees_file << *it << std::endl;
157     }
158     degrees_file.close();
159
160     std::cout << "FINISHED (" << i << ")" << std::endl;
161
162 //std::string graph_path = directory + "/graph_" + std::to_string(i) + ".dot";
163 //process->write_graphviz(graph_path);
164 }
165
166 return 0;
167 }
```
