Matematikai Alapok

Megoldások

2018. október 14.

1. Algebrai és Gyökös kifejezések I.

1.2. Feladatok

1.2.1. Órai feladatok

3. (b)

$$\frac{a}{a^3+a^2b+ab^2+b^3}+\frac{b}{a^3-a^2b+ab^2-b^3}+\frac{1}{a^2-b^2}-\frac{1}{a^2+b^2}-\frac{a^2+3b^2}{a^4-b^4}=0$$

$$\frac{a}{a^2(a+b)+b^2(a+b)}+\frac{b}{a^2(a-b)+b^2(a-b)}+\frac{1}{(a+b)(a-b)}-\frac{1}{a^2+b^2}$$
$$-\frac{a^2+3b^2}{(a^2-b^2)(a^2+b^2)}=0$$

$$\frac{a}{(a+b)(a^2+b^2)}+\frac{b}{(a-b)(a^2+b^2)}+\frac{1}{(a+b)(a-b)}-\frac{1}{a^2+b^2}-\frac{a^2+3b^2}{(a+b)(a-b)(a^2+b^2)}=0$$
$$\frac{a(a-b)+b(a+b)+(a^2+b^2)-(a+b)(a-b)-(a^2+3b^2)}{(a+b)(a-b)(a^2+b^2)}=0$$
$$\frac{a^2-ab+ab+b^2+a^2+b^2-a^2+b^2-a^2-3b^2}{(a+b)(a-b)(a^2+b^2)}=0$$

4. (a)

1. Első lehetőség: $a+b+c=0$ kiemelhető így $(a+b+c)\cdot(a^2+b^2-ab)$
2. Második lehetőség: $(a+b+c)$-ből kifejezzük az egyiket $\rightarrow c=-a-b$ és ezt kell behelyettesíteni.

   $a^3+a^2(-a-b)-ab(-a-b)+b^2(-a-b)+b^3=$

   $a^3-a^3-a^2b+a^2b+ab^2-ab^2-b^3+b^3=0$

6.

$$\frac{x^3-x-y^3+y+xy^2-x^2y}{x^3+x-y^3-y+xy^2-x^2y}=\frac{xy(y-x)+(y-x)+(x-y)(x^2+xy+y^2)}{xy(y-x)-(y-x)+(x-y)(x^2+xy+y^2)}=$$

$$\frac{(y-x)(xy+1-x^2-y^2-xy)}{(y-x)(xy-1-x^2-y^2-xy)}=\frac{1-x^2-y^2}{-1-x^2-y^2}=\frac{-1(-1+x^2+y^2)}{-1(1+x^2+y^2)}=\frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}$$

Ha $x=\dfrac{k(1-z^2)}{(1+z^2)}$ akkor $y=\dfrac{2k\cdot z}{1+z^2}$ Bizonyítsuk be hogy behelyettesítés után a kifejezés nem függ a z értékétől (vagyis ki fog esni)!

$$\frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}=\frac{x^2+y^2+1-2}{x^2+y^2+1}=1-\frac{2}{x^2+y2+1}$$

Behelyettesítve:

$$x^2 + y = \frac{(k(1-z^2))^2}{(1+z^2)^2} + \frac{(2kz)^2}{(1+z^2)^2} = \frac{k^2(1-z^2)^2 + 4k^2z^2}{(1+z^2)^2}$$

$$= \frac{k^2(1+z^4-2z^2+4z^2)}{(1+z^2)^2} = \frac{k^2(z^2+1)^2}{(1+z^2)^2} = k^2$$

Így $1 - \dfrac{2}{k^2+1}$ ami valóban független a z-től.

12. (c)

$$\left(\sqrt{x} - \frac{\sqrt{xy}+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} + \frac{2\sqrt{xy}}{x-y}\right) =$$

$$\left(\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{y}) - (\sqrt{xy}+y)}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-\sqrt{y}) + \sqrt{y}(\sqrt{x}+\sqrt{y}) + 2\sqrt{xy}}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}\right) =$$

$$\left(\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right) \cdot \left(\frac{x-\sqrt{xy}+\sqrt{xy}+y+2\sqrt{xy}}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}\right) = \frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{x}} \cdot \left(\frac{x+y+2\sqrt{xy}}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}\right)$$

$$= \frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \cdot \left(\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})}\right) = \frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \sqrt{x}+\sqrt{y}$$

(mert: $x - y = (\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})$)

19. (a)

$x_0 = 2 \quad P(x) = 3x^2 - 7x + 2$

Ha egy polinomnak c gyöke akkor $f(x) = (x-c) \cdot g(x)$

$x^2 - 3x + 2 = 0$-nak $x_1 = 1$ és $x_2 = 2$ gyökök.

$x^2 - 3x + 3 = (x-1)(x-2)$

$3x^2 - 7x + 2 \quad x_0 = 2$

$3x^2 - 7x + 2 = (x-2)(3x-1)$

19. (b)

$x_0 \quad 2x^3 - 4x^2 - 18 = (x-3)(...)$

$(x-3)(ax^2+bx+c) = ax^3 + bx^2 + cx - 3ax^2 - 3vx - 3c = ax^3 + (b-3a)x^2 + (c-3b)x - 3c$

Így $a = 2$, $b = 7$ és $b - 3a = 4$ vagy $c - 3b = 0 \Rightarrow b = 2 \Longrightarrow (2x^2 + 2x + 6) \Rightarrow (x-3)(2x^2+6x+2)$

19. (c)

$2x^4 - 5x^3 - 6x^2 + 3x + 2 \quad x_0 = -1 \Longrightarrow (x+1)(2x^3 - 7x^2 + x + 2)$

2. Másodfokú egyenletek, egyenlőtlenségek

2.2. Feladatok

2.2.1. Órai feladatok

3. (b)

$\dfrac{3x^2 + 7x - 4}{x^2 + 2x - 3} < 2$

i. ha $x^2 + 2x - 3 > 0$

   $x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x-1)$ ha $x > 1$ vagy $x < -3$

   $3x^2 + 7x - 4 < 2x^2 + 4x - 6$

   $x^2 + 3x + 2 < 0 \Rightarrow x_1 = -1$ és $x_2 = -2$. $x \in (-2, -1)$ ez nem megoldás mert a kettőnek nincs közös része.

ii. ha $x^2 + 2x - 3 < 0$: $x \in (-3, 1)$
   $x^2 + 3x + 2 > 0$: $x < -2$ vagy $x > -1$
   $x \in (-3, -2)$ vagy $x \in (-1, 1)$

4. (c)

$(p^2 - 1)x^2 + 2(p-1)x + 1 > 0$

Ha $p = 1$ akkor teljesül. Ha a függvény grafikonja metszi az x tengelyt van gyöke. Ha két helyen metszi két gyöke van. Ha a diszkrimináns kisebb mint 0 nincs megoldása. Ha pozitív akkor két megoldása van. Ha nulla akkor egy az $\mathbb{R}$-ben.

$b^2 - 4ac = (2(p-1))^2 - 3 \cdot 1 \cdot (p^2) - 1 < 0$

$4(p-1)^2 - 4(p^2 - 1) < 0$

$4(p^2 - 2p + 1) - 4p^2 + 4 < 0$

$4p^2 - 8p + 4 - 4p^2 + 4 < 0$

$-8p + 8 < 0$

$1 < p$ Ekkor negatív a diszkrimináns tehát nem lesz megoldás.

3. Algebrai és gyökös kifejezések II.

3.2. Feladatok

3.2.1. Órai feladatok

1. (c)

$$\frac{2x^2-13x-7}{8x^3+1}=\frac{(x-7)(2x+1)}{(2x+1)(4x^2-2x+1)}=\frac{(x-7)}{(x^2-2x+1)}$$

$2x^2-13x-7=0\rightarrow x_1=7,\ x_2=-\frac{1}{2}$

$2x^2-13x-7=2(x-7)(x+\frac{1}{2})=(x-7)(2x+1)$

$8x^3+1=(2x)^3+(1)^3=(2x+1)(4x^2-2x+1)$

1. (e)

$$\frac{2}{x^2-1}-\frac{3}{x^3-1}=\frac{2}{(x-1)(x+1)}-\frac{3}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{2(x^2+x+1)-3(x+1)}{(x-1)(x+1)(x^2+x+1)}$$

$$=\frac{2x^2+2x+2-3x-3}{(x-1)(x+1)(x^2+x+1)}=\frac{2x^2-x-1}{(x-1)(x+1)(x^2+x+1)}$$

$$=\frac{2(x-1)(x+\frac{1}{2})}{(x-1)(x+1)(x^2+x+1)}=\frac{2x+1}{(x+1)(x^2+x+1)}$$

3. (b)

$|2x-7|-|2x+7|=x+15 \quad x\in\mathbb{R}$

1. eset: mindkettő negatív

   $2x-7<0\Rightarrow x<\frac{7}{2}$

   $2x+7<0\Rightarrow x<-\frac{7}{2}$

   $\Longrightarrow x\in(-\infty,\frac{7}{2})$

2. eset: mindkettő pozitív

   $2x+7\geq 0\Rightarrow x\geq-\frac{7}{2}$

   $2x-7\geq 0\Rightarrow x\geq\frac{7}{2}$

   $\Longrightarrow x\in[\frac{7}{2},\infty)$

3. eset ($2x+7$ biztos hogy nagyobb mint $2x-7$)

$$2x-7<0 \text{ és } 2x+7\geq 0 \Rightarrow x\in\left[-\frac{7}{2},\frac{7}{2}\right)$$

Kiszámoljuk

1. esetet: (-1-szeresét kell venni mert negatív)

$$\begin{aligned}-(2x-7)+(-(2x+7)) &= x+15\\ 7-2x-2x-7 &= x+15\\ -4x &= x+15\\ x &= -3\end{aligned}$$

Ez nem megoldás mert $-3\notin(-\infty,-\frac{7}{2})$.

2. esetet: (mindkettő pozitív ezért nem változik az előjel)

$$\begin{aligned}2x-7+2x+7 &= x+15\\ x &= 5\end{aligned}$$

Ez megoldás mert $5\in(\frac{7}{2},\infty)$.

3. esetet:

$$\begin{aligned}-(2x+7)+2x+7 &= x+15\\ -2x-7+2x+7 &= x+15\\ x &= -1\end{aligned}$$

Ez megoldás mert $-1\in\left[-\frac{7}{2},\frac{7}{2}\right)$.

Tehát két megoldás van: 5 és -1.

3. (g)

$|2x-1|<|x-1|$

Itt érdemes grafikont rajzolni és abból hamar rá lehet jönni hogy milyen esetek vannak.

$2x-1<1-x$

$x<\frac{2}{3}$

6. (a)

$\sqrt{x+1} - \sqrt{9-x} = \sqrt{2x-12}$

Először kikötést kell tenni!

$$\left.\begin{array}{l} x+1 \geq 0 \rightarrow x \geq -1 \\ 9-x \geq 0 \rightarrow 9 \geq x \\ 2x-12 \geq 0 \rightarrow x \geq 6 \end{array}\right\} \text{Tehát } x \in [6,9]$$

Ezután lehet négyzetre emelni.

$x+1+9-x-2(\sqrt{x+1} \cdot \sqrt{9-x}) = 2x-12$

$22-2x = 2(\sqrt{x+1} \cdot \sqrt{9-x})$

$11-x = \sqrt{(x+1)(9-x)}$

Itt megint kikötést kell tenni.

$-x+11 \geq 0$

$x \leq 11$

Bár ez nem változtat az előző kikötésen.

$x^2+121-22x = -x^2+8x+9$

$2x^2-30x+112 = 0$

$x^2-15x+56 = 0$

$(x-7)(x-8) = 8$

$x_1 = 7$ és $x_2 = 8$ ezek $\in [6,9]$ tehát mindkettő megoldás.

6. (k)

$\sqrt{x^2+4x} > 2-x$

Kikötés: $x^2+4x \geq 0 \Rightarrow x \leq -4$ vagy $x \geq 0$

1. eset:

   $2-x \leq 0$

   $x \geq 2 \Rightarrow x \in [2,\infty]$ ez megoldás.

2. eset:

$2 - x > 0$

$x < 2$

$\sqrt{x^2 + 4x} > 2 - x$

$x^2 + 4x > x^2 - 4x + 4$

$8x > 4$

$x > \frac{1}{2}$

Így $\Rightarrow x \in \left(\frac{1}{2}, 2\right)$, ez az intervallum még jó lesz de más már nem.

4. Logaritmikus, exponenciális egyenletek

4.2. Feladatok

4.2.1. Órai feladatok

2.

$2^{x+3} + 4^{1-x/2} = 33$

Mindent 2^x tagra kell vinni.

$2^{x+3} = 2^3 \cdot 2^{x/2} = 8 \cdot 2^x$

$4^{1-x} = 4 \cdot 4^{-\frac{x}{2}} = 4 \cdot \frac{1}{4^{\frac{x}{2}}} = 4 \cdot \frac{1}{2^x} = 4 \cdot (2^2)^{\frac{2x}{2}} = 4 \cdot 2^x \Rightarrow 8 \cdot 2^x + 4 \cdot \frac{1}{2^x} = 33$

$2^x := y \Rightarrow$

$8y + 4 \cdot \frac{1}{y} = 33$

$8y^2 - 33y + 4 = 0$

$8(y - \frac{1}{8})(y - 4) = 0$

$y_1 = 4$ és $y_2 = \frac{1}{8}$

ha $y_1 = 4$ akkor $x_1 = 2$
ha $y_2 = \frac{1}{8}$ akkor $x_2 = -3$
Ez a két megoldás lesz.

3. (c)

$3^{x+2} \cdot 2^x - 2 \cdot 36^x + 18 = 0$

$9 \cdot 3^x \cdot 2^x = 9 \cdot 6^x$

$2 \cdot (6^2)^x = 2 \cdot 6^{2x}$

$9 \cdot 6^x - 2 \cdot 6^{2x} + 18 = 0$

$6x := y \Rightarrow 9y - 2y^2 + 18 = 0$

$2y^2 - 9y - 18 = 0$

$2(y + \frac{3}{2})(y - 6) = 0$

$y_1 = -\frac{3}{2}$ és $y_2 = 6$

$6^x = -\frac{3}{2}$ ilyen nem létezik az $\mathbb{R}$-ben ezért $x_2 = 1$ ez az egy megoldás van.

3. (f)

$4^{x+1} - 9 \cdot 2^x + 2 > 0$

$4 \cdot (2^x)^2 - 9 \cdot 2^x + 2 > 0 \quad 2^x := y$

$4y^2 - 9y + 2 > 0$

$y_1 = 2 \quad y_2 = \frac{1}{4}$

1. eset: $y > 2 \rightarrow x > 1$
2. eset: $y < \frac{1}{4} \Rightarrow x < -2$

8.

$3^{2+\log_9 25} + 25^{1-\log_5 2} + 10^{-\lg 4} = 3^{\log_9 81+\log_9 25} + 25^{\log_5 5-\log_5 2} + 10^{\lg 4^{-1}} =$

$\left(9^{\frac{1}{2}}\right)^{\log_9(81\cdot 25)} + \left(5^2\right)^{\log_5 \frac{5}{2}} + \frac{1}{4} = (81 \cdot 25)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{5}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$

15. (c)

$\log_3(x+1) - \log_3(x+10) = 2 \cdot \log_3 \frac{9}{2} - 4$

$\log_3 \frac{(x+1)}{(x+10)} = \log_3 \left(\frac{9}{2}\right)^2 - \log_3 81$

$\log_3 \frac{(x+1)}{(x+10)} = \log_3 \frac{\left(\frac{81}{4}\right)}{81}$

Mivel a logaritmus szigorúan monoton függvény. $\Longrightarrow$

$\frac{x+1}{x+10} = \frac{1}{4}$

$4x + 4 = x + 10$

$3x = 6$

$x = 2$

15. (e)

$\log_{32}(2x) - \log_8(4x) + \log_2(x) = 3$

$\log_{32}(2) + \log_{32}(x) - (\log_8(4) + \log_8(x)) + \log_2(x) = 3$

$\frac{1}{5} + \frac{\log_2(x)}{\log_2(32)} - \frac{2}{3} + \frac{\log_2(x)}{\log_2(8)} + \log_2(x) = 3$

$\frac{1}{5} + \frac{\log_2(x)}{5} - \frac{2}{3} + \frac{\log_2(x)}{3} + \log_2(x) = 3$

$\log_2(x) \cdot \frac{13}{15} - \frac{7}{15} = 3$

$\log_2(x) = \frac{52}{15} \cdot \frac{15}{13}$

$\log_2(x) = 4$

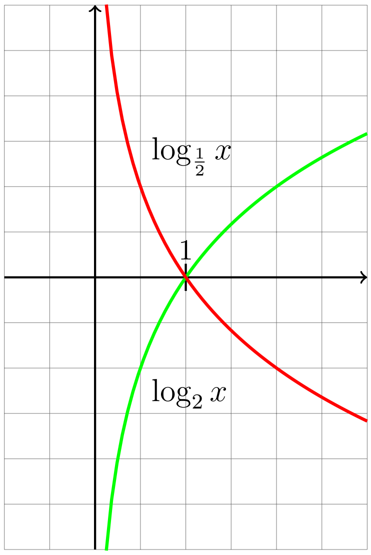
$x = 2$

15. (j)

$\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{3-x}{3x-1}\right) \geq 0$

$\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{3-x}{3x-1}\right) \geq \log_{\frac{1}{2}} 1$

Kikötés: $3x-1 \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{1}{3}$



A $\log_{\frac{1}{2}} x$ is az 1-nél megy át az x tengelyen de tükörképe lesz a $\log_2 x$-nek. Mivel ez egy szigorúan monoton csökkenő függvény, megfordul az egyenlőtlenségnél a reláció.

$\frac{3-x}{3x-1} \leq 1$

Egy tört akkor pozitív ha a számláló és a nevező is vagy pozitív vagy negatív.

i. Mindkettő pozitív

$$\left.\begin{aligned} 3-x &\geq 0 \\ 3x-1 &\geq 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x \in \left[\frac{1}{3}, 3\right]$$

ii. Mindkettő negatív

$3-x \leq 0 \Rightarrow x \geq 3$

$3x-1 \leq 0 \Rightarrow x \leq \frac{1}{3}$

Ilyen az $\mathbb{R}$-ben nincs tehát marad az előző kikötés. $x \in \left(\frac{1}{3}, 3\right]$ (Mert az első kikötés szerint $x \neq \frac{1}{3}$).

Ezt még hozzá kell tenni a kikötéshez.

$\frac{3-x}{3x-1} \leq 1$

$3-x \leq 3x-1$

$-4x \leq -4$

$x \geq 1$

Tehát a megoldás: $x \in [1, 3]$.

5. Trigonometrikus azonosságok, egyenletek, egyenlőtlenségek

5.2. Feladatok

5.2.1. Órai feladatok

4. (a)

$\sin(4x) = \sin(x)$

1. megoldási lehetőség:

   $4x = x$

   $4x = x + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

   $x = \dfrac{2k\pi}{3} \quad k \in \mathbb{Z}$

   Így ezek jó megoldások: $k = 0$ esetén $x = 0$, $k = 1$ esetén $x = \dfrac{2\pi}{3}$ ...
   Ezek a triviális megoldás.

2. megoldási lehetőség:

   $4x = \pi - x + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

   $x = \dfrac{\pi + 2k\pi}{5}$

   Így $k = 0$ esetén $x = \dfrac{\pi}{5}$, $k = 1$ esetén $x = \dfrac{3\pi}{5}$

4. (d)

$\cos(2x) - 3 \cdot \cos(x) + 2 = 0$

$\cos^2(x) - \sin^2(x) - 3 \cdot \cos(x) + 2 = 0$

$\cos^2(x) - (1 - \cos^2(x))3 \cdot \cos(x) + 2 = 0$

$2 \cdot \cos^2(x) - 3 \cdot \cos(x) + 1 = 0$

Ez pedig már egy sima másodfokú egyenlet $\cos(x)$-re.

$\cos(x) := a \Rightarrow 2a^2 - 3a + 1 = 0 \Rightarrow a_1 = 1, a_2 = \dfrac{1}{2}$

$\cos(x) = 1 \text{ vagy } \cos(x) = \dfrac{1}{2}$

Mindkettő lehetséges:

$$\cos(x) = 1 \Rightarrow x = 2k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos(x) = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Viszont! Mivel $\cos(\beta) = \cos(-\beta)$, ezért

$$\cos(x) = \frac{1}{2} \Rightarrow x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$$

4. (h)

$$\sqrt{3} \cdot \sin(x) + \cos(x) = \sqrt{3}$$

$$\sqrt{3} \cdot \sin(x) + 1 \cdot \cos(x) = \sqrt{3} \quad / : 2$$

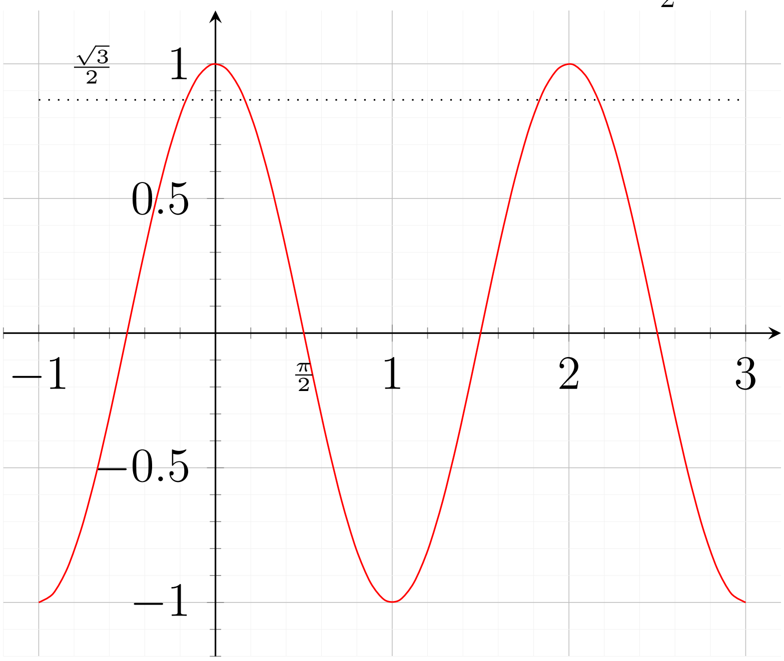
$$\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sin(x) + \frac{1}{2} \cdot \cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \cdot \sin(x) + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \cdot \cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Megjegyzés: $\cos(\alpha - \beta) = \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) + \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta)$

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Melyek azok a szögek amelyeknek a koszinusza $\frac{\sqrt{3}}{2}$?



i.

$$x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

ii.

$$x - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

7. (c)

$$\frac{2 \cdot \sin(x) + 1}{2 \cdot \cos(x)} \leq 0$$

Kikötés: $x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$

1. eset

   $$2 \cdot \sin(x) + 1 \leq 0 \Rightarrow \sin(x) \leq -\frac{1}{2}$$

   $cos(x) > 0$

   $$x \in \left\{ \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right] \right\} + 2k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$$

   Itt lesz a $\cos(x) > 0$. Számoljuk ki hol lesz $\sin(x) = -\frac{1}{2}$ vagy $\sin(x) = \frac{1}{2}$

   $$x \in \left[\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right]$$

   A kettő metszetét kell venni:

   $$x \in \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}\right] + 2k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$$

2. eset Itt megfordulnak a relációk. HF.

6. Nagyságrend-őrző becslések és függvények további becslései

6.2. Feladatok

6.2.1. Órai feladatok

1. (a)

$4x^5 - 3x^4 - 2x^2 - 5$

i. Felső becslés Mivel a negatív tagok csak csökkentik az értéket:

$$4x^5 - 3x^4 - 2x^2 - 5 \leq 4x^5 \qquad x > 0 \text{ esetén}$$

$$\Rightarrow M = 4,\ n = 5,\ R = 0$$

ii. Alsó becslés

$$4x^5 - 3x^4 - 2x^2 - 5 \geq 6x^5 \qquad x > 0 \text{ esetén}$$

$$\Rightarrow m = 6,\ n = 5,\ R = 0$$

1. (b)

$2x^3 - 3x^2 + 6x + 7$

i. Felső becslés Első lépésként elhagyjuk azokat amelyek csökkentik:

$$2x^3 - 3x^2 + 6x + 7 \leq 2x^3 + 6x + 7 \qquad x > 0 \text{ esetén}$$

$$\leq 2x^3 + 6x^3 + 7x^3 = 15x^3 \qquad x \leq 1 \Rightarrow M = 15,\ n = 3,\ R = 1$$

ii. Alsó becslés

$$2x^3 - 3x^2 + 6x + 7 \geq 2x^3 - 3x^2 \qquad x > 0 \text{ esetén}$$

$$2x^3 - 3x^2 \geq 2x^3 - x^3 = x^3 \qquad x > 3 \text{ esetén}$$

$$\Rightarrow m = 1,\ n = 3,\ R = 3$$

Másik megoldási lehetőség:

$$2x^3 - 3x^2 + 6x + 7 \geq 2x^3 - (3x^2 - 6x - 7)$$

$$3x^2 - 6x - 7 \Rightarrow \frac{6 \pm 2\sqrt{30}}{6} \geq 3$$

$$2x^3 - (3x^2 - 6x - 7) \geq 2x^3 \Rightarrow m = 2,\ n = 3,\ R = 3$$

1. (c)

$6x^5 + 7x^4 + 10x^3 + x^2 + 2x + 3$

i. Felső becslés

$$6x^5 + 7x^4 + 10x^3 + x^2 + 2x + 3 \leq 29x^5 \qquad x \geq 1 \text{ esetén}$$

$$\Rightarrow M = 29,\ n = 5,\ R = 1$$

ii. Alsó becslés

$$6x^5 + 7x^4 + 10x^3 + x^2 + 2x + 3 \geq 6x^5 \qquad x \geq 0 \text{ esetén}$$

$$\Rightarrow m = 6,\ n = 5,\ R = 0$$

3. (a)

$$R(x) = \frac{3x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 7x + 7}{5x^2 - 3x - 10}$$

A nevezőt növeljük, a számlálót csökkentjük.

$$\geq \frac{m \cdot x^4}{M \cdot x^2} = \frac{m}{M} \cdot x^2$$

$$3x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 7x + 7 \geq 3x^4 \qquad x \geq 0 \text{ esetén}$$

$$5x^2 - 3x - 10 \leq 5x^2 \qquad x \geq 0 \text{ esetén}$$

$$R(x) \geq \frac{3x^4}{5x^2} = \frac{3}{5}x^2 \qquad x \geq 0 \text{ esetén}$$

Másik lehetőség:

$$3x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 7x + 7 \leq 23x^4 \qquad x > 1 \text{ esetén}$$

$$5x^2 - 3x - 10 = 5x^2 - (3x + 10) \geq 5x^2 - x^2 = 4x^2 \qquad x \geq 5 \text{ esetén}$$

Így:

$$R(x) \leq \frac{23x^4}{4x^2} = \frac{23x^2}{4} \qquad x \geq 5 \text{ esetén}$$

7. Kijelentések, kvantorok, logikai állítások I.

7.2. Feladatok

7.2.1. Órai feladatok

1. (h)

$(\neg A \vee B) \Rightarrow B = A \vee B$

A	B	$\neg A$	$(\neg A \vee B)$	$(\neg A \vee B) \Rightarrow B$	$A \vee B$
I	I	H	I	I	I
H	H	I	I	H	H
I	H	H	H	I	I
H	I	I	I	I	I

3. (a)

$x = 0$ és $y = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 0$ Ez igaz.

Megfordítva:

$x = 0$ és $y = 0 \Leftarrow x^2 + y^2 = 0$ Ez is igaz.

3. (b)

$x \cdot y = x \cdot z \Rightarrow y = z$ Ez hamis.

Mert ha pl: $x = 0$. Megfordítva:

$x \cdot y = x \cdot z \Leftarrow y = z$ Így már viszont igaz.

3. (c)

$x > y^2 \Rightarrow x > 0$ Ez igaz.

Megfordítva:

$x > y^2 \Leftarrow x > 0$ Hamis.

5. (a)

$\forall n : \frac{1}{n} < 0.01$ Hamis.

Tagadjuk:

$\neg(\forall n : \frac{1}{n} < 0.01) \rightarrow \exists n : \neg(\frac{1}{n} < 0.01) \rightarrow \exists n : \frac{1}{n} \geq 0.01$

5. (b)

$\exists n : \frac{1}{n} < 0.01 \qquad$ Igaz.

Tagadjuk:

$\neg(\exists n : \frac{1}{n} < 0.01) \to \forall n : \frac{1}{n} \geq 0.01 \qquad$ Hamis.

7. (b)

$$\frac{2n^3+3}{n^5-3n^4-7n^3+2n^2-10n+1} < 0.05$$

$$\exists N : \forall n \geq N : \frac{2n^3+3}{n^5-3n^4-7n^3+2n^2-10n+1} < 0.05$$

Felső és alsó becslés alapján eldönthető hogy igaz-e.

$n \geq 1$ esetén $\qquad \frac{n^3}{\frac{1}{2}n^5} \leq \frac{10}{n^2} < 0.05$

8. Kijelentések, kvantorok, logikai állítások II.

8.2. Feladatok

8.2.1. Órai feladatok

1. (a)

$a + b = 0 \iff a^2 + b^2 = -2ab$

Megnézzük mindkét irányt.
$\Rightarrow$: Igaz. Ugyanis: $a^2 + b^2 = -2ab \iff (a + b^2 = 0)$
$\Leftarrow$: Ez is igaz.
Tehát az ekvivalencia is igaz.

1. (b)

$a + b = 1 \iff a^2 + b^2 = 1 - 2ab$

$a^2 + b^2 = 1 - 2ab$

$a^2 + b^2 + 2ab = 1$

$(a + b)^2 = 1$

$\Rightarrow$: Igaz.
$\Leftarrow$: Hamis. Ugyanis ha $a + b = -1$ akkor is a négyzetre emelés.
Tehát az ekvivalencia hamis.

1. (c)

$x = -1 \iff x^2 + x = 0$

$\Rightarrow$: ez az irány igaz.
$\Leftarrow$: Hamis, mert x lehetne 0 is.
Tehát az ekvivalencia hamis.

1. (i)

$|x - 5| < 2 \iff 3 < x < 7$

$\Rightarrow$: ez az irány igaz. Ugyanis $|x - 5| < 2 \iff -2 < x - 5 < 2 \iff 3 < x < 7$
$\Leftarrow$: ez is igaz.
Tehát az ekvivalencia igaz.

2. (a)

$\forall x \in \mathbb{R}: \quad (x-1)^2 + (x-5)^2 + (x-12)^2 \geq 62$

A bal oldalt valahogy át kéne alakítani. Bontsuk fel a zárójeleket.

$x^2 - 2x + 1 + x^2 - 10x + 25 + x^2 - 24x + 144 \geq 62$

$3x^2 - 36x + 170 \geq 62 \qquad / - 62$

$3x^2 - 36x + 108 \geq 0 \qquad / : 3$

$x^2 - 12x + 36 \geq 0$

$(x-6)^2 \geq 0$ (**Megjegyzés:** mindenhol ekvivalens átalakításokat végeztünk)

Mivel egy négyzetszám mindig nagyobb mint nulla ezért az állítás igaz.

3. (a)

$f(x) = \big|1 - |x|\big| \qquad x \in [-3, 2)$

$\forall x \in \mathcal{D}_f : f(x) \geq 0$

Ez igaz, mivel abszolút értek.

3. (b)

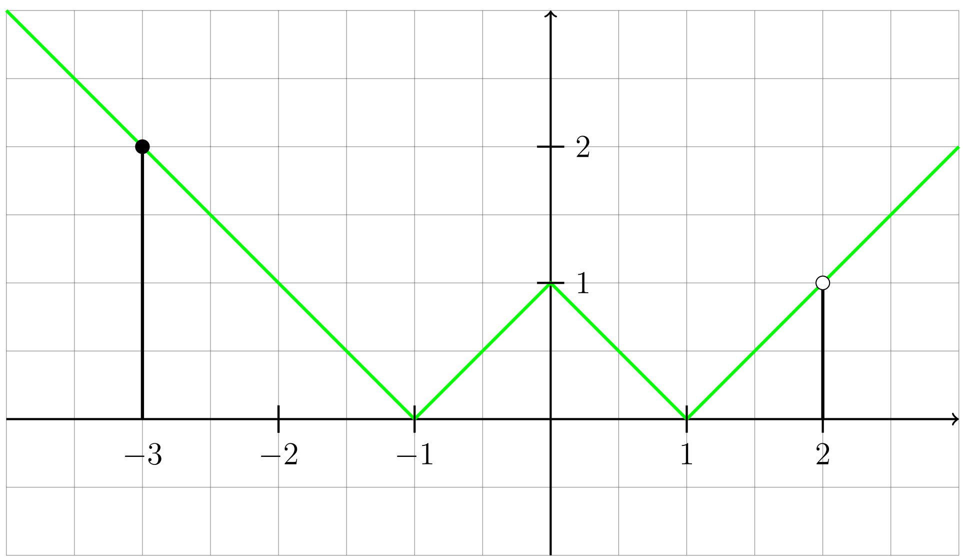
$\forall x \in \mathcal{D}_f : f(x) \leq 2$

Becsüljük felülről.

$f(x) \leq 1 - |x| \leq 0$ vagy $1 - |x| \geq 0$

$\big|1 - |x|\big| \leq 2$ ha $-3 \leq x < 1$ vagy $1 < x < 2$

Egyszerűen látható a megoldás ha ábrázoljuk:



Tehát igaz.

3. (c)

$!\exists a \in \mathcal{D}_f : \forall x \in \mathcal{D}_f \quad f(a) \leq f(x)$

Ez egyszerűbben megfogalmazva: pontosan egy minimuma (Dimat1) van. Az előző ábrából könnyen leolvasható hogy ez hamis. Ugyanis az $a = 1$ és $a = -1$ is minimum.

3. (d)

$\exists a \in \mathcal{D}_f : \forall x \in \mathcal{D}_f \quad f(a) \leq f(x)$

Mivel itt nincs kikötve az egyértelműség ez már igaz.

3. (e)

$!\exists a \in \mathcal{D}_f : \forall x \in \mathcal{D}_f \quad f(a) \geq f(x)$

Ez a 3/c. ellentéte, vagyis itt maximumot keresünk. Van ilyen az $a = -3$ amiből egy van, így igaz az állítás.

3. (f)

$!\exists b \in \mathcal{D}_f : f(b) = 1$

Ez hamis mert három helyen is egy a függvény értéke.

3. (g)

$\exists b \in \mathcal{D}_f : f(b) = 0$

Ez igaz mert két helyen nulla a függvény értéke.

3. (h)

$!\exists x \in \mathcal{D}_f : f(x) = x$

Az $f(x) = x$ függvény az origón $45°$-ban áthaladó egyenes. Ez pedig egy helyen metszi az eredeti függvényt tehát az állítás igaz.

3. (i) $\forall c \in \mathbb{R}$ esetén az $f(x) = c$ egyenletnek van legalább egy megoldása.
Ez hamis ugyanis pl: $f(x) = 125$-nek nincs megoldása a -3 és 2 intervallumban.

3. (j) Az $f(x) = c$ egyenletnek van legalább egy megoldása $\iff$ $c \in [0, 2]$.
$\Rightarrow$: ebbe az irányba igaz, ugyanis ha $c \notin [0, 2]$ nem lesz megoldása $f(x)$-nek.
$\Leftarrow$: ez is igaz.

3. (l) Az $f(x) = c$ $(c \in \mathbb{R})$ egyenletnek akkor és csak akkor van pontosan 3 darab megoldása, ha $c = 1$.
$\Leftarrow$: hamis mert nincs a függvénynek sehol három megoldása.
$\Rightarrow$: ez viszont igaz mert ha egy implikáció jobb oldala hamis az csak úgy lehet ha a bal oldal igaz.

P	Q	$P \Rightarrow Q$
I	I	I
I	H	H
H	I	I
H	H	I

9. Kijelentések, kvantorok, logikai állítások III.

9.2. Feladatok

9.2.1. Órai feladatok

2. (a)

$x^2 = 25 \qquad ? \qquad x = 5$

$\Leftarrow$: Ez biztos hogy igaz.
$\Rightarrow$: ez nem mert $x = -5$ is jó.

2. (b)

$a^2 + b^2 = 0 \qquad ? \qquad ab = 0$

$\Rightarrow$: Ez igaz.
$\Leftarrow$: ez nem igaz. Pl akármilyen a és $b = 0$ esetén.

2. (e)

$x^3 - x^2 - x + 1 = 0 \qquad ? \qquad x = 1$

$\Leftarrow$: ez igaz.
$\Rightarrow$: itt meg kell nézni hogy van-e más gyöke:

$x^3 - x^2 - x + 1 = (x-1)(x^2-1) = (x-1)(x-1)(x+1)$

Tehát jobbról balra nem igaz mert két gyöke van: az 1 és -1

2. (i)

$|x| = 0 \qquad ? \qquad x \geq 0$

Ez $\iff$ mivel ez maga az abszolút érték definíciója.

2. (j)

$\sin(2x) = \operatorname{tg}(x) \qquad ? \qquad x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}$

Oldjuk meg az egyenletet.

$sin(2x) = \operatorname{tg}(x)$

$2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

$\cos(x) \neq 0$

Ha $\sin(x) = 0$, ez egy megoldás és ez $k \cdot \pi$-ben nulla. Ezek viszont nincsenek benne az a $\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$ intervallumban.
$\Rightarrow$: nem igaz.

$\Leftarrow$:

10. Teljes indukció

10.1.1. Ellenőrző kérdések az elmélethez

7.

$$\binom{100}{2}+\binom{100}{3}+\binom{101}{4}+\binom{102}{5}=\binom{101}{3}+\binom{101}{4}+\binom{102}{5}=$$

$$\binom{102}{4}+\binom{102}{5}=\binom{103}{5}$$

Megjegyzés: $\binom{n+1}{k}=\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}$

10.1.2. Órai feladatok

1. (a)

$$\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}$$

i. $n=1$-nél: $1=\frac{1\cdot 2}{2}$ ✓

ii. tfh. n-ig igaz $\Rightarrow$ $n+1$-re is igaz.
Fontos hogy az indukciós feltevés, vagyis hogy n-ig igaz. Így:

$$\underbrace{1+2+4+...+n}_{\text{ez igaz az indukciós feltevés miatt}}+(n+1)=\frac{n(n+1)}{2}+n+1=\frac{n^2+n+2n+2}{2}=\frac{n^2+3n+2}{2}$$

$$=\frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}=\frac{(n+1)(n+2)}{2} \quad ✓$$

1. (b)

$$\sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

i. $n=1$: $1^2=\frac{1(1+1)(2\cdot 1+1)}{6}=\frac{1\cdot 2\cdot 3}{6}=\frac{6}{6}=1$ ✓

ii. Tfh. n-ig igaz $\Rightarrow$ $(n+1)$-re is igaz.

$\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$ Ennek kell majd kijönnie.

$$1+4+9+...+n^2+(n+1)^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2$$

$$=(n+1)\left(\frac{n(2n+1)}{6}+(n+1)\right)=(n+1)\left(\frac{2n^2+n+6n+6}{6}\right)$$

$$=(n+1)\left(\frac{2n^2+7n+6}{6}\right)=(n+1)\left(\frac{(2n+3)(n+2)}{6}\right) ✓$$

1. (c)

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

i. $n = 1$: $\dfrac{1}{1(1+1)} = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$

ii. Tfh. n-re igaz $\Rightarrow$ $(n+1)$-re is igaz.

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n+1}{n+2}$$

Ennek kell majd kijönnie.

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \iff \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2} \checkmark$$

1. (f)

$$\sum_{k=1}^{n} k = n^2$$

$1 + 3 + 5 + ... + 2n - 1 = n^2$

i. $n = 0$ esetén: $1 = 1^1$ ✓

ii. Tfh. n-ig igaz $\Rightarrow$ $(n+1)$-re is igaz

$$\underbrace{1 + 3 + 5 + ... + 2n - 1}_{\text{ez igaz az indukciós feltevés miatt}} + 2n + 1 = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2 \checkmark$$

4. (a)

$$2\sqrt{n+1} - 2 < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2\sqrt{n} - 1$$

Itt két állítást kell bizonyítani. Először:

$$2\sqrt{n+1} - 2 < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

Itt $<$ reláció van tehát becsülni is lehet.

i. $n = 1$: $2\sqrt{2} - 2 < 1$ ✓

ii. Tfh. n-re igaz $\Rightarrow$ $(n+1)$-re is igaz

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

Ezt kéne alulról becsülni.

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

$$2\sqrt{n+1} - 2 + \frac{1}{\sqrt{n+1}} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

$$2\sqrt{n+1} - 2 + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \geq 2\sqrt{n+1} - 2$$

Ezt kéne megmutatni.

$$2\sqrt{n+1} - 2 + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \geq 2\sqrt{n+1} - 2 \qquad / + 2$$

$$2\sqrt{n+1} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \geq 2\sqrt{n+1} \qquad /^2$$

$$4(n+1) + \frac{1}{n+1} + 4 \geq 4(n+2)$$

$$4n + 8 + \frac{1}{n+1} \geq 4n + 8 \qquad / - (4n+8)$$

$$\frac{1}{n+1} \geq 0$$

Ez már igaz minden n-re mert $n \in \mathbb{N}^+$.

Nézzük a második egyenlőtlenséget.

i. $n = 1$-re: $1 \leq 2\sqrt{1} - 1 = 1$ ✓

ii. Tfh. n-re igaz $\Rightarrow$ $(n+1)$-re is igaz.

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq 2\sqrt{n} - 1 + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq 2\sqrt{n} - 1 \qquad / + 1$$

$$2\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq 2\sqrt{n+1} \qquad / \cdot \sqrt{n+1}$$

$$2\sqrt{n(n+1)} + 1 \leq 2(n+1) \qquad / - 1$$

$$2\sqrt{n(n+1)} \leq 2(n+1) - 1 \qquad /^2$$

$$4n(n+1) \leq 4n^2 + 4n + 1$$

$$4n^2 + 4n \leq 4n^2 + 4n + 1 \qquad / - (4n^2 + 4n)$$

$$0 \leq 1 \checkmark$$

4. (d)

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{3n+1}>1$$

i. $n=1$-re: $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>1$ ✓

ii. Tfh. n-re igaz $\Rightarrow$ $(n+1)$-re is igaz.

$$\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+...+\frac{1}{3n+1}+\frac{1}{3n+2}+\frac{1}{3n+3}+\frac{1}{3n+4}>1$$

Itt viszont nem tudjuk az indukciós feltevést úgy használva ahogy eddig, mivel itt mozog az összeg. Ezért hozzá kell adni mejd ki kell vonni. Analízis tételek bizonyításánál ez egy gyakran használt módszer.

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{3n+1}+\frac{1}{3n+2}+\frac{1}{3n+3}+\frac{1}{3n+4}-\frac{1}{n+1}$$

$$1+\frac{1}{3n+2}+\frac{1}{3n+3}+\frac{1}{3n+4}-\frac{1}{n+1}>1 \qquad /-1$$

$$\frac{1}{3n+2}+\frac{1}{3n+3}+\frac{1}{3n+4}-\frac{1}{n+1}>0$$

11. Komplex számok

11.2. Feladatok

11.2.1. Órai feladatok

2. (b)

$$\frac{1+5i}{3+2i} = \frac{1+5i}{3+2i} \cdot \frac{3-2i}{3-2i} = \frac{3+15i-2i-10i^2}{9-4i} = \frac{13+13i}{13} = 1+i$$

2. (c)

$$\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+i}}} = \frac{1}{1+\frac{1}{\frac{2+i}{1+i}}} = \frac{1}{1+\frac{1+i}{2+i}} = \frac{1}{\frac{3+2i}{2+i}} = \frac{2+i}{3+2i}$$

$$= \frac{2+i}{3+2i} \cdot \frac{3-2i}{3-2i} = \frac{6-4i+3i-2i^2}{9+4} = \frac{8-i}{13} = \frac{8}{13} - \frac{1}{13}i$$

2. (e)

$$(2-i)^2 + (2+i)^3 = 4-1-4i+(2+i)(2+i)^2 = 3-4i+(2+i)(3+4i)$$

$$= 3-4i+6+8i+3i-4 = 5+7i$$

12. (a)

$$x^3 - 1 = 0$$

$$(x-1)(x^2+x+1) = 0$$

$x_1 = 1$ az egyik megoldás. A többi:

$$\frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

Tehát a másik két megoldás: $-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$

12. (c)

$$x^2 - 2\sqrt{2} \cdot x + 4 = 0$$

$$\frac{2\sqrt{2} \pm \sqrt{8-20}}{2} = \frac{2\sqrt{2} \pm \sqrt{-12}}{2} = \sqrt{2} \pm \sqrt{12}i$$

12. (d)

$x^3 - 9x^2 + 18x + 2870$

Ennek biztos hogy egy valós és két komplex vagy három komplex gyöke van.
Tipp: a 0, 1, -1 számokat gyorsan meg le lehet ellenőrizni hogy gyökök-e. Itt a -1 gyök tehát ki lehet emelni egy valós gyököt így két másik komlex gyöke lesz.

$(x + 1)(x^2 - 10x + 28) = 0$

$\frac{10 \pm \sqrt{-12}}{2} = 5 \pm \sqrt{3}i$

Tartalomjegyzék