

Matematikai Alapok

Megoldások

September 25, 2018

1 Algebrai és Gyökös kifejezések I.

1.2 Feladatok

1.2.1 Órai feladatok

3. (b)

$$\begin{aligned} \frac{a}{a^3 + a^2b + ab^2 + b^3} + \frac{b}{a^3 - a^2b + ab^2 - b^3} + \frac{1}{a^2 - b^2} - \frac{1}{a^2 + b^2} - \frac{a^2 + 3b^2}{a^4 - b^4} &= 0 \\ \frac{a}{a^2(a+b) + b^2(a+b)} + \frac{b}{a^2(a-b) + b^2(a-b)} + \frac{1}{(a+b)(a-b)} - \frac{1}{a^2 + b^2} - \frac{a^2 + 3b^2}{(a^2 - b^2)(a^2 + b^2)} &= 0 \\ \frac{a}{(a+b)(a^2 + b^2)} + \frac{b}{(a-b)(a^2 + b^2)} + \frac{1}{(a+b)(a-b)} - \frac{1}{a^2 + b^2} - \frac{a^2 + 3b^2}{(a+b)(a-b)(a^2 + b^2)} &= 0 \\ \frac{a(a-b) + b(a+b) + (a^2 + b^2) - (a+b)(a-b) - (a^2 + 3b^2)}{(a+b)(a-b)(a^2 + b^2)} &= 0 \end{aligned}$$

$$\frac{a^2 - ab + ab + b^2 + a^2 + b^2 - a^2 + b^2 - a^2 - 3b^2}{(a+b)(a-b)(a^2 + b^2)} = 0$$

4. (a)

1. Első lehetőség: $a + b + c = 0$ kiemelhető így $(a + b + c) \cdot (a^2 + b^2 - ab)$
2. Második lehetőség: $(a + b + c)$ -ből kifejezzük az egyiket $\rightarrow c = -a - b$ és ezt kell behelyettesíteni.

$$a^3 + a^2(-a - b) - ab(-a - b) + b^2(-a - b) + b^3 =$$

$$a^3 - a^3 - a^2b + a^2b + ab^2 - ab^2 - b^3 + b^3 = 0$$

6.

$$\frac{x^3 - x - y^3 + y + xy^2 - x^2y}{x^3 + x - y^3 - y + xy^2 - x^2y} = \frac{xy(y-x) + (y-x) + (x-y)(x^2 + xy + y^2)}{xy(y-x) - (y-x) + (x-y)(x^2 + xy + y^2)} =$$

$$\frac{(y-x)(xy + 1 - x^2 - y^2 - xy)}{(y-x)(xy - 1 - x^2 - y^2 - xy)} = \frac{1 - x^2 - y^2}{-1 - x^2 - y^2} = \frac{-1(-1 + x^2 + y^2)}{-1(1 + x^2 + y^2)} = \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1}$$

Ha $x = \frac{k(1 - z^2)}{(1 + z^2)}$ akkor $y = \frac{2k \cdot z}{1 + z^2}$ Bizonyítsuk be hogy behelyettesítés után a kifejezés nem függ a z értékétől (vagyis ki fog esni)!

$$\frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1} = \frac{x^2 + y^2 + 1 - 2}{x^2 + y^2 + 1} = 1 - \frac{2}{x^2 + y^2 + 1}$$

Behelyettesítve:

$$\begin{aligned} x^2 + y &= \frac{(k(1 - z^2))^2}{(1 + z^2)^2} + \frac{(2kz)^2}{(1 + z^2)^2} = \frac{k^2(1 - z^2)^2 + 4k^2z^2}{(1 + z^2)^2} \\ &= \frac{k^2(1 + z^4 - 2z^2 + 4z^2)}{(1 + z^2)^2} = \frac{k^2(z^2 + 1)^2}{(1 + z^2)^2} = k^2 \end{aligned}$$

Így $1 - \frac{2}{k^2 + 1}$ ami valóban független a z -től.

12. (c)

$$\begin{aligned} &\left(\sqrt{x} - \frac{\sqrt{xy} + y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} + \frac{2\sqrt{xy}}{x - y}\right) = \\ &\left(\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} + \sqrt{y}) - (\sqrt{xy} + y)}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} - \sqrt{y}) + \sqrt{y}(\sqrt{x} + \sqrt{y}) + 2\sqrt{xy}}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})}\right) = \\ &\left(\frac{x - y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}\right) \cdot \left(\frac{x - \sqrt{xy} + \sqrt{xy} + y + 2\sqrt{xy}}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})}\right) = \frac{x - y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \cdot \left(\frac{x + y + 2\sqrt{xy}}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})}\right) \\ &= \frac{x - y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \cdot \left(\frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y})}\right) = \frac{x - y}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = \sqrt{x} + \sqrt{y} \\ &(\text{mert: } x - y = (\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})) \end{aligned}$$

19. (a)

$$x_0 = 2 \quad P(x) = 3x^2 - 7x + 2$$

Ha egy polinomnak c gyöke akkor $f(x) = (x - c) \cdot g(x)$

$x^2 - 3x + 2 = 0$ -nak $x_1 = 1$ és $x_2 = 2$ gyökök.

$$x^2 - 3x + 3 = (x - 1)(x - 2)$$

$$3x^2 - 7x + 2 \quad x_0 = 2$$

$$3x^2 - 7x + 2 = (x - 2)(3x - 1)$$

19. (b)

$$x_0 \quad 2x^3 - 4x^2 - 18 = (x - 3)(\dots)$$

$$(x - 3)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + bx^2 + cx - 3ax^2 - 3bx - 3c = ax^3 + (b - 3a)x^2 + (c - 3b)x - 3c$$

$$\begin{aligned} \text{Így } a &= 2, b = 7 \text{ és } b - 3a = 4 \text{ vagy } c - 3b = 0 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow (2x^2 + 2x + 6) \Rightarrow \\ &(x - 3)(2x^2 + 6x + 2) \end{aligned}$$

19. (c)

$$2x^4 - 5x^3 - 6x^2 + 3x + 2 \quad x_0 = -1 \implies (x+1)(2x^3 - 7x^2 + x + 2)$$

2 Másodfokú egyenletek, egyenlőtlenségek**2.2 Feladatok****2.2.1 Órai feladatok****3. (b)**

$$\frac{3x^2 + 7x - 4}{x^2 + 2x - 3} < 2$$

i. ha $x^2 + 2x - 3 > 0$

$$x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x-1) \text{ ha } x > 1 \text{ vagy } x < -3$$

$$3x^2 + 7x - 4 < 2x^2 + 4x - 6$$

$$x^2 + 3x + 2 < 0 \Rightarrow x_1 = -1 \text{ és } x_2 = -2. \quad x \in (-2, -1) \text{ ez nem megoldás mert a}$$

kettőnek nincs közös része.

ii. ha $x^2 + 2x - 3 < 0$: $x \in (-3, 1)$

$$x^2 + 3x + 2 > 0: x < -2 \text{ vagy } x > -1$$

$$x \in (-3, -2) \text{ vagy } x \in (-1, 1)$$

4. (c)

$$(p^2 - 1)x^2 + 2(p - 1)x + 1 > 0$$

Ha $p = 1$ akkor teljesül. Ha a függvény grafikonja metszi az x tengelyt van gyöke. Ha két helyen metszi két gyöke van. Ha a diszkrimináns kisebb mint 0 nincs megoldása. Ha pozitív akkor két megoldása van. Ha nulla akkor egy az \mathbb{R} -ben.

$$b^2 - 4ac = (2(p-1))^2 - 3 \cdot 1 \cdot (p^2) - 1 < 0$$

$$4(p-1)^2 - 4(p^2 - 1) < 0$$

$$4(p^2 - 2p + 1) - 4p^2 + 4 < 0$$

$$4p^2 - 8p + 4 - 4p^2 + 4 < 0$$

$$-8p + 8 < 0$$

$1 < p$ Ekkor negatív a diszkrimináns tehát nem lesz megoldás.

3 Algebrai és gyökös kifejezések II.

3.2 Feladatok

3.2.1 Órai feladatok

1. (c)

$$\frac{2x^2 - 13x - 7}{8x^3 + 1} = \frac{(x - 7)(2x + 1)}{(2x + 1)(4x^2 - 2x + 1)} = \frac{(x - 7)}{(x^2 - 2x + 1)}$$

$$2x^2 - 13x - 7 = 0 \rightarrow x_1 = 7, x_2 = -\frac{1}{2}$$

$$2x^2 - 13x - 7 = 2(x - 7)(x + \frac{1}{2}) = (x - 7)(2x + 1)$$

$$8x^3 + 1 = (2x)^3 + (1)^3 = (2x + 1)(4x^2 - 2x + 1)$$

1. (e)

$$\begin{aligned} \frac{2}{x^2 - 1} - \frac{3}{x^3 - 1} &= \frac{2}{(x - 1)(x + 1)} - \frac{3}{(x - 1)(x^2 + x + 1)} = \frac{2(x^2 + x + 1) - 3(x + 1)}{(x - 1)(x + 1)(x^2 + x + 1)} \\ &= \frac{2x^2 + 2x + 2 - 3x - 3}{(x - 1)(x + 1)(x^2 + x + 1)} = \frac{2x^2 - x - 1}{(x - 1)(x + 1)(x^2 + x + 1)} \\ &= \frac{2(x - 1)(x + \frac{1}{2})}{(x - 1)(x + 1)(x^2 + x + 1)} = \frac{2x + 1}{(x + 1)(x^2 + x + 1)} \end{aligned}$$

3. (b)

$$|2x - 7| - |2x + 7| = x + 15 \quad x \in \mathbb{R}$$

1. eset: mindkettő negatív

$$2x - 7 < 0 \Rightarrow x < \frac{7}{2}$$

$$2x + 7 < 0 \Rightarrow x < -\frac{7}{2}$$

$$\Rightarrow x \in (-\infty, \frac{7}{2})$$

2. eset: mindkettő pozitív

$$2x + 7 \geq 0 \Rightarrow x \geq -\frac{7}{2}$$

$$2x - 7 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{7}{2}$$

$$\Rightarrow x \in [\frac{7}{2}, \infty)$$

3. eset $(2x + 7)$ biztos hogy nagyobb mint $2x - 7$

$$2x - 7 < 0 \text{ és } 2x + 7 \geq 0 \Rightarrow x \in \left[-\frac{7}{2}, \frac{7}{2}\right)$$

Kiszámoljuk

1. esetet: (-1) -szeresét kell venni mert negatív)

$$-(2x - 7) + (-(2x + 7)) = x + 15$$

$$7 - 2x - 2x - 7 = x + 15$$

$$-4x = x + 15$$

$$x = -3$$

Ez nem megoldás mert $-3 \notin (-\infty, -\frac{7}{2})$.

2. esetet: (mindkettő pozitív ezért nem változik az előjel)

$$2x - 7 + 2x + 7 = x + 15$$

$$x = 5$$

Ez megoldás mert $5 \in (\frac{7}{2}, \infty)$.

3. esetet:

$$-(2x + 7) + 2x + 7 = x + 15$$

$$-2x - 7 + 2x + 7 = x + 15$$

$$x = -1$$

Ez megoldás mert $-1 \in \left[-\frac{7}{2}, \frac{7}{2}\right)$.

Tehát két megoldás van: 5 és -1 .

3. (g)

$$|2x - 1| < |x - 1|$$

Itt érdemes grafikont rajzolni és abból hamar rá lehet jönni hogy milyen esetek vannak.

$$2x - 1 = 1 - x$$

$$x = \frac{2}{3}$$

6. (a)

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{9-x} = \sqrt{2x-12}$$

Először kikötést kell tenni!

$$\left. \begin{array}{l} x+1 \geq 0 \rightarrow x \geq -1 \\ 9-x \geq 0 \rightarrow 9 \geq x \\ 2x-12 \geq 0 \rightarrow x \geq 6 \end{array} \right\} \text{Tehát } x \in [6, 9]$$

Ezután lehet négyzetre emelni.

$$x+1+9-x-2(\sqrt{x+1} \cdot \sqrt{9-x}) = 2x-12$$

$$22-2x = 2(\sqrt{x+1} \cdot \sqrt{9-x})$$

$$11-x = \sqrt{(x+1)(9-x)}$$

Itt megint kikötést kell tenni.

$$-x+11 \geq 0$$

$$x \leq 11$$

Bár ez nem változtat az előző kikötésen.

$$x^2+121-22x = -x^2+8x+9$$

$$2x^2-30x+112=0$$

$$x^2-15x+56=0$$

$$(x-7)(x-8)=8$$

$x_1=7$ és $x_2=8$ ezek $\in [6, 9]$ tehát mindkettő megoldás.

6. (k)

$$\sqrt{x^2+4x} > 2-x$$

Kikötés: $x^2+4x \geq 0 \Rightarrow x \leq -4$ vagy $x \geq 0$

1. eset:

$$2-x \leq 0$$

$$x \geq 2 \Rightarrow x \in [2, \infty] \text{ ez megoldás.}$$

2. eset:

$$2 - x > 0$$

$$x < 2$$

$$\sqrt{x^2 + 4x} > 2 - x$$

$$x^2 + 4x > x^2 - 4x + 4$$

$$8x > 4$$

$$x > \frac{1}{2}$$

Így $\Rightarrow x \in \left(\frac{1}{2}, 2\right)$, ez az intervallum még jó lesz de más már nem.

4 Logaritmikus, exponenciális egyenletek

4.2 Feladatok

4.2.1 Órai feladatok

2.

$$2^{x+3} + 4^{1-x/2} = 33$$

Mindent 2^x tagra kell vinni.

$$2^{x+3} = 2^3 \cdot 2^x = 8 \cdot 2^x$$

$$4^{1-x} = 4 \cdot 4^{-\frac{x}{2}} = 4 \cdot \frac{1}{4^{\frac{x}{2}}} = 4 \cdot \frac{1}{2^x} = 4 \cdot (2^2)^{\frac{2x}{2}} = 4 \cdot 2^x$$

$$\Rightarrow 8 \cdot 2^x + 4 \cdot \frac{1}{2^x} = 33$$

$$2^x := y \Rightarrow$$

$$8y + 4 \cdot \frac{1}{y} = 33$$

$$8y^2 - 33y + 4 = 0$$

$$8\left(y - \frac{1}{8}\right)(y - 4) = 0$$

$$y_1 = 4 \text{ és } y_2 = \frac{1}{8}$$

$$\text{ha } y_1 = 4 \text{ akkor } x_1 = 2$$

$$\text{ha } y_2 = \frac{1}{8} \text{ akkor } x_1 = -3$$

Ez a két megoldás lesz.

3. (c)

$$3^{x+2} \cdot 2^x - 2 \cdot 36^x + 18 = 0$$

$$9 \cdot 3^x \cdot 2^x = 9 \cdot 6^x$$

$$2 \cdot (6^2)^x = 2 \cdot 6^{2x}$$

$$9 \cdot 6^x - 2 \cdot 6^{2x} + 18 = 0$$

$$6x := y \Rightarrow 9y - 2y^2 + 18 = 0$$

$$2y^2 - 9y - 18 = 0$$

$$2\left(y + \frac{3}{2}\right)(y - 6) = 0$$

$$y_1 = -\frac{3}{2} \text{ és } y_2 = 6$$

$$6^x = -\frac{3}{2} \text{ ilyen nem létezik az } \mathbb{R}\text{-ben ezért } x_2 = 1 \text{ ez az egy megoldás van.}$$

3. (f)

$$4^{x+1} - 9 \cdot 2^x + 2 > 0$$

$$4 \cdot (2^x)^2 - 9 \cdot 2^x + 2 > 0 \quad 2^x := y$$

$$4y^2 - 9y + 2 > 0$$

$$y_1 = 2 \quad y_2 = \frac{1}{4}$$

$$1. \text{ eset: } y > 2 \rightarrow x > 1$$

$$2. \text{ eset: } y < \frac{1}{4} \Rightarrow x < -2$$

8.

$$3^{2+\log_9 25} + 25^{1-\log_5 2} + 10^{-\lg 4} = 3^{\log_9 81 + \log_9 25} + 25^{\log_5 5 - \log_5 2} + 10^{\lg 4^{-1}} =$$

$$\left(9^{\frac{1}{2}}\right)^{\log_9 (81 \cdot 25)} + (5^2)^{\log_5 \frac{5}{2}} + \frac{1}{4} = (81 \cdot 25)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{5}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$$

15. (e)

$$\log_{32}(2x) - \log_8(4x) + \log_2(x) = 3$$

$$\log_{32}(2) + \log_{32}(x) - (\log_8(4) + \log_8(x)) + \log_2(x) = 3$$

$$\frac{1}{5} + \frac{\log_2(x)}{\log_2(32)} - \frac{2}{3} + \frac{\log_2(x)}{\log_2(8)} + \log_2(x) = 3$$

$$\frac{1}{5} + \frac{\log_2(x)}{5} - \frac{2}{3} + \frac{\log_2(x)}{3} + \log_2(x) = 3$$

$$\log_2(x) \cdot \frac{13}{15} - \frac{7}{15} = 3$$

$$\log_2(x) = \frac{52}{15} \cdot \frac{15}{13}$$

$$\log_2(x) = 4$$

$$x = 2$$