

## CONTRÔLE DU PROGRAMME D'APPROFONDISSEMENT DE MÉCANIQUE

du Lundi 5 Décembre 2011

## Modélisation et Calcul des Structures Élancées - MEC553

*Sujet proposé par Patrick Ballard**Durée : 3 heures (9h00-12h00)*

\* \* \*

## Problème (13 points)

**Flambage en déversement d'une poutre  
de section rectangulaire sollicitée en flexion pure**

On considère un cylindre de section rectangulaire, dont la longueur sera notée  $l$ . On fera usage d'un repère cartésien orthonormé  $Oxyz$ , où l'origine  $O$  est placée au centre d'une des sections d'extrémité, l'axe  $Ox$  suivant le lieu des centres de toutes les sections et les axes  $Oy$  et  $Oz$  suivant les directions des côtés des sections rectangulaires dont les longueurs respectives seront notées  $2a$  et  $2b$ . Les longueurs  $a$  et  $b$  seront toujours petites devant  $l$ , justifiant l'analyse des transformations de ce cylindre dans le cadre simplificateur de la théorie des poutres, la ligne moyenne étant choisie suivant  $Ox$ . Le matériau constitutif est élastique homogène et isotrope (module d'Young  $E$ , coefficient de Poisson  $\nu$ , module de cisaillement  $\mu = E/(2(1+\nu))$ ) du point de vue de sa loi de comportement tridimensionnelle et le modèle de poutre élastique sera donc supposé obéir à la loi de comportement *standard inextensible*. On notera  $\underline{I}$  le tenseur d'inertie géométrique de la section rectangulaire dans la configuration de référence et  $J$  son moment d'inertie de torsion.

On n'étudiera que des équilibres et les contributions de l'accélération aux équations du mouvement seront donc systématiquement négligées. Le chargement n'affectera que les extrémités de la poutre et la densité linéique d'effort extérieur sera constamment prise nulle dans tout le problème.

**I. Étude de la flexion pure infinitésimale.**

Dans cette partie, on étudie l'équilibre de la poutre en transformation infinitésimale à partir de l'état naturel (TIEN) lorsqu'elle soumise à une sollicitation de *flexion pure* : l'extrémité aval ( $x = l$ ) est soumise à un torseur concentré  $[0, M_y e_y + M_z e_z]$  qui se réduit à un couple perpendiculaire à l'axe  $Ox$  (ligne moyenne dans la configuration de référence), l'extrémité amont ( $x = 0$ ) étant encastree (déplacement et rotation de cette extrémité de la ligne moyenne imposées nulles).

**I.1)** Vérifier que le problème d'équilibre considéré est isostatique et calculer la répartition de contrainte  $[\underline{R}_0(x), \underline{M}_0(x)]$  à l'équilibre.

**I.2)** Expliciter en fonction de  $a$  et  $b$ , la matrice dans la base  $(\underline{e}_y, \underline{e}_z)$ , du tenseur d'inertie géométrique  $\underline{I}$  de la section rectangulaire dans la configuration de référence.

**I.3)** Montrer que la déformée de la ligne moyenne est un arc de parabole contenu dans un plan dont on explicitera un vecteur normal. Inventorier tous les cas où cette normale est colinéaire à la direction du moment appliqué (flexion normale) et les cas où elle ne l'est pas (flexion déviée).

**I.4)** Expliciter l'hypothèse de la transformation infinitésimale en terme des données de chargement  $M_y$  et  $M_z$ . Montrer qu'à l'approximation consentie de transformation infinitésimale, l'arc de parabole que constitue la déformée de la ligne moyenne est indiscernable de son cercle<sup>1</sup> osculateur au sommet. Quelle est la flèche (distance du point milieu de la ligne moyenne à la droite joignant les extrémités) ?

**I.5)** On se place dans le cas où le couple appliqué est dirigé suivant  $\underline{e}_z$ . La déformée se trouve alors dans le plan  $Oxy$ . À longueur  $l$  fixée, et à quantité de matière fixée (le produit  $ab$  est donné), comment choisir  $a$  et  $b$  pour que la flèche soit aussi petite que possible ?

## II. Existence d'un flambage lors d'un essai de flexion normale.

Dans cette partie, on considère un cas de flexion normale comme à la question **I.5**). La possibilité d'amincir les sections pour augmenter la rigidité en flexion est limitée par l'apparition potentielle d'un flambage dit « en déversement » que l'on se propose maintenant d'étudier.

On envisage des conditions de réalisation de l'expérience de flexion normale légèrement modifiée par rapport à celles de la partie **I** :

- extrémité amont encastrée comme au **I**,
- en l'extrémité aval :
  - direction de la résultante des efforts extérieurs imposée selon  $\underline{e}_z$  ( $R_x(l) = R_y(l) = 0$ ),
  - composante suivant  $\underline{e}_z$  du déplacement de la ligne moyenne nulle ( $\xi_z = 0$ ),
  - rotation de la section imposée autour de la direction  $\underline{e}_z$  ( $\theta_x = \theta_y = 0$ ),
  - valeur imposée de la composante suivant  $\underline{e}_z$  du moment ( $M_z = C$ ).

Il est immédiat de vérifier que la solution de flexion normale en TIEN étudiée à la question **I.5**) est compatible avec ces nouvelles conditions aux limites, et la distribution de contrainte à l'équilibre dans le cadre d'analyse TIEN est donc :

$$[\underline{R}_0(x), \underline{M}_0(x)] = [\underline{0}, C \underline{e}_z].$$

L'étude de l'existence éventuelle d'un flambage se placera dans le cadre d'analyse de transformation infinitésimale autour de l'état précontraint (TIEP) défini par cette distribution de contrainte. On recherche un éventuel déplacement spontané  $\{\bar{\underline{\xi}}, \bar{\underline{\theta}}\}$  de l'équilibre autorisé dans ces conditions par les équations d'équilibre TIEP.

Ces équations (établies dans le chapitre 5 du cours) font intervenir le vecteur tangent  $\underline{T}$  à la configuration fléchie en arc de cercle (dont on notera  $r$  le rayon), ainsi que le tenseur d'inertie géométrique des sections dans cette configuration. L'ensemble de l'étude sera menée dans l'approximation consistant à confondre  $\underline{T}$  avec  $\underline{e}_x$  et le tenseur d'inertie des sections dans la configuration précontrainte avec  $\underline{I}$  qui est le tenseur d'inertie des sections dans la configuration

---

1. pour cette raison, la flexion pure est aussi appelée flexion circulaire.

rectiligne. Cette approximation consistant à négliger le changement de géométrie entre configuration naturelle et configuration précontrainte revient à rechercher la charge critique et le mode de bifurcation à un  $O(l/r)$  près.

**II.1)** Écrire l'ensemble des équations d'équilibre du cadre d'analyse TIEP et montrer que le seul déplacement de l'équilibre dans le plan  $Oxy$  (c'est-à-dire tel que  $\bar{\xi}_z \equiv 0$ ) autorisé par ces équations, est un déplacement identiquement nul.

**II.2)** Vérifier que la composante suivant  $\underline{e}_z$  de tout éventuel déplacement d'équilibre de la ligne moyenne hors du plan  $Oxy$  est gouvernée, dans le cadre d'analyse TIEP, par le problème aux limites :

$$\begin{aligned}\bar{\xi}_z'''' + \frac{2(1+\nu)C^2}{E^2 I_y J} \bar{\xi}_z'' &= 0, \\ \bar{\xi}_z(0) = \bar{\xi}_z'(0) = \bar{\xi}_z(l) = \bar{\xi}_z'(l) &= 0,\end{aligned}$$

où  $I_y$  désigne le moment principal d'inertie géométrique de la section suivant  $\underline{e}_y$ .

**II.3)** Montrer que la recherche d'un déplacement non nul spontané de l'équilibre se réduit à la résolution de l'équation :

$$\sin \frac{\omega l}{2} \left( \sin \frac{\omega l}{2} - \frac{\omega l}{2} \cos \frac{\omega l}{2} \right) = 0,$$

où l'on a posé :

$$\omega^2 = \frac{2(1+\nu)C^2}{E^2 I_y J}.$$

**II.4)** Quelle est la charge critique d'Euler pour ce problème de flambage ? On l'exprimera en fonction de  $E$ ,  $\nu$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $l$  et  $J$ .

**II.5)** Expliciter le mode de bifurcation correspondant en terme des fonctions  $\bar{\xi}_y$ ,  $\bar{\xi}_z$  et  $\theta_x$ . On le représentera dans le cas d'une poutre mince ( $b \ll a$ ) en faisant un schéma de la poutre flambée en vue de « dessus » (c'est-à-dire en la regardant suivant  $Oy$ ) et en représentant la ligne moyenne ainsi que la rotation des sections.

### III. Calcul de l'inertie de torsion $J$ de la section rectangulaire.

La valeur critique de  $C$  a été obtenue au **II.4**) en terme de l'inertie de torsion  $J$  de la section rectangulaire. La résolution complète du problème nécessite alors de pouvoir exprimer cette inertie de torsion  $J$  en terme des paramètres  $a$  et  $b$  caractérisant la géométrie de la section comme cela a été fait à la question **I.2)** pour les moments principaux d'inertie géométrique  $I_y$  et  $I_z$  : c'est donc l'objet de cette partie. À cet effet, on rappelle l'expression du moment d'inertie géométrique  $J$  en terme de la fonction de gauchissement en torsion  $\psi$  :

$$J = \int_{-a}^a \int_{-b}^b \left\{ y^2 + z^2 + y \frac{\partial \psi}{\partial z} - z \frac{\partial \psi}{\partial y} \right\} dy dz,$$

où la fonction de gauchissement  $\psi$  est l'unique solution (à une constante additive arbitraire

près) du problème de Neumann :

$$\left| \begin{array}{ll} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0, & \text{sur } ]-a, a[ \times ]-b, b[, \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} = z, & \text{en } y = \pm a, \\ \frac{\partial \psi}{\partial z} = -y, & \text{en } z = \pm b. \end{array} \right.$$

**III.1)** Vérifier que la fonction  $-yz + \sinh ky \sin kz$  est harmonique et satisfait les conditions aux limites en  $z = \pm b$  du problème de Neumann, pourvu que  $|k|$  soit nul ou égal à l'un quelconque des éléments d'une suite  $k_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) de réels strictement positifs, que l'on explicitera.

**III.2)** Montrer que la fonction :

$$\psi(y, z) = -yz + \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sinh k_n y \sin k_n z,$$

satisfait, de plus, les conditions aux limites requises en  $y = \pm a$ , pourvu que :

$$A_n = \frac{4(-1)^n}{b k_n^3 \cosh k_n a}.$$

**III.3)** En déduire<sup>2</sup> l'expression de  $J$  en fonction de  $a$  et  $b$  sous la forme de la somme d'une série. Donner une valeur approchée de  $J$  lorsque la section est un rectangle mince ( $b \ll a$ ).

**III.4)** À quelle condition portant sur  $I_y$ ,  $I_z$  et  $J$ , la charge critique d'Euler (calculée au **II.4**) est-elle atteinte lors d'une flexion pure infinitésimale (c'est-à-dire satisfaisant la condition trouvée au **I.4**) ? Montrer que cette condition est satisfaite dans le cas d'un ruban sollicité par un moment de flexion dans la direction de l'épaisseur ( $b \ll a$ ), mais ne l'est pas dans le cas d'une poutre à section carrée ( $a = b$ ).

---

2. on pourra avoir besoin de :  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$

## Exercice (7 points)

### Modes de flambage des polygones réguliers dans leur plan

On considère une poutre dont la configuration de référence naturelle de la ligne moyenne est un polygone régulier plan à  $n$  côtés, tous de longueur identique  $l$ . On s'intéressera plus particulièrement aux cas  $n = 3$  (triangle équilatéral) et  $n = 4$  (carré de côté  $l$ ). Il s'agit donc d'un modèle de poutre avec points anguleux (discontinuités du vecteur unitaire tangent<sup>3</sup> à la ligne moyenne) et sans extrémités. La poutre est supposée obéir à la loi de comportement standard *inextensible* (et donc en particulier aux liaisons internes de Navier-Bernoulli et d'inextensibilité). La direction orthogonale au plan contenant la ligne moyenne est supposée direction principale d'inertie géométrique de toutes les sections et la raideur (homogène) en flexion dans ce plan sera notée  $EI$ , comme à l'accoutumée.

La pesanteur étant négligée (les efforts extérieurs linéiques sont choisis identiquement nuls), le chargement se réduit à  $n$  forces ponctuelles, appliquées aux sommets du polygones, dont l'amplitude (commune à toutes les forces) est notée  $Q$ , et la direction, *supposée invariable* (charge morte), est celle de la bissectrice des deux côtés adjacents (voir figure 1).

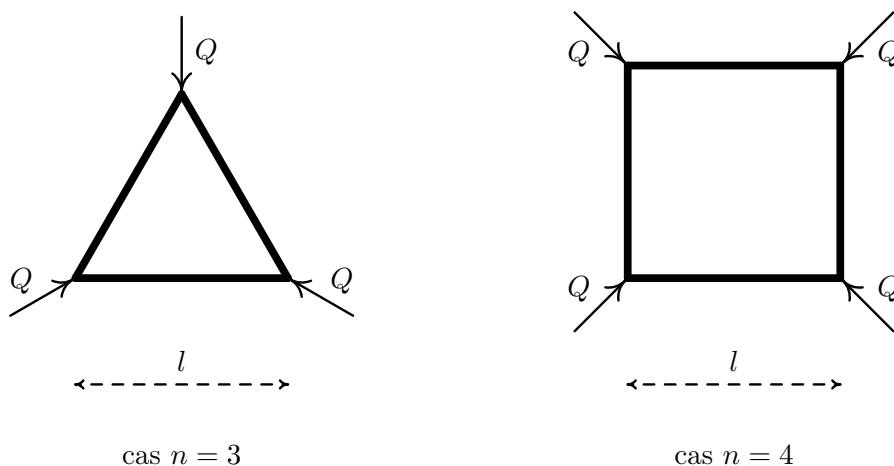


FIGURE 1 – Géométrie des problèmes d'équilibre.

On suppose que les seules transformations possibles de cet assemblage sont les transformations dans le plan<sup>4</sup>  $xOy$  contenant la ligne moyenne.

L'objectif de l'exercice est le calcul de la valeur de  $Q$ , critique vis-à-vis du flambage de l'assemblage dans le plan  $xOy$ .

#### I. Généralités.

Dans cette partie, on établit des résultats valables quel que soit le nombre  $n \geq 3$  de côtés du polygone.

---

3. pour un tel modèle de poutre, l'angle entre les directions du vecteur tangent de part et d'autre d'un point anguleux est invariant dans une transformation quelconque.

4. par exemple, parce que les sections étant très allongées suivant la direction orthogonale au plan, la raideur en flexion hors de ce plan est beaucoup plus grande que la raideur en flexion dans le plan.

On commence par analyser l'équilibre dans le cadre TIEN (transformation infinitésimale autour de l'état naturel). Comme d'habitude, le champ de contrainte fourni par l'analyse de l'équilibre en TIEN permettra ensuite d'étudier l'éventualité de déplacements spontanés de l'équilibre dans le cadre d'analyse TIEP (transformation infinitésimale autour de l'état précontraint), caractéristiques du phénomène de flambage. Les éventuelles configurations flambées seront décrites par la fonction  $\theta(S)$  exprimant l'angle de rotation autour de  $Oz$  de la section droite courante repérée par son abscisse curviligne  $S$ .

**I.1)** *Montrer que la configuration de référence indéformée, associée à une répartition de contrainte que l'on calculera, fournit l'unique solution (à un déplacement rigide d'ensemble près) du problème d'équilibre plan en TIEN.*

**I.2)** *Montrer que les équations d'équilibre en TIEP (où la précontrainte sera la répartition de contrainte calculée à la question précédente) induisent une équation différentielle pour la fonction  $\theta(S)$  que l'on explicitera.*

**I.3)** *En déduire que les modes de flambage éventuels du polygone sont tous associés à l'une des fonctions :*

$$\theta(S) = \Theta + C \sin\left(\frac{2(m+1)\pi}{nl}S + \varphi\right) \quad (1)$$

où  $m \in \mathbb{N}$  est un entier pour l'instant arbitraire,  $C \in \mathbb{R}$  est l'amplitude nécessairement arbitraire dans ce cadre d'analyse,  $\Theta$  une constante arbitraire s'identifiant à une rotation infinitésimale d'ensemble, et  $\varphi$  une phase pouvant toujours être prise nulle, quitte à changer l'origine des abscisses curvilignes.

## II. Flambage du carré.

**II.1)** *Dans le cas  $n = 4$ , déterminer la plus petite valeur de  $m$  telle que le déplacement de la ligne moyenne reconstruit à partir de la fonction  $\theta(S)$  définie par la formule (1) satisfasse la condition de périodicité requise.*

**II.2)** *En déduire la valeur critique de la compression axiale dans le carré, puis la charge critique d'Euler  $Q_c$  de ce problème de flambage. Dessiner la configuration flambée du carré dans le mode de bifurcation correspondant.*

## III. Flambage du triangle.

**III.1)** *Dans le cas  $n = 3$ , déterminer la plus petite valeur de  $m$  telle que le déplacement de la ligne moyenne reconstruit à partir de la fonction  $\theta(S)$  définie par la formule (1) satisfasse la condition de périodicité requise.*

**III.2)** *En déduire la valeur critique de la compression axiale dans le triangle, puis la charge critique d'Euler  $Q_c$  de ce problème de flambage. Dessiner la configuration flambée du triangle dans le mode de bifurcation correspondant.*

## Corrigé

### Problème

**I.1)** Les équations d'équilibre du cadre linéarisé TIEN s'écrivent :

$$\frac{d\underline{R}_0}{dx} = \underline{0}, \quad \frac{d\underline{M}_0}{dx} + \underline{e}_x \wedge \underline{R}_0 = \underline{0}.$$

Elles sont à compléter des conditions aux limites statiques :

$$-\underline{R}_0(0) = \underline{R}_0(l) = \underline{0}, \quad -\underline{M}_0(0) = \underline{M}_0(l) = M_y \underline{e}_y + M_z \underline{e}_z.$$

Le résultat est immédiat : le champ de torseur  $[\underline{R}_0(x), \underline{M}_0(x)]$  est constant et égal à sa valeur en l'extrémité aval  $x = l$  :

$$[\underline{R}_0(x), \underline{M}_0(x)] = [\underline{0}, M_y \underline{e}_y + M_z \underline{e}_z].$$

**I.2)** Le tenseur d'inertie géométrique de la section rectangulaire est défini par :

$$\underline{\underline{I}} = \int_S \|\underline{x}_\perp\|^2 \underline{\underline{1}}_2 - \underline{x}_\perp \otimes \underline{x}_\perp,$$

où  $\underline{\underline{1}}_2$  est le tenseur unité du plan  $Oyz$ . Le calcul est élémentaire :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{I}} &= \int_{-a}^a \int_{-b}^b \left\{ z^2 \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y - yz (\underline{e}_y \otimes \underline{e}_z + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_y) + y^2 \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z \right\} dy dz, \\ &= \frac{4ab^3}{3} \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y + \frac{4a^3b}{3} \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z. \end{aligned}$$

**I.3)** Le calcul de la déformée s'effectue à partir de la connaissance du champ de contrainte à l'équilibre et de la loi de comportement standard inextensible :

$$M_x = \mu J \frac{d\theta_x}{dx}, \quad \underline{M}_\perp = E \underline{\underline{I}} \cdot \frac{d\underline{\theta}_\perp}{dx}, \quad \frac{d\underline{\xi}}{dx} + \underline{e}_x \wedge \underline{\theta} = \underline{0}.$$

On en déduit dans un premier temps :

$$\underline{\theta}(x) = \frac{M_y}{EI_y} x \underline{e}_y + \frac{M_z}{EI_z} x \underline{e}_z + \underline{\theta}_0,$$

où  $I_y = 4ab^3/3$ ,  $I_z = 4a^3b/3$  sont les moments principaux d'inertie géométrique de la section et  $\underline{\theta}_0$  la constante d'intégration, puis :

$$\underline{\xi}(x) = \frac{M_z}{2EI_z} x^2 \underline{e}_y - \frac{M_y}{2EI_y} x^2 \underline{e}_z + \underline{\xi}_0 + \underline{\theta}_0 \wedge (x \underline{e}_x),$$

où les deux derniers termes sont respectivement une translation d'ensemble et une rotation infinitésimale d'ensemble. La condition d'encastrement à la limite amont implique enfin  $\underline{\xi}_0 = \underline{0}$  et  $\underline{\theta}_0 = \underline{0}$ .

La déformée de la ligne moyenne est un arc de parabole inscrit dans un plan de normale colinéaire au vecteur :

$$\frac{M_y}{EI_y} \underline{e}_y + \frac{M_z}{EI_z} \underline{e}_z.$$

Cette normale est colinéaire à la direction du moment appliqué si et seulement si le vecteur  $M_y \underline{e}_y + M_z \underline{e}_z$  est un vecteur propre de  $\underline{\underline{I}}^{-1}$ , ou bien de façon équivalente de  $\underline{\underline{I}}$ . Au final, la flexion est normale uniquement lorsque :

- la section est carrée et le moment appliqué est dans une direction quelconque du plan  $Oyz$ ,
- la section n'est pas carrée et le moment appliqué est colinéaire à l'une des directions des côtés du rectangle.

Dans tous les autres cas, la flexion est déviée.

**I.4)** L'hypothèse de la transformation infinitésimale s'écrit :

$$\left\| \frac{d\bar{\xi}}{dx} \right\| \ll 1, \quad \|\underline{\theta}\| \ll 1,$$

ce qui, dans la circonstance en jeu, s'explicite en :

$$\left| \frac{M_y l}{EI_y} \right| \ll 1, \quad \left| \frac{M_z l}{EI_z} \right| \ll 1,$$

où les quantités en jeu sont bien adimensionnelles.

On pose :

$$\begin{aligned} \underline{e}_h &= \left( \frac{M_y^2}{E^2 I_y^2} + \frac{M_z^2}{E^2 I_z^2} \right)^{-1/2} \left( \frac{M_z}{EI_z} \underline{e}_y - \frac{M_y}{EI_y} \underline{e}_z \right), \\ \underline{e}_{h'} &= \left( \frac{M_y^2}{E^2 I_y^2} + \frac{M_z^2}{E^2 I_z^2} \right)^{-1/2} \left( \frac{M_y}{EI_y} \underline{e}_y + \frac{M_z}{EI_z} \underline{e}_z \right), \end{aligned}$$

de sorte que  $(\underline{e}_x, \underline{e}_h, \underline{e}_{h'})$  est orthonormé direct et la déformée de la ligne moyenne est dans le plan  $Oxh$ , d'équation :

$$h = \frac{x^2}{2} \left( \frac{M_y^2}{E^2 I_y^2} + \frac{M_z^2}{E^2 I_z^2} \right)^{1/2} \left( +o\left( \left| \frac{M_y l}{EI_y} \right| + \left| \frac{M_z l}{EI_z} \right| \right) \right).$$

où la parenthèse rappelle que dans le cadre d'analyse TIEN, le champ de déplacement est obtenu *modulo* des termes d'ordres supérieurs en la transformation. Posant :

$$r = \left( \frac{M_y^2}{E^2 I_y^2} + \frac{M_z^2}{E^2 I_z^2} \right)^{-1/2},$$

on voit que cette équation se réécrit :

$$h = \frac{x^2}{2r} + l o(l/r),$$

équivalente à :

$$\frac{(h-r)^2}{2r} + \frac{x^2}{2r} = \frac{r^2}{2r} + l o(l/r),$$



qui est l'équation du cercle dans le plan  $Oxh$ , de centre  $(0, r)$  et de rayon  $r$ . La flèche  $f$  s'obtient alors par le théorème de Pythagore :

$$f = r - \sqrt{r^2 - l^2/4},$$

indiscernable à l'approximation consentie ( $l/r \ll 1$ ) de :

$$f = \frac{l^2}{8r} = \frac{l^2}{8} \left( \frac{M_y^2}{E^2 I_y^2} + \frac{M_z^2}{E^2 I_z^2} \right)^{1/2}.$$

**I.5)** Dans le cas de la flexion circulaire dans le plan  $Oxy$ , la flèche se réduit à :

$$f = \frac{l^2}{8EI_z} |M_z| = \frac{3l^2}{32Ea^3b} |M_z|,$$

qui, à longueur  $l$  fixée et à quantité de matière employée fixée (le produit  $ab$  est donné), est d'autant plus petite que  $a$  est grand : pour diminuer la flèche, il faut amincir la section rectangulaire dans la direction du moment appliqué.

**II.1)** Dans la circonstance en jeu (poutre obéissant à la loi de comportement standard inextensible de précontrainte  $[\underline{R}_0, \underline{M}_0] = [\underline{0}, C \underline{e}_z]$ ), l'ensemble des équations du cadre d'analyse TIEP s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{d\underline{R}}{dS} &= \underline{0}, & \frac{d\underline{M}}{dS} + \underline{T} \wedge \underline{R} &= \underline{0}, & \frac{d\bar{\xi}}{dS} + \underline{T} \wedge \underline{\theta} &= \underline{0}, \\ M_T &= \underline{T} \cdot \left( \underline{\theta} \wedge (C \underline{e}_z) \right) + \mu J \underline{T} \cdot \frac{d\theta}{dS}, & \underline{M}_\perp &= C \underline{e}_z + \left( \underline{\theta} \wedge (C \underline{e}_z) \right)_\perp + EI' \cdot \left( \frac{d\theta}{dS} \right)_\perp, \\ \bar{\xi}(0) &= \underline{0}, & \underline{\theta}(0) &= \underline{0}, \\ R_x(l) &= R_y(l) = 0, & \bar{\xi}_z(l) &= 0, & \theta_x(l) &= \theta_y(l) = 0, & M_z(l) &= C, \end{aligned}$$

où  $I'$  est le tenseur d'inertie des sections dans la configuration fléchie. On vérifie sur ces équations que l'approximation consistant à confondre les géométries des configurations rectilignes et fléchies, revient à négliger des  $O(l/r)$  devant 1 dans certains coefficients de ces équations différentielles linéaires. Dans cette approximation, ces équations se réécrivent :

$$\begin{aligned} \frac{d\underline{R}}{dx} &= \underline{0}, & \frac{d\underline{M}}{dx} + \underline{e}_x \wedge \underline{R} &= \underline{0}, & \frac{d\bar{\xi}}{dx} + \underline{e}_x \wedge \underline{\theta} &= \underline{0}, \\ M_x &= C \theta_y + \mu J \frac{d\theta_x}{dx}, & M_y &= -C \theta_x + EI_y \frac{d\theta_y}{dx}, & M_z &= C + EI_z \frac{d\theta_z}{dx}, \\ \bar{\xi}(0) &= \underline{0}, & \underline{\theta}(0) &= \underline{0}, \\ R_x(l) &= R_y(l) = 0, & \bar{\xi}_z(l) &= 0, & \theta_x(l) &= \theta_y(l) = 0, & M_z(l) &= C. \end{aligned}$$

En composantes, on obtient :

$$\begin{aligned} R'_x &\equiv 0, & R'_y &\equiv 0, & R'_z &\equiv 0, \\ M'_x &\equiv 0, & M'_y - R_z &\equiv 0, & M'_z + R_y &\equiv 0, \\ M_x &\equiv C \theta_y + \mu J \theta'_x, & M_y &\equiv -C \theta_x + EI_y \theta'_y, & M_z &\equiv C + EI_z \theta'_z, \\ \bar{\xi}'_x &\equiv 0, & \bar{\xi}'_y &\equiv 0, & \bar{\xi}'_z &\equiv -\theta_y, \\ \bar{\xi}_x(0) &= \bar{\xi}_y(0) = \bar{\xi}_z(0) = 0, & \theta_x(0) &= \theta_y(0) = \theta_z(0) = 0, & R_x(l) &= R_y(l) = 0, \\ \bar{\xi}_z(l) &= 0, & \theta_x(l) &= \theta_y(l) = 0, & M_z(l) &= C. \end{aligned}$$

On élimine alors systématiquement les efforts au profit des inconnues cinématiques. On obtient alors :

$$\bar{\xi}_x' \equiv 0, \quad \bar{\xi}_x(0) = 0,$$

qui entraîne  $\bar{\xi}_x \equiv 0$ , puis :

$$\theta_z'' \equiv 0, \quad \theta_z(0) = 0, \quad \theta_z'(l) = 0,$$

qui entraîne  $\theta_z \equiv 0$ , puis  $\bar{\xi}_y \equiv 0$ . Il reste alors le système :

$$\mu J \theta_x'' + C \theta_y' = 0, \tag{2}$$

$$EI_y \theta_y''' - C \theta_x'' = 0, \tag{3}$$

$$\bar{\xi}_z' = -\theta_y, \tag{4}$$

$$\theta_x(0) = \theta_y(0) = \theta_x(l) = \theta_y(l) = 0, \tag{5}$$

$$\bar{\xi}_z(0) = \bar{\xi}_z(l) = 0,$$

qui n'admet de solution non identiquement nulle que si le système de départ en admet une.

Si  $\bar{\xi}_z \equiv 0$ , on voit que  $\theta_y \equiv 0$  par la liaison de Navier-Bernoulli (4) et  $\theta_x \equiv 0$  par l'équation (2). Dans ce cas, le seul déplacement d'équilibre autorisé par les équations TIEP est le déplacement identiquement nul.

**II.2)** Éliminant  $\theta_x$  dans les équations (2) et (3), on obtient l'équation :

$$EI_y \theta_y''' + \frac{C^2}{\mu J} \theta_y' = 0,$$

où la fonction inconnue  $\theta_y$  est astreinte aux conditions aux limites  $\theta_y(0) = \theta_y(l) = 0$ . Éliminant alors  $\theta_y$  au profit de  $\bar{\xi}_z$ , il vient :

$$EI_y \bar{\xi}_z'''' + \frac{C^2}{\mu J} \bar{\xi}_z'' = 0,$$

$$\bar{\xi}_z(0) = \bar{\xi}_z'(0) = \bar{\xi}_z(l) = \bar{\xi}_z'(l) = 0,$$

qui est bien le système attendu compte-tenu de l'expression du module de cisaillement  $\mu$  en terme du module d'Young et du coefficient de Poisson.

**II.3)** La solution générale de l'équation différentielle portant sur  $\bar{\xi}_z$  s'écrit :

$$\bar{\xi}_z(x) = A \cos \omega x + B \sin \omega x + C x + D,$$

pour quatre constantes réelles arbitraires  $A, B, C, D$ . Les conditions à la limite  $x = 0$  sont  $\bar{\xi}_z(0) = \bar{\xi}_z'(0) = 0$  et exigent :

$$D = -A, \quad C = -\omega B.$$

Les conditions à la limite  $x = l$  ( $\bar{\xi}_z = \bar{\xi}_z'(l) = 0$ ) sont alors équivalentes au système :

$$\begin{aligned} A (\cos \omega l - 1) + B (\sin \omega l - \omega l) &= 0, \\ -A \sin \omega l + B (\cos \omega l - 1) &= 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Au final, un déplacement spontané de l'équilibre est permis par les équations d'équilibre du cadre d'analyse TIEP si et seulement si le déterminant de ce système linéaire est nul, ce qui s'écrit :

$$2 - 2 \cos \omega l - \omega l \sin \omega l = 0,$$

qui est équivalent à :

$$\sin \frac{\omega l}{2} \left( \sin \frac{\omega l}{2} - \frac{\omega l}{2} \cos \frac{\omega l}{2} \right) = 0.$$

**II.4)** Les valeurs de  $\omega l/2 > 0$  solutions de l'équation précédente sont :

$$\frac{\omega l}{2} = (n+1)\pi, \quad n \in \mathbb{N},$$

ainsi que les racines strictement positive de l'équation transcendante  $\tan x = x$ . La plus petite de toutes ces solutions est  $\pi$ , de sorte que la charge critique d'Euler de ce problème de flambage est donnée par  $\omega = 2\pi/l$ , soit :

$$C_c = \frac{\pi E}{l} \sqrt{\frac{2I_y J}{1+\nu}} = \frac{2\pi E}{l} \sqrt{\frac{2ab^3 J}{3(1+\nu)}}. \quad (7)$$

**II.5)** Pour  $\omega l = 2\pi$ , les solutions non-triviales du système linéaire (6) sont toutes telles que  $B = 0$ , de sorte que le mode de bifurcation s'écrit :

$$\bar{\xi}_z(x) = K \left( 1 - \cos \frac{2\pi x}{l} \right), \quad (K \in \mathbb{R}).$$

L'équation (4) donne alors  $\theta_y$  :

$$\theta_y(x) = -\frac{2\pi K}{l} \sin \frac{2\pi x}{l}.$$

Par l'équation (2), on obtient ensuite :

$$\theta_x''(x) = \frac{2(1+\nu)C_c}{EJ} \frac{4\pi^2 K}{l^2} \cos \frac{2\pi x}{l},$$

qui, en utilisant les équations (5), puis (7), se simplifie en :

$$\theta_x(x) = \frac{4\pi K}{l} \sqrt{\frac{2ab^3(1+\nu)}{3J}} \left( 1 - \cos \frac{2\pi x}{l} \right).$$

Ce mode de flambage couple torsion et flexion dans le plan  $Oxz$ . La configuration flambée de la poutre est représentée en « vue de dessus » (suivant  $Oy$ ) sur la figure 2.

**III.1)** La fonction  $-yz$  est de toute évidence harmonique et satisfait également la condition à la limite en  $z = \pm b$ . La fonction  $\sinh ky \sin kz$  est, elle-aussi, de toute évidence harmonique pour tout  $k \in \mathbb{R}$ . Sa dérivée partielle par rapport à  $z$  s'annule en  $z = \pm b$  si et seulement si  $k = 0$  ou bien :

$$\pm k = k_n \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\pi(2n+1)}{2b}, \quad (n \in \mathbb{N}).$$

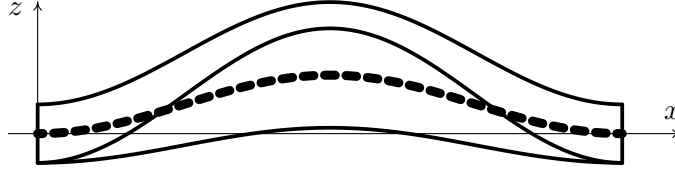


FIGURE 2 – Mode de flambage en déversement représenté en « vue de dessus ».

**III.2)** Commençons par supposer la décroissance de la suite  $|A_n|$  par rapport à  $n$ , suffisamment rapide pour assurer que l'on puisse permuter le signe  $\sum$  avec la prise de dérivées partielles jusqu'à l'ordre 2. La fonction proposée est alors harmonique et satisfait les conditions aux limites en  $z = \pm b$ . On a alors également :

$$\frac{\partial \psi}{\partial y}(y, z) = -z + \sum_{n=0}^{\infty} k_n A_n \cosh k_n y \sin k_n z,$$

et les conditions aux limites en  $y = \pm a$  seront satisfaites si et seulement si :

$$2z = \sum_{n=0}^{\infty} k_n A_n \cosh k_n a \sin k_n z, \quad (8)$$

pour  $z \in [-b, b]$ .

Justifions qu'il existe une identité de la forme (8) pour une certaine suite  $A_n$ . La fonction :

$$\begin{cases} ]-b, b[ & \rightarrow \mathbb{R} \\ z & \mapsto 2z \cos \frac{\pi z}{2b} \end{cases}$$

est impaire et de carré intégrable. Elle admet donc un développement en série de Fourier de la forme :

$$2z \cos \frac{\pi z}{2b} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \sin \frac{n\pi z}{b},$$

la série convergeant simplement dans  $] -b, b[$  ainsi qu'au sens de la norme de  $L^2(-b, b)$ . De même :

$$2z \sin \frac{\pi z}{2b} = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \cos \frac{n\pi z}{b}.$$

Multipliant la première de ces identités par  $\cos \pi z/(2b)$ , la deuxième par  $\sin \pi z/(2b)$ , et prenant la somme, on obtient l'existence d'un développement de la forme (8), où  $k_n A_n \cosh k_n a = \alpha_n + \beta_n$ .

Pour calculer les coefficients  $A_n$ , on multiplie l'identité (8) par  $\sin k_m z$  et on intègre sur  $[-b, b]$ . Il vient :

$$\int_{-b}^b 2z \sin k_m z \, dz = k_m A_m b \cosh k_m a,$$

qui donne bien :

$$A_m = \frac{4(-1)^m}{b k_m^3 \cosh k_m a}.$$

Ces valeurs de  $A_n$  assurent la convergence uniforme sur  $[-a, a] \times [-b, b]$  de la série définissant  $\psi$  ainsi que celles des dérivées partielles par rapport à  $y$  et par rapport à  $z$ , ce qui justifie *a posteriori* les calculs menés.

**III.3)** Le moment d'inertie de torsion se calcule en injectant l'expression de la fonction de gauchissement en torsion :

$$\psi(y, z) = -yz + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{b k_n^3 \cosh k_n a} \sinh k_n y \sin k_n z,$$

dans :

$$J = \int_{-a}^a \int_{-b}^b \left\{ y^2 + z^2 + y \frac{\partial \psi}{\partial z} - z \frac{\partial \psi}{\partial y} \right\} dy dz.$$

Il vient :

$$J = \int_{-a}^a \int_{-b}^b \left\{ 2z^2 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{b k_n^2 \cosh k_n a} \left[ y (\sinh k_n y) (\cos k_n z) - (\cosh k_n y) z (\sin k_n z) \right] \right\} dy dz.$$

La série convergeant uniformément sur  $[-a, a] \times [-b, b]$ , on peut permuter les signes  $\int$  et  $\sum$ . On obtient :

$$\begin{aligned} J &= \frac{8ab^3}{3} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{16}{b k_n^2 \cosh k_n a} \left[ \frac{a \cosh k_n a}{k_n^2} - \frac{2 \sinh k_n a}{k_n^3} \right], \\ &= \frac{8ab^3}{3} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{16a}{b k_n^4} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{32 \tanh k_n a}{b k_n^5}. \end{aligned}$$

Utilisant :

$$k_n = \frac{\pi(2n+1)}{2b}, \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96},$$

l'expression finale du moment d'inertie de torsion est :

$$J = 16ab^3 \left\{ \frac{1}{3} - \frac{b}{a} \frac{64}{\pi^5} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tanh \frac{\pi(2n+1)a}{2b}}{(2n+1)^5} \right\} = 16ab^3 \left\{ \frac{1}{3} + O(b/a) \right\}.$$

Dans le cas où la poutre est un ruban mince ( $b \ll a$ ), on a donc :

$$J \simeq \frac{16ab^3}{3}.$$

**III.4)** On a établi au **I.4)** que l'analyse de la flexion pure relevait de l'hypothèse de la transformation infinitésimale pourvu que :

$$\frac{Cl}{EI_z} \ll 1.$$

Comme le calcul de l'état précontraint a été mené sous cette hypothèse (cette hypothèse a, de plus, été réutilisée pour confondre la configuration précontrainte avec la configuration rectiligne), on ne peut conclure à l'existence d'un flambage en déversement que si la charge critique

d'Euler calculée est compatible avec l'hypothèse de transformation infinitésimale sous laquelle la précontrainte a été calculée. Revenant à la formule (7), cela exige :

$$\frac{I_y J}{I_z^2} \ll 1.$$

Dans le cas où la poutre est un ruban mince ( $b \ll a$ ),  $J \simeq 16ab^3/3$  et la condition ci-dessus se réécrit :

$$\frac{a^2 b^6}{a^6 b^2} \ll 1,$$

et est donc acquise : le flambage en déversement se produit dans le domaine de la flexion pure *infinitésimale*.

Dans le cas d'une poutre à section carrée,  $J = Ca^4$  où  $C$  est une constante réelle de l'ordre de 1. La condition ci-dessus n'est pas satisfaite et il n'y a pas de flambage en déversement dans le domaine de la flexion pure infinitésimale. L'analyse menée est inapte à prédire si un tel flambage apparaît ou non dans le cas d'une flexion finie.

## Exercice

**I.1)** La configuration de référence indéformée est associée au choix  $\theta \equiv 0$  (à une constante additive arbitraire près s'interprétant comme une rotation infinitésimale d'ensemble). Par la loi de comportement standard inextensible, on a :

$$M_z = EI \theta',$$

qui donne  $M_z \equiv 0$ . Tirant alors les conséquences pour les composantes de contrainte associées à l'équilibre plan de l'équation d'équilibre linéarisée dans chaque portion rectiligne de la poutre :

$$\frac{d\underline{R}}{dS} = \underline{0}, \quad \frac{d\underline{M}}{dS} + \underline{T} \wedge \underline{R} = \underline{0},$$

on constate d'abord que le vecteur  $\underline{R}$  est constant dans chaque portion rectiligne, puis que l'effort tranchant y est nul, et donc que la contrainte se réduit à un effort normal homogène  $[\underline{R}_0, \underline{M}_0] = [-N\underline{T}, \underline{0}]$  dans chaque portion rectiligne de la poutre.

Il reste à écrire l'équilibre de chaque sommet du polygone. La projection de l'équilibre des résultantes sur la direction orthogonale à la force extérieure exige que les compressions dans deux côtés adjacents soient identiques. La projection de l'équilibre des résultantes sur la direction de la force extérieure donne alors l'amplitude de la compression :

$$N = \frac{Q}{2 \cos \frac{(n-2)\pi}{2n}}. \quad (9)$$

Au final, la distribution de contrainte donnée par :

$$[\underline{R}_0, \underline{M}_0] = \left[ -\frac{Q}{2 \cos \frac{(n-2)\pi}{2n}} \underline{T}, \underline{0} \right],$$

est bien statiquement admissible, et est cohérente, vis-à-vis de la loi de comportement standard inextensible, avec la configuration indéformée. C'est donc l'unique solution du problème d'équilibre en TIEN.

**I.2)** Compte-tenu du fait que les données statiques sont appliquées en charge morte, les équations d'équilibre en TIEP (cf chapitre 5 du cours) s'écrivent :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dS}(\underline{R} - \underline{R}_0) &= \underline{0}, & \frac{d}{dS}(\underline{M} - \underline{M}_0) + \underline{T} \wedge (\underline{R} - \underline{R}_0) + \frac{d\bar{\xi}}{dS} \wedge \underline{R}_0 &= \underline{0}, \\ \frac{d\bar{\xi}}{dS} + \underline{T} \wedge \underline{\theta} &= \underline{0}, & M_z &= EI \theta'.\end{aligned}$$

On en déduit facilement l'équation différentielle suivante pour la fonction inconnue  $\theta(S)$  :

$$EI \theta''' + N \theta' = 0, \quad (10)$$

Réciproquement, toute solution  $nl$ -périodique de cette équation différentielle fournit une solution des équations d'équilibre en TIEP pourvu que le déplacement  $\bar{\xi}$  de la ligne moyenne, qui lui est associé, soit lui aussi  $nl$ -périodique.

**I.3)** Puisque l'angle  $\theta$  de rotation des sections ne peut pas présenter de discontinuité, on doit limiter la recherche de solution à l'équation différentielle (10), aux fonctions définies sur  $[0, nl]$ , prenant des valeurs égales en 0 et en  $nl$ . De plus, en l'absence de moment concentré exercé sur la poutre, la fonction  $\theta'$  ne doit pas, non plus, présenter de discontinuité. Il en résulte que l'on doit nécessairement rejeter toute solution de l'équation différentielle (10) qui n'est pas un nombre entier de périodes de sinus (à une phase arbitraire près). L'ensemble de ces solutions admissibles est alors bien donné par la formule (1) de l'énoncé.

**II.1)** On considère le cas du carré  $n = 4$ , pour lequel :

$$\theta(S) = C \sin \frac{(m+1)\pi}{2l} S,$$

où  $m \in \mathbb{N}$  désigne un entier, pour l'instant arbitraire, à choisir de sorte que le déplacement de la ligne moyenne reconstruit à partir de  $\theta(S)$  au moyen de la formule :

$$\frac{d\bar{\xi}}{dS} + \underline{T} \wedge \underline{\theta} = \underline{0}, \quad (11)$$

soit  $4l$ -périodique. Prenant, pour simplifier, l'origine des abscisses curvilignes en un des sommets (mais cette simplification n'est nullement indispensable au développement qui suit), et décomposant le déplacement suivant un repère aligné sur les directions des côtés du carré, on vérifie alors que la  $4l$ -périodicité de  $\bar{\xi}$  est équivalente aux deux conditions :

$$\begin{aligned}\int_l^{2l} \theta(S) dS - \int_{3l}^{4l} \theta(S) dS &= 0, \\ \int_0^l \theta(S) dS - \int_{2l}^{3l} \theta(S) dS &= 0.\end{aligned}$$

Ces deux conditions s'explicitent en :

$$\begin{aligned}\int_1^2 \sin \frac{(m+1)\pi}{2} \omega d\omega &= \int_3^4 \sin \frac{(m+1)\pi}{2} \omega d\omega, \\ \int_0^1 \sin \frac{(m+1)\pi}{2} \omega d\omega &= \int_2^3 \sin \frac{(m+1)\pi}{2} \omega d\omega,\end{aligned}$$

où l'on voit que chacune de ces deux conditions est équivalente au fait que  $m$  soit *impair*. La plus petite valeur de  $m \in \mathbb{N}$  telle que le déplacement de la ligne moyenne qui se déduit de la formule (1), soit effectivement un déplacement spontané non rigidifiant de l'équilibre autorisé par les équations d'équilibre en TIEP est donc :

$$m = 1.$$

**II.2)** Pour expliciter la valeur critique de la compression, on revient à l'équation différentielle (10) qui montre que :

$$\frac{N}{EI} = \left( \frac{(m+1)\pi}{2l} \right)^2,$$

qui, pour  $m = 1$ , donne la valeur critique :

$$N_c = \frac{\pi^2 EI}{l^2}.$$

La valeur critique du paramètre de chargement s'obtient par la formule (9) :

$$Q_c = \sqrt{2} \frac{\pi^2 EI}{l^2}.$$

Pour pouvoir dessiner la configuration flambée, remarquons que la fonction  $\theta(S)$  se réduit sur chaque côté du carré à une demi-période de sinusoïde. Par intégration, il en est de même pour le déplacement transversal. Les angles devant rester droit dans la transformation, on en déduit que la configuration flambée est, à un déplacement rigide d'ensemble près, nécessairement la configuration représentée sur la figure 3.

**III.1)** On considère le cas du triangle équilatéral  $n = 3$ , pour lequel :

$$\theta(S) = C \sin \frac{2(m+1)\pi}{3l} S,$$

où  $m \in \mathbb{N}$  désigne un entier, pour l'instant arbitraire, à choisir de sorte que le déplacement de la ligne moyenne reconstruit à partir de  $\theta(S)$  au moyen de la formule :

$$\frac{d\bar{\xi}}{dS} + \underline{T} \wedge \underline{\theta} = \underline{0},$$

soit  $3l$ -périodique.

On choisit l'origine  $O$  en le sommet « en bas à gauche », l'axe  $Ox$  suivant le côté « inférieur », l'axe  $Oy$  suivant la direction orthogonale, l'abscisse curviligne parcourant le triangle dans le sens trigonométrique. Les  $3l$ -périodicité des composantes  $\bar{\xi}_x$  et  $\bar{\xi}_y$  du déplacement de la ligne moyenne, reconstruit à l'aide de la formule (11), s'écrivent respectivement :

$$\begin{aligned} -\frac{\sqrt{3}}{2} \int_l^{2l} \theta(S) dS + \frac{\sqrt{3}}{2} \int_{2l}^{3l} \theta(S) dS &= 0, \\ \int_0^l \theta(S) dS - \frac{1}{2} \int_l^{2l} \theta(S) dS - \frac{1}{2} \int_{2l}^{3l} \theta(S) dS &= 0. \end{aligned}$$



Ces deux conditions s'explicitent en :

$$\begin{aligned}\int_1^2 \sin \frac{2(m+1)\pi}{3} \omega \, d\omega &= \int_2^3 \sin \frac{2(m+1)\pi}{3} \omega \, d\omega, \\ \int_0^1 \sin \frac{2(m+1)\pi}{3} \omega \, d\omega &= \frac{1}{2} \int_1^3 \sin \frac{2(m+1)\pi}{3} \omega \, d\omega,\end{aligned}$$

où l'on voit que chacune de ces deux conditions est équivalente au fait que  $m = 3k + 2$  pour un certain  $k \in \mathbb{N}$ . La plus petite valeur de  $m \in \mathbb{N}$  telle que le déplacement de la ligne moyenne qui se déduit de la formule (1) soit effectivement un déplacement spontané non rigidifiant de l'équilibre autorisé par les équations d'équilibre en TIEP est donc :

$$m = 2.$$

**III.2)** Pour expliciter la valeur critique de la compression, on revient à l'équation différentielle (10) qui montre que :

$$\frac{N}{EI} = \left( \frac{2(m+1)\pi}{3l} \right)^2,$$

qui, pour  $m = 2$ , donne la valeur critique :

$$N_c = \frac{4\pi^2 EI}{l^2}.$$

La valeur critique du paramètre de chargement s'obtient par la formule (9) :

$$Q_c = \sqrt{3} \frac{4\pi^2 EI}{l^2}.$$

Pour pouvoir dessiner la configuration flambée, remarquons que la fonction  $\theta(S)$  se réduit sur chaque côté du triangle à une période entière de sinusöide. Par intégration, il en est de même pour le déplacement transversal, à la constante d'intégration près. On en déduit que la configuration flambée est, à un déplacement rigide d'ensemble près, nécessairement la configuration représentée sur la figure 3.

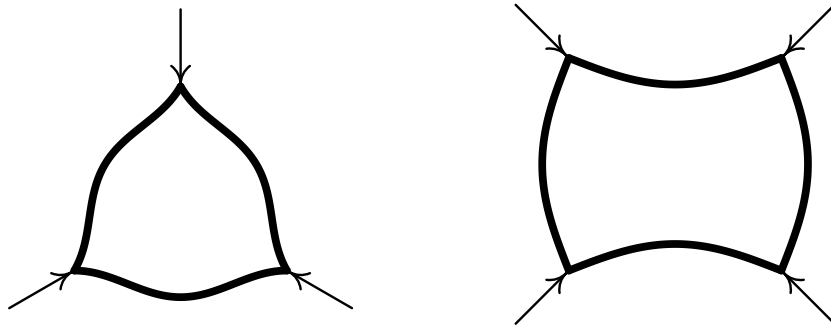


FIGURE 3 – Modes de flambage pour les cas  $n = 3$  et  $n = 4$ .

**Compléments.** L'analyse menée pour les exemples du triangle équilatéral  $n = 3$  et du carré  $n = 4$  s'étend au cas du polygone régulier à  $n$  côtés. On constate que, dès que  $n \geq 4$ , la plus

petite valeur de  $m$  associée à un mode de bifurcation est toujours  $m = 1$ . Il en résulte que la compression critique est :

$$N_c = \frac{16}{n^2} \frac{\pi^2 EI}{l^2}. \quad (12)$$

Pour les très grandes valeurs de  $n$ , le polygone régulier à  $n$  côtés est très proche d'un cercle de rayon  $r$  tel que  $2\pi r = nl$ . Il est alors naturel de comparer ces résultats avec ceux obtenus dans le cours pour le cas du cercle de rayon  $r$  soumis à une pression externe homogène  $p$ . Le mode de bifurcation exprimé en terme de la fonction  $\theta(S)$  est rigoureusement identique dans les deux cas. En revanche, la compression critique calculée pour un polygone à partir de la formule (12) est :

$$N_c = \frac{4EI}{r^2},$$

et diffère de la valeur  $N_c = 3EI/r^2$  obtenue dans le cours pour le cas du cercle de rayon  $r$ . Cette différence s'explique par le fait que le chargement appliqué sur le polygone est une charge morte alors que la pression appliquée sur le cercle est suivieuse.