Matematikai Alapok

Megoldások

2018. október 6.

1. Algebrai és Gyökös kifejezések I.

1.2. Feladatok

1.2.1. Órai feladatok

3. (b)

$$\frac{a}{a^3+a^2b+ab^2+b^3}+\frac{b}{a^3-a^2b+ab^2-b^3}+\frac{1}{a^2-b^2}-\frac{1}{a^2+b^2}-\frac{a^2+3b^2}{a^4-b^4}=0$$

$$\frac{a}{a^2(a+b)+b^2(a+b)}+\frac{b}{a^2(a-b)+b^2(a-b)}+\frac{1}{(a+b)(a-b)}-\frac{1}{a^2+b^2}-\frac{a^2+3b^2}{(a^2-b^2)(a^2+b^2)}=0$$

$$\frac{a}{(a+b)(a^2+b^2)}+\frac{b}{(a-b)(a^2+b^2)}+\frac{1}{(a+b)(a-b)}-\frac{1}{a^2+b^2}-\frac{a^2+3b^2}{(a+b)(a-b)(a^2+b^2)}=0$$

$$\frac{a(a-b)+b(a+b)+(a^2+b^2)-(a+b)(a-b)-(a^2+3b^2)}{(a+b)(a-b)(a^2+b^2)}=0$$

$$\frac{a^2-ab+ab+b^2+a^2+b^2-a^2+b^2-a^2-3b^2}{(a+b)(a-b)(a^2+b^2)}=0$$

4. (a)

1. Első lehetőség: $a+b+c=0$ kiemelhető így $(a+b+c)\cdot(a^2+b^2-ab)$
2. Második lehetőség: $(a+b+c)$-ből kifejezzük az egyiket $\rightarrow$ $c=-a-b$ és ezt kell behelyettesíteni.

   $a^3+a^2(-a-b)-ab(-a-b)+b^2(-a-b)+b^3=$

   $a^3-a^3-a^2b+a^2b+ab^2-ab^2-b^3+b^3=0$

6.

$$\frac{x^3-x-y^3+y+xy^2-x^2y}{x^3+x-y^3-y+xy^2-x^2y}=\frac{xy(y-x)+(y-x)+(x-y)(x^2+xy+y^2)}{xy(y-x)-(y-x)+(x-y)(x^2+xy+y^2)}=$$

$$\frac{(y-x)(xy+1-x^2-y^2-xy)}{(y-x)(xy-1-x^2-y^2-xy)}=\frac{1-x^2-y^2}{-1-x^2-y^2}=\frac{-1(-1+x^2+y^2)}{-1(1+x^2+y^2)}=\frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}$$

Ha $x=\dfrac{k(1-z^2)}{(1+z^2)}$ akkor $y=\dfrac{2k\cdot z}{1+z^2}$ Bizonyítsuk be hogy behelyettesítés után a kifejezés nem függ a z értékétől (vagyis ki fog esni)!

$$\frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}=\frac{x^2+y^2+1-2}{x^2+y^2+1}=1-\frac{2}{x^2+y2+1}$$

Behelyettesítve:

$$x^2+y=\frac{(k(1-z^2))^2}{(1+z^2)^2}+\frac{(2kz)^2}{(1+z^2)^2}=\frac{k^2(1-z^2)^2+4k^2z^2}{(1+z^2)^2}$$

$$=\frac{k^2(1+z^4-2z^2+4z^2)}{(1+z^2)^2}=\frac{k^2(z^2+1)^2}{(1+z^2)^2}=k^2$$

Így $1-\dfrac{2}{k^2+1}$ ami valóban független a z-től.

12. (c)

$$\left(\sqrt{x}-\frac{\sqrt{xy}+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}+\frac{2\sqrt{xy}}{x-y}\right)=$$

$$\left(\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{y})-(\sqrt{xy}+y)}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-\sqrt{y})+\sqrt{y}(\sqrt{x}+\sqrt{y})+2\sqrt{xy}}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}\right)=$$

$$\left(\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right)\cdot\left(\frac{x-\sqrt{xy}+\sqrt{xy}+y+2\sqrt{xy}}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}\right)=\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{x}}\cdot\left(\frac{x+y+2\sqrt{xy}}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}\right)$$

$$=\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\cdot\left(\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})}\right)=\frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$$

(mert: $x-y=(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})$)

19. (a)

$x_0=2\quad P(x)=3x^2-7x+2$

Ha egy polinomnak c gyöke akkor $f(x)=(x-c)\cdot g(x)$

$x^2-3x+2=0$-nak $x_1=1$ és $x_2=2$ gyökök.

$x^2-3x+3=(x-1)(x-2)$

$3x^2-7x+2\quad x_0=2$

$3x^2-7x+2=(x-2)(3x-1)$

19. (b)

$x_0\quad 2x^3-4x^2-18=(x-3)(...)$

$(x-3)(ax^2+bx+c)=ax^3+bx^2+cx-3ax^2-3vx-3c=ax^3+(b-3a)x^2+(c-3b)x-3c$

Így $a=2$, $b=7$ és $b-3a=4$ vagy $c-3b=0\Rightarrow b=2\Longrightarrow(2x^2+2x+6)\Rightarrow(x-3)(2x^2+6x+2)$

19. (c)

$2x^4 - 5x^3 - 6x^2 + 3x + 2 \quad x_0 = -1 \Longrightarrow (x+1)(2x^3 - 7x^2 + x + 2)$

2. Másodfokú egyenletek, egyenlőtlenségek

2.2. Feladatok

2.2.1. Órai feladatok

3. (b)

$\frac{3x^2 + 7x - 4}{x^2 + 2x - 3} < 2$

i. ha $x^2 + 2x - 3 > 0$

   $x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x-1)$ ha $x > 1$ vagy $x < -3$

   $3x^2 + 7x - 4 < 2x^2 + 4x - 6$

   $x^2 + 3x + 2 < 0 \Rightarrow x_1 = -1$ és $x_2 = -2$. $x \in (-2, -1)$ ez nem megoldás mert a kettőnek nincs közös része.

ii. ha $x^2 + 2x - 3 < 0$: $x \in (-3, 1)$
   $x^2 + 3x + 2 > 0$: $x < -2$ vagy $x > -1$
   $x \in (-3, -2)$ vagy $x \in (-1, 1)$

4. (c)

$(p^2 - 1)x^2 + 2(p-1)x + 1 > 0$

Ha $p = 1$ akkor teljesül. Ha a függvény grafikonja metszi az x tengelyt van gyöke. Ha két helyen metszi két gyöke van. Ha a diszkrimináns kisebb mint 0 nincs megoldása. Ha pozitív akkor két megoldása van. Ha nulla akkor egy az $\mathbb{R}$-ben.

$b^2 - 4ac = (2(p-1))^2 - 3 \cdot 1 \cdot (p^2) - 1 < 0$

$4(p-1)^2 - 4(p^2 - 1) < 0$

$4(p^2 - 2p + 1) - 4p^2 + 4 < 0$

$4p^2 - 8p + 4 - 4p^2 + 4 < 0$

$-8p + 8 < 0$

$1 < p$ Ekkor negatív a diszkrimináns tehát nem lesz megoldás.

3. Algebrai és gyökös kifejezések II.

3.2. Feladatok

3.2.1. Órai feladatok

1. (c)

$$\frac{2x^2-13x-7}{8x^3+1} = \frac{(x-7)(2x+1)}{(2x+1)(4x^2-2x+1)} = \frac{(x-7)}{(x^2-2x+1)}$$

$2x^2-13x-7=0 \to x_1=7,\ x_2=-\frac{1}{2}$

$2x^2-13x-7=2(x-7)(x+\frac{1}{2})=(x-7)(2x+1)$

$8x^3+1=(2x)^3+(1)^3=(2x+1)(4x^2-2x+1)$

1. (e)

$$\frac{2}{x^2-1}-\frac{3}{x^3-1}=\frac{2}{(x-1)(x+1)}-\frac{3}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{2(x^2+x+1)-3(x+1)}{(x-1)(x+1)(x^2+x+1)}$$

$$=\frac{2x^2+2x+2-3x-3}{(x-1)(x+1)(x^2+x+1)}=\frac{2x^2-x-1}{(x-1)(x+1)(x^2+x+1)}$$

$$=\frac{2(x-1)(x+\frac{1}{2})}{(x-1)(x+1)(x^2+x+1)}=\frac{2x+1}{(x+1)(x^2+x+1)}$$

3. (b)

$|2x-7|-|2x+7|=x+15 \quad x\in\mathbb{R}$

1. eset: mindkettő negatív

   $2x-7<0 \Rightarrow x<\frac{7}{2}$

   $2x+7<0 \Rightarrow x<-\frac{7}{2}$

   $\Longrightarrow x\in(-\infty,\frac{7}{2})$

2. eset: mindkettő pozitív

   $2x+7\geq 0 \Rightarrow x\geq -\frac{7}{2}$

   $2x-7\geq 0 \Rightarrow x\geq \frac{7}{2}$

   $\Longrightarrow x\in[\frac{7}{2},\infty)$

3. eset ($2x + 7$ biztos hogy nagyobb mint $2x - 7$)

$2x - 7 < 0$ és $2x + 7 \geq 0 \Rightarrow x \in \left[-\frac{7}{2}, \frac{7}{2}\right)$

Kiszámoljuk

1. esetet: (-1-szeresét kell venni mert negatív)

$$
\begin{aligned}
-(2x-7) + (-(2x+7)) &= x + 15 \\
7 - 2x - 2x - 7 &= x + 15 \\
-4x &= x + 15 \\
x &= -3
\end{aligned}
$$

Ez nem megoldás mert $-3 \notin (-\infty, -\frac{7}{2})$.

2. esetet: (mindkettő pozitív ezért nem változik az előjel)

$$
\begin{aligned}
2x - 7 + 2x + 7 &= x + 15 \\
x &= 5
\end{aligned}
$$

Ez megoldás mert $5 \in (\frac{7}{2}, \infty)$.

3. esetet:

$$
\begin{aligned}
-(2x+7) + 2x + 7 &= x + 15 \\
-2x - 7 + 2x + 7 &= x + 15 \\
x &= -1
\end{aligned}
$$

Ez megoldás mert $-1 \in \left[-\frac{7}{2}, \frac{7}{2}\right)$.

Tehát két megoldás van: 5 és -1.

3. (g)

$|2x - 1| < |x - 1|$

Itt érdemes grafikont rajzolni és abból hamar rá lehet jönni hogy milyen esetek vannak.

$2x - 1 < 1 - x$

$x < \frac{2}{3}$

6. (a)

$\sqrt{x+1} - \sqrt{9-x} = \sqrt{2x-12}$

Először kikötést kell tenni!

$$\left.\begin{array}{l} x+1 \geq 0 \rightarrow x \geq -1 \\ 9-x \geq 0 \rightarrow 9 \geq x \\ 2x-12 \geq 0 \rightarrow x \geq 6 \end{array}\right\} \text{Tehát } x \in [6,9]$$

Ezután lehet négyzetre emelni.

$x+1+9-x-2(\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{9-x}) = 2x-12$

$22-2x = 2(\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{9-x})$

$11-x = \sqrt{(x+1)(9-x)}$

Itt megint kikötést kell tenni.

$-x+11 \geq 0$

$x \leq 11$

Bár ez nem változtat az előző kikötésen.

$x^2+121-22x = -x^2+8x+9$

$2x^2-30x+112 = 0$

$x^2-15x+56 = 0$

$(x-7)(x-8) = 8$

$x_1 = 7$ és $x_2 = 8$ ezek $\in [6,9]$ tehát mindkettő megoldás.

6. (k)

$\sqrt{x^2+4x} > 2-x$

Kikötés: $x^2+4x \geq 0 \Rightarrow x \leq -4$ vagy $x \geq 0$

1. eset:

   $2-x \leq 0$

   $x \geq 2 \Rightarrow x \in [2,\infty]$ ez megoldás.

2. eset:

$2 - x > 0$

$x < 2$

$\sqrt{x^2 + 4x} > 2 - x$

$x^2 + 4x > x^2 - 4x + 4$

$8x > 4$

$x > \frac{1}{2}$

Így $\Rightarrow x \in \left(\frac{1}{2}, 2\right)$, ez az intervallum még jó lesz de más már nem.

4. Logaritmikus, exponenciális egyenletek

4.2. Feladatok

4.2.1. Órai feladatok

2.

$2^{x+3} + 4^{1-x/2} = 33$

Mindent 2^x tagra kell vinni.

$2^{x+3} = 2^3 \cdot 2^{x/2} = 8 \cdot 2^x$

$4^{1-x} = 4 \cdot 4^{-\frac{x}{2}} = 4 \cdot \frac{1}{4^{\frac{x}{2}}} = 4 \cdot \frac{1}{2^x} = 4 \cdot (2^2)^{\frac{2x}{2}} = 4 \cdot 2^x \Rightarrow 8 \cdot 2^x + 4 \cdot \frac{1}{2^x} = 33$

$2^x := y \Rightarrow$

$8y + 4 \cdot \frac{1}{y} = 33$

$8y^2 - 33y + 4 = 0$

$8(y - \frac{1}{8})(y - 4) = 0$

$y_1 = 4$ és $y_2 = \frac{1}{8}$

ha $y_1 = 4$ akkor $x_1 = 2$
ha $y_2 = \frac{1}{8}$ akkor $x_2 = -3$
Ez a két megoldás lesz.

3. (c)

$3^{x+2} \cdot 2^x - 2 \cdot 36^x + 18 = 0$

$9 \cdot 3^x \cdot 2^x = 9 \cdot 6^x$

$2 \cdot (6^2)^x = 2 \cdot 6^{2x}$

$9 \cdot 6^x - 2 \cdot 6^{2x} + 18 = 0$

$6x := y \Rightarrow 9y - 2y^2 + 18 = 0$

$2y^2 - 9y - 18 = 0$

$2(y + \frac{3}{2})(y - 6) = 0$

$y_1 = -\frac{3}{2}$ és $y_2 = 6$

$6^x = -\frac{3}{2}$ ilyen nem létezik az $\mathbb{R}$-ben ezért $x_2 = 1$ ez az egy megoldás van.

3. (f)

$4^{x+1} - 9 \cdot 2^x + 2 > 0$

$4 \cdot (2^x)^2 - 9 \cdot 2^x + 2 > 0 \quad 2^x := y$

$4y^2 - 9y + 2 > 0$

$y_1 = 2 \quad y_2 = \frac{1}{4}$

1. eset: $y > 2 \rightarrow x > 1$
2. eset: $y < \frac{1}{4} \Rightarrow x < -2$

8.

$3^{2+\log_9 25} + 25^{1-\log_5 2} + 10^{-\lg 4} = 3^{\log_9 81 + \log_9 25} + 25^{\log_5 5 - \log_5 2} + 10^{\lg 4^{-1}} =$

$\left(9^{\frac{1}{2}}\right)^{\log_9(81\cdot 25)} + \left(5^2\right)^{\log_5 \frac{5}{2}} + \frac{1}{4} = (81 \cdot 25)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{5}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$

15. (c)

$\log_3(x+1) - \log_3(x+10) = 2 \cdot \log_3 \dfrac{9}{2} - 4$

$\log_3 \dfrac{(x+1)}{(x+10)} = \log_3 \left(\dfrac{9}{2}\right)^2 - \log_3 81$

$\log_3 \dfrac{(x+1)}{(x+10)} = \log_3 \dfrac{\left(\dfrac{81}{4}\right)}{81}$

Mivel a logaritmus szigorúan monoton függvény. $\Longrightarrow$

$\dfrac{x+1}{x+10} = \dfrac{1}{4}$

$4x + 4 = x + 10$

$3x = 6$

$x = 2$

15. (e)

$\log_{32}(2x) - \log_8(4x) + \log_2(x) = 3$

$\log_{32}(2) + \log_{32}(x) - (\log_8(4) + \log_8(x)) + \log_2(x) = 3$

$\dfrac{1}{5} + \dfrac{\log_2(x)}{\log_2(32)} - \dfrac{2}{3} + \dfrac{\log_2(x)}{\log_2(8)} + \log_2(x) = 3$

$\dfrac{1}{5} + \dfrac{\log_2(x)}{5} - \dfrac{2}{3} + \dfrac{\log_2(x)}{3} + \log_2(x) = 3$

$\log_2(x) \cdot \dfrac{13}{15} - \dfrac{7}{15} = 3$

$\log_2(x) = \dfrac{52}{15} \cdot \dfrac{15}{13}$

$\log_2(x) = 4$

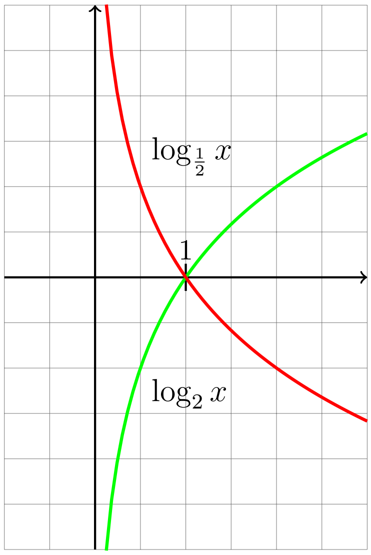
$x = 2$

15. (j)

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{3-x}{3x-1}\right) \geq 0$$

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{3-x}{3x-1}\right) \geq \log_{\frac{1}{2}} 1$$

Kikötés: $3x-1 \neq 0 \Rightarrow x \neq \dfrac{1}{3}$



A $\log_{\frac{1}{2}} x$ is az 1-nél megy át az x tengelyen de tükörképe lesz a $\log_2 x$-nek. Mivel ez egy szigorúan monoton csökkenő függvény, megfordul az egyenlőtlenségnél a reláció.

$$\frac{3-x}{3x-1} \leq 1$$

Egy tört akkor pozitív ha a számláló és a nevező is vagy pozitív vagy negatív.

i. Mindkettő pozitív

$$\left.\begin{array}{l} 3-x \geq 0 \\ 3x-1 \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x \in \left[\frac{1}{3}, 3\right]$$

ii. Mindkettő negatív

$$3-x \leq 0 \Rightarrow x \geq 3$$

$$3x-1 \leq 0 \Rightarrow x \leq \frac{1}{3}$$

Ilyen az $\mathbb{R}$-ben nincs tehát marad az előző kikötés. $x \in \left(\frac{1}{3}, 3\right]$ (Mert az első kikötés szerint $x \neq \frac{1}{3}$).

Ezt még hozzá kell tenni a kikötéshez.

$$\frac{3-x}{3x-1} \leq 1$$

$$3-x \leq 3x-1$$

$$-4x \leq -4$$

$$x \geq 1$$

Tehát a megoldás: $x \in [1, 3]$.

5. Trigonometrikus azonosságok, egyenletek, egyenlőtlenségek

5.2. Feladatok

5.2.1. Órai feladatok

4. (a)

$\sin(4x) = \sin(x)$

1. megoldási lehetőség:

   $4x = x$

   $4x = x + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

   $x = \dfrac{2k\pi}{3} \quad k \in \mathbb{Z}$

   Így ezek jó megoldások: $k = 0$ esetén $x = 0$, $k = 1$ esetén $x = \dfrac{2\pi}{3}$ ...
   Ezek a triviális megoldás.

2. megoldási lehetőség:

   $4x = \pi - x + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

   $x = \dfrac{\pi + 2k\pi}{5}$

   Így $k = 0$ esetén $x = \dfrac{\pi}{5}$, $k = 1$ esetén $x = \dfrac{3\pi}{5}$

4. (d)

$\cos(2x) - 3 \cdot \cos(x) + 2 = 0$

$\cos^2(x) - \sin^2(x) - 3 \cdot \cos(x) + 2 = 0$

$\cos^2(x) - (1 - \cos^2(x))3 \cdot \cos(x) + 2 = 0$

$2 \cdot \cos^2(x) - 3 \cdot \cos(x) + 1 = 0$

Ez pedig már egy sima másodfokú egyenlet $\cos(x)$-re.

$\cos(x) := a \Rightarrow 2a^2 - 3a + 1 = 0 \Rightarrow a_1 = 1, a_2 = \dfrac{1}{2}$

$\cos(x) = 1$ vagy $\cos(x) = \dfrac{1}{2}$

Mindkettő lehetséges:

$$\cos(x) = 1 \Rightarrow x = 2k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos(x) = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Viszont! Mivel $\cos(\beta) = \cos(-\beta)$, ezért

$$\cos(x) = \frac{1}{2} \Rightarrow x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$$

4. (h)

$$\sqrt{3} \cdot \sin(x) + \cos(x) = \sqrt{3}$$

$$\sqrt{3} \cdot \sin(x) + 1 \cdot \cos(x) = \sqrt{3} \quad / : 2$$

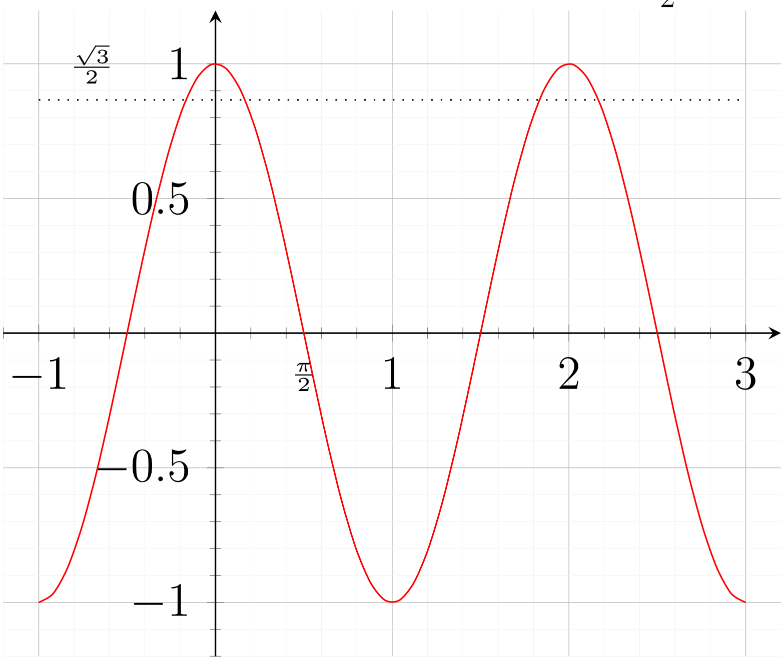
$$\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sin(x) + \frac{1}{2} \cdot \cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \cdot \sin(x) + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \cdot \cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Megjegyzés: $\cos(\alpha - \beta) = \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) + \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta)$

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Melyek azok a szögek amelyeknek a koszinusza $\frac{\sqrt{3}}{2}$?



i.

$$x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

ii.

$$x - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

7. (c)

$$\frac{2 \cdot \sin(x) + 1}{2 \cdot \cos(x)} \leq 0$$

Kikötés: $x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$

1. eset

   $$2 \cdot \sin(x) + 1 \leq 0 \Rightarrow \sin(x) \leq -\frac{1}{2}$$

   $cos(x) > 0$

   $$x \in \left\{ \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right] \right\} + 2k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$$

   Itt lesz a $\cos(x) > 0$. Számoljuk ki hol lesz $\sin(x) = -\frac{1}{2}$ vagy $\sin(x) = \frac{1}{2}$

   $$x \in \left[\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right]$$

   A kettő metszetét kell venni:

   $$x \in \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}\right] + 2k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$$

2. eset Itt megfordulnak a relációk. HF.

6. Nagyságrend-őrző becslések és függvények további becslései

6.2. Feladatok

6.2.1. Órai feladatok

1. (a)

$4x^5 - 3x^4 - 2x^2 - 5$

i. Felső becslés Mivel a negatív tagok csak csökkentik az értéket:

$4x^5 - 3x^4 - 2x^2 - 5 \leq 4x^5 \qquad x > 0$ esetén

$\Rightarrow M = 4,\ n = 5,\ R = 0$

ii. Alsó becslés

$4x^5 - 3x^4 - 2x^2 - 5 \geq 6x^5 \qquad x > 0$ esetén

$\Rightarrow m = 6,\ n = 5,\ R = 0$

1. (b)

$2x^3 - 3x^2 + 6x + 7$

i. Felső becslés Első lépésként elhagyjuk azokat amelyek csökkentik:

$2x^3 - 3x^2 + 6x + 7 \leq 2x^3 + 6x + 7 \qquad x > 0$ esetén

$\leq 2x^3 + 6x^3 + 7x^3 = 15x^3 \qquad x \leq 1 \Rightarrow M = 15,\ n = 3,\ R = 1$

ii. Alsó becslés

$2x^3 - 3x^2 + 6x + 7 \geq 2x^3 - 3x^2 \qquad x > 0$ esetén

$2x^3 - 3x^2 \geq 2x^3 - x^3 = x^3 \qquad x > 3$ esetén

$\Rightarrow m = 1,\ n = 3,\ R = 3$

Másik megoldási lehetőség:

$2x^3 - 3x^2 + 6x + 7 \geq 2x^3 - (3x^2 - 6x - 7)$

$3x^2 - 6x - 7 \Rightarrow \dfrac{6 \pm 2\sqrt{30}}{6} \geq 3$

$2x^3 - (3x^2 - 6x - 7) \geq 2x^3 \Rightarrow m = 2,\ n = 3,\ R = 3$

1. (c)

$6x^5 + 7x^4 + 10x^3 + x^2 + 2x + 3$

i. Felső becslés

$6x^5 + 7x^4 + 10x^3 + x^2 + 2x + 3 \leq 29x^5 \qquad x \geq 1$ esetén

$\Rightarrow M = 29,\ n = 5,\ R = 1$

ii. Alsó becslés

$6x^5 + 7x^4 + 10x^3 + x^2 + 2x + 3 \geq 6x^5 \qquad x \geq 0$ esetén

$\Rightarrow m = 6,\ n = 5,\ R = 0$

3. (a)

$$R(x) = \frac{3x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 7x + 7}{5x^2 - 3x - 10}$$

A nevezőt növeljük, a számlálót csökkentjük.

$$\geq \frac{m \cdot x^4}{M \cdot x^2} = \frac{m}{M} \cdot x^2$$

$3x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 7x + 7 \geq 3x^4 \qquad x \geq 0$ esetén

$5x^2 - 3x - 10 \leq 5x^2 \qquad x \geq 0$ esetén

$R(x) \geq \frac{3x^4}{5x^2} = \frac{3}{5}x^2 \qquad x \geq 0$ esetén

Másik lehetőség:

$3x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 7x + 7 \leq 23x^4 \qquad x > 1$ esetén

$5x^2 - 3x - 10 = 5x^2 - (3x + 10) \geq 5x^2 - x^2 = 4x^2 \qquad x \geq 5$ esetén

Így:

$R(x) \leq \frac{23x^4}{4x^2} = \frac{23x^2}{4} \qquad x \geq 5$ esetén

7. Kijelentések, kvantorok, logikai állítások I.

7.2. Feladatok

7.2.1. Órai feladatok

1. (h)

$(\neg A \vee B) \Rightarrow B = A \vee B$

A	B	$\neg A$	$(\neg A \vee B)$	$(\neg A \vee B) \Rightarrow B$	$A \vee B$
I	I	H	I	I	I
H	H	I	I	H	H
I	H	H	H	I	I
H	I	I	I	I	I

3. (a)

$x = 0$ és $y = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 0$ Ez igaz.

Megfordítva:

$x = 0$ és $y = 0 \Leftarrow x^2 + y^2 = 0$ Ez is igaz.

3. (b)

$x \cdot y = x \cdot z \Rightarrow y = z$ Ez hamis.

Mert ha pl: $x = 0$. Megfordítva:

$x \cdot y = x \cdot z \Leftarrow y = z$ Így már viszont igaz.

3. (c)

$x > y^2 \Rightarrow x > 0$ Ez igaz.

Megfordítva:

$x > y^2 \Leftarrow x > 0$ Hamis.

5. (a)

$\forall n : \frac{1}{n} < 0.01$ Hamis.

Tagadjuk:

$\neg(\forall n : \frac{1}{n} < 0.01) \rightarrow \exists n : \neg(\frac{1}{n} < 0.01) \rightarrow \exists n : \frac{1}{n} \geq 0.01$

5. (b)

$\exists n : \dfrac{1}{n} < 0.01$ Igaz.

Tagadjuk:

$\neg(\exists n : \dfrac{1}{n} < 0.01) \rightarrow \forall n : \dfrac{1}{n} \geq 0.01$ Hamis.

7. (b)

$$\frac{2n^3+3}{n^5-3n^4-7n^3+2n^2-10n+1} < 0.05$$

$$\exists N : \forall n \geq N : \frac{2n^3+3}{n^5-3n^4-7n^3+2n^2-10n+1} < 0.05$$

Felső és alsó becslés alapján eldönthető hogy igaz-e.

$n \geq 1$ esetén $\dfrac{n^3}{\frac{1}{2}n^5} \leq \dfrac{10}{n^2} < 0.05$

8. Kijelentések, kvantorok, logikai állítások II.

8.2. Feladatok

8.2.1. Órai feladatok

1. (a)

$a + b = 0 \iff a^2 + b^2 = -2ab$

Megnézzük mindkét irányt.
$\Rightarrow$: Igaz. Ugyanis: $a^2 + b^2 = -2ab \iff (a + b^2 = 0)$
$\Leftarrow$: Ez is igaz.
Tehát az ekvivalencia is igaz.

1. (b)

$a + b = 1 \iff a^2 + b^2 = 1 - 2ab$

$a^2 + b^2 = 1 - 2ab$

$a^2 + b^2 + 2ab = 1$

$(a + b)^2 = 1$

$\Rightarrow$: Igaz.
$\Leftarrow$: Hamis. Ugyanis ha $a + b = -1$ akkor is a négyzetre emelés.
Tehát az ekvivalencia hamis.

1. (c)

$x = -1 \iff x^2 + x = 0$

$\Rightarrow$: ez az irány igaz.
$\Leftarrow$: Hamis, mert x lehetne 0 is.
Tehát az ekvivalencia hamis.

1. (i)

$|x - 5| < 2 \iff 3 < x < 7$

$\Rightarrow$: ez az irány igaz. Ugyanis $|x - 5| < 2 \iff -2 < x - 5 < 2 \iff 3 < x < 7$
$\Leftarrow$: ez is igaz.
Tehát az ekvivalencia igaz.

2. (a)

$\forall x \in \mathbb{R}: \quad (x-1)^2 + (x-5)^2 + (x-12)^2 \geq 62$

A bal oldalt valahogy át kéne alakítani. Bontsuk fel a zárójeleket.

$x^2 - 2x + 1 + x^2 - 10x + 25 + x^2 - 24x + 144 \geq 62$

$3x^2 - 36x + 170 \geq 62 \qquad / - 62$

$3x^2 - 36x + 108 \geq 0 \qquad / : 3$

$x^2 - 12x + 36 \geq 0$

$(x-6)^2 \geq 0$ (**Megjegyzés:** mindenhol ekvivalens átalakításokat végeztünk)

Mivel egy négyzetszám mindig nagyobb mint nulla ezért az állítás igaz.

3. (a)

$f(x) = \big|1 - |x|\big| \qquad x \in [-3, 2)$

$\forall x \in \mathcal{D}_f : f(x) \geq 0$

Ez igaz, mivel abszolút értek.

3. (b)

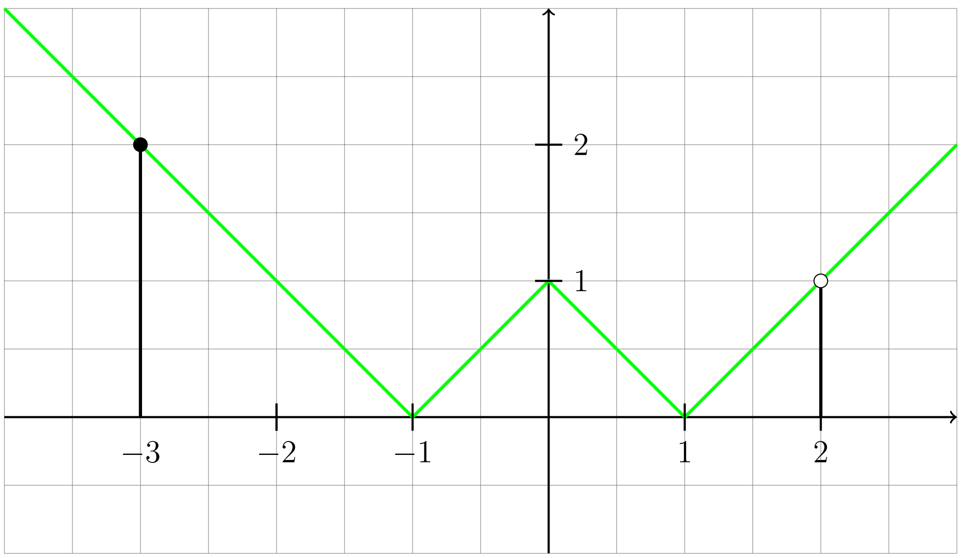
$\forall x \in \mathcal{D}_f : f(x) \leq 2$

Becsüljük felülről.

$f(x) \leq 1 - |x| \leq 0$ vagy $1 - |x| \geq 0$

$\big|1 - |x|\big| \leq 2$ ha $-3 \leq x < 1$ vagy $1 < x < 2$

Egyszerűen látható a megoldás ha ábrázoljuk:



Tehát igaz.

3. (c)

$!\exists a \in \mathcal{D}_f : \forall x \in \mathcal{D}_f \quad f(a) \leq f(x)$

Ez egyszerűbben megfogalmazva: pontosan egy minimuma (Dimat1) van. Az előző ábrából könnyen leolvasható hogy ez hamis. Ugyanis az $a = 1$ és $a = -1$ is minimum.

3. (d)

$\exists a \in \mathcal{D}_f : \forall x \in \mathcal{D}_f \quad f(a) \leq f(x)$

Mivel itt nincs kikötve az egyértelműség ez már igaz.

3. (e)

$!\exists a \in \mathcal{D}_f : \forall x \in \mathcal{D}_f \quad f(a) \geq f(x)$

Ez a 3/c. ellentéte, vagyis itt maximumot keresünk. Van ilyen az $a = -3$ amiből egy van, így igaz az állítás.

3. (f)

$!\exists b \in \mathcal{D}_f : f(b) = 1$

Ez hamis mert három helyen is egy a függvény értéke.

3. (g)

$\exists b \in \mathcal{D}_f : f(b) = 0$

Ez igaz mert két helyen nulla a függvény értéke.

3. (h)

$!\exists x \in \mathcal{D}_f : f(x) = x$

Az $f(x) = x$ függvény az origón $45°$-ban áthaladó egyenes. Ez pedig egy helyen metszi az eredeti függvényt tehát az állítás igaz.

3. (i) $\forall c \in \mathbb{R}$ esetén az $f(x) = c$ egyenletnek van legalább egy megoldása.
Ez hamis ugyanis pl: $f(x) = 125$-nek nincs megoldása a -3 és 2 intervallumban.

3. (j) Az $f(x) = c$ egyenletnek van legalább egy megoldása $\iff$ $c \in [0,2]$.
$\Rightarrow$: ebbe az irányba igaz, ugyanis ha $c \notin [0,2]$ nem lesz megoldása $f(x)$-nek.
$\Leftarrow$: ez is igaz.

3. (l) Az $f(x) = c$ ($c \in \mathbb{R}$) egyenletnek akkor és csak akkor van pontosan 3 darab megoldása, ha $c = 1$.
$\Leftarrow$: hamis mert nincs a függvénynek sehol három megoldása.
$\Rightarrow$: ez viszont igaz mert ha egy implikáció jobb oldala hamis az csak úgy lehet ha a bal oldal igaz.

P	Q	$P \Rightarrow Q$
I	I	I
I	H	H
H	I	I
H	H	I

9. Kijelentések, kvantorok, logikai állítások III.

9.2. Feladatok

9.2.1. Órai feladatok

2. (a)

$x^2 = 25 \qquad ? \qquad x = 5$

$\Leftarrow$: Ez biztos hogy igaz.
$\Rightarrow$: ez nem mert $x = -5$ is jó.

2. (b)

$a^2 + b^2 = 0 \qquad ? \qquad ab = 0$

$\Rightarrow$: Ez igaz.
$\Leftarrow$: ez nem igaz. Pl akármilyen a és $b = 0$ esetén.

2. (e)

$x^3 - x^2 - x + 1 = 0 \qquad ? \qquad x = 1$

$\Leftarrow$: ez igaz.
$\Rightarrow$: itt meg kell nézni hogy van-e más gyöke:

$x^3 - x^2 - x + 1 = (x-1)(x^2-1) = (x-1)(x-1)(x+1)$

Tehát jobbról balra nem igaz mert két gyöke van: az 1 és -1

2. (i)

$|x| = 0 \qquad ? \qquad x \geq 0$

Ez $\iff$ mivel ez maga az abszolút érték definíciója.

2. (j)

$\sin(2x) = \operatorname{tg}(x) \qquad ? \qquad x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$

Oldjuk meg az egyenletet.

$sin(2x) = \operatorname{tg}(x)$

$2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$

$\cos(x) \neq 0$

Ha $\sin(x) = 0$, ez egy megoldás és ez $k \cdot \pi$-ben nulla. Ezek viszont nincsenek benne az a $\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}$ intervallumban.
$\Rightarrow$: nem igaz.

$\Leftarrow$:

Tartalomjegyzék