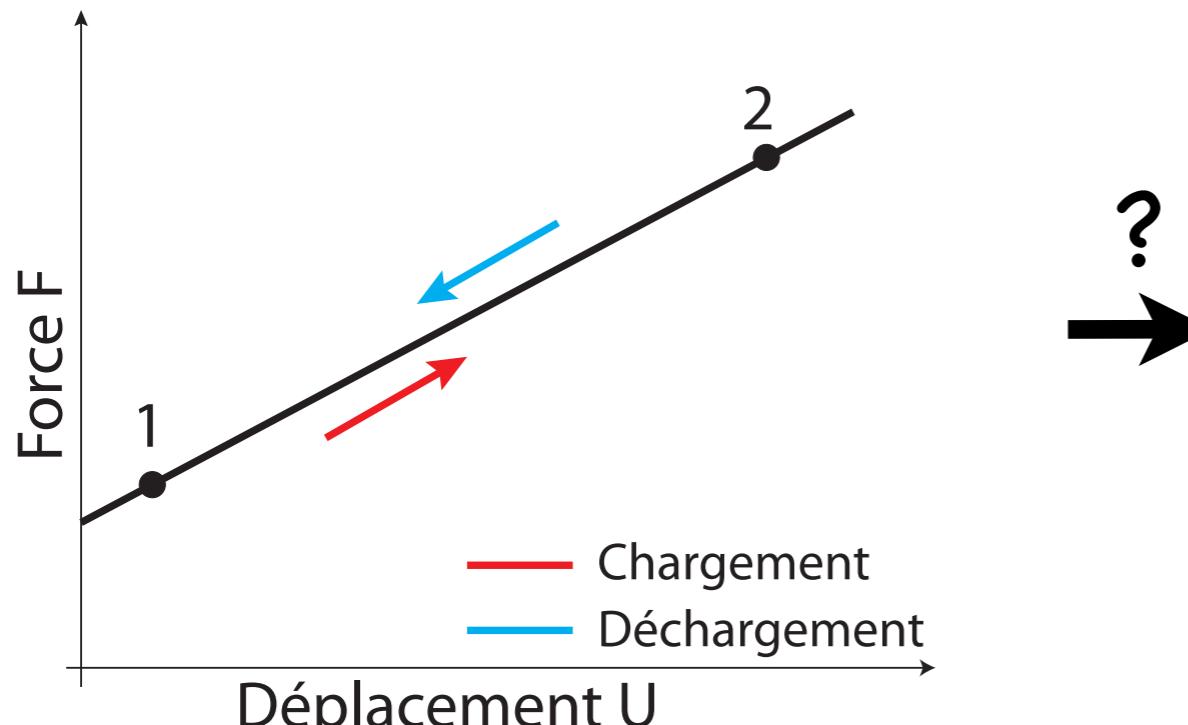
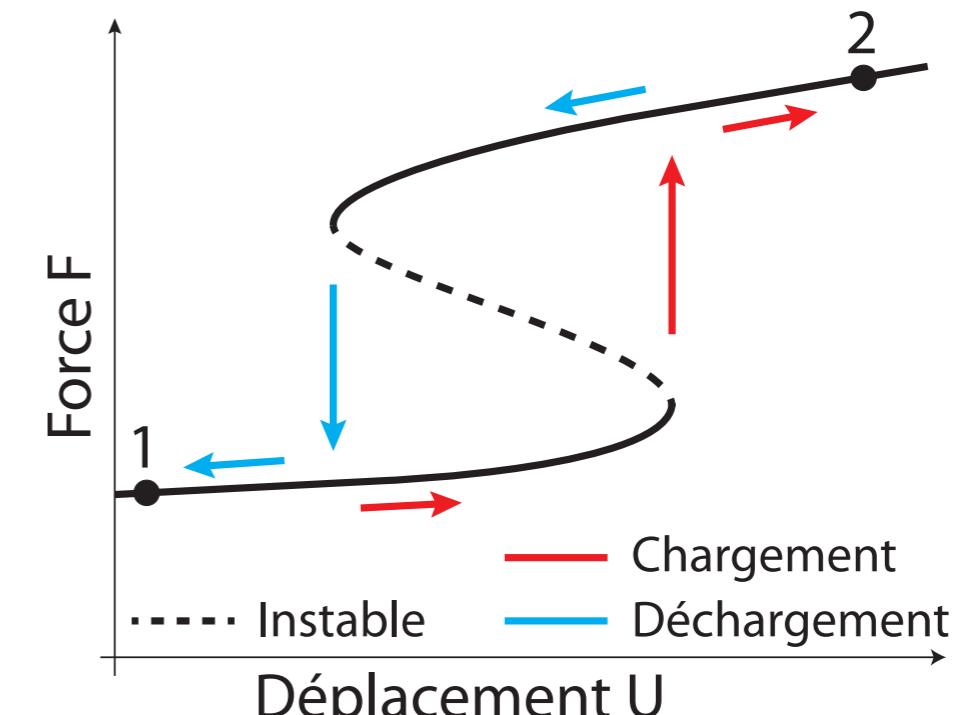


## Master 2 : 5AG07

### Calculs de structures : II. Résolution d'équations non linéaires



Comportement linéaire



Comportement Non linéaire

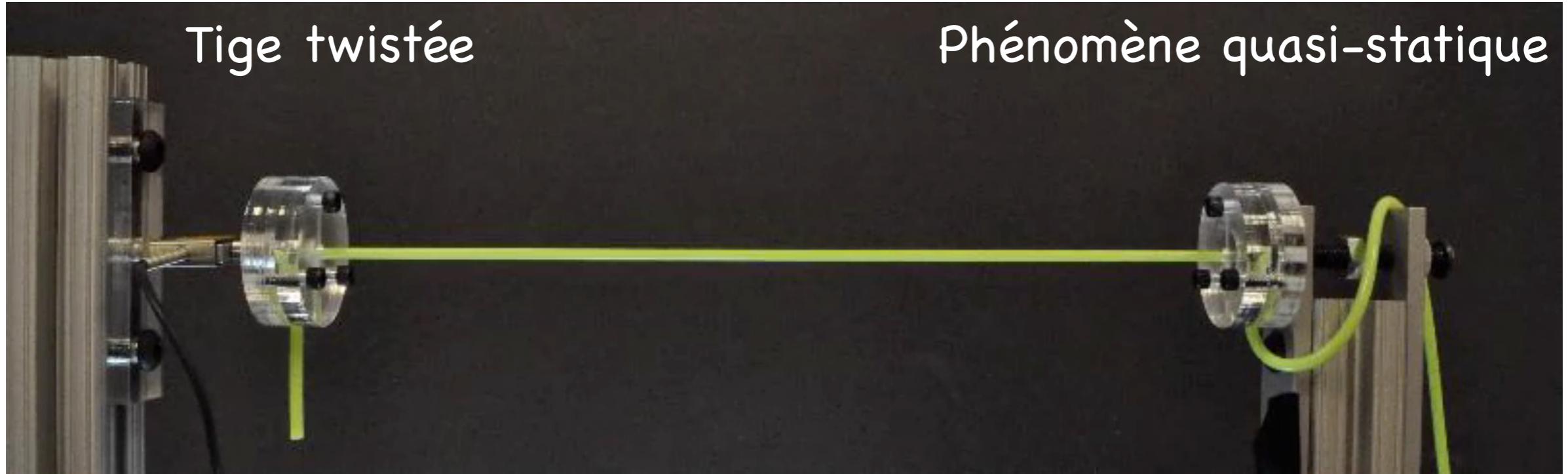
# Plan du cours

0. Introduction : La notion de non-linéarité.
  1. Phénomènes non linéaires en mécanique des solides.
  2. Méthodes de calculs pour l'ingénieur.
  3. Notion de calculs de stabilité.
- 

2 x 4H de cours pour maîtriser les concepts.

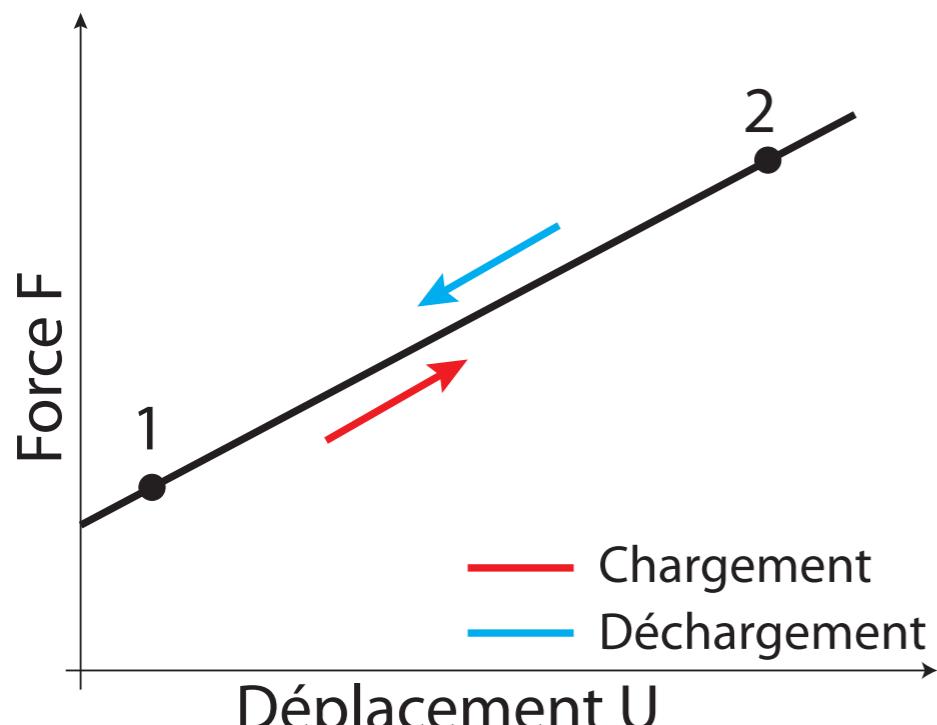
3 x 4H de TPs pour mettre en pratique les concepts.

# Notion de linéarité en mécanique des solides



Relation linéaire Force - déplacement:

$$g(U, F) = F - K \cdot U$$



Comportement linéaire

- Principe de superposition vérifié :

$$g(U_1 + U_2, F_1 + F_2) =$$

$$g(U_1, F_1) + g(U_2, F_2)$$

$$g(\mu U, \mu F) = \mu g(U, F)$$

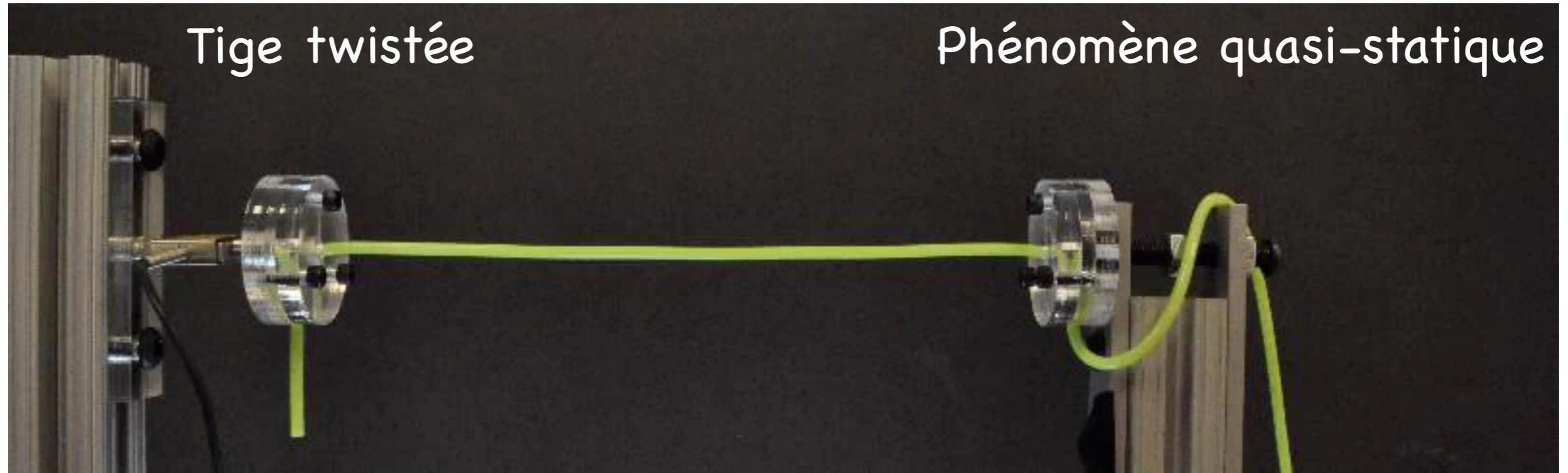
- Indépendance du chemin de chargement.

- Pas d'influence de l'état initial.

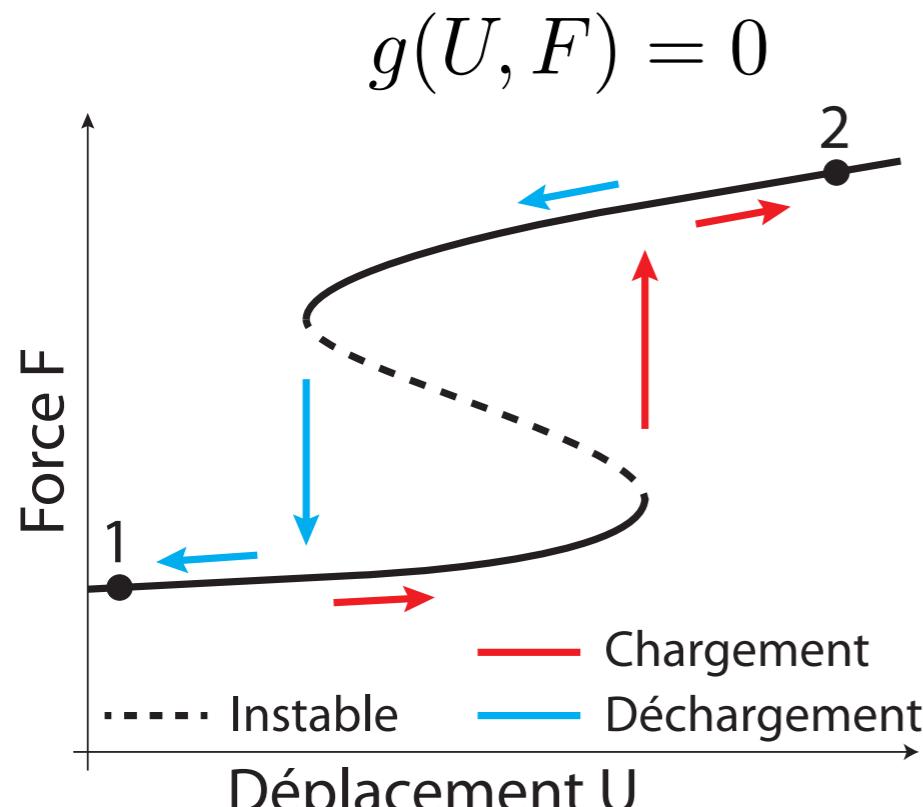
- Besoin d'un seul calcul linéaire :

$$F = K \cdot U$$

# Notion de non-linéarité en mécanique des solides



Relation non linéaire force-déplacement



Comportement Non linéaire

- Pas de principe de superposition :
$$g(U_1 + U_2, F_1 + F_2) \neq g(U_1, F_1) + g(U_2, F_2)$$
$$g(\mu U, \mu F) \neq \mu g(U, F)$$
- Importance du chemin de chargement.
- Influence possible de l'état initial.
- Calculs non linéaires (objet du cours) :
$$F = r(U)?$$

# La demande en calculs de structure



## Simulations de Mécanismes

## Calcul Eléments Finis

Nesys Engineering met à votre disposition son expertise en simulation numérique :

- Calculs mécaniques et thermiques par la méthode des éléments finis,
- Simulations de mécanismes basées sur les mouvements de corps rigides.

### Services

#### Etudes au forfait

Dimensionnement complet de structures, Maillages.

#### Conseil et Assistance technique

Détachement d'ingénieurs sur site client, Audits, Réalisation de dossiers d'appels d'offres.

#### Formations

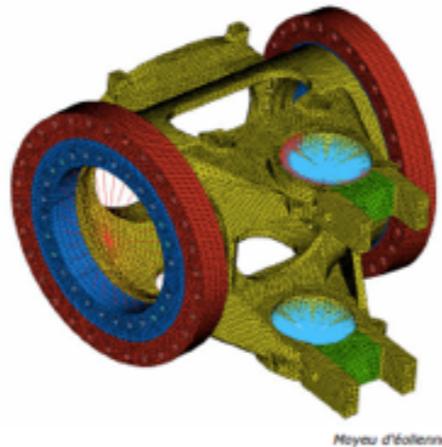
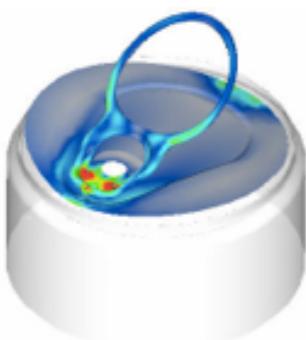
Formations théoriques et pratiques à la résistance des matériaux et à la simulation numérique, Conseil en modélisation et post-traitement.

#### Validations

Vérifications de dossiers de calculs, Appui auprès des organismes de validation.

#### Développements

Développement d'applications métiers spécifiques (Femap, MSC.vN4W, MSC.vN4D, Code\_Aster).



### Analyses

#### Statique

Dynamique (réponses fréquentielles, transitoires, modales ...)

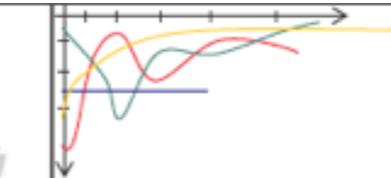
Non-linéarités géométriques (grandes déformations, contact, ...)

Non-Linéarités matériaux (plasticité, fluage, élastomères ...)

Thermique (tous phénomènes)

#### Fatigue

Cinématique et dynamique des corps rigides (mécanismes, ...)



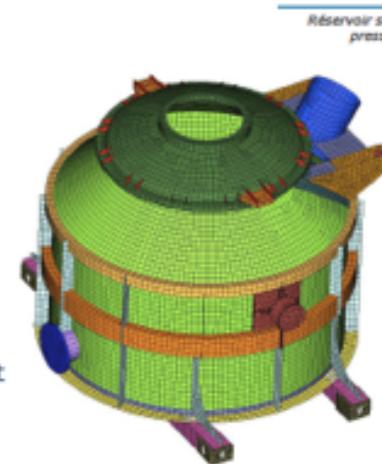
### Outils

**Femap** : Pré et post-processeur.

Compatibilité avec tous les formats CAO et de nombreux codes éléments finis (Ansys, Abaqus, Marc, Nastran, I-deas, Cosmos, ...).

**MSC.Nastran/NX Nastran** : Calculs par éléments finis.

Le logiciel de calcul de référence en analyses statiques et dynamiques.



**TMG** : Calculs thermiques par éléments finis.

Convection forcée, changements de phase, échauffement par effet Joule, radiation, couplages thermique/CFD, TMG est le solveur spécialiste des échanges de chaleur.

**Code\_Aster** : Calculs par éléments finis.

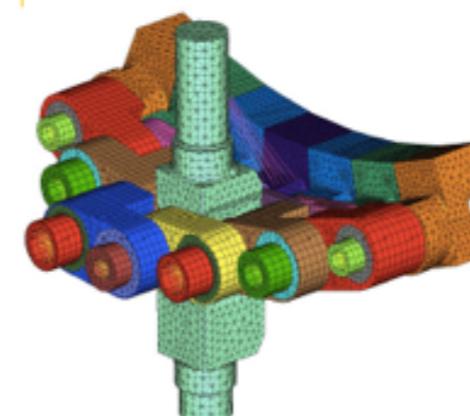
Code\_Aster est développé par la société EDF, qui l'utilise notamment dans le domaine nucléaire. Il propose des solutions dans tous les domaines de la mécanique.

**Winlife** : Calculs à la fatigue mono et multi axiaux.

**MSC.visualNastran 4D** : Cinématique et dynamique des corps rigides.

MSC.visualNastran 4D étudie et optimise les mouvements des systèmes les plus complexes. Ses résultats peuvent constituer les données d'entrée aux calculs par éléments finis.

Mors incurvables pour presse hydraulique

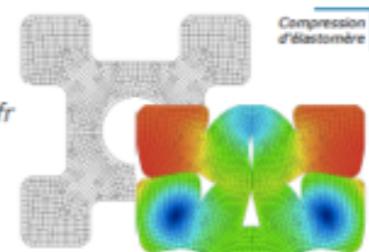


### Nos Compétences

Nesys Engineering met à votre disposition une équipe d'ingénieurs expérimentés, tous spécialistes de la simulation numérique.

Les ingénieurs Nesys assurent le support téléphonique et les formations pour de grands éditeurs de codes de calcul. Leur expertise mécanique et leurs compétences sur de nombreux outils de simulation (Nastran, Femap, MSC.Marc, I-deas, Ansa, Code\_Aster, MSC.vN4D, MSC.Adams) vous aideront dans la définition et la réalisation des approches calcul de vos projets.

Nous organisons le transfert de compétences vers vos collaborateurs grâce à un partenariat actif dans les projets où nous intervenons.



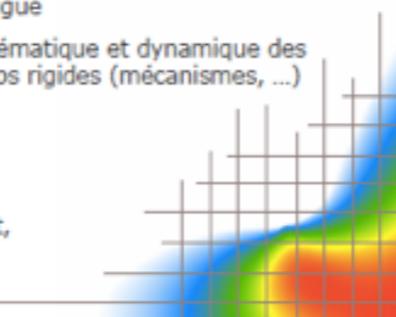
### Contact

E-mail : [contact@nesys.fr](mailto:contact@nesys.fr)

Site Web : [www.nesys.fr](http://www.nesys.fr)

### Références

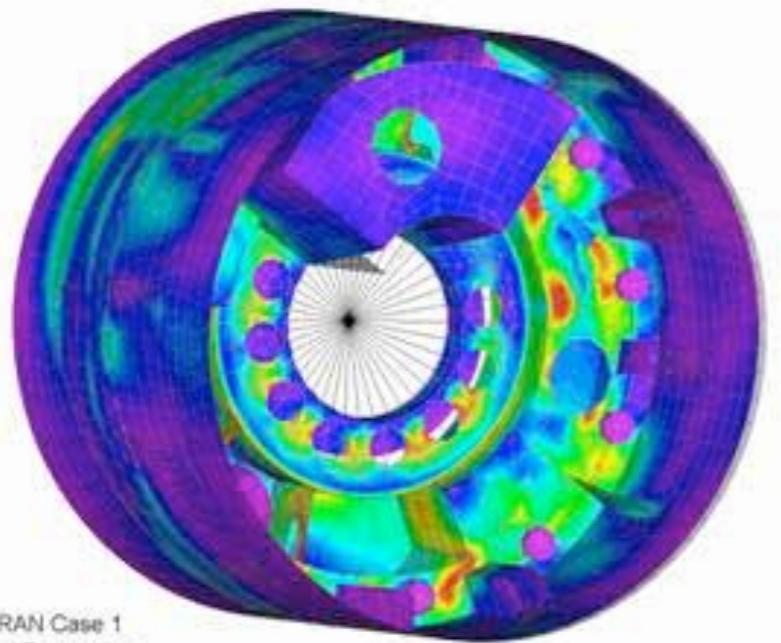
Faurecia, Sagem, Bouygues Bâtiment, ACB, EDF, Mecaplast, Bureau Veritas, Vergnet SA, MSC Software ...



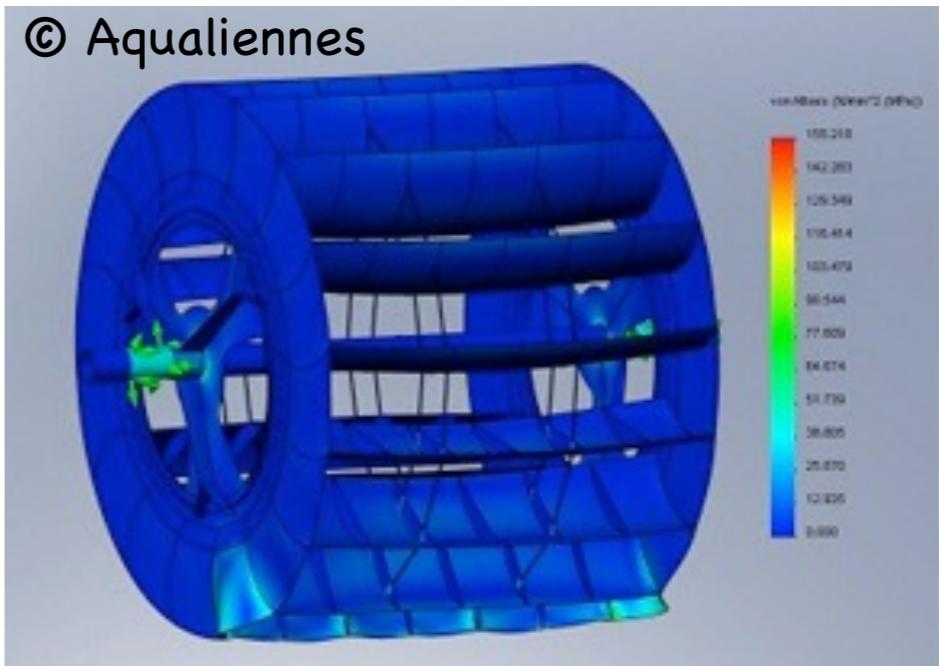
**Nesys Engineering SARL**  
7, rue de la Croix Martre 91120 Palaiseau  
Tél: 01 69 19 72 88 - Fax : 01 69 32 26 70  
Capital social 20 000 € - RCS Evry 452 219 439 - NAF 742 C

**Nesys Composites SARL**  
20, route des Fours 89510 Etigny  
Tél / Fax : 03 86 97 14 81  
Capital social 15 000 € - RCS Sens 478 542 194 - NAF 742 C

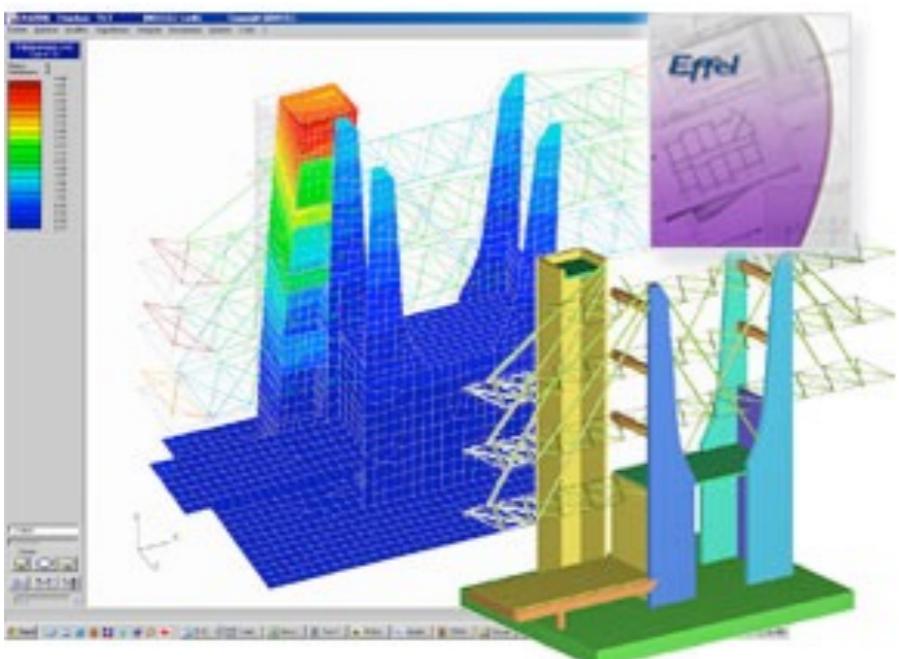
# Problèmes linéaires dans l'industrie



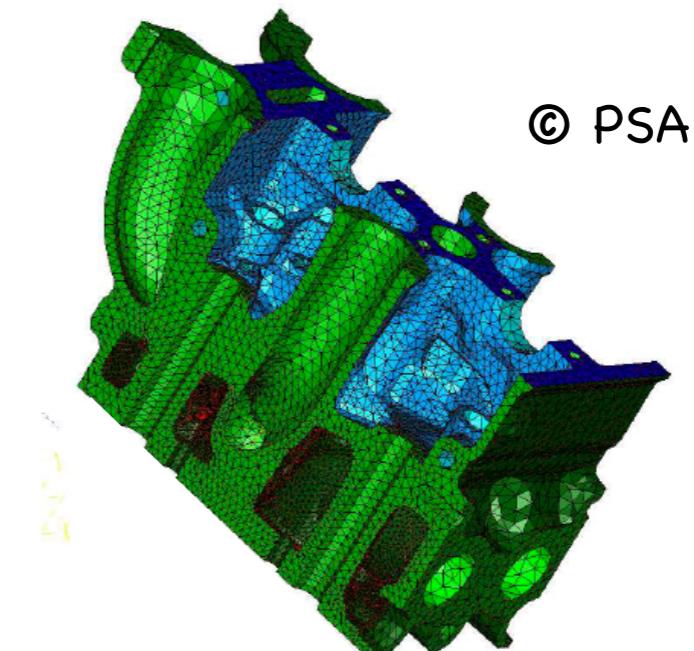
Dimensionnement d'un tunnelier  
sous pression avec NASTRAN



Optimisation de structures  
par calculs de contraintes

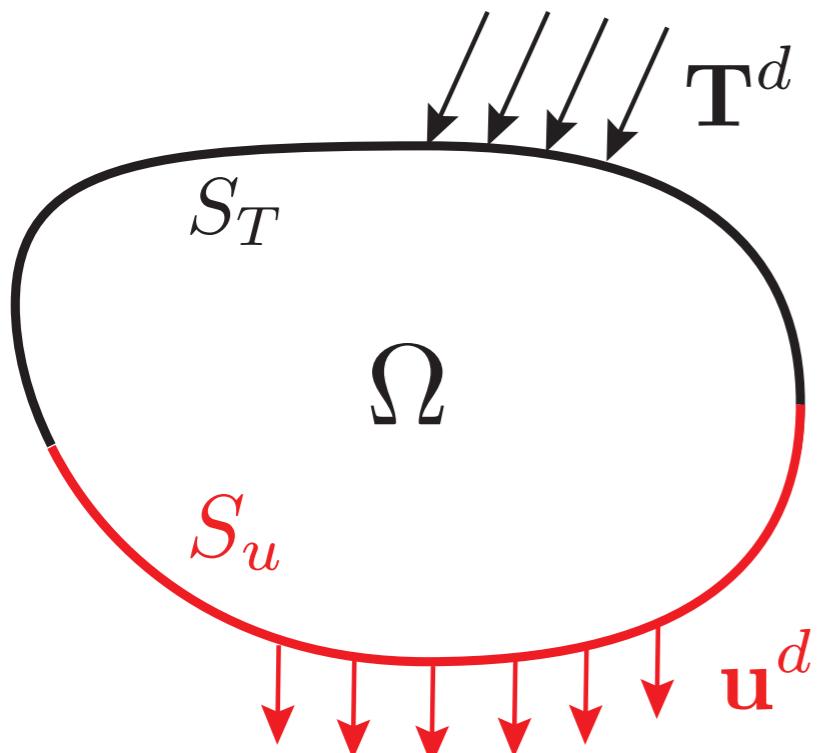


Dimensionnement de bâtiment  
aux éléments finis (Effel)

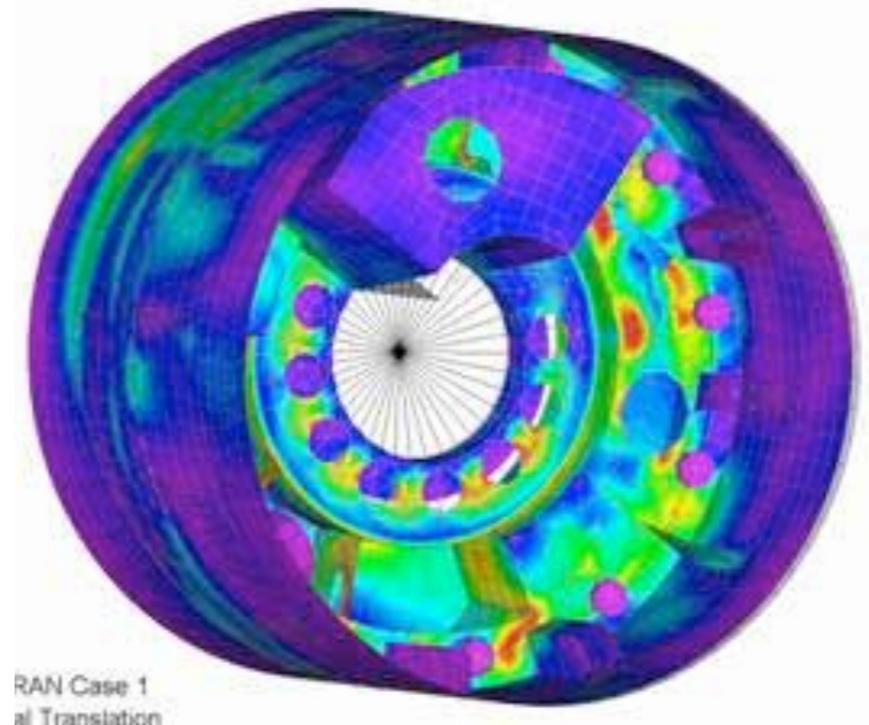


Calculs thermoélastiques  
d'une culasse diesel

# Calculs de structures linéaires



Problème  
quasi-statique



$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) + \rho \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad \text{in } \Omega$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \mathcal{A} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = 1/2(\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u})(\mathbf{x}) \quad \rightarrow$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}^d(\mathbf{x})$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = \mathbf{T}^d(\mathbf{x})$$

Formulation faible

+ Maillage

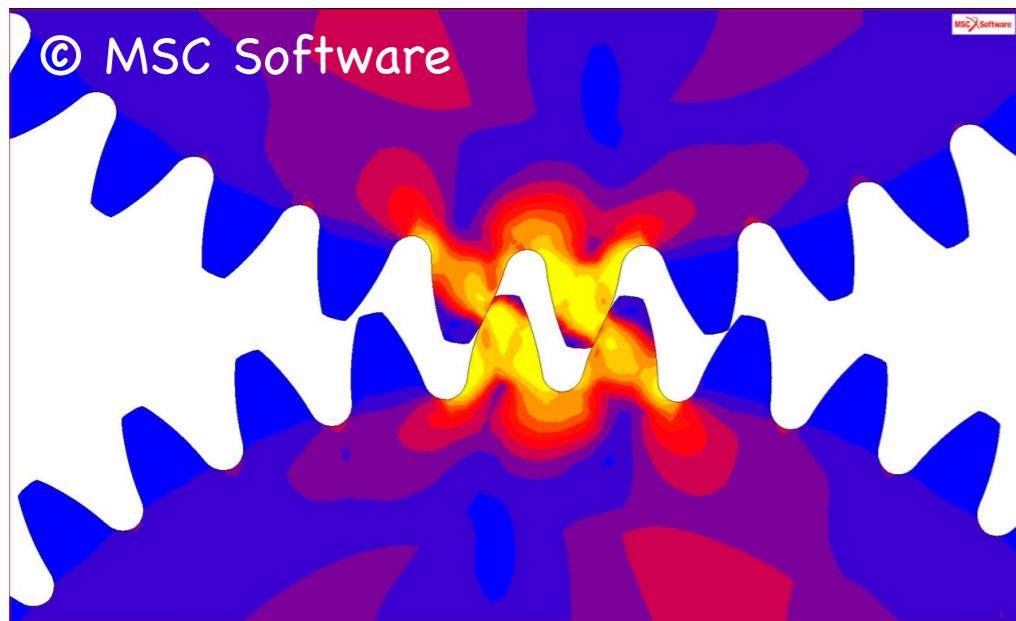
+ Discrétisation

---

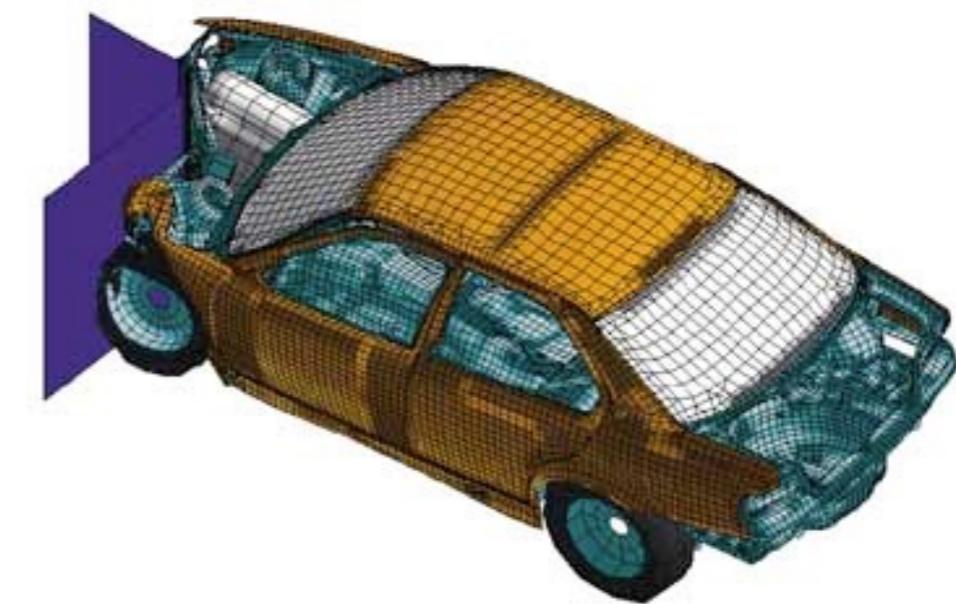
$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{F}$$

(Cours 1ère partie)

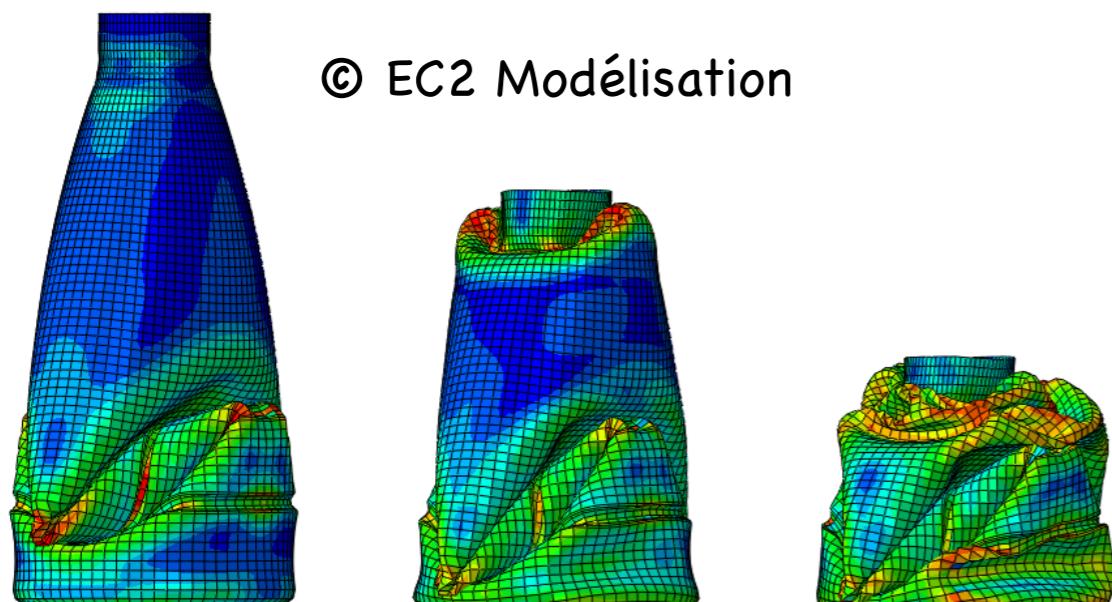
# Problèmes non linéaires industriels



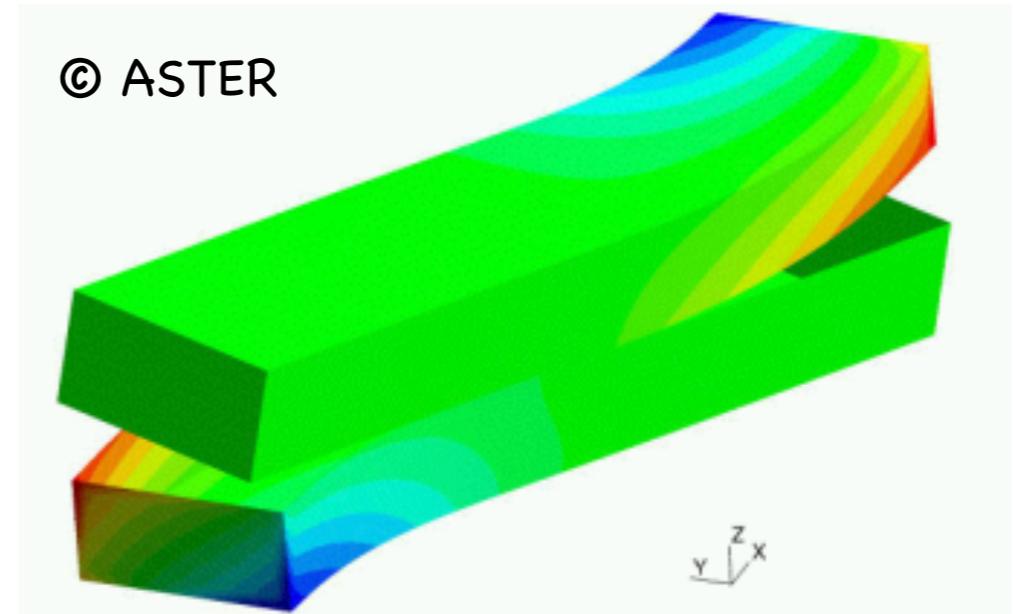
Analyse de contraintes dans les engrenages



Simulations numériques d'un essai de choc

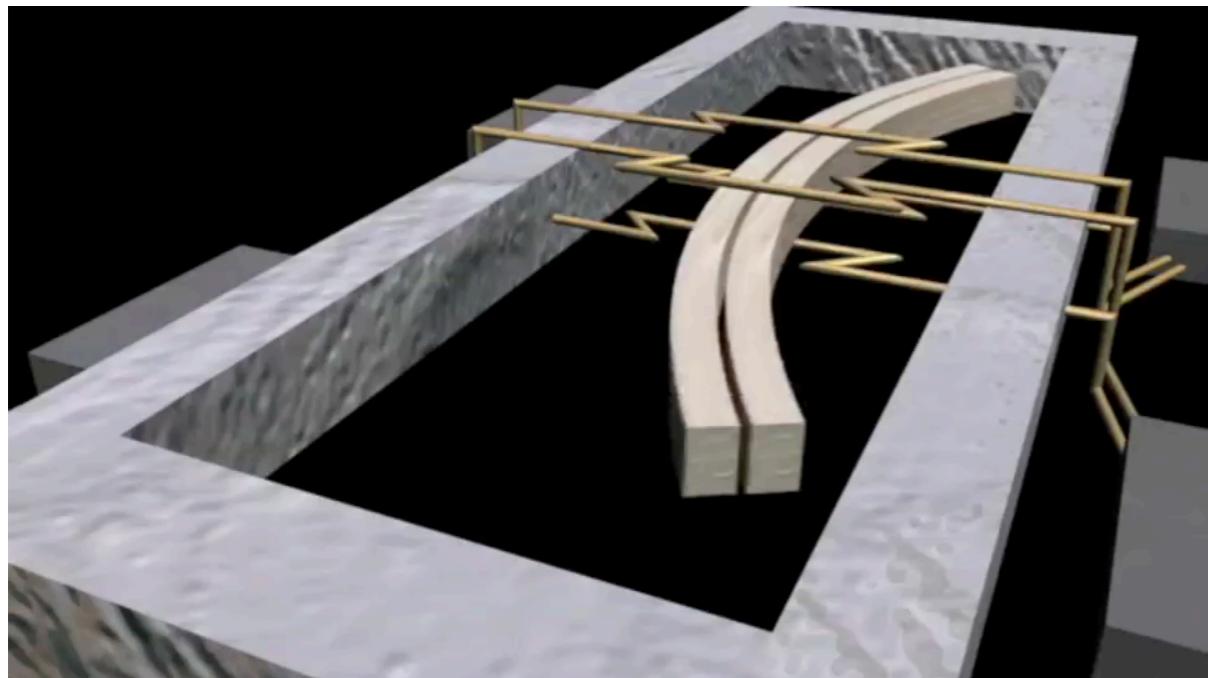


Simulation numérique de la compression d'une bouteille plastique



Fissuration d'une poutre 3D en mode mixte

# Problèmes non linéaires en cours de recherche



Design de gyroscopes vibratoires pour les micro capteurs



Modélisation et contrôle en robotique souple

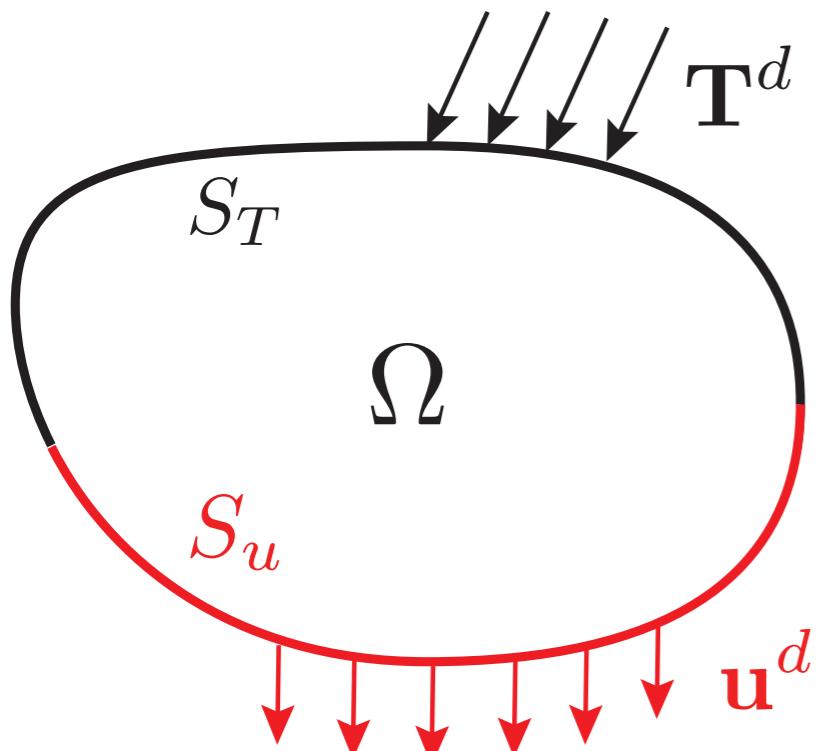


Simulation physique des cheveux pour les films d'animations

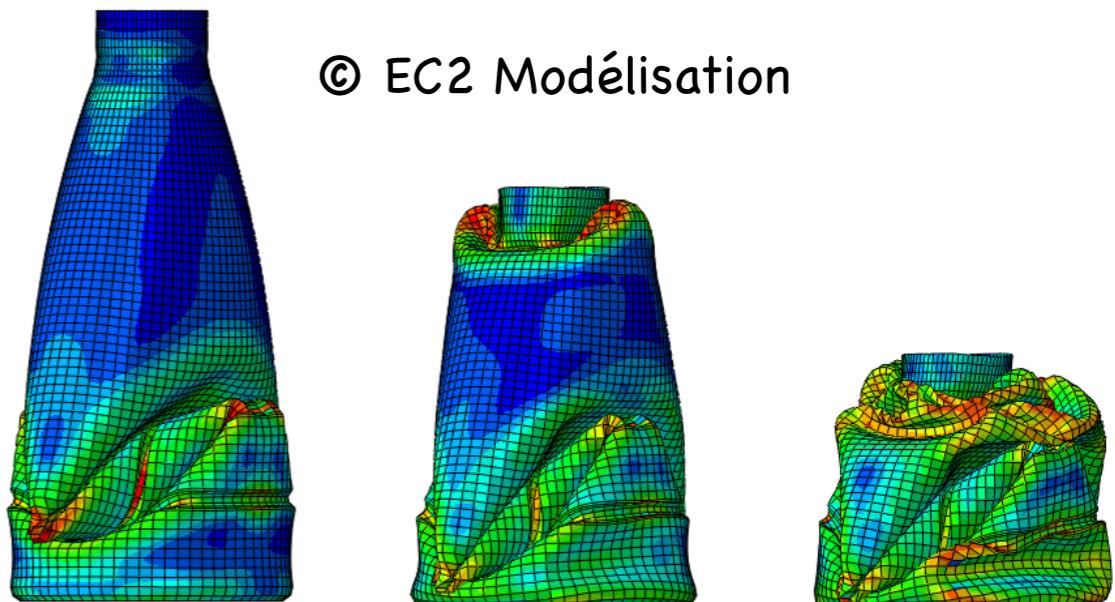


Déploiement de structures très élancées

# Calculs de structures non linéaires



Problème  
quasi-statique



$$\operatorname{div} \mathbf{S}(\mathbf{x}) + \rho \mathbf{f}_0(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad \text{in } \Omega_0$$

Formulation faible

$$\sigma(\mathbf{x}) = \mathcal{A}(\mathbf{e}(\mathbf{x}))$$

+ Maillage

$$\mathbf{e}(\mathbf{x}) = 1/2(\mathbf{F}^T(\mathbf{x})\mathbf{F}(\mathbf{x}) - 1)$$



+ Discrétisation

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathcal{H}(\mathbf{u}^d(\mathbf{x}))$$

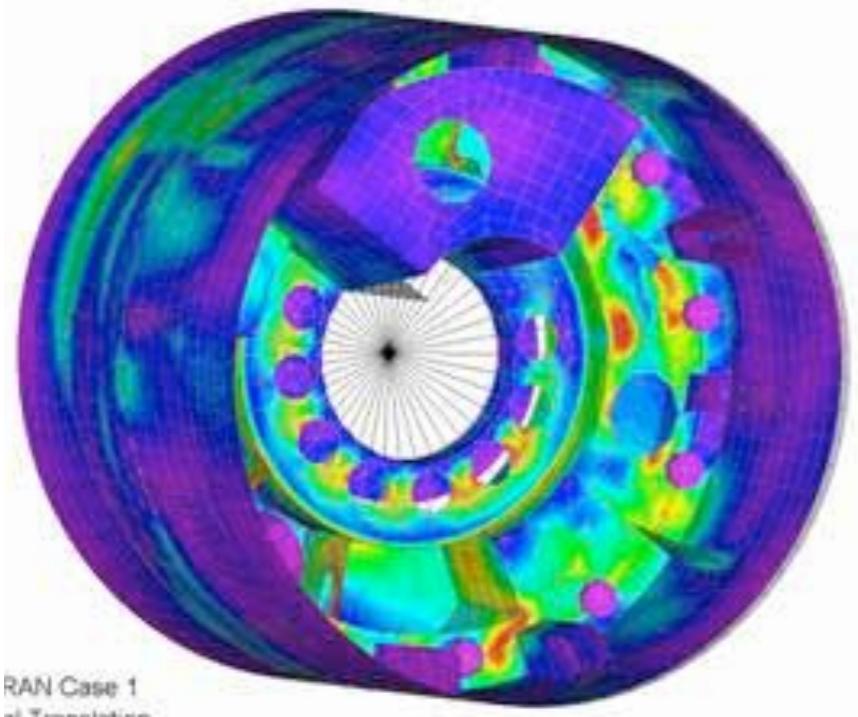
$$\mathbf{S}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}_0(\mathbf{x}) = \mathbf{T}_0^d(\mathbf{x})$$

---

$$\mathbf{G}(\mathbf{U}, \mathbf{F}) = \mathbf{0}$$

(Cours 3ème partie)

# Différentes méthodes de calculs



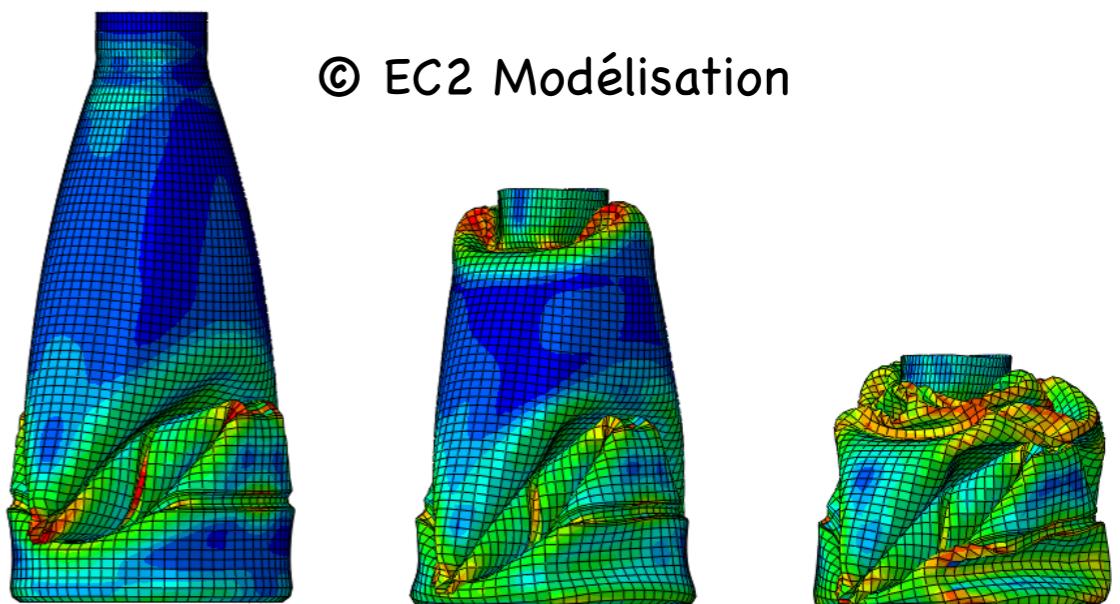
RAN Case 1  
ai Translation

Calculs linéaires :

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{F}$$

- Résolution directe par factorisation de  $\mathbf{K}$
- Résolution itérative par la méthode du gradient conjugué

[M. Bonnet, 2008]



Calculs non linéaires

$$\mathbf{G}(\mathbf{U}, \mathbf{F}) = 0$$

- Méthode de Newton-Raphson
- Méthodes NR modifiées
- Méthode NR amorti (line-search)
- Méthode de continuation ou arc-length

[P. Wriggers, 2008]

# Résumé

- La non-linéarité généralise le concept de linéarité qui est souvent une hypothèse en réalité. La non-linéarité permet de modéliser des phénomènes complexes.
- Les méthodes de calculs de structures utilisées pour des problèmes linéaires ne sont pas suffisantes en non linéaire. Besoin de nouvelles méthodes.
- La demande industrielle en calculs de structures non linéaires est de + en + importante pour modéliser des structures optimales en fonctionnement.

# Bibliographie

- P. Wriggers, Nonlinear Finite Element Methods, Springer, 2008.
- J. N. Reddy, An introduction to nonlinear finite element analysis, Oxford, 2004.
- M. Bonnet et A. Frangi, Analyse des solides déformables par la méthode des éléments finis, éditions de l'X, 2008.
- R. de Borst et al., Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures, Wiley, 2012.

# Objectifs du cours

- Comprendre la notion de non-linéarité.
- Connaître les différentes sources de non-linéarités en calculs de structures.
- Connaître les différentes méthodes en calculs de structures non linéaires.
- Avoir des notions en calcul de stabilité d'équilibres.
- Savoir appliquer ces méthodes de calculs (But des TPs).

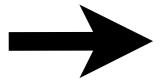
# Plan du cours

0. Introduction : La notion de non-linéarité.
1. Phénomènes non linéaires en mécaniques des solides.
2. Méthodes de calculs pour l'ingénieur.
3. Notion de calculs de stabilité.

# 1. Phénomènes non linéaires en méca des solides

- On peut distinguer différentes sources de non-linéarité qui peuvent apparaître en mécanique du solide :
  - . Les non linéarités **géométriques** qui apparaissent lorsque la structure subit de grands déplacements, grandes rotations ou grandes déformations comme dans le cas des poutres très élancées.
  - . Les non linéarités **matérielles** caractérisées par une relation non linéaire entre les contraintes et les déformations comme dans le cas de polymères visco-élastiques ou de métaux ou bétons en comportement élasto-plastique.
  - . Les non-linéarités de **conditions aux limites** apparaissant par exemple dans le cas de contacts entre deux solides.
  - . Les non-linéarités inhérentes aux **problèmes couplés** tel que dans les problèmes d'interactions fluide-structure.

Ces non-linéarités peuvent donner lieu à différents phénomènes physiques tels que les bifurcations d'équilibres, les instabilités ou les phénomènes de claquage qui nécessitent des méthodes de calcul adaptées.

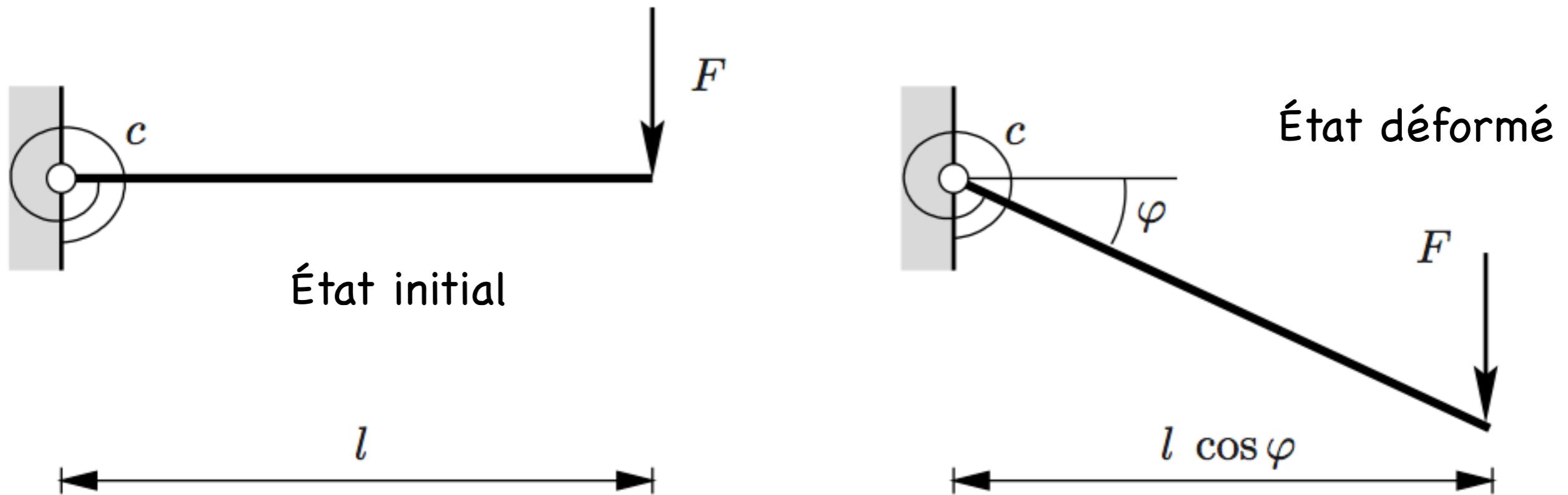


Dans la partie 1., on étudie ces différents phénomènes physiques à travers des exemples simples de mécanique des solides à 1 seul degré de liberté.

Dans la partie 2., nous étudierons les différentes méthodes de calcul non linéaires à notre disposition pour traiter les problèmes non linéaires à N degrés de liberté.

# 1.1 Non-linéarités géométriques

## 1.1.1 Poutre rigide en grands déplacements :



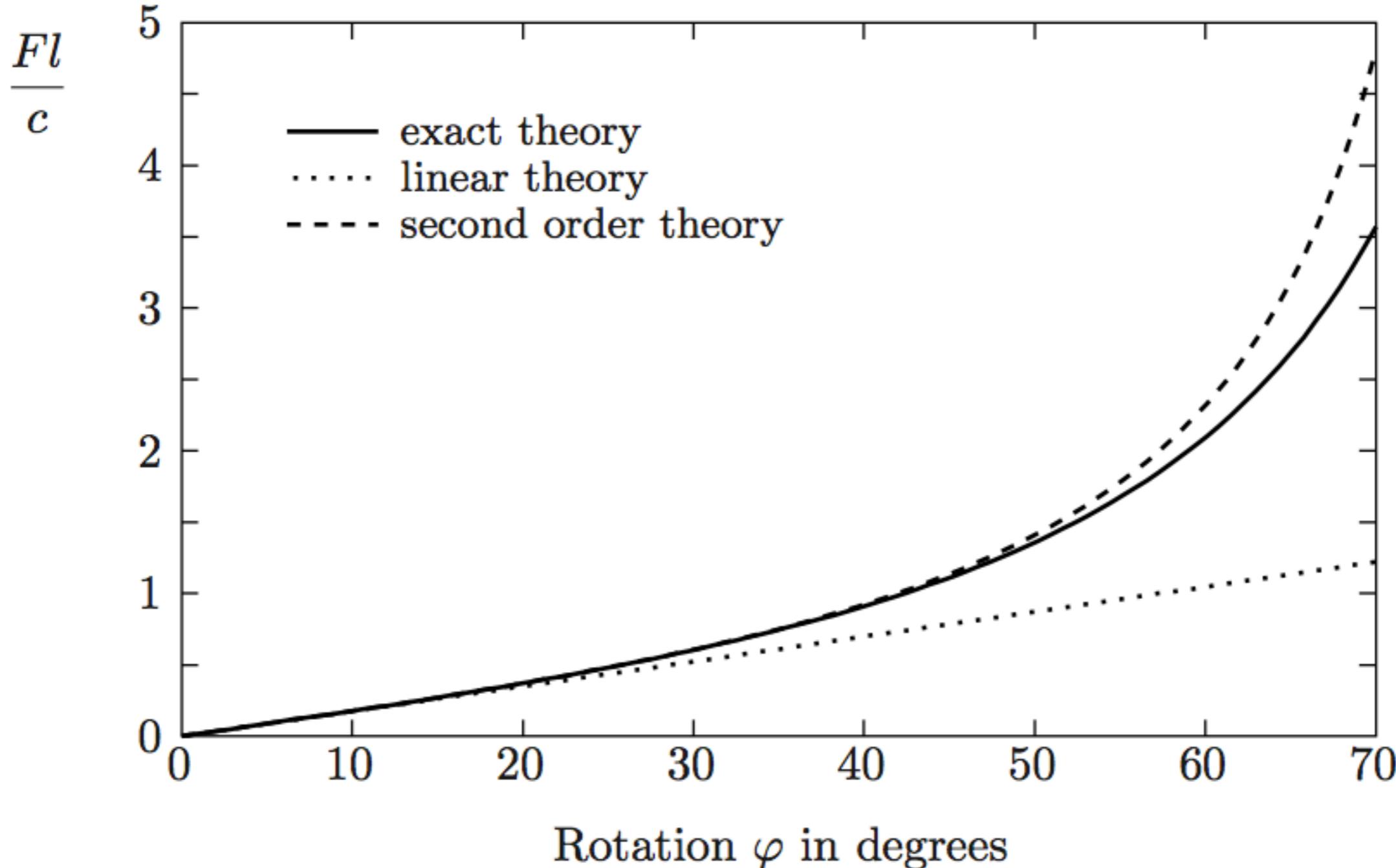
. L'équilibre des moments à l'articulation donne une relation non linéaire entre la force et la rotation de la poutre :

$$Fl \cos \varphi = c\varphi$$

↳ Non-linéarité géométrique

. La relation force-déplacement s'écrit simplement :  $F = c/l \frac{\varphi}{\cos \varphi}$

### Courbe force-rotation

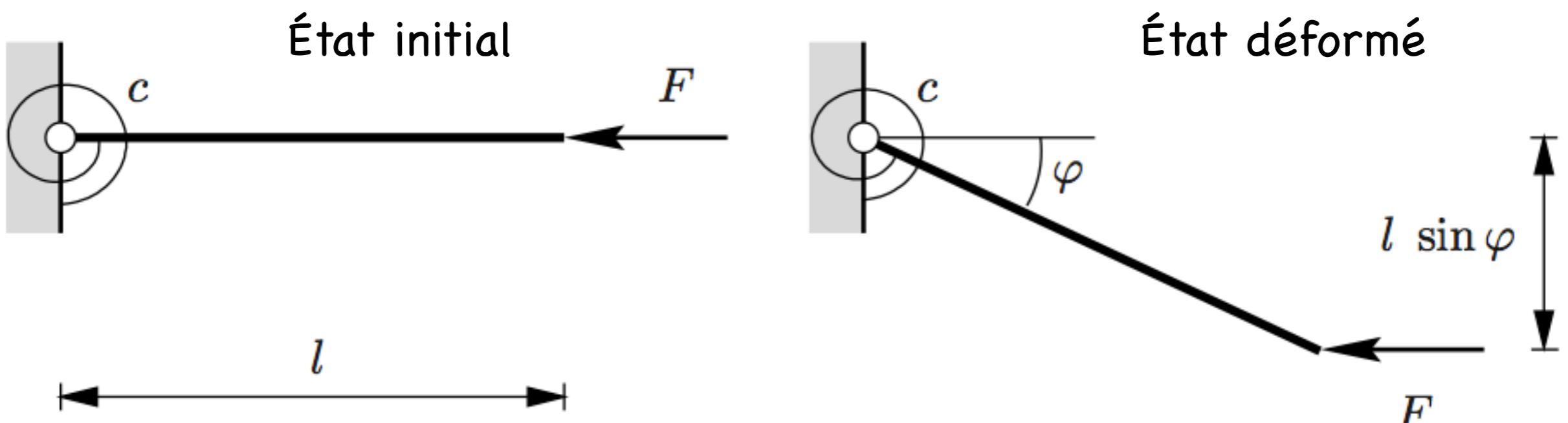


. Pour de petite rotation,  $\cos \varphi \rightarrow 1$  et la solution linéaire s'écrit :  $F = c\varphi/l$

Hypothèse linéaire valable jusqu'à  $\varphi \approx 20^\circ$

. A l'ordre 2,  $\cos \varphi \approx 1 - \frac{\hat{\varphi}^2}{2}$  et la solution s'écrit:  $F = \frac{c\hat{\varphi}}{l(1 - \frac{\hat{\varphi}^2}{2})}$

## 1.1.2 Problème de bifurcation :



. En formulant l'équilibre du système déformé, on obtient la relation non linéaire entre la force et la rotation de la poutre :

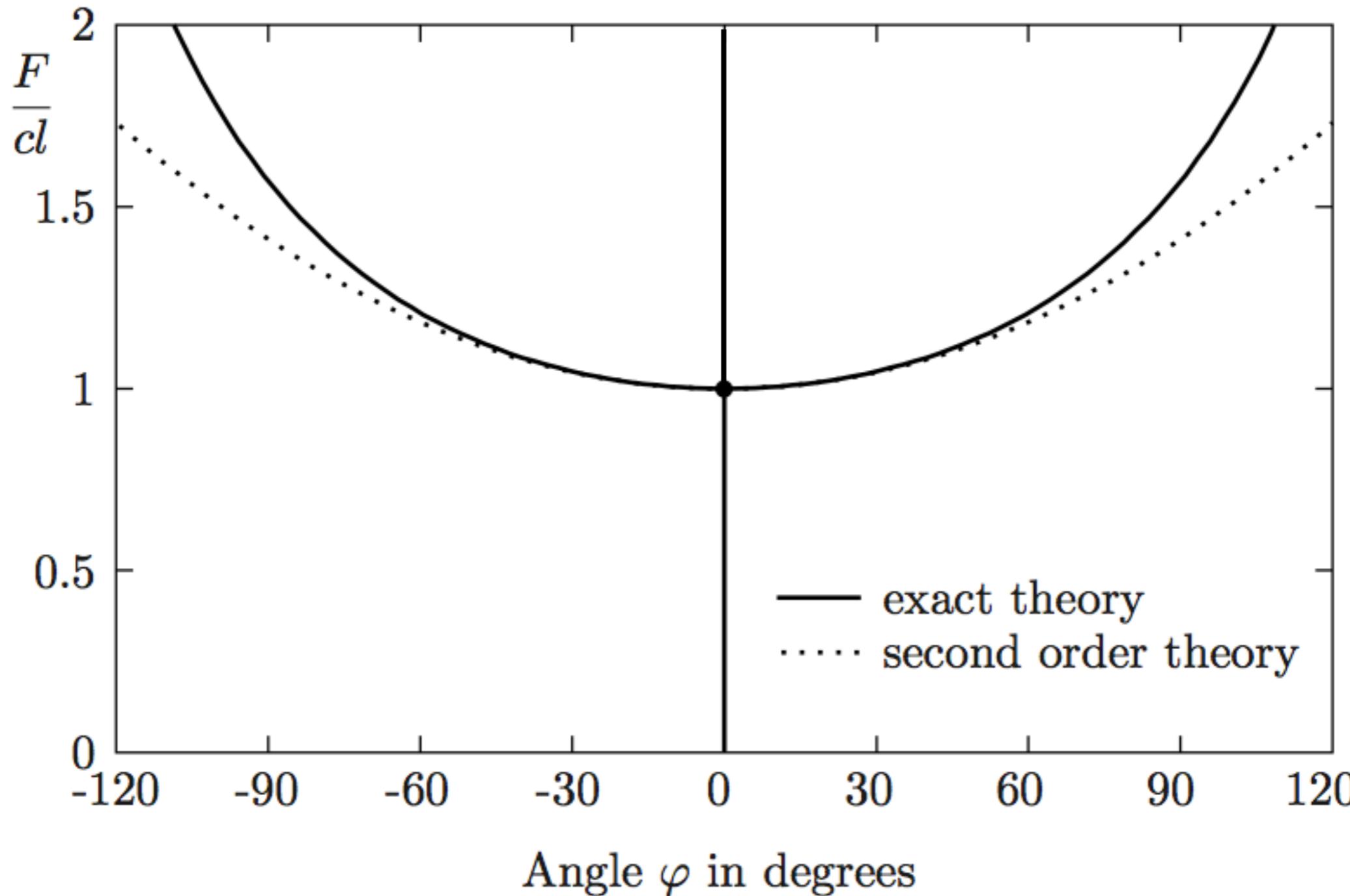
$$F l \sin \varphi = c \varphi \quad \rightarrow \quad \frac{\varphi}{\sin \varphi} = \frac{F l}{c}$$

↳ Cette équation possède plusieurs solutions !

- . Une solution triviale  $\varphi = 0$  pour tout  $F$ .
- . + deux autres solutions pour  $\frac{F l}{c} > 1$  ( $|\varphi| \geq |\sin \varphi|$ ) qui, au second ordre, avec  $\sin \varphi \approx \hat{\varphi} - \hat{\varphi}^3 / 6$  et  $1 / (1 - x) \approx 1 + \hat{x}$  donne :

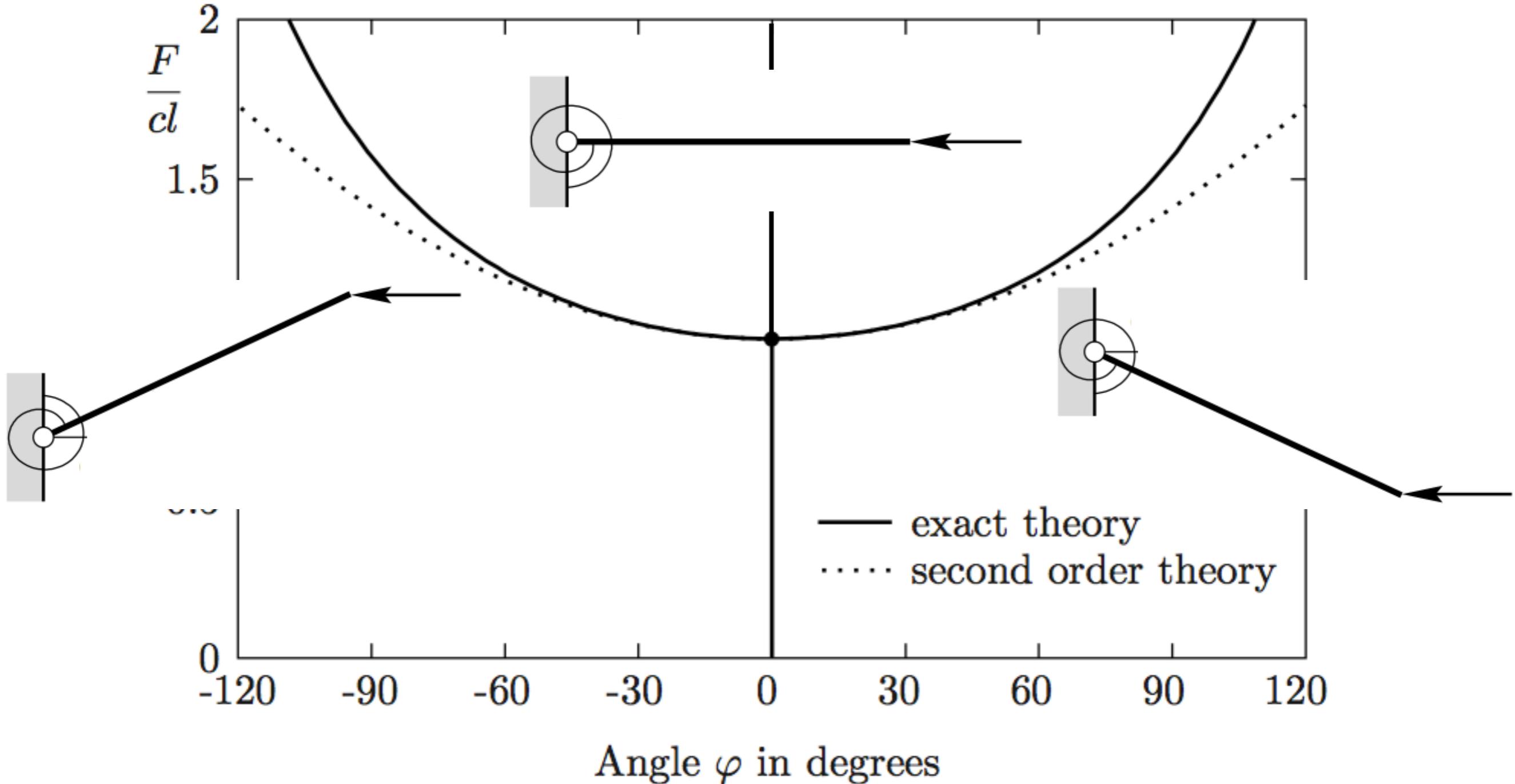
$$1 + \frac{\hat{\varphi}^2}{6} = \frac{F l}{c}$$

## Courbe force-rotation (diagramme de bifurcation)



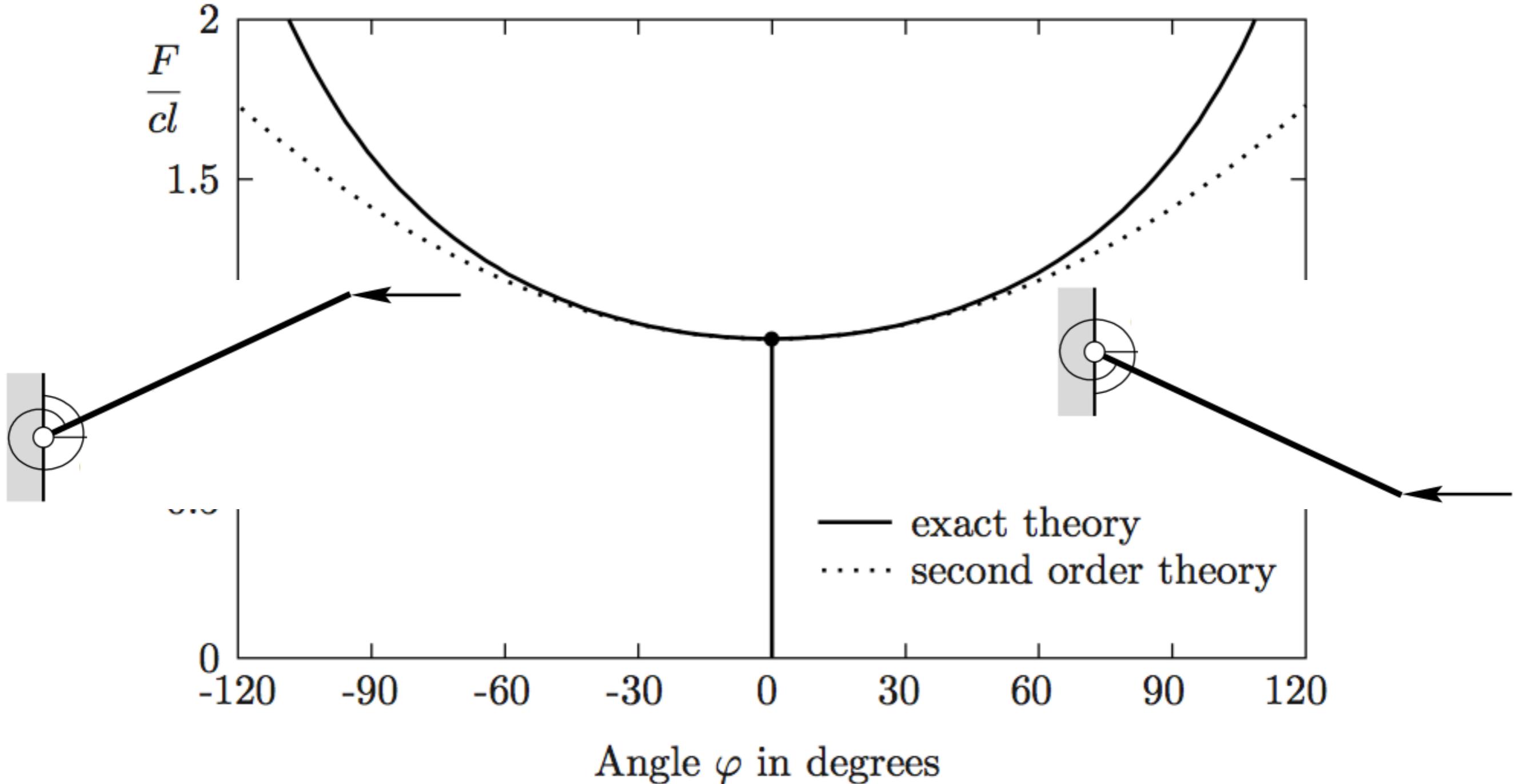
Quel va être le chemin d'équilibre choisi par le système lorsque la force dépassera le point de bifurcation ?

## Courbe force-rotation (diagramme de bifurcation)



Quel va être le chemin d'équilibre choisi par le système lorsque la force dépassera le point de bifurcation ?

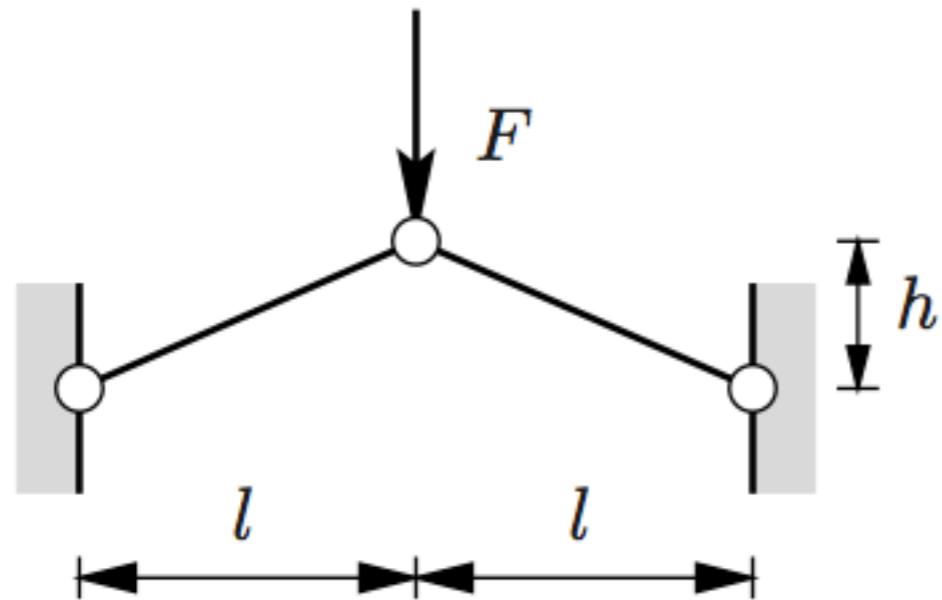
## Courbe force-rotation (diagramme de bifurcation)



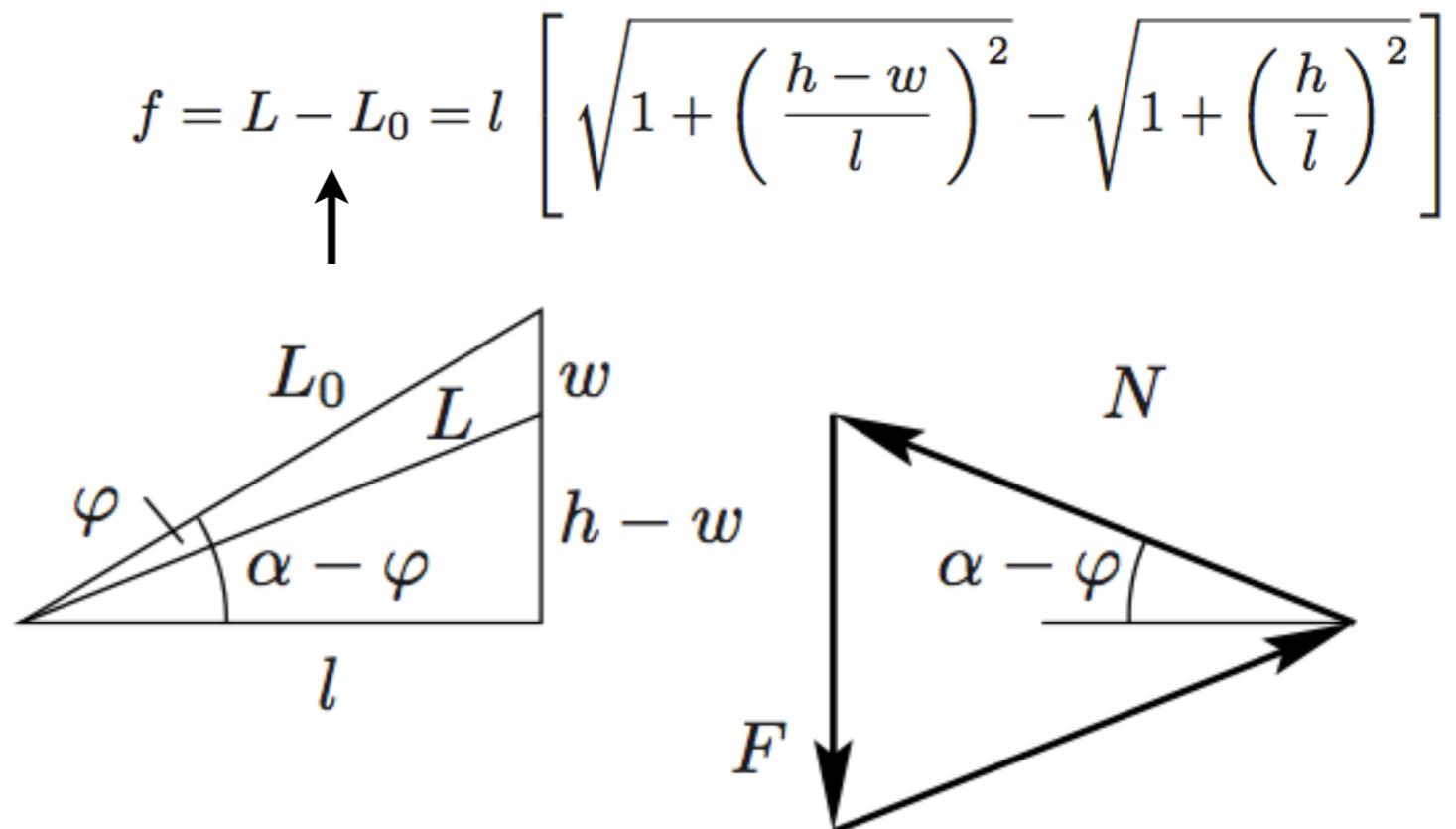
Quel va être le chemin d'équilibre choisi par le système lorsque la force dépassera le point de bifurcation ?

La réponse sera donné par l'analyse de stabilité (partie 3)

### 1.1.3 Problème de claquage :



Déscription du système



Géométrie et équilibre

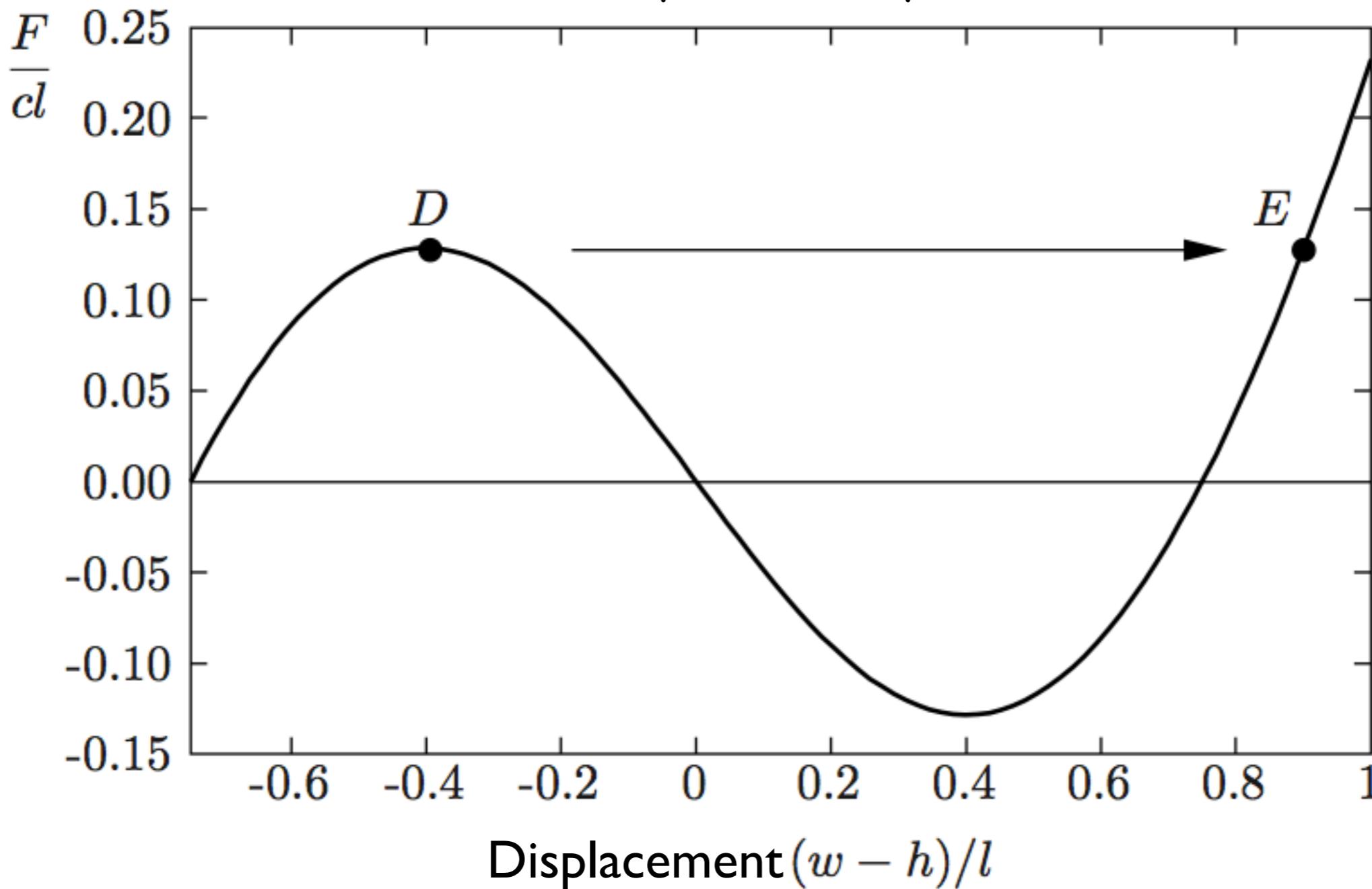
. En tenant compte de la géométrie du système déformé, l'équilibre des efforts conduit à (avec  $N$ , effort normal, et  $w$ , déplacement):

$$N \sin(\alpha - \varphi) = -\frac{F}{2} \quad \rightarrow \quad N \frac{h-w}{L} = -\frac{F}{2}$$

. En considérant les barres comme des ressorts linéaires tels que  $N = c.f$ , la relation force-déplacement s'écrit :

$$c(h-w) \frac{L-L_0}{L} = -\frac{F}{2} \Rightarrow \frac{w-h}{l} \left[ 1 - \frac{L_0}{l \sqrt{1 + (\frac{w-h}{l})^2}} \right] - \frac{F}{2cl} = 0$$

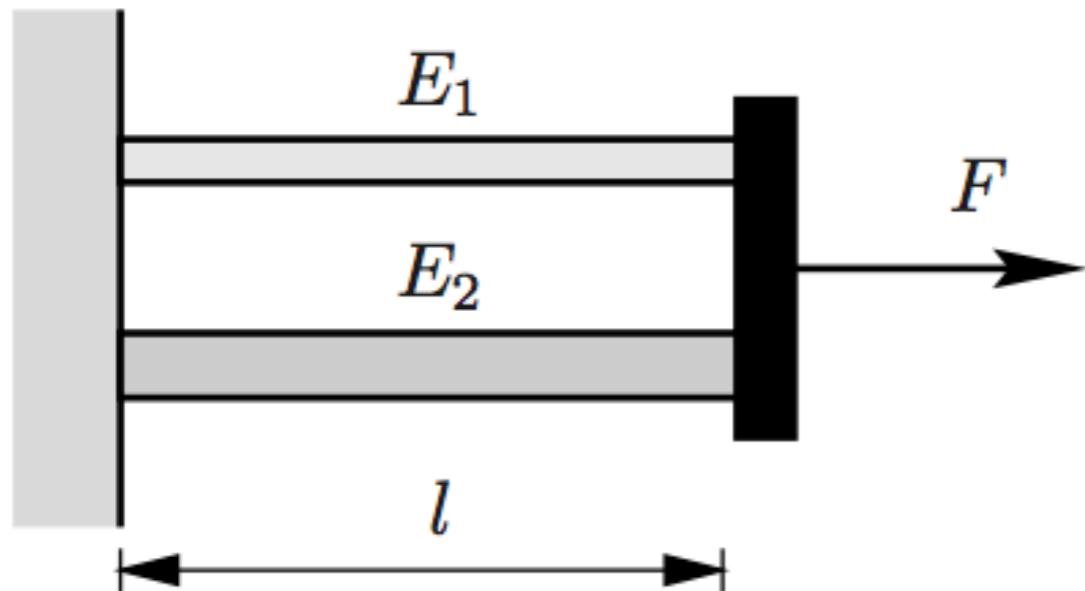
## Courbe force-déplacement pour $L_0/l = 1.25$



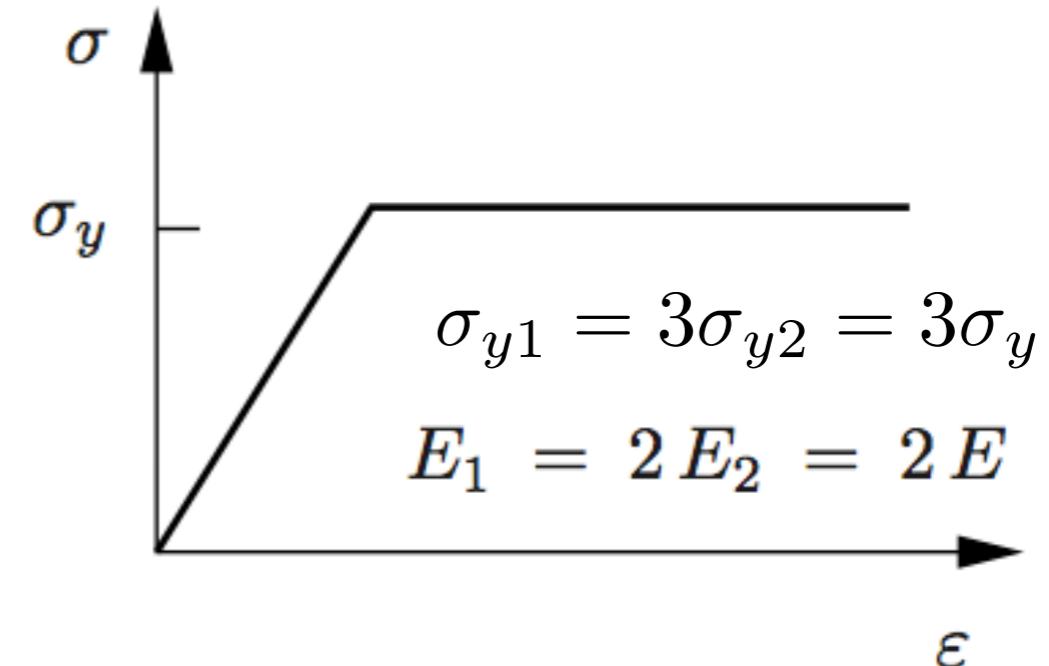
Pour une charge  $F$  donnée, le déplacement solution n'est pas unique.  
Le point  $D$  sur la courbe Force-déplacement est un point limite.

C'est le phénomène bien connu de claquage !

## 1.2 Non-linéarités matérielles



Système et chargement



Loi de comportement

. Relation cinématique :

$$u_1 = u_2 = u, \quad \epsilon = \frac{u}{l}$$

. Équilibre des forces :

$$\sigma_1 + \sigma_2 = \frac{F}{A} \longrightarrow \sigma_i = E_i \epsilon = E_i \frac{u}{l}$$

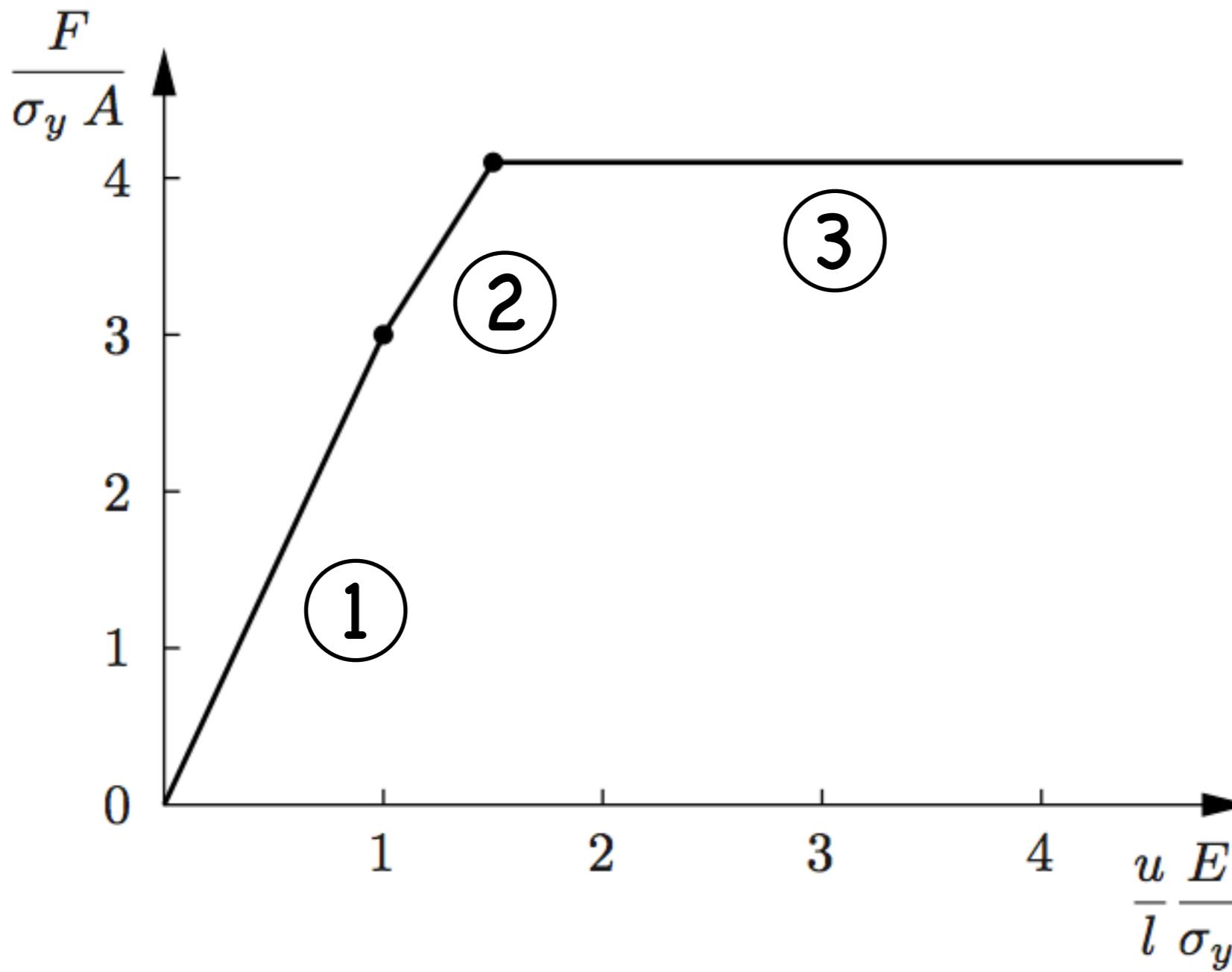
. En combinant, la relation entre force et déplacement devient :

$$E_1 A \frac{u}{l} + E_2 A \frac{u}{l} = F \longrightarrow u = \frac{Fl}{(E_1 + E_2)A}$$

. Et la contrainte dans chaque barre s'écrit :

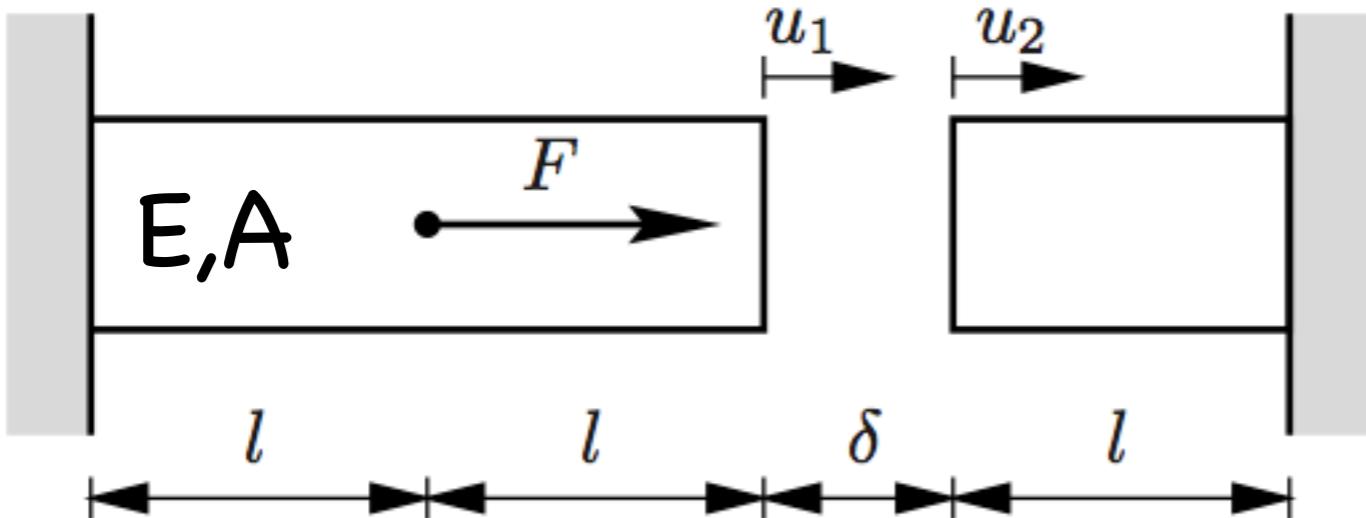
$$\sigma_i = E_i \frac{F}{(E_1 + E_2)A} \longrightarrow \sigma_i = E_i \frac{F}{3EA}$$

## Courbe force-déplacement linéaire par morceau



- ① Les barres 1 et 2 sont élastiques.
- ② La barre 2 commence à plastifier alors que la barre 1 est élastique.
- ③ Les barres 1 et 2 sont plastifiées, la réponse est parfaitement plastique.

# 1.3 Non-linéarités de contacts

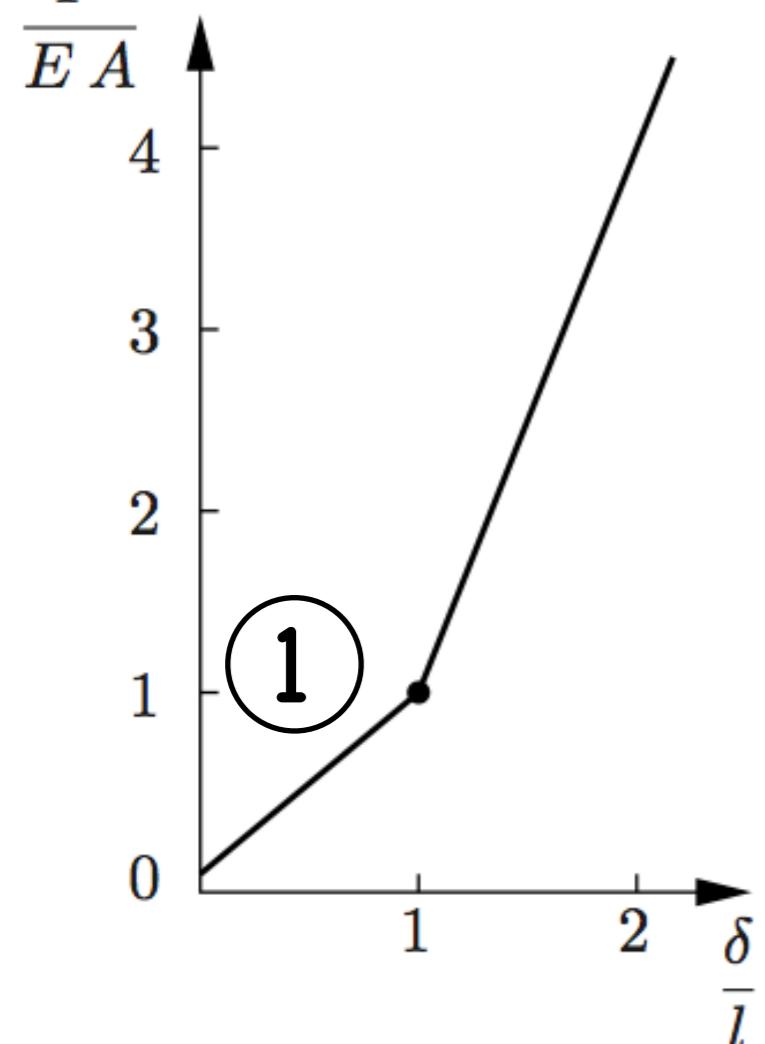


. Les barres sont séparées par une distance  $\delta$  et ne peuvent pas s'interpénétrer :

$$u_1 - u_2 \leq \delta$$

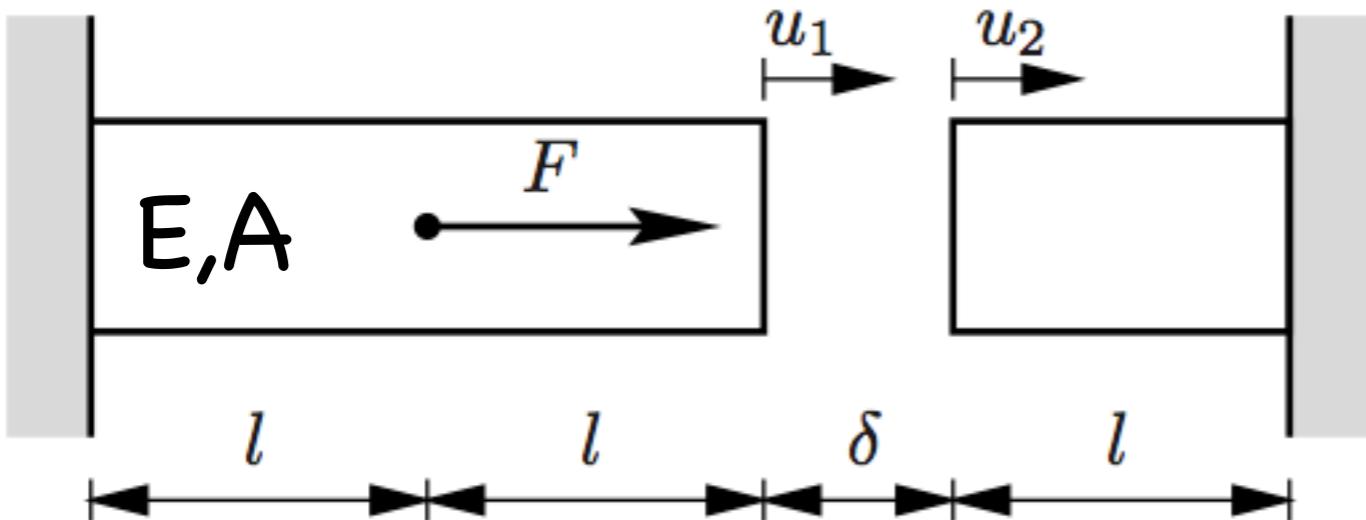
- ① . Dans le cas sans contact où  $u_1 - u_2 < \delta$ , le déplacement est simplement celui de la barre 1:

$$u_1 = \frac{F l}{E A}$$



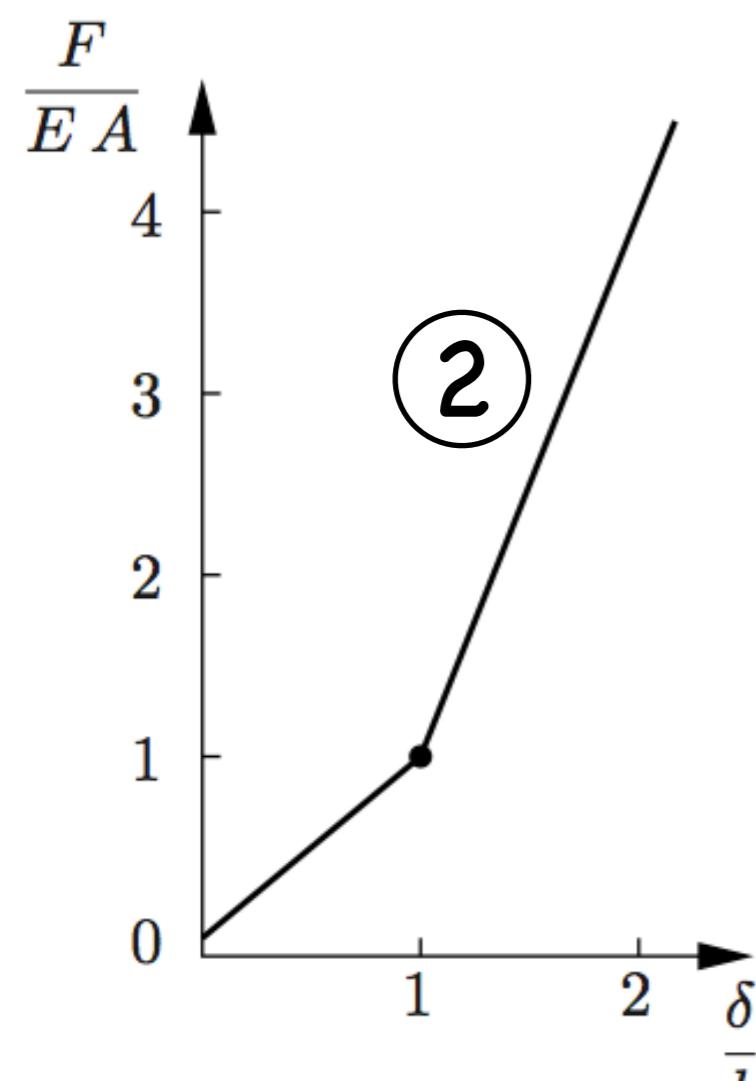
Relation force-déplacement

# 1.3 Non-linéarités de contacts



. Les barres sont séparées par une distance  $\delta$  et ne peuvent pas s'interpénètrer :

$$u_1 - u_2 \leq \delta$$



Relation force-déplacement

②

. Pour  $F > EA \frac{\delta}{l}$ , les deux barres sont en contact et  $u_1 - u_2 = \delta$ . Le déplacement des barres en  $x = 2l$  s'écrit :

$$u_1 = \frac{Fl}{EA} + \frac{N_1 2l}{EA} \quad \text{et} \quad u_2 = -\frac{N_2 l}{EA}$$

. Sachant que l'effort normal au point de contact doit être égal pour chaque barre , on obtient  $(N_1(2l) = N_2(2l) = N)$

$$N = \frac{1}{3} \left( EA \frac{\delta}{l} - F \right)$$

$$\hookrightarrow F = EA \left( 3 \frac{u_1}{l} - 2 \frac{\delta}{l} \right)$$

## 1.4 Méthodes de résolution 1D (rappels)

- Dans ces différents problèmes de mécaniques simplifiés, les équations d'équilibre sont telles que l'on connaît analytiquement la forme  $F = r(u)$
- En calcul de structure, nous aurons très rarement cette chance... Il faut alors calculer numériquement les points fixes ou solutions de ces équations non linéaires 1D.
- En posant  $g(u) = r(u) - F$ , le problème de résolution des équations d'équilibre s'écrit :

Pour une force  $F$  donnée, trouver  $u$  tel que :

$$g(u) = r(u) - F = 0$$

### 1.1.1 La méthode de Newton :

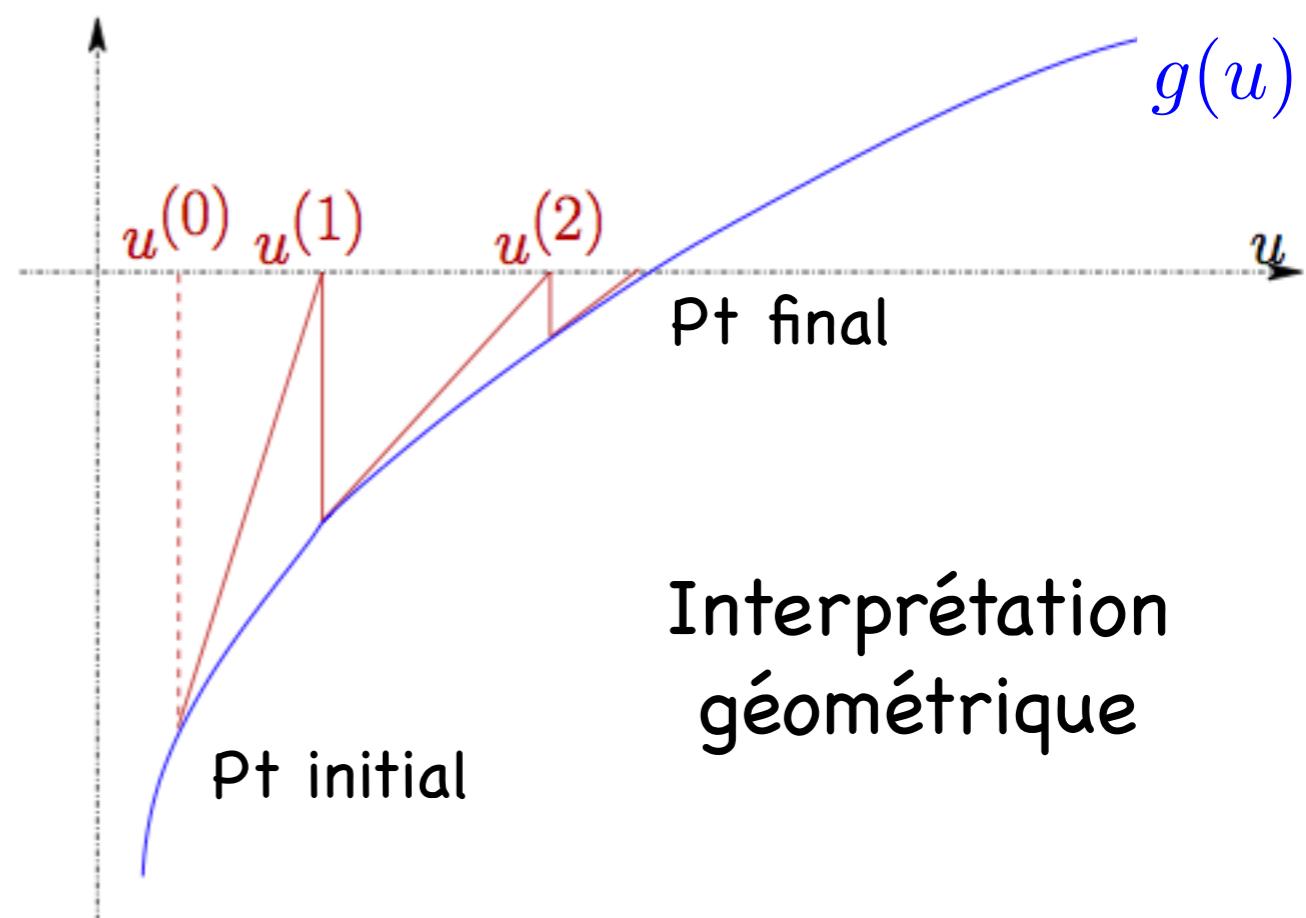
- La méthode de Newton est un procédé itératif de construction d'une suite  $u_k \rightarrow u$  telle que  $g(u) = 0$ .
- La méthode repose sur l'approximation de  $r(u_{k+1})$  par un développement de Taylor à l'ordre 1 autour de  $u_k$  et l'annulation de cette approximation à chaque itération :

$$g(u_{k+1}) \approx g(u_k) + [u_{k+1} - u_k]g'(u_k) = 0$$

avec  $g'(u_k) = \frac{\partial g}{\partial u} \Big|_{u_0}$

- Ce qui nous donne l'itération suivante :

$$u_{k+1} = u_k - \frac{g(u_k)}{g'(u_k)}$$



- Posant  $e_k = u_k - u$  (erreur sur la solution) pour tout  $k$ , on a :

$$e_{k+1} - e_k = u_{k+1} - u_k = -\frac{g(u_k)}{g'(u_k)}$$

- Développement de  $g(u_k)$  et  $g'(u_k)$  autour de la solution exacte  $u$  :

$$\exists \alpha, 0 \leq \alpha \leq 1 \quad \text{t. q.} \quad g(u_k) = g'(u)e_k + 1/2g''(u + \alpha e_k)(e_k)^2$$

$$\exists \beta, 0 \leq \beta \leq 1 \quad \text{t. q.} \quad g'(u_k) = g'(u) + g''(u + \beta e_k)e_k$$

- En remplaçant  $g(u_k)$  et  $g'(u_k)$  dans la 1ère expression :

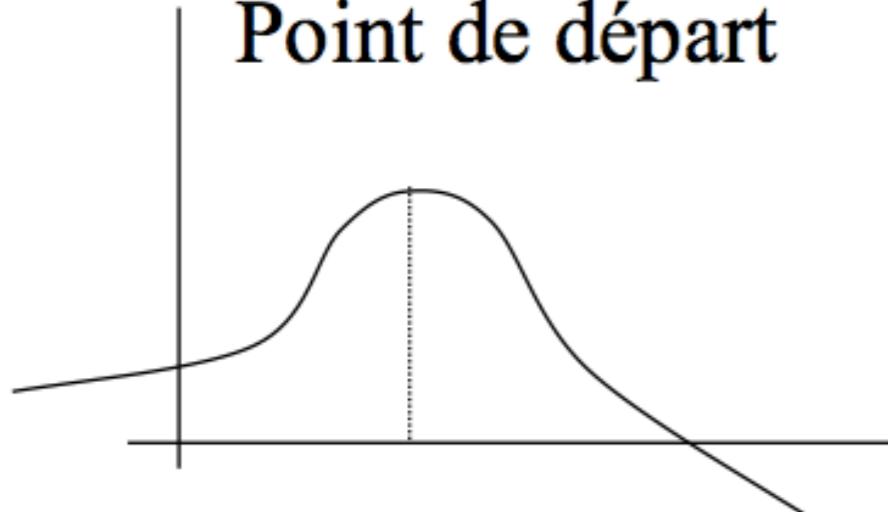
$$e_{k+1} = \frac{2g''(u + \beta e_k) - g''(u + \alpha e_k)}{g'(u) + 2g''(u + \beta e_k)e_k}(e_k)^2 = O(|e_k|^2)$$

La méthode de Newton a une convergence quadratique au voisinage de la solution !

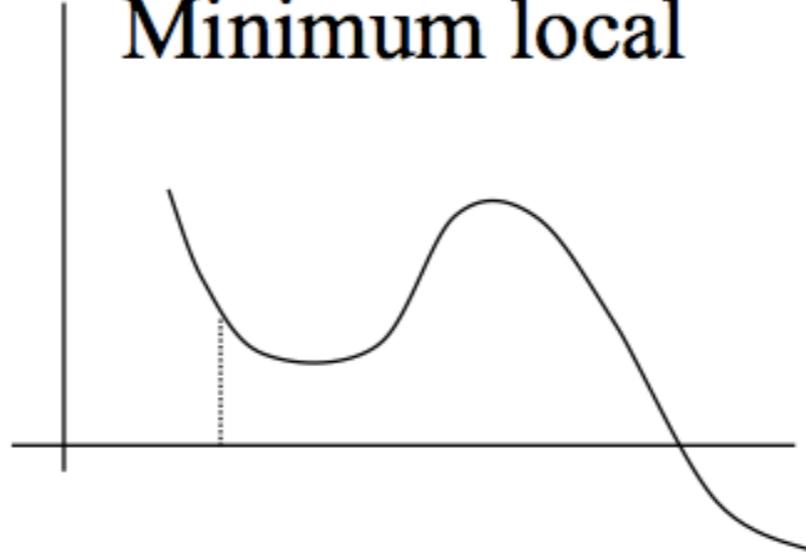


La méthode ne converge pas toujours ! Il y a des conditions théoriques pour que Newton converge et elles sont invérifiables en pratiques...

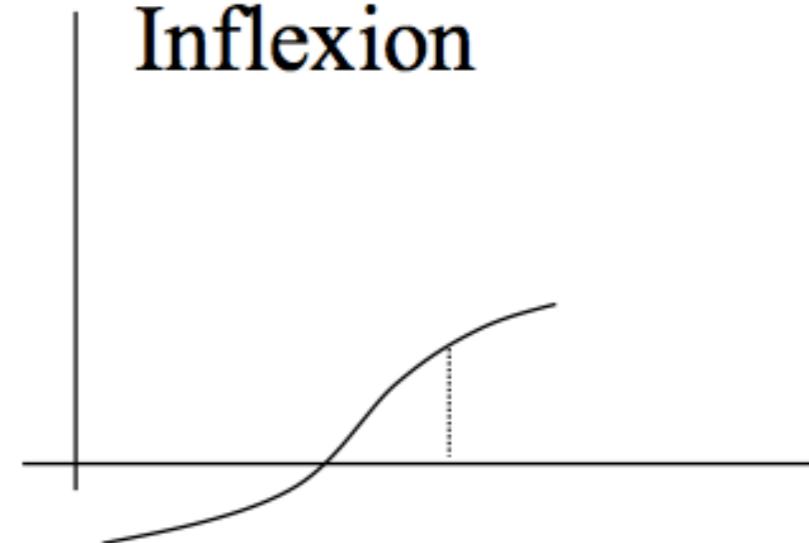
Point de départ



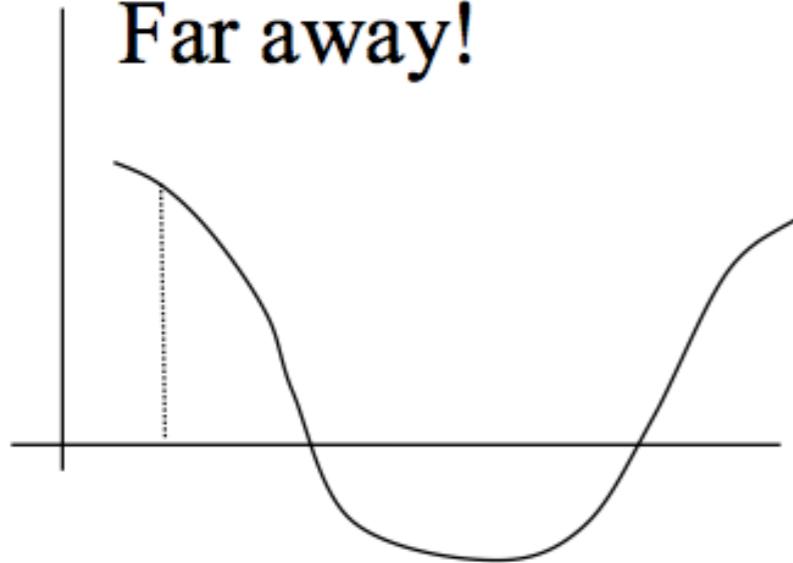
Minimum local



Inflexion



Far away!



Il faut faire avec et ....

- . Contrôler les itératifs successifs.
- . Contrôler le nombre d'itérations.
- . Contrôler les dérivées
- . Bien choisir le  $u_k$  initial

## 1.1.2 La méthode de Newton modifiée 1 :

- Une modification fréquente de l'algorithme de Newton consiste à remplacer la dérivée  $g'(u)$  par une constante  $K$ , ce qui donne :

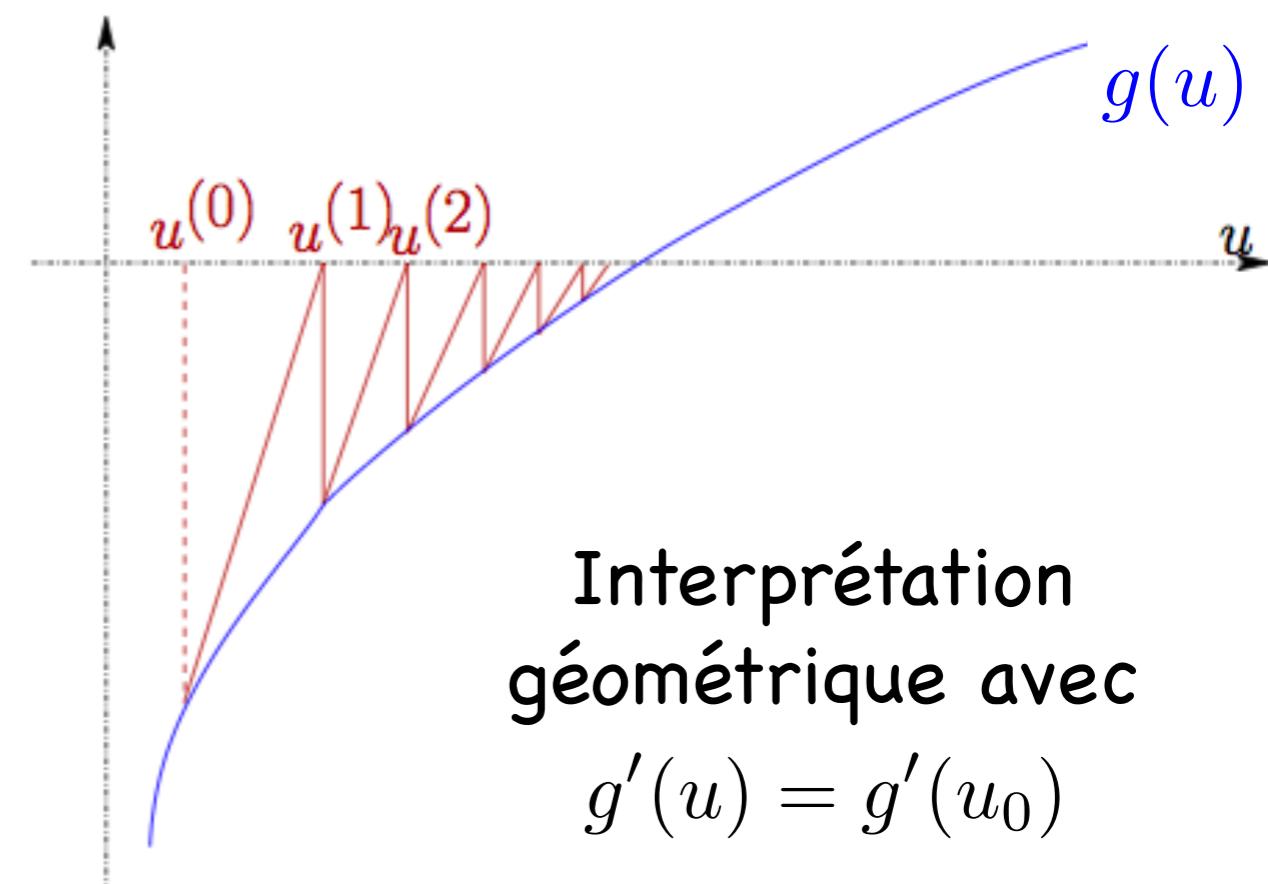
$$g(u_{k+1}) \approx g(u_k) + [u_{k+1} - u_k]K = 0$$

ou encore  $u_{k+1} = u_k - \frac{g(u_k)}{K}$

- La convergence est (seulement) linéaire au voisinage de la solution :

$$e_{k+1} = \left(1 - \frac{g'(u)}{K}\right)e_k + o(|e_k|) = O(|e_k|)$$

mais cette méthode reste intéressante dans le cas vectoriel  $G(U) = 0$  à grande dimension



### 1.1.3 Méthode de Newton modifiée 2 :

- On peut également utiliser la droite sécante passant par les deux itérés précédents pour incrémenter la méthode de Newton :

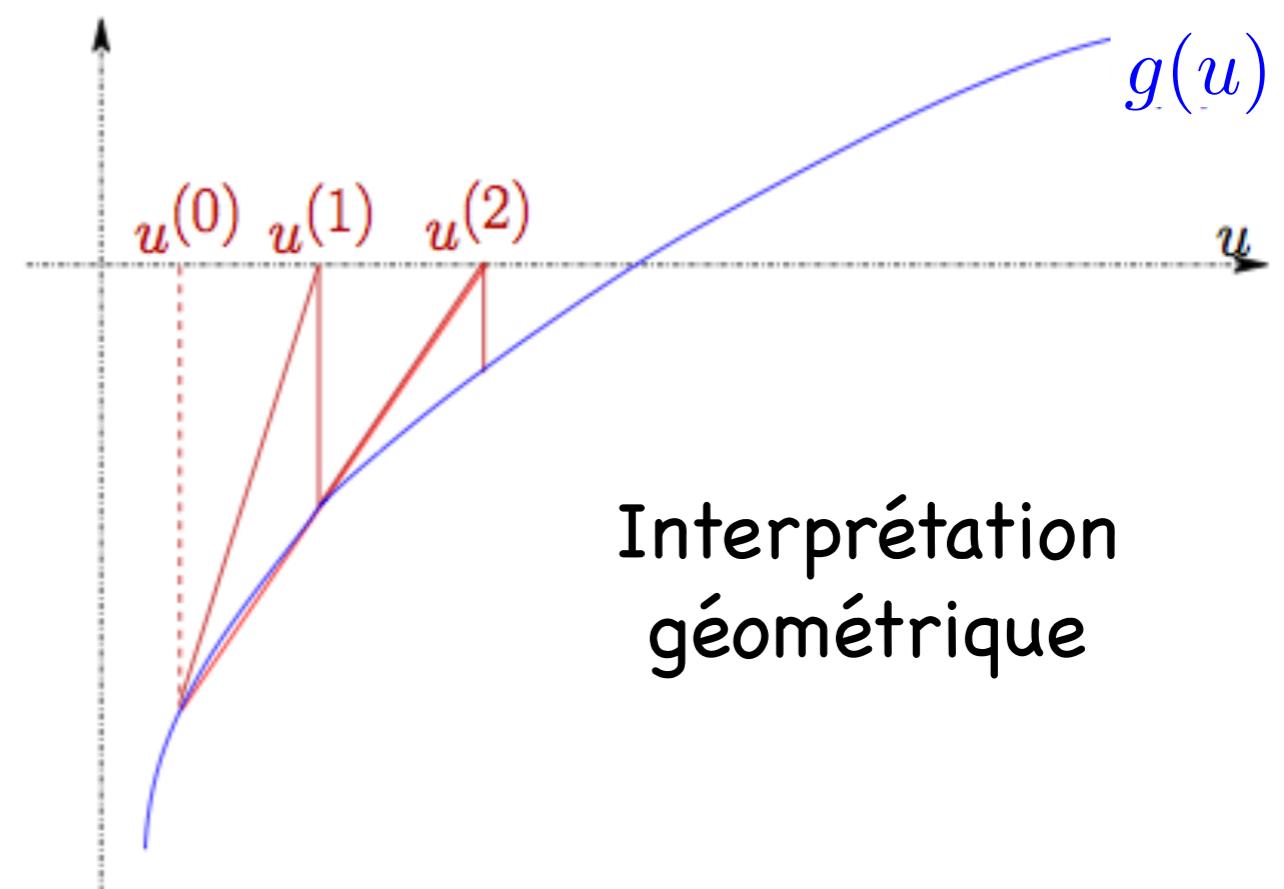
$$g(u_{k+1}) \approx g(u_k) + [u_{k+1} - u_k] \frac{g(u_k) - g(u_{k-1})}{u_k - u_{k-1}} = 0$$

- La convergence est moins bonne que pour la méthode de Newton standard mais meilleure que pour la méthode de Newton modifiée 1 :

$$e_{k+1} = O(|e_k|^{(1+\sqrt{5})/2})$$



Nombre d'or



## 1.1.4 Dérivation numérique :

- La dérivée d'une fonction  $g$  en un point  $u \in \mathbb{R}$  est définie par

$$g'(u) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(u + h) - g(u)}{h}$$

- Le calcul de la dérivée peut être :

- . Onéreux (expression difficile à évaluer)
- . Imprécis : fonction donnée par un ensemble discret de valeurs (données expérimentales par exemple)
- . Impossible : dérivées intervenant dans des équations différentielles par exemple.

- L'idée simple est de calculer numériquement le quotient différentiel :

$$g'(u) \approx \frac{g(u + h) - g(u)}{h} \quad |h| \ll 1$$



Le choix de la valeur de  $h$  peut introduire des erreurs d'arrondis  $E$  dans le calcul de la dérivée.

## Choix du pas $h$ :

- Soit  $\delta$  la précision relative de la machine (ex : 7 chiffres significatifs  $\rightarrow \delta = 10^{-7}$ ). L'erreur absolue sur la dérivée est estimée par :

$$E_a = 2\delta \left| \frac{g(u)}{h} \right|$$

- L'erreur de troncature de la formule de Taylor est définie par :

$$E_t = \frac{|h|}{2} |g''(u)|$$

- L'erreur d'arrondi sur la dérivée est alors :

$$E = E_a + E_t = 2\delta \left| \frac{g(u)}{h} \right| + \frac{|h|}{2} |g''(u)|$$

et elle est minimale pour  $|h| = 2\sqrt{\delta \left| \frac{g(u)}{g''(u)} \right|}$

En pratique, on essaye  $\neq$  valeurs de  $h$  et on choisit celle qui améliore au mieux la convergence de la méthode de Newton

# Résumé

- Nous avons vu les différentes sources de non-linéarités en calculs des structures à travers des exemples simples.
- Lorsqu'il n'est pas possible de calculer analytiquement la courbe  $g(u) = r(u) - F$ , il existe l'alternative numérique :
  - La méthode la plus connue est la méthode de Newton et ses déclinaisons. C'est une méthode itérative qui se ramène à une suite de problèmes linéaires :

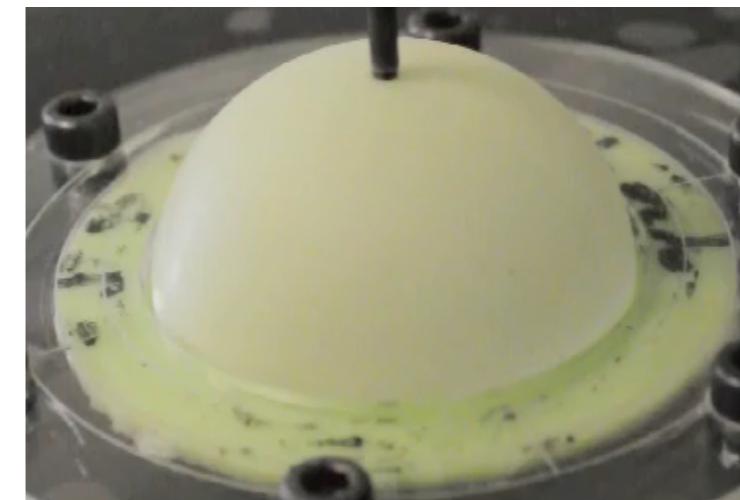
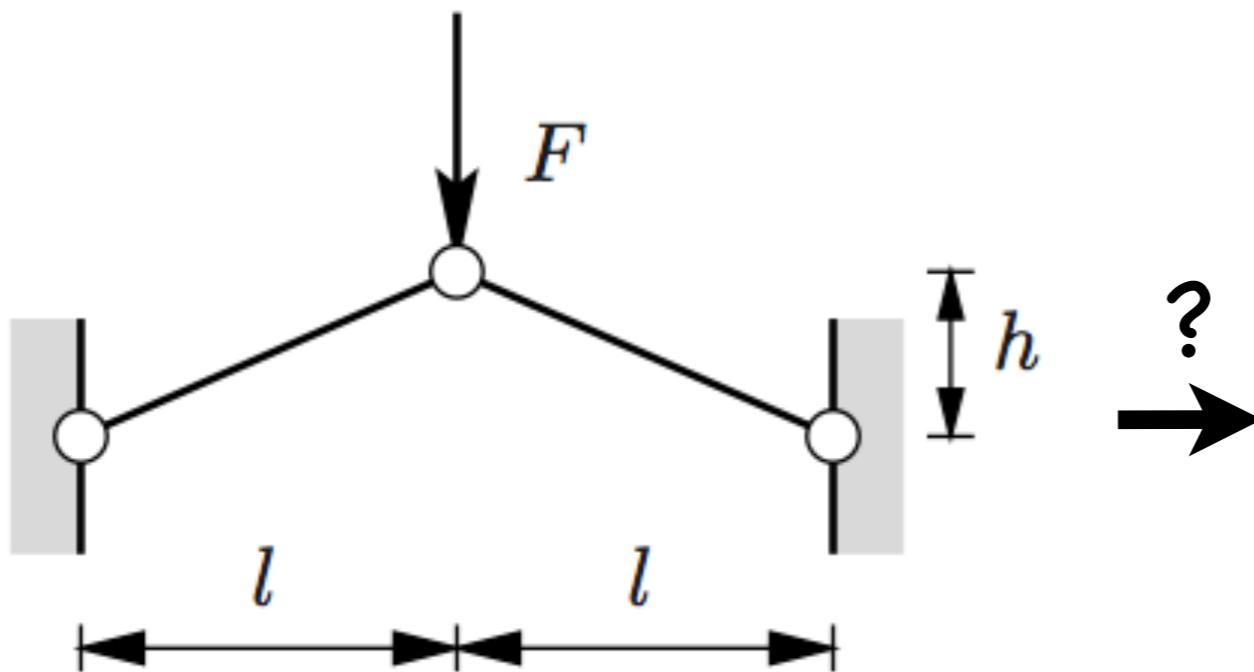
$$g(u_{k+1}) \approx g(u_k) + [u_{k+1} - u_k]g'(u_k) = 0$$

Ces notions de cours seront vu au TP 1 !

# Plan du cours

0. Introduction : La notion de non-linéarité.
1. Phénomènes non linéaires en mécaniques des solides.
2. Méthodes de calculs pour l'ingénieur.
3. Notion de calculs de stabilité.

## 2. Méthodes de calculs pour l'ingénieur



Exemple simplifié à 1 ddl

$$g(u) = 0$$

Calcul quasi-statiques  
de structures à N ddls

$$\mathbf{G}(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$$

Comment étendre les méthodes numériques vues dans le cas d'une équation non-linéaire 1D au cas d'un système d'équations algébriques non linéaires de dimension N ?

- En statique, après discrétisation spatial par éléments finis d'un problème de structure non linéaire, on obtient un système algébrique de la forme :

$$\mathbf{G}(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$$

où le vecteur inconnu  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^N$  doit être déterminé.

. Dans ce cours, nous considérerons qu'il y a existence de solutions dans l'intervalle considéré (existence mais pas forcément unicité !) pour nous concentrer uniquement sur la détermination numérique de  $\mathbf{v}$ .

. Différentes méthodes existent pour résoudre ce système, nous nous focaliserons sur celles qui recherchent une solution à la fois, par exemple pour une force donnée, car elles demandent moins de connaissance mathématiques du système et sont plus facilement applicables en calcul de structures.

. Une solution directe de  $\mathbf{G}(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$  n'étant généralement pas possible, il nous faudra construire des méthodes itératives pour atteindre ces solutions.

- Encore plus que dans le cas 1D de la partie 2, le choix de la méthode itérative à utiliser est crucial dans un système à grande dimension et va dépendre de plusieurs critères auxquels il faut répondre pour chaque problème traité :
  - . Est-ce que la méthode converge vers la solution ?
  - . Quelle est la vitesse de convergence de l'algorithme ?
  - . La méthode est-elle efficace ?
    - Combien d'opérations sont nécessaires lors d'un pas d'itération.
    - Pour une précision donnée, combien d'itérations sont nécessaires pour converger ?
    - Combien de mémoire vive va être utilisée par l'algorithme ?

- Aucune méthode itérative ne satisfaisant tous les critères à la fois de manière efficace et robuste (pas de méthode miracle), différents algorithmes existent avec chacun leurs avantages et inconvénients.
- Les plus fréquemment utilisés en calculs de structures par éléments finis sont :
  - . Les méthodes de points fixes.
  - . Les méthodes de Newton-Raphson.
  - . Les méthodes de quasi-Newton.
  - . Les méthodes de relaxation dynamique.
  - . Les méthodes de continuation.
  - . etc...

- Dans ce cours, nous présenterons les méthodes de Newton (extension du cas 1D de la partie 2) et les méthodes de continuation. L'ensemble de ces méthodes permet de calculer pratiquement n'importe quelle courbe  $\mathbf{G}(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$  en calcul de structures.
- En éléments finis, nous avons l'habitude de réécrire le système  $\mathbf{G}(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$  sous la forme :

$$\mathbf{G}(\mathbf{v}, \lambda) = \mathbf{R}(\mathbf{v}) - \lambda \mathbf{P} = \mathbf{0}$$

où l'on a fait apparaître  $\lambda$ , le paramètre de chargement. Ce scalaire peut-être l'amplitude d'une force comme dans la partie 2 mais rien n'empêche que ce soit une caractéristique mécanique, géométrique ou cinématique du système tel que l'amplitude d'un déplacement imposé.

## 2.1 La méthode de Newton-Raphson

- Le schéma itératif le plus fréquent pour calculer les solutions de systèmes non linéaires algébriques est l'algorithme de Newton-Raphson. Comme en 1D, cette méthode est basée sur le développement de Taylor à l'ordre 1 de  $\mathbf{G}(\mathbf{v}, \lambda)$  autour d'un état connu  $\mathbf{v}_k$  :

$$\mathbf{G}(\mathbf{v}_k + \Delta\mathbf{v}, \bar{\lambda}) = \mathbf{G}(\mathbf{v}_k, \bar{\lambda}) + \nabla\mathbf{G}(\mathbf{v}_k, \bar{\lambda})\Delta\mathbf{v} + \mathbf{f}(\mathbf{v}_k, \bar{\lambda})$$

avec  $\Delta\mathbf{v}$  incrément de déplacement,  $\bar{\lambda}$  le paramètre de chargement fixé et  $\nabla\mathbf{G}\Delta\mathbf{v}$  la dérivée directionnelle de  $\mathbf{G}$  en  $\mathbf{v}_k$  où :

$$\nabla\mathbf{G} = \frac{\partial\mathbf{G}_i}{\partial v_k^j} = \mathbf{K}_T$$

est le gradient de  $\mathbf{G}$  aussi appelé la matrice tangente en calcul de structures.

- En négligeant le résidu  $\mathbf{f}(\mathbf{v}_k, \bar{\lambda})$  (Taylor à l'ordre 1), on obtient l'équation linéaire à la base de l'algorithme itératif pour la recherche de solution :

$$\mathbf{G}(\mathbf{v}_k + \Delta\mathbf{v}, \bar{\lambda}) \approx 0 \approx \mathbf{G}(\mathbf{v}_k, \bar{\lambda}) + \nabla\mathbf{G}(\mathbf{v}_k, \bar{\lambda})\Delta\mathbf{v}$$

Initial values:  $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_k$ .

Iteration loop  $i = 0, 1, \dots$  until convergence

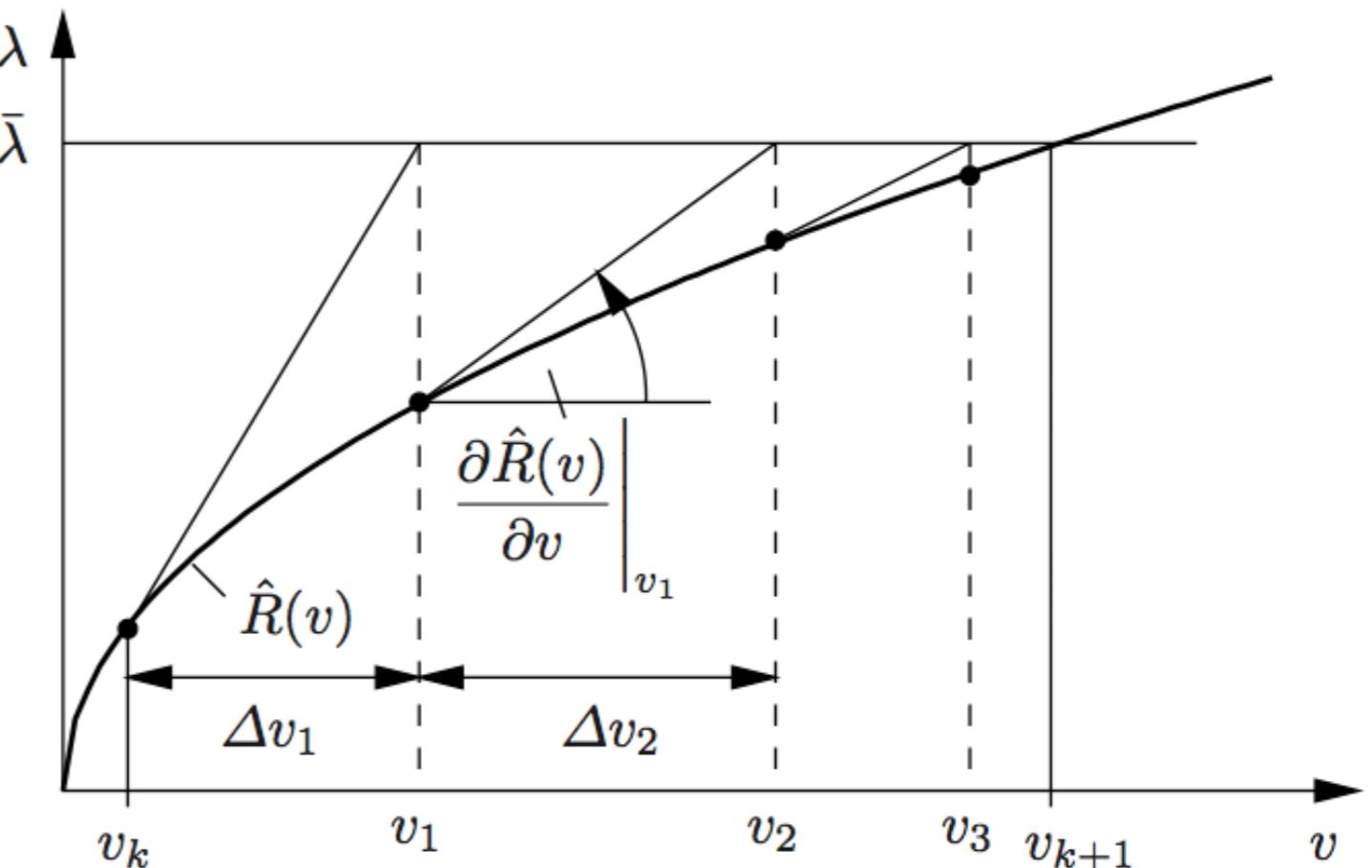
1. Compute  $\mathbf{G}(\mathbf{v}_i, \bar{\lambda})$  and  $\mathbf{K}_T(\mathbf{v}_i)$
2. Compute the displacement increments:  $\mathbf{K}_T(\mathbf{v}_i) \Delta \mathbf{v}_{i+1} = -\mathbf{G}(\mathbf{v}_i, \bar{\lambda})$
3. Compute new displacement:  $\mathbf{v}_{i+1} = \mathbf{v}_i + \Delta \mathbf{v}_{i+1}$
4. Test for convergence

$$\| \mathbf{G}(\mathbf{v}_{i+1}, \bar{\lambda}) \| \quad \begin{cases} \leq \text{TOL} \rightarrow & \text{Set : } \mathbf{v}_{k+1} = \mathbf{v}_{i+1}, \text{ STOP} \\ > \text{TOL} \rightarrow & \text{Set } i = i + 1 \text{ go to 1)} \end{cases}$$

- La convergence de Newton en dimension N est toujours quadratique tel que :

$$\|\mathbf{v}_{k+1} - \mathbf{v}\| \leq C \|\mathbf{v}_k - \mathbf{v}\|^2$$

[M. Bonnet, 2008]



Interprétation géométrique :  $G(v, \bar{\lambda}) = \hat{R}(v) - \bar{\lambda}$

- Il est souvent très compliqué de dériver la matrice tangente analytiquement. Une possibilité est d'estimer numériquement les dérivées par une différence de quotients (suivant l'idée du cas scalaire de la partie 2.) : on parle alors de Newton discret. En utilisant la différence avant :

$$\mathbf{k}_m \approx \frac{1}{h_m} [\mathbf{G}(\mathbf{v}_i + h_m \mathbf{e}_m, \bar{\lambda}) - \mathbf{G}(\mathbf{v}_i, \bar{\lambda})]$$

où  $h_m$  est la taille du pas de dérivée et  $\mathbf{e}_m$  est un vecteur qui contient des zéros partout sauf à la position m. Dans le cas d'un système à dimension N, la matrice tangente contient N colonnes  $\mathbf{k}_m$  et s'écrit :

$$\mathbf{K}_T = [\mathbf{k}_1 \ \mathbf{k}_2 \dots \mathbf{k}_m \dots \mathbf{k}_N]$$

- Le choix du pas  $h_m$  doit être choisi le plus petit possible. Cependant, à cause de la précision machine limitée  $\eta$ , on prend en pratique un pas :

$$h_m = \nu(|(v_m)_i| + 10^{-3}) \quad \text{avec} \quad \nu = 10^{-3} \dots 10^{-5} < \sqrt{\eta}$$

## 2.2 La méthode de Newton-Raphson modifiée

- Une modification simple de l'algorithme de NR consiste à ne pas actualiser la matrice tangente à chaque pas d'itération. Le plus souvent, on calcule et assemble  $\mathbf{K}_T$  seulement au premier pas de chaque pas de chargement. Le calcul de l'incrément de déplacement (2) devient alors :

$$\mathbf{K}_T \Delta \mathbf{v}_{i+1} = -\mathbf{G}(\mathbf{v}_i, \bar{\lambda})$$

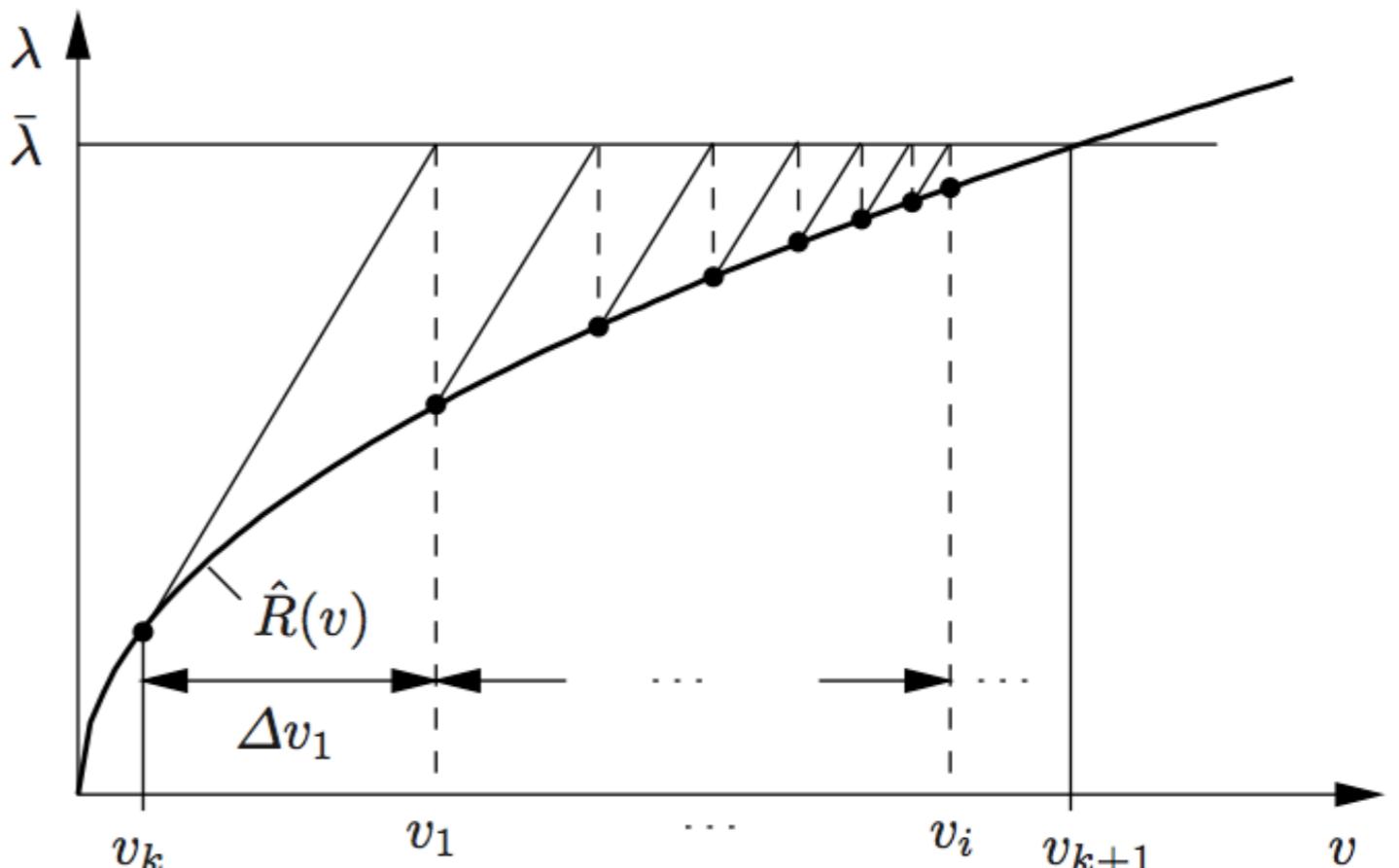
- La convergence est alors seulement linéaire, mais plus la dimension N est grande plus on économise du temps de calcul car :

→ Inversion de  $\mathbf{K}_T(\mathbf{v}_i)$  :

$$O(N^3)$$

→ Calcul de  $\mathbf{v}_{k+1}$  :

$$O(N^2)$$



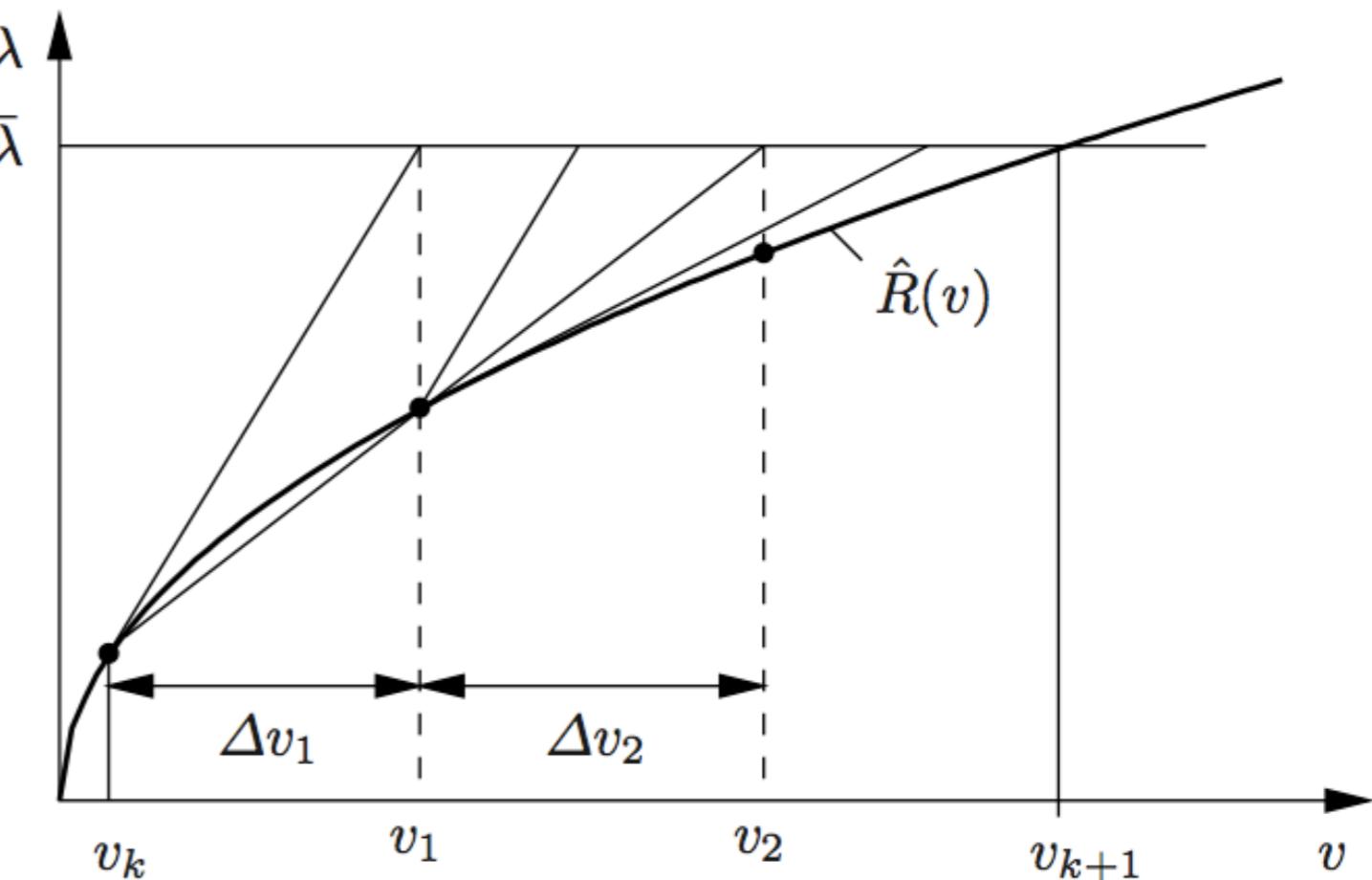
Interprétation géométrique en 1D

## 2.3 La méthode de Quasi-Newton

- Dans un soucis d'économie de temps de calculs, il peut être pertinent d'estimer les directions tangentes par des directions sécantes calculées sur l'état connu de l'itération précédente. C'est la méthode de quasi-Newton où le calcul de l'incrément de déplacement (2) devient :

$$\mathbf{K}_i^{QN}(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_{i-1}) = -(\mathbf{G}_i - \mathbf{G}_{i-1})$$

où  $\mathbf{K}_i^{QN}$  est la matrice sécante.



Interprétation géométrique en 1D

- Une méthode très efficace pour calculer la matrice sécante est la méthode BFGS (une seule inversion de matrice et uniquement des produits scalaire peu coûteux) :

$$[\mathbf{K}_i^{QN}]^{-1} = (1 + \mathbf{a}_i \mathbf{b}_i^T) [\mathbf{K}_{i-1}^{QN}]^{-1} (1 + \mathbf{b}_i \mathbf{a}_i^T)$$

avec

$$\mathbf{w}_i = \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_{i-1},$$

$$\mathbf{g}_i = \mathbf{G}_{i-1} - \mathbf{G}_i,$$

$$\mathbf{a}_i = \frac{1}{\mathbf{g}_i^T \mathbf{w}_i} \mathbf{w}_i,$$

$$\mathbf{b}_i = - \left\{ \mathbf{g}_i - \left[ \frac{\mathbf{w}_i^T \mathbf{g}_i}{\mathbf{w}_i^T \mathbf{K}_{i-1}^{QN} \mathbf{w}_i} \right]^{\frac{1}{2}} \mathbf{G}_{i-1} \right\}$$

## 2.4 Réduction de l'espace des solutions

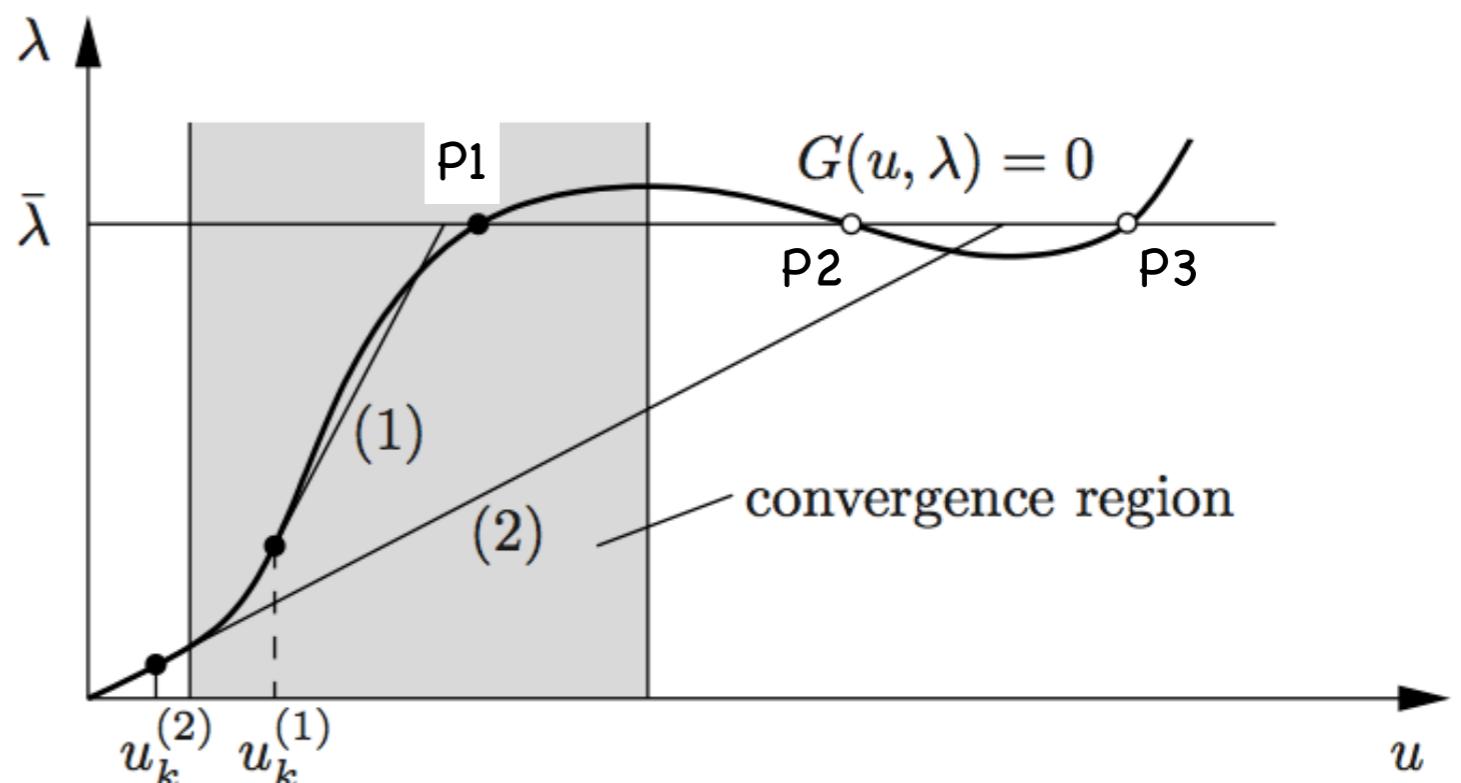
- Dans le cas de solutions multiples et à cause de la convergence locale de l'algorithme de Newton, il est parfois impossible d'appliquer le pas de chargement  $\bar{\lambda}$  en une seule fois.

→ C'est le cas de la courbe d'équilibre ci-dessous :

- . Si notre état initial est dans la région grise, on converge en P1.
- . Si notre état initial est en dehors, on converge sur une autre solution.

- Une solution est d'appliquer le pas de chargement en plusieurs incrément pour suivre le chemin d'équilibre.

- Une autre solution est de passer par l'optimisation d'une fonctionnelle associée à  $G(v, \bar{\lambda})$ .



Région de convergence de NR

## 2.4.1 Méthode de Newton en optimisation :

- En optimisation, la méthode de Newton consiste à chercher les points stationnaires de fonctions dérivables de manière itérative. La méthode se base sur le développement au premier ordre d'une fonctionnelle  $\mathcal{E}(\mathbf{v})$  avec  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^N$  autour d'un état connu  $\mathbf{v}_k$  :

$$\mathcal{E}(\mathbf{v}_k + \Delta\mathbf{v}, \bar{\lambda}) \approx \mathcal{E}(\mathbf{v}_k, \bar{\lambda}) + \nabla\mathcal{E}(\mathbf{v}_k, \bar{\lambda})\Delta\mathbf{v}$$

où  $\nabla\mathcal{E}(\mathbf{v}_k, \bar{\lambda}) = \frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\mathbf{v}_k^i}$  est le vecteur gradient de  $\mathcal{E}$ .

- En posant  $\nabla\mathcal{E}(\mathbf{v}_k + \Delta\mathbf{v}, \bar{\lambda}) = 0$  pour rechercher les extremaums de la fonction, on obtient l'équation linéaire à la base de l'algorithme de Newton en optimisation :

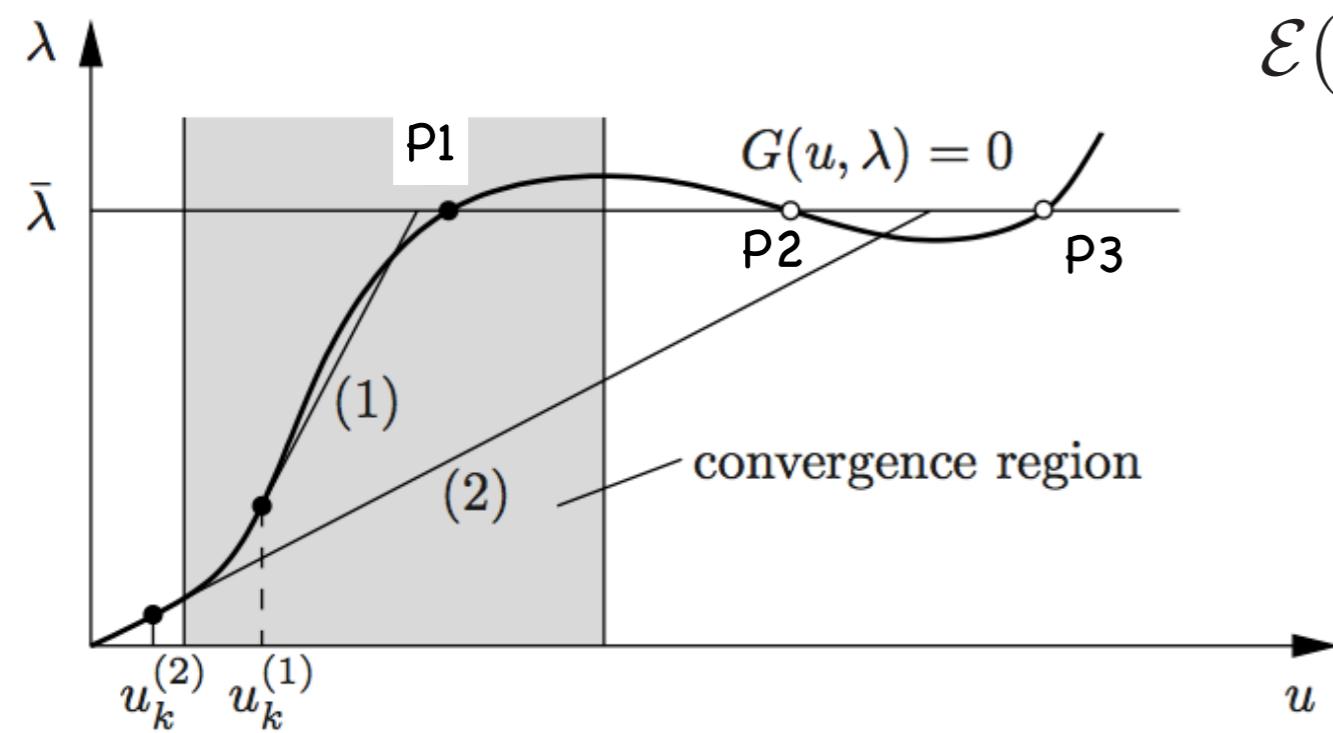
$$\nabla\mathcal{E}(\mathbf{v}_k + \Delta\mathbf{v}, \bar{\lambda}) = 0 = \nabla\mathcal{E}(\mathbf{v}_k, \bar{\lambda}) + \nabla^2\mathcal{E}(\mathbf{v}_k, \bar{\lambda})\Delta\mathbf{v}$$

où  $\nabla^2\mathcal{E}(\mathbf{v}_k, \bar{\lambda}) = \frac{\partial^2\mathcal{E}_i}{\partial\mathbf{v}_k^i\partial\mathbf{v}_k^j}$  est la matrice Hessienne de  $\mathcal{E}$ .

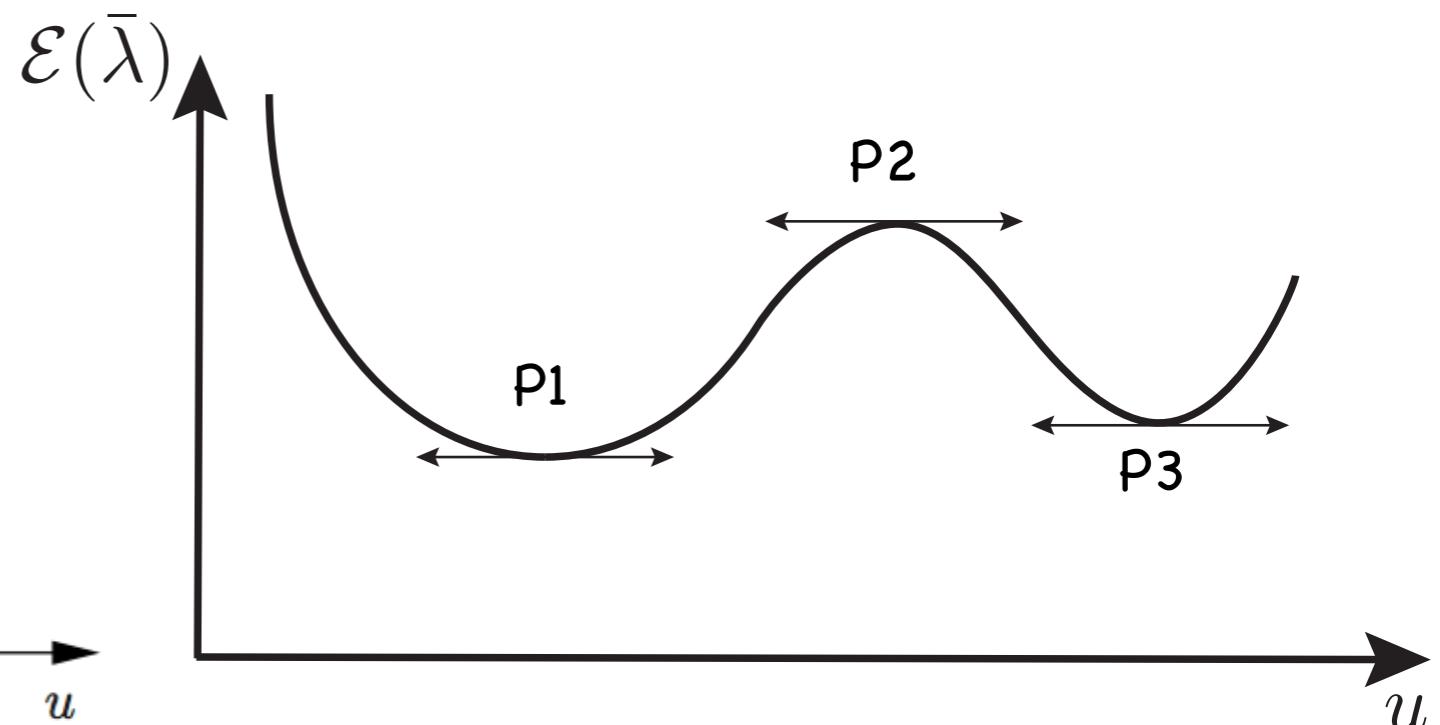
- Ce qui donne le schéma itératif :  $\mathbf{v}_{i+1} = \mathbf{v}_i - \frac{\nabla\mathcal{E}(\mathbf{v}_i, \bar{\lambda})}{\nabla^2\mathcal{E}(\mathbf{v}_i, \bar{\lambda})}$

- Si  $\mathbf{G}(\mathbf{v})$  est le gradient de  $\mathcal{E}(\mathbf{v})$ , alors  $\nabla \mathbf{G}(\mathbf{v})$  est le hessien de  $\mathcal{E}(\mathbf{v})$  et le schéma itératif est équivalent au schéma de Newton écrit sur  $\mathbf{G}(\mathbf{v})$ .

→ L'algorithme de Newton cherche les extremum de la fonction  $\mathcal{E}(\mathbf{v})$  tel que  $\nabla \mathcal{E}(\mathbf{v}, \bar{\lambda}) = \mathbf{G}(\mathbf{v}, \bar{\lambda}) = 0$  !



Pts fixes du système non linéaire



Minimisation de la fonctionnelle associée

- Remarque : En calcul de structures non linéaire, on peut rechercher les états d'équilibre à l'aide de la méthode de NR soit en cherchant l'extremum de l'énergie, soit en cherchant les points fixes de l'équation d'équilibre.

## 2.4.2 Méthode de gradient descendant :

- Pour limiter l'espace de recherche des solutions et éviter de diverger sur le point fixe P2, on peut utiliser une méthode de gradient descendant qui est un algorithme d'optimisation du premier ordre pour trouver les minimums locaux de la fonction  $\mathcal{E}(\mathbf{v}, \bar{\lambda})$  (si  $\mathcal{E}$  est l'énergie de ma structure, les solutions recherchées sont obligatoirement stables).
- Le schéma itératif de la méthode de gradient descendant s'écrit :

$$\mathbf{v}_{i+1} = \mathbf{v}_i - \eta_i \nabla \mathcal{E}(\mathbf{v}_i, \bar{\lambda})$$

où  $\eta_i$  est la taille du pas.

- Cet algorithme permet de trouver le minimum local de  $\mathcal{E}(\mathbf{v}, \bar{\lambda})$  en construisant la séquence :
$$\mathcal{E}(\mathbf{v}_0) \geq \mathcal{E}(\mathbf{v}_1) \geq \mathcal{E}(\mathbf{v}_2) \geq \dots \geq \mathcal{E}(\mathbf{v})$$
- Cependant la méthode du gradient descendant converge moins rapidement que la méthode de Newton.

## 2.4.2 Méthode de Newton amortie :

- Une méthode combinée pour construire une méthode globale et éviter de diverger sur le point fixe P2 est d'amortir l'algorithme de Newton. Ainsi, le calcul de l'incrément de déplacement dans l'algorithme de Newton devient :

$$\mathbf{v}_{i+1} = \mathbf{v}_i + \alpha_i \Delta \mathbf{v}_{i+1} = \mathbf{v}_i - \alpha_i \mathbf{K}_{Ti}^{-1} \mathbf{G}_i$$

avec  $\alpha_i$  le paramètre d'amortissement tel que  $0 \leq \alpha_i$

- Le calcul de  $\alpha_i$  peut être optimisé en utilisant une méthode de descente de gradient. Pour réduire le résidu en chaque itération

$$\|\mathbf{G}_{i+1}\| = \|\mathbf{G}(\mathbf{v}_i + \alpha_i \Delta \mathbf{v}_{i+1})\| \leq \|\mathbf{G}_i\|$$

on minimise la fonction  $\mathcal{E}(\mathbf{v}) = 1/2 \mathbf{G}^T(\mathbf{v}) \mathbf{G}(\mathbf{v})$  (ce qui est équivalent à trouver les pts fixes de  $\mathbf{G}(\mathbf{v}) = 0$  par rapport au paramètre  $\alpha_i$ ) pour rester dans le bassin d'attraction du point fixe P1, ce qui s'écrit :

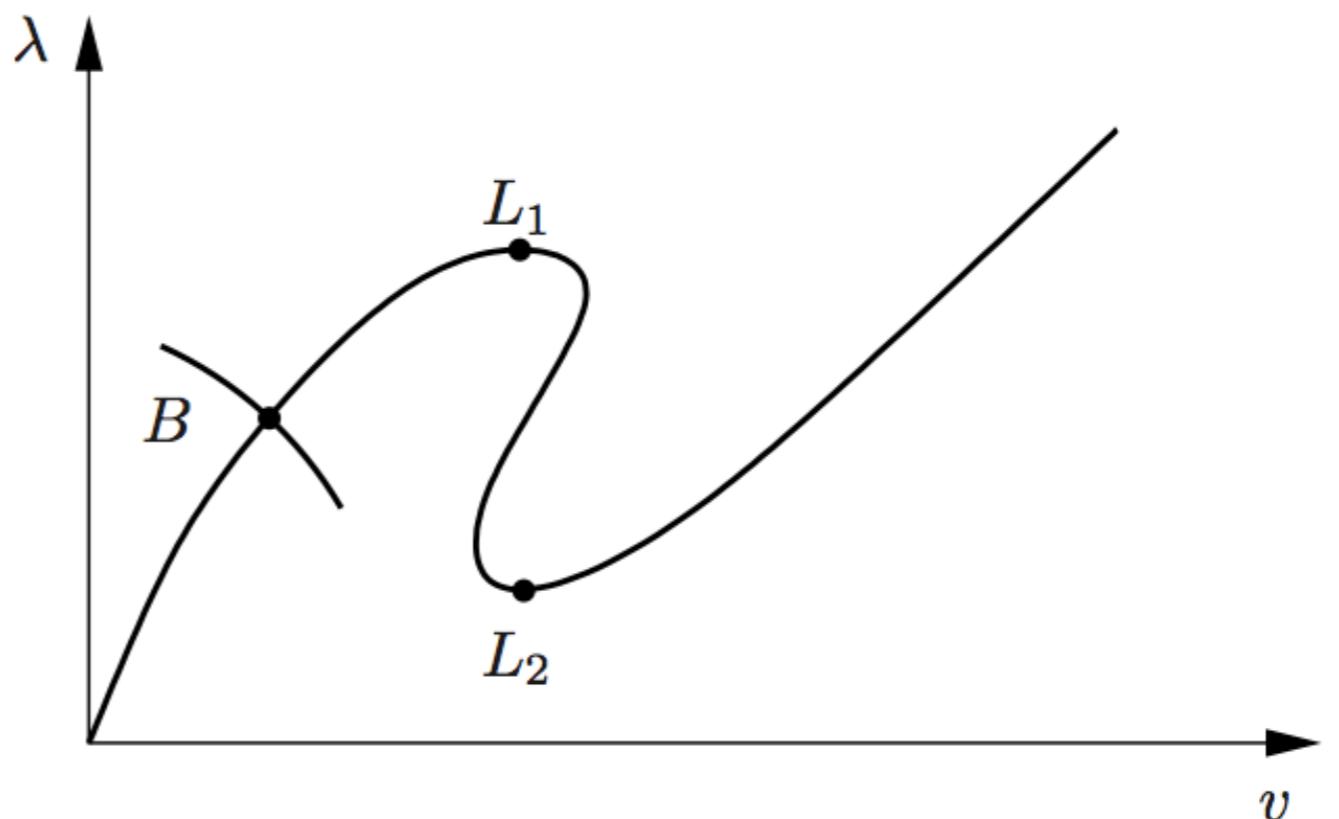
$$\frac{\partial \mathcal{E}(\mathbf{v})}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial \mathcal{E}(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \alpha_i} = \nabla \mathbf{G}^T(\mathbf{v}) \mathbf{G}(\mathbf{v}) \Delta \mathbf{v}_{i+1} = -\mathbf{G}_i^T \mathbf{G}(\mathbf{v}_i + \alpha_i \Delta \mathbf{v}_{i+1}, \bar{\lambda}) = 0$$

Pour estimer  $\alpha_i$ , on pourrait utiliser une méthode de Newton mais pour économiser du tps de calcul, on utilise d'autre méthode telles que line-search, moins précises, mais qui suffisent à prédire un amortissement correct.

## 2.5 Méthodes de continuation

- Il est possible que le chemin d'équilibre soit une fonction très complexe avec des pts limites ( $L_1$  et  $L_2$ ) ou des pts de bifurcation ( $B$ ) où la matrice tangente devient singulière ( $\det(\mathbf{K}_T) = 0$ ). Dans ce cas, l'algorithme de Newton classique ne peut accéder à l'ensemble des solutions, ce qui pose un problème d'utilité pratique en calcul de structures.

- Pour remédier à ce problème, il existe des méthodes de continuation (ou arc-length) qui permettent de suivre littéralement toutes les branches de pts fixes d'un système d'équations NL algébriques.



Chemin d'équilibre très non linéaire

## 2.5.1 Description de la méthode :

- L'idée de base est d'ajouter une contrainte  $f(\mathbf{v}, \lambda) = 0$  au système  $\mathbf{G}(\mathbf{v}, \lambda) = \mathbf{R}(\mathbf{v}) - \lambda \mathbf{P} = 0$  par laquelle le paramètre de chargement, maintenant inconnu, peut être déterminé. Le système  $\mathbf{G}(\mathbf{v}, \lambda) = 0$  devient alors :

$$\tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{w}) = \begin{Bmatrix} \mathbf{G}(\mathbf{v}, \lambda) \\ f(\mathbf{v}, \lambda) \end{Bmatrix} = 0, \quad \mathbf{w} = \begin{Bmatrix} \mathbf{v} \\ \lambda \end{Bmatrix}$$

où  $\mathbf{w}$  est le vecteur des déplacements généralisés.

- La linéarisation de  $\tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{w})$  autour d'un état connu  $\mathbf{w}_i = (\mathbf{v}_i, \lambda_i)$  peut s'écrire :

$$\nabla \tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{w}_i) \cdot \Delta \mathbf{w} = \begin{Bmatrix} \nabla \mathbf{G}(\mathbf{v}_i, \lambda_i) \Delta \mathbf{v} + \nabla \mathbf{G}(\mathbf{v}_i, \lambda_i) \Delta \lambda \\ \nabla f(\mathbf{v}_i, \lambda_i) \Delta \mathbf{v} + \nabla f(\mathbf{v}_i, \lambda_i) \Delta \lambda \end{Bmatrix}$$

avec  $\nabla \mathbf{G} = \mathbf{K}_T$ , matrice tangente,

$$\nabla \mathbf{G} \Delta \lambda = -\mathbf{P} \Delta \lambda,$$

$$\nabla f \Delta \mathbf{v} = \mathbf{f}^T \Delta \mathbf{v} \text{ avec } \mathbf{f}_i = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}^i} \text{ gradient de } f$$

$$\text{et } \nabla f \Delta \lambda = f_{,\lambda} \Delta \lambda \text{ avec } f_{,\lambda} = \frac{\partial f}{\partial \lambda} \text{ dérivée partielle de } f.$$

et l'algorithme itératif de Newton s'écrit dans le cas des méthodes de continuation :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K}_T & -\mathbf{P} \\ \mathbf{f}^T & f_{,\lambda} \end{pmatrix}_i \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{v} \\ \Delta \lambda \end{Bmatrix}_i = - \begin{Bmatrix} \mathbf{G} \\ \mathbf{f} \end{Bmatrix}_i$$

- Contrairement au Newton classique, ce système d'équations linéaire n'est pas singulier aux pts limites (il l'est cependant aux pts de bifurcations). En partitionnant le système, on obtient une équation pour déterminer le déplacement  $\Delta \mathbf{v}_{i+1}$  :

$$\Delta \mathbf{v}_{i+1} = \Delta \lambda_{i+1} \Delta \mathbf{v}_{Pi+1} + \Delta \mathbf{v}_{Gi+1}$$

avec les définitions :

$$\Delta \mathbf{v}_{Pi+1} = (\mathbf{K}_{Ti})^{-1} \mathbf{P} \quad \text{et} \quad \Delta \mathbf{v}_{Gi+1} = -(\mathbf{K}_{Ti})^{-1} \mathbf{G}_i$$

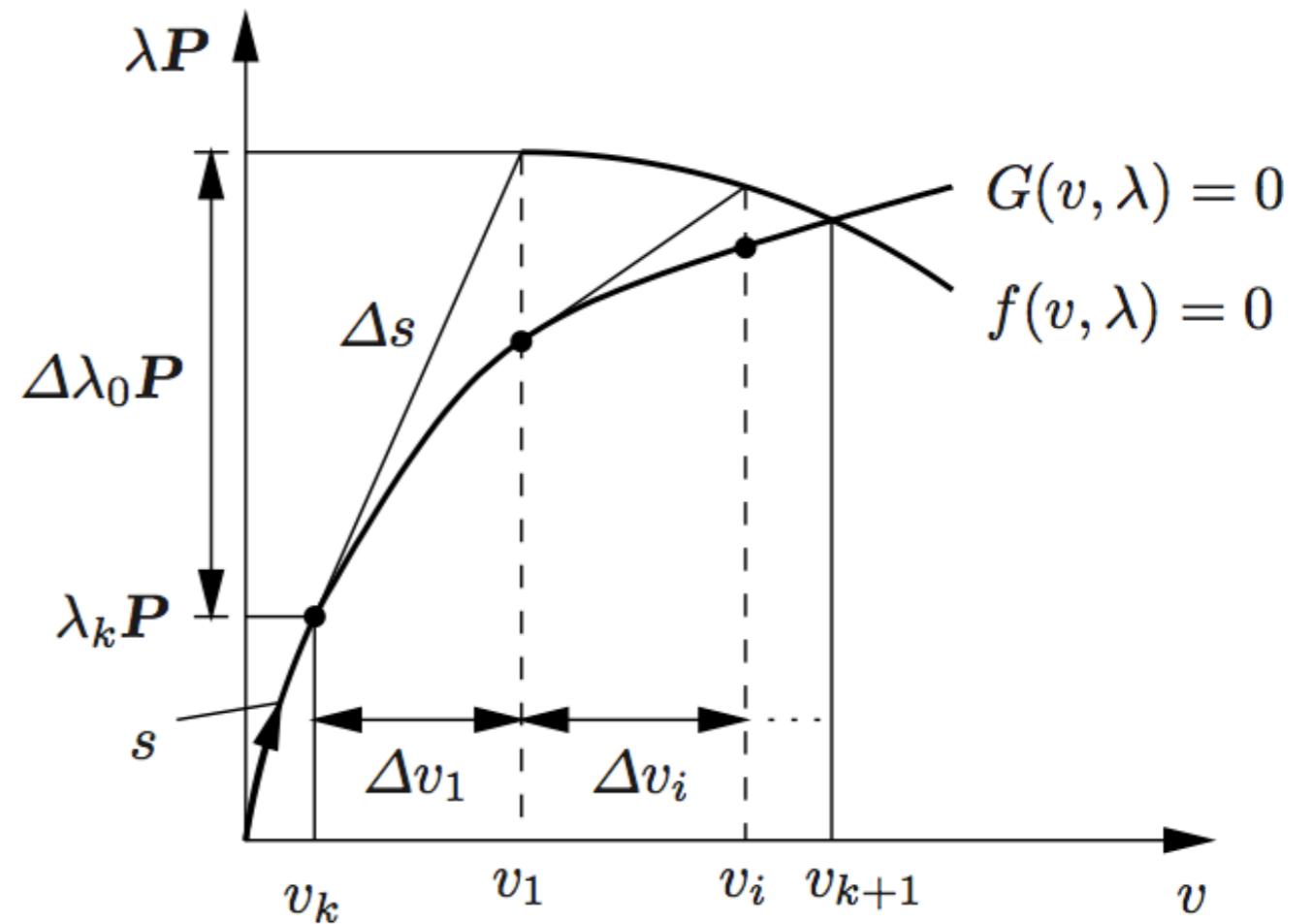
et une équation supplémentaire pour le paramètre de chargement  $\Delta \lambda_{i+1}$  :

$$\Delta \lambda_{i+1} = - \frac{f_i + \mathbf{f}_i^T \Delta \mathbf{v}_{Gi+1}}{(f_{,\lambda})_i + \mathbf{f}_i^T \Delta \mathbf{v}_{Pi+1}}$$

- Le coût de calcul additionnel par rapport à un Newton classique est faible (2 produits scalaires et la détermination de  $\Delta \mathbf{v}_{P_{i+1}}$ ) et l'algorithme de continuation converge également de manière quadratique.
- Cependant, la méthode arc-length nécessite une étape pour prédire l'incrément de paramètre de chargement initial  $\Delta\lambda_0$ . Ce dernier est déterminé en normalisant le vecteur tangent  $\pm\Delta\lambda_0\|\Delta\mathbf{v}_{P0}\|$  par rapport à un incrément  $\Delta s$  de la longueur d'arc tel que :

$$\pm\Delta\lambda_0\|\Delta\mathbf{v}_{P0}\| = \Delta s$$

qui décrit la paramétrisation du chemin d'équilibre par la longueur d'arc  $s$  (d'où le nom de méthode arc-length).



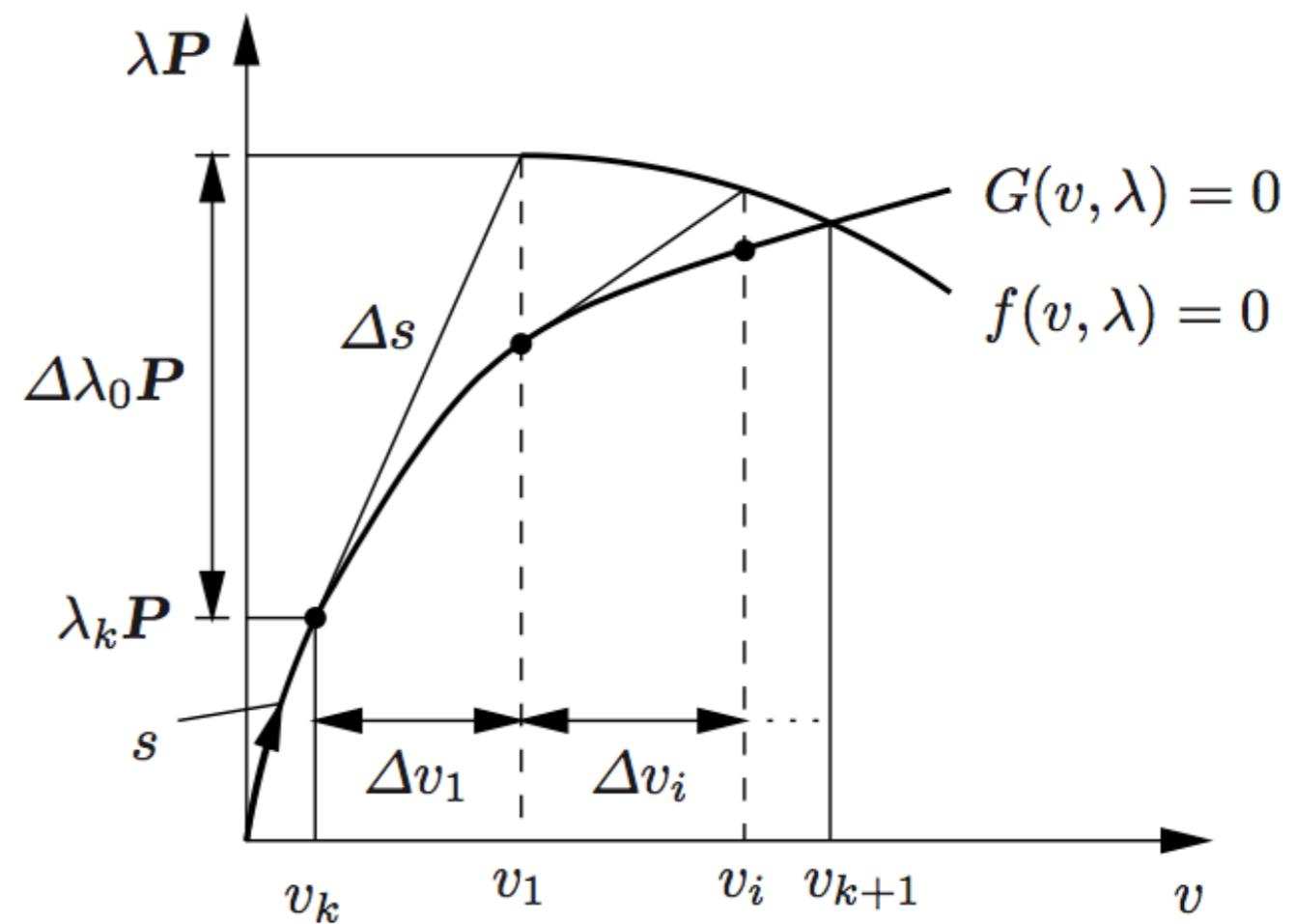
La méthode arc-length

- Le signe de l'incrément de pas de chargement initial  $\Delta\lambda_0$  dépend de la tangente le long du chemin d'équilibre et peut donc changer au passage de points limites. En pratique,  $\Delta\lambda_0$  doit être de même signe que la tangente.

- Un critère simple souvent utilisé car insensible aux pts de bifurcations pour déterminer le signe de  $\Delta\lambda_0$  et la direction de la tangente est de calculer le paramètre de raideur courante (current stiffness parameter) :

$$CS_i = \frac{\kappa_i}{\kappa_0}$$

avec  $\kappa_i = \frac{\mathbf{P}^T \Delta \mathbf{v}_{i+1}}{\Delta \mathbf{v}_{i+1}^T \Delta \mathbf{v}_{i+1}}$



La méthode arc-length

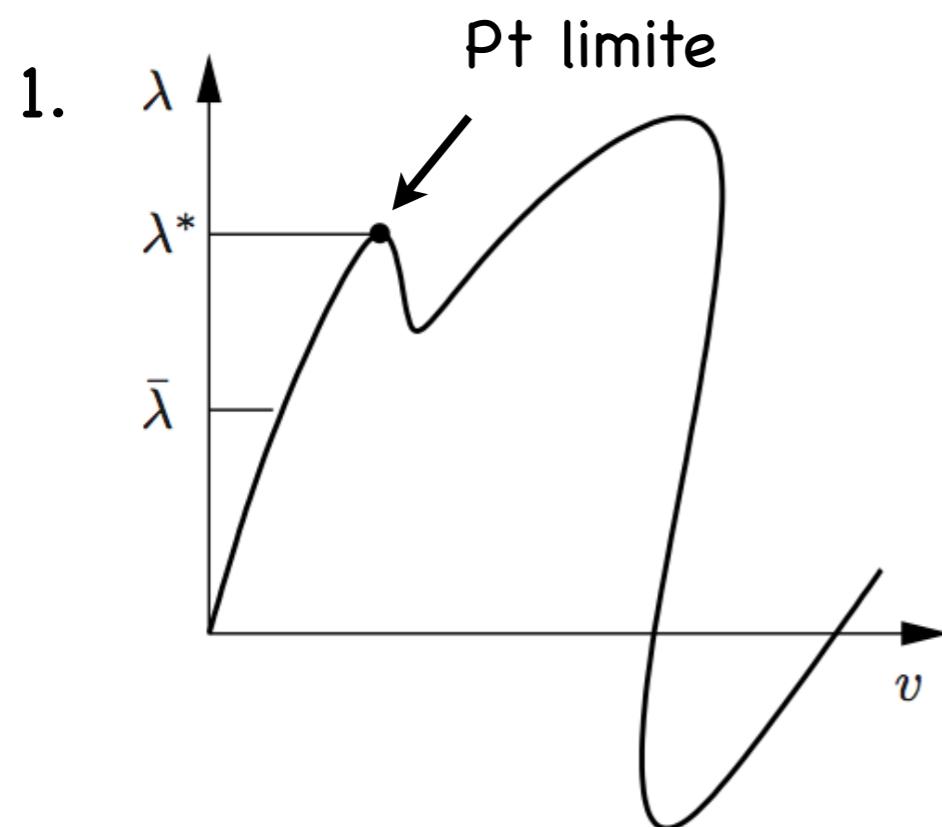
## 2.5.2 Algorithme de continuation :

1.	Initial values:	$\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_k$ and $\Delta s$
2.	Predictor step	$\mathbf{K}_{T0} \Delta \mathbf{v}_{P0} = \mathbf{P}$
3.	Compute load increment	$\lambda_0 = \lambda_k + \Delta\lambda_0 = \lambda_k \pm \frac{\Delta s}{\sqrt{(\Delta \mathbf{v}_{P0})^T \Delta \mathbf{v}_{P0}}}$
4.	Iteration loop $i = 0, 1, 2, \dots$	$\mathbf{K}_{Ti} \Delta \mathbf{v}_{Pi+1} = \mathbf{P}$ $\mathbf{K}_{Ti} \Delta \mathbf{v}_{Gi+1} = -\mathbf{G}(\mathbf{v}_i, \lambda_i)$
5.	Compute increments	$\Delta\lambda_{i+1} = -\frac{f_i + \mathbf{f}_i^T \Delta \mathbf{v}_{Gi+1}}{f_{,\lambda_i} + \mathbf{f}_i^T \Delta \mathbf{v}_{Pi+1}}$ $\Delta \mathbf{v}_{i+1} = \Delta\lambda_{i+1} \Delta \mathbf{v}_{Pi+1} + \Delta \mathbf{v}_{Gi+1}$
6.	Update	$\lambda_{i+1} = \lambda_i + \Delta\lambda_{i+1}$ , $\mathbf{v}_{i+1} = \mathbf{v}_i + \Delta \mathbf{v}_{i+1}$
7.	Convergence test	$\ \mathbf{G}(\mathbf{v}_{i+1}, \lambda_{i+1})\  \leq \text{TOL} \implies \text{Stop}$ otherwise go to 4.

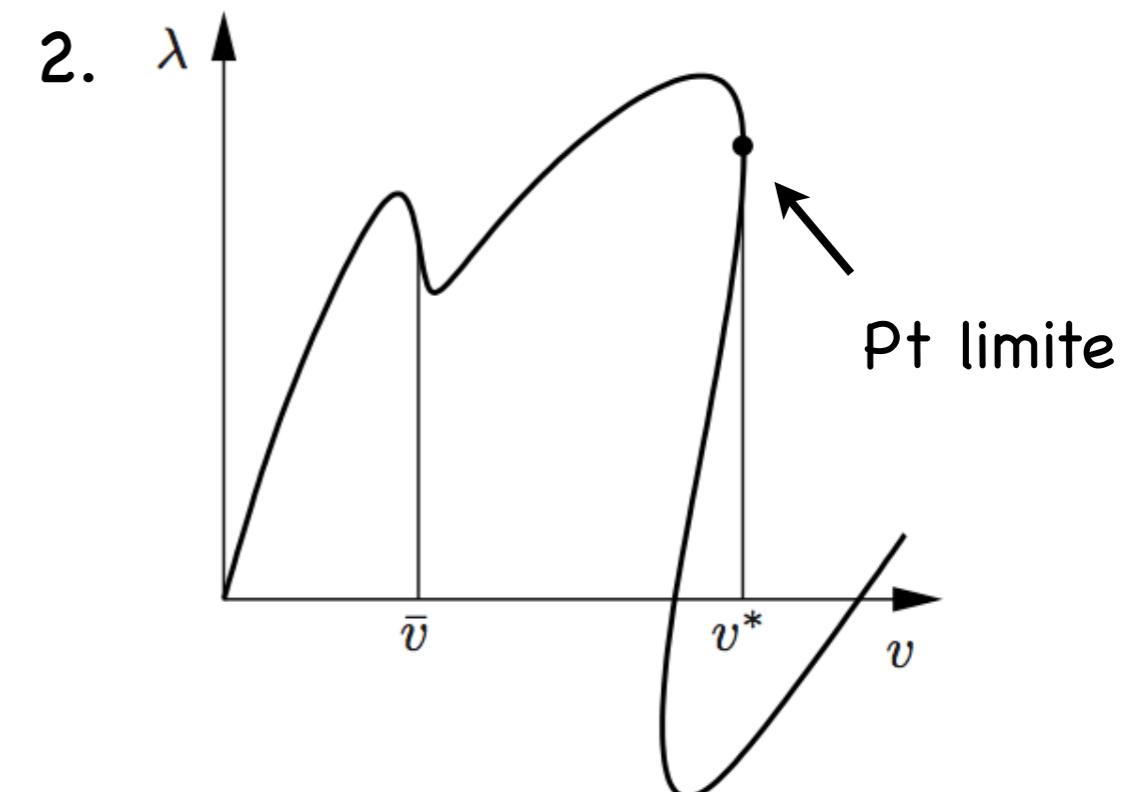
- Diffère de Newton classique car le paramètre de chargement est calculé par la condition  $f(\mathbf{v}, \lambda) = 0$  pour une longueur d'arc  $\Delta s$ .

## 2.5.3 Exemple de contraintes :

Nr.	Name	Constraint condition
1.	Load control	$f = \lambda - \bar{\lambda}$
2.	Displacement control BATOZ, DHATT (1979)	$f = v_A - \bar{v}$
3.	Arc-length method RIKS (1972)	$f = (\mathbf{v}_0 - \bar{\mathbf{v}})^T(\mathbf{v} - \mathbf{v}_0) + (\lambda_0 - \bar{\lambda})(\lambda - \lambda_0)$
4.	Arc-length method CRISFIELD (1981)	$f = \sqrt{(\mathbf{v} - \bar{\mathbf{v}})^T(\mathbf{v} - \bar{\mathbf{v}}) + (\lambda - \bar{\lambda})^2} - \Delta s$



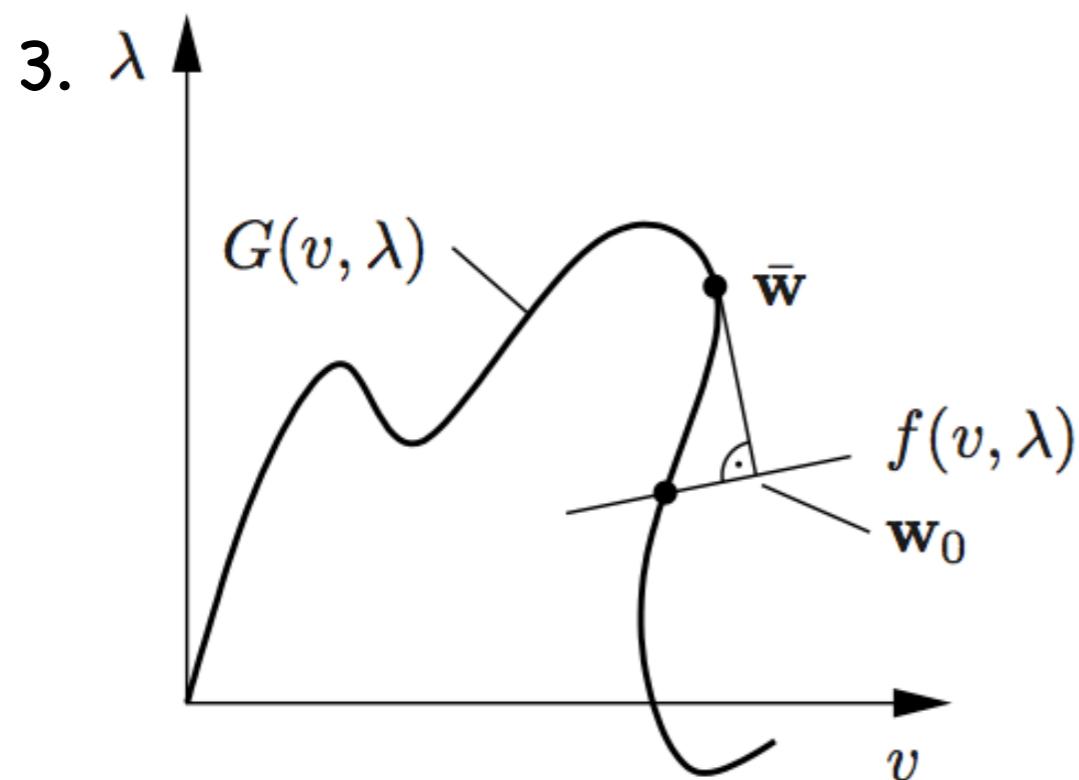
Contrôle en force (Newton classique)



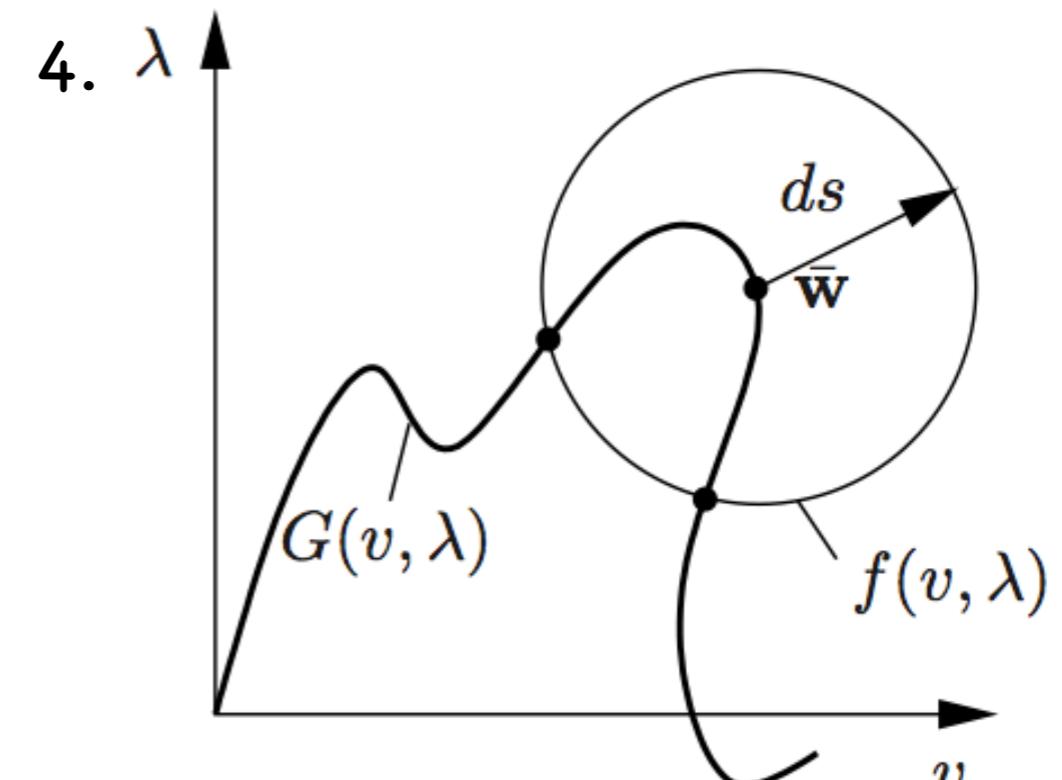
Contrôle en déplacement

## 2.5.3 Exemple de contraintes :

Nr.	Name	Constraint condition
1.	Load control	$f = \lambda - \bar{\lambda}$
2.	Displacement control BATOZ, DHATT (1979)	$f = v_A - \bar{v}$
3.	Arc-length method RIKS (1972)	$f = (\mathbf{v}_0 - \bar{\mathbf{v}})^T(\mathbf{v} - \mathbf{v}_0) + (\lambda_0 - \bar{\lambda})(\lambda - \lambda_0)$
4.	Arc-length method CRISFIELD (1981)	$f = \sqrt{(\mathbf{v} - \bar{\mathbf{v}})^T(\mathbf{v} - \bar{\mathbf{v}}) + (\lambda - \bar{\lambda})^2} - \Delta s$



Arc-length à plan normal



Arc-length à surface sphérique

# Résumé

- On a vu comment étendre la méthode itérative de Newton en 1D au cas d'un système NL de dimension N.
- Comme la convergence est plus sensible à N dimension, il peut être utile de réduire l'espace des solutions recherchées soit en minimisant une fonctionnelle  $\mathcal{E}(v, \bar{\lambda})$  dont le gradient est  $G(v, \lambda)$ , soit en utilisant une méthode globale de Newton amortie.
- Dans le cas où le chemin d'équilibre est trop complexe (pts limites ou pts de bifurcation), on peut avoir recours aux techniques de continuation qui recherche  $\lambda$  et  $v$  en fonction d'un paramètre de chemin  $\Delta s$ .

# Plan du cours

0. Introduction : La notion de non-linéarité.
1. Phénomènes non linéaires en mécaniques des solides.
2. Méthodes de calculs pour l'ingénieur.
3. Notion de calculs de stabilité.

### 3. Notions de calculs de stabilité

- En calcul de structures,  $G(v, \bar{\lambda}) = 0$  est le système d'équations d'équilibre statique et la fonctionnelle  $\mathcal{E}(v, \bar{\lambda})$  tel que  $G = \nabla \mathcal{E}$  est l'énergie mécanique du système.
- Une dernière étape spécifique aux calculs non linéaires de structures est de déterminer la stabilité des états d'équilibre  $(v, \lambda)$  en partie 2.
- Cette étape est cruciale car expérimentalement, seules les solutions stables peuvent être observées, étant donné qu'une petite perturbation infinitésimale (qui existe toujours expérimentalement) nous fait diverger d'un état d'équilibre instable.

### 3.1 Calculs de stabilité

- Une interprétation mécanique est que pour un état d'équilibre instable  $\mathbf{G}$ , il existe un état d'équilibre voisin  $\mathbf{N}$ , pour un même paramètre de chargement  $\lambda$ .
- En partant de l'état trivial  $\mathbf{G}^{(G)} = \mathbf{R}^{(G)} - \lambda \mathbf{P} = 0$ , on peut calculer l'état voisin par une perturbation de l'état trivial, mathématiquement équivalente à la linéarisation du premier ordre :

$$\mathbf{K}_T^{(G)} \Delta \mathbf{v} = (\mathbf{R}^{(N)} - \lambda \mathbf{P})$$

- Or  $\mathbf{G}^{(N)} = \mathbf{R}^{(N)} - \lambda \mathbf{P}$  est aussi un équilibre donc  $\mathbf{G}^{(N)} = 0$  et on obtient :

$$\mathbf{K}_T^{(G)} \Delta \mathbf{v} = 0$$

- D'un point de vue mathématique, le passage par un point d'instabilité est synonyme de singularité de la matrice tangente  $\mathbf{K}_T$ . L'équation homogène  $\mathbf{K}_T^{(G)} \Delta \mathbf{v} = 0$  a des solutions non triviales, ou encore l'état d'équilibre devient instable, si  $\det(\mathbf{K}_T) = 0$ .

- Le calcul de  $\det(\mathbf{K}_T)$  peut être obtenu sans opérations additionnelles durant la factorisation de  $\mathbf{K}_T$  avec

$$\det(\mathbf{K}_T) = \prod_{i=1}^{ndds} \mathbf{D}_{ii}$$

où  $\mathbf{K}_T = \mathbf{L}^T \mathbf{D} \mathbf{L}$  et  $\mathbf{D}_{ii}$  est un élément de la matrice diagonale  $\mathbf{D}$ .

- La condition de stabilité peut également être exprimée par le problème aux valeurs propres :

$$(\mathbf{K}_T - \omega_j \mathbf{1}) \Phi_j = 0$$

où  $\omega_j$  et  $\Phi_j$  sont respectivement les valeurs et vecteurs propres de la  $j^{\text{ème}}$  solution.

- Finalement, les conditions de stabilité d'un état d'équilibre sont définies par les affirmations suivantes :

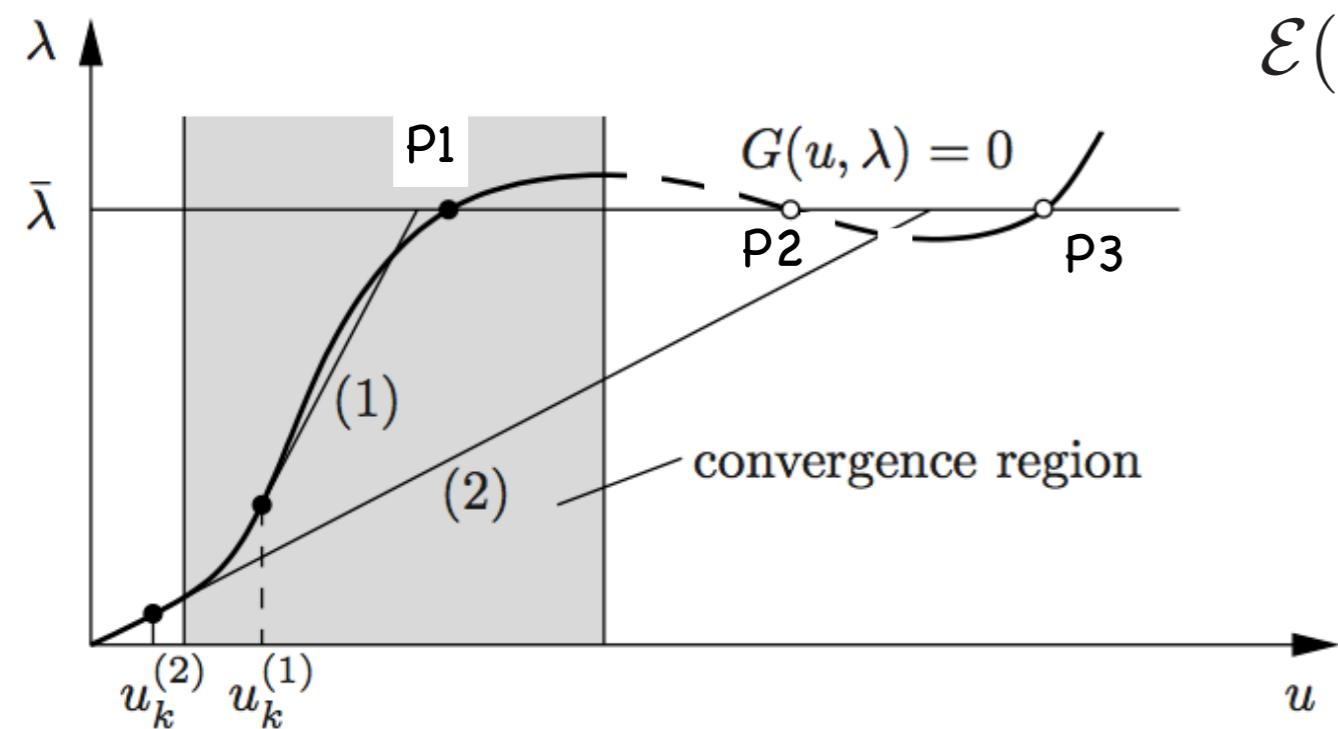
Tout  $\mathbf{D}_{ii} > 0$  (ou  $\omega_j > 0$ )  $\rightarrow \mathbf{K}_T$  def. pos. : équilibre stable

Au moins un  $\mathbf{D}_{ii} = 0$  (ou  $\omega_j = 0$ )  $\rightarrow \mathbf{K}_T$  semidef. pos. : équilibre indiférent

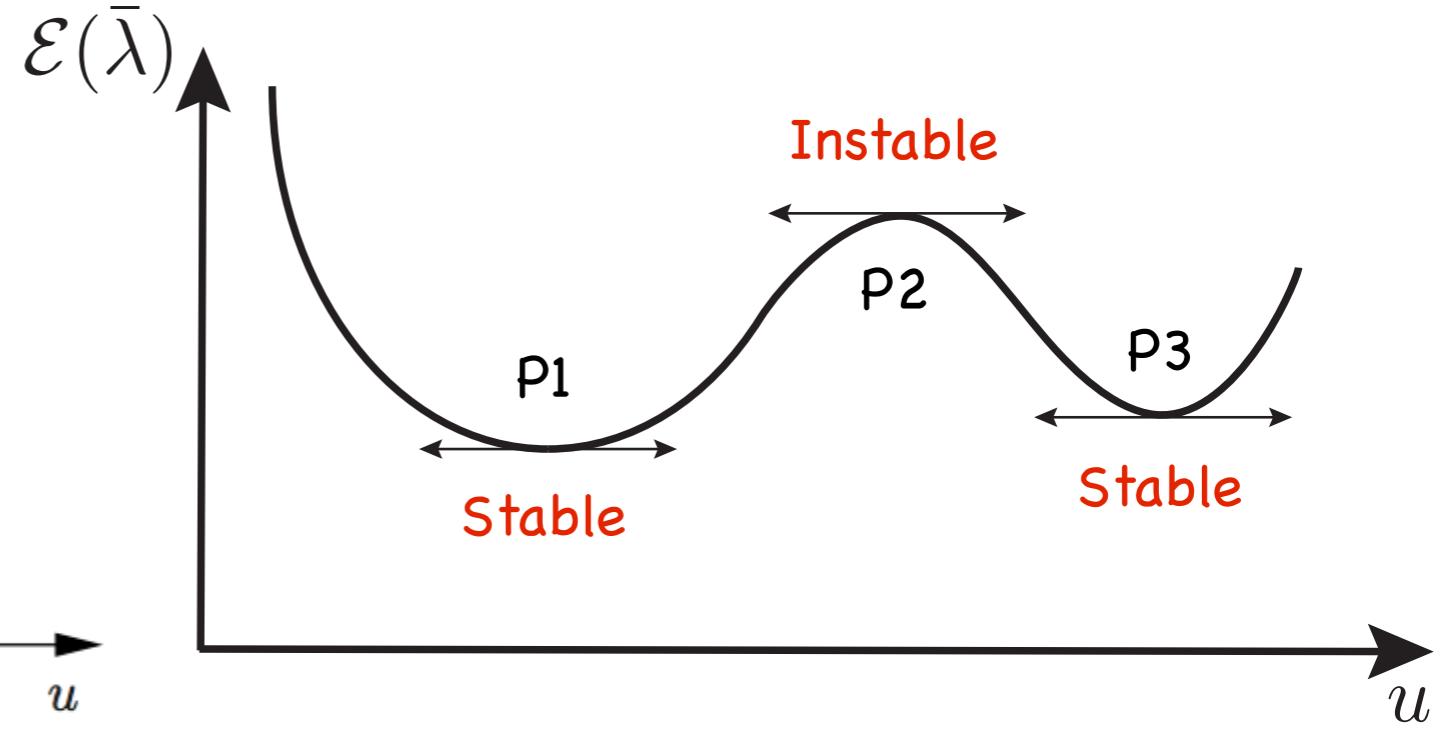
Au moins un  $\mathbf{D}_{ii} < 0$  (ou  $\omega_j < 0$ )  $\rightarrow \mathbf{K}_T$  def. neg. : équilibre instable

## 3.2 Lien avec l'énergie

- Si l'on associe l'énergie  $\mathcal{E}(v, \bar{\lambda})$  à l'état d'équilibre  $G(v, \bar{\lambda}) = 0$  tel que  $G = \nabla \mathcal{E}$ , on remarque que  $K_T = \nabla G = \nabla^2 \mathcal{E}$  est le Hessien de l'énergie.
- La condition de stabilité sur le signe du déterminant de  $K_T$  revient à savoir si le Hessien de l'énergie est défini positif ou négatif :
  - Si l'état d'équilibre est stable, le Hessien est défini positif et  $\mathcal{E}(v, \bar{\lambda})$  atteint un minimum local en  $(v, \bar{\lambda})$ .
  - Si l'état d'équilibre est instable, le Hessien est défini négatif et  $\mathcal{E}(v, \bar{\lambda})$  atteint un maximum local en  $(v, \bar{\lambda})$ .



Pts fixes du système non linéaire



Minimisation de la fonctionnelle associée

# Objectifs du cours

- Comprendre la notion de non-linéarité. ✓
- Connaître les différentes sources de non-linéarités en calculs de structures. ✓
- Connaître les différentes méthodes en calculs de structures non linéaires. ✓
- Avoir des notions en calcul de stabilité d'équilibres. ✓
- Savoir appliquer ces méthodes de calculs (But des TPs).