

5AG07 — Introduction aux calculs non linéaires de structures par éléments finis

Déversement d'une poutre rectangulaire

Projet

S. Brisard

C. Maurini

Jeudi 13 décembre 2018

Le déversement est une instabilité susceptible d'affecter une poutre en flexion. L'objectif de ce projet est de mettre en évidence ce phénomène dans le cas d'une poutre droite, rectangulaire. La poutre est ici vue comme un milieu continu tridimensionnel.

Ce document est mis à disposition selon les termes de la licence [Creative Commons Attribution 4.0 International](#).

On considère une poutre en flexion dans le plan vertical. Pour simplifier, on suppose que le moment fléchissant est positif en tout point, de sorte que la fibre supérieure de la poutre est partout comprimée. Ces contraintes de compression sont susceptibles de déclencher une instabilité, au cours de laquelle la fibre comprimée flambe hors du plan de flexion de la poutre. Il en résulte une rotation des sections droites autour de l'axe de la poutre, et donc une translation de la fibre tendue dans la direction opposée (voir figure 1 ci-après).

Il est possible de décrire le déversement dans le cadre de la théorie classique des poutres. Il apparaît du fait des couplages entre les déplacements transverses d'un point quelconque de la poutre induits *i.* par la translation de la fibre de référence et *ii.* par la rotation de torsion des sections droites¹.

On se propose de mettre en évidence ce phénomène par un calcul aux éléments finis, la poutre étant ici vue comme un milieu continu tridimensionnel. On considère une poutre de section rectangulaire $b \times h$, encastree en son extrémité $x = 0$, et soumise à un couple $\Gamma \vec{e}_y$ en son extrémité $x = L$ (voir figure 2). La solution fondamentale du problème d'équilibre est telle que la poutre est en flexion circulaire (le moment fléchissant M_y est partout égal à Γ).

Le matériau constitutif de la poutre obéit à une loi élastique de type Kirchhoff–Saint-Venant (E : module d'Young ; ν : coefficient de Poisson).

Question 1. *Le problème ainsi défini est-il bien posé ? Comment proposez-vous de compléter les conditions aux limites ?*

Question 2. *La solution de Saint-Venant s'applique-t-elle ici ? Pourquoi ?*

Question 3. *Écrire l'énergie potentielle totale du système. Mettre l'expression obtenue sous forme adimensionnelle. Comment obtient-on les équations de l'équilibre élastique ? Montrer que l'on obtient*

1. S.P. Timoshenko and J.M. Gere, *Theory of Elastic Stability*, chap. 6.

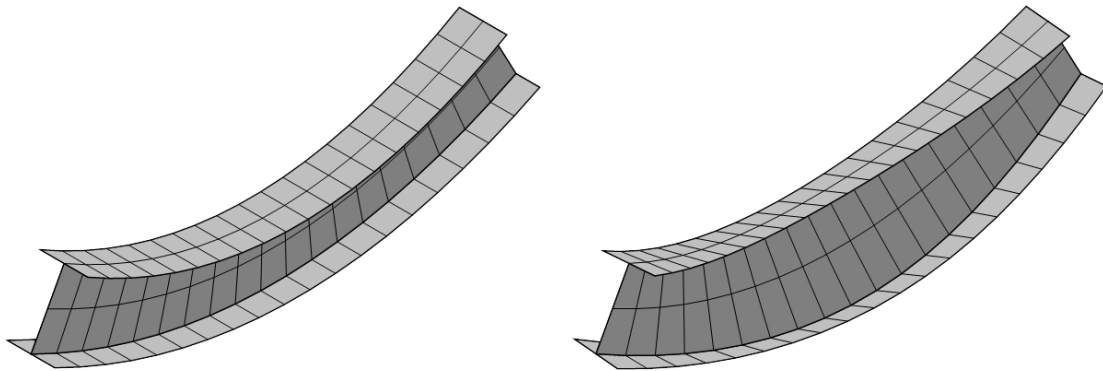


Fig. 1 : Illustration du déversement. Une poutre en I est fléchie dans le plan vertical (gauche). La fibre supérieure est tendue, elle risque donc de flamber. Ses déplacements dans le plan vertical sont empêchés par le reste de la poutre. Le flambement de la fibre comprimée se produit donc dans un plan horizontal (droite). Du fait de la rotation des sections droites, la fibre tendue se déplace alors dans la direction opposée.

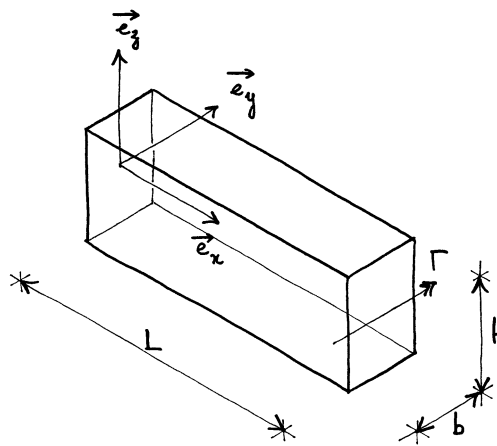


Fig. 2 : La poutre de section rectangulaire à étudier. L'extrémité $x = 0$ est encastée, tandis que l'extrémité $x = L$ est soumise à un couple Γ d'axe \vec{e}_y .

un problème variationnel non-linéaire. À quelle(s) condition(s) la (les) position(s) d'équilibre sont-elles stables ?

Question 4. En implémentant la formulation variationnelle du problème aux limites précédent dans FEniCS, déterminer la configuration d'équilibre de la poutre (branche fondamentale).

Question 5. Représenter graphiquement la déformée de la fibre moyenne. Les résultats obtenus sont-ils en accord avec ceux de la théorie des poutres ? Commenter.

Question 6. En linéarisant les équations d'équilibre au voisinage de la branche fondamentale ainsi mise en évidence, analyser la stabilité de ces équilibres.

Question 7. On note I_y , I_z et J les inerties de flexion d'axe y et z et l'inertie de torsion de la poutre. Dans le cadre de la théorie des poutres, on montre que la charge critique Γ_{cr} est proportionnelle à Γ_E , avec

$$\Gamma_E = \frac{\pi}{L} \sqrt{EI_z G J} \quad \text{avec} \quad G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (1)$$

En faisant varier les paramètres géométriques de la poutre, montrer que cette loi est bien vérifiée. Représenter graphiquement la courbe $\Gamma_E \mapsto \Gamma_{cr}$.