# TD 1 : Cinématique en grandes transformations

## Exercice 1 : Extension uniforme d'un cylindre

On considère la transformation **uniforme** d'un cylindre, $(r_0, h_0)$ et $(r, h)$ étant le rayon et l'hauteur du cylindre dans la configuration de référence et dans la configuration déformée, respectivement (voir Figure 1).

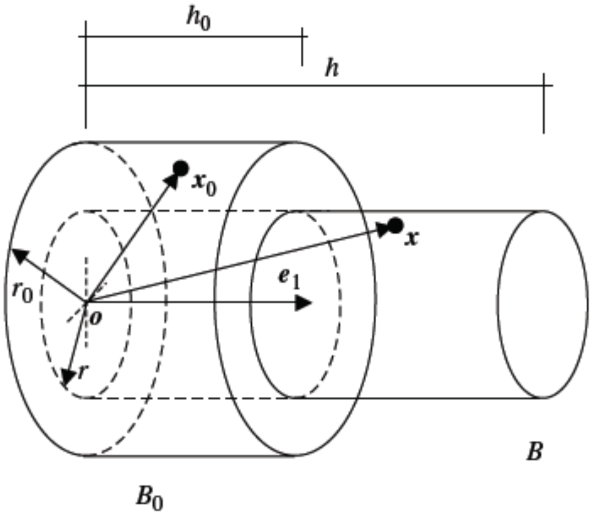


FIGURE 1 – Extension uniforme d'un cylindre

1. Donner l'expression de la transformation $\underline{x} = \underline{f}(\underline{x}_0)$
2. Calculer le gradient de la transformation $F$ et fournir son expression en notation intrinséque et matricielle.
3. Calculer le champ de déplacement $\underline{u}$.
4. Calculer $U$, $R$, $C$, $E$, $\log(U)$, $\epsilon = (\nabla\underline{u} + \nabla\underline{u})/2$.
5. Donner la condition sur $h$ et $r$ pour que la transformation soit isochore.

## Exercice 2

Etant $F$ le gradient d'une transformation $\underline{f}(\underline{x}_0, t)$, $\underline{v}(\underline{x}, t)$ la description spatiale du champs de vitesse et $L = \text{grad}\underline{v}$ son gradient eulerien, montrer que

1. $\dot{F} = L\,F$
2. $\dot{E} = F^T\,D\,F$, où $E$, $D$ sont le tenseur de déformation de Green-Lagrange et le taux de déformation, répectivement.
3. Soit $\rho_0$ et $\rho$ la densité volumique de masse dans la configuration de référence et actuelle, respectivement. Montrer que la conservation de la masse implique que

$$\rho J = \rho_0$$

## Exercice 3

On suppose que le cylindre de l'exercice 1 soit en équilibre dans sa configuration actuelle sous l'action de forces de pression reparties uniformément sur les surfaces $x_1 = 0$ et $x_1 = h$ et ayant comme résultantes $\underline{F} = F\underline{e}_1$ et $\underline{F} = -F\underline{e}_1$, respectivement. En supposant l'état de déformation et de contrainte uniforme en espace, déterminer :

1. Le tenseur de contrainte de Cauchy, $T$.
2. Le prémier tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff $S = J\,F^{-T}\,T$.
3. Le deuxième tenseur de contrainte de Piola-Kirchhoff $T^{(2)} = F^{-1}T$

# TD 2 : Hyperélasticité

## Exercice 1 : Traction en déformations planes

On considère la transformation **uniforme** d'un bloc en déformations planes soumis à une traction unixiale dans la direction $\underline{e}_1$. On se propose de trouver la délation entre la contrainte appliquée et la déformation du bloc pour différentes lois de comportement.

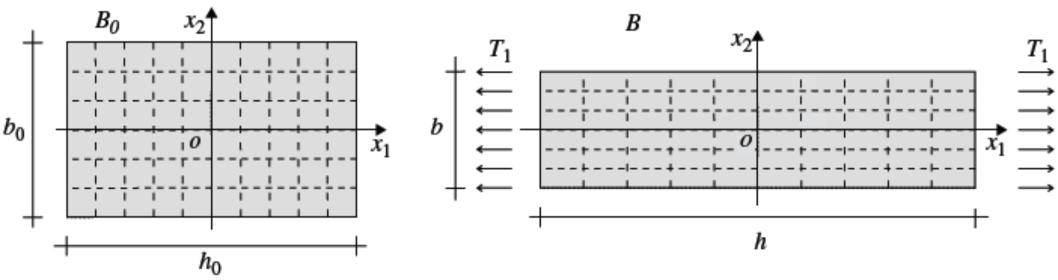


Figure 1 – Extension d'un bloc : configuration de initiale (à gauche) et déformée.

1. Donner l'expression de la transformation $\underline{x} = \underline{f}(\underline{x}_0)$, et calculer le gradient de la transformation, $F$, le tenseur des dilatations de Cauchy $C$, le tenseur des déformation de Green-Lagrange $E$, et $U$.
2. Calculer la dilatation dans une direction inclinée d'un angle $\theta_0$ par rapport à $\underline{e}_1$ dans la configuration initiale.
3. On suppose que la matériau soit **incompressible**. En utilisant un modèle constitutif de type *neo-Hookéen*, déterminer l'expression des contraintes de Cauchy $\sigma$ en fonction de $h/h_0$. En utilisant les équations d'équilibre, déterminer le lien entre $\sigma_{11}$ et $h/h_0$. Déterminer $\sigma_{33}$. Repeter l'analyse pour une lois de comportement de *Mooney-Rivlin*. Calculer le premier et le second tenseurs des contraintes de Piola-Kirchhoff $S$ et $T$.
4. On suppose que la matériau soit **compressible**. En utilisant la lois de comportement de Kirchhoff-Saint Venant, répéter l'analyse de la question précédente et montrer que

$$b^2/b_0^2 = 1 + \frac{\nu}{1-\nu}(1 - h^2/h_0^2)$$

et qu'il existe une valeur citrique de la dilatation axiale à parte de la quelle $b < 0$. Que peut-on en déduire ?