

# Matematikai Alapok

## **Megoldások**

2018. szeptember 26.

# 1. Algebrai és Gyökös kifejezések I.

## 1.2. Feladatok

### 1.2.1. Órai feladatok

#### 3. (b)

$$\begin{aligned} \frac{a}{a^3 + a^2b + ab^2 + b^3} + \frac{b}{a^3 - a^2b + ab^2 - b^3} + \frac{1}{a^2 - b^2} - \frac{1}{a^2 + b^2} - \frac{a^2 + 3b^2}{a^4 - b^4} &= 0 \\ \frac{a}{a^2(a+b) + b^2(a+b)} + \frac{b}{a^2(a-b) + b^2(a-b)} + \frac{1}{(a+b)(a-b)} - \frac{1}{a^2 + b^2} - \frac{a^2 + 3b^2}{(a^2 - b^2)(a^2 + b^2)} &= 0 \\ \frac{a}{(a+b)(a^2 + b^2)} + \frac{b}{(a-b)(a^2 + b^2)} + \frac{1}{(a+b)(a-b)} - \frac{1}{a^2 + b^2} - \frac{a^2 + 3b^2}{(a+b)(a-b)(a^2 + b^2)} &= 0 \\ \frac{a(a-b) + b(a+b) + (a^2 + b^2) - (a+b)(a-b) - (a^2 + 3b^2)}{(a+b)(a-b)(a^2 + b^2)} &= 0 \end{aligned}$$

$$\frac{a^2 - ab + ab + b^2 + a^2 + b^2 - a^2 + b^2 - a^2 - 3b^2}{(a+b)(a-b)(a^2 + b^2)} = 0$$

#### 4. (a)

1. Első lehetőség:  $a + b + c = 0$  kiemelhető így  $(a + b + c) \cdot (a^2 + b^2 - ab)$
2. Második lehetőség:  $(a + b + c)$ -ből kifejezzük az egyiket  $\rightarrow c = -a - b$  és ezt kell behelyettesíteni.

$$a^3 + a^2(-a - b) - ab(-a - b) + b^2(-a - b) + b^3 =$$

$$a^3 - a^3 - a^2b + a^2b + ab^2 - ab^2 - b^3 + b^3 = 0$$

#### 6.

$$\frac{x^3 - x - y^3 + y + xy^2 - x^2y}{x^3 + x - y^3 - y + xy^2 - x^2y} = \frac{xy(y-x) + (y-x) + (x-y)(x^2 + xy + y^2)}{xy(y-x) - (y-x) + (x-y)(x^2 + xy + y^2)} =$$

$$\frac{(y-x)(xy + 1 - x^2 - y^2 - xy)}{(y-x)(xy - 1 - x^2 - y^2 - xy)} = \frac{1 - x^2 - y^2}{-1 - x^2 - y^2} = \frac{-1(-1 + x^2 + y^2)}{-1(1 + x^2 + y^2)} = \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1}$$

Ha  $x = \frac{k(1 - z^2)}{(1 + z^2)}$  akkor  $y = \frac{2k \cdot z}{1 + z^2}$  Bizonyítsuk be hogy behelyettesítés után a kifejezés nem függ a  $z$  értékétől (vagyis ki fog esni)!

$$\frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1} = \frac{x^2 + y^2 + 1 - 2}{x^2 + y^2 + 1} = 1 - \frac{2}{x^2 + y^2 + 1}$$

Behelyettesítve:

$$\begin{aligned} x^2 + y &= \frac{(k(1 - z^2))^2}{(1 + z^2)^2} + \frac{(2kz)^2}{(1 + z^2)^2} = \frac{k^2(1 - z^2)^2 + 4k^2z^2}{(1 + z^2)^2} \\ &= \frac{k^2(1 + z^4 - 2z^2 + 4z^2)}{(1 + z^2)^2} = \frac{k^2(z^2 + 1)^2}{(1 + z^2)^2} = k^2 \end{aligned}$$

Így  $1 - \frac{2}{k^2 + 1}$  ami valóban független a  $z$ -től.

**12. (c)**

$$\begin{aligned} &\left(\sqrt{x} - \frac{\sqrt{xy} + y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} + \frac{2\sqrt{xy}}{x - y}\right) = \\ &\left(\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} + \sqrt{y}) - (\sqrt{xy} + y)}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} - \sqrt{y}) + \sqrt{y}(\sqrt{x} + \sqrt{y}) + 2\sqrt{xy}}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})}\right) = \\ &\left(\frac{x - y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}\right) \cdot \left(\frac{x - \sqrt{xy} + \sqrt{xy} + y + 2\sqrt{xy}}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})}\right) = \frac{x - y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \cdot \left(\frac{x + y + 2\sqrt{xy}}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})}\right) \\ &= \frac{x - y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \cdot \left(\frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y})}\right) = \frac{x - y}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = \sqrt{x} + \sqrt{y} \\ &(\text{mert: } x - y = (\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})) \end{aligned}$$

**19. (a)**

$$x_0 = 2 \quad P(x) = 3x^2 - 7x + 2$$

Ha egy polinomnak  $c$  gyöke akkor  $f(x) = (x - c) \cdot g(x)$

$x^2 - 3x + 2 = 0$ -nak  $x_1 = 1$  és  $x_2 = 2$  gyökök.

$$x^2 - 3x + 3 = (x - 1)(x - 2)$$

$$3x^2 - 7x + 2 \quad x_0 = 2$$

$$3x^2 - 7x + 2 = (x - 2)(3x - 1)$$

**19. (b)**

$$x_0 \quad 2x^3 - 4x^2 - 18 = (x - 3)(\dots)$$

$$(x - 3)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + bx^2 + cx - 3ax^2 - 3bx - 3c = ax^3 + (b - 3a)x^2 + (c - 3b)x - 3c$$

$$\begin{aligned} \text{Így } a &= 2, b = 7 \text{ és } b - 3a = 4 \text{ vagy } c - 3b = 0 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow (2x^2 + 2x + 6) \Rightarrow \\ &(x - 3)(2x^2 + 6x + 2) \end{aligned}$$

**19. (c)**

$$2x^4 - 5x^3 - 6x^2 + 3x + 2 \quad x_0 = -1 \implies (x+1)(2x^3 - 7x^2 + x + 2)$$

**2. Másodfokú egyenletek, egyenlőtlenségek****2.2. Feladatok****2.2.1. Órai feladatok****3. (b)**

$$\frac{3x^2 + 7x - 4}{x^2 + 2x - 3} < 2$$

i. ha  $x^2 + 2x - 3 > 0$

$$x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x-1) \text{ ha } x > 1 \text{ vagy } x < -3$$

$$3x^2 + 7x - 4 < 2x^2 + 4x - 6$$

$$x^2 + 3x + 2 < 0 \Rightarrow x_1 = -1 \text{ és } x_2 = -2. \quad x \in (-2, -1) \text{ ez nem megoldás mert a kettőnek nincs közös része.}$$

ii. ha  $x^2 + 2x - 3 < 0$ :  $x \in (-3, 1)$

$$x^2 + 3x + 2 > 0: \quad x < -2 \text{ vagy } x > -1$$

$$x \in (-3, -2) \text{ vagy } x \in (-1, 1)$$

**4. (c)**

$$(p^2 - 1)x^2 + 2(p - 1)x + 1 > 0$$

Ha  $p = 1$  akkor teljesül. Ha a függvény grafikonja metszi az  $x$  tengelyt van gyöke. Ha két helyen metszi két gyöke van. Ha a diszkrimináns kisebb mint 0 nincs megoldása. Ha pozitív akkor két megoldása van. Ha nulla akkor egy az  $\mathbb{R}$ -ben.

$$b^2 - 4ac = (2(p-1))^2 - 3 \cdot 1 \cdot (p^2) - 1 < 0$$

$$4(p-1)^2 - 4(p^2 - 1) < 0$$

$$4(p^2 - 2p + 1) - 4p^2 + 4 < 0$$

$$4p^2 - 8p + 4 - 4p^2 + 4 < 0$$

$$-8p + 8 < 0$$

$1 < p$  Ekkor negatív a diszkrimináns tehát nem lesz megoldás.

### 3. Algebrai és gyökös kifejezések II.

#### 3.2. Feladatok

##### 3.2.1. Órai feladatok

###### 1. (c)

$$\frac{2x^2 - 13x - 7}{8x^3 + 1} = \frac{(x-7)(2x+1)}{(2x+1)(4x^2 - 2x + 1)} = \frac{(x-7)}{(x^2 - 2x + 1)}$$

$$2x^2 - 13x - 7 = 0 \rightarrow x_1 = 7, x_2 = -\frac{1}{2}$$

$$2x^2 - 13x - 7 = 2(x-7)(x + \frac{1}{2}) = (x-7)(2x+1)$$

$$8x^3 + 1 = (2x)^3 + (1)^3 = (2x+1)(4x^2 - 2x + 1)$$

###### 1. (e)

$$\begin{aligned} \frac{2}{x^2 - 1} - \frac{3}{x^3 - 1} &= \frac{2}{(x-1)(x+1)} - \frac{3}{(x-1)(x^2 + x + 1)} = \frac{2(x^2 + x + 1) - 3(x+1)}{(x-1)(x+1)(x^2 + x + 1)} \\ &= \frac{2x^2 + 2x + 2 - 3x - 3}{(x-1)(x+1)(x^2 + x + 1)} = \frac{2x^2 - x - 1}{(x-1)(x+1)(x^2 + x + 1)} \\ &= \frac{2(x-1)(x + \frac{1}{2})}{(x-1)(x+1)(x^2 + x + 1)} = \frac{2x+1}{(x+1)(x^2 + x + 1)} \end{aligned}$$

###### 3. (b)

$$|2x - 7| - |2x + 7| = x + 15 \quad x \in \mathbb{R}$$

1. eset: mindkettő negatív

$$2x - 7 < 0 \Rightarrow x < \frac{7}{2}$$

$$2x + 7 < 0 \Rightarrow x < -\frac{7}{2}$$

$$\Rightarrow x \in (-\infty, \frac{7}{2})$$

2. eset: mindkettő pozitív

$$2x + 7 \geq 0 \Rightarrow x \geq -\frac{7}{2}$$

$$2x - 7 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{7}{2}$$

$$\Rightarrow x \in [\frac{7}{2}, \infty)$$

3. eset  $(2x + 7)$  biztos hogy nagyobb mint  $2x - 7$

$$2x - 7 < 0 \text{ és } 2x + 7 \geq 0 \Rightarrow x \in \left[-\frac{7}{2}, \frac{7}{2}\right)$$

Kiszámoljuk

1. esetet:  $(-1)$ -szeresét kell venni mert negatív)

$$-(2x - 7) + (-(2x + 7)) = x + 15$$

$$7 - 2x - 2x - 7 = x + 15$$

$$-4x = x + 15$$

$$x = -3$$

Ez nem megoldás mert  $-3 \notin (-\infty, -\frac{7}{2})$ .

2. esetet: (mindkettő pozitív ezért nem változik az előjel)

$$2x - 7 + 2x + 7 = x + 15$$

$$x = 5$$

Ez megoldás mert  $5 \in (\frac{7}{2}, \infty)$ .

3. esetet:

$$-(2x + 7) + 2x + 7 = x + 15$$

$$-2x - 7 + 2x + 7 = x + 15$$

$$x = -1$$

Ez megoldás mert  $-1 \in \left[-\frac{7}{2}, \frac{7}{2}\right)$ .

Tehát két megoldás van:  $5$  és  $-1$ .

### 3. (g)

$$|2x - 1| < |x - 1|$$

Itt érdemes grafikont rajzolni és abból hamar rá lehet jönni hogy milyen esetek vannak.

$$2x - 1 = 1 - x$$

$$x = \frac{2}{3}$$

**6. (a)**

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{9-x} = \sqrt{2x-12}$$

Először kikötést kell tenni!

$$\left. \begin{array}{l} x+1 \geq 0 \rightarrow x \geq -1 \\ 9-x \geq 0 \rightarrow 9 \geq x \\ 2x-12 \geq 0 \rightarrow x \geq 6 \end{array} \right\} \text{Tehát } x \in [6, 9]$$

Ezután lehet négyzetre emelni.

$$x+1+9-x-2(\sqrt{x+1} \cdot \sqrt{9-x}) = 2x-12$$

$$22-2x = 2(\sqrt{x+1} \cdot \sqrt{9-x})$$

$$11-x = \sqrt{(x+1)(9-x)}$$

Itt megint kikötést kell tenni.

$$-x+11 \geq 0$$

$$x \leq 11$$

Bár ez nem változtat az előző kikötésen.

$$x^2+121-22x = -x^2+8x+9$$

$$2x^2-30x+112=0$$

$$x^2-15x+56=0$$

$$(x-7)(x-8)=8$$

$x_1=7$  és  $x_2=8$  ezek  $\in [6, 9]$  tehát mindkettő megoldás.

**6. (k)**

$$\sqrt{x^2+4x} > 2-x$$

Kikötés:  $x^2+4x \geq 0 \Rightarrow x \leq -4$  vagy  $x \geq 0$

1. eset:

$$2-x \leq 0$$

$x \geq 2 \Rightarrow x \in [2, \infty]$  ez megoldás.

2. eset:

$$2 - x > 0$$

$$x < 2$$

$$\sqrt{x^2 + 4x} > 2 - x$$

$$x^2 + 4x > x^2 - 4x + 4$$

$$8x > 4$$

$$x > \frac{1}{2}$$

Így  $\Rightarrow x \in \left(\frac{1}{2}, 2\right)$ , ez az intervallum még jó lesz de más már nem.

## 4. Logaritmikus, exponenciális egyenletek

### 4.2. Feladatok

#### 4.2.1. Órai feladatok

2.

$$2^{x+3} + 4^{1-x/2} = 33$$

Mindent  $2^x$  tagra kell vinni.

$$2^{x+3} = 2^3 \cdot 2^x = 8 \cdot 2^x$$

$$4^{1-x} = 4 \cdot 4^{-\frac{x}{2}} = 4 \cdot \frac{1}{4^{\frac{x}{2}}} = 4 \cdot \frac{1}{2^x} = 4 \cdot (2^2)^{\frac{2x}{2}} = 4 \cdot 2^x$$

$$\Rightarrow 8 \cdot 2^x + 4 \cdot \frac{1}{2^x} = 33$$

$$2^x := y \Rightarrow$$

$$8y + 4 \cdot \frac{1}{y} = 33$$

$$8y^2 - 33y + 4 = 0$$

$$8\left(y - \frac{1}{8}\right)(y - 4) = 0$$

$$y_1 = 4 \text{ és } y_2 = \frac{1}{8}$$

$$\text{ha } y_1 = 4 \text{ akkor } x_1 = 2$$

$$\text{ha } y_2 = \frac{1}{8} \text{ akkor } x_1 = -3$$

Ez a két megoldás lesz.



**3. (c)**

$$3^{x+2} \cdot 2^x - 2 \cdot 36^x + 18 = 0$$

$$9 \cdot 3^x \cdot 2^x = 9 \cdot 6^x$$

$$2 \cdot (6^2)^x = 2 \cdot 6^{2x}$$

$$9 \cdot 6^x - 2 \cdot 6^{2x} + 18 = 0$$

$$6x := y \Rightarrow 9y - 2y^2 + 18 = 0$$

$$2y^2 - 9y - 18 = 0$$

$$2\left(y + \frac{3}{2}\right)(y - 6) = 0$$

$$y_1 = -\frac{3}{2} \text{ és } y_2 = 6$$

$$6^x = -\frac{3}{2} \text{ ilyen nem létezik az } \mathbb{R}\text{-ben ezért } x_2 = 1 \text{ ez az egy megoldás van.}$$

**3. (f)**

$$4^{x+1} - 9 \cdot 2^x + 2 > 0$$

$$4 \cdot (2^x)^2 - 9 \cdot 2^x + 2 > 0 \quad 2^x := y$$

$$4y^2 - 9y + 2 > 0$$

$$y_1 = 2 \quad y_2 = \frac{1}{4}$$

$$1. \text{ eset: } y > 2 \rightarrow x > 1$$

$$2. \text{ eset: } y < \frac{1}{4} \Rightarrow x < -2$$

**8.**

$$3^{2+\log_9 25} + 25^{1-\log_5 2} + 10^{-\lg 4} = 3^{\log_9 81 + \log_9 25} + 25^{\log_5 5 - \log_5 2} + 10^{\lg 4^{-1}} =$$

$$\left(9^{\frac{1}{2}}\right)^{\log_9(81 \cdot 25)} + (5^2)^{\log_5 \frac{5}{2}} + \frac{1}{4} = (81 \cdot 25)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{5}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$$

**15. (c)**

$$\log_3(x+1) - \log_3(x+10) = 2 \cdot \log_3 \frac{9}{2} - 4$$

$$\log_3 \frac{(x+1)}{(x+10)} = \log_3 \left( \frac{9}{2} \right)^2 - \log_3 81$$

$$\log_3 \frac{(x+1)}{(x+10)} = \log_3 \frac{\left( \frac{81}{4} \right)}{81}$$

Mivel a logaritmus szigorúan monoton függvény.  $\implies$

$$\frac{x+1}{x+10} = \frac{1}{4}$$

$$4x+4 = x+10$$

$$3x = 6$$

$$x = 2$$

**15. (e)**

$$\log_{32}(2x) - \log_8(4x) + \log_2(x) = 3$$

$$\log_{32}(2) + \log_{32}(x) - (\log_8(4) + \log_8(x)) + \log_2(x) = 3$$

$$\frac{1}{5} + \frac{\log_2(x)}{\log_2(32)} - \frac{2}{3} + \frac{\log_2(x)}{\log_2(8)} + \log_2(x) = 3$$

$$\frac{1}{5} + \frac{\log_2(x)}{5} - \frac{2}{3} + \frac{\log_2(x)}{3} + \log_2(x) = 3$$

$$\log_2(x) \cdot \frac{13}{15} - \frac{7}{15} = 3$$

$$\log_2(x) = \frac{52}{15} \cdot \frac{15}{13}$$

$$\log_2(x) = 4$$

$$x = 2$$

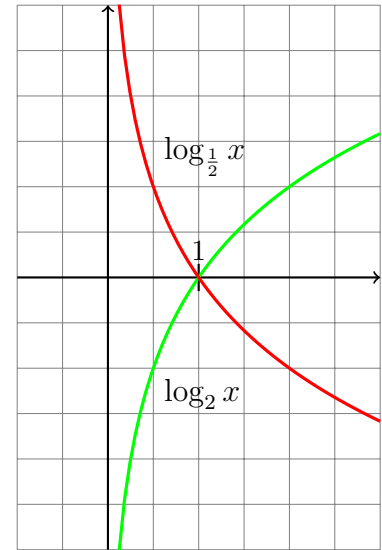
15. (j)

$$\log_{\frac{1}{2}} \left( \frac{3-x}{3x-1} \right) \geq 0$$

$$\log_{\frac{1}{2}} \left( \frac{3-x}{3x-1} \right) \geq \log_{\frac{1}{2}} 1$$

**Kikötés:**  $3x - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{1}{3}$

A  $\log_{\frac{1}{2}} x$  is az 1-nél megy át az  $x$  tengelyen de tükörképe lesz a  $\log_2 x$ -nek. Mivel ez egy szigorúan monoton csökkenő függvény, megfordul az egyenlőtlenségnél a reláció.



$$\frac{3-x}{3x-1} \leq 1$$

Egy tört akkor pozitív ha a számláló és a nevező is vagy pozitív vagy negatív.

i. Mindkettő pozitív

$$\left. \begin{array}{l} 3-x \geq 0 \\ 3x-1 \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x \in \left[ \frac{1}{3}, 3 \right]$$

ii. Mindkettő negatív

$$3-x \leq 0 \Rightarrow x \geq 3$$

$$3x-1 \leq 0 \Rightarrow x \leq \frac{1}{3}$$

Ilyen az  $\mathbb{R}$ -ben nincs tehát marad az előző kikötés.  $x \in \left( \frac{1}{3}, 3 \right]$  (Mert az első kikötés szerint  $x \neq \frac{1}{3}$ ).

Ezt még hozzá kell tenni a kikötéshez.

$$\frac{3-x}{3x-1} \leq 1$$

$$3-x \leq 3x-1$$

$$-4x \leq -4$$

$$x \geq 1$$

Tehát a megoldás:  $x \in [1, 3]$ .

## 5. Trigonometrikus azonosságok, egyenletek, egyenlőtlenségek

### 5.2. Feladatok

#### 5.2.1. Órai feladatok

##### 4. (a)

$$\sin(4x) = \sin(x)$$

1. megoldási lehetőség:

$$4x = x$$

$$4x = x + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{2k\pi}{3} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Így ezek jó megoldások:  $k = 0$  esetén  $x = 0$ ,  $k = 1$  esetén  $x = \frac{2\pi}{3} \dots$   
Ezek a triviális megoldás.

2. megoldási lehetőség:

$$4x = \pi - x + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi + 2k\pi}{5}$$

Így  $k = 0$  esetén  $x = \frac{\pi}{5}$ ,  $k = 1$  esetén  $x = \frac{3\pi}{5}$

##### 4. (d)

$$\cos(2x) - 3 \cdot \cos(x) + 2 = 0$$

$$\cos^2(x) - \sin^2(x) - 3 \cdot \cos(x) + 2 = 0$$

$$\cos^2(x) - (1 - \cos^2(x)) - 3 \cdot \cos(x) + 2 = 0$$

$$2 \cdot \cos^2(x) - 3 \cdot \cos(x) + 1 = 0$$

Ez pedig már egy sima másodfokú egyenlet  $\cos(x)$ -re.

$$\cos(x) := a \Rightarrow 2a^2 - 3a + 1 = 0 \Rightarrow a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{2}$$

$$\cos(x) = 1 \text{ vagy } \cos(x) = \frac{1}{2}$$

Mindkettő lehetséges:

$$\cos(x) = 1 \Rightarrow x = 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos(x) = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

**Viszont!** Mivel  $\cos(\beta) = \cos(-\beta)$ , ezért

$$\cos(x) = \frac{1}{2} \Rightarrow x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

**4. (h)**

$$\sqrt{3} \cdot \sin(x) + \cos(x) = \sqrt{3}$$

$$\sqrt{3} \cdot \sin(x) + 1 \cdot \cos(x) = \sqrt{3} \quad / : 2$$

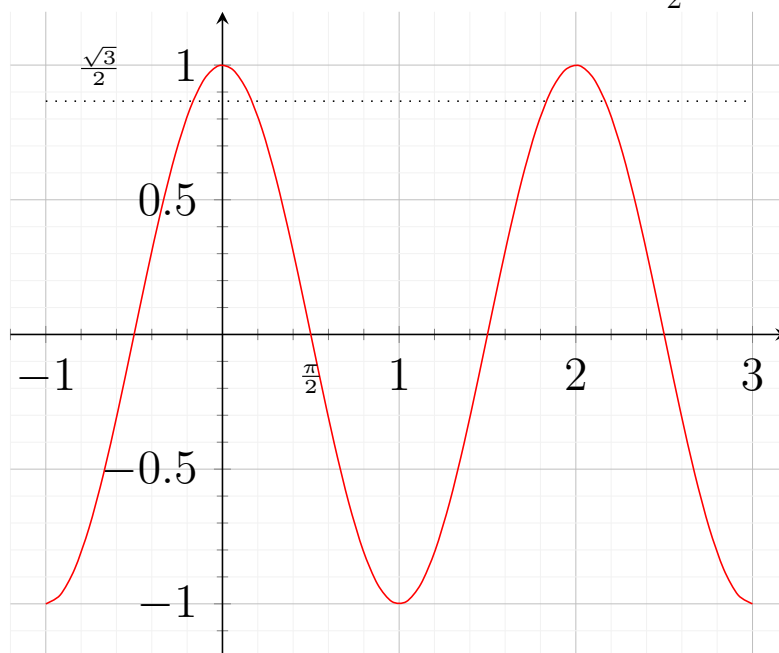
$$\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sin(x) + \frac{1}{2} \cdot \cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \cdot \sin(x) + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \cdot \cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

**Megjegyzés:**  $\cos(\alpha - \beta) = \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) + \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta)$

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Melyek azok a szögek amelyeknek a koszinusza  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  ?



i.

$$x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

ii.

$$x - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

**7. (c)**

$$\frac{2 \cdot \sin(x) + 1}{2 \cdot \cos(x)} \leq 0$$

$$\text{Kikötés: } x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

1. eset

$$2 \cdot \sin(x) + 1 \leq 0 \Rightarrow \sin(x) \leq -\frac{1}{2}$$

$$\cos(x) > 0$$

$$x \in \left\{ \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right] \right\} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

Itt lesz a  $\cos(x) > 0$ . Számoljuk ki hol lesz  $\sin(x) = -\frac{1}{2}$  vagy  $\sin(x) = \frac{1}{2}$

$$x \in \left[ \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} \right]$$

A kettő metszetét kell venni:

$$x \in \left( \frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6} \right] + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

2. eset Itt megfordulnak a relációk. HF.

## 6. Nagyságrend-őrző becslések és függvények további becslései

### 6.2. Feladatok

#### 6.2.1. Órai feladatok

##### 1. (a)

$$4x^5 - 3x^4 - 2x^2 - 5$$

i. Felső becslés Mivel a negatív tagok csak csökkentik az értéket:

$$4x^5 - 3x^4 - 2x^2 - 5 \leq 4x^5 \quad x > 0 \text{ esetén}$$

$$\Rightarrow M = 4, n = 5, R = 0$$

ii. Alsó becslés

$$4x^5 - 3x^4 - 2x^2 - 5 \geq 6x^5 \quad x > 0 \text{ esetén}$$

$$\Rightarrow m = 6, n = 5, R = 0$$

##### 1. (b)

$$2x^3 - 3x^2 + 6x + 7$$

i. Felső becslés Első lépésként elhagyjuk azokat amelyeket csökkentik:

$$2x^3 - 3x^2 + 6x + 7 \leq 2x^3 + 6x + 7 \quad x > 0 \text{ esetén}$$

$$\leq 2x^3 + 6x^3 + 7x^3 = 15x^3 \quad x \leq 1 \Rightarrow M = 15, n = 3, R = 1$$

ii. Alsó becslés

$$2x^3 - 3x^2 + 6x + 7 \geq 2x^3 - 3x^2 \quad x > 0 \text{ esetén}$$

$$2x^3 - 3x^2 \geq 2x^3 - x^3 = x^3 \quad x > 3 \text{ esetén}$$

$$\Rightarrow m = 1, n = 3, R = 3$$

Másik megoldási lehetőség:

$$2x^3 - 3x^2 + 6x + 7 \geq 2x^3 - (3x^2 - 6x - 7)$$

$$3x^2 - 6x - 7 \Rightarrow \frac{6 \pm 2\sqrt{30}}{6} \geq 3$$

$$2x^3 - (3x^2 - 6x - 7) \geq 2x^3 \Rightarrow m = 2, n = 3, R = 3$$

**1. (c)**

$$6x^5 + 7x^4 + 10x^3 + x^2 + 2x + 3$$

i. Felső becslés

$$6x^5 + 7x^4 + 10x^3 + x^2 + 2x + 3 \leq 29x^5 \quad x \geq 1 \text{ esetén}$$

$$\Rightarrow M = 29, n = 5, R = 1$$

ii. Alsó becslés

$$6x^5 + 7x^4 + 10x^3 + x^2 + 2x + 3 \geq 6x^5 \quad x \geq 0 \text{ esetén}$$

$$\Rightarrow m = 6, n = 5, R = 0$$

**3. (a)**

$$R(x) = \frac{3x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 7x + 7}{5x^2 - 3x - 10}$$

A nevezőt növeljük, a számlálót csökkentjük.

$$\geq \frac{m \cdot x^4}{M \cdot x^2} = \frac{m}{M} \cdot x^2$$

$$3x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 7x + 7 \geq 3x^4 \quad x \geq 0 \text{ esetén}$$

$$5x^2 - 3x - 10 \leq 5x^2 \quad x \geq 0 \text{ esetén}$$

$$R(x) \geq \frac{3x^4}{5x^2} = \frac{3}{5}x^2 \quad x \geq 0 \text{ esetén}$$

Másik lehetőség:

$$3x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 7x + 7 \leq 23x^4 \quad x > 1 \text{ esetén}$$

$$5x^2 - 3x - 10 = 5x^2 - (3x + 10) \geq 5x^2 - x^2 = 4x^2 \quad x \geq 5 \text{ esetén}$$

Így:

$$R(x) \leq \frac{23x^4}{4x^2} = \frac{23x^2}{4} \quad x \geq 5 \text{ esetén}$$



# Tartalomjegyzék

|  |          |
|--|----------|
| <b>1. Algebrai és Gyökös kifejezések I.</b>      | <b>2</b> |
| 1.2. Feladatok . . . . .                         | 2        |
| 1.2.1. Órai feladatok . . . . .                  | 2        |
| 3. (b) . . . . .                                 | 2        |
| 4. (a) . . . . .                                 | 2        |
| 6. . . . .                                       | 2        |
| 12. (c) . . . . .                                | 3        |
| 19. (a) . . . . .                                | 3        |
| 19. (b) . . . . .                                | 3        |
| 19. (c) . . . . .                                | 4        |
| <b>2. Másodfokú egyenletek, egyenlőtlenségek</b> | <b>4</b> |
| 2.2. Feladatok . . . . .                         | 4        |
| 2.2.1. Órai feladatok . . . . .                  | 4        |
| 3. (b) . . . . .                                 | 4        |
| 4. (c) . . . . .                                 | 4        |
| <b>3. Algebrai és gyökös kifejezések II.</b>     | <b>5</b> |
| 3.2. Feladatok . . . . .                         | 5        |
| 3.2.1. Órai feladatok . . . . .                  | 5        |
| 1. (c) . . . . .                                 | 5        |
| 1. (e) . . . . .                                 | 5        |
| 3. (b) . . . . .                                 | 5        |
| 3. (g) . . . . .                                 | 6        |
| 6. (a) . . . . .                                 | 7        |
| 6. (k) . . . . .                                 | 7        |
| <b>4. Logaritmikus, exponenciális egyenletek</b> | <b>8</b> |
| 4.2. Feladatok . . . . .                         | 8        |
| 4.2.1. Órai feladatok . . . . .                  | 8        |
| 2. . . . .                                       | 8        |
| 3. (c) . . . . .                                 | 9        |
| 3. (f) . . . . .                                 | 9        |
| 8. . . . .                                       | 9        |
| 15. (c) . . . . .                                | 10       |
| 15. (e) . . . . .                                | 10       |
| 15. (j) . . . . .                                | 11       |

|  |           |
|--|-----------|
| <b>5. Trigonometrikus azonosságok, egyenletek,<br/>egyenlőtlenségek</b>  | <b>12</b> |
| 5.2. Feladatok . . . . .   | 12        |
| 5.2.1. Órai feladatok . . . . .  | 12        |
| 4. (a) . . . . .   | 12        |
| 4. (d) . . . . .   | 12        |
| 4. (h) . . . . .   | 13        |
| 7. (c) . . . . .   | 14        |
| <b>6. Nagyságrend-őrző becslések és<br/>függvények további becslései</b> | <b>15</b> |
| 6.2. Feladatok . . . . .   | 15        |
| 6.2.1. Órai feladatok . . . . .  | 15        |
| 1. (a) . . . . .   | 15        |
| 1. (b) . . . . .   | 15        |
| 1. (c) . . . . .   | 16        |
| 3. (a) . . . . .   | 16        |