Matematikai Alapok

Megoldások

September 25, 2018

1 Algebrai és Gyökös kifejezések I.

1.2 Feladatok

1.2.1 Órai feladatok

3. (b)

$$\frac{a}{a^3+a^2b+ab^2+b^3}+\frac{b}{a^3-a^2b+ab^2-b^3}+\frac{1}{a^2-b^2}-\frac{1}{a^2+b^2}-\frac{a^2+3b^2}{a^4-b^4}=0$$
$$\frac{a}{a^2(a+b)+b^2(a+b)}+\frac{b}{a^2(a-b)+b^2(a-b)}+\frac{1}{(a+b)(a-b)}-\frac{1}{a^2+b^2}-\frac{a^2+3b^2}{(a^2-b^2)(a^2+b^2)}=0$$
$$\frac{a}{(a+b)(a^2+b^2)}+\frac{b}{(a-b)(a^2+b^2)}+\frac{1}{(a+b)(a-b)}-\frac{1}{a^2+b^2}-\frac{a^2+3b^2}{(a+b)(a-b)(a^2+b^2)}=0$$
$$\frac{a(a-b)+b(a+b)+(a^2+b^2)-(a+b)(a-b)-(a^2+3b^2)}{(a+b)(a-b)(a^2+b^2)}=0$$

$$\frac{a^2-ab+ab+b^2+a^2+b^2-a^2+b^2-a^2-3b^2}{(a+b)(a-b)(a^2+b^2)}=0$$

4. (a)

1. Első lehetőség: $a+b+c=0$ kiemelhető így $(a+b+c)\cdot(a^2+b^2-ab)$
2. Második lehetőség: $(a+b+c)$-ből kifejezzük az egyiket $\to$ $c=-a-b$ és ezt kell behelyettesíteni.

   $$a^3+a^2(-a-b)-ab(-a-b)+b^2(-a-b)+b^3=$$

   $$a^3-a^3-a^2b+a^2b+ab^2-ab^2-b^3+b^3=0$$

6.

$$\frac{x^3-x-y^3+y+xy^2-x^2y}{x^3+x-y^3-y+xy^2-x^2y}=\frac{xy(y-x)+(y-x)+(x-y)(x^2+xy+y^2)}{xy(y-x)-(y-x)+(x-y)(x^2+xy+y^2)}=$$

$$\frac{(y-x)(xy+1-x^2-y^2-xy)}{(y-x)(xy-1-x^2-y^2-xy)}=\frac{1-x^2-y^2}{-1-x^2-y^2}=\frac{-1(-1+x^2+y^2)}{-1(1+x^2+y^2)}=\frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}$$

Ha $x=\dfrac{k(1-z^2)}{(1+z^2)}$ akkor $y=\dfrac{2k\cdot z}{1+z^2}$ Bizonyítsuk be hogy behelyettesítés után a kifejezés nem függ a z értékétől (vagyis ki fog esni)!

$$\frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}=\frac{x^2+y^2+1-2}{x^2+y^2+1}=1-\frac{2}{x^2+y2+1}$$

Behelyettesítve:

$$x^2 + y = \frac{(k(1-z^2))^2}{(1+z^2)^2} + \frac{(2kz)^2}{(1+z^2)^2} = \frac{k^2(1-z^2)^2 + 4k^2z^2}{(1+z^2)^2}$$

$$= \frac{k^2(1+z^4-2z^2+4z^2)}{(1+z^2)^2} = \frac{k^2(z^2+1)^2}{(1+z^2)^2} = k^2$$

Így $1 - \dfrac{2}{k^2+1}$ ami valóban független a z-től.

12. (c)

$$\left(\sqrt{x} - \frac{\sqrt{xy}+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} + \frac{2\sqrt{xy}}{x-y}\right) =$$

$$\left(\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{y}) - (\sqrt{xy}+y)}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-\sqrt{y}) + \sqrt{y}(\sqrt{x}+\sqrt{y}) + 2\sqrt{xy}}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}\right) =$$

$$\left(\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right) \cdot \left(\frac{x-\sqrt{xy}+\sqrt{xy}+y+2\sqrt{xy}}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}\right) = \frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{x}} \cdot \left(\frac{x+y+2\sqrt{xy}}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}\right)$$

$$= \frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \cdot \left(\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})}\right) = \frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \sqrt{x}+\sqrt{y}$$

(mert: $x - y = (\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})$)

19. (a)

$x_0 = 2 \quad P(x) = 3x^2 - 7x + 2$

Ha egy polinomnak c gyöke akkor $f(x) = (x-c) \cdot g(x)$

$x^2 - 3x + 2 = 0$-nak $x_1 = 1$ és $x_2 = 2$ gyökök.

$x^2 - 3x + 3 = (x-1)(x-2)$

$3x^2 - 7x + 2 \quad x_0 = 2$

$3x^2 - 7x + 2 = (x-2)(3x-1)$

19. (b)

$x_0 \quad 2x^3 - 4x^2 - 18 = (x-3)(...)$

$(x-3)(ax^2+bx+c) = ax^3+bx^2+cx-3ax^2-3vx-3c = ax^3+(b-3a)x^2+(c-3b)x-3c$

Így $a = 2$, $b = 7$ és $b - 3a = 4$ vagy $c - 3b = 0 \Rightarrow b = 2 \Longrightarrow (2x^2+2x+6) \Rightarrow (x-3)(2x^2+6x+2)$

19. (c)

$2x^4 - 5x^3 - 6x^2 + 3x + 2 \quad x_0 = -1 \Longrightarrow (x+1)(2x^3 - 7x^2 + x + 2)$

2 Másodfokú egyenletek, egyenlőtlenségek

2.2 Feladatok

2.2.1 Órai feladatok

3. (b)

$\dfrac{3x^2 + 7x - 4}{x^2 + 2x - 3} < 2$

i. ha $x^2 + 2x - 3 > 0$

   $x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x-1)$ ha $x > 1$ vagy $x < -3$

   $3x^2 + 7x - 4 < 2x^2 + 4x - 6$

   $x^2 + 3x + 2 < 0 \Rightarrow x_1 = -1$ és $x_2 = -2$. $x \in (-2, -1)$ ez nem megoldás mert a kettőnek nincs közös része.

ii. ha $x^2 + 2x - 3 < 0$: $x \in (-3, 1)$
   $x^2 + 3x + 2 > 0$: $x < -2$ vagy $x > -1$
   $x \in (-3, -2)$ vagy $x \in (-1, 1)$

4. (c)

$(p^2 - 1)x^2 + 2(p-1)x + 1 > 0$

Ha $p = 1$ akkor teljesül. Ha a függvény grafikonja metszi az x tengelyt van gyöke. Ha két helyen metszi két gyöke van. Ha a diszkrimináns kisebb mint 0 nincs megoldása. Ha pozitív akkor két megoldása van. Ha nulla akkor egy az $\mathbb{R}$-ben.

$b^2 - 4ac = (2(p-1))^2 - 3 \cdot 1 \cdot (p^2) - 1 < 0$

$4(p-1)^2 - 4(p^2 - 1) < 0$

$4(p^2 - 2p + 1) - 4p^2 + 4 < 0$

$4p^2 - 8p + 4 - 4p^2 + 4 < 0$

$-8p + 8 < 0$

$1 < p$ Ekkor negatív a diszkrimináns tehát nem lesz megoldás.

3 Algebrai és gyökös kifejezések II.

3.2 Feladatok

3.2.1 Órai feladatok

1. (c)

$$\frac{2x^2-13x-7}{8x^3+1}=\frac{(x-7)(2x+1)}{(2x+1)(4x^2-2x+1)}=\frac{(x-7)}{(x^2-2x+1)}$$

$2x^2-13x-7=0 \to x_1=7,\ x_2=-\frac{1}{2}$

$2x^2-13x-7=2(x-7)(x+\frac{1}{2})=(x-7)(2x+1)$

$8x^3+1=(2x)^3+(1)^3=(2x+1)(4x^2-2x+1)$

1. (e)

$$\frac{2}{x^2-1}-\frac{3}{x^3-1}=\frac{2}{(x-1)(x+1)}-\frac{3}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{2(x^2+x+1)-3(x+1)}{(x-1)(x+1)(x^2+x+1)}$$

$$=\frac{2x^2+2x+2-3x-3}{(x-1)(x+1)(x^2+x+1)}=\frac{2x^2-x-1}{(x-1)(x+1)(x^2+x+1)}$$

$$=\frac{2(x-1)(x+\frac{1}{2})}{(x-1)(x+1)(x^2+x+1)}=\frac{2x+1}{(x+1)(x^2+x+1)}$$

3. (b)

$|2x-7|-|2x+7|=x+15 \quad x\in\mathbb{R}$

1. eset: mindkettő negatív

   $2x-7<0 \Rightarrow x<\frac{7}{2}$

   $2x+7<0 \Rightarrow x<-\frac{7}{2}$

   $\Longrightarrow x\in(-\infty,\frac{7}{2})$

2. eset: mindkettő pozitív

   $2x+7\geq 0 \Rightarrow x\geq -\frac{7}{2}$

   $2x-7\geq 0 \Rightarrow x\geq \frac{7}{2}$

   $\Longrightarrow x\in[\frac{7}{2},\infty)$

3. eset ($2x + 7$ biztos hogy nagyobb mint $2x - 7$)

   $2x - 7 < 0$ és $2x + 7 \geq 0 \Rightarrow x \in \left[-\frac{7}{2}, \frac{7}{2}\right)$

Kiszámoljuk

1. esetet: (-1-szeresét kell venni mert negatív)

   $$\begin{aligned} -(2x-7) + (-(2x+7)) &= x + 15 \\ 7 - 2x - 2x - 7 &= x + 15 \\ -4x &= x + 15 \\ x &= -3 \end{aligned}$$

   Ez nem megoldás mert $-3 \notin (-\infty, -\frac{7}{2})$.

2. esetet: (mindkettő pozitív ezért nem változik az előjel)

   $$\begin{aligned} 2x - 7 + 2x + 7 &= x + 15 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

   Ez megoldás mert $5 \in (\frac{7}{2}, \infty)$.

3. esetet:

   $$\begin{aligned} -(2x+7) + 2x + 7 &= x + 15 \\ -2x - 7 + 2x + 7 &= x + 15 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

   Ez megoldás mert $5 \in \left[-\frac{7}{2}, \frac{7}{2}\right)$.

Tehát két megoldás van: 5 és -1.

3. (g)

$|2x - 1| < |x - 1|$

Itt érdemes grafikont rajzolni és abból hamar rá lehet jönni hogy milyen esetek vannak.

$2x - 1 = 1 - x$

$x = \frac{2}{3}$

6. (a)

$\sqrt{x+1} - \sqrt{9-x} = \sqrt{2x-12}$

Először kikötést kell tenni!

$$\left.\begin{array}{l} x+1 \geq 0 \rightarrow x \geq -1 \\ 9-x \geq 0 \rightarrow 9 \geq x \\ 2x-12 \geq 0 \rightarrow x \geq 6 \end{array}\right\} \text{Tehát } x \in [6,9]$$

Ezután lehet négyzetre emelni.

$x+1+9-x-2(\sqrt{x+1} \cdot \sqrt{9-x}) = 2x-12$

$22-2x = 2(\sqrt{x+1} \cdot \sqrt{9-x})$

$11-x = \sqrt{(x+1)(9-x)}$

Itt megint kikötést kell tenni.

$-x+11 \geq 0$

$x \leq 11$

Bár ez nem változtat az előző kikötésen.

$x^2+121-22x = -x^2+8x+9$

$2x^2-30x+112 = 0$

$x^2-15x+56 = 0$

$(x-7)(x-8) = 8$

$x_1 = 7$ és $x_2 = 8$ ezek $\in [6,9]$ tehát mindkettő megoldás.

6. (k)

$\sqrt{x^2+4x} > 2-x$

Kikötés: $x^2+4x \geq 0 \Rightarrow x \leq -4$ vagy $x \geq 0$

1. eset:

   $2-x \leq 0$

   $x \geq 2 \Rightarrow x \in [2,\infty]$ ez megoldás.

2. eset:

$2 - x > 0$

$x < 2$

$\sqrt{x^2 + 4x} > 2 - x$

$x^2 + 4x > x^2 - 4x + 4$

$8x > 4$

$x > \frac{1}{2}$

Így $\Rightarrow x \in \left(\frac{1}{2}, 2\right)$, ez az intervallum még jó lesz de más már nem.

4 Logaritmikus, exponenciális egyenletek

4.2 Feladatok

4.2.1 Órai feladatok

2.

$2^{x+3} + 4^{1-x/2} = 33$

Mindent 2^x tagra kell vinni.

$2^{x+3} = 2^3 \cdot 2^x = 8 \cdot 2^x$

$4^{1-x} = 4 \cdot 4^{-\frac{x}{2}} = 4 \cdot \frac{1}{4^{\frac{x}{2}}} = 4 \cdot \frac{1}{2^x} = 4 \cdot (2^2)^{\frac{2x}{2}} = 4 \cdot 2^x$

$\Rightarrow 8 \cdot 2^x + 4 \cdot \frac{1}{2^x} = 33$

$2^x := y \Rightarrow$

$8y + 4 \cdot \frac{1}{y} = 33$

$8y^2 - 33y + 4 = 0$

$8(y - \frac{1}{8})(y - 4) = 0$

$y_1 = 4$ és $y_2 = \frac{1}{8}$

ha $y_1 = 4$ akkor $x_1 = 2$
ha $y_2 = \frac{1}{8}$ akkor $x_1 = -3$
Ez a két megoldás lesz.

3. (c)

$3^{x+2} \cdot 2^x - 2 \cdot 36^x + 18 = 0$

$9 \cdot 3^x \cdot 2^x = 9 \cdot 6^x$

$2 \cdot (6^2)^x = 2 \cdot 6^{2x}$

$9 \cdot 6^x - 2 \cdot 6^{2x} + 18 = 0$

$6x := y \Rightarrow 9y - 2y^2 + 18 = 0$

$2y^2 - 9y - 18 = 0$

$2(y + \frac{3}{2})(y - 6) = 0$

$y_1 = -\frac{3}{2}$ és $y_2 = 6$

$6^x = -\frac{3}{2}$ ilyen nem létezik az $\mathbb{R}$-ben ezért $x_2 = 1$ ez az egy megoldás van.

3. (f)

$4^{x+1} - 9 \cdot 2^x + 2 > 0$

$4 \cdot (2^x)^2 - 9 \cdot 2^x + 2 > 0 \quad 2^x := y$

$4y^2 - 9y + 2 > 0$

$y_1 = 2 \quad y_2 = \frac{1}{4}$

1. eset: $y > 2 \rightarrow x > 1$
2. eset: $y < \frac{1}{4} \Rightarrow x < -2$

8.

$3^{2+\log_9 25} + 25^{1-\log_5 2} + 10^{-\lg 4} = 3^{\log_9 81+\log_9 25} + 25^{\log_5 5-\log_5 2} + 10^{\lg 4^{-1}} =$

$\left(9^{\frac{1}{2}}\right)^{\log_9(81\cdot 25)} + \left(5^2\right)^{\log_5 \frac{5}{2}} + \frac{1}{4} = (81 \cdot 25)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{5}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$

15. (c)

$\log_3(x+1) - \log_3(x+10) = 2 \cdot \log_3 \frac{9}{2} - 4$

$\log_3 \frac{(x+1)}{(x+10)} = \log_3 \left(\frac{9}{2}\right)^2 - \log_3 81$

$\log_3 \frac{(x+1)}{(x+10)} = \log_3 \frac{\left(\frac{81}{4}\right)}{81}$

Mivel a logaritmus szigorúan monoton függvény. $\Longrightarrow$

$\frac{x+1}{x+10} = \frac{1}{4}$

$4x + 4 = x + 10$

$3x = 6$

$x = 2$

15. (e)

$\log_{32}(2x) - \log_8(4x) + \log_2(x) = 3$

$\log_{32}(2) + \log_{32}(x) - (\log_8(4) + \log_8(x)) + \log_2(x) = 3$

$\frac{1}{5} + \frac{\log_2(x)}{\log_2(32)} - \frac{2}{3} + \frac{\log_2(x)}{\log_2(8)} + \log_2(x) = 3$

$\frac{1}{5} + \frac{\log_2(x)}{5} - \frac{2}{3} + \frac{\log_2(x)}{3} + \log_2(x) = 3$

$\log_2(x) \cdot \frac{13}{15} - \frac{7}{15} = 3$

$\log_2(x) = \frac{52}{15} \cdot \frac{15}{13}$

$\log_2(x) = 4$

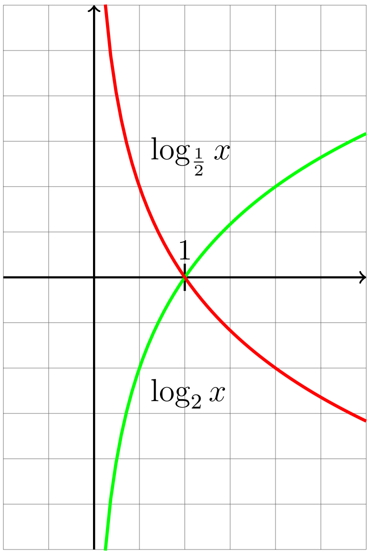
$x = 2$

15. (j)

$\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{3-x}{3x-1}\right) \geq 0$

$\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{3-x}{3x-1}\right) \geq \log_{\frac{1}{2}} 1$

Kikötés: $3x-1 \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{1}{3}$



A $\log_{\frac{1}{2}} x$ is az 1-nél megy át az x tengelyen de tükörképe lesz a $\log_2 x$-nek. Mivel ez egy szogirúan monoton csökkenő függvény, megfordul az egyenlőtlenségnél a reláció.

$\frac{3-x}{3x-1} \leq 1$

Egy tört akkor pozitív ha a számláló és a nevező is vagy pozitív vagy negatív.

i. Mindkettő pozitív

$$\left.\begin{aligned} 3-x &\geq 0 \\ 3x-1 &\geq 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x \in \left[\frac{1}{3}, 3\right]$$

ii. Mindkettő negatív

$3-x \leq 0 \Rightarrow x \geq 3$

$3x-1 \leq 0 \Rightarrow x \leq \frac{1}{3}$

Ilyen az $\mathbb{R}$-ben nincs tehát marad az előző kikötés. $x \in \left(\frac{1}{3}, 3\right]$ (Mert az első kikötés szerint $x \neq \frac{1}{3}$).

Ezt még hozzá kell tenni a kikötéshez.

$\frac{3-x}{3x-1} \leq 1$

$3-x \leq 3x-1$

$-4x \leq -4$

$x \geq 1$

Tehát a megoldás: $x \in [1, 3]$.

5 Trigonometrikus azonosságok, egyenletek, egyenlőtlenségek

5.2 Feladatok

5.2.1 Órai feladatok

4. (a)

$\sin(4x) = \sin(x)$

1. megoldási lehetőség:

   $4x = x$

   $4x = x + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

   $x = \dfrac{2k\pi}{3} \quad k \in \mathbb{Z}$

   Így ezek jó megoldások: $k = 0$ esetén $x = 0$, $k = 1$ esetén $x = \dfrac{2\pi}{3}$ ...
   Ezek a triviális megoldás.

2. megoldási lehetőség:

   $4x = \pi - x + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

   $x = \dfrac{\pi + 2k\pi}{5}$

   Így $k = 0$ esetén $x = \dfrac{\pi}{5}$, $k = 1$ esetén $x = \dfrac{3\pi}{5}$