TD 2 : Hyperélasticité

Exercice 1 : Traction en déformations planes

On considère la transformation **uniforme** d'un bloc en déformations planes soumis à une traction unixiale dans la direction $\underline{e}_1$. On se propose de trouver la délation entre la contrainte appliquée et la déformation du bloc pour différentes lois de comportement.

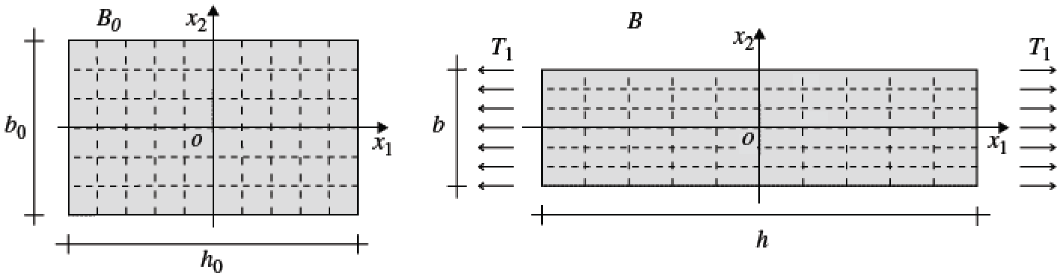

FIGURE 1 – Extension d'un bloc : configuration de initiale (à gauche) et déformée.

1. Donner l'expression de la transformation $\underline{x} = \underline{f}(\underline{x}_0)$, et calculer le gradient de la transformation, F, le tenseur des dilatations de Cauchy C, le tenseur des déformation de Green-Lagrange E, et U.
2. Calculer la dilatation dans une direction inclinée d'un angle θ_0 par rapport à $\underline{e}_1$ dans la configuration initiale.
3. On suppose que la matériau soit **incompressible**. En utilisant un modèle constitutif de type *neo-Hookéen*, déterminer l'expression des contraintes de Cauchy σ en fonction de h/h_0. En utilisant les équations d'équilibre, déterminer le lien entre σ_{11} et h/h_0. Déterminer σ_{33}. Repeter l'analyse pour une lois de comportement de *Mooney-Rivlin*. Calculer le premier et le second tenseurs des contraintes de Piola-Kirchhoff S et T.
4. On suppose que la matériau soit **compressible**. En utilisant la lois de comportement de Kirchhoff-Saint Venant, répéter l'analyse de la question précédente et montrer que

$$b^2/b_0^2 = 1 + \frac{\nu}{1-\nu}(1 - h^2/h_0^2)$$

et qu'il existe une valeur citrique de la dilatation axiale à parte de la quelle $b < 0$. Que peut-on en déduire ?