

هندسه دیفرانسیل

جلد اول

هندسه دیفرانسیل موضوعی

تصنیف: بهروز بیدآباد

دانشکده ریاضی دانشگاه صنعتی امیرکبیر

۱۳۹۲ نوروز

فهرست مطالب

۱	۱	۱ نظریه منحنی ها
۳	۱.۱	یادآوری مطالبی از نظریه منحنی ها در \mathbb{R}^3
۱۱	۲.۱	تمرین ها
۱۱	۳.۱	مطالبی در مورد طبیعت ذاتی در منحنی ها
۱۶	۴.۱	تمرین ها
۱۸	۵.۱	انحنا و تاب
۲۰	۱.۵.۱	کنج متحرک و فرمول های فرنه
۲۶	۶.۱	تمرین ها
۲۷	۷.۱	منحنی های جالب
۳۳	۸.۱	تمرین ها
۳۶	۱.۸.۱	حرکت پرتابی در صفحه و فضا
۴۰	۹.۱	تمرین ها
۴۲	۱۰.۱	قضیه اساسی نظریه منحنی ها و معادلات ذاتی
۴۶	۱.۱۰.۱	معادلات ذاتی یک منحنی
۴۹	۱۱.۱	تمرین ها
۵۰	۱۲.۱	منحنی در فضای اقلیدسی n -بعدی
۵۱	۱.۱۲.۱	فرمول های فرنه در \mathbb{R}^n
۵۴	۲.۱۲.۱	خط راست و دایره در \mathbb{R}^n و خواص اساسی آن ها
۵۹	۱۳.۱	تمرین ها
۶۰	۱۴.۱	راهنمای حل تمرین های فصل ۱

۲ رویه‌ها

۶۱	۱.۲	مقدمه و یادآوری نکاتی در مورد مختصات و نمایش پارامتری رویه
۶۱	۱.۱.۲	چگونه مختصات روی یک مجموعه تعریف می شود
۶۲	۲.۰.۲	رویه های معمولی، منظم و دیفرانسیل پذیر
۶۷	۱.۰.۲	رویه های معمولی و منظم
۶۹	۲.۰.۰.۲	رویه دیفرانسیل پذیر
۷۲	۳.۰.۰.۲	تمرین های بخش
۷۶	۳.۰.۲	رویه های جالب
۷۸	۱.۰.۳.۲	رویه های دور
۷۸	۲.۰.۳.۲	رویه استوانه ای
۸۰	۳.۰.۳.۲	رویه های مخروطی
۸۲	۴.۰.۳.۲	رویه های خط دار
۸۴	۵.۰.۳.۲	تمرین های بخش
۸۶	۴.۰.۲	تابع پیوسته و مشتق پذیر روی یک رویه
۸۹	۱.۰.۴.۲	تمرین های بخش
۹۲	۲.۰.۴.۲	منحنی روی یک رویه
۹۳	۳.۰.۴.۲	بردار و صفحه مماس بر یک رویه
۹۶	۴.۰.۴.۲	تمرین های بخش
۱۰۳	۵.۰.۲	مشتق سویی و بردار مماس روی رویه
۱۰۴	۱.۰.۵.۲	مشتق سویی در \mathbb{R}^3
۱۰۴	۲.۰.۵.۲	مشتق سویی و بردار مماس روی یک رویه
۱۰۹	۶.۰.۲	۱- فرم دیفرانسیل روی رویه
۱۰۹	۱.۰.۶.۲	دیفرانسیل کل و ۱- فرم دیفرانسیل در \mathbb{R}^3
۱۱۰	۲.۰.۶.۲	دیفرانسیل کل و ۱- فرم دیفرانسیل روی رویه

۱۱۱	۳.۶.۲ تمرین‌های بخش
۱۱۲	۷.۲ تابع مشتق‌پذیر بین دو رویه و نگاشت مشتق
۱۱۳	۱.۷.۲ مشتق یا نگاشت مماس روی رویه‌ها
۱۱۵	۲.۷.۲ تمرین‌های بخش
۱۱۶	۸.۲ رویه جهت‌پذیر
۱۲۰	۱.۸.۲ تمرین‌های بخش
۱۲۱	۳ هندسه دیفرانسیل رویه‌ها
۱۲۵	۱.۳ اولین فرم اساسی یا متریک رویه
۱۳۰	۱.۱.۳ تمرین‌های بخش
۱۳۱	۲.۱.۳ طول قوس یک منحنی روی یک رویه
۱۳۷	۳.۱.۳ تمرین‌های بخش
۱۳۹	۲.۳ زاویه بین دو بردار روی یک رویه
۱۴۰	۳.۳ دومین فرم اساسی یک رویه
۱۴۴	۱.۳.۳ تمرین‌های بخش
۱۴۴	۲.۳.۳ تانسورها و فرم‌های اساسی
۱۴۸	۳.۳.۳ تمرین‌های بخش
۱۴۹	۴.۳ انحنای گاوسی یک رویه
۱۵۰	۱.۴.۳ انحنای گاوسی و انحنای‌های اصلی
۱۵۰	۲.۴.۳ انحنای گاوسی و فرم‌های اساسی
۱۵۱	۳.۴.۳ پایایی انحنای گاوسی نسبت به تغییر مختصات رویه
۱۵۵	۴.۴.۳ تمرین‌های بخش
۱۵۶	۵.۳ ضرایب کریستوفل و فرمول‌های گاوس و وینگارتون
۱۶۱	۱.۵.۳ تمرین‌های بخش

۱۶۱	بردار اんな و خطوط ژئودزیک	۶.۳
۱۶۷	تمرين‌های بخش	۱.۶.۳
۱۶۸	وجود و یکتایی ژئودزیک‌ها	۷.۳
۱۷۲	تمرين‌های بخش	۱.۷.۳
۱۷۴	مجموعه ترازو نگاشت گاووس	۸.۳
۱۷۶	نگاشت گاووس	۱.۸.۳
۱۷۹	تمرين‌های بخش	۲.۸.۳
۱۷۹	مساحت یک رویه	۹.۳
۱۸۲	تمرين‌های بخش	۱.۹.۳
۱۸۳	تعريف انحنای گاووسی با استفاده از نگاشت گاووس	۲.۹.۳
۱۸۷	تمرين‌های بخش	۳.۹.۳
۱۸۷	چند کاربرد از تانسورها در نظریه رویه‌ها	۱۰.۳
۱۸۷	تعريف عمومی متريک ريماني	۱.۱۰.۳
۱۸۹	تانسور انحنای ريمان	۲.۱۰.۳
۱۹۱	تانسور ريقچي و فضاي اينشتين	۳.۱۰.۳
۱۹۳	تمرين‌های بخش	۴.۱۰.۳
۱۹۵	نگاشت ايزومتری	۱۱.۳
۱۹۷	نمایش پارامتری سازگار و قضیه اساسی	۱.۱۱.۳
۲۰۳	روابط گاووس و کودازی	۲.۱۱.۳
۲۰۴	تمرين‌های بخش	۳.۱۱.۳
۲۰۴	پایایی انحنای گاووس تحت ايزومتری	۱۲.۳
۲۰۷	تمرين‌های بخش	۱.۱۲.۳
۲۰۸	زاویه و نگاشت همدیس	۱۳.۳
۲۱۰	نگاشت همدیس	۱.۱۳.۳

۲۱۳	۲.۱۳.۳ تمرین‌های بخش
۲۱۳	۳.۱۳.۲ مختصات متعامد
۲۱۵	۴.۱۳.۳ تمرین‌های بخش
۲۱۵	۱۴.۳ نگاشت هم مساحت
۲۱۷	۱۰.۱۴.۳ تمرین‌های بخش
۲۱۷	۱۵.۳ نگاشت تصویری و مسئله چهارم هیلبرت
۲۲۰	۱۶.۳ راهنمای حل تمرین‌های فصل ۹؟؟
۲۲۱	۱۷.۳ هندسه ذاتی
۲۲۵	۳ رویه در توپولوژی و هندسه منیفلد
۲۲۶	۱.۳ رویه به عنوان یک فضای توپولوژیک
۲۲۶	۱.۱.۳ یادآوری چند تعریف از توپولوژی
۲۳۱	۲.۱.۳ تمرین‌های بخش
۲۳۱	۳.۱.۳ توپولوژی القابی و ذاتی روی رویه ها
۲۳۴	۴.۱.۳ تمرین‌های بخش
۲۳۶	۵.۱.۳ تصویر استریوگرافیک
۲۳۸	۶.۱.۳ تمرین‌های بخش
۲۳۸	۲۰.۳ رویه به عنوان منیفلد توپولوژیک
۲۳۹	۱.۲.۳ منیفلد توپولوژیک
۲۴۱	۲.۲.۳ تمرین‌های بخش
۲۴۱	۳.۰.۳ رویه به عنوان منیفلد دیفرانسیل پذیر
۲۴۱	۱.۳.۳ منیفلد دیفرانسیل پذیر
۲۴۵	۲.۳.۳ تمرین‌های بخش
۲۴۶	۴.۳ تابع مشتق پذیر روی منیفلدها

۱.۴.۳ تمرین‌های بخش ۲۴۸

۲۵۰ کتابنامه

۱

نظریه منحنی ها

مقدمه نظریه منحنی ها در حل مسایل هندسه و یا به طور کلی در اثبات قضایای اساسی در ریاضیات نقش کلیدی دارد. درک مفاهیم مربوط به منحنی ها ابتدایی ترین روش برای حل مسایل هندسه است. در این فصل ابتدا به یادآوری برخی از تعاریف و گزاره های مربوط به منحنی ها و خواص آنها می پردازیم. اگرچه با بعضی از این مفاهیم در ریاضی عمومی آشنا شده ایم ولی تکرار و بیان مفاهیم دقیق آنها خالی از لطف نبوده بلکه در بعضی موارد ضرورت نیز دارد.

از جمله این مفاهیم مفهوم " طول " یا فاصله دو نقطه است. به عنوان مثال در فضای

اقلیدسی سه بعدی فاصله دو نقطه برابر طول خط راستی است که این دو نقطه را به یکدیگر متصل می کند که از اصول موضوعه هندسه اقلیدسی است. اما در روی کره دیگر چنین خاصیتی برقرار نیست یعنی فاصله دو نقطه در روی کره دیگر برابر طول خط راستی که این دو نقطه را به یکدیگر متصل می کند نیست. بلکه فاصله دو نقطه روی کره طول کوتاهترین منحنی روی کره است که این دو نقطه را به یکدیگر وصل می کند. این موضوع تفاوت بین تعریف فاصله در هندسه اقلیدسی و هندسه کروی را روشن می کند. در این فصل قصد نداریم که به جزئیات این مطلب پردازیم بلکه تنها به آنچه که از طول یک منحنی در \mathbb{R}^3 می دانیم اکتفا می کنیم. در مورد نقش طول قوس در تعریف هندسه فضا، خواننده علاقه مند می تواند به کتب پیشرفته هندسه از جمله فصل دوم کتاب [۲] مراجعه نماید.

مطلوبی که برای مطالعه این بخش لازم است توابع برداری یک متغیره و ضرب داخلی و خارجی آنها است که در دروس ریاضی عمومی با آن آشنا شده‌ایم. ضمناً به خوانندگان علاقه‌مند پیشنهاد می شود که از وجود کامپیوتر و امکان جستجو در اینترنت که ابزاری جدید و یکی از ملزمومات مطالعه ریاضی در دوران اخیر است نیز بهره کافی ببرند. به عنوان مثال اشکالی که نام لاتین آنها در پاورقی ذکر شده است را می توانند در اینترنت بهتر ببینند و یا با استفاده از برنامه میپل^۱ اشکال آنها را رسم نمایند. از طرف دیگر نظر به اینکه رسم این نمودارها به صورت نقطه یابی و با جایگذاری مقادیر مختلف پارامتر t انجام می شود و اگر کمی معادله آن منحنی پیچیده باشد محاسبات آن بسیار سنگین می شود توصیه می گردد که از برنامه میپل برای رسم نمودارها استفاده شود. به همین دلیل برنامه رسم برخی از این اشکال در پایان مثال ها آورده شده است تا دانشجویان به سادگی استفاده از میپل واقف گردیده در استفاده از آن کوتاهی نکنند.

^۱Maple

۱.۱ یادآوری مطالبی از نظریه منحنی ها در \mathbb{R}^3

تابع برداری ۱-متغیره $\alpha : t \in I \subset \mathbb{R} \rightarrow (x_1(t), x_2(t), x_3(t)) \subset \mathbb{R}^3$ را موضعیک بهیک^۲ گوییم اگر به ازای هر $t \in I$ یک همسایگی از t در I موجود باشد که هرگاه $t_1 \neq t_2$ باشد، آنگاه

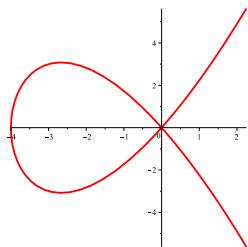
$$\alpha(t_1) = (x_1(t_1), x_2(t_1), x_3(t_1)) \neq \alpha(t_2) = (x_1(t_2), x_2(t_2), x_3(t_2)),$$

را یک بهیک گوییم اگر در کل حوزه تعریف خود یک به یک باشد. α را در یک نقطه پیوسته گوییم اگر تک تک مولفه های آن یعنی توابع $x_i(t)$ در آن نقطه، به عنوان توابع حقیقی یک متغیره پیوسته باشند. α را در یک نقطه مشتق پذیر یا دیفرانسیل پذیر گوییم اگر تک تک مولفه های آن یعنی توابع $x_i(t)$ در آن نقطه، به عنوان توابع حقیقی یک متغیره مشتق پذیر باشند. می گوییم تابع α دیفرانسیل پذیر از کلاس C^k است اگر مولفه های آن k بار مشتق پذیر بوده مشتق های k ام آن پیوسته باشند.

مثال ۱.۱.۱. نگاشت $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ که توسط $\alpha : t \mapsto (t^2 - 4, t^3 - 4t)$ تعریف می شود یک تابع برداری ۱-متغیره دیفرانسیل پذیر است. توجه داشته باشید که $\alpha(-2) = (0, 0)$ بنابراین α یک به یک نیست ولی موضعیک به یک است. شکل (۱.۱) را ببینید. برنامه ساده نرم افزار میپل برای رسم این شکل دستور زیر است.
 $plot([t^2 - 4, t^3 - 4*t], t = -3..3)$ که در آن عبارت $t = -3..3$ در برنامه مشخص کننده دامنه تغییرات t بوده و منظور از * علامت ضرب است.

با توجه به اهداف مختلف در اثبات قضایای ریاضی و یا کاربرد منحنی ها در فیزیک، مهندسی و غیره، تعاریف متفاوتی از مفهوم یک منحنی در کتب مختلف بیان گردیده است که کم و بیش با یکدیگر تفاوت هایی دارند. تعریفی که در زیر می آید به منظور سهولت در اثبات

^۲one to one (locally)



شکل ۱.۱: یک تابع برداری دیفرانسیل پذیر که یک به یک نیست ولی موضعایک به یک است.

قضایای اساسی و همچنین شباهت بین تعریف منحنی و تعمیم آن به رویه‌ها بیان گردیده است.

تعریف ۲.۱.۱. $C \subset \mathbb{R}$ تصویر بازه دلخواه $I \subset \mathbb{R}$ تحت یک تابع پیوسته و موضعایک به یک را یک منحنی^۳ در \mathbb{R}^3 می‌نامیم.

$$\alpha : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow C \subset \mathbb{R}^3,$$

$$t \mapsto \alpha(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t)).$$

را یک نمایش پارامتری منحنی C می‌نامند. یک منحنی را ممکن است با نمایش‌های مختلف پارامتری نمود مانند، نمایش‌های دکارتی، قطبی وغیره. اگر در بین این نمایش‌های پارامتری نمایشی مانند $\alpha(t)$ موجود باشد به طوری که

$$\alpha'(t) = \left(\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \frac{dx_3}{dt} \right) \neq (0, 0, 0),$$

آنگاه منحنی $\alpha(t)$ را منظم^۴ می‌نامیم. اگر همه مولفه‌های α از کلاس C^k باشند، α را از کلاس C^k می‌نامیم. اگر در نقطه‌ای از منحنی C ، $\alpha' = 0$ باشد به آن نقطه، نقطه منفرد^۵

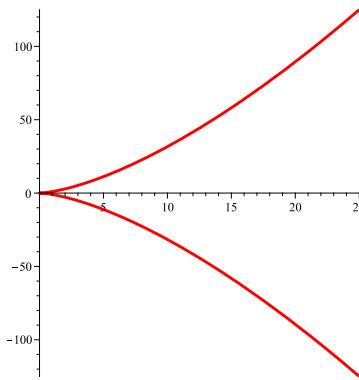
^۳curve

^۴regular

^۵singular

می‌گویند. گاهی اوقات منحنی منتظم را هموار^۶ نیز می‌گوییم. باید توجه داشت که مفهوم هموار بودن در توابع حقیقی ۱-متغیره ($y = f(x)$) با مفهوم هموار بودن در تابع برداری ($\alpha(t) = \pm\sqrt{1-x^2}$) متفاوت است. به عنوان مثال اگر دایره را با تابع دکارتی $\alpha(t) = (\cos t, \sin t)$ معرفی کنیم، بنابر تعریف توابع حقیقی ۱-متغیره هموار تابع در نقاط ۱ و -۱ هموار نیست اما اگر دایره را با تابع برداری ۱-متغیره ($\alpha(t) = (\cos t, \sin t)$) معرفی کنیم، بنا بر تعریف همه جا هموار است.

مثال ۳.۱.۱. نگاشت $\alpha(t) = (t^2, t^3)$ که توسط $t \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ داده می‌شود، یک منحنی پارامتری دیفرانسیل پذیر است. توجه داشته باشید که $\alpha'(0) = (0, 0)$ ؛ یعنی نقطه $t = 0$ نقطه منفرد است و بردار سرعت در نقطه $t = 0$ برابر صفر است ولذا α منتظم نیست. از اینجا همچنین نتیجه می‌شود که دیفرانسیل پذیر بودن حتی از کلاس C^k بودن برای منتظم بودن کافی نیست. شکل (۲.۱) را ببینید.



شکل ۲.۱: یک منحنی دیفرانسیل پذیر که منتظم نیست.

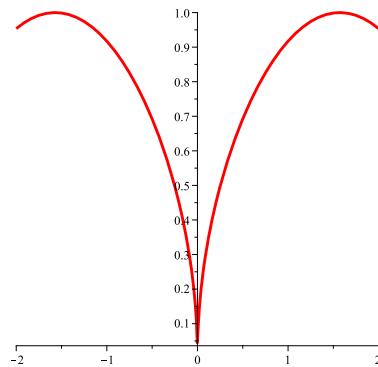
مثال ۴.۱.۱. نگاشت $\alpha(t) = (t, \sin \sqrt{|t|})$ ، $t \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ که توسط $t \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ داده می‌شود، یک منحنی پارامتری دیفرانسیل پذیر نیست، چون $|t|$ در نقطه $t = 0$

^۶smooth

دیفرانسیل پذیر نیست. شکل (۳.۱) را ببینید. نظر به اینکه رسم این نمودارها به صورت نقطه یابی و با جایگذاری مقادیر مختلف t انجام می‌شود و اگر کمی منحنی پیچیده باشد محاسبات آن بسیار سنگین می‌شود از برنامه میپل استفاده می‌کنیم. برنامه میپل مربوط به رسم این نمودار نیز به صورت زیر است.

$$\text{plot}([t, \sin(\text{abs}(t))^{1/5}, t = -2..2], \text{thickness} = 3);$$

که در آن از سه دستور جدید استفاده کردہ ایم یکی برای نمایش قدر مطلق، دیگری توان $1/5$ به عنوان ریشه دوم و دستوری برای نمایش خطوط با ضخامت بیشتر.



شکل ۳.۱: یک منحنی که در نقطه $t = 0$ دیفرانسیل پذیر نیست.

مثال ۵.۱.۱. دو منحنی پارامتری مجزای زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\alpha_1(t) = (\cos t, \sin t)$$

$$\alpha_2(t) = (\cos at, \sin at)$$

به طوری که $(\cdot - \varepsilon, 2\pi + \varepsilon) \subset \mathbb{R}$, این دو منحنی پارامتری دارای یک تصویر هستند که دایره $x^2 + y^2 = 1$ است. ولی توجه داشته باشید که اندازه بردار سرعت دومی

a برابر اندازه بردار سرعت اولی است.

$$\begin{aligned}\alpha'_1(t) &= (-\sin t, \cos t), & |\alpha'_1(t)| &= 1 \\ \alpha'_2(t) &= (-a \sin at, a \cos at), & |\alpha'_2(t)| &= a,\end{aligned}$$

کواره ۶.۱.۱. طول قوس هر منحنی پارامتری منتظم C^1 از کلاس $\alpha(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ را می‌توان از رابطه زیر به دست آورد.

$$L = \int_a^b |\alpha'(t)| dt. \quad (1.1)$$

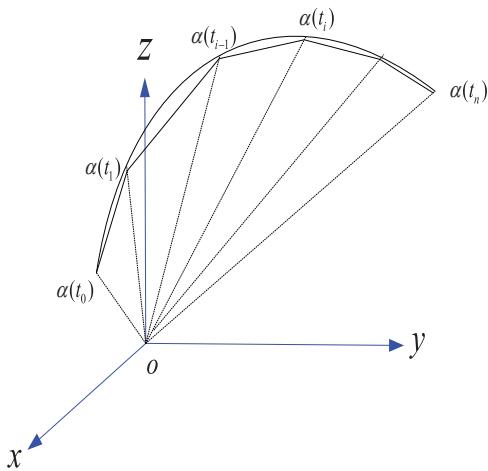
چنانچه منحنی به طور پاره‌ای منتظم باشد طول قوس آن برابر مجموع طول‌های قطعات منتظم آن منحنی است.

اثبات. فرض کنیم $\alpha(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ یک منحنی پارامتری منتظم از کلاس C^1 باشد. برای سادگی و کوتاهی اثبات، فرمول فوق را در \mathbb{R}^3 اثبات می‌کنیم. اثبات در ابعاد بالاتر تعمیم ساده همین روش است. ابتدا یک افزار روی بازه $I = [a, b]$ در نظر می‌گیریم به طوری که $t_n = b$ و $t_0 = a, \dots, t_{n-1}, t_n$ طول بزرگترین این بازه ها باشد. نمودار (۲۳.۱) را ببینید. نقاط مربوط به این افزار روی منحنی را به یکدیگر وصل نموده می‌دانیم که مجموع طول این خطوط راست تقریبی از طول منحنی است که با استفاده از تعریف انتگرال معین به شکل زیر قابل محاسبه است.

$$|\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})| = \sqrt{(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 + (y(t_i) - y(t_{i-1}))^2}$$

از آنجا با جمع این روابط و تقسیم آن بر مربع $\Delta t = t_i - t_{i-1}$ می‌توان طول قوس منحنی را به صورت زیر نوشت.

$$L = \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{n-1} \sqrt{\left(\frac{x(t_i) - x(t_{i-1})}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{y(t_i) - y(t_{i-1})}{\Delta t}\right)^2} \Delta t.$$



شکل ۴.۱: طول قوس یک منحنی برابر است با حد مجموع طول اضلاع یک چند وجهی وقتی که طول بزرگترین این اضلاع به صفر می‌کند.

چون توابع حقیقی $x(t_i)$ و $y(t_i)$ در فاصله $[t_{i-1}, t_i]$ مشتق پذیر هستند، وقتی که $|\Delta|$ به صفر می‌کند می‌کند $t_{i-1} \rightarrow t_i$ و

$$\lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \frac{x(t_i) - x(t_{i-1})}{\Delta t} = x'(t_i), \quad \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \frac{y(t_i) - y(t_{i-1})}{\Delta t} = y'(t_i)$$

از آنجا با توجه به تعریف انتگرال معین می‌توان دید که رابطه حکم نتیجه می‌شود. خواننده علاقه‌مند می‌تواند برای توضیحات بیشتر در ابعاد بالاتر به کتاب [۲۵] مراجعه کند. \square

اگر در معادله منحنی α به جای پارامتر t از پارامتر طول قوس $s = L$ استفاده کنیم، آنگاه می‌گوئیم α بر حسب پارامتر طبیعی طول قوس پارامتری شده است. در این صورت برای پارامتری نمودن یک منحنی بر حسب طول قوس مقدار پارامتر t را از رابطه $s = \int_0^t |\alpha'(t)| dt$ محاسبه نموده در معادله منحنی جایگزین می‌کنیم. بردار $\alpha'(t)$ را بردار سرعت و $|\alpha'(t)|$ را سرعت یا تندی منحنی می‌نامیم. بردار $\alpha''(t)$ را بردار شتاب و $|\alpha''(t)|$ را شتاب منحنی می‌گوییم.

مثال ۷.۱.۱. معادله دایره‌ای به شعاع r را به صورت نمایش طبیعی بر حسب s می‌نویسیم.

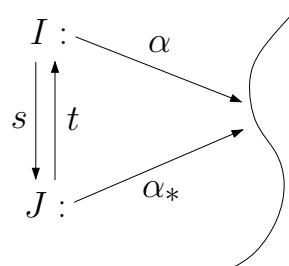
$$s = \int_{\cdot}^t |\alpha'(t)| dt = \int_{\cdot}^t \sqrt{r^2} dt = r \int_{\cdot}^t dt = rt, \quad t = \frac{s}{r}.$$

بنابراین نمایش طبیعی دایره به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\alpha(s) = \left(r \cos \frac{s}{r}, r \sin \frac{s}{r} \right).$$

فرض کنید $\alpha(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ یک منحنی پارامتری منتظم باشد، می‌خواهیم بینیم آیا یک منحنی پارامتری دیگری مانند $\alpha_*(s) : J \rightarrow \mathbb{R}^3$ بر حسب طول قوس s می‌توان پیدا نمود، به طوری که نقش یا تصویر آن با α یکی باشد. در اینجا I و J فاصله‌های بسته ای روی \mathbb{R} هستند. شکل ۵.۱ را بینید.

گزاره ۸.۱.۱. هر منحنی پارامتری منتظم $\alpha(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ از کلاس C^1 را می‌توان بر حسب طول قوس s پارامتری نمود.



شکل ۵.۱: هر منحنی پارامتری منتظم را می‌توان بر حسب طول قوس پارامتری کرد.

اثبات. فرض کنیم $\alpha(t)$ یک منحنی پارامتری منتظم از کلاس C^1 بر حسب پارامتر دلخواه t باشد، می‌خواهیم یک تابع پارامتری مانند $(s) \alpha_*$ طوری معرفی کنیم که در آن s پارامتر

طول قوس بوده و نمودار هر دو تابع بر هم منطبق باشد. با مشتق‌گیری از رابطه

$$s(t) = \int_{t_*}^t |\alpha'(t)| dt$$

داریم، \bullet از آنجا بنابر قضیه تابع معکوس در ریاضی عمومی تابع $s(t)$ دارای یک تابع معکوس دیفرانسیل پذیر است که آن را با $t(s)$ نمایش می‌دهیم. نمودار (۵.۱) را ببینید. حال تابع α_* را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\alpha_* := \alpha \circ t : J \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \alpha_*(s) = \alpha \circ t(s) = \alpha(t(s)).$$

که در آن J فاصله‌ای بسته روی \mathbb{R} بوده و $\alpha_*(J) = \alpha(I)$. بنابراین، این دو منحنی بر یکدیگر منطبق‌اند. از طرف دیگر بنابر قاعده زنجیره ای

$$\frac{d\alpha_*}{ds} = \frac{d(\alpha \circ t)}{ds} = \frac{d\alpha}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{\frac{d\alpha}{dt}}{|\alpha'(t)|},$$

این نشان می‌دهد که $\frac{d\alpha_*}{ds}$ برداری یکه است. لذا، $1 = |\alpha'_*(s)|$ و بنا بر تعریف $\alpha_*(s)$ بر حسب طول قوس پارامتری شده است. این موضوع اثبات گزاره را کامل می‌کند. \square

مثال ۹.۱۱. نشان دهید معادله زیر یک نمایش پارامتری طبیعی است.

$$\alpha(s) = \frac{1}{2}((s + \sqrt{s^2 + 1}), (s + \sqrt{s^2 + 1})^{-1}, \sqrt{2}(\log(s + \sqrt{s^2 + 1}))).$$

کافی است نشان دهیم $1 = |\frac{d\alpha}{ds}|$. فرض کنید $1 = |\frac{d\alpha}{ds}|$ داریم

$$\alpha = \frac{1}{2}ue_1 + \frac{1}{2}u^{-1}e_2 + \frac{1}{2}\sqrt{2}(\log u)e_3$$

که در آن e_i به ازای $i = 1, 2, 3$ پایه‌های استاندارد \mathbb{R}^3 هستند. با مشتق‌گیری و استفاده از قاعده زنجیره ای داریم

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{ds} &= \frac{d\alpha}{du} \frac{du}{ds} = \left(\frac{1}{2}e_1 - \frac{1}{2}u^{-2}e_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}u^{-1}e_3 \right) \left(1 + \frac{s}{\sqrt{s^2 + 1}} \right), \\ \left| \frac{d\alpha}{ds} \right| &= \left| \frac{d\alpha}{du} \right| \left| \frac{du}{ds} \right| = \frac{1}{2}(1 + u^{-4} + 2u^{-2})^{\frac{1}{2}} \frac{s + \sqrt{s^2 + 1}}{\sqrt{s^2 + 1}} = 1. \end{aligned}$$

۲.۱ تمرین ها

تمرین ۱۲.۱. نشان دهید که معادله مارپیچ $x = a \cos t, y = a \sin t, z = bt$ دارای نمایش پارامتری طبیعی زیر است.

$$\alpha(s) = \left(a \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, a \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{bs}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right).$$

تمرین ۱۲.۲. نشان دهید که معادله $\alpha(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, e^t)$ دارای نمایش پارامتری طبیعی زیر است.

$$\alpha(s) = \left(\frac{s}{\sqrt{3}} + 1 \right) \left(\cos \log \left(\frac{s}{\sqrt{3}} + 1 \right) e_1 + \sin \log \left(\frac{s}{\sqrt{3}} + 1 \right) e_2 + e_3 \right).$$

در اینجا e_i ، به ازای $i = 1, 2, 3$ پایه های استاندارد \mathbb{R}^3 هستند.

۳.۱ مطالبی در مورد طبیعت ذاتی در منحنی ها

تعریف منحنی و مثال های ارائه شده در بخش قبل ممکن است به توضیحات زیر نیاز داشته باشد:

• یک منحنی در صفحه \mathbb{R}^2 ممکن است با حذف پارامتر t به صورت یک معادله

دکارتی $F(x, y) = 0$ نشان داده شود؛ مثلاً در مورد

داریم $\alpha(t) = (t, t^2, 0)$ ، $0 < t < 1$ در مورد سهیمی نیز

داریم $y = x^2$

• اما یک منحنی در فضای \mathbb{R}^3 را نمی توان تنها توسط یک معادله دکارتی به صورت

نشان داد. زیرا همانطور که در ریاضی عمومی دیدیم یک چنین

معادله تنها می تواند یک سطح را نشان دهد و برای نشان دادن یک منحنی در

^۱surface

احتیاج به دو معادله از این نوع داریم. به عنوان مثال منحنی $\alpha(t) = (t, t^3, t^3)$ به ازای $t < +\infty$ فصل مشترک دو سطح به معادلات $x^2 = y$ و $xz = y^2$ است.

• یک منحنی را ممکن است به چند صورت مختلف پارامتری کرد.

اگر در $(t, t^3, 0)$ به ازای $t > 0$ عبارت $t_* - \frac{1}{\lambda}t$ را جایگزین کنیم یک نمایش جدید از منحنی را پیدا می‌کنیم که به ازای $t_* < 0$ توسط $\alpha(t_*) = (-\frac{1}{\lambda}t_*, -\frac{1}{\lambda}t_*^3, 0)$ بیان می‌گردد. مطلب اخیر سؤالات زیر را مطرح می‌کند:

• آیا اگر یک منحنی به چند صورت پارامتری بیان شود به عبارت دیگر اگر مثلاً $(t, t^3, 0)$ نمایانگر منحنی $I_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ و $(0, -\frac{1}{\lambda}t_*^3, -\frac{1}{\lambda}t_*)$ نمایانگر منحنی $I_2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ باشد، آیا آنها متفاوتند؟ اگر متفاوتند آیا خواص مشترکی دارند؟

جواب این سوالها ما را در این بخش به تعریف تغییر پارامتر مجاز و خواص ذاتی یک منحنی رهنمون می‌سازد.

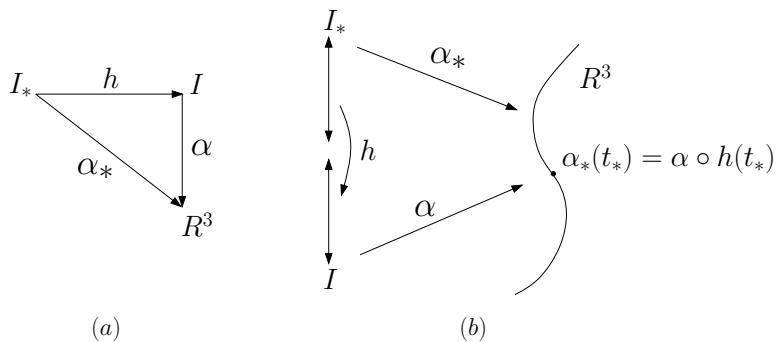
فرض کنیم تابع α مسیر حرکت یک متحرک باشد، می‌توانیم توابع یا منحنی‌های زیادی ارائه دهیم که همین مسیر را طی کنند ولی با α متفاوت باشند. این تفاوت در معادلات به نوعی در زمان رسیدن به آن نقاط است. به عنوان مثال مسیر دو منحنی با معادلات زیر

$$\begin{aligned}\alpha_1(t) &= (\cos t, \sin t) \\ \alpha_2(t) &= (\cos at, \sin at)\end{aligned}$$

دایره‌ای به شعاع یک است که هر دو دارای مسیرهای یکسان و سرعت‌های متفاوت هستند.

تعریف ۱.۳.۱. فرض کنیم I و I_* فاصله‌های بازی در \mathbb{R} بوده و \mathbb{R}^3 یک منحنی و $I_* : I_* \rightarrow I$ یک تابع دیفرانسیل پذیر باشد. در این صورت ترکیب $\alpha \circ h = \alpha_* : I_* \rightarrow \mathbb{R}^3$ یک منحنی است که نمایش پارامتری مجدد^۱ منحنی α توسط h نامیده می‌شود.

به شکل های (۶.۱) توجه فرمائید. شکل های (a) و (b) تابع مرکب α_* را که از α و h تشکیل شده است نشان می دهند.



شکل ۱.۶.۱: یک منحنی که با توابع پارامتری متفاوت نشان داده شده است.

باید توجه داشت که نقطه $\alpha_*(t_*)$ که توسط α_* در زمان $t_* \in I_*$ به دست آمده است همان نقطه‌ای است که توسط α در زمان I $h(t_*) = t \in I$ به دست می‌آید. چون در حالت کلی $t \neq t_*$, زمان‌های رسیدن به یک نقطه مشخص متفاوت است، اگر چه مسیر(منحنی) α و α_* یکی می‌باشد.

تعریف ۲.۳.۱. یک تابع دیفرانسیل پذیر $I_* \rightarrow I$ را یک تغییر متغیر مجاز یا تبدیل پارامتری مجاز^۲ از کلاس C^r می‌گوییم اگر h در فاصله I_* از کلاس C^r بوده و در

^۱reparametrisation

^۲allowable parametric transformation

تمام نقاط I_* داشته باشیم

$$\frac{dh}{dt_*} \neq 0.$$

فرض کنیم $\alpha_* = \alpha \circ h$ یک تغییر پارامتر مجاز باشد. بنابر قاعده زنجیره ای داریم $\frac{d\alpha_*}{ds} = \frac{d\alpha}{dt} \frac{dt}{ds}$ از آنجا پس از یک تغییر متغیر مجاز، نقاط منفرد جدیدی در روی منحنی ظاهر نمی شود. این موضوع ما را به تعریف یک کلاس هم ارزی از منحنی ها به صورت زیر رهنمون می سازد.

تعریف ۳.۳.۱. دوتابع منظم α و α_* از کلاس C^r را هم ارزگوییم، اگر یک تبدیل پارامتر مجاز h از کلاس C^r وجود داشته باشد به طوری که

$$\alpha_* = \alpha \circ h$$

با توجه به تعریف فوق می توان یک منحنی را به عنوان یک کلاس هم ارزی از توابع برداری $I : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ در نظر گرفت که توسط تبدیلات پارامتری مجاز به هم مربوط می شوند. وقتی ما در مورد خصوصیات یک منحنی صحبت می کنیم، منظور ما خواص این کلاس هم ارزی از توابع منظم است. این خواص مستقل از نوع پارامتری کردن بوده و به آن خصوصیات ذاتی^{۱۰} یک منحنی می گویند. برای مجزا نمودن مفهوم ذاتی منحنی (یعنی کلاس هم ارزی تابع منظم) از مفهوم منحنی به عنوان یک تابع برداری α که در تعریف **۲.۱.۱** آورده شد، گاهی اوقات $I : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ را مسیر^{۱۱} می نامیم.

ممکن است یک تبدیل پارامتر مجاز جهت حرکت ذر روی منحنی را حفظ کرده یا آن را تعویض نماید به عنوان مثال تغییر پارامترهای $t = h_1(t)$ و $-t = h_2(t)$ تبدیل پارامترهای مجاز هستند که اولی جهت حرکت را حفظ می کند ولی دومی جهت حرکت را

^{۱۰}intrinsic^{۱۱}path

معکوس می نماید. تبدیل پارامتر مجاز h را جهت نگهدار^{۱۲} می گوییم اگر $\frac{dh}{dt} > 0$ باشد.
و آن را جهت برگردان^{۱۳} می گوییم اگر $\frac{dh}{dt} < 0$ باشد.

تعريف ۴.۳.۱. مسیر^{۱۴} $I : \alpha$ را متناوب^{۱۵} گوییم، هرگاه عدد ثابتی مانند $p > 0$ موجود باشد که در رابطه زیر صدق کند:

$$\forall t \in I \quad \alpha(p+t) = \alpha(t).$$

کوچکترین عدد p (درصورت وجود) را که در رابطه بالا صدق کند، دوره تناوب^{۱۶} می نامیم. به عنوان مثال در دایره $\alpha(t) = (r \cos bt, r \sin bt)$ دوره r به شعاع r دوره تناوب را به صورت زیر محاسبه می کنیم. از رابطه $\alpha(p+t) = \alpha(t)$ نتیجه می شود $\alpha(p) = \alpha(0)$. یک منحنی را که بسته نباشد، کمان یا قوس^{۱۷} نیز می نامیم. هر پارامتری کردن چنین منحنی ای یک به یک است. به عنوان مثال منحنی $(x_1, x_2) : t \mapsto (r \cosh t, r \sinh t)$ برای $t \in \mathbb{R}$ همان نیم-هذلولی^{۱۸} است.

ممکن است یک تبدیل پارامتر مجاز جهت حرکت در روی منحنی را حفظ کند یا آن را تعویض نماید. به عنوان مثال تغییر پارامترهای t و $h_2(t) = -t$ تبدیل $h_1(t) = t$ پارامترهای مجاز هستند که اولی جهت حرکت را حفظ می کند ولی دومی جهت حرکت را معکوس می کند. تبدیل پارامتری مجاز h را جهت نگهدار^{۱۹} گوییم اگر $\frac{dh}{dt} > 0$ باشد و

^{۱۲}orientation preserving

^{۱۳}orientation reversing

^{۱۴}periodic

^{۱۵}period

^{۱۶}arc

^{۱۷}hyperbola

^{۱۸}orientation preserving

آن را جهت برگردان^{۱۹} گوییم اگر $\frac{dh}{dt} < 0$ باشد.

۴.۱ تمرین‌ها

تمرین ۱.۴.۱. نشان دهید $t = \frac{s^{\frac{1}{3}}}{s^{\frac{1}{3}} + 1}$ یک تبدیل پارامتر مجاز روی حوزه $0 < s < +\infty$ بوده و بازه $(0, +\infty)$ را به روی بازه $(1, 0)$ می‌برد. آیا این تبدیل پارامتری جهت نگهدار است.

تمرین ۲.۴.۱. نشان دهید $k = t^2 + 1$ یک نمایش پارامتری منتظم به ازای هر $t \in \mathbb{R}$ است و تصویر آن را برای صفحات x_1x_2 و x_1x_3 پیدا کنید.

تمرین ۳.۴.۱. الف. نشان دهید نمایش $x_1 = (\cos \theta + \sin \theta) \sin \frac{\theta}{2}$ و $x_2 = \cos \theta - \sin \theta$ به ازای $-\pi \leq \theta \leq 2\pi$ یک نمایش پارامتری منتظم است و منحنی مربوط به آن روی کره‌ای به شعاع ۲ در مرکز و استوانه $1 = x_1^2 + x_2^2 = (1 - \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta$ منطبق می‌شود. شکل ۱۵.۱ در صفحه ۲۰ را ببینید.

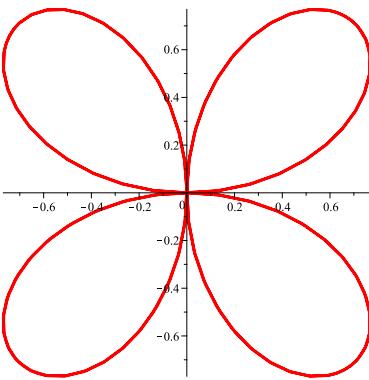
ب. آیا این تبدیل پارامتری جهت نگهدار است.

تمرین ۴.۴.۱. یک منحنی پارامتری $\alpha(t)$ پیدا کنید، به طوری که نقش آن دایره‌ای به مرکز مبدأ و شعاع یک باشد و داشته باشیم $\alpha(0) = (1, 0)$.

تمرین ۵.۴.۱. نمایش قطبی یک منحنی به صورت $r = \sin 2\theta$ به ازای $-\pi \leq \theta \leq \pi$ داده شده است. الف. یک نمایش پارامتری از این منحنی نوشته تعیین کنید که آیا منتظم و یک به یک است یا خیر.

ب. برنامه میپل برای رسم این نمودار را بنویسید. شکل ۷.۱ را ببینید.

^{۱۹}orientation reversing



شکل ۷.۱: یک گل چهار پر.

تمرین ۶.۴.۱. فرض کنیم $\alpha(t)$ یک منحنی پارامتری باشد که از مرکز عبور نمی‌کند. اگر در
حوالی مبدأ به ازای $t_1 < t < t_2$ فاصله $\alpha(t)$ از مبدأ ثابت باشد به طوری که $\alpha'(t) \neq 0$
نشان دهید که در حوالی مبدأ بردار موضع $\alpha(t)$ بر $\alpha'(t)$ عمود است.

تمرین ۷.۴.۱. منحنی پارامتری $\alpha(t)$ دارای این ویژگی است که ضرب داخلی بردار مماس
و بردار شتاب صفر است یعنی $\alpha'(t) \cdot \alpha''(t) = 0$ در مورد $\alpha(t)$ چه می‌توان گفت؟

تمرین ۸.۴.۱. فرض کنید $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ یک منحنی پارامتری بوده و $v \in \mathbb{R}^3$ یک
بردار ثابت^{۲۰} باشد. اگر $\alpha'(t)$ به ازای هر $t \in I$ بر v عمود باشد و $\alpha(0)$ نیز بر v عمود
باشد، ثابت کنید به ازای هر $t \in I$ ، $\alpha(t)$ بر v عمود است.
راهنمایی: با استفاده از خواص ضرب داخلی دو بردار چون v بردار ثابت است داریم

$$\bullet = \alpha'(t) \bullet v = \frac{d\alpha(t)}{dt} \bullet v = \frac{d}{dt}(\alpha(t) \bullet v)$$

از اینجا نتیجه می‌شود $c = \alpha(t) \bullet v$ به طوری که c عددی ثابت است، اما چون داریم $\bullet c = 0$

^{۲۰}fixed vector

تمرین ۹.۴.۱. فرض کنید $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ یک منحنی پارامتری باشد به طوری که $\alpha'(t) \neq 0$ ، $\forall t \in I$ نشان دهد $|\alpha(t)|$ غیر صفر و ثابت است اگر و تنها اگر برای هر $t \in I$ $\alpha'(t)$ عمود باشد.

تمرین ۱۰.۴.۱. منحنی پیچ $\alpha(t) = (ae^{bt} \cos t, ae^{bt} \sin t)$ را در نظر گرفته نشان دهید:

الف. به ازای $a > 0$ و $b < 0$ با افزایش t منحنی به مبدأ نزدیک تر و با کاهش t از مبدأ دور می شود.

ب. وقتی که $t \rightarrow +\infty$ آنگاه $\alpha'(t)$ به مبدأ مختصات میل می کند. به عبارت دیگر

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \alpha'(t) = (0, 0).$$

ج. منحنی پیچ دارای طول متناهی است. به عبارت دیگر حد زیر موجود است.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} L = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{t_0}^t |\alpha'(t)|.$$

۵.۱ انحنا و تاب

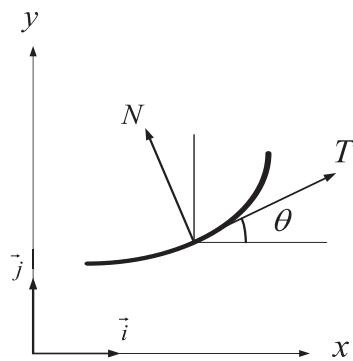
انحنای ^{۲۱} یک منحنی کمیتی است که برای تشخیص انحراف منحنی از روی خط راست و تاب ^{۲۲} یک منحنی کمیتی است که برای تشخیص انحراف منحنی از روی صفحه به کار می رود. قضیه اساسی نظریه منحنی ها در \mathbb{R}^3 بر تعریف انحنا و تاب استوار شده است. در این بخش فرمول های محاسبه تاب و انحنا را به دست می آوریم. اگر بردار یکه مماس بر منحنی $\alpha(t)$ در هر نقطه را با $T(t)$ نمایش دهیم، تغییرات این بردار مشخص کننده انحراف منحنی از خط راست است.

^{۲۱}curvature, (courbure)

^{۲۲}torsion

تعريف ۱.۵.۱. بردار $\frac{dT}{ds}$ را بردار انحنا و طول آن $|\frac{dT}{ds}| = \kappa$ را در هر نقطه، انحنای منحنی در آن نقطه مینامیم.

در ریاضی عمومی دیدیم که اگر منحنی مسطح باشد می‌توان انحنا را برحسب میزان تغییرات زاویه ای که بردار مماس با افق می‌سازد نیز به صورت زیر تعریف نمود. فرض



شکل ۱.۸.۱: به دست آوردن انحنای یک منحنی از روی تغییرات بردار یکه مماس آن.

کنیم بردار یکه مماس T بر منحنی مسطح C در نقطه P با افق زاویه θ بسازد، داریم:
تغییرات T نسبت به s برابر است با $T' = \cos\theta i + \sin\theta j$

$$\frac{dT}{ds} = -\sin\theta \frac{d\theta}{ds} i + \cos\theta \frac{d\theta}{ds} j,$$

از آنجا انحنای منحنی مسطح را می‌توان از رابطه زیر بدست آورد.

$$\kappa = \left| \frac{dT}{ds} \right| = \sqrt{\left(\sin^2\theta + \cos^2\theta \right) \left(\frac{d\theta}{ds} \right)^2} = \left| \frac{d\theta}{ds} \right|$$

اگر $\frac{d\theta}{ds} > 0$ آنگاه با حذف قدرمطلق و انتگرالگیری زاویه انحراف بردار یکه مماس به دست $\theta(s) = \theta(0) + \int_0^s \kappa(s) ds$ می‌آید.

۱.۵.۱ کنج متحرک و فرمول‌های فرنه

کنج متحرک یا دستگاه مختصات متحرک^{۲۳} در هندسه ابزار جالبی است که برای اثبات قضایای پیچیده به کار می‌رود. دستگاه مختصات متحرک ابتدا در روی منحنی‌ها توسط فرنه^{۲۴} بیان و سپس توسط داربو^{۲۵} برای سطوح تعریف گردید. در حقیقت به جای سه تایی i, j, k که آن را در ریاضی عمومی کنج ثابت می‌نامیم، از سه تایی دیگری استفاده می‌کنیم که در طول منحنی C حرکت می‌کند.

فرض کنیم C یک منحنی باشد که بر حسب طول قوس s پارامتری شده باشد. چون بردار T یکه است حاصلضرب داخلی آن برابر است با $1 = T \cdot T$ از آنجا با مشتق‌گیری نسبت به s از این رابطه داریم $0 = T' \cdot T + T \cdot T'$ لذا از آنجا T' بر T عمود است. بنابر این بردار یکه عمود^{۲۶} N را در راستای T' توسط

$$N = \frac{\frac{dT}{ds}}{\left| \frac{dT}{ds} \right|}. \quad (۲.۱)$$

تعریف می‌کنیم. از رابطه^{۲۷} ۲.۱ و تعریف انحنا رابطه زیر نتیجه می‌شود.

$$\frac{dT}{ds} = \left| \frac{dT}{ds} \right| N = \kappa N. \quad (۳.۱)$$

به این عبارت، فرمول اول فرنه^{۲۸} می‌گویند. بردار یکه B را به صورت حاصلضرب خارجی دو بردار $B = T \wedge N$ تعریف نموده آن را بردار قائم دوم^{۲۹} می‌نامیم. با مشتق‌گیری از این رابطه بر حسب s و با توجه به فرمول اول فرنه داریم

$$\frac{dB}{ds} = \frac{dT}{ds} \wedge N + T \wedge \frac{dN}{ds} = \kappa N \wedge N + T \wedge \frac{dN}{ds} = T \wedge \frac{dN}{ds}. \quad (۴.۱)$$

^{۲۳}moving frame

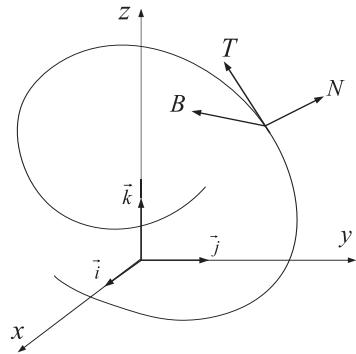
^{۲۴}Frenet

^{۲۵}Darbeaux

^{۲۶}Normal

^{۲۷}First Frenet Formula

^{۲۸}Binormal



شکل ۹.۱: دستگاه مختصات متحرک روی یک منحنی.

می دانیم $B' = \frac{dB}{ds}$ بر B عمود است چون یکه است. با توجه به رابطه بالا، $B' = \frac{dB}{ds}$ بر T نیز عمود است، لذا در جهت N قرار دارد و می توان آن را بر حسب مضربی از بردار N نوشت.

$$\frac{dB}{ds} = -\tau N. \quad (5.1)$$

که در آن $|\frac{dB}{ds}| = \tau$ تابعی است حقیقی و علامت منفی یک علامت قراردادی است. به این عبارت، فرمول سوم فرنه می گویند.

تعريف ۲.۵.۱. سه تایی مرتب (T, N, B) را کنج متحرک در طول منحنی^{۲۹} می نامیم.
عبارت $|\frac{dB}{ds}| = \tau$ را تاب منحنی^{۳۰} می نامیم.

برای به دست آوردن مشتق بردار عمود $N = B \wedge T$ از رابطه N مشتق می گیریم و از فرمول های اول و سوم فرنه استفاده می کنیم.

$$\begin{aligned} \frac{dN}{ds} &= \frac{dB}{ds} \wedge T + B \wedge \frac{dT}{ds} = -\tau N \wedge T + \kappa B \wedge N, \\ \frac{dN}{ds} &= \tau B - \kappa T. \end{aligned} \quad (6.1)$$

^{۲۹}moving frame

^{۳۰}torsion

به این عبارت، فرمول دوم فرنه می‌گویند. لذا فرمول های فرنه به صورت زیر نوشته می‌شوند.

$$\begin{aligned}\frac{dT}{ds} &= \kappa N, \\ \frac{dN}{ds} &= -\kappa T + \tau B, \\ \frac{dB}{ds} &= -\tau N.\end{aligned}\quad (7.1)$$

برای آنکه بتوان فرمول های فرنه را به صورتی نوشت که به راحتی در خاطر مانده و بعلاوه قابل تعمیم به فضا های با ابعاد بالاتر باشد از شکل ماتریسی آن استفاده می‌کنیم:

$$(T', N', B') = \begin{pmatrix} \cdot & \kappa & \cdot \\ -\kappa & \cdot & \tau \\ \cdot & -\tau & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}.$$

توجه داشته باشید که در فرمول های فرنه مشتقات سه بردار یکه بر حسب پارامتر طول قوس است.

محاسبه انحنا و تاب

لم ۳.۵.۱. اگر $\alpha(t)$ یک منحنی منتظم باشد که بر حسب پارامتر دلخواه t نمایش داده شده است، آنگاه انحنا و تاب آن از روابط زیر محاسبه می‌شود.

$$\kappa = \frac{|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)|}{|\alpha'(t)|^3}, \quad \tau = \frac{(\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)) \cdot \alpha'''(t)}{|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)|^2}. \quad (8.1)$$

اثبات. فرض کنیم $\alpha(t)$ یک منحنی منتظم باشد که بر حسب پارامتر دلخواه t پارامتری شده است. بنا بر قاعده زنجیره ای داریم

$$\begin{aligned}\alpha'(t) &= \frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\alpha}{ds} \frac{ds}{dt} = \alpha'(s) \frac{ds}{dt} = \alpha'(s)s', \\ \alpha''(t) &= \frac{d}{dt}(\alpha's') = \frac{d\alpha'}{ds} \frac{ds}{dt}s' + \alpha' \frac{ds'}{dt} = \alpha''(s)s's' + \alpha'(s)s'',\end{aligned}$$

با ضرب خارجی این دو عبارت داریم

$$\begin{aligned}\alpha'(t) \wedge \alpha''(t) &= \alpha'(s)s' \wedge (\alpha''(s)s's' + \alpha'(s)s'') \\ &= (s')^3 \alpha'(s) \wedge \alpha''(s)\end{aligned}\quad (9.1)$$

اندازه این ضرب داخلی با توجه به رابطه $\frac{ds}{dt} = s'$ برابر است با

$$|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)| = |s'|^3 |\alpha'(s) \wedge \alpha''(s)| = |\alpha'(t)|^3 |\alpha'(s)| \cdot |\alpha''(s)| \sin\theta.$$

در اینجا θ زاویه بین α' و α'' است که بر یکدیگر عمودند. بنابراین $\sin\theta = 1$ ، همچنین s پارامتر طول قوس است، لذا $|\alpha''(s)| = \kappa$ ، $|\alpha'(s)| = 1$ که از اینجا رابطه اول حکم نتیجه می شود.

روش دوم. روش دیگری نیز برای اثبات رابطه اول حکم وجود دارد که از جایگذاری فرمولهای فرنه در رابطه ۹.۱ نتیجه می شود. در این روش کافی است عبارات $\alpha'(s) = T$ و $\alpha''(s) = \kappa N$ را در رابطه ۹.۱ جایگزین نمود. رابطه دوم نیز به طور مشابه بررسی می گردد. \square

مثال ۴.۵.۱. چنانچه α بر حسب طول قوس s پارامتری شده باشد، فرمول تاب ۸.۱ به صورت زیر ساده می شود. ثابت کنید تاب τ در منحنی $\alpha(s)$ را می توان توسط رابطه زیر پیدا نمود.

$$\tau(s) = -\frac{\alpha'(s) \wedge \alpha''(s) \cdot \alpha'''(s)}{\kappa(s)^2}$$

حل: در اینجا از منحنی نسبت به پارامتر طول قوس مشتقهای اول و دوم و سوم می گیریم و از فرمولهای فرنه جایگزین می کنیم.

$$\alpha'(s) = T$$

$$\alpha''(s) = T' = \kappa N$$

$$\alpha'''(s) = \kappa' N + \kappa N' = \kappa' N + \kappa(-\kappa T + \tau B) = -\kappa^2 T + \kappa' N + \kappa \tau B$$

از ضرب مختلط این سه بردار داریم

$$\alpha'(s) \wedge \alpha''(s) \cdot \alpha'''(s) = -T \wedge \kappa N \cdot \kappa \tau B = -\tau \kappa^2.$$

جملات دیگر با استفاده از خواص ضرب خارجی بردارها صفر می شود.

تعریف ۵.۵.۱. شعاع انحنا^{۳۱} و شعاع تاب^{۳۲} یک منحنی در هر نقطه به ترتیب برابر عکس انحنا و عکس تاب منحنی در آن نقطه تعریف می شود.

تعریف ۶.۵.۱. دایره بوسان^{۳۳} دایره‌ای است که در هر نقطه بر منحنی مماس بوده و شعاع آن برابر عکس انحنای منحنی یا شعاع انحنای منحنی در آن نقطه باشد.

واضح است که شعاع انحنا هر دایره برابر شعاع دایره است. زیرا اگر $\alpha(s)$ یک دایره به شعاع r باشد، می توان نشان داد که $\kappa = \frac{1}{r}$.

تعریف ۷.۵.۱. صفحه بوسان^{۳۴}: صفحه‌ای است که از دو بردار T و N می گزند. صفحه قائم اول^{۳۵} صفحه‌ای است که از دو بردار N و B می گزند. صفحه اصلاحی یا قائم دوم صفحه‌ای است که از دو بردار T و B می گزند. شکل ۱۰.۱ را ببینید.

برای به دست آوردن معادله صفحه بوسان در هر نقطه از منحنی $\alpha(t)$ کافی است بردار قائم دوم B بر منحنی در آن نقطه را به دست آورده با اطلاعات ریاضی عمومی معادله صفحه ای را بنویسیم که از نقطه $\alpha(t_0)$ گذشته بر بردار $(a, b, c) = B = (a, b, c)$ عمود باشد. لذا معادله صفحه بوسان در نقطه $\alpha(t_0) = (x_0, y_0, z_0)$ عبارت است از

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

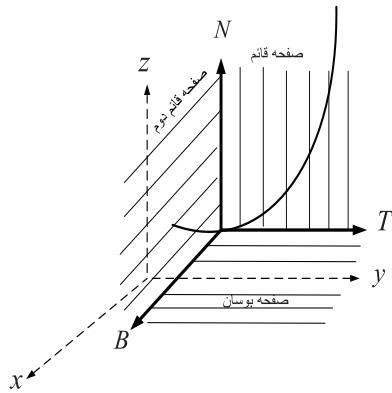
^{۳۱}curvature radius

^{۳۲}torsion radius

^{۳۳}osculating circle

^{۳۴}osculating plane

^{۳۵}normal plane



شکل ۱۰.۱: صفحه بوسان، صفحه قائم اول و صفحه قائم دوم.

لم ۸.۵.۱. یک منحنی پارامتری منتظم یک خط راست است اگر و تنها اگر $\kappa = 0$.

اثبات. فرض کنیم $\kappa = 0$ از آنجا داریم $T' = \kappa N = 0$ در نتیجه $T' = 0$. که $a = T = a \neq 0$ عدد ثابتی است، آنگاه داریم $T = \frac{d\alpha(s)}{ds} = a$ اگر انتگرال بگیریم، معادله خط راستی است که از نقطه c_1 گذشته و در جهت بردار a است. بر عکس اگر خط راست $\kappa = |\alpha''(s)| = 0$ داشته باشیم، آنگاه $\alpha(s) = as + c_1$

لم ۹.۵.۱. یک منحنی منتظم با انحنای $\kappa \neq 0$ یک منحنی مسطح است، اگر و تنها اگر تاب τ برابر صفر باشد.

اثبات. اگر $\alpha(s)$ یک منحنی مسطح باشد، همواره بردار بی‌نرمال ثابت است و بنابراین $B' = 0$ و از آنجا

$$\cdot = B'(s) = \tau(s)N(s).$$

چون $N(s)$ مخالف صفر است، از این رابطه نتیجه می‌شود $\tau = 0$. بر عکس فرض کنید $\tau \neq 0$ باشد. در این صورت $B'(s) = 0$ و از آنجا $B = cte = b_o$ ثابت است: و

داریم:

$$(\alpha(s) \bullet b_o)' = \alpha'(s) \bullet b_o.$$

چون $\alpha'(s) = T$ و $b_o = cte$ (بنابراین $(\alpha(s) \cdot b_o)' = 0$) از آنجا $\alpha(s)$ منحنی مسطحی است که در صفحه $\alpha(s) \cdot b_o = cte$ قرار دارد. در این حالت خاص $\alpha(s)$ در صفحه بوسان قرار دارد.

۶.۱ تمرین‌ها

تمرین ۱.۶.۱. نشان دهید هر منحنی $\alpha(s)$ را می‌توان بر حسب کنج متحرک فرنه به صورت زیر نوشت.

$$\alpha(s) = (\alpha(s) \cdot T)T + (\alpha(s) \cdot N)N + (\alpha(s) \cdot B)B.$$

راهنمایی. فرض کنید $\alpha(s) = aT + bN + cB$ سپس با استفاده از ضرب داخلی مقادیر a, b, c را محاسبه کنید.

تمرین ۲.۶.۱. الف. نشان دهید فرمول محاسبه انحنای منحنی‌های مسطح پارامتری به معادله $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ برابر است با

$$\kappa(t) = \frac{\left| \frac{dx}{dt} \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \frac{d^2x}{dt^2} \right|}{\left(\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \right)^{\frac{3}{2}}}.$$

ب. فرمولی برای محاسبه انحنای منحنی‌های مسطح در دستگاه دکارتی به معادله $y = f(x)$ به دست آورید.

ج. انحنای سهمی $y = x^3 + 1$ را محاسبه کنید.

تمرین ۳.۶.۱. نشان دهید که دایره بوسان هر دایره بر خود دایره منطبق است.

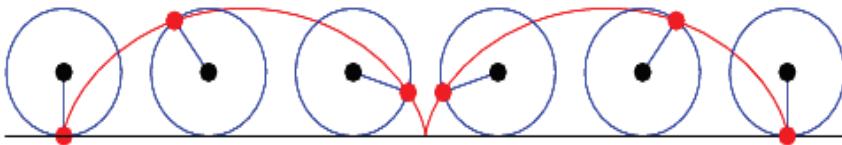
تمرین ۴.۶.۱. منحنی پارامتری مارپیچ زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\alpha(s) = \left(a \cos \frac{s}{c}, a \sin \frac{s}{c}, b \frac{s}{c} \right), \quad s \in \mathbb{R}, \quad c^2 = a^2 + b^2.$$

- الف. تاب و انحنای آن را به دست آورید.
- ب. معادله صفحه بوسان α را به دست آورید.
- ج. نشان دهید خطی که شامل $N(s)$ می باشد از $\alpha(s)$ می گذرد (خط قائم) با محور z ها زاویه $\frac{\pi}{3}$ می سازد.
- د. نشان دهید که خط مماس بر α با محور z ها زاویه ثابتی دارد.

۷.۱ منحنی های جالب

مثال ۱.۷.۱. گچی را بر روی یک چرخ متحرک نصب نموده آن را بر روی مسیر مستقیمی می چرخانیم. شکل ۱۱.۱ را ببینید. این منحنی را چرخزاد یا سیکلوئید^{۳۶} می نامند. برای



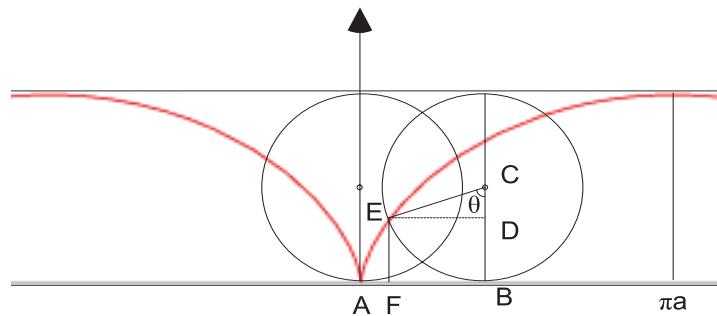
شکل ۱۱.۱: حرکت چرخ روی مسیر مستقیم.

به دست آوردن معادله پارامتری چرخ زاد به شرح زیر عمل می کنیم. شکل ۱۲.۱ را ببینید. فرض کنیم شعاع چرخ برابر a و زاویه دوران برابر θ باشد. باید مقادیر $x = \overline{AF}$ و $y = \overline{EF}$ منحنی را به دست آوریم. با توجه به شکل طول مسیر \overline{AB} برابر طول کمان BE روی دایره است. از آنجا $AB = a\theta$ بدیهی است در هنگام شروع $\theta = 0$ بعد از آن که چرخ به اندازه θ دوران می کند، داریم

$$x = \overline{AF} = \overline{AB} - \overline{FB} = a\theta - a \sin \theta,$$

$$y = \overline{EF} = \overline{BC} - \overline{CD} = a - a \cos \theta.$$

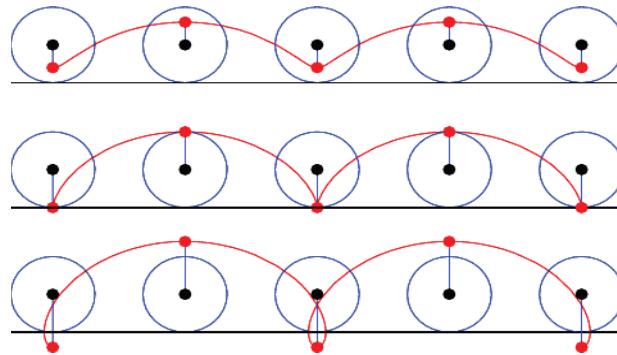
^{۳۶}cycloid



شکل ۱۲.۱: چرخزاد یا سیکلوئید.

بنابراین معادله پارامتری چرخزاد عبارت است از $\alpha(t) = (a(t - \sin t), a(1 - \cos t))$.

اگر مسیر حرکت چرخ بر روی یک خط راست باشد ولی گچ بر روی پره چرخ نصب شده باشد به آن منحنی چرخک^{۳۷} می‌گویند. از این تعریف معلوم می‌شود که چرخزاد یک حالت خاص از چرخک است. شکل ۱۲.۱ را ببینید. اگر مسیر حرکت چرخ بر روی یک

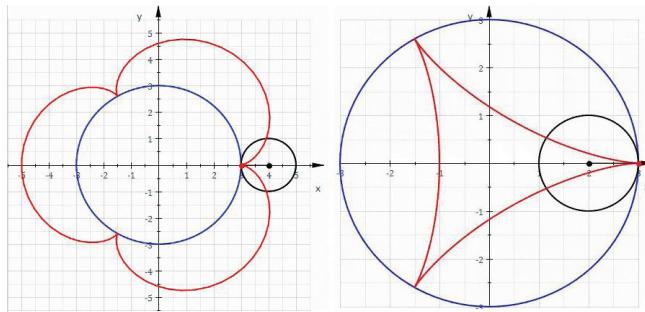


شکل ۱۳.۱: چرخزاد یا سیکلوئید حالت خاصی از منحنی چرخک است.

دایره باشد به آن منحنی بروچرخزاد^{۳۸} و اگر مسیر حرکت چرخ در توی یک دایره باشد به

^{۳۷}Trochoid

^{۳۸}hyper-cycloid



شکل ۱۴.۱: بروچرخزاد و بتوچرخزاد تعمیمی از منحنی چرخزاد روی دایره است.

آن منحنی بتوچرخزاد^{۳۹} می‌گویند. اگر کمی در اینترنت با اسمی لاتین این منحنی‌ها را جستجو کنید می‌توانید تصاویر متحرک^{۴۰} و زیبایی از آن‌ها بیابید. شکل ۱۴.۱ را ببینید.

مثال ۲۰.۷.۱. از تقاطع کره‌ای به مرکز مبدأ و شعاع a با استوانه‌ای به معادله $x^2 + y^2 = ax$ یک منحنی حاصل می‌گردد که به آن منحنی ویویانی^{۴۱} می‌گویند. میخواهیم یک معادله پارامتری برای منحنی ویویانی به دست آوریم. معادله استوانه را به صورت زیر می‌نویسیم.
 از آنجا داریم $x - \frac{a}{4} = \frac{a}{4} \cos \theta$, $y = \frac{a}{4} \sin \theta$ لذا

$$\begin{aligned} z &= \pm \sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)} = \pm \sqrt{a^2 - \left(\frac{a^2}{4} (\cos \theta + 1)^2 + \frac{a^2}{4} \sin^2 \theta \right)} \\ &= \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} (1 - \cos \theta)} = \pm a \sin \frac{\theta}{2}. \end{aligned}$$

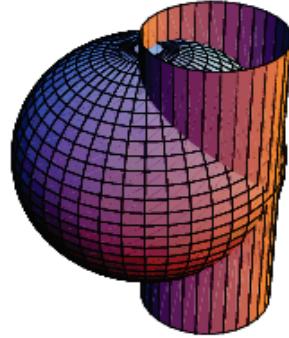
از آنجا داریم

$$x = \frac{a}{4} (\cos \theta + 1) \quad y = \frac{a}{4} \sin \theta, \quad z = \pm a \sin \frac{\theta}{2}. \quad (10.1)$$

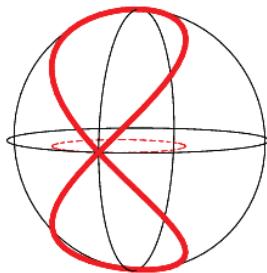
^{۳۹}hypocycloid

^{۴۰}animated pictures

^{۴۱}Vivianis Curve



شکل ۱۵.۱: فصل مشترک کره و استوانه را منحنی وی ویانی میگویند.



شکل ۱۶.۱: منحنی وی ویانی شبیه یک هشت لاتین روی کره است.

چون $\frac{d\theta}{d\theta} \neq 0$ (این نمایش پارامتری منتظم است. شکل ۱۵.۱ در صفحه ۳۰ را ببینید.

مارپیچ تعمیم یافته

مارپیچ تعمیم یافته^{۴۲} تعمیمی از مارپیچ ساده است. مارپیچ ساده در یک نمایش پارامتری طبیعی به صورت زیر نوشته می شود.

$$\alpha(s) = \left(a \cos \frac{s}{c}, a \sin \frac{s}{c}, b \frac{s}{c} \right),$$

که در آن $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ است. برداریکه مماس عبارت است از

$$\frac{d\alpha}{ds} = T(s) = \left(\frac{-a}{c} \sin \frac{s}{c}, \frac{a}{c} \cos \frac{s}{c}, \frac{b}{c} \right).$$

اگر θ زاویه بین برداریکه k در راستای محور z ها باشد، می توان این زاویه را به شرح زیر حساب کرد.

$$\cos \theta = \frac{T \cdot k}{\|T\|} = T \cdot (0, 0, 1) = \frac{b}{c} = cte.$$

بنابراین θ ثابت است. از آنجا نتیجه می شود که در مارپیچ ساده همواره بردار مماس با بردار k در راستای محور z زاویه ثابتی دارد. از آنجا این تعریف را می توان به شرح زیر تعمیم داد.

تعریف ۳.۷.۱. منحنی $\alpha(s)$ را مارپیچ تعمیم یافته^{۴۳} گوییم، اگر بردار ثابت و یکدای مانند u موجود باشد به طوری که u با برداریکه مماس T زاویه ثابتی داشته باشد. u را محور مارپیچ می نامیم.

مثال ۴.۷.۱. یک مارپیچ تعمیم یافته که در سال ۱۸۶۴ میلادی توسط یک ریاضیدان فرانسوی به نام اولری ترکم^{۴۴} مورد مطالعه قرار گرفت. معادله پارامتری آن عبارت است از

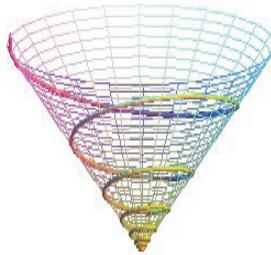
$$x = ae^{bt} \cos t, \quad y = ae^{bt} \sin t, \quad z = ae^{bt} \cot \alpha, \quad (11.1)$$

^{۴۲}Cylindrical Helix

^{۴۳}general helix

^{۴۴}Olry Terquem

این منحنی که به آن مارپیچ مخروطی^{۴۵} نیز می‌گویند در روی یک مخروط قرار دارد.



شکل ۱۷.۱: منحنی مارپیچ مخروطی تعمیم یافته.

معادله دکارتی مخروط در حالت کلی عبارت است از $z = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$ که با جایگذاری از رابطه ۱۱.۱ معادله مخروط مورد نظر به صورت $z = \cot \alpha \sqrt{x^2 + y^2}$ به دست می‌آید. برای محاسبه زاویه بین یال مخروط و محور z که همان زاویه بین بردار موضع $\alpha(t)$ و بردار k است، از $\alpha(t) \cdot k = |\alpha| \cos \theta$ استفاده می‌کنیم. از آنجا $\alpha = \theta$. برای محاسبه زاویه بین $\alpha(t)$ و محور z از $\alpha'(t) \cdot k = |\alpha'| \cos \phi$ استفاده می‌کنیم. تمرین ۶.۸.۱ در صفحه ۳۴ را ببینید.

گزاره ۵.۷.۱. فرض کنیم منحنی α دارای انحنای مخالف صفر باشد، α یک مارپیچ تعمیم یافته است، اگر و تنها اگر $\frac{\tau}{\kappa} = cte$.

اثبات. فرض کنیم مارپیچ تعمیم یافته بر حسب طول قوس s پارامتری شده باشد، در این صورت بنا به تعریف داریم: $T \cdot u = \cos \theta$ که در آن u بردار یکه ثابت و θ نیز ثابت است.

$$\dot{u} = (T \cdot u)' = T' \cdot u + T \cdot u' = \kappa N \cdot u$$

چون $\kappa \neq 0$ داریم $N \cdot u = 0$ بر u عمود است، لذا u در صفحه B و T قرار دارد و می‌توان نوشت: $u = \lambda T + \gamma B$ با ضرب داخلی T و B در این عبارت به ترتیب

^{۴۵}Conical spiral

مقادیر $\gamma = u \cdot B$ و $\lambda = u \cdot T$ به دست می‌آید:

$$u = (u \cdot T)T + (u \cdot B)B.$$

با جایگذاری $u \cdot T = \cos \theta$, $u \cdot B = \sin \theta$ می‌توان نوشت

$$u = \cos \theta T + \sin \theta B$$

با مشتق گیری نسبت به s و با استفاده از فرمول‌های اول و سوم فرنه داریم:

$$\dot{u} = \cos \theta T' + \sin \theta B' = \cos \theta(\kappa N) - \sin \theta(\tau N),$$

$$(\kappa \cos \theta - \tau \sin \theta)N = \dot{u},$$

$$\kappa \cos \theta - \tau \sin \theta = \dot{u}, \quad \frac{\tau}{\kappa} = \cot \theta = cte.$$

برعکس چون روابط فوق برگشت پذیر است، بردار یکه‌ای مانند

موجود است به طوری که در شرایط تعریف مارپیچ تعیین یافته صدق کند. \square

۸.۱ تمرین‌ها

تمرین ۱.۰.۱. از تقاطع کره‌ای به مرکز مبدأ و شعاع a با استوانه‌ای به معادله $x^2 + y^2 = ax$ یک منحنی حاصل می‌گردد که به آن منحنی ویویانی^{۴۶} می‌گویند. شکل‌های ۱۵.۱ و ۱۶.۱ در صفحه ۳۰ را ببینید. اگر معادله پارامتری این منحنی توسط رابطه ۱۰.۱ داده شده باشد، انحنا و تاب آن را در هر نقطه محاسبه کنید.

تمرین ۲.۰.۱. معادله منحنی حاصل از تقاطع دو استوانه عمود بر هم با شعاع a را به دست آورده، انحنا و تاب آن را حساب کنید. آیا می‌توانید نمودار این منحنی را در یکهشتم اول

^{۴۶}Viviani Curve

(یعنی جایی که در دستگاه مختصات $x > 0, y > 0, z > 0$ باشد.) رسم کنید.
راهنمایی. معادله دو استوانه عمود بر هم به ترتیب در راستای محور z و محور y عبارت است از

$$x^2 + y^2 = a^2, \quad x^2 + z^2 = a^2.$$

می‌توانید از تغییر متغیرهای مثلثاتی نیز استفاده نمایید.

تمرین ۱.۸.۳. معادله صفحه قائم یا صفحه اصلاحی منحنی $\alpha(s)$ را در نقطه s بنویسید.

تمرین ۱.۸.۴. برای مارپیچ ساده ثابت کنید $\kappa = \frac{cte}{\tau}$.

تمرین ۱.۸.۵. آیا سه‌تایی T و N و B (مختصات متحرک) در هر نقطه یکتاست؟ چرا؟

تمرین ۱.۸.۶. یک منحنی به معادله پارامتری زیر را در نظر می‌گیریم.

$$x = at \cos t, \quad y = at \sin t, \quad z = bt \cot \alpha, \quad (12.1)$$

که در آن α زاویه ثابت است. تصویر مربوط به مثال ۴.۷.۱ در صفحه ۲۱ را ببینید.

الف. ثابت کنید این منحنی مارپیچ تعمیم یافته است.

ب. تصویر این منحنی روی صفحه $y \circ x$ چیست و معادله پارامتری آن کدام است.

ج. b را طوری تعیین کنید که زاویه α زاویه بین محور z و مارپیچ باشد.

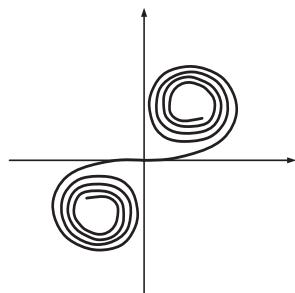
د. b را طوری تعیین کنید که زاویه α زاویه بین محور z و یال مخروط باشد.

د. آیا ممکن است که در بخش‌های ج و د، زاویه α مساوی باشد.

تمرین ۱.۸.۷. معادله دایره بوسان را برای سهمی $x^2 + y^2 = a^2$ بنویسید.

تمرین ۱.۸.۸. گچی را بر روی یک چرخ متحرک به شعاع a نصب نموده آن را بر روی یک خط راست می‌چرخانیم. اولاً طول قوس منحنی را پس از یک دوران کامل حساب کنید.
ثانیاً این منحنی را محاسبه کنید. مثال ۱.۷.۱ در صفحه ۲۷ را ببینید.

تمرین ۹.۸.۱. گچی را بر روی یک چرخ متحرک به شعاع a نصب نموده آن را بر روی دایره ای به شعاع b می چرخانیم. اولاً نمودار منحنی حاصل را رسم کنید. ثانیاً معادله آن را بنویسید. شکل ۱۴.۱ در صفحه ۲۹ را ببینید.



شکل ۱۸.۱: منحنی پیچ کورنو.

تمرین ۱۰.۸.۱. منحنی پیچ کورنو^{۴۷} یا پیچ اولر^{۴۸} به صورت زیر تعریف می شود. این منحنی در محاسبات مربوط به الگوی شکست نور مورد استفاده قرار می گیرد.

$$\begin{aligned}x &= a\sqrt{\pi} \int_0^t \cos \frac{\pi t^2}{2} dt, \\y &= a\sqrt{\pi} \int_0^t \sin \frac{\pi t^2}{2} dt.\end{aligned}$$

این منحنی را بر حسب طول قوس پارامتری کنید، سپس نشان دهید انحنای آن مضربی از طول قوس است.

^{۴۷}Cornu spiral

^{۴۸}Euler spiral

۱.۸.۱ حرکت پرتابی در صفحه و فضا

در پایان این فصل منحنی های حرکت پرتابی^{۴۹} را با ذکر چند مثال مورد مطالعه قرار می دهیم. حرکت پرتابی در صفحه و فضا بخش مهمی از فیزیک را تشکیل داده و در هندسه و کاربرد آن نیز بسیار مورد توجه است.

مثال ۱۱.۸.۱. فرض کنیم یک پرتاب کننده گلوله‌ای را با سرعت اولیه V و با زاویه پرتاب α از نقطه‌ای به مختصات (x, y) پرتاب می‌کند. شکل ۱۹.۱ را ببینید. اگر تنها نیروی وارد بر گلوله نیروی وزن باشد، مطلوب است محاسبه

- الف. منحنی مسیر حرکت گلوله،
- ب. انحنای منحنی در هر نقطه،
- ج. مقدار اوج گلوله،
- د. مقدار برد گلوله،

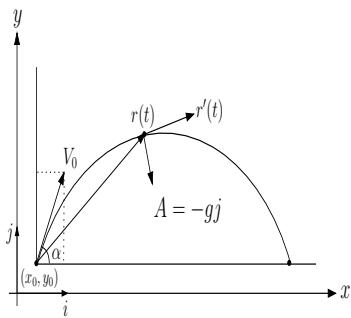
ه. زاویه پرتاب را طوری تعیین کنید که برد گلوله بیشترین مقدار خود را داشته باشد،
و. آیا وزن گلوله تاثیری در موارد فوق دارد؟

حل: الف. فرض کنیم تابع برداری مسیر حرکت گلوله توسط $V(t)$ داده شده باشد.
اگر بردار موضع مسیر حرکت را با $r(t) = x(t)i + y(t)j$ و نقطه شروع را با بردار
 $r_0 = x_0 i + y_0 j$ نمایش دهیم آنگاه بردار سرعت اولیه برابر است با

$$V = |V|(\cos \alpha i + \sin \alpha j).$$

بردار $V(t) = \frac{dr}{dt}$ بردار سرعت و $A(t) = \frac{dV}{dt}$ بردار شتاب مسیر است. اگر تنها نیروی وارد بر گلوله نیروی وزن باشد، داریم $F = -mgj$ که در آن $g = ۹.۸ m/s^2$. از طرف دیگر بنا بر قانون دوم نیوتون نیروی F برابر است با جرم m ضربدر شتاب $F = mA$.

^{۴۹}Motion of Projectile



شکل ۱۹.۱: مسیر حرکت گلوله در حرکت پرتابی.

بنابراین داریم $A = -gj$. حال با استفاده از بردار شتاب، بردار سرعت و سپس مسیر منحنی را با دوبار انتگرال گیری و استفاده از شرایط اولیه به دست می آوریم.

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= -gj, \quad V(t) = -gtj + c., \quad t = 0, \quad c. = V., \\ V(t) &= -gtj + V., \quad r(t) = -\frac{1}{2}gt^2 j + tV. + c_1, \quad t = 0, \quad c_1 = r., \\ r(t) &= -\frac{1}{2}gt^2 j + t|V.|(\cos \alpha i + \sin \alpha j) + r.. \end{aligned}$$

با جایگذاری شرایط اولیه تابع برداری مسیر حرکت به دست می آید.

$$r(t) = (|V.|t \cos \alpha + x.)i + (-\frac{1}{2}gt^2 + |V.|t \sin \alpha + y.)j.$$

ب. برای محاسبه انحصار کافی است از فرمول مناسب استفاده کنیم.

$$\kappa(t) = \frac{\left| \frac{dx}{dt} \frac{d'y}{dt} - \frac{dy}{dt} \frac{d'x}{dt} \right|^{\frac{1}{2}}}{\left(\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{|V.| \cos \alpha |g|}{(|V.|^2 + g^2 t^2 - 2|V.|gt \sin \alpha)^{\frac{3}{2}}}.$$

ج. برای محاسبه حداقل ارتفاع گلوله باید بیشترین مقدار $y(t)$ را به دست آوریم.

$$\begin{aligned} y(t) &= -\frac{1}{2}gt^2 + |V.|t \sin \alpha + y., \\ y'(t) &= -gt + |V.| \sin \alpha = 0, \quad t = \frac{|V.| \sin \alpha}{g}. \end{aligned}$$

لذا حداکثر مقدار $y(t)$ عبارت است از

$$y_{max} = \frac{1}{2} \frac{|V.|^2 \sin^2 \alpha}{g} + y.$$

د. برای محاسبه برد گلوله باید مقدار $x(t) = t|V.| \cos \alpha$ را به دست آوریم. چون x تابعی خطی از t است، بیشترین مقدار آن وقتی است که $y = y_{max}$. از آنجا

$$y(t) = t \left(-\frac{1}{2}gt + |V.| \sin \alpha \right) = \dots, \quad t = \frac{2|V.| \sin \alpha}{g}.$$

لذا

$$x_{max} = \frac{|V.|^2 \sin 2\alpha}{g} + x_0.$$

ه. برای آن که x_{max} حداکثر مقدار خود را بگیرد، باید $\sin 2\alpha = 1$ لذا اگر زاویه پرتاپ گلوله برابر $\frac{\pi}{4} = \alpha$ باشد، گلوله حداکثر برد خود را خواهد داشت.
و. چون در هیچ یک از روابط فوق متغیر جرم m وجود ندارد، لذا جرم گلوله تاثیری در نتایج فوق ندارد.

مثال ۱۲.۸.۱. فرض کنیم گلوله ای به جرم m را از مبدأ مختصات با بردار سرعت اولیه $V_0 = aj + bk$ به فضای پرتاپ می‌نماییم. اگر جریان باد نیرویی به اندازه $F_0 = cm_i v$ علاوه بر شتاب حاصل از نیروی جاذبه به گلوله وارد کند، الف. منحنی مسیر این گلوله را به دست آورد، محل برخورد آن به زمین را تعیین کنید.
ب. در این شرایط جهت پرتاپ گلوله را طوری تعیین کنید که به نقطه $(0, 2, 2)$ برخورد کند.

حل: اگر نیروی وزن وارد بر گلوله برابر $F = -mgk$ باشد، با توجه به قانون دوم نیوتون، شتاب حاصل از جاذبه برابر $-gk$ است، که در آن $m/s^2 = g = 9.8$. اگر جریان باد نیرویی به اندازه $F_0 = cm_i v$ وارد نماید، شتاب حاصل از آن به مقدار ci به گلوله وارد می‌شود.

شود. بردار شتاب از جمع شتاب های موجود به دست می آید. لذا داریم
از آنجا با انتگرال گیری و استفاده از شرایط اولیه داریم

$$V(t) = c_1 t - g t k + c_2, \quad t = 0,$$

$$c_2 = V(0) = aj + bk, \quad V(t) = c_1 t + aj + (b - gt)k.$$

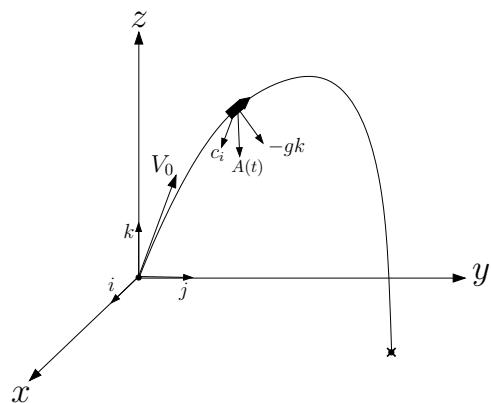
با انتگرال گیری مجدد و جایگذاری شرایط اولیه، تابع برداری مسیر حرکت به دست می آید.

$$r(t) = \frac{1}{2}ct^2 i + atj + (bt - \frac{1}{2}gt^2)k + c_3,$$

$$r(0) = (0, 0, 0) \Rightarrow c_3 = 0,$$

$$r(t) = \frac{1}{2}ct^2 i + atj + (bt - \frac{1}{2}gt^2)k.$$

برای تعیین محل اصابت گلوله به زمین، فرض می کنیم $z = 0$ پس از



شکل ۲۰.۱: مسیر حرکت گلوله در حرکت پرتابی در فضا با تاثیر جریان باد.

آنچه $t = \frac{2b}{g}$ با جایگذاری در $r(t)$ مختصات محل فرود مشخص می شود. $(0, \frac{2ab}{g}, \frac{2b^2}{g^2})$

برای آن که گلوله به هدف (۰, ۲, ۲) اصابت کند، باید

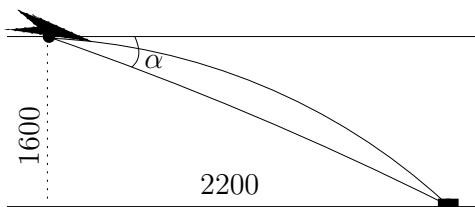
$$\begin{aligned} 2c \frac{b^2}{g^2} &= 2, \quad 2 \frac{ab}{g} = 2, \quad b = \frac{g}{a}, \\ c \frac{\frac{g^2}{a^2}}{g^2} &= 1, \quad a = \sqrt{c}, \quad b = \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{c}}. \end{aligned}$$

از آنجا بردار سرعت اولیه V یا جهت شلیک گلوله به منظور اصابت به نقطه (۰, ۲, ۲)،

$$V = \sqrt{cj} + \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{c}} K$$

۹.۱ تمرین‌ها

تمرین ۱۰.۱. فرض کنیم هواپیمایی که به طور افقی و در ارتفاع $m 1600$ در حال پرواز است قصد دارد محموله‌ای را رها نماید تا به هدف مشخصی در سطح زمین برخورد کند. اگر سرعت هواپیما $220 m/s$ باشد، با چه زاویه دیدی (بین افق و خط هدف) محموله را رها نماید، تا به هدف اصابت کند؟ راهنمایی: از قسمت (الف). مثال ۱۱.۸.۱ استفاده کنید.



شکل ۲۱.۱: مسیر حرکت محموله رها شده از هواپیما.

تمرین ۲۰.۱. فرض کنیم یک توپ فوتبال را به بالای سر بازیکنی در ارتفاع ۲ متری که در مختصات (x_0, y_0) از زمین فوتبال قرار دارد، بفرستیم تا او بتواند با ضربه سر خود توپ را وارد دروازه کند. اگر جریان باد شتابی به اندازه $ci + dj$ علاوه بر شتاب حاصل از نیروی جاذبه به توپ وارد کند، جهت پرتاب توپ را تعیین کنید.

تمرین ۳.۹.۱. فرض کنیم موشکی را از مبدأ $(0, 0)$ با سرعت اولیه $V_0 = aj + bk$ به فضا پرتاب می‌نماییم. اگر نیروی موتور این موشک در هر لحظه ثابتی برابر $aj + tk$ به آن وارد نماید، منحنی مسیر حرکت موشک را به دست آورید.

۱۰.۱ قضیه اساسی نظریه منحنی‌ها و معادلات ذاتی

همانطور که دیدیم فرمول‌های فرنه یک دستگاه معادلات دیفرانسیل برداری درجه اول نسبت به مشتقات سه بردار یکه T , N و B تشکیل می‌دهند. از این دستگاه معادلات دیفرانسیل می‌توان انحنا و تاب منحنی را به دست آورد. حال این سوال را مطرح می‌کنیم که اگر توابع پیوسته‌ای مانند κ و τ داشته باشیم، آیا جواب‌هایی مانند T , N و B برای دستگاه معادلات دیفرانسیل فرنه وجود دارد؟ آیا این جواب یکتا است؟ اگر $T(s) = T$, $\alpha'(s) = \alpha'$, آیا با انتگرال‌گیری از این رابطه یک منحنی مانند $c = \int T ds + c$ با انحنا و تاب κ و τ وجود دارد؟ جواب مثبت برای این سوالات را در قضیه زیر ثابت می‌کنیم. در این بخش و بلکه در ادامه این فصل همه منحنی‌ها را از کلاس C^k ، $k \geq 3$ فرض می‌کنیم مگر عکس آن تصریح گردد.

قضیه ۱۰.۱.۱. قضیه اساسی وجود و یکتاپی منحنی‌ها

فرض کنیم $\kappa(s)$ و $\tau(s)$ توابع دلخواه پیوسته‌ای در فاصله $s \in [a, b]$ باشند، آنگاه یک و تنها یک منحنی پارامتری منتظم $\alpha(s)$ وجود دارد که $\kappa(s)$ و $\tau(s)$ به ترتیب انحنا و تاب آن بوده و s پارامتر طبیعی (طول قوس) باشد.

اثبات. یکتاپی: فرض کنیم C و C^* دو منحنی از کلاس C^k ، $k \geq 3$ با نمایش پارامتری طبیعی $\alpha(s)$ و $\alpha^*(s)$ باشند به طوری که انحنا و تاب آنها به ازای تمام مقادیر s برابر باشند. یعنی $\kappa(s) = \kappa^*(s)$ و $\tau(s) = \tau^*(s)$. ثابت می‌کنیم که C و C^* بر یکدیگر منطبق هستند. برای این کار منحنی C^* را طوری انتقال می‌دهیم که در نقطه $s = s_0$ منحنی C را قطع کند. در این نقطه داریم $\alpha^*(s_0) = q$. $\alpha^*(s)$ را حول نقطه s_0 طوری دوران می‌دهیم که سه‌تایی (T^*, N^*, B^*) روی سه‌تایی (T_0, N_0, B_0) قرار گیرد. با مشتق‌گیری از حاصلضرب داخلی بردارهای یکه و استفاده از

فرمول های فرنه به شرح زیر داریم:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}(T \bullet T^*) &= T' \bullet T^* + T \bullet T'^* = \kappa N \bullet T^* + T \bullet \kappa^* N^* \\ &= \kappa(N \bullet T^* + T \bullet N^*), \\ \frac{d}{ds}(N \bullet N^*) &= N' \bullet N^* + N \bullet N'^* \\ &= (\tau B - \kappa T) \bullet N^* + N \bullet (\tau^* B^* - \kappa^* T^*), \\ &= \tau(B \bullet N^* + N \bullet B^*) - \kappa(T \bullet N^* + N \bullet T^*), \\ \frac{d}{ds}(B \bullet B^*) &= B' \bullet B^* + B \bullet B'^* = -\tau N \bullet B^* - B \bullet \tau^* N^* \\ &= -\tau(N \bullet B^* + B \bullet N^*). \end{aligned}$$

اگر طرفین سه رابطه بالا را با هم جمع کنیم، داریم: \bullet

با انتگرال گیری، داریم:

$$T \bullet T^* + N \bullet N^* + B \bullet B^* = cte.$$

اما در نقطه s داریم، $B. = B.^*$, $N. = N.^*$, $T. = T.^*$ از آنجا

$$T \bullet T^* = 1, N \bullet N^* = 1, B \bullet B^* = 1.$$

بنابراین در نقطه s و همچنین برای تمام نقاط s داریم:

$$T \bullet T^* + N \bullet N^* + B \bullet B^* = 3 \quad (13.1)$$

حال نشان می دهیم که هر یک از این سه ضرب دارای مقدار واحد هستند. حاصلضرب داخلی دو بردار یکه T و T^* را در نظر می گیریم، اگر θ زاویه بین آنها باشد، $-1 \leq \theta \leq 1$ بنابراین اگر رابطه (13.1) برقرار باشد، لازم است که: $B \bullet B^* = T \bullet T^* = \cos \theta \leq 1$ در نتیجه زاویه بین هر زوج از این سه بردار برابر ۱

صفراست و برای هر $B = B^*$, $N = N^*$, $T = T^*$ داریم: $s \in [a, b]$ و $\alpha(s) = \alpha^*(s) + c$ اما چون در نقطه s , $T = \frac{d\alpha}{ds} = T^* = \frac{d\alpha^*}{ds}$ داریم $\alpha(s) = \alpha^*(s)$, $s \in [a, b]$, بنابراین به ازای هر $c = 0$, $\alpha(s) = \alpha^*(s)$. نتیجه دو منحنی C و C^* بر یکدیگر منطبق می‌شوند.

اثبات وجود: فرض کنیم $\kappa(s)$ و $\tau(s)$ دو تابع پیوسته در بازه $[a, b]$ باشند. نشان می‌دهیم یک منحنی پارامتری شده بر حسب طول قوس مانند $\alpha(s)$ وجود دارد که $\kappa(s)$ و $\tau(s)$ به ترتیب احنا و تاب آن باشد. بنا بر تعریف فرمول‌های فرنه ۱۴.۱ در صفحه ۲۲ یک دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی با ضرایب $\kappa(s)$ و $\tau(s)$ هستند که جواب‌های آن سه بردار متعامد یکه $B(s), N(s), T(s)$ هستند. بنا بر قضیه وجود و یکتاپی جواب برای معادلات دیفرانسیل برداری، دستگاه معادلات فرنه یک جواب یکتاپی $B(s), N(s), T(s)$ دارد. حال با استفاده از تابع برداری یکتاپی $T(s)$ می‌توان تابع برداری منحنی $\alpha(s)$ را به شرح زیر ارائه نمود

$$\frac{d\alpha}{ds} = T(s), \quad \alpha(s) = \int_0^s T(s) ds + c. \quad (14.1)$$

با جایگزینی $c = 0$ بردار ثابت $\alpha(s) = \alpha(0)$ به دست می‌آید. از آنجا داریم $\int_0^s T(s) ds + \alpha(0)$ که همان منحنی مورد نظر است. برای کامل شدن اثبات کافی است نشان دهیم که s در منحنی $\alpha(s)$ پارامتر طول قوس بوده و احنا و تاب آن به ترتیب توابع $\kappa(s)$ و $\tau(s)$ هستند. در حقیقت از رابطه ۱۴.۱ داریم

$$|\alpha'(s)| = \left| \frac{d\alpha}{ds} \right| = |T(s)| = 1, \quad (15.1)$$

لذا s پارامتر طول قوس است. با استفاده از فرمول اول فرنه مقدار احنا و تاب آنی منحنی تعریف شده توسط رابطه ۱۴.۱ را حساب می‌کنیم.

$$|\alpha''(s)| = |T'(s)| = |\kappa(s)N| = \kappa(s).$$

با ضرب بردار یکه قائم در فرمول سوم فرنه مقدار تاب را به دست می آوریم.

$$-B' \bullet N = -(-\tau(s)N) \bullet N = \tau(s).$$

لذا توابع $\kappa(s)$ و $\tau(s)$ به ترتیب انحنا و تاب منحنی $\alpha(s)$ هستند. این موضوع اثبات قضیه را کامل می کند. \square

مثال ۲.۱۰.۱. فرض کنیم که κ تابع انحنای یک منحنی مسطح باشد. تابع پارامتری آن منحنی را به دست می آوریم. در منحنی مسطح $\tau = \tau(s)$ و انتگرال‌گیری از فرمول‌های فرنه به راحتی ممکن می شود.

فرض کنیم θ زاویه‌ای باشد که بردار یکه مماس T با محور x ها می‌سازد. داریم

$$T = \cos \theta i + \sin \theta j. \quad (16.1)$$

همچنین چون N بر T عمود است، داریم

$$N = -\sin \theta i + \cos \theta j. \quad (17.1)$$

شکل ۸.۱ را ببینید. اگر از این دو معادله اگر از این دو معادله نسبت به پارامتر s مشتق بگیریم، داریم

$$T' = \theta'(-\sin \theta i + \cos \theta j) = \theta' N.$$

$$N' = -\theta'(\cos \theta i + \sin \theta j) = -\theta' T.$$

اما وقتی که $\tau = \tau(s)$ ، معادلات فرنه به صورت زیر در می‌آید

$$T' = \kappa N.$$

$$N' = -\tau B - \kappa T = -\kappa T.$$

اگر $\kappa = \kappa(s)$ و $T = T(s)$ تعریف شده در روابط (۱۶.۱) و (۱۷.۱) جواب معادلات دیفرانسیل فرنه خواهد بود. اگر قرار دهیم $\theta' = \theta'(s)$ آنگاه

$$\theta = \int \kappa ds + c_1. \quad (۱۸.۱)$$

با معین بودن θ ، از رابطه (۱۶.۱) داریم

$$\alpha(s) = \int T ds + c_2 = \int [\cos \theta(s)i + \sin \theta(s)j] ds + c_2. \quad (۱۹.۱)$$

که $\alpha(s)$ منحنی مورد نظر است. توجه نمایید که تغییر عدد ثابت c_1 در رابطه (۱۸.۱) موجب تغییر در θ می‌شود و در نتیجه دورانی در منحنی α پدید می‌آورد و تغییرات مقدار ثابت c_2 در رابطه (۱۹.۱) موجب انتقال منحنی α می‌شود.

۱.۱۰.۱ معادلات ذاتی یک منحنی

ثابت کردیم که هر منحنی پارامتری منتظم از کلاس C^k با $k \geq 3$ و تاب $\kappa(s)$ را با احنا و تاب $\tau(s)$ را فقط به یک صورت می‌توان نوشت که در آن $\kappa(s)$ و $\tau(s)$ توابعی از پارامتر طول قوس s هستند. چون توابع κ و τ به طور کامل یک منحنی را مشخص می‌کنند، هر رابطه بین آنها را معادله ذاتی یا معادله ^{۵۰} طبیعی ^{۵۱} می‌گویند.

مثال ۳.۱۰.۱. معادله ذاتی یک خط راست $\kappa = \kappa(s)$ می‌باشد. برای نشان دادن این موضوع، کافی است توجه کنیم که یک منحنی پارامتری منتظم یک خط راست است اگر و تنها اگر $\kappa' = 0$. لم ^{۲۵} در صفحه ۸.۵.۱ را ببینید.

مثال ۴.۱۰.۱. معادله ذاتی دایره‌ای به شعاع $r = \frac{1}{|\kappa'|}$ عبارتست از.

^{۵۰} intrinsic

^{۵۱} natural

• زیرا برای دایره‌ای به شعاع r داریم:

$$\alpha(t) = (r \cos t)i + (r \sin t)j, \quad T = \alpha'(s) = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{d\alpha}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{\frac{d\alpha}{dt}}{\frac{ds}{dt}}.$$

از طرفی چون $\frac{ds}{dt} = |\alpha'(t)|$ از فرمول طول قوس داریم از آنجا نتیجه می‌شود:

$$T = \frac{\alpha'(t)}{|\alpha'(t)|} = \frac{-r \sin ti + r \cos tj}{r} = -\sin ti + \cos tj,$$

$$\alpha''(s) = \frac{dT}{ds} = \frac{dT}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{\frac{dT}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = \frac{-\cos ti - \sin tj}{r} = -\frac{1}{r} \cos ti - \frac{1}{r} \sin tj.$$

از آنجا $\kappa = \frac{1}{r} = cte$ بنا براین معادله دایره به صورت ذاتی می‌آید. از طرفی دایره منحنی مسطح است، ثابت کردیم $\tau = \tau$. حال بر عکس اگر κ ثابت باشد، با استفاده از رابطه ۱۸.۱ داریم:

$$\frac{d\theta}{ds} = \kappa = cte, \quad \theta = \int \kappa ds = \kappa \int ds = \kappa s,$$

از طرف دیگر

$$\frac{d\alpha}{ds} = T, \quad \alpha = \int T ds = \int (\cos \theta i + \sin \theta j) ds,$$

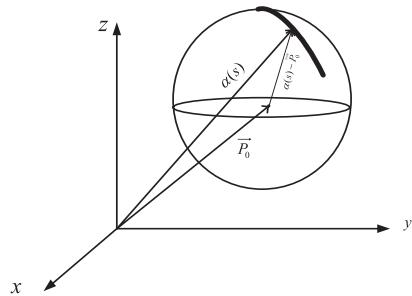
$$\alpha(s) = \int (\cos \kappa s i + \sin \kappa s j) ds = (\int \cos \kappa s ds)i + (\int \sin \kappa s ds)j.$$

لذا با محاسبه انتگرال داریم، $\alpha(s) = \left(\frac{1}{\kappa} \sin \kappa s, \frac{-1}{\kappa} \cos \kappa s\right)$ که معادله یک دایره است.

فرض کنیم منحنی $\alpha(s)$ روی کره قرار داشته باشد، می‌خواهیم معادله ذاتی آن را به دست آوریم.

لم ۵.۱۰.۱. منحنی پارامتری منتظم $\alpha(s)$ از کلاس C^k با $k \geq 3$ و تاب ناصرف روی کره‌ای به مرکز P و شعاع a قرار دارد، اگر و تنها اگر معادله ذاتی آن به صورت زیر باشد.

$$\left(\frac{1}{\kappa}\right)' + \left(\frac{\kappa'}{\kappa^2 \tau}\right)' = a^2. \quad (20.1)$$



شکل ۲۲.۱: کره‌ای به مرکز $P.$ و به شعاع a و خانواده منحنی‌های روی آن.

اثبات. فرض کنیم منحنی $\alpha(s)$ روی کره‌ای به مرکز $P.$ و به شعاع a قرار داشته باشد. اگر $\alpha(s)$ را به عنوان بردار موضع این منحنی در نظر بگیریم و $P.$ بردار ثابت مرکز کره باشد، با توجه به شکل ۲۲.۱ مشاهده می‌کنیم که بردار شعاعی $(\alpha(s) - P.)$ دارای طول ثابت است و داریم

$$(\alpha(s) - P.) \bullet (\alpha(s) - P.) = a^2, \quad (21.1)$$

با دو بار مشتق‌گیری از این رابطه نسبت به s و استفاده از فرمول‌های فرنه داریم

$$\alpha'(s) \bullet (\alpha(s) - P.) = 0, \quad (22.1)$$

$$\alpha''(s) \bullet (\alpha(s) - P.) + \alpha'(s) \bullet \alpha'(s) = 0, \quad \kappa N \bullet (\alpha(s) - P.) + 1 = 0$$

$$N \bullet (\alpha(s) - P.) = -\frac{1}{\kappa}, \quad \kappa \neq 0, \quad (23.1)$$

$$\kappa' N \bullet (\alpha(s) - P.) + \kappa N' \bullet (\alpha(s) - P.) + \kappa N \bullet \alpha'(s) = 0,$$

$$\kappa' N \bullet (\alpha(s) - P.) + \kappa(\tau B - \kappa T) \bullet (\alpha(s) - P.) = 0.$$

با جایگذاری روابط (۲۲.۱) و (۲۲.۱) در رابطه اخیر داریم

$$\begin{aligned}\kappa' \left(-\frac{1}{\kappa} \right) + \kappa \tau B \bullet (\alpha(s) - P.) &= \cdot, \\ B \bullet (\alpha(s) - P.) &= \frac{\kappa'}{\kappa^2 \tau}.\end{aligned}$$

حال بردار $(\alpha(s) - P.)$ را روی سه بردار T , N و B به صورت زیر تصویر می کنیم.
تمرین ۱.۶.۱ در صفحه ۲۶ را ببینید.

$$\begin{aligned}(\alpha(s) - P.) &= ((\alpha - P.) \bullet T)T + ((\alpha - P.) \bullet N)N + (\alpha - P.) \bullet B \\ &= -\frac{1}{\kappa}N + \frac{\kappa'}{\kappa^2 \tau}B.\end{aligned}$$

از آنجا با استفاده از (۲۰.۱) رابطه (۲۰.۱) نتیجه می شود. برای اثبات عکس این لم فرض کنیم رابطه (۲۰.۱) برقرار باشد، تابع $\beta(s)$ را با توجه به رابطه اخیر به صورت زیر تعریف می کنیم

$$\beta(s) = \alpha(s) - \frac{1}{\kappa}N + \frac{\kappa'}{\kappa^2 \tau}B,$$

که در آن $\alpha(s)$ یک تابع برداری دلخواه است. نشان می دهیم $\alpha(s)$ در روی یک کره به مرکز p . قرار دارد. $\beta'(s)$ را به دست می آوریم. از طرف دیگر با مشتقگیری از رابطه (۲۰.۱) و مقایسه آن با $\beta'(s) = P.$ و $\beta'(s) = 0$ در نتیجه $\beta(s)$ ثابت است

$$|\alpha(s) - P.|^2 = \left(\frac{1}{\kappa} \right)^2 + \left(\frac{\kappa'}{\kappa^2 \tau} \right)^2 = a^2.$$

در نتیجه $\alpha(s)$ در روی کره ای به شعاع a و به مرکز $P.$ قرار دارد. این موضوع اثبات لم را کامل می کند. \square

۱۱.۱ تمرین ها

تمرین ۱.۱۱.۱. معادله ذاتی منحنی مارپیچ $\alpha(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$ را بنویسید.

- تمرین ۲.۱۱.۱. الف. در منحنی پارامتری منتظم $\alpha(s) = (\frac{1}{\sqrt{2}} \cos s, \sin s, \frac{1}{\sqrt{2}} \cos s)$ از این منحنی در لم ۵.۱۰.۱ در صفحه ۴۷ صدق می‌کند.
- ب. نشان دهید این منحنی در لم ۵.۱۰.۱ نشان دهید که این منحنی روی کره قرار دارد.

تمرین ۳.۱۱.۱. از این منحنی یک منحنی مسطح توسط تابع $s = \kappa(s)$ داده شده است. اگر نقطه شروع این منحنی در $(0, 0)$ باشد معادله پارامتری آن را بنویسید و نمودار آن را رسم کنید. این منحنی را پیچ اولر می‌نامند.

۱۲.۱ منحنی در فضای اقلیدسی n -بعدی

مقدمه. در این بخش تعریف منحنی در \mathbb{R}^n یا فضای اقلیدسی n -بعدی را بیان نموده، فرمول‌های فرنه در \mathbb{R}^n را به دست می‌آوریم. خواهیم دید که این خاصیت جالب از فرمول‌های فرنه آن است که این منحنی را می‌توان با استفاده از ضرب داخلی نوشت. این موضوع چند نتیجه جالب دارد. اول اینکه می‌توان با استفاده از تعریف ضرب داخلی روی کلیه نتایج بدست آمده در \mathbb{R}^3 را عیناً برای آن رویه تکرار نمود.

در این بخش تعمیم تعریف برخی از منحنی‌های خاص مانند خط راست و دایره را برای فضای اقلیدسی n -بعدی بیان می‌کنیم. جالب است که بدانیم دقیقاً مشابه این تعاریف برای فضاهای پیچیده تری مانند سطوح یا رویه‌ها نیز برقرار است. برای فرمول‌های فرنه روی یک منیفلد ریمانی n -بعدی می‌توانید کتاب [۲] را ببینید.

تعریف ۱.۱۲.۱. C تصویر بازه دلخواه $I \subset \mathbb{R}$ تحت یک تابع برداری ۱-متغیره پیوسته

و موضعایک به یک $\alpha(t)$ را یک منحنی در \mathbb{R}^n می‌نامیم.

$$\alpha : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow C \subset \mathbb{R}^n,$$

$$t \mapsto \alpha(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t)).$$

مثال ۲.۱۲.۱. فرض کنیم C یک خط راست در \mathbb{R}^n باشد که از نقطه‌ای به مختصات (b_1, \dots, b_n) گذشته و در راستای بردار (a_1, \dots, a_n) قرار دارد. معادله پارامتری آن عبارت است از

$$\alpha : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow C \subset \mathbb{R}^n,$$

$$t \mapsto \alpha(t) = (a_1 t + b_1, \dots, a_n t + b_n).$$

نمادگذاری: در این بخش و در ادامه این فصل ضرب داخلی دو بردار V و W در \mathbb{R}^n را با نماد \langle , \rangle نمایش می‌دهیم.

$$\langle V, W \rangle = v_1 w_1 + \dots + v_n w_n = \sum_{i=1}^n v_i w_i.$$

۱.۱۲.۱ فرمول‌های فرنه در \mathbb{R}^n

در این بخش فرمول‌های فرنه را بر اساس تعریف ضرب داخلی اقلیدسی \mathbb{R}^n تعریف می‌کنیم. با این روش تعییم فرمول‌های فرنه به فضاهای دیگر ساده می‌گردد. فرض کنیم C یک منحنی منتظم در \mathbb{R}^n از کلاس C^k ، $k \geq n$ پارامتری شده بر حسب طول قوس s و V_1 بردار یکه مماس بر منحنی باشد. چون بردار V یکه است بر مشتق خود یعنی $V'_1 = dV_1/ds$ عمود است. تعریف می‌کنیم

$$\kappa_1 = |V'_1|.$$

در یک همسایگی از منحنی C که در آن $\kappa_1 \neq 0$ باشد بردار یکه عمود V_2 را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$V'_1 = \kappa_1 V_2. \quad (24.1)$$

رابطه (24.1) را فرمول اول فرنه و κ_1 را انحنای اول فرنه می‌گوییم. سپس در یک همسایگی از منحنی C که در آن $\kappa_1 \neq 0$ باشد انحنای دوم و سوم فرنه را به روش زیر تعریف می‌کنیم. فرض کنیم V_3 بردار یکه ای در \mathbb{R}^n باشد که بر دو بردار $\{V_1, V_2\}$ عمود باشد. چون V_2 یکه است، V'_2 بر V_2 عمود است. پس می‌توان V'_2 را بر حسب ترکیب خطی از دو بردار V_1 و V_3 به صورت زیر نوشت. تمرین ۱.۶.۱ در صفحه ۲۶ را ببینید.

$$V'_2 = \langle V'_2, V_1 \rangle V_1 + \langle V'_2, V_3 \rangle V_3. \quad (25.1)$$

برای محاسبه ضریب V_1 در رابطه فوق از رابطه $\langle V_2, V_1 \rangle = 0$ نسبت به s مشتق می‌گیریم.

$$\langle V'_2, V_1 \rangle + \langle V'_2, V'_1 \rangle = 0.$$

با جایگذاری فرمول اول فرنه یا رابطه ۲۴.۱ در این عبارت داریم $\langle V'_2, V_1 \rangle = -\kappa_1$. از طرف دیگر ضریب جمله دوم در رابطه ۲۵.۱ را تعریف می‌کنیم

$$\kappa_2 = \langle V'_2, V_3 \rangle.$$

با جایگذاری این دو عبارت در رابطه (24.1) داریم

$$V'_2 = -\kappa_1 V_1 + \kappa_2 V_3. \quad (26.1)$$

رابطه (26.1) را فرمول دوم فرنه و κ_2 را انحنای دوم فرنه می‌گوییم. به این روش ادامه داده در یک همسایگی از منحنی C که در آن $\kappa_2 \neq 0$ باشد، فرض می‌کنیم V_4 بردار یکه

ای در \mathbb{R}^n باشد که بر سه بردار $\{V_1, V_2, V_3\}$ عمود باشد. چون V'_3 یکه است، V_3' برابر V_3 عمود است. پس می توان V'_3 را بر حسب ترکیب خطی از دو بردار V_2 و V_4 نوشت.

$$V'_3 = \langle V'_3, V_2 \rangle V_2 + \langle V'_3, V_4 \rangle V_4. \quad (27.1)$$

مشابه روش بالا ضریب عبارت اول را محاسبه نموده ضریب عبارت دوم را تعریف می کنیم

$$\kappa_3 = \langle V'_3, V_4 \rangle.$$

با جایگذاری این دو عبارت در رابطه (۲۴.۱) داریم

$$V'_3 = -\kappa_2 V_2 + \kappa_3 V_4. \quad (28.1)$$

رابطه (۲۸.۱) را فرمول سوم فرنه و κ_3 را انحنای سوم فرنه می گوییم. به این روش ادامه داده فرمول های دیگر فرنه در \mathbb{R}^n را به روش مشابه به دست می آوریم.

$$\left\{ \begin{array}{l} V'_1 = \kappa_1 V_2, \\ V'_2 = -\kappa_1 V_1 + \kappa_2 V_3, \\ V'_3 = -\kappa_2 V_2 + \kappa_3 V_4, \\ \dots \\ V'_i = -\kappa_{i-1} V_{i-1} + \kappa_i V_{i+1}, \\ \dots \\ V'_n = -\kappa_{n-1} V_{n-1}. \end{array} \right.$$

در این فرمول ها قرارداد می کنیم که اگر $\kappa_{i+1} = 0$ آنگاه $V'_{i+1} = 0$ بعلاوه در \mathbb{R}^n $\kappa_i = \kappa_n = 0$. همانطوری که مشاهده می شود انحنای فرنه را می توان توسط رابطه زیر تعریف کرد.

$$\kappa_i := \langle V'_i, V_{i+1} \rangle.$$

این رابطه تعریف اینجا را بر حسب ضرب داخلی در \mathbb{R}^n بیان می کند. همچنین بردارهای یکه دو بدو عمود برهم V_i را می توان توسط $\langle V_i, V_j \rangle = \delta_{ij}$ تعریف نمود. تمرین

۲.۱۳.۱ را بینید. شکل ماتریسی فرمولهای فرنه در \mathbb{R}^n را می‌توان به صورت زیر بیان نمود.

$$(V'_1, V'_2, \dots, V'_n) = \begin{pmatrix} * & \kappa_1 & * & * & \dots & * \\ -\kappa_1 & * & \kappa_2 & * & \dots & * \\ * & -\kappa_2 & * & * & \dots & * \\ * & * & * & * & \ddots & * \\ \vdots & * & * & * & \ddots & * \\ * & \dots & \dots & * & -\kappa_{n-1} & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ V_n \end{pmatrix}.$$

با استفاده از فرمولهای فرنه در \mathbb{R}^n به صورت مشابه با فضای \mathbb{R}^3 می‌توان قضیه اساسی نظریه منحنی‌ها را برای منحنی‌های فضای \mathbb{R}^n نیز ثابت نمود که از حوصله این کتاب خارج است. خواننده علاقه مند می‌تواند به کتاب [۳۰] مراجعه کند.

۲.۱۲.۱ خط راست و دایره در \mathbb{R}^n و خواص اساسی آن‌ها

مقدمه. تعریف خط راست و دایره در هندسه اعم از اقلیدسی یا نااقلیدسی یک مفهوم اساسی در تعریف آن هندسه است. به عنوان مثال در هندسه اقلیدسی اصول موضوعه چندگانه آن بر اساس تعاریف اقلیدس از خط راست و دایره استوار گردیده است. این موضوع ما را بر آن می‌دارد که به تعمیم تعریف خط راست و دایره طوری بپردازیم که قابل استفاده برای بیان این تعاریف در هندسه‌های پیشرفت‌امروزی باشد. برای این کار باید بینیم چگونه دایره بر اساس ضرب داخلی در \mathbb{R}^n تعریف می‌شود. در فصل رویه‌ها خواهیم دید که چگونه ضرب داخلی با استفاده از معادله پارامتری آن تعریف می‌گردد. با این روش می‌توان بسیاری از قضایی هندسه و آنالیز را روی رویه‌ها ثابت نمود. برای توضیح بیشتر می‌توان به مقاله [۳۷] و یا کتاب [۲] مراجعه کرد.

در این بخش ابتدا به بیان و اثبات یک قضیه اساسی در هندسه اقلیدسی می‌پردازیم. این قضیه جالب مسئله کوتاه‌ترین مسیر بودن را برای خط راست در فضای اقلیدسی n -بعدی ثابت می‌کند.

قضیه ۳.۱۲.۱. خطوط راست در فضای اقلیدسی n -بعدی کوتاهترین منحنی هایی هستند که دو نقطه را به هم مرتبط می سازند.

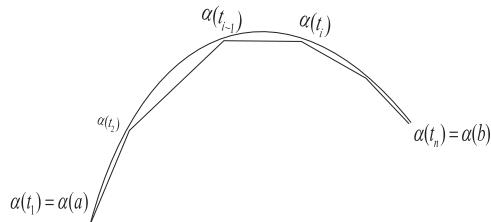
اثبات. فرض کنیم $\alpha(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ یک منحنی پارامتری پاره‌ای منتظم از کلاس C^1 باشد که احتمالاً در تعدادی نقاط روی بازه $I = [a, b]$ منتظم نباشد. یک افزای روی بازه $I = [a, b]$ مانند t_1, \dots, t_k طوری در نظر می‌گیریم که شامل این نقاط منفرد باشد. برای سادگی، از گزاره ۶.۱.۱ در صفحه ۷ در مورد طول قوس یک منحنی در \mathbb{R}^3 استفاده می‌کنیم. اگرچه این گزاره برای فضای 3 -بعدی است ولی اثبات آن در ابعاد بالاتر نیز تعمیم همان اثبات است. قرار می‌دهیم

$$L = \int_a^b |\alpha'(t)| dt = \sum_{i=1}^k \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\alpha'(t)| dt.$$

باید ثابت کنیم که

$$|\alpha(b) - \alpha(a)| \leq L. \quad (29.1)$$

نمودار (۲۳.۱) را ببینید. اگر طول قطعات منتظم از منحنی را که روی هر یک از این



شکل ۱: خط راست کوتاهترین مسیر در فضای اقلیدسی n -بعدی است.

زیر بازه‌ها تعریف می‌شوند را با $|\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})|$ نمایش دهیم، با استفاده از قضیه اساسی نظریه انتگرال‌ها برای توابع برداری یک متغیره در \mathbb{R}^n داریم

$$\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1}) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \alpha'(t) dt.$$

بنابراین با فرض $a = t_1$ و $b = t_k$ با استفاده از نامساوی مثلث می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} |\alpha(b) - \alpha(a)| &= |\alpha(t_k) - \alpha(t_{k-1}) + \alpha(t_{k-1}) - \dots - \alpha(t_1)| \\ &\leq \sum_{i=2}^{i=k} |\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})| \\ &= \sum_{i=2}^{i=k} \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \alpha'(t) dt \right|. \end{aligned}$$

با استفاده از نامساوی کوشی شوارتز یعنی $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$ و قرار دادن $f = |\alpha'(t)|$

$$\sum_{i=2}^{i=k} \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \alpha'(t) dt \right| \leq \sum_{i=2}^{i=k} \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\alpha'(t)| dt = \int_a^b |\alpha'(t)| dt.$$

از آنجا رابطه ۲۹.۱ به دست می‌آید. این موضوع اثبات قضیه را کامل می‌کند. \square

تعریف ۴.۱۲.۱. فرض کنیم C یک منحنی منتظم از کلاس $IR^n, C^k, k \geq 3$ در IR^n باشد. می‌گوییم C یک خط راست یا ژئودزیک^{۵۲} است اگر انحنای اول آن در تمام نقاط صفر باشد.

را یک دایره ژئودزیک^{۵۳} می‌گوییم اگر انحنای آن در تمام نقاط ثابت $\kappa_1 = cte$ و تاب آن $\kappa_2 = 0$ صفر باشد.

دایره ژئودزیک را یک دایره IR^n می‌نامیم اگر انحنای آن یک ثابت ناصرف باشد، یعنی $\kappa_1 = cte \neq 0$.

گزاره ۵.۱۲.۱. فرض کنیم C یک منحنی منتظم از کلاس $IR^n, C^k, k \geq 3$ با نمایش پارامتری طبیعی در IR^n باشد. آنگاه C یک دایره با انحنای $\kappa_1 \neq 0$ است اگر و تنها اگر بردارهای

^{۵۲}geodesic

^{۵۳}geodesic circle

متعادم یکه ای مانند V_1 و V_2 در طول C و یک عدد ثابت $\kappa_1 \neq 0$ موجود باشد به طوری که

$$\frac{d}{ds} V_1 = \kappa_1 V_2, \quad (30.1)$$

$$\frac{d}{ds} V_2 = -\kappa_1 V_1. \quad (31.1)$$

اثبات. فرض کنیم C یک دایره با انحنای $\kappa_1 \neq 0$ با نمایش پارامتری طبیعی در \mathbb{R}^n باشد. بنابر تعریف ۴.۱۲.۱ دایره و فرمول اول فرنه در \mathbb{R}^n رابطه (۳۰.۱) برقرار است. همچنین رابطه (۳۱.۱) فرمول دوم فرنه است که به ازای $\kappa_2 = \kappa_1$ برای دایره حاصل شده است.

بر عکس فرض کنیم که C یک منحنی منتظم از کلاس C^k با $k \geq 3$, C^k با نمایش پارامتری طبیعی در \mathbb{R}^n بوده و برای آن روابط (۳۰.۱) و (۳۱.۱) برقرار باشند. با مقایسه رابطه (۳۱.۱) و فرمول دوم فرنه یا رابطه (۲۶.۱) نتیجه می شود که $\kappa_2 = 0$. لذا بنابر تعریف C یک دایره با انحنای ثابت $\kappa_1 = cte > 0$ است. \square

در گزاره بعد خواهیم دید که چگونه دایره را می توان با استفاده از ضرب داخلی تعریف کرد.

گزاره ۴.۱۲.۱. فرض کنیم C یک منحنی منتظم با انحنای $\kappa_1 \neq 0$ از کلاس C^k و با نمایش پارامتری طبیعی در \mathbb{R}^n باشد. آنگاه C یک دایره به شعاع ثابت $r = \frac{1}{\kappa_1}$ است اگر و تنها اگر در معادله دیفرانسیل زیر صدق کند.^{۵۴}

$$\frac{d^2 V_1}{ds^2} + \left(\frac{dV_1}{ds} \right)^2 = 0. \quad (32.1)$$

^{۵۴} جالب است که بدانیم که تعمیم این گزاره یک مسئله روز در مژهای دانش است که اخیرا برای منحنی روی منیفلدهای ریمانی تعمیم یافته (منیفلدهای فینسلی) توسط نگارنده در یک مقاله مشترک با استادی از دانشگاه پوردو IUPUI در آمریکا به اثبات رسیده است. رجوع شود به مقاله [۲۲].

اثبات. فرض کنیم C یک دایره با انحنای ثابت $\kappa_1 \neq 0$ با نمایش پارامتری طبیعی در \mathbb{R}^n باشد. با مشتقگیری از رابطه (۳۰.۱) و جایگذاری رابطه (۳۱.۱) داریم،

$$\frac{d^2}{ds^2} V_1 = \kappa_1 \frac{dV_1}{ds} = -\kappa_1^2 V_1,$$

از آنجا معادله دیفرانسیل زیر ظاهر می شود.

$$\frac{d^2}{ds^2} V_1 + \kappa_1^2 V_1 = 0. \quad (33.1)$$

با استفاده از فرمول اول فرنه داریم

$$\left\langle \frac{dV_1}{ds}, \frac{dV_1}{ds} \right\rangle = \left\langle \kappa_1 V_2, \kappa_1 V_2 \right\rangle = \kappa_1^2 \left\langle V_2, V_2 \right\rangle = \kappa_1^2, \quad (34.1)$$

که از آن رابطه (۳۲.۱) نتیجه می شود.

بر عکس فرض کنیم که C یک منحنی منتظم از کلاس C^k با $k \geq 3$ با نمایش پارامتری طبیعی در \mathbb{R}^n بوده و برای آن رابطه (۳۲.۱) برقرار باشد. با مشتقگیری از رابطه (۳۴.۱)

$$\frac{d}{ds} \left\langle \frac{dV_1}{ds}, \frac{dV_1}{ds} \right\rangle = 2 \left\langle \frac{d^2V_1}{ds^2}, \frac{dV_1}{ds} \right\rangle.$$

با توجه به یکه بودن بردار مماس V_1 داریم $\left\langle V_1, \frac{dV_1}{ds} \right\rangle = 0$. از آنجا با استفاده از رابطه (۳۲.۱) داریم

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left\langle \frac{dV_1}{ds}, \frac{dV_1}{ds} \right\rangle &= 2 \left\langle \left(-V_1 \left\langle \frac{dV_1}{ds}, \frac{dV_1}{ds} \right\rangle \right), \frac{dV_1}{ds} \right\rangle \\ &= -2 \left\langle \frac{dV_1}{ds}, \frac{dV_1}{ds} \right\rangle = \left\langle V_1, \frac{dV_1}{ds} \right\rangle = 0. \end{aligned}$$

بنابر این $\kappa_1^2 = cte \neq 0$ در طول این منحنی ثابت است. چون $\kappa_1 \neq 0$ با مشتقگیری از رابطه (۳۱.۱) و جایگذاری فرمول دوم فرنه یا رابطه (۲۶.۱) در آن داریم

$$\frac{d^2}{ds^2} V_1 = \kappa_1 \frac{d}{ds} V_2 = \kappa_1 (-\kappa_1 V_1 + \kappa_2 V_2) = -\kappa_1^2 V_1 + \kappa_1 \kappa_2 V_2.$$

از رابطه (۳۲.۱) نتیجه می شود $\kappa_2 = \kappa_1 \kappa_2 = 0$ و چون $\kappa_1 \neq 0$ از آن نتیجه می شود $\kappa_2 = 0$. لذا بنابر تعریف C یک دایره با انحنای ثابت $\kappa_1 = cte \neq 0$ و به شعاع $\frac{1}{\kappa_1}$ است. \square

۱۳.۱ تمرین‌ها

تمرین ۱.۱۳.۱. فرض کنیم C یک منحنی منتظم از کلاس C^k با $k \geq 1$, C^k با نمایش پارامتری طبیعی در \mathbb{R}^n باشد. نشان دهید که اگر انحنای اول آن صفر باشد آنگاه معادله پارامتری C به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\alpha(s) = (a_1 t + b_1, \dots, a_n t + b_n).$$

تمرین ۱.۱۳.۲. فرض کنیم C یک منحنی منتظم از کلاس C^k با $k \geq n$, C^k با نمایش پارامتری طبیعی در \mathbb{R}^n باشد. با استفاده از فرمول‌های فرنه

الف. نشان دهید که انحنای فرنه برای منحنی C در فضای \mathbb{R}^3 را می‌توان به ازای هر i از رابطه $\kappa_i := \langle V'_i, V_{i+1} \rangle$ محاسبه کرد.

ب. نشان دهید بردارهای یکه دو بدو عمود برهم V_i را می‌توان توسط δ_{ij} تعريف نمود.

تمرین ۱.۱۳.۳. الف. انحنای اول، دوم و سوم فرنه را برای منحنی

$$\alpha(s) = (a \cos s, b \sin s, cs, ds),$$

با نمایش پارامتری طبیعی در فضای چهار بعدی \mathbb{R}^4 را محاسبه کنید.

ب. ضرایب a, b, c, d را طوری تعیین کنید که منحنی فوق یک ژئو دزیک شود.

ج. ضرایب a, b, c, d را طوری تعیین کنید که منحنی فوق یک دایره ژئو دزیکی شود.

۱۴.۱ راهنمای حل تمرین‌های فصل ۱

حل تمرین ۱.۲.۱ در صفحه ۱۱

با استفاده از فرمول طول قوس (۱.۱) در صفحه ۷ داریم

$$s = \int_{\cdot}^t \sqrt{a^2 + b^2} dt = \sqrt{a^2 + b^2} t, \quad t = \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

از آنجا با جایگذاری در فرمول اصلی داریم

$$\alpha(s) = \left(a \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, a \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{bs}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right).$$

حل تمرین ۲.۲.۱ در صفحه ۱۱

با استفاده از فرمول (۱.۱) داریم

$$\begin{aligned} s &= \int_{\cdot}^t |(e^t \cos t - e^t \sin t)e_1 + (e^t \sin t + e^t \cos t)e_2 + e^t e_3| dt \\ &= \int_{\cdot}^t (e^{2t}(-2 \cos t \sin t + 1) + e^{2t}(2 \cos t \sin t + 1) + e^{2t})^{\frac{1}{2}} dt, \end{aligned}$$

از آنجا مقدار پارامتر t را به دست آورده در معادله جایگزین می‌کنیم.

$$-\sqrt{3} < s < +\infty \quad \text{که در آن } t = \log\left(\frac{s}{\sqrt{3}} + 1\right), \quad s = \sqrt{3}(e^t - 1),$$

$$\alpha(s) = \left(\frac{s}{\sqrt{3}} + 1 \right) \left(\cos \log\left(\frac{s}{\sqrt{3}} + 1\right) e_1 + \sin \log\left(\frac{s}{\sqrt{3}} + 1\right) e_2 + e_3 \right).$$

۲

رویه‌ها

۱.۲ مقدمه و یادآوری نکاتی در مورد مختصات و نمایش پارامتری رویه

در دروس ریاضی عمومی با مفهومی به نام رویه^۱ آشنا شده‌ایم. در آنجا رویه را به عنوان مجموعه‌ای از نقاط فضای^۲- بعده \mathbb{R}^3 تعریف می‌کنیم که در تابع حقیقی سه متغیره

^۱surface

$F(x, y, z) = 0$ صدق کنند. این تعریف از رویه اگر چه ساده به نظر می‌رسد، ولی برای تعاریف مهم مانند مشتق پذیری توابع روی رویه‌ها و بردار مماس روی رویه‌ها کافی نیست. در اینجا این مفهوم را به طور وسیعتری مورد مطالعه قرار می‌دهیم، به عنوان مثال رویه را طوری تعریف می‌کنیم که بتوان تابع مشتق‌پذیر حقیقی روی آن را تعریف کرد. این نگاه اساس کاربرد هندسه یا به طور کلی کاربرد ریاضی در علوم مختلف است. این روش پایه‌ای برای مطالعه آنالیز روی فضاهای پیچده هندسی است.

اگرچه روش تعریف رویه در این بخش کمی پیچیده به نظر می‌رسد ولی خواننده را برای درک بهتر مفاهیم اولیه فضاهای پیچیده تر مانند منیفلدها آماده می‌سازد.

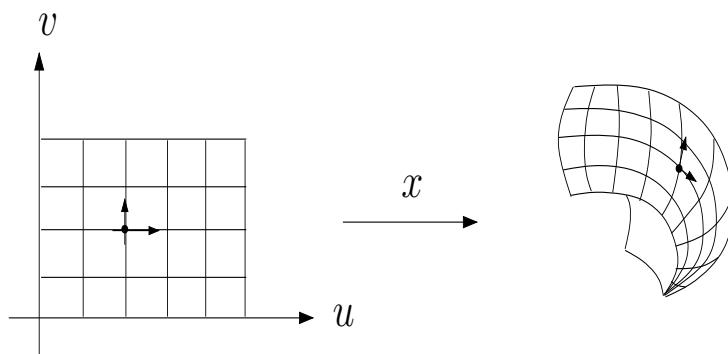
۱.۱.۲ چگونه مختصات روی یک مجموعه تعریف می‌شود

ابتدا باید ببینیم منظور از مختصات برای یک زیرمجموعه \mathbb{R}^3 چیست؟ فرض کنیم می‌خواهیم به هر نقطه از یک سطح با یک مختصات در فضای \mathbb{R}^3 - بعدی \mathbb{R}^3 وابسته نماییم. برای این کار یک ورقه لاستیکی مستطیل شکل را به عنوان زیرمجموعه‌ای از صفحه \mathbb{R}^3 در نظر گرفته سعی می‌کنیم سطح مورد نظر را با آن بپوشانیم بدون آنکه ورقه لاستیکی را قیچی کنیم یا دو سر آن را به هم بچسبانیم. برای برخی از سطوح خمیده مانند سهمیگون و استوانه این کار به آسانی انجام می‌شود. به عنوان مثال برای پوشاندن استوانه دو ورقه لاستیکی کافی است. این عمل را نسبت دادن مختصات به استوانه می‌گوییم. این موضوع به ما می‌آموزد که چگونه می‌توانیم مفاهیمی مانند مختصات و بعد، برای یک سطح خمیده و یا به طور کلی برای یک مجموعه تعریف کنیم.

پس از تعریف مختصات برای یک مجموعه دلخواه، تعریف مفاهیمی مانند بعد، تابع دیفرانسیل پذیر، مشتقهای جزئی، بردار مماس، فضای مماس و دیگر مفاهیم اساسی ریاضی امکان‌پذیر می‌گردد.

برای نسبت دادن مختصات به هر نقطه از یک سطح خمیده دیدیم که باید آن سطح

خمیده را توسط تعدادی ورقه لاستیکی مستطیل شکل بپوشانیم. این عمل را می‌توان توسط یک یا چند نگاشت انجام دادکه به آن نقشه یا کارت مختصات موضعی می‌گوییم.



شکل ۱.۲: کارتهای مختصاتی به نقاط یک مجموعه مختصات وابسته می‌کنند.

این نگاشتها را می‌توان به صفات لاستیکی که قابلیت کش آمدن داشته و غیر قابل پاره کردن یا چسباندن باشند، تشبيه نمود. شکل ۱.۲ را ببینید. ممکن است یک نگاشت برای پوشاندن کل یک سطح کافی نباشد، در این صورت باید از نگاشتهای دیگری که با آن مرتبط اند استفاده نمود. به عنوان مثال کل کره را نمی‌توان با یک صفحه لاستیکی یا یک کارت مختصاتی پوشاند و لاقل دو صفحه لاستیکی برای پوشاندن آن لازم است. حال ببینیم برای تعریف مختصات در روی یک سطح می‌توانیم از چه نگاشتهایی استفاده کنیم. این نگاشت‌ها باید دارای چند خاصیت باشند.

- اول اینکه این نگاشت باید پیوسته و یک به یک باشد تا معکوس آن نیز قابل تعریف بوده و بتوان به طور پیوسته یک ارتباط مستقیم بین نواحی باز \mathbb{R}^2 و نواحی سطح مورد نظر تعریف نمود. این خاصیت ممکن است به طور سرتاسری برای سطوحی که یک به یک نیستند مشکل ایجاد کند. به عبارت دیگر به طور «سرتاسری»^۲ سطوحی

^۲In the large(globally)

که خود را قطع می‌کنند، شامل این تعریف نمی‌شوند. اما در نگاه «موقعی»^۳ یعنی در همسایگی‌های به اندازه کافی کوچک می‌توان مشکل یک به یک بودن را حل کرد.

• خاصیت خوب دوم این است که مشتقات جزیی این نگاشت موجود بوده هم‌راستا نباشد. در این صورت ضرب خارجی آنها یا دترمینان ماتریس ژاکوبین مخالف صفر است. اگر این تابع را با x و مشتقات جزئی آن را با x_u و x_v نمایش دهیم، آنگاه این شرط معادل آن است که $x_u \times x_v \neq 0$ در این صورت خواهیم دید که این نگاشت بعد حوزه تعریف را حفظ کرده بعلاوه اگر نمایش پارامتری رویه را تغییر دهیم در تعداد نقاط تکین رویه تغییری پیدا نمی‌شود. گزاره ۱۱.۲ در صفحه ۶۵ رابینید. همچنین با استفاده از این شرط می‌توان از قضیه تابع معکوس نیز استفاده نمود. گزاره ۱۳.۲.۲ در صفحه ۷۵ رابینید.

• خاصیت خوب سوم این است که بتوان نگاشت دیفرانسیل پذیر C^k روی این سطح تعریف کرد. در این صورت این سطح را منیفلد دو بعدی دیفرانسیل پذیر C^k می‌گوییم.

با کمی تغییر در روش تعیین مختصات برای یک سطح خمیده می‌توان روش تعیین مختصات برای یک مجموعه دلخواه را نیز به دست آورد. این کار را در بخش تعریف منیفلدها انجام خواهیم داد.

با فرض معلوم بودن نمایش پارامتری $(u^1, u^2) = x(u^1, u^2)$ ، مقادیر پارامترهای u^1 و u^2 موضع یک نقطه روی رویه را معین می‌کند. این پارامترها را **مختصات گاوی** یا **مختصات منحنی الخط**^۴ نیز می‌نامند. اگر u^1 ثابت باشد و u^2 تغییر کند، نقاط نظیر روی سطح، بر یک منحنی به معادله $u^1 = cte = u$ قرار می‌گیرند. در شکل ۱.۲ اگر یکی از پارامترها مثلاً $u = u$ ثابت فرض شود، نگاشت $x(u, v) = x(u, v)$ یک منحنی در رویه است.

^۳In the small(locally)

^۴Gaussian or Curvilinear coordinates

یک رویه را می‌توان با نمایش‌های مختلف به صورت پارامتری نوشت. اگر مختصات منحنی‌الخط (u^1, u^2) را با مختصات جدید (u'^1, u'^2) ، که توسط رابطه زیر به هم مربوطند، عوض کنیم

$$\begin{aligned} u^1 &= u^1(u'^1, u'^2) \\ u^2 &= u^2(u'^1, u'^2). \end{aligned} \quad (1.2)$$

رویه $x = x(u^1, u^2)$ دارای شکل پارامتری جدیدی به صورت زیر خواهد بود.

$$x = x_*(u^1, u^2) = x(u^1(u'^1, u'^2), u^2(u'^1, u'^2))$$

ماتریس ژاکوبین تغییر مختصات (1.2) را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\frac{\partial(u^1, u^2)}{\partial(u'^1, u'^2)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial u'^1} & \frac{\partial u^1}{\partial u'^2} \\ \frac{\partial u^2}{\partial u'^1} & \frac{\partial u^2}{\partial u'^2} \end{pmatrix}.$$

دترمینان ماتریس ژاکوبین را ژاکوبین تغییر مختصات می‌گویند.

گزاره ۱.۱.۲. اگر ژاکوبین تغییر مختصات (1.2) در حوزه تعریف مخالف صفر باشد، برای نمایش پارامتری جدید در این حوزه تعریف نقاط تکین جدیدی ظاهر نمی‌شود.

اثبات. با توجه به شرط مشتق‌پذیری کارت‌ها و قاعده زنجیره‌ای داریم:

$$\begin{aligned} x'_u &:= \frac{\partial x}{\partial u'^1} = \frac{\partial x}{\partial u^1} \frac{\partial u^1}{\partial u'^1} + \frac{\partial x}{\partial u^2} \frac{\partial u^2}{\partial u'^1} = \frac{\partial u^1}{\partial u'^1} x_u + \frac{\partial u^2}{\partial u'^1} x_v, \\ x'_v &:= \frac{\partial x}{\partial u'^2} = \frac{\partial x}{\partial u^1} \frac{\partial u^1}{\partial u'^2} + \frac{\partial x}{\partial u^2} \frac{\partial u^2}{\partial u'^2} = \frac{\partial u^1}{\partial u'^2} x_u + \frac{\partial u^2}{\partial u'^2} x_v. \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} x'_u \times x'_v &= \left(\frac{\partial u^1}{\partial u'^1} x_u + \frac{\partial u^2}{\partial u'^1} x_v \right) \times \left(\frac{\partial u^1}{\partial u'^2} x_u + \frac{\partial u^2}{\partial u'^2} x_v \right), \\ &= \frac{\partial u^1}{\partial u'^1} \frac{\partial u^2}{\partial u'^2} x_u \times x_v + \frac{\partial u^1}{\partial u'^2} \frac{\partial u^2}{\partial u'^1} x_v \times x_u, \\ &= \begin{vmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial u'^1} & \frac{\partial u^2}{\partial u'^1} \\ \frac{\partial u^1}{\partial u'^2} & \frac{\partial u^2}{\partial u'^2} \end{vmatrix} x_u \times x_v = \frac{\partial(u^1, u^2)}{\partial(u'^1, u'^2)} x_u \times x_v. \end{aligned}$$

که در آن $J = \frac{\partial(u^1, u^2)}{\partial(u'^1, u'^2)}$ ژاکوبین تغییر مختصات نام دارد. چون طبق فرض در حوزه تعریف ژاکوبین تغییر مختصات مخالف صفر است ($0 \neq J$)، یک نقطه در پارامتری سازی جدید می‌تواند تکین باشد، اگر و فقط اگر در پارامتری سازی قدیم تکین باشد.

$$x'_u \times x'_v = 0 \iff x_u \times x_v = 0.$$

□

بنابراین نقاط تکین جدیدی نمی‌تواند ظاهر شود.

این گزاره دلیل دیگری است که در هندسه دیفرانسیل رویه‌ها را با استفاده از کارت‌هایی طوری تعریف می‌کنند که در شرط $x_u \times x_v \neq 0$ صدق کنند. کاربرد دیگر این شرط خاصیت حفظ خاصیت ۲-بعدی بودن رویه‌ها است که نتیجه گزاره ۱۳.۲.۲ در صفحه ۷۵ است. نگاشت $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ را از کلاس C^k گوییم اگر مشتقات جزئی مرتبه k ام آن موجود و پیوسته باشند.

تعریف ۲.۱۰.۲. یکتابع دوسویی پیوسته که عکس آن نیز پیوسته باشد را یک همنومنوفیسم^۵ می‌نامیم. اگر یک همنومنوفیسم بین دو زیرمجموعه \mathbb{R}^n برقرار باشد آن دو زیرمجموعه را همنومنوف^۶ می‌نامیم.

^۵homeomorphism

^۶homeomorph

اگر تابعی در یک همسایگی از هر نقطه همئومورفیسم باشد آن را همئومورفیسم موضعی^۷ می‌گوییم.

تعریف ۳.۱.۲. یک همئومورفیسم از کلاس C^k که عکس آن نیز C^k باشد را یک دیفئومورفیسم C^k می‌نامیم. اگر یک دیفئومورفیسم بین دو زیرمجموعه \mathbb{R}^n برقرار باشد آن دو زیرمجموعه را دیفئومorf^۸ می‌نامیم.

قضیه تابع معکوس یکی از قضایایی است که به طور مکرر از آن استفاده می‌کنیم. یک بیان از این قضیه در زیر آورده شده است.

قضیه ۴.۱.۲. قضیه تابع معکوس: فرض کنیم $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ در همسایگی نقطه p از کلاس C^1 بوده و دترمینان ماتریس زاکوبین آن مخالف صفر باشد. در این صورت یک همسایگی باز U از p موجود است به طوری که f روی U دیفئومورفیسم باشد.

۲.۲ رویه‌های معمولی، منتظم و دیفرانسیل پذیر

مقدمه. در این بخش سه نوع رویه به شرح زیر تعریف می‌کنیم. در حقیقت رویه‌های معمولی را که ساده ترین نوع رویه‌ها هستند، تعریف نموده و سپس با توجه به نیازهایی که برای تعاریف مختلف آنالیز در رویه‌ها داریم به آن تعریف شرایطی را اضافه نموده و رویه‌های جدیدی معرفی می‌نماییم. منظور از رویه معمولی همان تعریفی است که در ریاضی عمومی به عنوان تصویر یک تابع برداری پیوسته و یک به یک^۹-متغیره، به آن اشاره می‌گردد، مانند مخروط و رویه‌های دیگری که الزاماً مشتقات جزیی این تابع برداری در تمام نقاط آن موجود نباشند. سپس شرط منظم بودن را به آن اضافه نموده آن را رویه منتظم

^۷ locally homeomorphism

^۸diffeomorphism

^۹diffeomorph

می‌نامیم. با اضافه کردن این شرط وجود مشتقات جزیی تابع و همچنین ۲-بعدی بودن آن در تمام نقاط تضمین می‌گردد. در پایان با اضافه نمودن ساختار دیفرانسیل پذیری به رویه منتظم آن را رویه دیفرانسیل پذیر می‌نامیم.

فرض کنیم D یک ناحیه باز از صفحه \mathbb{R}^3 باشد. ناحیه باز D در اینجا معمولاً یک مستطیل باز، یک قرص باز یا نواحی مشابه از صفحه \mathbb{R}^3 است که شامل نقاط مرزی خود نباشند. نگاشت پیوسته و یک به یک

$$\begin{aligned} x : D &\longrightarrow U = x(D) \subset \mathbb{R}^3, \\ (u, v) &\mapsto (x^1(u, v), x^2(u, v), x^3(u, v)). \end{aligned}$$

را در نظر گرفته مشتقات جزیی آن نسبت به u و v را به ترتیب با سه تابی‌های به صورت $x_v = (\frac{\partial x^1}{\partial v}, \frac{\partial x^2}{\partial v}, \frac{\partial x^3}{\partial v})$ و $x_u = (\frac{\partial x^1}{\partial u}, \frac{\partial x^2}{\partial u}, \frac{\partial x^3}{\partial u})$ نمایش می‌دهیم. می‌گوییم نگاشت x منظم^{۱۰} از کلاس C^k است، اگر در تمام نقاط ناحیه D مشتقات جزئی از کلاس C^k بوده و ضرب خارجی مشتقات جزیی مخالف صفر باشد.^{۱۱}

$$x_u \times x_v = \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial x^1}{\partial u} & \frac{\partial x^2}{\partial u} & \frac{\partial x^3}{\partial u} \\ \frac{\partial x^1}{\partial v} & \frac{\partial x^2}{\partial v} & \frac{\partial x^3}{\partial v} \end{pmatrix} \neq 0. \quad (۲.۲)$$

^{۱۰} regular

^{۱۱} این شرط معادل آن است که دو بردار x_u و x_v مستقل خطی بوده و در یک راستا نباشند. خواهیم دید که در این صورت نگاشت x یک همتومورفیسم موضعی بین رویه و \mathbb{R}^3 برقرار نموده مفهوم بعد برای رویه معنی پیدا می‌کند. پیوستگی مشتقات جزیی هنگام استفاده از قضیه تابع معکوس کاربرد دارد. گزاره ۱۲.۲.۲ را ببینید.

۱.۲.۲ رویه‌های معمولی و منظم

تعریف ۱.۲.۲. یک نقشه مختصاتی^{۱۲} یا کارت مختصاتی معمولی^{۱۳}، نگاشتی پیوسته و یک به یک است که از ناحیه باز^{۱۴} $D \subseteq \mathbb{R}^3$ به \mathbb{R}^3 تعریف می‌شود. بعلاوه اگر این کارت منظم و از کلاس C^k باشد، به آن کارت منظم از کلاس C^k گفته می‌شود. یک کارت مختصاتی را با دوتایی (U, x) نیز نمایش می‌دهند که در آن $U = x(D)$.

در کتب هندسه دیفرانسیل گاهی از واژه قدیمی پارامتری‌سازی^{۱۵} به جای کلمه کارت یا نقشه استفاده می‌شود. شکل ۱.۲ را ببینید.

تعریف ۲.۰.۲. زیرمجموعه M از \mathbb{R}^3 را یک رویه معمولی^{۱۶} در \mathbb{R}^3 گوییم، اگر کلیه نقاط آن توسط کارت‌های مختصاتی معمولی پوشیده شده باشد.

تعریف ۳.۰.۲. زیرمجموعه M از \mathbb{R}^3 را یک^{۱۷} رویه منظم ۲- بعدی در \mathbb{R}^3 از کلاس C^k گوییم، اگر کلیه نقاط آن به ترتیب توسط کارت‌های مختصاتی ۲- بعدی منظم از کلاس C^k پوشیده شده باشد.^{۱۸}

گاهی اوقات برای سادگی، اگر احتمال اشتباه نرود، از لفظ منظم در کنار رویه صرف نظر می‌نمایند.

مثال ۴.۰.۲. سهمی‌گون $z = x^2 + y^2$ یک رویه معمولی است چون تصویر نگاشت پیوسته و یک به یک $(u, v) \rightarrow (u, v, u^2 + v^2)$ است. سهمی‌گون رویه منظم نیز هست

^{۱۲} coordinate chart

^{۱۳} patch or ordinary chart

^{۱۴} parametrization

^{۱۵} ordinary surface

^{۱۶} regular surface

^{۱۷} توجه نمایید که لفظ ۲- بعدی را برای رویه‌های منظم می‌توان به کار برد، زیرا خواهیم دید که منظم بودن در تمام نقاط تضمین کننده مستقل خطی بودن ماتریس ۲.۰.۲ و در نتیجه حفظ بعد است.

چون با کارت منظم زیر پوشانده می‌شود.

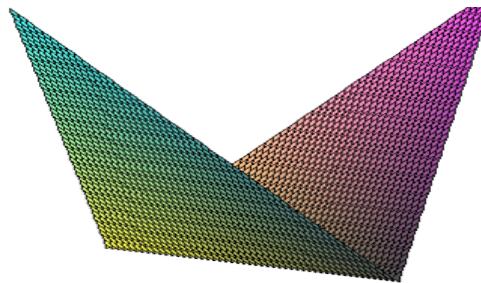
$$x : (u, v) \longrightarrow (u, v, u^2 + v^2)$$

$$x_u \times x_v = \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 2u \\ 0 & 1 & 2v \end{pmatrix} = (-2u, -2v, 1) \neq (0, 0, 0).$$

مثال ۵.۲.۲. مخروط $z = \sqrt{u^2 + v^2}$ یک رویه معمولی است چون تصویر نگاشت پیوسته و یک به یک $(u, v) \longrightarrow (u, v, \sqrt{u^2 + v^2})$ است. ولی مخروط یک رویه منظم نیست، زیرا x_u و x_v در مبدا تعریف نمی‌شوند.

$$x_u = (1, 0, \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}), \quad x_v = (0, 1, \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}).$$

مثال ۶.۲.۲. دو صفحه متقاطع $z = |x - y|$ یک رویه معمولی است چون تصویر نگاشت پیوسته و یک به یک $(u, v) \longrightarrow (u, v, |u - v|)$ است. ولی یک رویه منظم نیست، زیرا x_u و x_v در روی صفحه $y \circ x$ تعریف نمی‌شوند. شکل ۲.۲ را بینید. از



شکل ۲.۲: دو صفحه متقاطع در محل تقاطع مشتقات جزئی ندارد.

دستور زیر برای اجرای برنامه دو صفحه متقاطع استفاده شده است.

```
> plot3d([u, v, abs(u - v)], u = -1 .. 1, v = -1 .. 1, grid = [50, 50]);
```

نقاط تکین و نمایش پارامتری

در اینجا بانقطات جدیدی به شرح زیر آشنا می‌شویم.

تعریف ۷.۲.۲. نقطه تکین پارامتری^{۱۸} نقطه‌ای است که در آن $x_u \times x_v$ تعریف نشده یا صفر باشد. نقاط دیگر رویه را نقاط منظم می‌نامیم.

مثال ۸.۲.۲. فرض کنیم رویه ما صفحه $z = 0$ باشد، در این صورت هر نقطه روی آن را می‌توان در دستگاه اقلیدسی با پارامترهای $x = u, y = v, z = 0$ مشخص نمود. لذا اگر کارت مختصاتی آن را با $(u, v) \mapsto x(u, v) = (u, v, 0)$ نمایش دهیم داریم

$$\frac{\partial x}{\partial u} \times \frac{\partial x}{\partial v} = \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = k \neq 0.$$

از اینجا نتیجه می‌شود که روی صفحه در این مختصات نقطه تکین نداریم و در نمایش پارامتری اقلیدسی مبدأ یک نقطه منظم است. اما اگر دستگاه مختصات قطبی را در نظر بگیریم داریم $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, z = 0$

$$x_r \times x_\theta = \begin{pmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & j & k \\ \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \end{pmatrix} = rk.$$

که در مبدأ $r = \theta = 0$ ، بنابراین در نمایش پارامتری قطبی، مبدأ یک نقطه تکین پارامتری است. لذا در نمایش پارامتری اقلیدسی صفحه یک رویه منظم است در حالی که در نمایش پارامتری قطبی، صفحه یک رویه منظم نیست.

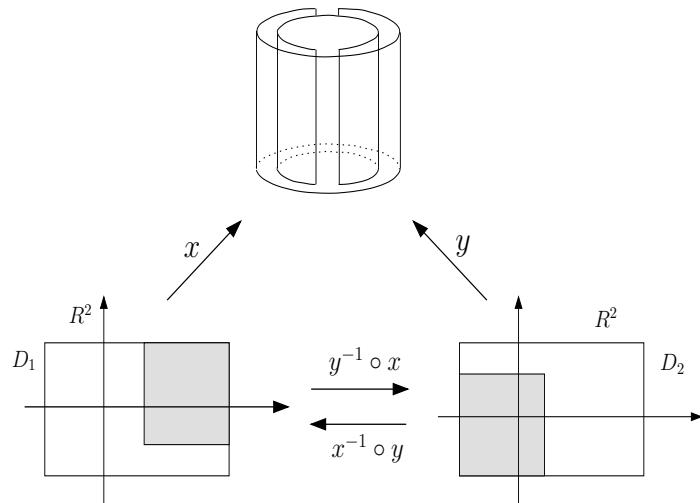
^{۱۸}parametric singular point

از مثال بالا این طور استنباط می‌گردد که وجود نقطهٔ تکین یا منظم یک سطح بستگی به دستگاه مختصات (نمایش پارامتری) آن سطح دارد و این موضوع، یعنی تعریف یک دستگاه مختصات، نقش اساسی در معرفی سطح دارد. گزاره ۱.۱.۲ به نوعی مشکل ظاهر شدن نقاط تکین جدید پس از یک تغییر مختصات را حل می‌کند.

۲.۲.۲ رویه دیفرانسیل پذیر

نظر به اینکه بیشترین کاربرد رویه‌ها در تعریف توابع دیفرانسیل پذیر روی آن‌ها است، باید شرایطی به مفهوم رویه منظم اضافه نماییم تا بتوان تابع دیفرانسیل پذیر روی رویه را تعریف کرد. در این صورت می‌گوییم رویه دارای خاصیتی است که تعریف تابع دیفرانسیل روی آن امکان پذیر است و به اختصار آن را رویه دیفرانسیل پذیر خواهیم نامید.

ممکن است کلیه نقاط مجموعهٔ M در یک کارت مختصاتی قرار نگیرد، در این صورت از چند کارت مختصاتی برای پوشاندن همه نقاط M استفاده می‌کنیم. شکل ۳.۲ را ببینید. اگر نقطه $p \in U \cap V \subset M$ در داخل دو همسایگی $U = x(D_1) = V$ و $y(D_2)$ در



شکل ۳.۲: نگاشت تغییر کارت روی استوانه.

دو کارت مختصاتی (x, U) و (y, V) با فرض $U \cap V \neq \emptyset$ قرار داشته باشد، دو کارت مختصاتی

$$x : D_1 \longrightarrow U \subseteq M, \quad y : D_2 \longrightarrow V \subseteq M,$$

را در نظر می‌گیریم. نگاشت $x^{-1} \circ y$ یا معکوس آن y^{-1} را در نظر می‌گیریم.

$$y^{-1} \circ x : D_1 \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow D_2 \subseteq \mathbb{R}^2$$

را نگاشت تغییر کارت یا تغییر مختصات می‌نامیم. دو کارت (x, U) و (y, V) را مرتبط از کلاس C^k ^{۱۹} گوییم، اگر با فرض $\phi \neq \text{id}_{D_1 \cap D_2}$ دو نگاشت $x \circ y^{-1}$ و $y \circ x^{-1}$ معکوس آن $y^{-1} \circ x$ در توابعی از کلاس C^k بین دو باز از صفحه \mathbb{R}^2 باشند.

تعریف ۹.۲.۲. خانواده‌ای از کارت‌های ۲-بعدی مرتبط C^k روی رویه M را یک اطلس ۲-بعدی یا ساختار دیفرانسیل پذیری می‌نامیم اگر کل M را پوشانند.

تعریف ۱۰.۲.۲. زیر مجموعه M از \mathbb{R}^3 همراه با یک اطلس C^k -بعدی را یک رویه دیفرانسیل پذیر ۲-بعدی از کلاس C^k می‌نامیم.

در ادامه خواهیم دید که این تعریف به ما اجازه می‌دهد تا تابع دیفرانسیل پذیر روی رویه M تعریف شود. همچنین از این تعریف معلوم می‌شود که همه رویه‌هایی که فقط با یک کارت سرتاسری پوشیده می‌شوند یک رویه دیفرانسیل پذیر از کلاس C^∞ هستند چون نگاشت تغییر کارت آن همانی بوده و از کلاس C^∞ است.

مثال ۱۱.۲.۲. دیدیم سهمی‌گون $z = x^2 + y^2$ یک رویه منظم است. سهمی‌گون رویه دیفرانسیل پذیر از کلاس C^∞ نیز هست چون این کارت کل سهمی‌گون را می‌پوشاند، بنابراین نیاز به تعریف کارت دیگری نیست. در حقیقت می‌توان کارت مشابه دیگری مانند y تعریف

^{۱۹} C^k -equivalent

^{۲۰} atlas

نمود، که سهمی‌گون را پپوشاند و نگاشت تغییر کارت $x^{-1} \circ y$ نگاشت همانی باشد، که بینهایت بار مشتق‌پذیر است.

مثال ۱۲.۰.۲. استوانه کامل مستدیر قائم به ساعت ۱ و ارتفاع باز ۱ را در نظر می‌گیریم. می‌دانیم که این استوانه را می‌توان توسط دوتابع پیوسته و یک به یک x و y با حوزه‌های تعريف $[0, 1] \times [0, 2\pi]$ و $D_1 = [0, 1] \times [0, \pi]$ و $D_2 = [0, 1] \times [\pi, 2\pi]$ که دو مستطیل باز هستند، به شرح زیر پوشانید. شکل ۳.۲ را ببینید.

$$\begin{aligned} x &: D_1 \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow U \subseteq \mathbb{R}^3, \\ &(u, v) \mapsto (\cos u, \sin u, v), \\ y &: D_2 \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow V \subseteq \mathbb{R}^3, \\ &(s, t) \mapsto (\cos s, \sin s, t). \end{aligned}$$

به راحتی بررسی می‌شود که x و y یک به یک هستند. لذا استوانه یک رویه معمولی است. از طرف دیگر مشابه مثال قبل به راحتی مشاهده می‌شود که $x_u \times x_v \neq 0$. در نتیجه استوانه یک رویه منتظم نیز هست. برای آنکه استوانه رویه دیفرانسیل پذیر باشد باید نشان دهیم که نگاشت تغییر کارت $x^{-1} \circ y^{-1} = \phi$ دیفرانسیل پذیر است.

$$\begin{aligned} y^{-1} \circ x &: D_1 \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow D_2 \subseteq \mathbb{R}^2 \\ &(u, v) \mapsto (u - \pi, v) \end{aligned}$$

این نگاشت که از \mathbb{R}^2 در \mathbb{R}^2 تعريف می‌شود دیفرانسیل‌پذیر بوده و مشتق آن توسط ماتریس ژاکوبین که ماتریس 2×2 است به صورت زیر تعريف می‌شود.

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial u} & \frac{\partial \phi}{\partial v} \\ \frac{\partial \phi}{\partial u} & \frac{\partial \phi}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

چون $\det J \neq 0$ ، تابع معکوس $\phi^{-1} = x^{-1} \circ y$ نیز بنا بر قضیه تابع معکوس دیفرانسیل‌پذیر است، لذا استوانه یک رویه دیفرانسیل‌پذیر از کلاس C^k است.

در مثال ۴.۲.۲ در صفحه ۶۹ سهمیگون با صفحه همئومورف است. در مثال ۱۲.۲.۲

در صفحه ۷۴ استوانه با صفحه همئومورف نیست اما استوانه با صفحه به طور موضعی همئومورف است.

در گزاره بعد ثابت می‌کنیم که رویه منتظم M موضعاً همئومورف با صفحه است، یعنی هر نقطه $p \in M$ در یک همسایگی U قرار دارد که با بازی از صفحه ۲-بعدی همئومورف است.

گزاره ۱۳.۲.۲. فرض کنیم M یک رویه منتظم باشد. نگاشت x از کارت (x, U) یک همئومورفیسم موضعی است.

اثبات. فرض کنیم M یک رویه منتظم باشد. x پیوسته و یک به یک است باید نشان دهیم که x^{-1} پیوسته است. از شرط $x_u \times x_v \neq 0$ نتیجه می‌شود که

$$x_u \times x_v = \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial x^1}{\partial u} & \frac{\partial x^2}{\partial u} & \frac{\partial x^3}{\partial u} \\ \frac{\partial x^1}{\partial v} & \frac{\partial x^2}{\partial v} & \frac{\partial x^3}{\partial v} \end{pmatrix} \neq 0.$$

لذا دو سطر دوم و سوم مستقل خطی بوده و رتبه این ماتریس برابر ۲ است. به عبارت دیگر یک زیرماتریس 2×2 با دترمینان غیر صفر در آن وجود دارد. فرض کنیم

$$\frac{\partial(x^1, x^2)}{\partial(u, v)} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial u} & \frac{\partial x^2}{\partial u} \\ \frac{\partial x^1}{\partial v} & \frac{\partial x^2}{\partial v} \end{pmatrix} \neq 0. \quad (3.2)$$

$$\text{در نتیجه } \frac{\partial(u, v)}{\partial(x^1, x^2)} \neq 0.$$

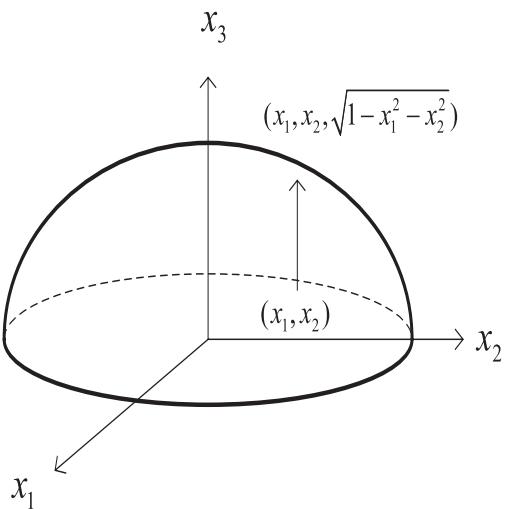
حال رویه M را روی سایه اش در صفحه (x^1, x^2) توسط نگاشت پیوسته تصویر

$$Proj : (x^1, x^2, x^3) \rightarrow (x^1, x^2),$$

تصویر می‌کنیم. عبارت (۳.۲) دترمینان ژاکوبین نگاشتی است مانند $\rightarrow \mathbb{R}^3$

بین تصویر رویه M روی صفحه (x^1, x^2) توسط نگاشت پیوسته تصویر $Proj$ و بخشی

از صفحه (u, v) . چون ژاکوبین این نگاشت مخالف صفر است، بنابر قضیه تابع معکوس برای رویه‌ها، h همئورفیسم موضعی از بازی از صفحه (x^1, x^2) به بازی از صفحه (u, v) است. لذا نگاشت معکوس $x^{-1} = h \circ \text{Proj}$ پیوسته است، چون ترکیب دو تابع پیوسته است. بنابراین x و x^{-1} پیوسته هستند. چون x یک به یک بوده و روی $x(U)$ پوشاست بنابراین یک همئورفیسم موضعی بین U و $x(U)$ است. \square



شکل ۴.۲: یک کارت مختصاتی روی نیمکره بالایی

۳.۲.۲ تمرین‌های بخش

تمرین ۱.۲.۲. نشان دهید که $x : (u, v) \rightarrow (u, v, f(u, v))$ یک کارت ۲-بعدی منظم است اگر تابع f دیفرانسیل پذیر باشد.

تمرین ۲.۲.۲. الف. نشان دهید که تابع پارامتری زیر

$$x : (u, v) \rightarrow (a \sin u \cos v, b \sin u \sin v, c \cos u),$$

که در آن $\pi < u < \tilde{\pi}$ بخشی از یک بیضی‌وار است.

ب. شرایطی ارایه کنید که x یک کارت ۲-بعدی منتظم باشد.

ج. با تغییر دامنه x کارت‌های دیگری ارائه کنید که کل بیضی‌وار را پوشاند.

تمرین ۴.۲.۲. نیم-کره یکه باز S_+^2 بالای صفحه $y \circ x$ را در نظر گرفته نشان دهید:
الف) یک رویه منتظم است.

ب) یک رویه دیفرانسیل پذیر است.

ج) بعد نیمکره چند است.

راهنمایی: کارت‌های نیمکره را به صورت $(x_1, x_2, \sqrt{1 - x_1^2 + x_2^2})$ انتخاب کنید. شکل ۴.۲ را بینید.

تمرین ۴.۲.۲. کره یکه S^2 را در نظر می‌گیریم. تعیین کنید که با چند نیم-کره باز می‌توان آن را پوشانید. سپس نشان دهید که کره S^3 :

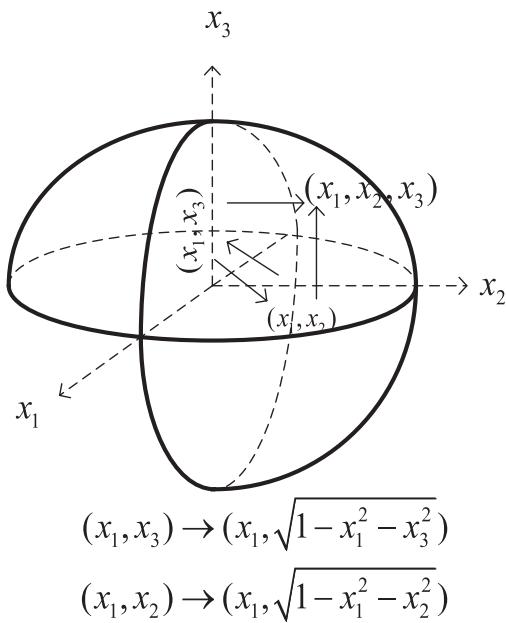
الف) یک رویه منتظم است.

ب) یک رویه دیفرانسیل پذیر است.

ج) آیا بعد کره با بعد نیمکره متفاوت است.

راهنمایی: تعداد کارت‌های لازم برای پوشاندن کره، که دامنه آنها از نیمکره باز تشکیل شده و روی صفحه تصویر قائم می‌شوند، عدد ۶ است. علت این موضوع را بیان کنید. کارت دیگر کره را به صورت $(x_1, x_2, \sqrt{1 - x_1^2 + x_2^2}, x_3) : y$ انتخاب کنید. سپس مرتبط بودن این دو کارت را تحقیق کنید. شکل ۵.۲ را بینید.

تمرین ۵.۲.۲. فرض کنیم M یک رویه منتظم باشد. نشان دهید که کارت (x, U) یک دیفئومorfیسم موضعی روی تصویرش است.



شکل ۵.۲: نگاشت تغییر کارت دو کارت مختصاتی هم ارز روی کره

۳.۲ رویه های جالب

در این بخش با رویه های جالبی که می تواند کاربردهایی در علوم مختلف داشته باشد مانند رویه دوار، استوانه، آشنا شده و روش بدست آوردن معادلات آن را فرا می گیریم.

۱.۳.۲ رویه های دوار

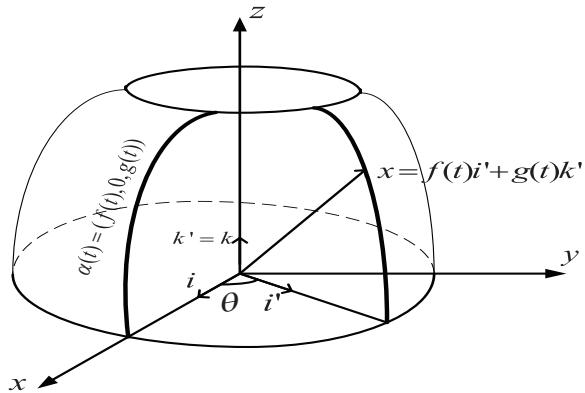
رویه دوار سطحی است که از دوران یک منحنی مسطح C حول یک خط L که در صفحه^{۲۱} منحنی قرار دارد پدید می آید. منحنی C را مقطع عرضی^{۲۲} و خط L را محور^{۲۳} رویه

^{۲۱}surface of revolution

^{۲۲}profile

^{۲۳}axis

دور می‌نامیم. منحنی C را در موقعیت‌های متفاوت منحنی‌های نصف‌النهار^{۲۴} نیز می‌نامند. اگر منحنی C در صفحه $z \circ x$ باشد آنگاه می‌توان معادله پارامتری آن را به صورت $\alpha(t) = (f(t), \cdot, g(t))$ که در آن $a < t < b$ نوشت. در اینجا فرض می‌کنیم که تابع f مثبت و α منحنی منتظم و از کلاس C^k باشد. برای به دست آوردن معادله سطح دور فرض کنیم سه بردار پایه (i, j, k) به اندازه θ طوری در صفحه $y \circ z$ دوران کند که همواره بردار k در راستای محور z باقی بماند $k' = k$. شکل ۶.۲ را ببینید. این سه بردار پایه جدید را با (i', j', k') نمایش می‌دهیم. در این صورت بردار موضع هر



شکل ۶.۲: رویه دوران یک منحنی مسطح حول یک محور در صفحه منحنی پدید می‌آید.

نقطه از سطح دور که در روی صفحه $y \circ x$ قرار دارد را می‌توان به صورت زیر نوشت.
اما می‌دانیم $x(t) = f(t)i' + \cdot j' + g(t)k'$

جایگذاری داریم

$$x(t, \theta) = f(t) \cos \theta i + f(t) \sin \theta j + g(t)k \quad (۶.۲)$$

^{۲۴}meridian

لذا با استفاده از پارامترهایی (u, v) معادله پارامتری سطح دوار حاصل از دوران منحنی C در صفحه $z \circ x$ حول محور z به صورت زیر نوشته می شود.

$$x(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u)). \quad (5.2)$$

سطح دوار یک رویه منتظم است، زیرا مولفه های منحنی منتظم و از کلاس C^k هستند، از آنجا چون $f' > 0$

$$|x_u \times x_v| = -g' f \cos vi - g' f \sin vj + f' fk = f \sqrt{(g')^2 + (f')^2} \neq 0.$$

لذا رویه دوار یک رویه منتظم است.

۲.۳.۲ رویه استوانه‌ای

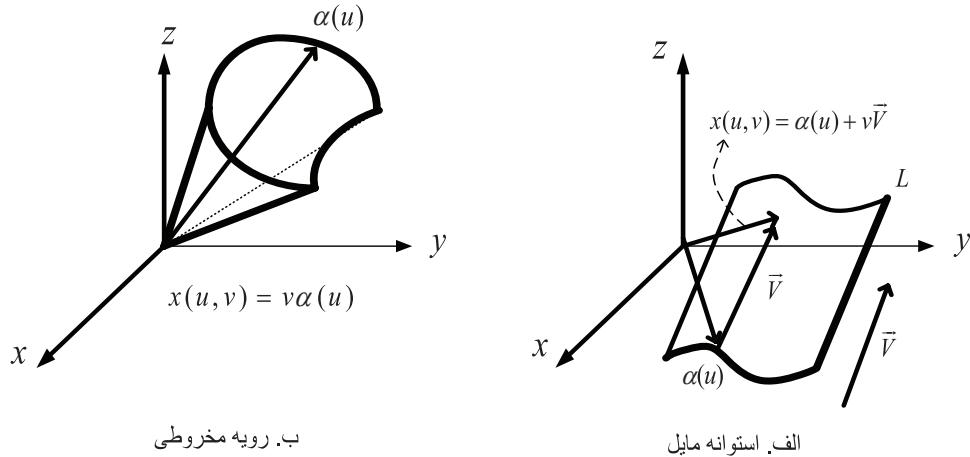
^{۲۵} رویه استوانه‌ای سطحی است که از حرکت یک خط راست L به موازات خودش و در امتداد یک منحنی مسطح C پدید می‌آید. اگر خط L بر صفحه منحنی C عمود باشد استوانه را قائم و اگر منحنی C یک دایره باشد استوانه را مستدير قائم می‌نامیم. اگر معادله منحنی C را با $\alpha(u)$ نمایش دهیم و راستای خط L بردار V باشد، آنگاه می‌توان بردار موضع هر نقطه از استوانه را با جمع بردار منحنی C و مضربی از V به صورت زیر نوشت. شکل ^{۲.۲}(الف) را ببینید.

$$x(u, v) = \alpha(u) + vV.$$

مثال ۱.۳.۲. معادله منحنی دلوار ^{۲۶} در دستگاه قطبی به صورت $\theta = 3 - 3 \sin \theta$ داده شده است. شکل ^{۸.۲}(بالا) را ببینید. معادله پارامتری منحنی دلوار در صفحه به صورت

^{۲۵}cylinder surface

^{۲۶}Cardioid



شکل ۷.۲: به دست آوردن معادله پارامتری استوانه و مخروط

زیر نوشته میشود.

$$\alpha(\theta) = ((3 - 3 \sin \theta) \sin \theta, (3 - 3 \sin \theta) \cos \theta, \cdot).$$

بنابر انچه در بالا گفته شد، معادله پارامتری رویه دلوار موازی محور k یک رویه استوانه‌ای قائم است که معادله آن به صورت زیر نوشته می‌شود.

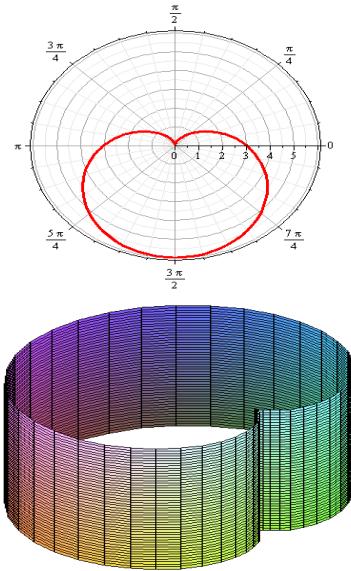
$$x(u, v) = ((3 - 3 \sin u) \cos u, (3 - 3 \sin u) \sin u, v).$$

رسم منحنی دلوار با دستور زیر در برنامه میپل انجام شده است.

```
> polarplot(3 - 3 * sin(theta), theta = 0 .. 2 * Pi, thickness = 3)
```

رسم رویه استوانه دلوار با دستور زیر دراین برنامه اجرا شده است.

```
> plot3d([(3 - 3 * sin(u)) * cos(u), (3 - 3 * sin(u)) * sin(u), v],
           u = 0 .. 2 * Pi, v = 0 .. 2 * Pi);
```



شکل ۸.۲: منحنی و رویه استوانه دلوار.

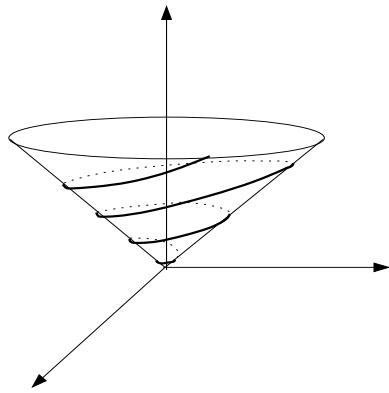
۳.۳.۲ رویه های مخروطی

فرض کنیم که C یک منحنی ساده^{۲۷} و نه الزاماً بسته مسطح در فضا و O یک نقطه خارج از صفحه منحنی C باشد.^{۲۸} رویه مخروطی سطحی است که از خطوط گذرنده از منحنی C و نقطه O پدید می‌آید. اگر معادله منحنی C را با $\alpha(u) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ نمایش دهیم، آنگاه می‌توان بردار موضع هر نقطه از رویه مخروطی را به صورت مضربی از بردار موضع منحنی C یعنی $x(u, v) = v\alpha(u)$ نوشت. از آنجا نمایش پارامتری این رویه به صورت زیر نوشته می‌شود. شکل ۴.۲ (ب) را بینید.

$$x(u, v) = (v\alpha_1(u), v\alpha_2(u), v\alpha_3(u)). \quad (6.2)$$

^{۲۷}منظور آن است که C یک منحنی در صفحه باشد که خودش را قطع نکند.

^{۲۸}conic surface



شکل ۹.۲: یک منحنی مارپیج روی مخروط

مثال ۲.۳.۲. اگر منحنی $\alpha(u) = (a \cos u, a \sin u, b)$ یک دایره به شعاع a در ارتفاع b باشد آنگاه معادله کلیه خطوطی که از مبدأ گذشته و روی دایره قرار دارند نمایش پارامتری مخروط است که معادله پارامتری آن از رابطه ۶.۲ به دست آمده و به صورت زیر نوشته می‌شود.

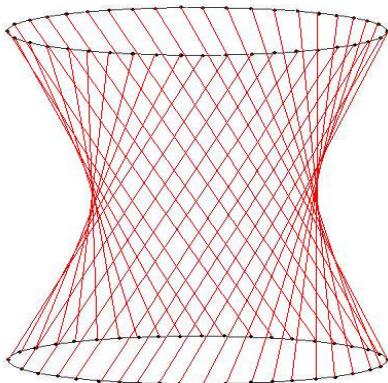
$$x(u, v) = (av \cos u, av \sin u, bv)$$

مخروط مورد نظر مشابه مخروط شکل ۹.۲ است.

مثال ۳.۳.۲. در درس ریاضی عمومی دیدیم که معادله یک مخروط در دستگاه دکارتی به صورت $z = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$ است. در دستگاه مختصات استوانه‌ای این مخروط را با $z = r$ نمایش می‌دادیم. می‌دانیم دو رویه به معادلات $z = ar$ و $z = r$ در دستگاه مختصات استوانه‌ای به ترتیب یک سطح موسوم به سطح پلکانی و یک نیم-مخروط هستند. منحنی حاصل از تقاطع دو رویه فوق یک منحنی مارپیچ مخروطی است. از تقاطع $z = \theta$ و $z = ar$ داریم $r = \frac{\theta}{a}$ لذا $\alpha(\theta) = (\theta \cos \theta, \theta \sin \theta, \theta)$ که یک معادله پارامتری برای مارپیچ روی مخروط است. شکل ۹.۲ را ببینید.

۴.۳.۲ رویه های خط دار

رویه خط دار سطحی است که از حرکت یک خط L در فضای پدید می آید. به عبارت دیگر رویه خط دار سطحی است که توسط یک خانواده یک پارامتری از خطوط راست پدید می آید. شکل ۱۰.۲ رویه ای خط دار به نام رویه خط دار هنلولوی^{۲۹} را نمایش می دهد.



شکل ۱۰.۲ : رویه های خط دار هنلولوی از حرکت یک خط راست پدید می آیند.

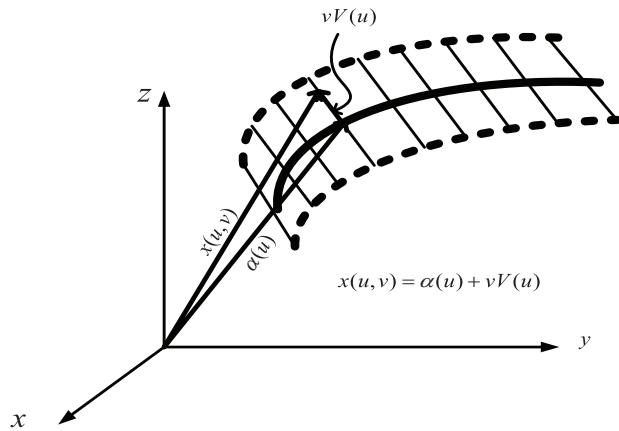
فرض کنیم $\alpha(u)$ یک منحنی از کلاس C^k در فضای $V(u)$ یک بردار غیر صفر از کلاس C^k باشد که در طول منحنی α حرکت می کند. منحنی $\alpha(u)$ را منحنی پایه^{۳۰} و بردار V را بردار هادی^{۳۱} رویه خط دار می نامیم. برای به دست آوردن معادله رویه خط دار می گوییم هر نقطه از این سطح را می توان با بردار موضع x که از جمع دو بردار $\alpha(u)$ و $V(u)$ تشکیل شده است به صورت

$$x(u, v) = \alpha(u) + vV(u).$$

^{۲۹}Ruled-hyperboloid

^{۳۰}base

^{۳۱}ruling of the surface



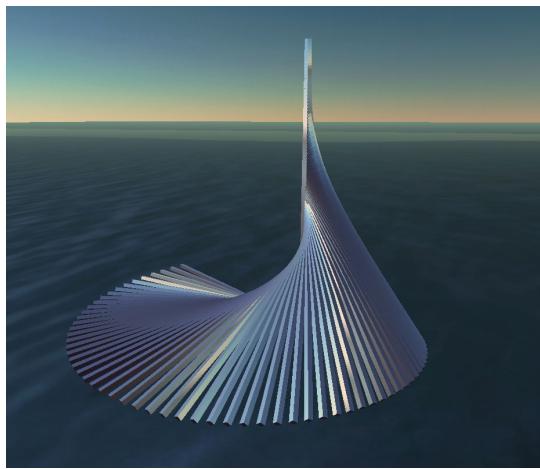
شکل ۱۱.۲: هر نقطه از رویه خط دار را می‌توان به صورت جمع دو بردار نوشت.

نشان داد که در آن v یک پارامتر دلخواه است. شکل ۱۱.۲ را ببینید.

مثال ۴.۳.۲. بسیاری از رویه‌هایی که با آنها سروکار داریم مانند استوانه، رویه‌های خط دار هستند. زنجیرگون و مارپیچ‌گون نیز رویه‌های خط دار هستند. شکل‌های ۲.۳ و ۳.۳ در صفحه‌های ۱۳۷ و ۱۳۷ را ببینید.

رویه‌های خط دار به خاطر آسانی استفاده از میلگرد‌ها یا لوله‌های راست در عمل کاربرد زیادی در معماری دارند. از خواص دیگر رویه‌های خط دار مینیم بودن مساحت سطوحی است که به وسیله خط راست پدید می‌آیند. این موضوع در کاهش هزینه‌ها و افزایش سطوح باطری‌های خورشیدی برای استفاده در ساختمان‌های جدید به طور قابل ملاحظه‌ای اهمیت دارد. از جمله می‌توان به رویه خط دار پیچ ارشمیدسی^{۳۲} اشاره کرد. شکل‌های ۱۲.۲ و ۱۳.۲ را ببینید.

^{۳۲}Archimedean spiral ruled surface



شکل ۱۲.۲ : رویه خط دار پیچ ارشمیدسی

۵.۳.۲ تمرین‌های بخش

تمرین ۱.۳.۲ . الف. نشان دهید که رویه استوانه‌ای یک رویه دیفرانسیل پذیر از کلاس C^∞ است.

ب. معادله پارامتری رویه استوانه قائمی را بنویسید که موازی محور z بوده و قاعده آن یک بیضی باشد.

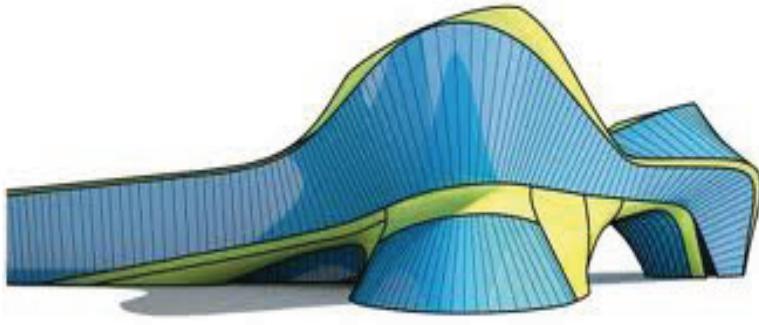
ج. معادله پارامتری رویه استوانه‌ای قائمی را بنویسید که موازی یکی از محورها است.

د. نشان دهید که در معادله دکارتی رویه استوانه‌ای قائم موازی با یکی از محورها متغیری که مربوط به آن محور است در معادله نیست.

تمرین ۲.۳.۲ . الف. نشان دهید که رویه دوار یک رویه دیفرانسیل پذیر از کلاس C^∞ است.

ب. نشان دهید که در هر نقطه از سطح دوار منحنی‌های نصف النهار بر دایره‌های سطح مقطع عمودند.

تمرین ۳.۳.۲ . نشان دهید که معادله دکارتی رویه دوار حاصل از دوران یک منحنی در صفحه حول یکی از سه محور به صورت زیر ارائه می‌گردد.



شکل ۱۳.۲: رویه‌های خط دار در معماری

الف. از دوران منحنی $y = f_1(z)$ در صفحه $z \circ y$ حول محور z نتیجه می‌شود.

$$x^2 + y^2 = f_1(z)^2. \quad (7.2)$$

ب. از دوران منحنی $z = f_2(x)$ در صفحه $x \circ z$ حول محور x نتیجه می‌شود.

$$y^2 + z^2 = f_2(x)^2.$$

ج. از دوران منحنی $x = f_3(y)$ در صفحه $y \circ x$ حول محور y نتیجه می‌شود.

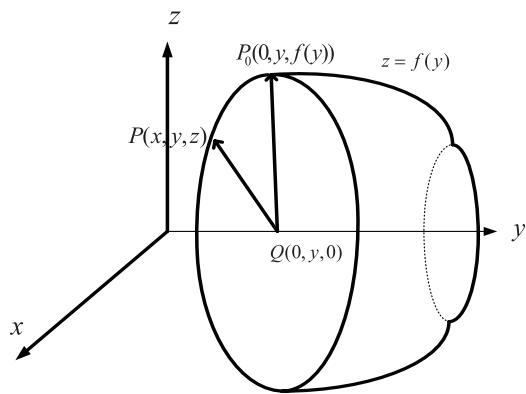
$$z^2 + x^2 = f_3(y)^2. \quad (8.2)$$

راهنمایی. یکی از فرمول‌ها را با توجه به شکل ۱۴.۲ محاسبه و بقیه را به شکل دوری از رابطه اول نتیجه بگیرید. توجه کنید که همواره $|QP| = |QP|$.

د. درستی رابطه ۷.۲ را با استفاده از دوران منحنی $z = y^2$ حول محور z تحقیق کنید.

تمرین ۴.۳.۲. نشان دهید معادله چنبره‌ای را که از دوران دایره‌ای به مرکز $(0, a)$ و به شعاع b حول محور z پدید می‌آید به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$z^2 + \left(\sqrt{x^2 + y^2} - a \right)^2 = b^2 \quad a > b > 0. \quad (9.2)$$



شکل ۱۴.۲: معادله دکارتی سطح دوار

- تمرین ۵.۳.۲. الف. آیا رویه مخروطی یک رویه منتظم است؟
 ب. آیا رویه مخروطی یک رویه دیفرانسیل پذیر از کلاس C^∞ است؟
 ج. نشان دهید که در معادله دکارتی رویه استوانه‌ای قائم موازی با یکی از محورها متغیری که مربوط به آن محور است در معادله نیست.

تمرین ۶.۳.۲. الف. شرایطی تعريف کنید که تحت آن شرایط رویه خط دار یک رویه منتظم باشد.

ب. اگر منحنی پایه مسطح و راستای خط L ثابت باشد چه رویه ای پدید می‌آید.

تمرین ۷.۳.۲. الف. یک نمایش پارامتری برای رویه زین اسپی که توسط رابطه $z = x^2 - y^2$ داده شده است ارائه کنید.

ب. آیا این رویه منتظم است.

ج. رویه زین اسپی یک رویه خط دار است. یعنی می‌توان آن را با حرکت دادن یک (یا دو) خانواده از خطوط راست در فضای پدید آورد. این موضوع را با استفاده از رابطه $z = (x - y)(x + y)$ تحقیق می‌کنیم. یعنی تقاطع صفحه $x - y = u$ و رویه زین اسپی خط راستی است که توسط تقاطع صفحه‌های $x - y = u$ و $z = u$.

بیان می‌گردد.

د. نشان دهید که نمایش پارامتری رویه زین اسپی را می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$x(u, v) = \left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}, uv \right).$$

راهنمایی. قرار دهید $u = x + y$ و $v = x - y$.

ه. نشان دهید که رویه زین اسپی را می‌توان به شکل استاندارد رویه‌های خط دار نوشت.
سپس منحنی پایه و بردار هادی آن را تعیین کنید.

۴.۲ توابع پیوسته و مشتق‌پذیر روی یک رویه

در تعریف یک رویه دیفرانسیل پذیر M شرایط را طوری فراهم نمودیم که بتوانیم تابع مشتق‌پذیر حقیقی روی M تعریف کنیم. قبل از آوردن تعریف تابع مشتق‌پذیر روی یک رویه ابتدا به تعریف تابع پیوسته می‌پردازیم. در حقیقت با استفاده از کارت‌ها و تعاریف پیوستگی و مشتق‌پذیری توابع حقیقی دو متغیره در ریاضی عمومی این مفاهیم را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱.۴.۲. فرض کنیم M یک رویه منظم باشد، تابع $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ را در همسایگی نقطه $p \in M$ ^{۳۳} پیوسته^{۳۳} گوییم، اگر کارت دلخواهی مانند (x, U) شامل نقطه $p \in U$ موجود باشد به طوری که تابع حقیقی 2 -متغیره $f \circ x : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ در $x^{-1}(p)$ پیوسته باشد.

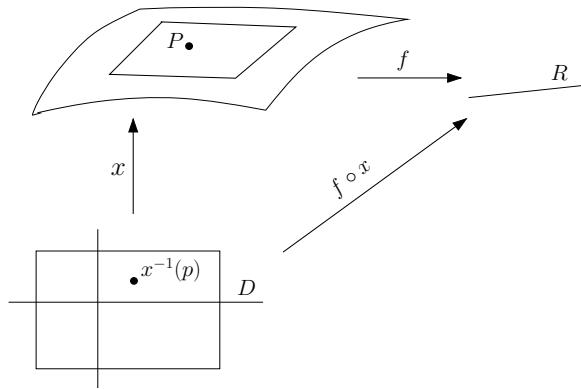
بدیهی است که این تعریف بستگی به انتخاب کارت x ندارد. زیرا در حقیقت پیوستگی تابع دو متغیره حقیقی $f \circ x : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ را می‌توانیم با اطلاعات ریاضی عمومی بررسی

^{۳۳}continus

کنیم و از طرف دیگر اگر (y, V) کارت دیگری شامل نقطه $p \in V$ باشد چون کارت ها همومورفیسم هستند، داریم

$$f \circ x(x^{-1}(p)) = f \circ x \circ x^{-1}(p) = f(p) = f \circ y \circ (y^{-1}(p)).$$

در نتیجه اگر سمت چپ تساوی پیوسته باشد سمت راست نیز پیوسته است و پیوستگی به انتخاب کارت x بستگی ندارد.



شکل ۱۵.۲: مشتق‌پذیری توابع روی رویه ها.

تعريف ۲.۴.۲. فرض کنیم M یک رویه دیفرانسیل پذیر از کلاس C^k باشد، تابع : $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ را در همسایگی نقطه $p \in M$ دیفرانسیل پذیر^{۳۴} از کلاس C^k گوییم، اگر کارتی مانند x موجود باشد به طوری که تابع حقیقی-۲-متغیره $f \circ x : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ در یک همسایگی $(p)^{-1}$ از کلاس C^k باشد. x در اینجا کارت مختصاتی دلخواهی از است. شکل ۱۵.۲ را ببینید.

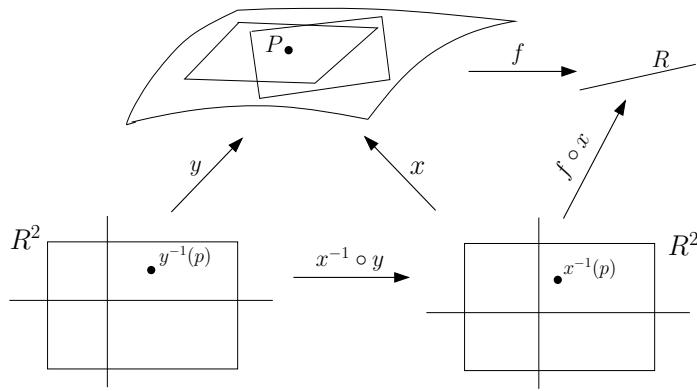
بدیهی است که این تعریف بستگی به انتخاب کارت x ندارد. این موضوع را می‌توان به صورت زیر تحقیق نمود. فرض کنیم نقطه $p \in M$ در تصویر دو کارت x و y در روی

^{۳۴}differentiable surface

M قرار گیرد. چون M از کلاس C^k است، نگاشت تغییر کارت نیز از کلاس C^k است، لذا $y^{-1} \circ x$ از کلاس C^k است. بنابراین اگر f در نقطه p دیفرانسیل پذیر از کلاس C^k باشد، بنا بر تعریف $f \circ x^{-1}(p)$ دیفرانسیل پذیر از کلاس C^k است و می‌توان نوشت

$$f \circ y = f \circ x \circ x^{-1} \circ y$$

و در نتیجه $y \circ f$ نیز دیفرانسیل پذیر از کلاس C^k است. شکل ۱۶.۲ را ببینید. خانواده

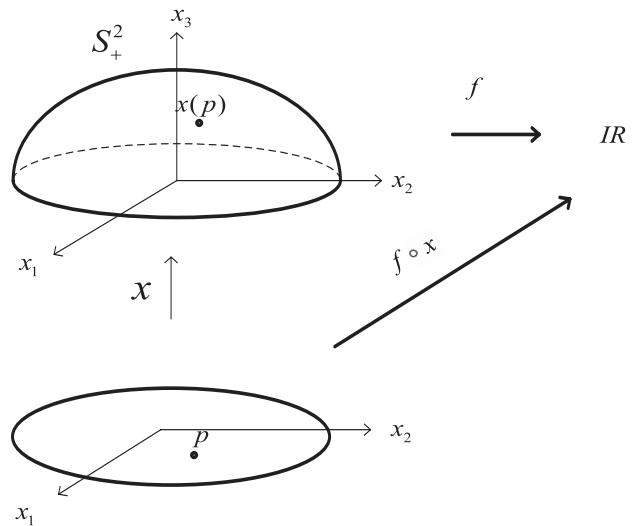


شکل ۱۶.۲: مشتق‌پذیری توابع به انتخاب کارت هابستگی ندارد.

تابع حقیقی $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ از کلاس C^∞ روی روش دیفرانسیل پذیر M را با $C^\infty(M)$ و خانواده توابع حقیقی از کلاس C^∞ در همسایگی نقطه $p \in M$ را با $C^\infty(p)$ نمایش می‌دهیم.

مثال ۳.۴.۲. فرض کنیم $f : (x, y, z) \in S^3 \rightarrow x + y + z \in \mathbb{R}$ تابعی حقیقی روی کره باشد. می‌خواهیم نشان دهیم که f روی تمام نقاط کره S^3 مشتق پذیر است. برای این کار باید نشان دهیم که کارتی مانند x وجود دارد به طوری که تابع $f \circ x : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ در نقطه دلخواه p از دامنه کارت x مشتق‌پذیر باشد. نمودار ۱۷.۲ را ببینید. با توجه به تمرين ۴.۲.۲ در صفحه ۷۷ می‌توان کره را با شش کارت به صورت زیر پوشانید.

$$x : (u, v) \in D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow (u, v, \sqrt{1 - u^2 + v^2}).$$



شکل ۱۷.۲: مثالی از یک تابع مشتقپذیر روی کره

کافی است نشان دهیم که نگاشت زیر در هر نقطه $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ مشتقپذیر است.

$$x \circ f : (u, v) = u + v + \sqrt{1 - u^2 + v^2}.$$

در حقیقت چون $D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 < 1\}$ مشتقات جزیی کلیه مولفه های تابع $x \circ f$ موجود و پیوسته بوده و بنابر قضیه ای در آنالیز در کلیه نقاط D مشتقپذیر است.

۱.۴.۲ تمرین های بخش

تمرین ۱.۴.۲. نشان دهید که اگر تابعی مانند $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ در یک نقطه از رویه M مشتقپذیر باشد در آن نقطه پیوسته است.

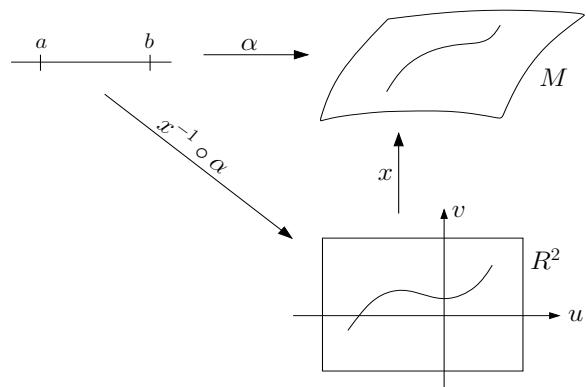
۲۰.۴.۲ منحنی روی یک رویه

یک منحنی C در روی رویه $M \subset \mathbb{R}^3$ تصویر نگاشتی است مانند $\alpha(t)$ از فاصله $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ روی M . در فصل منحنی‌ها دیدیم که چگونه می‌توان C را به عنوان یک زیرمجموعه یک منحنی در \mathbb{R}^3 مطالعه نمود. در اینجا می‌خواهیم منحنی C را به عنوان یک زیرمجموعه از رویه M توسط مختصات روی رویه یا مختصات منحنی الخط به شکل مستقل تعریف کنیم. خاصیت این تعریف این است که می‌توان آن را برای هر زیرمجموعه دلخواه در ابعاد بالاتر نیز به طور مشابه بیان نمود. اگر این نگاشت یک باشد (یعنی منحنی خودش را قطع نکند) می‌گوییم C یک منحنی ساده روی رویه $M \subset \mathbb{R}^3$ است.

$$\alpha : [a, b] \longrightarrow M \subset \mathbb{R}^3,$$

$$t \mapsto \alpha(t).$$

با توجه به تعریف پیوستگی توابع روی رویه‌ها، می‌توان منحنی پیوسته را تعریف نمود. منحنی



شکل ۱۸.۲: مولفه‌های منحنی در روی یک رویه با استفاده از کارت x .

روی رویه دیفرانسیل پذیر M را در یک نقطه پیوسته گوییم، اگر $x^{-1} \circ \alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ در آن نقطه پیوسته باشد. لذا برای مطالعه منحنی‌ها می‌توان تصویر وارون آن‌ها را توسط

کارت x روی \mathbb{R}^3 ، مورد مطالعه قرار داد. شکل ۱۸.۲ را ببینید. فرض کنیم $\alpha(t)$ یک منحنی روی M باشدکه در کارت زیر قرار داشته باشد.

$$x(u, v) = \left(x^1(u, v), x^2(u, v), x^3(u, v) \right).$$

برای نمایش منحنی C روی رویه M به عنوان یک منحنی در \mathbb{R}^3 می‌توان از کارت $x(u, v)$ به صورت زیر استفاده نمود. شکل ۱۸.۲ را ببینید. اگر در اینجا فرض کنیم آنگاه $x^{-1} \circ \alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ یک منحنی پارامتری روی \mathbb{R}^3 است.

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= x \circ (x^{-1} \circ \alpha(t)) = x(u(t), v(t)), \\ &= \left(x^1(u(t), v(t)), x^2(u(t), v(t)), x^3(u(t), v(t)) \right). \end{aligned} \quad (10.2)$$

هر منحنی پارامتری روی \mathbb{R}^3 را می‌توان توسط توابع $u = u(t)$ و $v = v(t)$ نمایش داد. لذا داریم

$$x^{-1} \circ \alpha(t) = (u(t), v(t)).$$

تابع $u = u(t)$ و $v = v(t)$ را مختصات منحنی الخط منحنی^{۳۵} یا مختصات گاوی^{۳۶} می‌گویند. بنابراین پیوستگی منحنی $\alpha(t)$ روی رویه M معادل پیوستگی توابع $u = u(t)$ و $v = v(t)$ است. با توجه به تعریف دیفرانسیل‌پذیری توابع روی رویه‌ها، می‌توان منحنی دیفرانسیل‌پذیر را تعریف نمود. منحنی α روی رویه دیفرانسیل‌پذیر M از کلاس C^k را در همسایگی یک نقطه دیفرانسیل‌پذیر C^r گوییم، اگر $x^{-1} \circ \alpha : \mathbb{R} \rightarrow C^r$ باشد. شکل ۱۸.۲ را ببینید.

نتیجه ۲۰.۴.۲. فرض کنیم $\alpha : t \in I \rightarrow M$ یک منحنی روی رویه M باشدکه در کارت $x(u, v)$ قرار داشته باشد. چنانچه احتمال اشتباه نزود با سواستفاده از نماد

^{۳۵}curve linear coordinates

^{۳۶}Gaussian coordinates

گذاری قبل $\alpha(t)$ را در روی رویه M با مختصات منحنی الخط و توسط دو تابع $= \alpha(t) = (u(t), v(t)) \subset M$ نمایش می‌دهیم.

چنانچه یک منحنی روی یک کارت نگنجد، باید خواص آن روی کارت‌های مختلف را بررسی نموده، سپس با استفاده از خاصیت همارزی کارت‌ها آن خواص را در صورت امکان بر روی کل منحنی توسعه داد. رویه M را همبند کمانی^{۳۷} گوییم، اگر به ازای هر دو نقطه p و q از M یک منحنی α روی M موجود باشد، به طوری که $\alpha(a) = p$, $\alpha(b) = q$.

مثال ۳.۴.۲. فرض کنیم $a_1t + b_1$ و $a_2t + b_2$ معادله پارامتری خط راست در \mathbb{R}^2 باشد. تصویر این خط راست توسط کارت $x(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$ که با ضابطه زیر تعریف می‌شود یک منحنی روی استوانه است.

$$\alpha(t) = x(\alpha_1(t), \alpha_2(t)) = (\cos \alpha_1(t), \sin \alpha_1(t), \alpha_2(t)).$$

با بحث در مورد اعداد ثابت a_1, a_2, b_1, b_2 می‌توان دید که تصویر خط راست در صفحه توسط این کارت بخشی از یک خط راست، دایره یا مارپیچ در روی استوانه است. اگر خط راست موازی محور u باشد، معادله پارامتری آن در \mathbb{R}^3 به صورت $u = a_1t + b_1$ و $\alpha(t) = (\cos(a_1t + b_1), \sin(a_1t + b_1), b_2)$ است، که تصویر آن دایره به ارتفاع b_2 در روی استوانه است. اگر خط راست موازی محور v باشد، معادله پارامتری آن در \mathbb{R}^3 به صورت $v = a_2t + b_2$ و $u = b_1$ است، که تصویر آن خط راست مورب دلخواه باشد، تصویر آن منحنی مارپیچ راست مورب دلخواه باشد، تصویر آن منحنی مارپیچ

$$\alpha(t) = (\cos(a_1t + b_1), \sin(a_1t + b_1), a_2t + b_2),$$

در روی استوانه است. بردار مماس بر استوانه در هر نقطه را نیز می‌توان با مشتقگیری از

^{۳۷}path connected or connected by arc

منحنی های روی استوانه به دست آورد. به عنوان مثال بردار

$$V_p = \alpha'(t) = (-u'(t) \sin u(t), u'(t) \cos u(t), v'(t)),$$

در هر نقطه هم بر منحنی مماس است و هم بر استوانه.

۳.۴.۲ بردار و صفحه مماس بر یک رویه

مقدمه. باید توجه داشت که وقتی از لفظ "بردار" استفاده می کنیم منظور ما خانواده تمام بردارهای همسنگ با آن بردار است که از مبدأ مختصات شروع شده است. اما وقتی که کلمه "بردار مماس" را به کار می بردیم منظور یک بردار خاص است که از یک نقطه مشخص شروع شده و در راستای یک بردار خاص قرار دارد. معمولاً یک بردار را با V و یک بردار مماس را با نماد V_p نمایش می دهیم. مفهوم بردار مماس بر یک رویه و خانواده بردارهای مماس که به فضای مماس بر رویه مشهور است، از مفاهیم بسیار جالب هندسه است. یکی از خواص جالب مفهوم فضای مماس این است که به مشتق یکتابع یک تابع یک تغییر هندسی وابسته می کند. به عبارت دیگر فضای مماس، فضایی را معرفی می کند که مشتق توابع تعریف شده روی یک رویه در آن فضا زندگی می کنند. در این کتاب دو تعریف برای بردار مماس آورده خواهد شد. یکی به عنوان بردارهای مماس بر منحنی های روی رویه و دیگری به عنوان یک عملگر مشتق گیری. معادل بودن این دو تعریف در [۲] ثابت گردیده است.

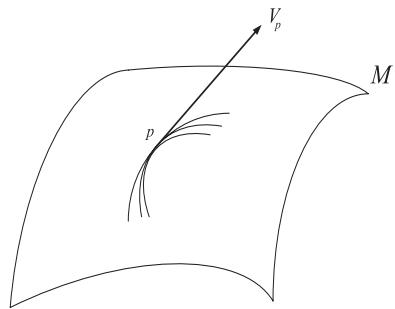
فرض کنیم که $\alpha(t)$ و $\beta(t)$ دو منحنی در روی رویه M باشند که از نقطه گذشته و در یک راستا باشند، یعنی

$$\alpha(0) = \beta(0) = p,$$

$$\frac{d\alpha}{dt}(0) = \frac{d\beta}{dt}(0).$$

در این صورت می گوییم که این دو منحنی هم ارز هستند، یعنی از یک نقطه گذشته و در یک راستا قرار دارند. این موضوع به ما کمک می کند تا بردار مماس را به عنوان یک

کلاس هم ارزی از منحنی‌ها بی که از یک نقطه گذشته و مشتقات اول آنها با هم برابر است، معرفی کنیم. لذا یک بردار مماس بر یک رویه را می‌توان به صورت بردار مماس بر خانواده‌ای از منحنی‌های روی آن رویه که از یک نقطه گذشته و در یک راستا باشند، معرفی کرد. شکل ۱۹.۲ را ببینید.



شکل ۱۹.۲: بردار مماس یک کلاس هم ارزی از منحنی‌های مماس بر یک راستا است.

تعريف ۴.۴.۲. (تعريف اول) می‌گوییم X_p بردار مماس بر رویه M در نقطه $p \in M$ در تعیین $\alpha(t)$ روی M موجود باشد به طوری که است اگر یک منحنی مانند

$$\begin{cases} \frac{d\alpha}{dt}(0) = X_p, \\ \alpha(0) = p. \end{cases}$$

گزاره ۵.۴.۲. اگر مجموعه بردارهای مماس بر رویه M در نقطه $p \in U$ روی کارت (x, U) را با $T_p M$ نمایش دهیم، آنگاه $T_p M$ یک فضای برداری ۲-بعدی است که پایه های آن عبارتند از $\{x_u, x_v\}$.

برای آنکه یک تجسم هندسی از پایه‌های $\{x_u, x_v\}$ صفحه مماس در هر نقطه بر رویه داشته باشیم می‌توان از شکل ۱۰.۱.۲ در صفحه ۶۳ استفاده کرد.

اثبات. فرض کنیم X_p و Y_p دو بردار مماس بر رویه منظم M در نقطه $p \in U$ روی کارت (x, U) باشند. بنا بر تعریف دو منحنی $\alpha(t)$ و $\beta(t)$ وجود دارند به طوری که

$$\begin{cases} \frac{d\alpha}{dt}(\cdot) = X_p, & \frac{d\beta}{dt}(\cdot) = Y_p, \\ \alpha(\cdot) = \beta(\cdot) = p \end{cases}$$

بنابر رابطه (۱۰.۲) و قاعده زنجیره ای روی کارت (x, U) داریم

$$X_p = \frac{d\alpha}{dt} = \frac{dx}{dt}(u, v) = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial \alpha_1}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial \alpha_2}{\partial t} = \alpha'_1 x_u + \alpha'_2 x_v.$$

به همین صورت $Y_p = \beta'_1 x_u + \beta'_2 x_v$. جمع دو بردار مماس و ضرب اسکالر را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\begin{cases} X_p + Y_p = (\alpha'_1 + \beta'_1)x_u + (\alpha'_2 + \beta'_2)x_v, \\ \lambda X_p = (\lambda \alpha'_1)x_u + (\lambda \alpha'_2)x_v, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

برای آنکه نشان دهیم این جمع خوش تعریف است باید نشان دهیم که یک منحنی مانند $\gamma(t) = x(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ گذرنده از نقطه $p \in U$ روی کارت (x, U) وجود دارد به طوری که بردار مماس بر آن برابر جمع این دو بردار مماس باشد. در حقیقت مشتقات این منحنی در یک همسایگی به اندازه کافی کوچک t باید به صورت زیر تعریف شوند.

$$\begin{cases} \gamma'_1(t) = \alpha'_1 + \beta'_1, \\ \gamma'_2(t) = \alpha'_2 + \beta'_2. \end{cases}$$

با انتگرال‌گیری نسبت به t داریم

$$\begin{cases} \gamma_1(t) = \alpha_1(t) + \beta_1(t) + c_1, \\ \gamma_2(t) = \alpha_2(t) + \beta_2(t) + c_2. \end{cases}$$

مقدار اعداد ثابت c_1 و c_2 را طوری انتخاب می‌کنیم که منحنی از نقطه $(\cdot, p) = \gamma(\cdot)$ بگذرد.

$$c_2 = -\beta_2(\cdot), c_1 = -\beta_1(\cdot)$$

$$\begin{cases} \frac{d\gamma}{dt}(\cdot) = X_p + Y_p, \\ \gamma(\cdot) = p. \end{cases}$$

لذا جمع دو بردار مماس و به استدلال مشابه ضرب عدد در بردار مماس فوق الذکر خوش تعریف بوده و $T_p M$ در شرایط فضای برداری صدق می‌کند. از طرفی چون رویه منتظم است دو بردار x_u و x_v مستقل خطی اند و تشکیل یک پایه برای $T_p M$ می‌دهند. این موضع اثبات گزاره را کامل می‌کند. \square

تعریف ۶.۴.۲. اگر مجموعه بردارهای مماس بر روی $p \in M$ در نقطه U روی کارت (x, U) را با $T_p M$ نمایش دهیم، آنگاه فضای برداری $T_p M$ را **صفحه مماس**^{۳۸} بر رویه M در نقطه $p \in M$ می‌نامیم.

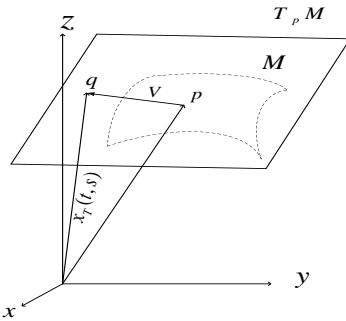
یکتایی صفحه مماس در هر نقطه از یک رویه از یکتایی فضای برداری تولید شده توسط پایه‌های مربوط به کارتهای رویه در همسایگی‌های روی هم افتاده آن نقطه نتیجه می‌شود. بنابر گزاره **۵.۴.۲** برادرهای پایه فضای مماس $T_p M$ عبارتند از $\{x_u, x_v\}_{p.}$. لذا اگر V یک بردار مماس در $T_p M$ باشد، آنگاه می‌توان آن را به صورت ترکیب خطی از اعضای پایه نوشت. یعنی $V = v_1 x_u + v_2 x_v$ ، که در آن $v_1(u, v), v_2(u, v)$ مولفه‌های بردار توابعی از (u, v) هستند.

лем ۷.۴.۲. فرض کنیم که M یک رویه منتظم با کارت (x, U) باشد. آنگاه $\tilde{\gamma}$ نمایش پارامتری صفحه مماس بر M در نقطه $p = x(u., v.)$ یا $T_p M$ به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$x_T(t, s) = p + (tx_u + sx_v)|_{(u., v.)},$$

^{۳۸}tangent space

که در آن $\{(tx_u + sx_v) |_{(u.,v.)} \mid \forall s, t \in \mathbb{R}\} = Sp\{x_u, x_v\}|_{(u.,v.)}$ مجموعه ترکیبات خطی دو بردار پایه x_u و x_v در نقطه p است.



شکل ۲۰.۲: معادله پارامتری صفحه مماس $T_p M$.

اثبات. بنابرگزاره ۵.۴.۲ در صفحه ۹۷ برادرهای پایه فضای مماس $T_p M$ عبارتند از $\{x_u, x_v\}_p$. از آن جا بردار موضع هر نقطه q از صفحه مماس $T_p M$ را می‌توان به صورت جمع بردار موضع p و بردار $V = pq = p + V$ نوشت. شکل ۲۰.۲ .
را ببینید. لذا نمایش پارامتری $T_p M$ صفحه مماس بر M در نقطه M به $p = x(u., v.)$ صورت زیر نوشته می‌شود.

$$x_T(t, s) = p + (tx_u + sx_v)|_{(u.,v.)},$$

که در آن $\{tx_u + sx_v \mid \forall s, t \in \mathbb{R}\} = Sp\{x_u, x_v\}$ مجموعه ترکیبات خطی دو بردار پایه x_u و x_v برای هر $s, t \in \mathbb{R}$ است. \square

مثال ۸.۴.۲. معادله صفحه مماس بر کره S^2 در نقطه $x(1/2, 1/2)$ را به دست آورید.
در اینجا کارت x در تمرین ۴.۲.۲ در صفحه ۷۷ معرفی شده است.

حل. در این تمرین دیدیم که می‌توان کره را با شش کارت زیر پوشانید.

$$x : (u, v) \in D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow (u, v, \sqrt{1 - u^2 - v^2}).$$

از آنجا پایه‌های فضای برداری مماس عبارتند از

$$x_u = (1, 0, \frac{-u}{\sqrt{1 - u^2 - v^2}}), \quad x_v = (0, 1, \frac{-v}{\sqrt{1 - u^2 - v^2}}).$$

چون $\{1 < u^2 + v^2 \leq 1\}$ مشتقات جزیی موجود هستند و معادله پارامتری یا کارت صفحه مماس بر کره S^2 در نقطه $x(1/2, 1/2) = p$ عبارت است از

$$\begin{aligned} x_T(t, s) &= p + (tx_u + sx_v)|_{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}, \\ x_T(t, s) &= \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + (t, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}t) + (0, s, -\frac{\sqrt{2}}{2}s), \\ x_T(t, s) &= \left(t + \frac{1}{2}, s + \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}(t + s - 1)\right). \end{aligned}$$

در این روش نحوه استفاده از کارت‌ها در معرفی مفاهیم هندسی را دیدیم. اما معادله دکارتی صفحه مماس را می‌توان با اطلاعات دروس ریاضی عمومی نیز به دست آورد. کافی است با استفاده از بردار یکه قائم معادله صفحه مماس را بنویسیم.

$$n = \frac{x_u \wedge x_v}{|x_u \wedge x_v|} = (u, v, \sqrt{1 - u^2 - v^2}).$$

با محاسبه مولفه‌های بردار قائم در نقطه $x(1/2, 1/2) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ از سطح کره می‌توان معادله صفحه مماس را به صورت زیر نوشت.

$$\frac{1}{2}(x - \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}(y - \frac{1}{2}) + \frac{\sqrt{2}}{2}(z - \frac{\sqrt{2}}{2}) = 0.$$

مثال ۹.۴.۲. پایه و معادله پارامتری صفحه مماس بر سطح دوار در یک نقطه دلخواه را به دست آورید.

حل. در بخش ۱.۳.۲ در صفحه ۷۸ دیدیم که معادله پارامتری سطح دوار به صورت زیر داده می شود.

$$x(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u)). \quad (11.2)$$

اعضای پایه فضای برداری مماس در یک نقطه دلخواه عبارت است از

$$x_u = (f'(u) \cos v, f'(u) \sin v, g'(u)),$$

$$x_v = (-f(u) \sin v, f(u) \cos v, \cdot).$$

معادله پارامتری یا کارت صفحه مماس در نقطه $x(u., v.) = p = (a, b, c)$ عبارت است از

$$x_T(t, s) = p + (tx_u + sx_v)|_{(u., v.)},$$

از آن جا با جایگذاری مقادیر بالا، معادله پارامتری صفحه مماس بر سطح دوار در یک نقطه دلخواه به دست می آید.

$$\begin{aligned} x_T(t, s) &= (a, b, c) + t(f'(u) \cos v, f'(u) \sin v, g'(u))|_{(u., v.)} \\ &\quad + s(-f(u) \sin v, f(u) \cos v, \cdot)|_{(u., v.)}. \end{aligned}$$

معادله دکارتی صفحه مماس را می توان با استفاده از بردار یکه قائم نوشت.

$$n = (n_1, n_2, n_3) = \frac{x_u \wedge x_v}{|x_u \wedge x_v|}.$$

از آنجا معادله دکارتی صفحه مماس در هر نقطه دلخواه $p = (a, b, c)$ از سطح رویه دوار را می توان به صورت زیر نوشت.

$$(x - a)n_1 + (y - b)n_2 + (z - c)n_3 = \cdot.$$

۴.۴.۲ تمرین‌های بخش

تمرین ۱۰.۴.۲. ثابت کنید که اگر صفحه‌ای با یک رویه تنها در یک نقطه مشترک باشد، آنگاه آن صفحه بر رویه مماس است.

راهنمایی. کافی است نشان دهید که صفحه و رویه در آن نقطه دارای بردارهای قائم مشترک هستند.

تمرین ۲۰.۴.۲. فرض کنیم $v = a_2 t + b_2$ و $u = a_1 t + b_1$ معادله پارامتری خط راست در \mathbb{R}^3 باشد.

الف. تصویر این خط روی بخشی از کره واحد تحت نگاشت

$$x(u, v) = (\cos u \sin v, \cos u \cos v, \sin u),$$

را پیدا کنید.

ب. بردار مماس بر رویه و بر تصویر این خط راست در روی رویه را به دست آورید.

تمرین ۳۰.۴.۲. معادله پارامتری صفحه مماس بر کره S^2 در نقطه $x(1/2, 1/2)$ به دست آمده در مثال ۸.۴.۲ را با معادله دکارتی صفحه مماس بر کره S^2 در نقطه $x(1/2, 1/2)$ مقایسه و درستی آن‌ها را بررسی کنید.

تمرین ۴۰.۴.۲. چنبره رویه‌ای است منظم که از دوران یک دایره حول یک محور پدید می‌آید. چنبره را می‌توان توسط کارت‌هایی به صورت زیر پوشانید.

$$x(u, v) = ((a + b \cos u) \cos v, (a + b \cos u) \sin v, \sin u),$$

که در آن $0 < b < a < D$ بوده و D ناحیه تعریف کارت که به صورت زیر تعریف می‌شود یک مربع باز است. شکل ۲۴.۲ در صفحه ۱۱۸ را ببینید.

$$D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid -\pi < u < \pi, -\pi < v < \pi\}$$

الف. نشان دهید چنبره یک رویه منظم است. چند کارت از این نوع برای پوشاندن کره لازم است.

ب. یک منحنی در روی چنبره معرفی نمایید.

ج. یک بردار مماس بر چنبره در یک نقطه دلخواه ارائه کنید.

د. یک نمایش پارامتری از صفحه مماس در نقطه $(1, 1, x)$ بنویسید.

ه. معادله صفحه مماس بر چنبره را در نقطه $(1, 1, x)$ بنویسید.

۵.۲ مشتق سویی و بردار مماس روی رویه

در این بخش ابتدا تعریف مشتق سویی^{۳۹} در فضای \mathbb{R}^3 را که در ریاضی عمومی با آن آشنا شده ایم آورده سپس تعریف آن را برای رویه ها بیان می کنیم. مشتق گیری سویی از یک تابع در راستای یک بردار در حقیقت میزان تغییرات آن تابع در طول منحنی مماس بر آن بردار را تعیین می کند.

با استفاده از مفهوم مشتق سویی در هندسه می توان مفاهیم مهمی مانند بردار مماس، بردار دوگان مماس، دیفرانسیل کل و مشتق یک تابع بین دو رویه را تعریف نمود.

خانواده توابع حقیقی $M \rightarrow \mathbb{R}$: f از کلاس C^∞ روی رویه دیفرانسیل پذیر M را با $C^\infty(M)$ و خانواده توابع حقیقی از کلاس C^∞ در همسایگی نقطه $p \in M$ را با $C^\infty(p)$ نمایش می دهیم.

۱.۰۵.۲ مشتق سویی در \mathbb{R}^3

اگر $(x, y, z) = g(x, y, z)$ یک تابع حقیقی روی \mathbb{R}^3 و $\alpha(t) = (x^1(t), x^2(t), x^3(t))$ یک منحنی در \mathbb{R}^3 باشد. در ریاضیات عمومی دیدیم که مشتق سویی یا تغییرات g در جهت

^{۳۹}directional derivative

بردار مماس بر منحنی $\alpha(t)$ ، با مشتق گیری از تابع مرکب $g \circ \alpha$ تعریف می‌شود. به عبارت دیگر

$$\alpha(s) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad g(x, y, z) : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$g \circ \alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

فرض کنیم $g(x, y, z)$ یک تابع حقیقی روی \mathbb{R}^3 و $\alpha(t)$ یک منحنی با فرض p در \mathbb{R}^3 باشد. مشتق سویی تابع g در نقطه p توسط رابطه زیر تعریف می‌گردد.

$$V_p[g] = \frac{d}{dt}g(\alpha(t))|_{t=0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(\alpha(t)) - g(\alpha(0))}{t}.$$

که در آن $V_p = \alpha'(t)|_{t=0}$ بردار مماس بر منحنی $\alpha(t)$ است. اگر v^i مولفه‌های بردار مماس باشد، بنا بر قاعده زنجیره‌ای داریم

$$\frac{d}{dt}g(\alpha(t)) = \frac{\partial g}{\partial x^1} \frac{dx^1}{dt} + \frac{\partial g}{\partial x^2} \frac{dx^2}{dt} + \frac{\partial g}{\partial x^3} \frac{dx^3}{dt} = \sum_{i=1}^3 v^i \frac{\partial g}{\partial x^i}. \quad (12.2)$$

بدون توجه به تابع g از رابطه ۱۲.۲ نتیجه می‌شود که عملگر مشتق سویی در جهت بردار مماس بر یک منحنی در \mathbb{R}^3 به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$V_p = \sum_{i=1}^3 v^i_{(p)} \frac{\partial}{\partial x^i}_{(p)}.$$

از این رابطه نتیجه می‌شود که هر بردار مماس در فضای \mathbb{R}^3 را می‌توان به صورت یک عملگر مشتق گیری نیز تعریف نمود. این عبارت را تعریف دوم بردار مماس در \mathbb{R}^3 نیز می‌گویند. در بخش بعد تعریف مشتق سویی را برای رویه‌ها تعمیم می‌دهیم.

۲.۵.۲ مشتق سویی و بردار مماس روی یک رویه

فرض کنیم M یک رویه دیفرانسیل پذیر از کلاس C^2 ، $x(u^1, u^2)$ یک کارت روی M و منحنی $\alpha(t)$ روی این کارت قرار داشته باشد. تابع $g : M \longrightarrow \mathbb{R}$ از کلاس C^1

را در همسایگی نقطه $M \in p$ در نظر می‌گیریم. بنا بر نتیجه ۲.۴.۲ در صفحه ۹۴ هر منحنی روی رویه را می‌توان توسط مختصات منحنی الخط (t) و $u^1(t)$ و $u^2(t)$ به صورت منحنی رویه از آنجا مولفه‌های بردار مماس بر این منحنی در کارت $\alpha(t) = (u^1(t), u^2(t))$ نوشت. از آنجا مولفه‌های $v_{(p)}^1 = \frac{du^1}{dt}$ و $v_{(p)}^2 = \frac{du^2}{dt}$ ارائه می‌گردد. حوزه تعریف تابع g بخشی از رویه M است که توسط کارت (x, U) پوشیده شده و مختصات منحنی الخط منحنی رویه M از $x(u^1, u^2)$ و $u^1(t)$ و $u^2(t)$ تشکیل شده است. می‌خواهیم تغییرات g را در طول $\alpha(t)$ محاسبه کنیم. فرض کنیم $M \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع حقیقی روی رویه دیفرانسیل پذیر M از کلاس C^2 ، یک کارت روی M و منحنی $\alpha(t)$ روی این کارت قرار داشته باشد. مشتق سویی تابع g در نقطه $p = \alpha(0)$ توسط رابطه زیر تعریف می‌گردد.

$$V_p[g] = \frac{d}{dt}g(\alpha(t))|_{t=0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(\alpha(t)) - g(\alpha(0))}{t}.$$

که در آن $V_p = \alpha'(t)|_{t=0}$ بردار مماس بر منحنی $\alpha(t) = (u^1(t), u^2(t))$ در نقطه p و $v_{(p)}^j$ مولفه‌های آن در کارت $x(u^1, u^2)$ می‌باشند. بنا بر قاعده زنجیره‌ای داریم

$$\frac{d}{dt}g(\alpha(t)) = \frac{\partial g}{\partial u^1} \frac{du^1}{dt} + \frac{\partial g}{\partial u^2} \frac{du^2}{dt} = \sum_{j=1,2} \frac{du^j}{dt} \frac{\partial}{\partial u^j} g.$$

لذا لم زیر را داریم.

لم ۱.۵.۲. فرض کنیم $M \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع حقیقی روی رویه دیفرانسیل پذیر M از کلاس C^2 ، یک کارت روی M و منحنی $\alpha(t)$ روی این کارت قرار داشته باشد. مشتق سویی تابع g در نقطه $p = \alpha(0)$ برابر است با

$$V_p[g] = \sum_{j=1}^2 v_{(p)}^j \frac{\partial}{\partial u^j} g, \quad (13.2)$$

که در آن $V_p = \alpha'(t)|_{t=0}$ بردار مماس بر منحنی $\alpha(t) = (u^1(t), u^2(t))$ در نقطه p و $v_{(p)}^j$ مولفه‌های آن در کارت $x(u^1, u^2)$ می‌باشند.

بدون در نظر گرفتن تابع می‌توان بردار مماس بر رویه را به صورت زیر نوشت.

$$V_p = \sum_{i=1}^2 v_{(p)}^i \frac{\partial}{\partial u^i}_{(p)}. \quad (14.2)$$

این عبارت بردار مماس را به عنوان یک عملگر مشتق سویی تعریف می‌کند.

تعریف ۲.۵.۲. (تعریف دوم بردار مماس) می‌گوییم V_p بردار مماس بر رویه M در نقطه $p \in M$ است اگر در رابطه 14.2 صدق کند. یا به عبارت دیگر اگر یک مشتق سویی روی توابع $C^\infty(p)$ باشد.

از این تعریف نتیجه می‌شود که $\left\{ \frac{\partial}{\partial u^1}, \frac{\partial}{\partial u^2} \right\}$ نیز یک پایه برای فضای برداری $T_p M$ بوده و آن را تولید می‌کند. این پایه را پایه استاندارد با توجه به کارت (u^1, u^2) می‌نامیم. با استفاده از تعریف دوم بردار مماس $V_p = \sum_{i=1}^2 v_{(p)}^i \frac{\partial}{\partial u^i}_{(p)}$ می‌بینیم که هر بردار مماس عملگری است که به صورت زیر روی توابع حقیقی مشتق پذیر $C^\infty(p)$ روی رویه اثر می‌کند.

$$\begin{aligned} V_p : C^\infty(p) &\longrightarrow R \\ f &\longmapsto V_p[f]. \end{aligned}$$

مثال ۳.۵.۲. تابع حقیقی $f \in C^\infty(M)$ روی رویه دیفرانسیل پذیر M با کارت $x(u^1, u^2) = (u^1, u^2, (u^1)^2 + (u^2)^2)$ را در نظر می‌گیریم. ضابطه این تابع را با $f(x(u^1, u^2)) = u^2 \frac{\partial}{\partial u^1} + u^1 \frac{\partial}{\partial u^2}$ معرفی می‌کنیم. اگر $V = u^2 \frac{\partial}{\partial u^1} + u^1 \frac{\partial}{\partial u^2}$ یک میدان برداری روی رویه M در کارت x باشد، مشتق سویی تابع در راستای بردار V در نقطه $(1, 2) = p$ را محاسبه کنید.

حل. بنا بر رابطه 13.2 داریم

$$V_p[f] = \sum_{i=1}^2 v^i \frac{\partial f}{\partial u^i}|_p = \left(\frac{1}{4} u^2 \frac{\partial f}{\partial u^1} + u^1 \frac{\partial f}{\partial u^2} \right)|_p.$$

با جایگذاری مقادیر $u^1 = 1$ و $u^2 = 2$ داریم

$$V_p[f] = \frac{1}{3}u^1 u^2|_p, \quad V_p f \in C^\infty(p).$$

حال اگر p نقطه‌ای از رویه به مختصات $1 = u^1$ و $2 = u^2$ باشد، مقدار عددی مشتق سویی در این نقطه به دست می‌آید.

$$V_{(1,2)}[f] = \frac{1}{3}u^1 u^2|_{(1,2)} = \frac{1}{3}2 = \frac{2}{3}, \quad V_{(1,2)} f \in C^\infty(1, 2).$$

تمرین ۴.۵.۲. نشان دهید اگر X_p و Y_p دو مشتق‌گیری سویی روی توابع $C^\infty(p)$ باشند، آنگاه به ازای هر تابع $f \in C^\infty(p)$ و هر عدد $\alpha \in \mathbb{R}$ داریم:

$$\begin{cases} (X + Y)_p[f] = X_p[f] + Y_p[f], \\ (\alpha X)_p[f] = \alpha X_p[f]. \end{cases}$$

سپس با استفاده از این جمع و ضرب اسکالر نشان دهید مجموعه مشتق‌گیری‌های سویی یک فضای برداری روی اعداد حقیقی تشکیل می‌دهند که بر فضای مماس $T_p M$ منطبق است.

تمرین ۵.۵.۲. نشان دهید که مشتق سویی یا بردار مماس V_p دارای خواص زیر است:

$$V_p[f + g] = V_p[f] + V_p[g] \quad f, g \in C^\infty(M),$$

$$V_p[\alpha f] = \alpha V_p[f] \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

$$V_p[fg] = V_p[f]g(p) + f(p)V_p[g].$$

اگر تابعی در این سه خاصیت صدق کند، آن را یک عملگر مشتق‌گیری^{۴۰} می‌نامیم. لذا هر مشتق سویی یک مشتق‌گیری روی خانواده توابع $C^\infty(M)$ است.

derivation^{۴۰}

۱-فرم دیفرانسیل روی رویه

۱.۶.۲ دیفرانسیل کل و ۱-فرم دیفرانسیل در \mathbb{R}^3

فرض کنیم f تابعی با مقدار حقیقی روی \mathbb{R}^3 باشد، $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ در ریاضی عمومی دیفرانسیل کل f را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz. \quad (15.2)$$

می‌خواهیم در این بخش با دقت بیشتری به این تعریف پرداخته، آن را به عبارتی تعیین دهیم.

تعریف ۱.۶.۲. نگاشت حقیقی ϕ روی \mathbb{R}^3 را یک ۱-فرم دیفرانسیل گوییم، اگر روی بردارهای \mathbb{R}^3 ، به طور خطی اثر کند، یعنی

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \phi(aV_p + bW_p) &= a\phi(V_p) + b\phi(W_p) \end{aligned}$$

که در آن a و b اعداد حقیقی و V_p و W_p بردارهای \mathbb{R}^3 در نقطه p هستند.

خانواده ۱-فرمی‌های \mathbb{R}^3 با عمل جمع دو ۱-فرم که به صورت نقطه به نقطه تعریف می‌شود و ضرب اسکالر زیر تشکیل یک فضای برداری می‌دهد.

$$(\phi + \psi)(V_p) = \phi(V_p) + \psi(V_p), \quad \forall V_p \in \mathbb{R}^3,$$

$$(f\phi)(V_p) = f(p)\phi(V_p), \quad \forall f \in C^\infty(p).$$

در اینجا f تابعی حقیقی روی \mathbb{R}^3 و ϕ و ψ دو ۱-فرم هستند. در این صورت ϕ عبارت است از ۱-فرم $(f\phi)(V_p) = f(p)\phi(V_p)$ به ازای همه بردارهای مماس V_p . با استفاده از مفهوم مشتق جهت‌دار می‌توان دیفرانسیل کل یک تابع را به صورت یک ۱-فرم بیان نمود.

تعريف ۲.۶.۲. فرض کنیم f تابعی حقیقی و مشتق‌پذیر روی \mathbb{R}^3 باشد. دیفرانسیل کل تابع f را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$df(V_p) = V_p[f]$$

به راحتی می‌توان نشان داد که df یک ۱-فرم روی \mathbb{R}^3 است. زیرا اولاً یک تابع با مقدار حقیقی روی بردارهای \mathbb{R}^3 است، ثانیاً با p به خاصیت مشتق سویی، در هر نقطه p خطی است. همچنین df را می‌توان توسط رابطه ۱۵.۲ بیان نمود. تمرین ۱.۶.۲ در صفحه ۱۱ را ببینید.

۲.۶.۲ دیفرانسیل کل و ۱-فرم دیفرانسیل روی رویه

با استفاده از تعریف مشتق سویی دیفرانسیل کل یک تابع روی رویه را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد.

$$df(V_p) = V_p[f] = \sum_{i=1}^3 v_{(p)}^i \frac{\partial f}{\partial u^i}.$$

اگر به جای تابع f از توابع مختصاتی u^1 و u^2 استفاده کنیم داریم

$$du^i(V_p) = V_p[u^i] = \sum_{j=1}^3 v_{(p)}^j \frac{\partial u^i}{\partial u^j} = \sum_{j=1}^3 v_{(p)}^j \delta_j^i = v_{(p)}^i.$$

اگر به جای بردار V_p از بردارهای پایه $\{\frac{\partial}{\partial u^1}, \frac{\partial}{\partial u^2}\}$ استفاده کنیم داریم

$$du^i\left(\frac{\partial}{\partial u^j}\right) = \delta_j^i. \quad (16.2)$$

دیفرانسیل کل تابع f روی رویه M را می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$df(V_p) = \frac{\partial f}{\partial u^1} du^1(V_p) + \frac{\partial f}{\partial u^2} du^2(V_p).$$

بدون در نظر گرفتن بردار مماس، دیفرانسیل کل یک تابع روی رویه را می‌توان مشابه \mathbb{R}^3 به صورت زیر تعریف کرد.

$$df = \frac{\partial f}{\partial u^1} du^1 + \frac{\partial f}{\partial u^2} du^2. \quad (17.2)$$

تعریف ۳.۶.۲. نگاشت حقیقی ϕ روی $T_p M$ را یک ۱-فرم دیفرانسیل روی رویه M گوییم، اگر روی بردارهای مماس $T_p M$, خطی باشد. یعنی، $\forall V, W \in T_p M$

$$\begin{aligned} \phi : T_p M &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \phi(aV + bW) &= a\phi(V) + b\phi(W), \quad a, b \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

خانواده ۱- فرمی‌های M با عمل جمع دو ۱-فرم که به صورت نقطه به نقطه تعریف می‌شود و ضرب اسکالر زیر تشکیل یک فضای برداری می‌دهد که آن را با $T_p^* M$ نمایش می‌دهیم و آن را **فضای دوگان مماس** می‌نامیم.

$$\begin{aligned} (\phi + \psi)(V_p) &= \phi(V_p) + \psi(V_p), & \forall V_p \in T_p M, \\ (f\phi)(V_p) &= f(p)\phi(V_p), & \forall f \in C^\infty(p). \end{aligned}$$

در اینجا f تابعی حقیقی روی M و ϕ و ψ دو ۱-فرم هستند. در این صورت $f\phi$ عبارت است از ۱-فرم $(f\phi)(V_p) = f(p)\phi(V_p)$ به ازای همه بردارهای مماس $V_p \in T_p M$.

از رابطه ۱۶.۲ همچنین نتیجه می‌شود که بردارهای پایه $\left\{ \frac{\partial}{\partial u^1}, \frac{\partial}{\partial u^2} \right\}$ در $T_p M$ دوگان ۱-فرم‌های $\{du^1, du^2\}$ بوده و در نتیجه پایه‌ای برای فضای دوگان مماس $T_p^* M$ هستند.

۳.۶.۲ تمرین‌های بخش

تمرین ۱.۶.۲. ثابت کنید دیفرانسیل کل تابع $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ در نقطه $p \in \mathbb{R}^3$ را می‌توان به صورت $V_p = \sum_{i=1}^3 v^i e_i$ نوشت، که در آن $df(V_p) = V_p[f]$ یک بردار

دلخواه \mathbb{R}^3 است.

راهنمایی: بنابر تعریف داریم $df(V_p) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f}{\partial x^i} v^i$ کافی است نشان دهیم، $v^i = dx^i$ این عبارت با جایگذاری x^i به جای f در رابطه بالا به دست می‌آید.

۷.۲ تابع مشتق‌پذیر بین دو رویه و نگاشت مشتق

در این بخش ابتدا تابع مشتق‌پذیر بین دو رویه را تعریف نموده سپس تعبیر جالب هندسی آن را بررسی می‌کنیم. به عبارت دیگر خواهیم دید که مشتق یک تابع بین دو رویه، بر روی بردارهای مماس اثر کرده و یک بردار مماس از رویه اول را به یک بردار مماس بر رویه دوم می‌برد.

تعریف ۷.۲. فرض کنیم M و N دو رویه دیفرانسیل‌پذیر از کلاس C^k باشند، نگاشت $f : M \rightarrow N$ را که به هر نقطه $p \in M$ ، نقطه $f(p) \in N$ را وابسته می‌کند، در یک همسایگی باز نقطه p مشتق‌پذیر از کلاس C^r ($r \leq k$) گوییم، اگر کارت‌های x و y به ترتیب شامل p و $f(p)$ موجود باشند به طوری که نگاشت $F = y^{-1} \circ f \circ x : D_x \rightarrow D_y$ از کلاس C^r باشد.

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ x \uparrow & & \uparrow y \\ D_x \subseteq \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{y^{-1} \circ f \circ x} & D_y \subseteq \mathbb{R}^3 \end{array}$$

تعریف فوق مشتق‌پذیری یک تابع در یک همسایگی باز را معرفی می‌نماید. اما اگر رویه بسته باشد مشتق‌پذیری در نقاط مرزی این رویه‌ها را به صورت زیر تعریف می‌کنیم. فرض کنیم M و N دو رویه بسته و $V \subset \mathbb{R}^3$ یک همسایگی باز شامل M باشد. می‌گوییم تحدید $f|_M : M \subset V \rightarrow \mathbb{R}^3$ مشتق‌پذیر است، اگر نگاشت $f : V \rightarrow \mathbb{R}^3$

۱.۷.۲ مشتق یا نگاشت مماس روی رویه‌ها

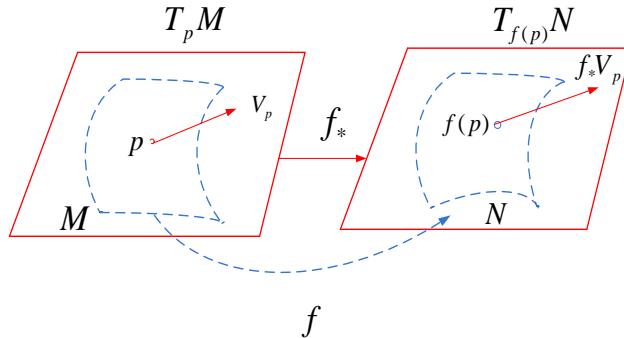
فرض کنیم M و N دو رویه منظم بوده و $f : M \rightarrow N$ تابعی دیفرانسیل پذیر باشد. اگر $\alpha(t)$ یک منحنی روی M بوده و بردار مماس بر آن در نقطه $\alpha(0) = p$ را با V_p نمایش دهیم، آنگاه بردار مماس بر منحنی $f(\alpha(t))$ در نقطه $f(p)$ را با f_*V_p نمایش داده آن را مشتق f یا نگاشت مماس آن می‌نامیم.

$$(f_*)_p : T_p M \longrightarrow T_{f(p)} N$$

$$V_p \longmapsto f_* V_p$$

لذا $f_* V_p = \frac{d}{dt} f(\alpha(t))|_{t=0}$ را با نمادگذاری قبل به صورت زیر می‌نویسیم

$$f_* V_p = \frac{d}{dt} f \circ x(u^1(t), u^2(t))|_{t=0}.$$



شکل ۲۱.۲: f_* بردار مماس $V_p \in T_p M$ را به بردار مماس $f_* V_p \in T_{f(p)} N$ می‌برد.

تعابیر هندسی f_*

اگر $\alpha(t)$ یک منحنی روی M بوده و بردار مماس بر آن در نقطه $\alpha(0) = p$ را با V_p نمایش دهیم، آنگاه از رابطه فوق نتیجه می‌شود که $f_* V_p$ بردار مماس بر منحنی $f \circ \alpha$ در نقطه $f(\alpha(0)) = f(p)$ است.

بر روی N است. لذا مشتق یک تابع بین دو رویه، یعنی f_* ، بر روی $x(u^1(t), u^2(t))$ بردارهای مماس اثر کرده و بردار مماس از رویه M را به یک بردار مماس بر رویه N می‌برد. شکل ۲۱.۲ را ببینید.

بر این اساس تعریف دیگری از نگاشت مماس بیان می‌گردد. تمرین ۲.۷.۲ در صفحه ۱۱۵ را ببینید. به راحتی می‌توان نشان داد که f_* یک نگاشت خطی است.

نمادگذاری: در شکل زیر مربوط به نگاشت f_* از نمادگذاری زیر استفاده می‌کنیم

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial u^j} \right)_p = \frac{\partial(y^{-1} \circ f \circ x)^i}{\partial u^j}(x^{-1}(p)).$$

که در آن منظور از $(y^{-1} \circ f \circ x)^i$ مؤلفه i ام نگاشت تغییر کارت است.

گزاره ۲.۷.۲. اگر $f : M \rightarrow N$ یک نگاشت C^1 بین دو رویه M و N با کارت‌های $y(v^1, v^2)$ و $x(u^1, u^2)$ باشد، آنگاه ماتریس f_* در پایه‌های کانونی $\left\{ \frac{\partial}{\partial v^j} \right\}$ و $\left\{ \frac{\partial}{\partial u^i} \right\}$ همان ماتریس ژاکوبین $y^{-1} \circ f \circ x$ است.

$$(f_*)_p = \left(\frac{\partial f^i}{\partial u^j} \right)_p,$$

که در آن f^i مؤلفه i ام نگاشت تغییر کارت است که در نمادگذاری بالا تعریف شده است.

اثبات. فرض کنیم V_p بردار مماس بر منحنی $\alpha(t)$ به معادله $x(u^1(t), u^2(t))$ در نقطه $p = x(\alpha(t))$ باشد. اگر $\gamma(t) = f(x(u^1(t), u^2(t)))$ تصویر این منحنی روی N بوده و f_*V_p تصویر V_p در نقطه $f(p)$ باشد، آنگاه بنا بر تعریف

$$f_*V_p = \frac{d}{dt} f \circ x(u^1(t), u^2(t))|_{t=..} = \left(\frac{d}{dt} f^1 \circ x|_{t=..}, \frac{d}{dt} f^2 \circ x|_{t=..} \right)$$

که در آن $x \circ f^1$ و $x \circ f^2$ مؤلفه‌های اول و دوم منحنی $f \circ x(u^1(t), u^2(t))$ فرض شده‌اند. بنا بر تعریف مشتق سویی

$$f_*V_p = (V_p[f^1], V_p[f^2]).$$

چون f_* خطی است، برای پیدا کردن ماتریس f_* ، آن را روی پایه استاندارد $T_p M$ یعنی

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial u^j} \right\}$$

$$f_* \left(\frac{\partial}{\partial u^j} \right) = \left(\frac{\partial f^1}{\partial u^j}, \frac{\partial f^2}{\partial u^j} \right).$$

$$\square \quad \cdot \left(\frac{\partial f^i}{\partial u^j} \right)_{2 \times 2} \text{ ماتریس } f_{*p} \text{ عبارت است از } p \in M \quad \text{lذا در هر نقطه}$$

۲.۷.۲ تمرین‌های بخش

تمرین ۱.۷.۲. ثابت کنید مشتق‌پذیری تابع $f : M \rightarrow N$ در نقطه $p \in M$ به انتخاب کارتها بستگی ندارد.

تمرین ۲.۷.۲. تعریف دیگری از نگاشت مماس یا نگاشت مشتق به صورت زیر داده می‌شود.
فرض کنیم M و N دو رویه دیفرانسیل‌پذیر و $f : M \rightarrow N$ یک نگاشت مشتق‌پذیر در $X_p = \alpha'(0)$ باشد. همچنین فرض کنیم که $\alpha(t)$ یک منحنی در روی M و $f(\alpha(t))$ بردار مماس بر آن در نقطه p باشد. نگاشت f_* یا Tf را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

اگر $X_p \in T_p M$ تعریف می‌کنیم

$$f_* : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N,$$

$$f_*(X_p) = \beta'(\cdot),$$

که در آن $\beta(t) = f(\alpha(t))$ تصویر منحنی $\alpha(t)$ توسط f و $\beta(0) = f(p)$ است. ثابت کنید که f_* یک نگاشت خطی است.

راهنمایی. نشان دهید $\forall X_p, Y_p \in T_p M$ داریم

$$f_*(X_p + Y_p) = f_*X_p + f_*Y_p,$$

$$f_*(cX_p) = cf_*X_p, \quad \forall c \in \mathbb{R}.$$

کافی است مشابه گزاره ۵.۴.۲ در صفحه ۹۷ جمع دو بردار مماس و ضرب اسکالر را به صورت زیر تعریف کنیم.

$$\begin{cases} X_p + Y_p = (\alpha'_1 + \beta'_1)x_u + (\alpha'_2 + \beta'_2)x_v, \\ \lambda X_p = (\lambda\alpha'_1)x_u + (\lambda\alpha'_2)x_v, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

دیدیم که این جمع خوش تعریف است یعنی یک منحنی مانند $\gamma(t) = x(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ گذرنده از نقطه $p \in U$ روی کارت (x, U) وجود دارد به طوری که بردار مماس بر آن برابر جمع این دو بردار مماس باشد.

$$\begin{cases} \gamma'_1(t) = \alpha'_1 + \beta'_1, \\ \gamma'_2(t) = \alpha'_2 + \beta'_2. \end{cases}$$

تمرین ۳.۷.۲. فرض کنیم M و N دو رویه دیفرانسیل پذیر و $f : M \rightarrow N$ یک نگاشت مشتقپذیر در $p \in M$ باشد. اگر $X_p \in T_p M$ آنگاه ثابت کنید

$$f_*[V_p] = V_p[f] = df(V_p).$$

راهنمایی: از روش تمرین ۱.۶.۲ در صفحه ۱۱۱ و تعریف ۱۱۱ استفاده $df(V_p) = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial f}{\partial x^i} v^i$ کنید.

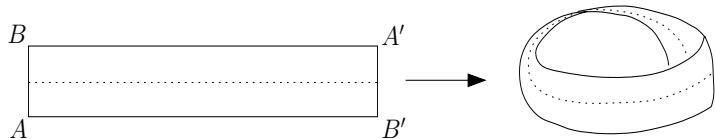
۸.۲ رویه جهت پذیر

میخواهیم برای تعیین جهت در روی یک رویه، بردار یکه قائمی در نقطه p انتخاب کرده و آن را جهت رویه^{۴۱} بنامیم. انتخاب جهت را میتوان در همسایگی به قدر کافی کوچک یک نقطه منظم به طور پیوسته ادامه داد. اما این کار همیشه برای کل رویه ممکن نیست. در بعضی از رویه‌ها مجاز به انتخاب بردار یکه قائم در هر نقطه هستیم مثل کره که در آن بردارهای قائم به یک کره اشاره به بیرون کرده دارند. چنین رویه‌هایی را جهت‌پذیر^{۴۲} می‌نامند. در مورد

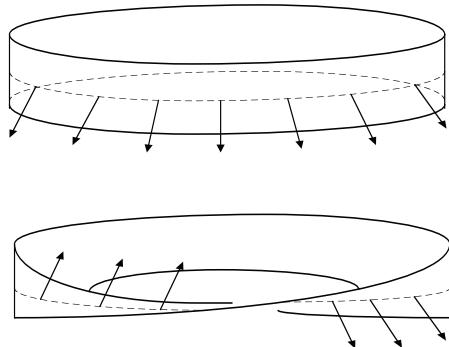
^{۴۱}orientation of a surface

^{۴۲}orientable

رویه‌های دیگر این کار عملی نیست، چنین رویه‌ای را **جهت‌ناپذیر**^{۴۳} می‌نامند. نمونه مشهور یک رویه جهت‌ناپذیر نوار موبیوس^{۴۴} می‌باشد. این رویه از نوار مستطیل شکل $'ABA'B'$ تشکیل می‌شود که دو سر آن را به هم چسبانده باشند، به طوری که نقاط A' و B' به ترتیب بر نقاط A و B منطبق شوند. شکل ۲۲.۲ را ببینید.



شکل ۲۲.۲: نوار موبیوس با چسباندن دو سر یک نوار با تغییر جهت پدید می‌آید.

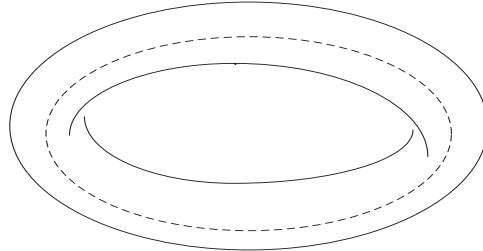


شکل ۲۳.۲: مسیر حرکت بردار عمود بر نوار در استوانه و چنبره.

اگر خط-چینی در وسط نوار رسم کنیم و با انتخاب یک بردار قائم خاص در طول خط-چین حرکت کنیم، مجدداً به همان نقطه می‌رسیم، ولی با جهت مخالف. شکل ۲۳.۲ را ببینید. این نشان می‌دهد که روی نوار موبیوس نمی‌توان هیچ جهت پیوسته‌ای بدست آورد. چنانچه دو سر استوانه بدون تغییر جهت به یکدیگر متصل شوند، رویه حاصل چنبره است

^{۴۳}non-orientable

^{۴۴}Mobius bond



شکل ۲۴.۲: از به هم چسباندن دو سر یک استوانه بدون تغییر جهت چنبره پدید می‌آید.

که جهت‌پذیر است. شکل ۲۴.۲ را ببینید.

بین فرمول پارامتری رویه و جهت آن نیز یک رابطه طبیعی وجود دارد. فرض کنیم معادله پارامتری منتظم یک رویه به صورت $x = x(u, v)$ باشد، دو بردار $x_u = \frac{\partial x}{\partial u}$ و $x_v = \frac{\partial x}{\partial v}$ بردارهای مماس و $x_u \times x_v$ بردار قائم بر رویه می‌باشد. اگر جهت رویه را انتخاب کنیم داریم

اگر مختصات (u, v) را با مختصات (u', v') تحت فرمول‌های زیر تعویض کنیم،

$$u = u(u', v') , \quad v = v(u', v')$$

بنابر قضیه قاعده زنجیره ای داریم:

$$x'_u \times x'_v = \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial u'} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial u'} \right) \times \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial v'} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial v'} \right).$$

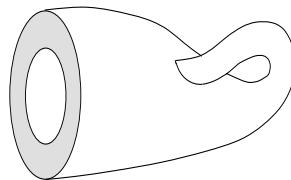
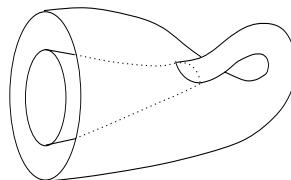
از آنجا با ضرب این دو عبارت و مختصراً اعمال جبری داریم

$$x'_u \times x'_v = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial u'} & \frac{\partial v}{\partial u'} \\ \frac{\partial u}{\partial v'} & \frac{\partial v}{\partial v'} \end{pmatrix} x_u \times x_v.$$

برای بردار یکه قائم جدید خواهیم داشت: $m' = \varepsilon m$ که در آن

$$\varepsilon = \operatorname{sgn} \det \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial u'} & \frac{\partial v}{\partial u'} \\ \frac{\partial u}{\partial v'} & \frac{\partial v}{\partial v'} \end{pmatrix}.$$

بنابراین در پارامتر جدید اگر ژاکوبی تغییر مختصات ثابت باشد، جهت تغییر نمی‌کند و اگر ژاکوبی منفی باشد، جهت معکوس می‌شود. رویه S را جهت‌پذیر گوییم، هرگاه بتوان یک بردار یکه قائم در تمام نقاط آن تعریف نمود. به عبارت دیگر می‌توانیم تعریف زیر را داشته باشیم:



شکل ۲۵.۲: از به هم چسبانیدن دو سر یک استوانه با تغییر جهت بطری کلاین پدید می‌آید.

تعريف ۱۰.۸.۲. رویه S را جهت‌پذیر^{۴۵} گوییم، هرگاه یک نمایش پارامتری از آن موجود باشد که نگاشت‌های تغییر مختصات آن همه جا دارای ژاکوبین مشتث باشد.

از این تعریف نتیجه می‌شود که کلیه رویه‌هایی که توسط یک کارت سرتاسری معرفی می‌شوند - یعنی حوزه مقادیر این کارت کل رویه را می‌پوشاند - جهت‌پذیرند، زیرا نگاشت تغییر مختصات همانی بوده و ژاکوبین آن همواره مشتث است. بطری کلاین^{۴۶} نیز نمونه دیگری از یک رویه جهت‌ناپذیر می‌باشد که مستطیل فوق با چسباندن AB' روی BA' با حفظ جهت تبدیل به یک استوانه شده، سپس با چسبانیدن دو سر استوانه و تغییر جهت پدید می‌آید. شکل ۲۵.۲ را ببینید. بطری کلاین جهت پذیر نیست.

^{۴۵}orientable

^{۴۶}Klein

۱.۸.۲ تمرین‌های بخش

تمرین ۱.۸.۲. نوار موبیوس یک رویه خط دار است که منحنی پایه آن دایره $(\cos u, \sin u, \cdot)$ است. ثابت می‌شود که بردارهای رویه خط دار بردار $(\sin \frac{u}{2} \cos u, \sin \frac{u}{2} \sin u, \cos \frac{u}{2})$ است. لذا معادله پارامتری نوار موبیوس توسط کارت

$$x(u, v) = (\cos u, \sin u, \cdot) + v(\sin \frac{u}{2} \cos u, \sin \frac{u}{2} \sin u, \cos \frac{u}{2}),$$

داده می‌شود. این رابطه را به صورت زیر می‌نویسیم

$$x(u, v) = (\cos u(1 + v \sin \frac{u}{2}), \sin u(1 + v \sin \frac{u}{2}), v \cos \frac{u}{2}),$$

که در آن دامنه کارت x به صورت زیر تعریف شده است.

$$D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid -\pi < u < \pi, -1/2 < v < 1/2\}.$$

الف. آیا نوار موبیوس یک رویه منتظم است.

ب. بردار یکه عمود U را در نقطه (u, \cdot) به دست آورید.

ج. نشان دهید که حد کارت $(\cdot, u)x$ در نوار موبیوس وقتی که $\pi \rightarrow u$ از چپ و $-\pi \rightarrow u$ از راست با یکدیگر برابر است. یعنی

$$\lim_{u \rightarrow -\pi^+} x(u, \cdot) = \lim_{u \rightarrow +\pi^-} x(u, \cdot).$$

د. نشان دهید حد بردار عمود $(u, \cdot)U$ وقتی که $\pi \rightarrow u$ از چپ و از راست با یکدیگر متفاوت است. یعنی

$$\lim_{u \rightarrow -\pi} U(u, \cdot) = - \lim_{u \rightarrow \pi} U(u, \cdot),$$

و از آن نتیجه بگیرید که نوار موبیوس جهت پذیر نیست.

۳

هندسه دیفرانسیل رویه ها

مقدمه و تاریخچه

هندسه علمی است که به مطالعه مجموعه هایی می پردازد که اعضای آن را اشیایی مانند خط، صفحه، رویه و غیره و توابعی که روی آنها تعریف می شوند تشکیل می دهد. این مجموعه را فضای هندسی و اعضای این فضا را اشیا هندسی و رابطه بین اشیا هندسی را هندسه حاکم بر آن فضا می نامند. منظور از کلمه دیفرانسیل در اینجا امکان استفاده از مشتق و خواص آن در این هندسه است.

هندسه تنها به روابط بین خط و صفحه اطلاق نمی‌گردد بلکه دامنه مطالعه این علم آنقدر گستره است که از هندسه حاکم بر حرکت ذرات در اتمها تا هندسه حاکم بر حرکت کرات در کهکشانها را در بر می‌گیرد. به طور کلی هر مسئله فیزیکی یا مهندسی را می‌توان به صورت یک فضای هندسی در نظر گرفته و روابط بین اشیای آن مسئله را هندسه حاکم بر آن فضای مهندسی نامید. به عنوان مثال برای مطالعه هندسه حاکم بر سینماتیک تعقیب یک شی مقاله [۲۰]، برای مشاهده هندسه حرکت هوایپیما در گردباد مقاله [۵] و برای هندسه حرکت ربات‌های دیفرانسیلی مقاله [۴] را ببینید.

اقلیدس در چهار قرن پیش از میلاد اصول موضوعه^۱ هندسه‌ای را بنا نهاد که با تعریف خط راست به عنوان کوتاهترین فاصله بین دو نقطه آغاز می‌شود. این هندسه بعدها به نام هندسه اقلیدسی مورد مطالعه قرار گرفت. این کار در قرن نوزدهم توسط ریمان^۲ برای رویه‌ها نیز تعمیم داده شد و بعدها به نام هندسه ریمانی روی منیفلدها شهرت پیدا کرد. در هندسه ریمانی ژئودزیک‌ها نقش خطوط راست در فضای اقلیدسی را بازی می‌کنند. در اوایل قرن بیستم فینسلر^۳ برای محاسبه طول یک منحنی عوامل خارجی را نیز دخالت داد. به عبارت ساده او زمان بالا رفتن از یک کوه را برای یک فرد پیاده با زمان پایین آمدن از آن کوه را متفاوت می‌دانست و بر این اساس یک فاصله جدید تعریف نمود که به زمان بالا و پایین آمدن بستگی داشت. این هندسه که در عمل کاربرد زیادتری نسبت به متريک ریمانی داشت، بعدها به هندسه فینسلری شهرت یافت.

در بخش اول این فصل با تعریف اولین فرم اساسی می‌پردازیم. اولین فرم اساسی که

^۱ Euclid's axioms

^۲ چرچ فردیج ریمان Georg Friedrich Bernhard Riemann. ریاضیدان جوان آلمانی است که در مدت کوتاه عمر خود اثرات بسیار جالبی از خود به جای گذاشت. وی در سالهای ۱۸۶۶ الی ۱۸۶۷ زیسته است

^۳ پل فینسلر Paul Finsler ریاضیدان جوان آلمانی است که در سال ۱۹۱۷ توان دکتری خود را در مورد تعمیم متريک ریمانی، زیر نظر کارل ائدوری Cartheodorie به پایان رساند. این کار وی بعد از موجب تحولات بزرگی در هندسه گردید.

توسط کارت های رویه تعریف می گردد حالت خاصی از متريک هایی است که ريمان تعریف نمود. از اولین فرم اساسی برای تعریف ضرب داخلی در روی رویه و در نتیجه مفاهیمی مانند طول، مساحت، زاویه، انحنا، ژئودزی، دائیره و بسیاری از مفاهیم دیگر در هندسه و آنالیز استفاده می شود.

در بخش دوم می خواهیم با استفاده از اولین فرم اساسی فرمول محاسبه طول قوس یک منحنی در روی رویه را به دست آوریم. این فرمول به همین شکل برای محاسبه طول قوس یک منحنی در فضاهای با ابعاد بالاتر نیز برقرار است. عکس این عمل نیز قابل انجام است. به عبارت دیگر با استفاده از تعریف طول قوس یک منحنی روی رویه می توان اولین فرم اساسی یا متريک تعریف شده در روی آن رویه را به دست آورد. مطالعه خواص منحنی های یک رویه، خصوصاً طول قوس آن می تواند در تشخیص ماهیت آن رویه و هندسه - روابط بین اشیاء هندسی - تعریف شده روی آن رویه نقش اساسی داشته باشد. از آن جمله است متريک اقلیدسی^۴، ريمانی^۵ و یک تعیین از متراهای ريمانی که به متراهای فینسلری^۶ مشهور است. روش به دست آوردن متريک از روی طول قوس را روش اوکوبو^۷ می نامند. برای اطلاع بیشتر از این روش، خواننده علاقه مند می تواند به فصل تعیین متراهای ريمانی از کتاب [۲] مراجعه کند.

در بخش سوم کمیت دیگری را به نام دومین فرم اساسی معرفی می کنیم که به کمک آن می توان انحنای منحنی را مشخص کرد.

در بخش چهارم خواهیم دید که یکی از کمیت های مهم دیگر که خصوصیات یک رویه را مشخص می کند، انحنای آن رویه است. انحنای رویه مشخص کننده میزان انحراف آن رویه از صفحه است. انحنای های مختلفی روی رویه تعریف می شود مانند انحنای گاوس،

^۴Euclidean metric

^۵Riemannian metric

^۶Finslerian metric

^۷Okubo technic

انحنای اصلی، انحنای میانگین، انحنای ریمان، انحنای ریچی، و انحنای اسکالر. جالب ترین آنها انحنای است که اول بار توسط گاووس^۸ معرفی گردید. بارز ترین خاصیت این انحنای خاصیت پایا بودن آن تحت تغییرات اولین فرم اساسی یا متريک رویه است که منجر به ارائه یک رده بندی از رویه ها به صورت زیر می گردد.

اگر انحنای گاووسی یک رویه را با κ نمایش دهیم، آنگاه با توجه به علامت آن می توان آن رویه را به یکی از سه شکل زیر رده بندی نمود:

- اگر $\kappa > 0$ ، آنگاه رویه کروی شکل است.

- اگر $\kappa = 0$ ، آنگاه رویه مسطح است.

- اگر $\kappa < 0$ ، آنگاه رویه هذلولی است. جالب است که بدانیم انحنای گاووس با گذشت بیش از یک قرن هنوز نیز از مسائلی است که در مرزهای دانش هندسه مورد مطالعه قرار می گیرد. به عنوان مثال به فصل دوازده از کتاب [۱۱] هندسه دان بزرگ قرن بیستم اس. اس. چرن^۹ و دیگران مراجعه فرمایید. برای اطلاعات بیشتر در مورد یک مسئله در مرزهای دانش در مورد یک فضای با انحنای ثابت مثبت و اثبات کروی شکل بودن آن به مقاله [۱۲] نگارنده مراجعه شود.

در بخش پنجم به فرمول های گاووس، وینگارت و علایم کریستوفل پرداخته خواهد شد. در بخش های ششم و هفتم به وجود و یکتایی ژئودزیک ها که تعمیم یکی از اصول اقليدس

^۸ کارل فردریچ گاووس Carl Friedrich Gauss منج، ریاضیدان و فیزیکدان آلمانی است که در سالهای ۱۷۷۷ الی ۱۸۵۵ می زیسته است. وی آثار بسیار زیادی در معادلات، جبر، احتمال و هندسه از خود به جای گذاشت که موجب تحولات بزرگی در ریاضی گردید.

S.S.Chern^۹ ریاضیدان بزرگ چینی الاصل متولد ۱۹۱۹ که تحصیلات خود را زیر نظر کارتان در فرانسه به اتمام رساند. وی که از هم دوره های پروفسور هشتگردی و از دوستان وی بوده است بیشتر عمر خود را در بزرگترین مراکز علمی آمریکا مشغول بوده و در اواخر زندگی به دانشگاه Nankai در چین مراجعت نموده تا پایان زندگی خود در سال ۲۰۰۴ به مطالعه و تربیت ریاضیدانان بزرگ در آن دانشگاه ادامه داد. رابرт برایان R.Brayant رئیس دوره ای انجمن ریاضی آمریکا، دیوید باو D.Bao و ژونگمین شن Z.Shen و بسیاری دیگر از شاگردان وی هستند.

برای رویه ها است می پردازیم.

در بقیه بخش های این فصل به مطالعه نگاشت های مهم روی رویه ها می پردازیم.

۱.۳ اولین فرم اساسی یا متريک رویه

فرض کنیم M یک رویه دیفرانسیل پذیر و $p \in M$ باشد. صفحه مماس بر رویه M در نقطه p را با $T_p M$ نمایش دادیم. در اینجا می خواهیم یک ضرب داخلی روی فضای برداری $T_p M$ تعریف کنیم. به این منظور کارت

$$\begin{aligned} x : D &\longrightarrow U = x(D) \subset \mathbb{R}^3, \\ x : (u^1, u^2) &\mapsto (x^1(u^1, u^2), x^2(u^1, u^2), x^3(u^1, u^2)). \end{aligned}$$

را در نظر گرفته مشتقات آن نسبت به u^1 و u^2 را به ترتیب با نماد زیر نمایش می دهیم.

$$x_1 := \frac{\partial x}{\partial u^1} = \left(\frac{\partial x^1}{\partial u^1}, \frac{\partial x^2}{\partial u^1}, \frac{\partial x^3}{\partial u^1} \right), \quad x_2 := \frac{\partial x}{\partial u^2} = \left(\frac{\partial x^1}{\partial u^2}, \frac{\partial x^2}{\partial u^2}, \frac{\partial x^3}{\partial u^2} \right).$$

نمایش می دهیم. در گزاره ۵.۴.۲ در صفحه ۹۷ دیدیم که $T_p M$ یک فضای برداری ۲-بعدی است که پایه های آن عبارتند از $\{x_1, x_2\}$. فرض کنیم $X_p, Y_p \in T_p M$ دو بردار مماس باشند. در کارت (u^1, u^2) این دو بردار به صورت $X_p = \sum_{i=1}^2 X^i x_i$ و $Y_p = \sum_{j=1}^2 Y^j x_j$ نوشته می شوند. در اینجا X^i, Y^j توابعی حقیقی روی رویه M هستند که آنها را مولفه های بردار مماس می نامیم. همانطوری که انتظار می رفت بردارهای مماس بر رویه M دارای ۲ مولفه هستند، اگرچه در فضای اقلیدسی ۳-بعدی قرار دارند. ضرب داخلی این دو بردار را به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$\begin{aligned} \langle X_p, Y_p \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^2 X^i x_i, \sum_{j=1}^2 Y^j x_j \right\rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^2 X^i Y^j \langle x_i, x_j \rangle = \sum_{i,j=1}^2 X^i Y^j g_{ij}, \end{aligned} \tag{1.۳}$$

که در آن ضرایب $g_{ij} = \langle x_i, x_j \rangle$ توابعی حقیقی روی رویه M هستند که با توجه به کارت x و نمایش پارامتری آن یعنی $x(u^1, u^2)$ در همسایگی U از هر نقطه (u^1, u^2) عبارت دیگر از رویه تعریف می‌شوند. به عبارت دیگر

$$g_{ij}(u^1, u^2) = \langle x_i(u^1, u^2), x_j(u^1, u^2) \rangle. \quad (2.3)$$

به راحتی می‌توان نشان داد که این ضرب در شرایط تعریف ضرب داخلی صدق می‌کند.

تمرین ۳.۱.۳ در صفحه ۱۳۱ را ببینید.

تعریف ۳.۱.۳. فرض کنیم M یک رویه منتظم از کلاس C^3 ، (x, U) کارتی با نمایش پارامتری (u^1, u^2) و $T_p M$ صفحه مماس بر رویه M در نقطه p باشد. اولین فرم اساسی ^{۱۰} در نقطه p را با I نمایش داده آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\begin{aligned} I : T_p M \times T_p M &\longrightarrow \mathbb{R}, \\ (X_p, Y_p) &\mapsto I(X_p, Y_p), \quad \forall X_p, Y_p \in T_p M, \end{aligned}$$

که در آن $\sum_{i,j=1}^2 g_{ij} X^i Y^j$ ضرایب g_{ij} را ضرایب اولین فرم اساسی می‌نامند.

همان طوری که مشاهده می‌شود اولین فرم اساسی یک رویه با توجه به ضرب داخلی القا شده از \mathbb{R}^3 روی آن رویه تعریف می‌شود. در حالت کلی ممکن است این ضرب داخلی القا شده از \mathbb{R}^3 نباشد. در این صورت به آن متريک ريماني ^{۱۱} گفته می‌شود. ريمان اولين کسی بود که اين ضرب داخلی را روی رویه ها تعريف داد، از اين رو هر رویه دیفرانسیل پذير همراه با اولين فرم اساسی را رویه ريماني ^{۱۲}-بعدی نيز می‌گويند.

^{۱۰} first fundamental form

^{۱۱} Riemannian metric

^{۱۲} Riemannian surface

ضرایب g_{ij} روی یک رویه، تشکیل یک ماتریس 2×2 می‌دهد.

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}.$$

دترمینان ماتریس ضرایب را با $\mathcal{G} = \det |g_{ij}|$ نمایش می‌دهیم و آن را مبین اولین فرم اساسی می‌نامیم.

با استفاده از ضرب داخلی یا اولین فرم اساسی یک رویه می‌توان طول بردار مماس $X_p \in T_p M$ را روی آن رویه به صورت زیر تعریف نمود.

$$|X_p| = \sqrt{\langle X_p, X_p \rangle} = \sqrt{\langle x_i, x_j \rangle X^i X^j} = \sqrt{g_{ij} X^i X^j}, \quad (3.2)$$

مثال ۲۰.۱.۳. اولین فرم اساسی صفحه در دستگاه اقلیدسی را می‌توان به صورت زیر به دست آورد. هر نقطه در دستگاه اقلیدسی را می‌توان توسط کارت \vec{i}, \vec{j} به صورت $x(u^1, u^2) = u^1 \vec{i} + u^2 \vec{j}$ پارامتری نمایش داد.

$$g_{ij} = \langle x_i, x_j \rangle, \quad g_{11} = \langle (1, 0), (1, 0) \rangle = 1, \quad g_{12} = g_{21} = 0, \quad g_{22} = 1.$$

لذا در دستگاه مختصات اقلیدسی ضرایب اولین فرم اساسی صفحه عبارتند از $g_{ij} = \delta_{ij}$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

که در آن δ_{ij} دلتای کرونکر مولفه‌های ماتریس واحد است. این ضرایب به متريک اقلیدسی صفحه مشهور هستند.

مثال ۳۰.۱.۳. فرض کنیم معادله دکارتی رویه M توسط نگاشت حقیقی -2 -متغیره $z = f(x, y)$ داده شود. با استفاده از آن می‌توان کارت x را روی M توسط نمایش پارامتری $x(u^1, u^2) = (u^1, u^2, f(u^1, u^2))$ تعریف کرد. از آنجا ضرایب اولین فرم اساسی این رویه به دست می‌آیند. بنا بر تعریف، با مشتقگیری جزئی نسبت به دو متغیر $f_1 = \partial f / \partial u^1$ و $f_2 = \partial f / \partial u^2$ داریم $x_1 = (0, 1, f_2)$ ، $x_2 = (1, 0, f_1)$ که در آن u^1 و u^2 داریم.

$f_2 = \partial f / \partial u^2$. لذا بنابر تعریف ضرایب اولین فرم اساسی این رویه‌ها عبارتند از

$$g_{ij} = \langle x_i, x_j \rangle, g_{11} = 1 + f_1^2, g_{12} = g_{21} = f_1 f_2, g_{22} = 1 + f_2^2.$$

لم ۴.۱.۳. اگر M یک رویه منتظم از کلاس C^k باشد، آنگاه دترمینان ماتریس ضرایب اولین فرم اساسی آن مثبت است.

اثبات. فرض کنیم M یک رویه منتظم از کلاس C^k و (x, u) یک کارت در همسایگی نقطه $p \in M$ با نمایش پارامتری $x = x(u^1, u^2)$ باشد. چون رویه منتظم است دو بردار $x_1 = \frac{\partial x}{\partial u^1}, x_2 = \frac{\partial x}{\partial u^2} \in T_p M$ و ضرب داخلی آنها و در نتیجه g_{ij} ها موجودند و همینطور حاصلضرب خارجی این دو بردار موجود و مخالف صفر $\neq 0$ است. بنابر رابطه بین ضرب داخلی و خارجی چند بردار از درس ریاضی عمومی داریم

$$\begin{aligned} \langle x_1 \times x_2, x_1 \times x_2 \rangle &= \det \begin{pmatrix} \langle x_1, x_1 \rangle & \langle x_1, x_2 \rangle \\ \langle x_2, x_1 \rangle & \langle x_2, x_2 \rangle \end{pmatrix}, \\ |x_1 \times x_2|^2 &= \det \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \mathcal{G}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

لذا \mathcal{G} برابر $0 \neq |x_1 \times x_2|^2$ بوده و مقدار آن مثبت است. این موضوع اثبات را کامل می‌کند. \square

کلاس توابع g_{ij} در فرم اساسی از کلاس رویه یکی کمتر بوده، با توجه به خواص ضرب داخلی نسبت به اندیس‌ها متقارن است، یعنی $g_{ij} = g_{ji}$. از لم فوق نتیجه می‌شود که این ماتریس معکوس پذیر است اگر ماتریس معکوس آن را با g^{ij} نمایش دهیم، آنگاه ماتریس معکوس نیز متقارن است. یعنی $g^{ij} = g^{ji}$ که در آن

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{pmatrix}.$$

بنابر تعریف معکوس یک ماتریس، رابطه بین درایه های ماتریس g_{ij} و معکوس آن را می توان به صورت زیر نوشت، که در آن $\delta_j^i = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$ صورت دیگری از دلتای کرونکر یا مولفه های ماتریس واحد است. (چرا؟)

$$\sum_{k=1,2} g_{ik} g^{kj} = \delta_i^j, \quad (5.3)$$

ضرایب ماتریس معکوس g^{ij} را می توان به صورت زیر محاسبه کرد.

$$g^{11} = \frac{g_{22}}{\mathcal{G}}, \quad g^{12} = g^{21} = -\frac{g_{12}}{\mathcal{G}}, \quad g^{22} = \frac{g_{11}}{\mathcal{G}}.$$

با توجه به لم ۴.۱.۳ اگر ضرب داخلی دو بردار در \mathbb{R}^3 را با ”•“ نمایش دهیم آنگاه می توان اولین فرم اساسی را به عنوان تحدید ضرب ”•“ به بردارهای مماس بر رویه معرفی نموده آن را با $<, >$ نمایش داد.

نمادگذاری ۵.۱.۳. در ادامه کتاب همه جا ضرب داخلی بردارهای $T_p M$ را با $<, >$ و ضرب داخلی بردارهای \mathbb{R}^3 را با ”•“ نمایش می دهیم.

در کتب پیشرفته هندسه برای جلوگیری از اشتباه در استفاده از ضرب داخلی وابسته به متريک g_{ij} از نماد $< X, Y > := g(X, Y)$ استفاده می نمایند.

قرار داد اينشتین^{۱۳}: در اينجا برای سادگی يك عبارت که از مجموع چند عبارت تشکيل شده است، قراردادي به نام قرار داد اينشتین معرفی می کنيم. اگریک اندیس در يك عبارت رياضی يك بار به صورت زيرنويس و يك بار به صورت بالانويس موجود باشد، آنگاه آن اندیس را اندیس جمع بندی ناميده و از نوشتن علامت زیگما خودداری می کنيم. به عنوان مثال، رابطه ۵.۳ را به صورت $\delta_i^j = g_{ik} g^{kj}$ نمایش می دهیم.

مثال ۶.۱.۳. فرض کنیم $u \cdot v = \sum_{i=1}^n u_i v^i = u_1 v^1 + \dots + u_n v^n$ در اين صورت برای اختصار اين عبارت را به صورت $u_i v^i$ نمایش می دهیم.

^{۱۳}Einstein convention

مثال ۷.۱.۳. بنابر تعریف دلتای کرونکر، داریم

$$\delta_i^i = \sum_{i=1,\dots,n} \delta_i^i = \delta_1^1 + \dots + \delta_n^n = n.$$

در ادامه کتاب هرگجا احتمال اشتباه نزد از قرارداد جمعبندی اینشتین استفاده می‌کنیم
بدون آنکه ذکری از آن به میان آوریم

۱.۱.۳ تمرین‌های بخش

تمرین ۱.۱.۳. الف. نشان دهید ضرایب ماتریس اولین فرم اساسی یا متریک صفحه در مختصات قطبی (r, θ) به شکل زیر نوشته می‌شود.

$$g_{11} = 1, \quad g_{12} = g_{21} = 0, \quad g_{22} = r^2.$$

ب. ضرایب ماتریس معکوس اولین فرم اساسی را به دست آورید.

تمرین ۲.۱.۳. تصویر استریوگرافیک را می‌توان به صورت زیر روی کره S^2 تعریف کرد.
شکل ۱۰.۳ در صفحه ۲۱۲ را ببینید.

$$x : D \longrightarrow U = x(D) \in S^2,$$

$$x : (u, v) \mapsto (x^1(u, v), x^2(u, v), x^3(u, v)),$$

$$x^1 = \frac{4a^2 u}{4a^2 + u^2 + v^2}, \quad x^2 = \frac{4a^2 v}{4a^2 + u^2 + v^2}, \quad x^3 = \frac{a(u^2 + v^2 - 4a^2)}{4a^2 + u^2 + v^2}.$$

الف. نشان دهید که کره S^2 را می‌توان توسط این کارت پوشانید. یعنی تحقیق کنید که برد این کارت تمام نقاط کره $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ به جز نقطه $(a, 0, 0)$ را می‌پوشاند و x منتظم است. همچنین تحقیق کنید چند کارت از این نوع برای پوشاندن کل کره لازم است.

ب. نشان دهید که ضرایب اولین فرم اساسی کره در این کارت عبارت است از

$$g_{11} = g_{22} = \frac{16a^4}{(4a^2 + u^2 + v^2)^2}, \quad g_{12} = 0. \quad (6.3)$$

تمرین ۳.۱.۳. نگاشت ۲-خطی $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ را یک ضرب داخلی روی فضای برداری V گوییم اگر در شرایط زیر صدق کند.

$$g : V \times V \rightarrow \mathbb{R},$$

$$(X, Y) \mapsto g(X, Y), \quad \forall X, Y \in V,$$

- نگاشت g متقارن باشد، یعنی

$$g(X, Y) = g(Y, X), \quad \forall X, Y \in V,$$

- نگاشت g مثبت باشد، یعنی به ازای هر $\cdot \in V$ داشته باشیم:

$$g(X, X) > \cdot.$$

- دترمینان ماتریس وابسته به نگاشت g ناتبھگون^{۱۴} باشد. یعنی $\det(g_{ij}) \neq 0$ باشد. این دو شرط آخر را شرط مثبت معین^{۱۵} نیز می‌گویند.

نشان دهید که ضرب ۲.۳ تعریف شده توسط اولین فرم اساسی روی رویه M یک تابع ۲-خطی، متقارن و مثبت معین است. لذا یک ضرب داخلی روی فضای مماس $T_p M$ تعریف می‌کند.

۲.۱.۳ طول قوس یک منحنی روی یک رویه

در بخش منحنی‌ها دیدیم که چگونه می‌توان طول یک منحنی در \mathbb{R}^3 را بدون توجه با اینکه در کجا قرار دارد محاسبه کرد. در این بخش می‌خواهیم با استفاده از اولین فرم اساسی فرمول محاسبه طول قوس یک منحنی در روی رویه را به دست آوریم.

^{۱۴}non-degenerate

^{۱۵}definite positive

رویهٔ منتظم M و نقطه $p \in M$ را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم کارت (x, U) با نمایش پارامتری $U \ni x(u^1, u^2) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ شامل نقطه p باشد. بنا بر تعریف دیفرانسیل کل توابع ۲-متغیره داریم

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u^1} du^1 + \frac{\partial x}{\partial u^2} du^2. \quad (7.3)$$

می‌دانیم مجموعه بردارهای $\{ \frac{\partial x}{\partial u^i} \}_{(p)}$ ، $i = 1, 2$ پایه‌ای برای فضای مماس $T_p M$ است. بنابراین می‌توان گفت که dx در هر نقطه موازی صفحه مماس است. لذا می‌توانیم طول آن را با استفاده از ضرب داخلی مربوط به اولین فرم اساسی رویه M و رابطه ۷.۳ محاسبه کنیم.

$$\begin{aligned} |dx| &= \sqrt{<(x_1 du^1 + x_2 du^2), (x_1 du^1 + x_2 du^2)>} \\ &= (\langle x_1, x_1 \rangle (du^1)^2 + 2 \langle x_1, x_2 \rangle du^1 du^2 + \langle x_2, x_2 \rangle (du^2)^2)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

با استفاده از رابطه ۷.۳ طول dx به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$|dx| = \sqrt{g_{11}(du^1)^2 + 2g_{12}du^1 du^2 + g_{22}(du^2)^2}. \quad (8.3)$$

روی رویه M با کارت (x, U) و با نمایش پارامتری $x(u^1, u^2)$ یک منحنی پارامتری به معادله $x(t) = x(u^1(t), u^2(t))$ در نظر می‌گیریم. می‌توانیم این منحنی را به شکل یک منحنی پارامتری در \mathbb{R}^3 فرض کنیم. $x(t) = (x^1(t), x^2(t), x^3(t))$ که در آن توابع $x^1(t)$ ، $x^2(t)$ و $x^3(t)$ توابعی حقیقی بر حسب t هستند که در معادله پارامتری رویه صدق می‌کنند. بنا بر آنچه در فصل منحنی‌ها دیده‌ایم، طول منحنی $x(t)$ در فضای اقلیدسی \mathbb{R}^3 در فاصله $a \leq t \leq b$ از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$s = \int_a^b |x'(t)| dt, \quad (9.3)$$

که در آن $|x'(t)|$ با توجه به ضرب داخلی \mathbb{R}^3 محاسبه گردیده است. یعنی $= \sqrt{x'(t) \cdot x'(t)}$

لم ۴.۱.۳. فرض کنیم M یک رویه منتظم با کارت (x, U) و بانمایش پارامتری (u^1, u^2) باشد. اگر $x(t) = x(u^1(t), u^2(t))$ یک منحنی روی M باشد، آنگاه طول آن در فاصله از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$s = \int_a^b \sqrt{g_{ij} \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt}} dt = \int_a^b \sqrt{g_{ij} du^i du^j}$$

که در آن g_{ij} ها $i, j = 1, 2$ مولفه های ماتریس ضرایب متریک هستند.

اثبات. فرض کنیم M یک رویه منتظم $x : (u^1, u^2) \in D \subset \mathbb{R}^2$ و $x(t) = x(u^1(t), u^2(t))$ روی رویه M را به عنوان یک منحنی در \mathbb{R}^3 در نظر بگیریم، طول آن از رابطه (۹.۳) به دست می‌آید. در حقیقت تابع برداری یک متغیره $x(t)$ و دیفرانسیل آن در \mathbb{R}^3 به صورت زیر نوشته می‌شوند.

$$x(t) = (x^1)\vec{i} + (x^2)\vec{j} + (x^3)\vec{k}, \quad dx = d(x^1)\vec{i} + d(x^2)\vec{j} + d(x^3)\vec{k}.$$

بنابر قاعده زنجیره ای برای یک تابع حقیقی ۱-متغیره، داریم $dx^i = \frac{dx^i}{dt} dt$ ، از آنجا اندازه اقلیدسی dx برابر است با

$$\begin{aligned} |dx| &= \sqrt{d(x^1)^2 + d(x^2)^2 + d(x^3)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{dx^1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx^2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx^3}{dt}\right)^2} dt = \left|\frac{dx}{dt}\right| dt = ds, \end{aligned} \quad (10.3)$$

که در آن تساوی آخر از رابطه (۹.۳) به دست می‌آید. از طرف دیگر $x(u^1, u^2)$ تابعی برداری است از دو متغیر u^1 و u^2 و بنا بر تعریف دیفرانسیل کل $dx = x_1 du^1 + x_2 du^2$ که یک بردار از فضای مماس است. لذا اندازه این بردار یعنی $|dx| = \sqrt{< dx, dx >}$ را می‌توان به صورت زیر با استفاده از اولین فرم اساسی به دست آورد.

$$\begin{aligned} |dx| &= (< (x_1 du^1 + x_2 du^2), (x_1 du^1 + x_2 du^2) >)^{\frac{1}{2}}, \\ &= ((x_1)^2 (du^1)^2 + 2x_1 x_2 du^1 du^2 + (x_2)^2 (du^2)^2)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (11.3)$$

با استفاده از قرارداد جمع‌بندی و تعریف ضرب داخلی

$$|dx| = \left(\langle x_i, x_j \rangle du^i du^j \right)^{\frac{1}{2}}, \quad i, j = 1, 2.$$

با استفاده از نمادگذاری $\langle x_i, x_j \rangle = g_{ij}$ و روابط **۹.۳** و **۱۰.۳** طول منحنی $x(t)$ از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$s = \int_a^b \sqrt{g_{ij} du^i du^j}, \quad i, j = 1, 2.$$

□

این موضوع اثبات لم را کامل می‌کند.

عبارت زیر انتگرال نقش اساسی در تعیین خواص رویه دارد. این عبارت را می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$ds^2 = g_{ij} du^i du^j.$$

نظر به این که اساس تعریف یک هندسه با تعریف فاصله و طول شروع می‌شود، عبارت فوق را نیز اولین فرم اساسی یا فرم متریک رویه می‌نامند. اولین فرم اساسی را به صورت زیر نیز نمایش می‌دهند.

$$I(du^1, du^2) = E(du^1)^2 + 2Fdu^1 du^2 + G(du^2)^2$$

$$E := g_{11} = \langle x_1, x_1 \rangle, F := g_{12} = \langle x_1, x_2 \rangle, G := g_{22} = \langle x_2, x_2 \rangle.$$

اگر du^1 و du^2 با هم صفر نشوند و نقطه (u^1, u^2) ، نقطه منظم رویه باشد، آنگاه ds^2 دارای مقدار مثبت است، زیرا با توجه به رابطه **۱۱.۳** مقدار آن برابر است با مربع طول بردار ناصفر $\sum_{i=1}^2 x_i du^i$ ، در نتیجه اولین فرم اساسی در یک نقطه منظم رویه، یک تابع ۲-خطی، متقارن و معین مثبت است که آن را فرم مربعی معین مثبت^{۱۶} می‌نامیم. تمرین **۲۰.۱.۳** در صفحه **۱۳۱** را ببینید.

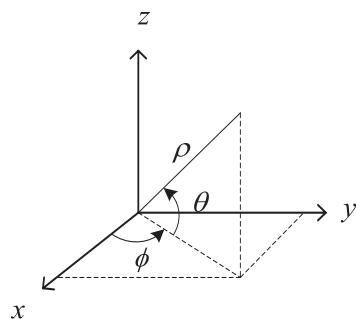
^{۱۶}positive definite quadratic form

مثال ۱.۳.۵. اولین فرم اساسی صفحه در دستگاه اقلیدسی به صورت زیر نوشته می شود.

$$ds^2 = (du^1)^2 + (du^2)^2.$$

در حقیقت می توان مستقیماً نیز مقادیر $1, g_{11} = g_{22} = 1, g_{12} = g_{21} = 0$ را حساب کرد. مثال ۲.۱.۳ در صفحه ۱۲۷ را بینید.

مثال ۱.۳.۶. معادله پارامتری کره در مختصات (ρ, θ, ϕ) با نمادی که در شکل ۱.۳ معرفی می شود، عبارت است از



شکل ۱.۳ : قرارداد نمادگذاری در مختصات کروی (ρ, θ, ϕ) .

$$x^1 = a \cos \theta \cos \phi \quad x^2 = a \cos \theta \sin \phi \quad x^3 = a \sin \theta.$$

اولین فرم اساسی یا متریک کره را می توان در دستگاه مختصات فوق به صورت زیر نوشت.

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\partial x}{\partial \theta} = -a \sin \theta \cos \phi \vec{i} - a \sin \theta \sin \phi \vec{j} + a \cos \theta \vec{k}, \\ x_2 &= \frac{\partial r}{\partial \phi} = -a \cos \theta \sin \phi \vec{i} + a \cos \theta \cos \phi \vec{j} + 0, \\ dx &= x_1 d\theta + x_2 d\phi, \\ dx &= (-a \sin \theta \cos \phi d\theta - a \cos \theta \sin \phi d\phi) \vec{i} + \\ &\quad (-a \sin \theta \sin \phi d\theta + a \cos \theta \cos \phi d\phi) \vec{j} + a \cos \theta d\theta \vec{k}. \end{aligned}$$

از آنجا اولین فرم اساسی کره در مختصات کروی به دست می‌آید

$$ds^2 = \langle dx, dx \rangle = \dots = a^2 d\theta^2 + a^2 \cos^2 \theta d\phi^2. \quad (12.3)$$

ضرایب اولین فرم اساسی عبارتند از $g_{11} = a^2$, $g_{12} = g_{21} = 0$, $g_{22} = a^2 \cos^2 \theta$. ماتریس معکوس اولین فرم اساسی کره ولذا دترمینان آن عبارت است از $\det g = a^4 \cos^2 \theta$. عبارتند از

$$\begin{aligned} g_{11}g^{11} &= \delta_1^1 = 1, & g^{11} &= \frac{1}{a^2}, \\ g_{11}g^{21} &= \delta_1^2 = 0, & a^2 g^{21} &= 0, & g^{21} &= g^{12} = 0, \\ g_{22}g^{22} &= \delta_2^2 = 1, & g^{22} &= \frac{1}{a^2 \cos^2 \theta}. \end{aligned}$$

مثال ۷.۱.۳. با استفاده از اولین فرم اساسی کره $ds^2 = a^2 d\theta^2 + a^2 \cos^2 \theta d\phi^2$ طول منحنی s در فاصله $\theta \leq \phi \leq \pi$ را حساب می‌کنیم.

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{a^2 d\theta^2 + a^2 \cos^2 \theta d\phi^2}, \\ ds &= \sqrt{a^2 \cos^2 \theta d\phi^2} = a \cos \theta d\phi, \\ s &= a \cos \theta \int_0^\pi d\phi = (a \cos \theta) \pi = \frac{\sqrt{2}}{2} \pi a. \end{aligned}$$

می‌توان مستقیماً از لم ۴.۱.۳ نیز استفاده کرد.

مثال ۸.۱.۳. روی رویه‌ای که متریک آن توسط $ds^2 = du^2 + \sinh^2 u dv^2$ داده شده است، طول منحنی $s = v$ را به دست آورید.

$$ds^2 = du^2 + \sinh^2 u du^2 = (1 + \sinh^2 u) du^2 = \cosh^2 u du^2,$$

$$\begin{aligned} ds &= \cosh u du, \\ s &= \int_{u_1}^{u_2} \cosh u du = |\sinh u_2 - \sinh u_1|. \end{aligned}$$

۳.۱.۳ تمرین های بخش

تمرین ۹.۱.۳. نشان دهید اولین فرم اساسی صفحه در مختصات قطبی (r, θ) به شکل زیر است.

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2.$$

تمرین ۱۰.۱.۳. دیدیم که سطح دوار^{۱۷} رویه‌ای است که از دوران کامل یک منحنی مسطح، حول یک محور که در صفحه منحنی واقع بوده و به منحنی متصل باشد، به دست می‌آید. می‌توانیم معادله پارامتری سطح دوار را به صورت زیر نیز نمایش دهیم.

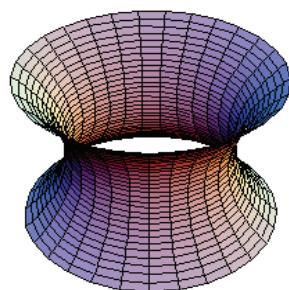
$$x(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u)).$$

که در آن $r = f(u)$ شعاع دوران در هر نقطه است. معادله ۵.۲ در صفحه ۸۰ را ببینید.

الف. نشان دهید اولین فرم اساسی یا متریک سطح دوار برابر است با

$$ds^2 = (f'^2 + g'^2)du^2 + f^2dv^2.$$

ب. ماتریس معکوس آن را حساب کنید.



شکل ۲.۳: زنجیرگون.

تمرین ۱۱.۱.۳. زنجیرگون^{۱۸} رویه‌ای است دوار که معادله پارامتری آن به صورت زیر داده

^{۱۷}surface of revolution

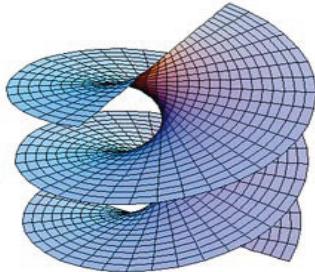
^{۱۸}catenoid

شده است. شکل ۲.۳ را بینید.

$$x(u^1, u^2) = \left(a \cosh \frac{u^1}{a} \cos u^2, a \cosh \frac{u^1}{a} \sin u^2, au^1 \right).$$

نشان دهید اولین فرم اساسی آن عبارت است از:

$$ds^2 = a^2 \cosh^2 \frac{u^1}{a} ((du^1)^2 + (du^2)^2).$$



شکل ۳.۳: مارپیچ گون.

تمرین ۱۲.۱.۳. مارپیچ گون^{۱۹} رویه‌ای است که از خطوط مار بر یک مارپیچ و عمود بر محور آن تشکیل می‌شود. کارتهای مارپیچ گون به صورت زیر است:

$$\bar{x}(v_1, v_2) = (v_1 \cos v_2, v_1 \sin v_2, av_2).$$

شکل ۳.۳ را بینید. نشان دهید که اولین فرم اساسی آن عبارت است از:

$$ds^2 = (dv_1)^2 + ((v_1)^2 + a^2) (dv_2)^2.$$

^{۱۹}helicoid

تمرین ۱۳.۱.۳. طول کمانی از منحنی $u = e^{\frac{\theta \cot \beta}{\sqrt{r}}}$ در فاصله $0 \leq \theta \leq \pi$ را که در روی مخروط $x = (u \cos \theta)e_1 + (u \sin \theta)e_2 + ue_3$ قرار دارد، حساب کنید.

$$s = \frac{\sqrt{r}}{\cos \beta} \left(e^{\frac{\pi \cot \beta}{\sqrt{r}}} - 1 \right)$$

جواب:

تمرین ۱۴.۱.۳. فرض کنیم M یک رویه منتظم با کارت (x, U) و با نمایش پارامتری $x(u^1, u^2) = (u^1(t), u^2(t))$ باشد. آنگاه پارامتر u^1 طول قوس منحنی است اگر و تنها اگر $g_{11} = 1$ باشد.

۲.۳ زاویه بین دو بردار روی یک رویه

فرض کنیم M یک رویه منتظم و $x(u^1, u^2) \in D \subset \mathbb{R}^2$ یک کارت روی آن باشد. در فصل ۲ در صفحه ۹۷ تعریف بردار مماس بر یک رویه را دیدیم. در اینجا می خواهیم زاویه بین دو بردار مماس را تعریف کنیم. فرض کنیم M یک رویه منتظم با کارت (x, U) و با نمایش پارامتری $x(u^1, u^2)$ باشد. اگر مجموعه بردارهای مماس بر رویه M در نقطه $p \in U$ را با $T_p M$ نمایش دهیم، آنگاه $T_p M$ یک فضای برداری ۲-بعدی است که پایه های آن عبارتند از $\{x_1, x_2\}$ که در آن $x_2 = \frac{\partial x}{\partial u^1}$ و $x_1 = \frac{\partial x}{\partial u^2}$ گزاره ۵.۴.۲ است که پایه های آن عبارتند از $\{x_1, x_2\}$ که در آن $x_2 = \frac{\partial x}{\partial u^1}$ و $x_1 = \frac{\partial x}{\partial u^2}$ گزاره ۵.۴.۲ در صفحه ۹۷ را ببینید. مستقل از نمایش پارامتری یا کارت x ، پایه $T_p M$ را می توان توسط در صفحه ۹۷ را ببینید. تعریف دوم بردار مماس بر رویه ۲.۵.۲ در صفحه ۱۰۷ را ببینید. بر این اساس هر بردار مماس بر M در p را می توان توسط ترکیبی خطی از اعضای پایه نوشت، $X_p = X^1 x_1 + X^2 x_2$ که در آن X^1 و X^2 مولفه های بردار X_p توابعی حقیقی روی M هستند. ضرب داخلی دو بردار مماس $X_p, Y_p \in T_p M$ را به

^{۲۰} اثبات این موضوع برای منیفلد ها در ابعاد بالاتر را می توان در برقراری یک رابطه دوسویی بین بردار مماس و خانواده مشتق گیری ها بیان نمود. برای جزئیات اثبات خواننده علاقه مند می تواند بخش بردار مماس از کتاب هندسه منیفلد ۱ [۱] را ببیند.

صورت زیر تعریف نمودیم. با استفاده از خطی بودن ضرب داخلی داریم

$$\langle X_p, Y_p \rangle = \langle X^i x_i, Y^j x_j \rangle = \langle x_i, x_j \rangle \cdot X^i Y^j = g_{ij} X^i Y^j.$$

یادآوری می نماییم که در اینجا از قرارداد جمع‌بندی برای $i, j = 1, 2$ استفاده شده است. از آنجا طول بردار مماس برابر است با $|X| = \sqrt{g_{ij} X^i X^j}$. اگر زاویه بین دو بردار مماس $X_p, Y_p \in T_p M$ را با θ نمایش دهیم آنگاه مشابه \mathbb{R}^3 زاویه بین دو بردار را توسط $\cos \theta = |X||Y| \cos \theta$ تعریف می کنیم. از آنجا

$$\cos \theta = \frac{g_{ij} X^i Y^j}{\sqrt{g_{ij} X^i X^j} \sqrt{g_{ij} Y^i Y^j}}. \quad (13.3)$$

جالب است که بدانیم این فرمول محاسبه زاویه دو بردار، نه تنها برای رویه ها یا منیفلدهای ریمانی از بعد ۲ بلکه برای هر بعد دلخواه n نیز برقرار است. زاویه بین دو منحنی در نقطه p که همان زاویه بین بردارهای مماس آنها است، اگر جهت مهم باشدکمی پیچیده تر است. در حقیقت اگر تعیین زاویه حاده یا منفرجه بین دو منحنی نیز مهم باشد باید از جهت تغییرات منحنی در دو راستا استفاده شود. زاویه بین دو منحنی در یک نقطه از رویه در بخش نگاشتهای همدیس در لم ۱۳.۳ در صفحه ۲۰۹ از همین کتاب محاسبه می گردد.

۳.۳ دومین فرم اساسی یک رویه

در بخش قبل با اولین فرم اساسی یا فرم متریک یک رویه و برخی از کاربردهای آن در محاسبه طول، زاویه و مساحت آشنا شدیم. در این بخش کمیت دیگری به نام دومین فرم اساسی را معرفی می کنیم که به کمک آن می توان خصوصیات جالب دیگری از رویه مانند میزان خمیدگی آن را مشخص کرد.

فرض کنیم M یک رویه منتظم از کلاس C^2 با کارت (x, U) و بانمایش پارامتری (u^1, u^2) باشد. در هر نقطه از M بردار قائم یک $N = \frac{x_1 \times x_2}{|x_1 \times x_2|}$ را در نظر می گیریم. N تابعی حقیقی

از u^1 و u^2 بوده و از کلاس C^1 است. بنا بر تعریف، دیفرانسیل کل N برابر است با

$$dN = \frac{\partial N}{\partial u^1} du^1 + \frac{\partial N}{\partial u^2} du^2.$$

چون بردار N بر رویه عمود است در صفحه مماس قرار ندارد لذا نمی توانیم برای N از ضرب داخلی تعریف شده توسط اولین فرم اساسی در $T_p M$ استفاده کنیم. از این رو از ضرب داخلی بردارهای \mathbb{IR}^3 استفاده می نماییم. چون بردار N یکه است، بر dN عمود است. زیرا

$$\bullet = d(N \bullet N) = dN \bullet N + N \bullet dN, \quad N \bullet dN = \bullet.$$

بنابراین dN در هر نقطه از رویه برداری موازی صفحه مماس در آن نقطه از رویه است. از طرف دیگر $dx = x_1 du^1 + x_2 du^2$ نیز برداری در صفحه مماس است. حال حاصلضرب داخلی دو بردار dx و dN رابه شرح زیر در نظر گرفته تعریف می کنیم:

$$\begin{aligned} II &= -dx \bullet dN = -(x_1 du^1 + x_2 du^2) \bullet (N_1 du^1 + N_2 du^2), \\ &= -x_1 \bullet N_1 (du^1)^2 - (x_1 \bullet N_2 + x_2 \bullet N_1) du^1 du^2 - x_2 \bullet N_2 (du^2)^2, \end{aligned}$$

که در آن $N_i = \frac{\partial N}{\partial u^i}$ است.

تعریف ۱.۳.۳. فرض کنیم M یک رویه منتظم از کلاس C^2 ، (x, U) کارتی با نمایش پارامتری $x = x(u^1, u^2)$ و N بردار عمود بر رویه M در نقطه p باشد.تابع II که در بالا تعریف شد را دومین فرم اساسی ^{۲۱} رویه M می نامند و آن را به صورت زیر نیز نمایش می دهند.

$$II = b_{11}(du^1)^2 + (b_{12} + b_{21})du^1 du^2 + b_{22}(du^2)^2. \quad (14.3)$$

^{۲۱}second fundamental form

ضرایب $b_{ij} = -x_i \cdot N_j$ را ضرایب دومین فرم اساسی می‌نامند. دترمینان ماتریس ضرایب b_{ij} را با $b = \det \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ نمایش می‌دهیم و آن را مبین دومین فرم اساسی می‌نامیم. ضرایب دومین فرم اساسی بر خلاف اولین فرم اساسی در شرایط تعریف ضرب داخلی صدق نمی‌کنند. تمرین ۳.۳.۳ در صفحه ۱۴۴ را ببینید.

مثال ۳.۳.۳. دومین فرم اساسی صفحه \mathbb{R}^3 در دستگاه مختصات دکارتی برابر صفر است.

$$x = x(u^1, u^2) = u^1 \vec{i} + u^2 \vec{j},$$

$$N = \frac{x_1 \times x_2}{|x_1 \times x_2|} = \frac{\vec{i} \times \vec{j}}{|\vec{i} \times \vec{j}|} = \vec{k}, \quad N_j = \cdot, \quad b_{ij} = -x_i \cdot N_j = \cdot.$$

دومین فرم اساسی صفحه \mathbb{R}^3 در نقاط منظم دستگاه مختصات قطبی برابر است با:

$$x = x(\rho, \theta) = \rho \cos \theta \vec{i} + \rho \sin \theta \vec{j},$$

$$N = \frac{\frac{\partial x}{\partial \rho} \times \frac{\partial x}{\partial \theta}}{\left| \frac{\partial x}{\partial \rho} \times \frac{\partial x}{\partial \theta} \right|} = \frac{(\cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}) \times (-\rho \sin \theta \vec{i} + \rho \cos \theta \vec{j})}{\left| \frac{\partial x}{\partial \rho} \times \frac{\partial x}{\partial \theta} \right|},$$

از آنجا داریم

$$N = \frac{\rho \cos^2 \theta \vec{k} + \rho \sin^2 \theta \vec{k}}{\rho} = \vec{k},$$

$$N_1 = \frac{\partial N}{\partial \theta} = \cdot, \quad N_2 = \frac{\partial N}{\partial \rho} = \cdot, \quad b_{ij} = - \langle x_i, N_j \rangle,$$

$$b_{12} = \cdot, \quad b_{22} = \cdot, \quad b_{11} = b_{21} = \cdot, \quad b_{ij} = \cdot.$$

لذا دومین فرم اساسی صفحه \mathbb{R}^3 در دستگاه مختصات قطبی نیز برابر صفر است.

مثال ۳.۳.۴. می‌خواهیم برای ضرایب دومین فرم اساسی فرمول دیگری پیدا کنیم. چون N بردار قائم بر رویه است، داریم $0 = x_i \cdot N =$ اگر از این رابطه نسبت به u^j مشتق

بگیریم، داریم: $x_{ij} \bullet N = x_{ij} \bullet N + x_i \bullet N_j = 0$ از طرفی داشتیم
بنابراین $b_{ij} = -x_i \bullet N_j$

$$b_{ij} = -x_i \bullet N_j = x_{ij} \bullet N, \quad i, j = 1, 2. \quad (15.3)$$

مثال ۴.۳.۳. رویه زین اسبی^{۲۲} یا هذلولی گون سهموی توسط

$$x(u^1, u^2) = u^1 \vec{i} + u^2 \vec{j} + ((u^2)^2 - (u^1)^2) \vec{k},$$

داده می شود. دومین فرم اساسی آن را پیدا کنید.

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial u^1} &:= x_1 = \vec{i} - 2u^1 \vec{k}, & x_{11} = \frac{\partial x_1}{\partial u^1} &= -2\vec{k}, & x_{12} = \frac{\partial x_1}{\partial u^2} &= 0, \\ \frac{\partial x}{\partial u^2} &:= x_2 = \vec{j} + 2u^2 \vec{k}, & x_{21} = \frac{\partial x_2}{\partial u^1} &= 0, & x_{22} = \frac{\partial x_2}{\partial u^2} &= 2\vec{k}. \end{aligned}$$

از آنجا بردار یکه قائم به دست می آید.

$$N = \frac{x_1 \times x_2}{|x_1 \times x_2|} = (\gamma(u^1)^2 + \gamma(u^2)^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} (2(u^1)\vec{i} - 2(u^2)\vec{j} + \vec{k}).$$

در نتیجه با استفاده از رابطه ۱۵.۳ ضرایب دومین فرم اساسی از N به دست می آیند.

$$\begin{aligned} b_{11} &= x_{11} \bullet N = -2(\gamma(u^1)^2 + \gamma(u^2)^2 + 1)^{-\frac{1}{2}}, \\ b_{12} &= x_{12} \bullet N = 0, \\ b_{22} &= x_{22} \bullet N = +2(\gamma(u^1)^2 + \gamma(u^2)^2 + 1)^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

بنابراین دومین فرم اساسی رویه زین اسبی برابر است با:

$$II = 2(\gamma(u^1)^2 + \gamma(u^2)^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} (-d(u^1)^2 + d(u^2)^2).$$

^{۲۲}saddle surface

۱.۳.۳ تمرین‌های بخش

تمرین ۱.۳.۳. نشان دهید دومین فرم اساسی کره در مختصات (ρ, θ, ϕ) با نمادی که در

شکل ۱.۳ معرفی می‌شود، یعنی

$$x = a \cos \theta \cos \phi, \quad y = a \cos \theta \sin \phi, \quad z = a \sin \theta,$$

عبارت است از $II = a(d\theta^2 + \cos^2 \theta d\phi^2)$. سپس دومین فرم اساسی را با اولین فرم

اساسی در رابطه ۱۲.۳ در صفحه ۱۳۶ مقایسه نمایید.

تمرین ۲.۳.۳. نشان دهید دومین فرم اساسی سطح دور

$$x = f(u) \cos v, \quad y = f(u) \sin v, \quad z = h(u).$$

برابر با مقدار زیر است.

$$II = \frac{f'h'' - h'f''}{\sqrt{f'^2 + h'^2}} du^2 + \frac{fh'}{\sqrt{f'^2 + h'^2}} dv^2.$$

تمرین ۳.۳.۳. نشان دهید که ضرایب دومین فرم اساسی در شرایط تعریف ضرب داخلی صدق نمی‌کند. به عبارت دیگر نشان دهید که ضرایب دومین فرم اساسی توابع ۲-خطی، متقارن هستند ولی لزوماً مثبت معین نیستند. یعنی در رابطه زیر صدق نمی‌کنند.

$$\forall X_P \neq 0 \in T_p M, \quad b_{ij} X^i X^j > 0.$$

تمرین ۴.۳.۳. دومین فرم اساسی چنبره زیر را پیدا کنید.

$$x = (b + a \cos u^1) \cos u^2, \quad y = (b + a \cos u^1) \sin u^2, \quad z = a \sin u^1.$$

۲.۳.۳ تانسورها و فرم‌های اساسی

مقدمه. تانسورها توابع چند خطی هستند که در هندسه کاربردهای فراوانی دارند. در اینجا فقط به تعریف کلاسیک تانسور روی رویه و ارتباط آن با فرم‌های اساسی، می‌پردازیم.

برای تعریف تانسورها در روی منیفلدها خواننده علاقه‌مند می‌تواند به کتب هندسه منیفلدها و به عنوان مثال به فصل چهارم کتاب [۱] مراجعه کند.

تعریف زیر را تعریف کلاسیک یا موضعی تانسور از نوع (۲) می‌نامند. این روش تعریف تانسورها که با استفاده از مختصات ارائه می‌شود، در محاسبات تانسوری در هندسه موضعی و فیزیک نظری کاربرد فراوان دارد.

تعریف ۵.۳.۳. فرض کنیم رویه M از کلاس C^2 و کارت (x, U) با نمایش پارامتری $x(u^1, u^2)$ روی آن تعریف شود. اگر $T_{ij} : M \rightarrow \mathbb{R}$, $i, j = 1, 2$ ها توابعی حقیقی روی رویه M باشند که پس از تغییر مختصات $(u^1, u^2) \rightarrow (u'^1, u'^2)$ داریم $T'_{ij} = T_{ij} \frac{\partial u^i}{\partial u'^i} \frac{\partial u^j}{\partial u'^j}$ در روابط زیر صدق کنند آنگاه می‌گویند که T_{ij} مولفه‌های تانسوری ^{۲۳} از نوع (۲) هستند.

$$T'_{ij} = T_{ij} \frac{\partial u^i}{\partial u'^i} \frac{\partial u^j}{\partial u'^j}, \quad (16.3)$$

که در آن اندیسه‌های $i, j = 1, 2$ و $i', j' = 1, 2$ به ترتیب مربوط به کارت‌های (x, U) و (x, U') روی M هستند.

مثال ۶.۳.۳. ضرایب اولین فرم اساسی یک رویه تانسوری از نوع (۲) هستند. در حقیقت رویه M از کلاس C^2 را با نمایش پارامتری $x(u^1, u^2)$ در نظر می‌گیریم. همانطوری که از رابطه ^{۲۰.۳} در صفحه ^{۱۲۶} نیز مشخص می‌شود، در هر نقطه p از رویه (p) $g_{ij}(p)$ ها ضرایب اولین فرم اساسی یک رویه، به مختصات $p = x(u^1, u^2)$ بستگی دارند و به عبارتی روی M تعریف می‌شوند. اگر مختصات u^1 و u^2 را با مختصات جدید u'^1 و u'^2 که توسط روابط زیر به هم مربوطند،

$$u^1 = u^1(u'^1, u'^2), \quad u^2 = u^2(u'^1, u'^2).$$

^{۲۳}tensor

عوض کنیم نمایش پارامتری معادله جدید $x = x(u^1(u^1, u^2), u^2(u^1, u^2))$ حاصل می‌شود. بنابر قاعده زنجیره ای مشتقات x به صورت زیر تغییر می‌کنند.

$$x_{i'} = \frac{\partial x}{\partial u^{i'}} = \frac{\partial x}{\partial u^1} \frac{\partial u^1}{\partial u^{i'}} + \frac{\partial x}{\partial u^2} \frac{\partial u^2}{\partial u^{i'}} = x_1 \frac{\partial u^1}{\partial u^{i'}} + x_2 \frac{\partial u^2}{\partial u^{i'}} = x_k \frac{\partial u^k}{\partial u^{i'}}.$$

بنابراین ضرایب اولین فرم اساسی به صورت زیر تغییر می‌کنند

$$g_{i'j'} = \langle x_{i'}, x_{j'} \rangle = \langle x_k \frac{\partial u^k}{\partial u^{i'}}, x_l \frac{\partial u^l}{\partial u^{j'}} \rangle = \langle x_k, x_l \rangle \frac{\partial u^k}{\partial u^{i'}} \frac{\partial u^l}{\partial u^{j'}}.$$

که در آن $k, l = 1, 2$. به عبارت دیگر

$$g_{i'j'} = g_{kl} \frac{\partial u^k}{\partial u^{i'}} \frac{\partial u^l}{\partial u^{j'}}. \quad (17.3)$$

بنابراین ضرایب اولین فرم اساسی در رابطه 16.3 صدق می‌کنند و در نتیجه تانسوری از نوع $(2, 2)$ هستند.

تعريف ۷.۳.۳. با شرایط تعريف قبل اگر $T^{ij} : M \rightarrow I\!R$, $i, j = 1, 2$ ها توابعی حقیقی روی رويه M باشند که ارتباط آنها در دو کارت (x, U) و (x, U') از روابط زیر پیروی کند، آنگاه می‌گویند که آن توابع مولفه های تانسوری 24 از نوع $(2, 2)$ هستند.

$$T^{i'j'} = T^{ij} \frac{\partial u^{i'}}{\partial u^i} \frac{\partial u^{j'}}{\partial u^j}, \quad (18.3)$$

مثال ۸.۳.۳. ضرایب ماتریس معکوس اولین فرم اساسی یک رویه تانسوری از نوع $(2, 2)$ هستند. در حقیقت مختصات u^1 و u^2 را با مختصات جدید $u^1 = u^1(u^1, u^2)$ و $u^2 = u^2(u^1, u^2)$ تعویض می‌کنیم. با استفاده از رابطه $g^{i'k'}g_{j'k'} = \delta_{j'}^{i'}$ می‌توان ضرایب ماتریس معکوس $g^{i'j'}$ را نیز محاسبه نمود.

$$g^{i'j'} = g^{kl} \frac{\partial u^{i'}}{\partial u^k} \frac{\partial u^{j'}}{\partial u^l}. \quad (19.3)$$

²⁴tensor

لذا ضرایب ماتریس معکوس اولین فرم اساسی یک رویه در رابطه ۱۸.۳ صدق نموده و در نتیجه تانسوری از نوع (۲) هستند.

مثال ۹.۳.۳. ضرایب دومین فرم اساسی یک رویه فقط وقتی تانسوری از نوع (۲) هستند که رویه M جهت پذیر باشد. اگنون ضرایب دومین فرم اساسی رویه را نیز پس از تغییر مختصات از u^1 و u^2 به مختصات u' و u'' محاسبه می کنیم. اگر بردار یکه عمود رادر دو دستگاه مختصات با N و N' و ضرایب دومین فرم اساسی را با b_{ij} و $b'_{ij'}$ نشان دهیم،

داریم

$$x_{i'} = \frac{\partial u^i}{\partial u^{i'}} x_i, \quad N' = \varepsilon N, \quad N'_{j'} = \varepsilon \frac{\partial u^j}{\partial u^{j'}} N_j.$$

$\frac{\partial(u^1, u^2)}{\partial(u'^1, u'^2)}$ ماتریس تغییر مختصات و ε علامت که در آن، $\varepsilon = sgn \frac{\partial(u^1, u^2)}{\partial(u'^1, u'^2)}$ است. در نتیجه

$$\begin{aligned} b'_{ij'} &= \langle -x_{i'}, N'_{j'} \rangle = \varepsilon \left\langle -\frac{\partial u^i}{\partial u^{i'}} x_i, \frac{\partial u^j}{\partial u^{j'}} N_j \right\rangle \\ &= \varepsilon \frac{\partial u^i}{\partial u^{i'}} \frac{\partial u^j}{\partial u^{j'}} (\langle -x_i, N_j \rangle) = \varepsilon \frac{\partial u^i}{\partial u^{i'}} \frac{\partial u^j}{\partial u^{j'}} b_{ij}. \end{aligned} \quad (20.3)$$

فرمول تغییر مختصات ضرایب دومین فرم اساسی شبیه فرمول تغییر مختصات ضرایب اولین فرم اساسی با اختلاف علامت ε می باشد. اگر رویه جهت پذیر باشد آنگاه علامت ε مشبت است. اگر این علامت منفی باشد یکی از مولفه های دستگاه مختصات را دریک منفی ضرب می کنیم علامت ε مشبت شود. لذا مولفه های دومین فرم اساسی فقط در رویه های جهت پذیر خاصیت تانسوری دارند.

با تعمیم تعاریف بالا اگر مولفه های T در روابط زیر صدق کند به آن تانسوری از نوع $\binom{k}{l}$ می گویند.

$$T_{j'_1 \dots j'_l}^{i'_1 \dots i'_k} = T_{j_1 \dots j_l}^{i_1 \dots i_k} \frac{\partial u^{i'_1}}{\partial u^{i_1}} \dots \frac{\partial u^{i'_k}}{\partial u^{i_k}} \frac{\partial u^{j'_1}}{\partial u^{j_1}} \dots \frac{\partial u^{j'_l}}{\partial u^{j_l}}, \quad (21.3)$$

که در آن اندیسهای $i_1 \dots i_k, j_1 \dots j_l = 1, 2$ و $i'_1 \dots i'_k, j'_1 \dots j'_l = 1, 2$ به ترتیب مربوط به کارتھای (x, U) و (x, U') روی M هستند.

تعريف ۱۰.۳.۳. عمل مساوی قرار دادن یک اندیس بالایی و یک اندیس پایینی در مولفه های یک تانسور را عمل، انقباض تانسور^{۲۵} می نامیم. از انقباض تانسوری از درجه $\binom{r}{s}$ تانسوری از درجه $\binom{r-1}{s-1}$ حاصل می شود.

در عمل انقباض یک تانسور همان عمل پیدا کردن اثر ماتریس یک تبدیل خطی است که در جبر خطی انجام می دهیم. عمل انقباض برای حاصلضرب مولفه های دو تانسور نیز به شکل مشابه تعریف می شود. به عنوان مثال از انقباض حاصلضرب مولفه های تانسور g_{ij} که تانسوری از درجه (2) است، با g^{ik} که تانسوری از درجه (1) است تانسور جدیدی از درجه (1) حاصل شد که آن را تانسور دلتای کرونکر می نامیم و با δ^j_k نمایش می دهیم.

۳.۳.۳ تمرین‌های بخش

تمرین ۱۱.۳.۳. در ستی رابطه ۱۹.۳ را بررسی کنید.

تمرین ۱۲.۳.۳. نشان دهید که اگر مولفه های اولین و دومین فرم اساسی رویه در یک دستگاه مختصات صفر شوند آنگاه در دستگاه های دیگر نیز قطعاً صفر خواهند شد.

تمرین ۱۳.۳.۳. الف. آیا ضرایب ماتریس معکوس دومین فرم اساسی یک رویه تانسوری از نوع (2) هستند.

ب. تحت چه شرایطی ضرایب ماتریس معکوس دومین فرم اساسی یک رویه تانسوری از نوع (2) هستند.

^{۲۵}contraction of tensor

تمرین ۱۴.۳.۳. فرض کنیم رویه M از کلاس C^2 و کارت (x, U) با نمایش پارامتری (x^1, u^1, u^2) روی آن تعریف شود. اگر f تابعی حقیقی روی رویه M باشد، آیا مشتقات جزیی مرتبه دوم تابع $f_{ij} := \partial^2 f / \partial u^i \partial u^j$ یک تانسور (II) یا (I) است؟

۴.۳ انحنای گاووسی یک رویه

مقدمه. روش های متفاوتی برای تعریف انحنای گاووسی^{۲۶} روی یک رویه وجود دارد. در اینجا ما ابتدا از تعریفی استفاده می کنیم که از نظر شهودی قابل درک بوده و تعبیر هندسی مناسبی برای آن داشته باشیم. سپس تعریفی را ارایه می کنیم که در دروس پیشرفته هندسه به راحتی بتوان آن را تعمیم داده و به تحقیقات در مژهای دانش از دیدگاه این کتاب نزدیک باشد. تعریف دیگری نیز با استفاده از نگاشت گاووس برای انحنای گاووسی بیان می کنیم که در بخش بعد به آن پرداخته شده و معادل بودن آن با تعریف قبلی ثابت خواهد شد. تعاریف متنوع دیگری نیز از انحنای گاووسی وجود دارد که بعضاً دارای تعبیر جالبی هستند. به خواننده علاقه مند توصیه می کنیم که این تعاریف را در اینترنت جستجو نموده به تعبیر جالب آن بیندیشند. اساتید محترم می توانند یافتن ارتباط بین این تعاریف متنوع انحنای گاووسی در اینترنت را به عنوان پروژه یا کار خارج از کلاس به دانشجویان علاقه مند معرفی نمایند.

در دروس هندسه ریمانی یا هندسه منیفلد ۲ در کارشناسی ارشد انحنای گاووسی را انحنای برشی^{۲۷} می نامند. کتاب [۲] را ببینید.

^{۲۶}Gaussian curvature

^{۲۷}sectional curvature

۱.۴.۳ انحنای گاووسی و انحنای اصلی

فرض کنیم M یک رویه منظم از کلاس C^2 و $x(u^1, u^2)$ یک کارت روی آن باشد. در هر نقطه $p \in M$ بردار یکه قائم را با $N = \frac{x_1 \times x_2}{|x_1 \times x_2|}$ نمایش می‌دهیم. ...

۲.۴.۳ انحنای گاووسی و فرم‌های اساسی

یکی از ساده‌ترین راه‌های تعریف خمیدگی یک رویه به دست آوردن میزان انحراف بردار یکه عمود آن در روی سطح کوچکی از رویه است. در بخش قبل دومین فرم اساسی با استفاده از مشتقات بردار یکه عمود تعریف نمودیم. لذا با استفاده از اولین و دومین فرم اساسی یک رویه می‌توان انحنای رویه را در هر نقطه به صورت زیر تعریف نمود.

تعریف ۱.۴.۳. فرض کنیم M یک رویه منظم از کلاس C^2 باشد. نسبت دترمینان دومین فرم اساسی به دترمینان اولین فرم اساسی در نقطه $p \in M$ را **انحنای گاووسی** در نقطه p نامیده آن را با علامت κ نمایش می‌دهیم.

$$\kappa = \frac{b}{\mathcal{G}} = \frac{b_{11}b_{22} - (b_{12})^2}{g_{11}g_{22} - (g_{12})^2}.$$

انحنای گاووسی در نقاط منظم یک رویه از کلاس C^2 همواره موجود است. اگر مقدار انحنا در نقطه‌ای مثبت باشد، آن نقطه را **بیضوی** و اگر منفی باشد، **هذلولوی** و اگر صفر باشد، آن نقطه را **مسطح** می‌نامیم. به عنوان مثال در صفحه \mathbb{R}^2 با متريک اقلیدسی، تمام نقاط مسطح هستند، زیرا

$$g_{21} = g_{12} = 0, \quad g_{11} = g_{22} = 1, \quad \mathcal{G} = 1,$$

$$b_{ij} = 0 \quad b = 0.$$

بنابراین انحنای گاووسی صفحه در تمام نقاط برابر صفر است؛ $\kappa = \frac{b}{\mathcal{G}} = 0$.

مثال ۲.۴.۳. انحنای گاووسی کره ای به شعاع a ثابت و برابر است با $\frac{1}{a^2}$. دیدیم کره در مختصات (ρ, θ, ϕ) دارای اولین و دومین فرم اساسی زیر است.

$$\begin{aligned} I &= a^2(d\theta^2 + \cos^2\theta d\phi^2), \\ g_{11} &= a^2, \quad g_{12} = g_{21} = 0, \quad g_{22} = a^2 \cos^2\theta, \\ II &= a(d\theta^2 + \cos^2\theta d\phi^2), \\ b_{11} &= a, \quad b_{12} = b_{21} = 0, \quad b_{22} = a \cos^2\theta, \\ \kappa &= \frac{b}{G} = \frac{b_{11}b_{22} - b_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} = \frac{a^2 \cos^2\theta}{a^2 \cdot a^2 \cos^2\theta} = \frac{1}{a^2}. \end{aligned}$$

پس می توان نوشت

$$\kappa = \frac{b}{G} = \frac{b_{11}b_{22} - b_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} = \frac{a^2 \cos^2\theta}{a^2 \cdot a^2 \cos^2\theta} = \frac{1}{a^2}.$$

۳.۴.۳ پایایی انحنای گاووسی نسبت به تغییر مختصات رویه

یکی از خواص جالب انحنای گاووسی عدم وابستگی آن به مختصات است. این خاصیت با تعریفی که از انحنای گاووسی در بخش قبل آورده ایم به راحتی قابل بررسی است. با استفاده از روابط ۱۷.۳ و ۲۰.۳ در صفحات ۱۴۶ و ۱۴۷ می توان یکی از خواص جالب انحنای گاووسی یعنی عدم وابستگی آن به مختصات را ثابت کرد.

گزاره ۳.۴.۳. انحنای گاووسی به انتخاب کارت ها بستگی ندارد.

اثبات. فرض کنیم رویه M از کلاس C^2 و کارت (x, U) با نمایش پارامتری $x(u^1, u^2)$ روی همسایگی نقطه $p \in M$ تعریف شود. انحنای گاووسی رویه M در نقطه $p \in M$ در کارت (x, U) با κ نمایش می دهیم. اگر (x, U') کارت دیگری روی همسایگی نقطه $p \in M$ باشد انحنای گاووسی در نقطه $p \in M$ را در کارت (x, U') با κ' نمایش می دهیم. با استفاده از تعریف مبین اولین و دومین فرم اساسی، یعنی دترمینان های G و b می توان

فرمول تغییر مختصات مبین اولین و دومین فرم اساسی را پیدا نمود. بنا بر تعریف در دستگاه مختصات جدید داریم $(g_{\alpha\beta})^2 = b_{\alpha\alpha} b_{\beta\beta} - (b_{\alpha\beta})^2$ و با استفاده از روابط 17.3 و 20.3 در صفحات 146 و 147

$$\begin{aligned}\mathcal{G}' &= g_{\alpha\alpha} g_{\beta\beta} - (g_{\alpha\beta})^2 \\ &= \left(g_{ij} \frac{\partial u^i}{\partial u^\alpha} \frac{\partial u^j}{\partial u^\beta} \right) \left(g_{ij} \frac{\partial u^i}{\partial u^\beta} \frac{\partial u^j}{\partial u^\alpha} \right) - \left(g_{ij} \frac{\partial u^i}{\partial u^\alpha} \frac{\partial u^j}{\partial u^\beta} \right)^2,\end{aligned}$$

اگر این رابطه را به صورت ماتریسی بنویسیم، داریم

$$\mathcal{G}' = \det \begin{pmatrix} \left(g_{ij} \frac{\partial u^i}{\partial u^\alpha} \frac{\partial u^j}{\partial u^\beta} \right) & \left(g_{ij} \frac{\partial u^i}{\partial u^\alpha} \frac{\partial u^j}{\partial u^\gamma} \right) \\ \left(g_{ij} \frac{\partial u^i}{\partial u^\beta} \frac{\partial u^j}{\partial u^\alpha} \right) & \left(g_{ij} \frac{\partial u^i}{\partial u^\beta} \frac{\partial u^j}{\partial u^\gamma} \right) \end{pmatrix}.$$

این ماتریس را به صورت حاصلضرب سه ماتریس می‌نویسیم. می‌دانیم دترمینان حاصلضرب

$$\frac{\partial(u^\alpha, u^\beta)}{\partial(u^\alpha, u^\gamma)} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial u^\alpha}{\partial u^\alpha} & \frac{\partial u^\alpha}{\partial u^\beta} \\ \frac{\partial u^\beta}{\partial u^\alpha} & \frac{\partial u^\beta}{\partial u^\gamma} \end{pmatrix}$$

چند ماتریس برابر حاصلضرب دترمینان ها است. اگر فرض کنیم آنگاه داریم

$$\mathcal{G}' = \left(\frac{\partial(u^\alpha, u^\beta)}{\partial(u^\alpha, u^\gamma)} \right)^2 \mathcal{G},$$

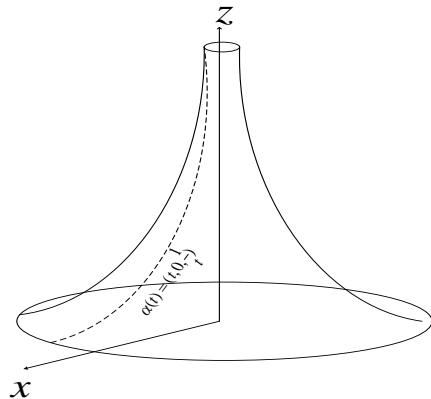
به شکل مشابه داریم

$$b' = \left(\frac{\partial(u^\alpha, u^\beta)}{\partial(u^\alpha, u^\gamma)} \right)^2 b.$$

از آنجا داریم $\kappa' = \frac{b'}{\mathcal{G}'} = \frac{b}{\mathcal{G}}$. لذا انحنای گاووسی به انتخاب دستگاه مختصات بستگی ندارد. \square

مثال ۴.۴.۳. دیدیم که انحنای گاووسی صفحه در مختصات اقلیدسی برابر صفر است. انحنای گاووسی صفحه در مختصات قطبی نیز برابر صفر است زیرا در مثال $2.3.3$ در صفحه 142 دیدیم که مبین دومین فرم اساسی صفحه در مختصات قطبی صفر است. دارای اولین و دومین فرم اساسی زیر است.

صفحه دارای انحنای گاووسی صفر است. کره ای به شعاع a دارای انحنای ثابت و مثبت $1/a^2$ است. در اینجا می خواهیم مثالی از یک رویه با انحنای ثابت منفی معرفی کنیم.



شکل ۴.۳: سطح دورار با انحنای گاووسی منفی.

مثال ۵.۴.۳. برای ساخت مثالی از یک رویه با انحنای ثابت منفی یک منحنی مقعر یا هذلولوی معرفی نموده آن را حول محوری در صفحه منحنی دوران می دهیم. شکل ۵.۳ را ببینید. به عنوان مثال منحنی $\frac{1}{x} = z$ را در صفحه $z \circ x$ در نظر گرفته معادله پارامتری آن را می نویسیم. $(t, 0, \frac{1}{t}) = \alpha(t)$ سپس آن را حول محور z ها دوران دهیم رویه ای حاصل می شود که معادله پارامتری آن از رابطه ۴.۲ در صفحه ۷۹ به دست می آید.

$$x(u, v) = (u \cos v, u \sin v, \frac{1}{u}), \quad u > 0. \quad (22.3)$$

این رویه انحنای گاووسی منفی دارد.

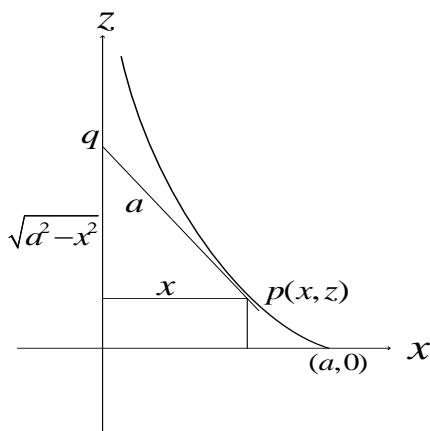
برای ساخت مثالی دیگر از یک رویه با انحنای ثابت منفی، منحنی مقعر کشاننده یا تراکتريس را به صورت زیر تعریف نموده آن را حول محوری در صفحه منحنی دوران می دهیم.

مثال ۶.۴.۳. منحنی C در صفحه $z \circ x$ را یک کشاننده یا تراکتریس^{۲۸} گوییم اگر از نقطه $(0, a)$ روی یک محور شروع شده و هر نقطه از آن دارای این خاصیت باشد که طول خط مماس در هر نقطه بر منحنی تا محور z برابر با مقدار ثابت با فرض $a > 0$ باشد.

الف. نمودار منحنی تراکتریس را در صفحه $z \circ x$ رسم کنید.

ب. معادله دکارتی این منحنی را به صورت $f(x) = z$ بنویسید.

ج. معادله رویه حاصل از دوران منحنی تراکتریس حول محور z را بنویسید.
حل. اگر پاره خط مماس بر منحنی در نقطه p را رسم و آن را ادامه داده تا محور z ها را در نقطه q قطع کند آنگاه بنا بر تعریف این منحنی باید طول پاره خط مماس در هر نقطه \overline{pq} برابر با مقدار ثابت a باشد. شکل ۵.۳ را ببینید. با توجه به شکل به راحتی می‌توان



شکل ۵.۳: منحنی کشاننده یا تراکتریس.

دید که شیب خط مماس در هر نقطه برابر است با $dz/dx = -\sqrt{a^2 - x^2}/x$. چون $x < 0$ این مشتق همواره تعریف شده و پیوسته است. لذا می‌توان با انتگرال‌گیری

^{۲۸}tractrix

از این رابطه، معادله دکارتی منحنی کشاننده را به دست آورد.

$$z = f(x) = -\sqrt{a^2 - x^2} + a \ln\left(\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}\right).$$

اگر منحنی کشاننده C را حول محور z ها دوران دهیم رویه‌ای حاصل می‌شود که آن را شبیه کره^{۲۹} می‌نامند. شکل ۶.۳ را ببینید. معادله دکارتی این رویه از قسمت ب در تمرین ۳.۳.۲ در صفحه ۸۶ به دست می‌آید.

$$y^2 + z^2 = \left(-\sqrt{a^2 - x^2} + a \ln\left(\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}\right)\right)^2.$$

مشابه مثال قبل معادله پارامتری آن از رابطه ۴.۲ در صفحه ۷۹ به دست می‌آید.

$$x(u, v) = \left(u \cos v, u \sin v, -\sqrt{a^2 - u^2} + a \ln\left(\frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{u}\right)\right), \quad u > 0.$$

با محاسبه مبین اولین و دومین فرم اساسی رویه می‌توان بررسی نمود که انحنای گاووسی شبیه کره در هر نقطه عددی است منفی برابر با $-1/a^2 = -\kappa$. تمرین ۳.۴.۳ در صفحه ۱۵۵ را ببینید.

۴.۴.۳ تمرین‌های بخش

تمرین ۱۰.۴.۳. انحنای گاووسی سطح دوار در تمرین ۲.۳.۳ در صفحه ۱۴۴ را بیابید.

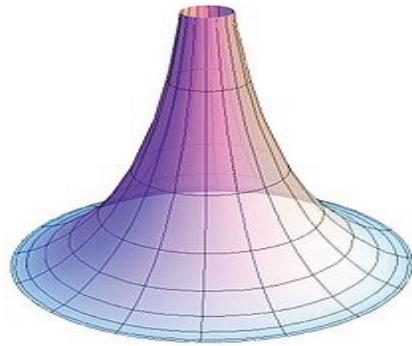
تمرین ۲۰.۴.۳. انحنای گاووسی چنبه در تمرین ۴.۳.۳ در صفحه ۱۴۴ را بیابید.

تمرین ۲۰.۴.۳. اگر منحنی کشاننده C را حول محور z ها دوران دهیم یک شبیه کره تولید می‌شود.

الف) نشان دهید که معادله شبیه کره به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$x(u, v) = (u \cos v, u \sin v, f(u)), \quad 0 < u < a, \quad -\infty < v < +\infty,$$

^{۲۹}pseudosphere



شکل ۶.۳: رویه شبکه کره دارای انحنای گاوسی ثابت منفی است.

که در آن تابع $f(u) = -\sqrt{a^2 - u^2}/u$ توسط $f'(u) = -\sqrt{a^2 - u^2}/u^2$ تعریف می شود.

ب) اولین فرم اساسی شبکه کره را حساب کنید.

ج) دومین فرم اساسی شبکه کره را حساب کنید.

د) نشان دهید انحنای گاوسی شبکه در هر نقطه عددی است منفی برابر با $\kappa = -1/a^2$.

۵.۳ ضرایب کریستوفل و فرمول های گاووس و وینگارت

فرض کنیم M رویه ای دیفرانسیل پذیر از کلاس C^3 و کارت (x, U) با نمایش پارامتری (x^1, x^2, x^3) روی آن تعریف شده باشد. می دانیم مشتقات جزیی مرتبه اول x در صفحه مماس قرار دارند. اما الزاما مشتقات جزیی مرتبه دوم x ممکن است در این صفحه قرار نگیرند. لذا مشتقات جزئی مرتبه دوم تابع x یعنی x_{ij} را می توان به صورت ترکیبی خطی از سه بردار مستقل خطی (x_1, x_2, N) نوشت. در اینجا نیز به علت آنکه بردار قائم در صفحه مماس قرار ندارد از ضرب داخلی \mathbb{R}^3 استفاده می کنیم. اگر ضرایب مشتق دوم را با Γ_{ij}^l ،

β_{ij} و Γ_{ij}^3 نمایش دهیم، داریم

$$x_{ij} = \Gamma_{ij}^1 x_1 + \Gamma_{ij}^2 x_2 + \beta_{ij} N = \Gamma_{ij}^l x_l + \beta_{ij} N. \quad (23.3)$$

از ضرب اسکالر طرفین این رابطه در x_k با توجه به تعریف g_{ij} داریم

$$x_{ij} \cdot x_k = \Gamma_{ij}^l x_l \cdot x_k + \beta_{ij} N \cdot x_k = \Gamma_{ij}^l g_{lk}.$$

از آنجا اگر قرار دهیم $x_{ij} \cdot x_k = \Gamma_{ijk}$ عبارت فوق به صورت زیر نوشته می شود.

$$\Gamma_{ijk} = \Gamma_{ij}^l g_{lk}. \quad (24.3)$$

تعریف ۱۰.۳. ضرایب Γ_{ijl} را ضرایب کریستوفل نوع اول^{۲۰} و ضرایب Γ_{ij}^k را ضرایب کریستوفل نوع دوم^{۲۱} می نامند.

اگر طرفین رابطه (۲۴.۳) را در g^{lk} ضرب کنیم، داریم

$$\Gamma_{ijl} g^{lk} = \Gamma_{ij}^s g_{sl} g^{lk} = \Gamma_{ij}^s \delta_s^k = \Gamma_{ij}^k. \quad (25.3)$$

از روابط (۲۴.۳) و (۲۵.۳) مشخص می شود که با ضرب g^{ij} یا g_{ij} می توان رابطه بین ضرایب کریستوفل نوع اول و دوم را برقرار کرد. ضرایب کریستوفل نوع اول و دوم نسبت به اندیس های اول و دوم متقارن هستند، زیرا M رویه ای دیفرانسیل پذیر از کلاس C^2 است و در نتیجه توابع $x_{ij} = x_{ji}$ نسبت به اندیس های اول و دوم متقارن هستند. از آنجا

$$\Gamma_{ijk} = \Gamma_{jik}, \quad \Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k.$$

از ضرب اسکالر طرفین رابطه (۲۳.۳) در N با توجه به تعریف b_{ij} در دومین فرم اساسی داریم

$$x_{ij} \cdot N = \beta_{ij} (N \cdot N) = \beta_{ij} = b_{ij}.$$

از آنجا

$$x_{ij} = \Gamma_{ij}^k x_k + b_{ij} N. \quad (26.3)$$

^{۲۰} Christoffel coefficients of first kind

^{۲۱} Christoffel coefficients of second kind

همچنین مشتقات N_i ترکیباتی خطی از x_1 , x_2 و N هستند. چون N یکه است، بر N_i عمود است و لذا با x_1 و x_2 هم صفحه است. اگر ضرایب N_i را با b_i^1 و b_i^2 - نشان دهیم، فرمولی موسوم به وینگارت^{۳۴} به دست می آید که به آن عملگر شکل ^{۳۲} نیز می گویند. این نگاشت همان مشتق نگاشت گاووس است که دترمینان ماتریس آن انحنای گاووسی را به دست می دهد. برای اطلاعات بیشتر خواننده علاقه مند می تواند به صفحه ۸۱ کتاب [۳۸] رجوع نماید.

$$N_i = -b_i^k x_k. \quad (27.3)$$

تعريف ۲.۵.۳. فرمول گاووس ^{۳۳} و فرمول ^{۳۲} را فرمول وینگارت^{۳۴} می نامند.

برای محاسبه ضرایب فرمول وینگارت، طرفین این را بظه را در x_j - ضرب داخلی می کنیم.

$$-N_{i\bullet}x_j = b_i^k(x_k \bullet x_j) = b_i^k g_{kj}.$$

از طرفی $b_{ij} = b_i^k g_{kj}$ اگر طرفین رابطه بالا را در مؤلفه های ماتریس معکوس g^{jl} ضرب کنیم داریم

$$b_{ij} g^{jl} = b_i^k g_{kj} g^{jl} = b_i^k \delta_k^l = b_i^l.$$

همان طوری که مشاهده می شود، مؤلفه های ماتریس ، $b_i^l = b_{ij} g^{jl}$ و معکوس ضرایب متريک آن قادرند ارتباط بين انديس های بالايی و انديس های پايانی را برقرار کنند. اين موضوع بحث جالبي است که در آينده به آن پرداخته خواهد شد. در اينجا می خواهيم ضرایب كريستوفل Γ_{ij}^k را بر حسب ضرایب اولين فرم اساسی و مشتقاشان بيان کنيم.

^{۳۲}shape operator

^{۳۳}Gauss formula

^{۳۴}Weingarten

لم کریستوفل: فرض کنیم M رویه ای دیفرانسیل پذیر از کلاس C^{∞} بوده و کارت (x, U) با نمایش پارامتری (u^1, u^2, \dots, u^n) روی آن تعریف شده باشد. ضرایب کریستوفل را می‌توان تنها با ضرایب متریک رویه یا اولین فرم اساسی و مشتقات آن به صورت زیر بیان نمود.

$$\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} \right), \quad (28.3)$$

$$\Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2} g^{km} \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} \right). \quad (29.3)$$

اثبات. از رابطه $x_i \cdot x_j = g_{ij}$ نسبت به u^k مشتق می‌گیریم.

$$x_{ik} \cdot x_j + x_i \cdot x_{jk} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}.$$

از این رابطه، با توجه به تعریف ضرایب کریستوفل داریم

$$\Gamma_{ikj} + \Gamma_{jki} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}.$$

دو بار اندیس‌ها را به طور دوری تعویض می‌کنیم.

$$\Gamma_{jik} + \Gamma_{kij} = \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i},$$

$$\Gamma_{kji} + \Gamma_{iji} = \frac{\partial g_{ki}}{\partial u^j}.$$

دو معادله دوم و سوم را با یکدیگر جمع کرده معادله اول را از آن کم می‌کنیم. با توجه به این که ضرایب کریستوفل نسبت به دو اندیس اول و دوم متقارن هستند، داریم:

$$2\Gamma_{ijk} = \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}.$$

که از آنجا فرمول اول حکم نتیجه می‌شود. حال اگر طرفین رابطه بالا را در g^{km} ضرب کرده حاصل را بر ۲ تقسیم کنیم، رابطه دوم حکم حاصل می‌گردد.

$$\Gamma_{ijk} g^{km} = \Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2} g^{km} \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} \right).$$

□

مثال ۴.۵.۳. ضرایب کریستوفل صفحه در مختصات دکارتی را حساب کنید. فرض کنیم صفحه با معادله دکارتی $x(u^1, u^2) = u^1 \vec{i} + u^2 \vec{j}$ داده شود. بنا بر تعریف $\vec{i} = \frac{\partial x}{\partial u^1}$ و $\vec{j} = \frac{\partial x}{\partial u^2}$ و تمام ضرایب کریستوفل صفحه در مختصات دکارتی صفر می‌شود.

$$\Gamma_{ijk} = x_{ij} \cdot x_k = 0, \quad \Gamma_{ij}^l = \Gamma_{ijk} g^{kl} = 0.$$

مثال ۵.۵.۳. ضرایب کریستوفل صفحه در مختصات قطبی (ρ, θ) را محاسبه نموده نشان می‌دهیم که همگی با هم صفر نیستند. فرض کنیم صفحه در مختصات قطبی $x(\rho, \theta) = \rho \cos \theta \vec{i} + \rho \sin \theta \vec{j}$ داده شود. بنا بر تعریف $\vec{i} = \frac{\partial x}{\partial \rho} = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}$ و $\vec{j} = \frac{\partial x}{\partial \theta} = -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}$

$$x_{11} = 0, \quad \Gamma_{111} = \Gamma_{112} = x_{11} \cdot x_2 = 0, \quad \Gamma_{11}^1 = \Gamma_{111} g^{11} = 0,$$

$$x_{12} = -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}, \quad \Gamma_{121} = x_{12} \cdot x_1 = -\sin \theta \cos \theta + \sin \theta \cos \theta = 0,$$

به همین صورت داریم $\Gamma_{222} = \Gamma_{221} = 0$ اما ضرایب دیگر صفر نیستند.

$$x_{21} = -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}, \quad \Gamma_{122} = x_{12} \cdot x_2 = \rho \sin^2 \theta + \rho \cos^2 \theta = \rho,$$

$$x_{22} = -\rho \cos \theta \vec{i} - \rho \sin \theta \vec{j}, \quad \Gamma_{221} = x_{22} \cdot x_1 = -\rho \cos^2 \theta - \rho \sin^2 \theta = -\rho,$$

حال می‌توانیم با استفاده از مقادیر g^{ij} مقادیر ضرایب کریستوفل نوع دوم را پیدا می‌کنیم.

نتیجه ۶.۵.۳. از مثال ۵.۵.۳ نتیجه می‌شود که ضرایب کریستوفل یک رویه ممکن است در یک کارت یا دستگاه همگی صفر و در دستگاهی دیگر مخالف صفر باشند، لذا ضرایب کریستوفل به کارت‌ها یا به دستگاه مختصات بستگی دارند. از آینجا نتیجه می‌شود که ضرایب کریستوفل نوع اول یا دوم خاصیت تانسوری ندارند.

۱.۵.۳ تمرین های بخش

تمرین ۱.۵.۳. نشان دهید ضرایب کریستوفل نوع اول و دوم کرۀ S^2 در مختصات (θ, ϕ) با فرض $\theta = u^1$ به صورت زیر به دست می آید. می توانید از مثال ۶.۱.۳ در صفحه ۱۳۵ استفاده کنید.

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{22}^1 = 0, \quad \Gamma_{22}^1 = \cos u^1 \sin u^1, \quad \Gamma_{12}^2 = -\tan u^1.$$

تمرین ۲.۵.۳. ضرایب کریستوفل برای چنبره با پارامتری سازی زیر را پیدا کنید.

$$x(u^1, u^2) = ((b + a \cos u^1) \cos u^2, (b + a \cos u^1) \sin u^2, a \sin u^1).$$

۶.۳ بردار انحنای و خطوط ژئودزیک

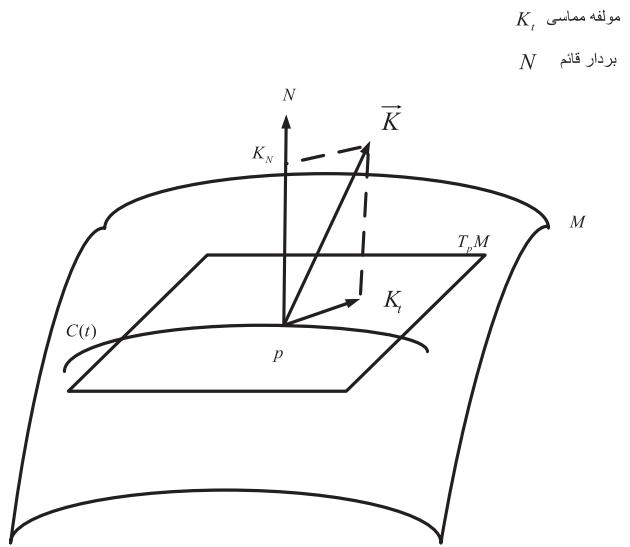
خطوط ژئودزیک^{۳۵} روی یک رویه نقش خط راست در صفحه را به عنوان کوتاه ترین فاصله بین دو نقطه بازی می کنند. همانطور که خطوط راست و خواص آن، اساس تعریف هندسه در فضای اقلیدسی هستند، ژئودزیک ها نیز در تعریف هندسه یک فضا نقش اساسی دارند. بعلاوه ژئودزیک ها به عنوان کوتاه ترین مسیر یا مسیرهای بهینه در کاربرد هندسه در فیزیک، علوم مهندسی و بهینه سازی نیز بسیار مورد استفاده قرار می گیرند.

فرض کنیم $C(t)$ یک منحنی در فضای \mathbb{R}^3 و N, T بردارهای یکه مماس و قائم آن باشند. در فصل منحنی ها بردار انحنای منحنی $C(t)$ در نقطه p را توسط $K = \frac{dT}{ds}$ تعریف کردیم. با توجه به فرمول اول فرنه می توان این رابطه را به صورت

$$K = \frac{dT}{ds} = \kappa N, \quad (30.3)$$

نوشت. لذا بردار انحنای منحنی هم راستا و هم جهت با بردار یکه قائم N در p بوده و طولش برابر با κ انحنای منحنی در p است. فرض کنیم M رویه ای دیفرانسیل پذیر از کلاس C^2

^{۳۵}geodesic

شکل ۷.۳: تجزیه بردار ایننا روی صفحه مماس و بردار قائم n .

و کارت (x, U) با نمایش پارامتری $x(u^1, u^2)$ روی آن تعریف شده باشد. در این بخش بردار قائم بر رویه در هر نقطه را با n نمایش می‌دهیم. حال اگر منحنی $C(t)$ روی رویه M قرار داشته باشد، بردار اینحنای K الزاماً روی صفحه مماس قرار ندارد و می‌توان آن را به دو مؤلفه مماسی و قائم تجزیه کرد. شکل ۷.۳ را ببینید. مؤلفه مماسی تصویر K روی صفحه مماس بر رویه در p و مؤلفه قائم تصویر K روی n بردار قائم بر رویه در نقطه p است.

تعریف ۱۰.۳. تصویر بردار ایننا روی صفحه مماس را با K_t نشان داده آن را بردار اینحنای ژئودزیک می‌نامیم. تصویر بردار ایننا روی بردار عمود n را با K_n نمایش داده آن را بردار اینحنای قائم می‌نامیم.

اگر منحنی C روی M قرار داشته باشد، می‌خواهیم مؤلفه مماسی بردار ایننا در نقطه $p \in M$ را برحسب بردارهای x_1 و x_2 در صفحه مماس $T_p M$ بنویسیم. فرض کنیم s پارامتر طول قوس باشد. منحنی C را می‌توان به دو صورت نوشت. اول

با استفاده از کارت (x, U) به صورت $x(s) = x(u^1(s), u^2(s))$. دوم با استفاده از معادله پارامتری آن منحنی در فضای \mathbb{R}^3 به صورت زیر

$$x(s) = x(u^1(s), u^2(s)) = x^1(s)\bar{i} + x^2(s)\bar{j} + x^3(s)\bar{k}.$$

به هر حال، بردار مماس $x' = \frac{dx}{ds}$ یکه است و در نتیجه از عبارت $x' \cdot x' = 1$ با مشتقگیری نسبت به s نتیجه می شود $x' \cdot x'' = 0$ ، بنابراین x'' در جهت N بوده و بنا بر فرمول اول فرنه طولش برابر κ است. لذا بنا بر تعریف بردار انحنای داریم $x'' = K$ از طرفی بنابر قاعده زنجیره ای

$$x' = \frac{dx}{ds} = \frac{\partial x}{\partial u^1} \frac{du^1}{ds} + \frac{\partial x}{\partial u^2} \frac{du^2}{ds} = x_i \frac{du^i}{ds}.$$

باید توجه داشت که در اینجا از قانون جمع‌بندی اینشتین استفاده می کنیم. نسبت به s مجدداً مشتق می‌گیریم

$$x'' = x_{ij} \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} + x_i \frac{d^3 u^i}{ds^2}. \quad (31.3)$$

از فرمول گاووس (۲۶.۳) در صفحه ۱۵۷ مقدار $x_{ij} = x_k \Gamma_{ij}^k + b_{ij} n$ را در رابطه (۳۱.۳) جایگذاری می‌کنیم.

$$x'' = (\Gamma_{ij}^k x_k + b_{ij} n) \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} + x_k \frac{d^3 u^k}{ds^2}.$$

با توجه به سه‌تایی (x_1, x_2, n) در فرمول گاووس، مقدار x'' را مرتب می‌کنیم.

$$K = x'' = \left(\frac{d^3 u^k}{ds^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} \right) x_k + b_{ij} \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} n. \quad (32.3)$$

بنابراین K_t بردار انحنای ژئودزیک و K_n بردار انحنای قائم به صورت زیرنوشته می‌شوند.

$$K_t = \left(\frac{d^3 u^k}{ds^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} \right) x_k, \quad (33.3)$$

$$K_n = b_{ij} \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} n,$$

$$K = K_t + K_n.$$

مثال ۲.۶.۳. اگر رویه M صفحه \mathbb{R}^2 با متریک اقلیدسی باشد، آنگاه K_t بردار انحنای ژئودزیک، بر بردار انحنا K منطبق می‌شود، زیرا در صفحه، ضرایب $b_{ij} = 0$ و از آنجا $K_n = K$. بنابراین $K_t = K$. اگر منحنی یک خط راست در صفحه باشد، $\kappa = 0$ و در نتیجه $K_t = 0$.

از مثال فوق نتیجه می‌شود که می‌توان تعریف زیر را به عنوان یک تعمیم برای تعریف خط راست روی رویه‌ها در نظر گرفت.

تعریف ۳.۶.۳. یک منحنی روی رویه را ژئودزیک می‌نامند، هرگاه بردار انحنای ژئودزیک آن در تمام نقاط صفر باشد.

از رابطه (۳۳.۲) نتیجه می‌شود که یک منحنی ژئودزیک است اگر و تنها اگر معادله آن در دستگاه منحنی الخط در رابطه زیر صدق کند. نتیجه ۲.۴.۲ در صفحه ۹۴ را ببینید.

$$\frac{d^2 u^k}{ds^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} = 0, \quad (34.3)$$

که در آن s پارامتر طول قوس است، یعنی در رابطه $g_{ij} \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} = 1$ صدق می‌کند. از روابط ۳۰.۳ و ۳۲.۳ نتیجه زیر حاصل می‌شود.

نتیجه ۴.۶.۳. منحنی C ژئودزیک رویه M است، اگر و تنها اگر در هر نقطه از آن بردار یکه قائم بر منحنی C در راستای بردار یکه قائم بر رویه M باشد.

مثال ۵.۶.۳. اگر رویه M صفحه \mathbb{R}^2 با متریک اقلیدسی باشد، می‌دانیم که $\Gamma_{jk}^i = 0$. اگر این رابطه را در معادله ژئودزیک (۳۴.۳) قرار دهیم، $\frac{d^2 u^k}{ds^2} = 0$. جوابهای این معادله عبارتند از $u^k(s) = a_1 s + b_1$ و $u^1(s) = a_2 s + b_2$. این معادله پارامتری خط راست در صفحه \mathbb{R}^2 است. این رابطه نشان می‌دهد، که خطوط ژئودزیک خطوطی هستند که شتاب آن‌ها صفر است.

مثال ۶.۶.۳. با استفاده از نتیجه ۴.۶.۳ می‌توان نشان داد که هر دایره عظیمه یک ژئودزیک کره بوده و بر عکس هر ژئودزیک کره یک دایره عظیمه است. در حقیقت در هر دایره بردار یکه قائم به سمت مرکز دایره بوده و چون دایره عظیمه است به سمت مرکز کره است. در نتیجه بردار یکه قائم بر دایره عظیمه بر سطح کره عمود است و بر عکس.

مثال ۷.۶.۳. می‌خواهیم معادله ژئودزیک‌های کره‌ای به شعاع a را در مختصات (θ, ϕ) با فرض $\theta = u^1$ و با نمایش پارامتری زیر را بنویسیم.

$$x = x(u^1, u^2) = (a \cos u^1 \cos u^2, a \cos u^1 \sin u^2, a \sin u^1).$$

روش اول. استفاده از معادله دیفرانسیل ژئودزیک‌ها. در تمرین ۱.۵.۳ در صفحه ۱۶۱ دیدیم که ضرایب کریستوفل در این دستگاه عبارتند از

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{22}^1 = 0, \quad \Gamma_{22}^1 = \cos u^1 \sin u^2, \quad \Gamma_{12}^2 = -\tan u^1.$$

اگر $\alpha(s) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s), \alpha_3(s))$ معادله پارامتری طبیعی یک منحنی روی کره باشد، آن را با استفاده از کارت x به صورت $\alpha(s) = x(u^1(s), u^2(s))$ یا به طور معادل $(u^1(s), u^2(s)) = x^{-1} \circ \alpha(s)$ می‌نویسیم. مختصات $x^{-1} \circ \alpha(s) = (u^1(s), u^2(s))$ را مختصات منحنی الخط منحنی نامیدیم. نتیجه ۲.۴.۲ در صفحه ۹۴ را ببینید. حال ضرایب کریستوفل را در معادله ژئودزیک‌ها یعنی رابطه (۳۴.۳) جایگذاری می‌کنیم. معادله ژئودزیک‌های کره به صورت دو معادله دیفرانسیل درجه دوم نوشته می‌شوند. جواب‌های این دو معادله دیفرانسیل ژئودزیک‌های کره هستند.

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u^1}{ds^2} + \Gamma_{22}^1 \frac{du^2}{ds} \frac{du^1}{ds} &= 0, & \frac{d^2 u^1}{ds^2} + \cos u^1 \sin u^2 \frac{du^2}{ds} \frac{du^1}{ds} &= 0, \\ \frac{d^2 u^2}{ds^2} + 2\Gamma_{12}^1 \frac{du^1}{ds} \frac{du^2}{ds} &= 0, & \frac{d^2 u^2}{ds^2} - 2\tan u^1 \frac{du^1}{ds} \frac{du^2}{ds} &= 0. \end{aligned}$$

نظر به این که حل این معادله دیفرانسیل درجه دوم در حالت کلی به سادگی امکان‌پذیر نیست، در اینجا فقط یکی از جواب‌های خاص را بررسی می‌کنیم. فرض کنیم در حالت

خاص $c_1 = u^2(s)$ ، ژئودزیک‌هایی را می‌خواهیم که نقطه آغازی آن‌ها نقطه (a, \cdot, \cdot) روی کره باشند. از آنجا با جایگذاری $\cdot = \frac{du^1}{ds}$ در معادله دیفرانسیل اول داریم $\cdot = \frac{d^2u^1}{ds^2} = 0$. جواب‌های این معادله دیفرانسیل عبارت است از $u^1 = c_2 s + c_3$ با استفاده از شرط نقطه آغازی (a, \cdot, \cdot) داریم $\cdot = c_2 = 0$ و $\cdot = c_3 = 0$ لذا $u^1 = c_2 s$ ، $c_3 = 0$ که یک دایره عظیمه یکی از جواب‌ها عبارت است از $x(s) = (a \cos c_2 s, \cdot, a \sin c_2 s)$ را که در صفحه $z = x \circ z$ است که از تقاطع کره با صفحه $z = x \circ z$ پدید می‌آید.

روش دوم. گزاره ۵.۷.۳ در صفحه ۱۷۰ را بینید.

مثال ۸.۶.۳. در اینجا می‌خواهیم نشان دهیم که مارپیچ‌ها یکی از ژئودزیک‌های استوانه هستند.

نشان می‌دهیم انحنای ژئودزیک مارپیچ صفر است. انحنای ژئودزیک یک منحنی مارپیچ به معادله پارامتری $\alpha(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$ واقع بر استوانه‌ای با نمایش پارامتری $|d\alpha/dt| = \sqrt{a^2 + b^2}$ را به دست آوریم. واضح است که $x(u^1, u^2) = (a \cos u^1, a \sin u^1, u^2)$ از آنجا بردار‌های یکه مماس و قائم و بردار انحنا در هر نقطه از منحنی به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} T &= \left(\frac{-a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin t, \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos t, \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right), \\ K &= T' = \frac{dT}{dt} \frac{dt}{ds} = \left(\frac{-a}{a^2 + b^2} \cos t, \frac{-a}{a^2 + b^2} \sin t, \cdot \right), \quad (35.3) \\ N &= (-\cos t, -\sin t, \cdot). \end{aligned}$$

لذا انحنای منحنی مارپیچ به عنوان یک منحنی در \mathbb{R}^3 برابر است با $\kappa = |K|$ یا به طور دقیق تر $\kappa = \frac{a}{a^2 + b^2}$. حال انحنای ژئودزیک منحنی مارپیچ به عنوان یک منحنی در روی

استوانه را حساب می کنیم. می دانیم بردارهای مماس و بردار عمود بر رویه عبارتند از

$$x_1 = (-a \sin u^1, a \cos u^1, 0), \quad x_2 = (0, 0, 1),$$

$$x_1 \times x_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -a \sin u^1 & a \cos u^1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a \cos u^1 i + a \sin u^1 j.$$

بردار یکه عمود بر رویه عبارت است از $(\cos u^1, \sin u^1, 0) \cdot n = (\cos u^1, \sin u^1, 0)$. با مقایسه این بردار با بردار عمود بر منحنی در رابطه (۳۵.۳) در می بایسیم که دو بردار n و K در یک راستا قرار دارند و در نتیجه انحنای ژئودزیک منحنی مارپیچ برابر صفر بوده منحنی مارپیچ یک ژئودزیک استوانه است.

برای به دست آوردن ژئودزیک های دیگر رویه که عبارتند از دایره و خط راست از نتیجه ۴.۶.۳ در صفحه ۱۶۴ استفاده می کنیم. یعنی نشان می دهیم که بردار قائم بر مارپیچ در هر نقطه در راستای بردار قائم بر استوانه است. تحقیق این موضوع را به خواننده واگذار می کنیم.

۱.۶.۳ تمرین های بخش

تمرین ۱.۶.۳. در مثال ۷.۶.۳ در صفحه ۱۶۵ جواب های معادله دیفرانسیل ژئودزیک های کره $\alpha(s) = x(u^1(s), u^2(s))$ ، با شرایط اولیه $du^1(t)/dt = c_1$ ، $du^2(t)/dt = c_2$ را طوری به دست آورید که نقطه آغازی آن ها نقطه $(0, a\sqrt{2}/2, a\sqrt{2}/2)$ روی کره باشد.

تمرین ۲. با ذکر یک مثال نشان دهید که ژئودزیک های یک رویه الزاما از اشتراک صفحه با رویه پدید نمی آیند.

تمرین ۳. در مثال ۶.۴.۳ در صفحه ۱۵۴ دیدیم که معادله پارامتری شبکه کره به صورت

زیر نوشته می شود.

$$x(u, v) = (u \cos v, u \sin v, f(u)), \quad 0 < u < a, \quad -\infty < v < +\infty,$$

که در آن تابع $f(u)$ توسط $f'(u) = -\sqrt{a^2 - u^2}/u$ تعریف می شود.

الف. علائم کریستوفل شبه کره را حساب کنید (فقط یک مولفه).

ب. با توجه به شکل ۶.۳ در صفحه ۱۵۶ چند نوع ژئودزیک روی شبه کره می توانید معرفی کنید؟ معادلات ژئودزیک شبه کره را به دست آورید (فقط یک معادله با توجه به مولفه بخش الف).

تمرین ۴.۶.۳. انحنای ژئودزیک منحنی مارپیچ روی روبه مارپیچ گون زیر را باید.

$$x(u^1, u^2) = (u^1 \cos u^2, u^1 \sin u^2, u^2).$$

۷.۳ وجود و یکتایی ژئودزیک‌ها

یکی از اصول اقلیدس بیان می دارد که از هر نقطه در صفحه در هر جهت دلخواه، یک خط راست یکتا می گذرد. در اینجا می خواهیم این اصل اقلیدس را برای روبه ها بررسی کنیم. به عبارت دیگر وجود ژئودزیک های روبه در جهات مختلف و شرط یکتایی آن را بررسی می کنیم. این اصل روبه ها به این صورت بیان می گردد که از هر نقطه روبه ای منظم از کلاس C^2 در هر جهت دلخواه، یک ژئودزیک می گذرد. به علاوه اگر روبه از کلاس C^3 باشد، این ژئودزیک یکتاست.

گزاره ۱.۷.۳. فرض کنیم M روبه ای منظم از کلاس C^2 باشد. از هر نقطه روبه M در هر جهت دلخواه، یک ژئودزیک می گذرد. به علاوه اگر روبه از کلاس C^3 باشد، این ژئودزیک یکتاست.

اثبات. فرض کنیم M رویه ای منظم از کلاس C^3 و کارت (x, U) با نمایش پارامتری $x(u^1, u^2)$ روی آن در یک همسایگی نقطه منظم $p = x(u_1^!, u_2^!)$ تعریف شده باشد. اگر بردار یکه $X = X^i x_i \in T_p M$ یک جهت مفروض در این نقطه باشد، ژئودزیکی را معرفی می‌کنیم که از نقطه p گذشته و بردار یکه مماس آن بردار X باشد. فرض کنیم $u^1(s)$ و $u^2(s)$ معادلات پارامتری یک ژئودزیک در روی رویه باشد به طوری که p نقطه آغازی و X راستای اولیه آن باشد. در این صورت داریم $du^i/ds = X^i$ لذا دستگاه معادلات دیفرانسیل درجه اول

$$\frac{dX^k}{ds} + \Gamma_{ij}^k X^i X^j = 0,$$

با راستای اولیه $u^i = u_1^!$ و نقطه آغازی $X^i = \frac{du^i}{ds}$ نوشته می‌شود. (در اینجا s پارامتر طول قوس است، یعنی مؤلفه‌های X در معادله $g_{ij} X^i X^j = 1$ صدق می‌کنند.) بنا بر قضیه وجود و یکتاپی جواب معادلات دیفرانسیل درجه اول، اگر ضرایب Γ_{ij}^k پیوسته باشند، این معادله دارای جواب است و در نتیجه ژئودزیکی وجود دارد که از نقطه p گذشته و در راستای X باشد. بعلاوه اگر کارت (x, U) از کلاس C^3 باشد، ضرایب Γ_{ij}^k از کلاس C^1 بوده، آنگاه بنا بر این قضیه در معادلات دیفرانسیل جواب فوق یکتاست. این موضوع اثبات گزاره را کامل می‌کند. \square

تذکر ۲.۷.۳. توجه نمایید که در گزاره بالا یکتاپی ژئودزیک‌ها در راستاها مشخص ثابت شده است. یعنی از هر نقطه در هر راستا فقط یک ژئودزیک یکتا می‌گذرد. یادآوری می‌کنیم که از گزاره فوق نمی‌توان نتیجه گرفت که از دو نقطه روی رویه الزاماً تنها یک ژئودزیک یکتا می‌گذرد. تمرین ۲.۷.۳ در صفحه ۱۷۲ را ببینید.

گزاره ۳.۷.۳. فرض کنیم M رویه ای منظم از کلاس C^2 باشد. هر منحنی از کلاس C^2 روی M یک ژئودزیک است، اگر و تنها اگر صفحه بوسان منحنی در هر نقطه بر رویه عمود باشد.

اثبات. فرض کنیم C یک منحنی روی رویه باشد. می‌دانیم K_t یا انحنای ژئودزیکی برابر صفر است، اگر و تنها اگر بردار انحنای منحنی C یا K با n بردار قائم بر سطح رویه هم‌راستا باشد. با توجه به فرمول اول فرنه، این شرط معادل آن است که بردار انحنای منحنی، بردار قائم بر منحنی و بردار قائم بر رویه هم راستا باشند. چون صفحه بوسان در هر نقطه از دو بردار یکه مماس و قائم تولید می‌شود، شرط اخیر مستلزم آن است که صفحه بوسان شامل خط قائم بر رویه بوده و لذا بر سطح رویه عمود باشد. این موضوع اثبات را کامل می‌کند.

مثال ۴.۷.۳. دوایر عظیمه روی کره ژئودزیک‌های کره هستند، زیرا صفحه، بوسان آن‌ها بر سطح کره عمود است. بنا بر گزاره ۱.۷.۳ از هر نقطه روی کره در هر جهت یک ژئودزیک می‌گذرد.

گزاره ۵.۷.۳. اگر منحنی پارامتری شده بر حسب طول قوس (s) روی کره S^2 قرار داشته باشد، آنگاه $\alpha(s)$ یک دایره عظیمه کره است، اگر و تنها اگر

$$\frac{d^2\alpha(s)}{ds^2} + \alpha(s) = 0. \quad (36.3)$$

اثبات. فرض کنیم که منحنی $\alpha(s)$ در معادله فوق صدق کرده و در روی کره S^2 به مرکز مبدأ مختصات قرار داشته باشد. می‌دانیم که اندازه بردار موضع آن برابر شعاع کره است، از آنجا با دو بار مشتقگیری نسبت به s داریم $\alpha(s) = 1$ و یا $|\alpha(s)| = 1$ لذا $\alpha''(s) \cdot \alpha(s) + \alpha'(s) \cdot \alpha'(s) = 0$ و $\alpha'(s) \cdot \alpha(s) = 0$

$$\alpha''(s) \cdot \alpha(s) = -1. \quad (37.3)$$

فرض کنیم B, N, T بردارهای کنج متحرک فرنه باشند. با استفاده از رابطه (۳۶.۲) داریم

$$T' = \alpha''(s) = -\alpha(s). \quad (38.3)$$

از آنجا با استفاده از فرمول اول فرنه $-\kappa N(s) = \alpha(s)$ مقدار انحنا به دست می‌آید،
با استفاده از این رابطه و جایگذاری رابطه (۳۸.۳) داریم
 $T' = N$ نوشته می‌شود. با

$$\begin{aligned} B &= T \wedge N = \alpha'(s) \wedge T' = -\alpha'(s) \wedge \alpha(s), \\ B' &= -\alpha''(s) \wedge \alpha(s) - \alpha'(s) \wedge \alpha'(s) = 0. \end{aligned}$$

از ثابت بودن بردار عمود دوم B در طول منحنی نتیجه می‌شود که منحنی مسطح بوده و تاب آن صفر است، پس در صفحه بوسان خود قرار دارد. چون صفحه بوسان از N می‌گذرد و $N = -\alpha(s)$ ، لذا صفحه بوسان از مبدأ می‌گذرد و در نتیجه دایره عظیمه است.

برعکس اگر $\alpha(s)$ دایره عظیمه باشد، آنگاه اولاً شاعع آن برابر یک و انحنا نیز برابر یک است، ثانیاً مسطح است و تاب آن صفر است. $\kappa = 1$. از فرمول های اول و دوم فرنه داریم $T'' = N' = -\kappa T + \tau B = -T$ و $T' = N$. که از آن رابطه (۳۶.۳) نتیجه می‌شود. \square

نتیجه ۶.۷.۳. اگر ژئودزیک های یک رویه در رابطه $\frac{d^2\alpha}{ds^2} + \alpha = 0$ صدق کنند، آنگاه کلیه ژئودزیک های آن دارای انحنای ثابت $\kappa = 1$ بوده و دوایری به شاعع ۱ هستند. در نتیجه می‌توان انتظار داشت که رویه مذکور کرده‌ای به شاعع ۱ باشد.

حسابان تغییرات و خاصیت کوتاهترین مسیر بودن ژئودزیک‌ها

فرض کنیم M رویه‌ای منظم از کلاس C^2 و $x(s, t) = x(u^1(s, t), u^2(s, t))$ خانواده همه منحنی‌های از کلاس C^2 روی آن باشد که از دو نقطه $A, B \in M$ می‌گذرد، به طوری که $x(s, 0) = x(s)$.

فرض کنیم L تابع طول قوس منحنی‌های بین دو نقطه A و B باشد. می‌توان نشان داد که منحنی $x(s)$ روی M ژئودزیک است، اگر و تنها اگر به ازای هر زوج از نقاط

تابع طول قوس منحنی $x(s)$ بین $A = x(a)$ و $B = x(b)$ روی آن L مینیمیم باشد. به عبارت دیگر در حسابان تغییرات ثابت می شود که $x(s)$ یک نقطه بحرانی برای خانواده توابع L بوده و مشتق L در طول $x(s)$ برابر صفر است. لذا اگر $x(s, t)$ خانواده ای از منحنی های روی رویه باشد به طوری که

$$L(t) = \int_a^b \left| \frac{dx(s, t)}{ds} \right| ds, \quad x(s, \cdot) = x(s),$$

آنگاه $L' = L(0)$. از این موضوع نتیجه می شود که L در طول ژئودزیک های رویه مینیمیم است.

در حسابان تغییرات و بهینه سازی این ژئودزیک ها را مسیرهای بهینه می نامند و کاربرهای بسیار متنوعی در علوم مختلف از علوم اجتماعی و اقتصاد تا فیزیک و شیمی و علوم مهندسی دارد. به عنوان مثال برای مشاهده یک کاربرد ژئودزیک ها در مکانیک و سینماتیک مسئله ناوبری تعقیب محض به مقاله [۲۰]، برای کاربرد آن در مدل سازی حرکت هواپیما به مقاله های [۲۱، ۵] و برای یک کاربرد آن در ربات ها به مقاله [۴] مراجعه نمایید.

۱.۷.۳ تمرین های بخش

تمرین ۱.۷.۳. الف. نشان دهید ژئودزیک های کره بخشی از دوایر عظیمه اند.

ب. نشان دهید دوایر عظیمه ژئودزیک های کره هستند.

راهنمایی: از گزاره ۴.۷.۳ و مثال ۳.۷.۳ نیز می توانید استفاده کنید.

تمرین ۲.۷.۳. با ذکر یک مثال نشان دهید که ژئودزیک های بین دو نقطه از رویه الزاما یکتا نیستند.

تمرین ۳.۷.۳. نشان دهید، الف. خط راست، ب. دایره و ج. مارپیچ ژئودزیک های استوانه هستند.

تمرین ۴.۷.۳. معادله پارامتری ژئودزیک‌های سهمی گون دوار زیر را به دست آورید.

$$x(u^1, u^2) = (u^1 \cos u^2, u^1 \sin u^2, (u^1)^2).$$

تمرین ۵.۷.۳. فرض کنیم که معادله یک رویه در دستگاه دکارتی با $z = f(x, y)$ داده شده باشد. معادله دیفرانسیل ژئودزیک‌های آن را ارائه نمایید.

تمرین ۶.۷.۳. جزیيات اثبات عکس قضیه ۵.۷.۲ را بنویسید.

تمرین زیر یک شرط لازم و کافی برای ژئودزیک بودن منحنی‌های روی یک رویه ارائه می‌دهد.

تمرین ۷.۷.۳. فرض کنیم $x(u, v)$ معادله پارامتری رویه M و $x(u(s), v(s))$ یک منحنی روی آن باشد که توسط طول قوس s پارامتری شده است. این منحنی یک ژئودزیک است اگر و تنها اگر

$$\frac{d^\gamma x}{ds^\gamma} = \lambda n$$

که در آن n بردار یکه قائم بر رویه و λ یک عدد ثابت است.

تمرین ۸.۷.۳. ثابت کنید اگر منحنی پارامتری شده بر حسب طول قوس $\alpha(s)$ روی کره ای با شعاع a قرار داشته باشد، آنگاه $\alpha(s)$ یک دایره عظیمه کره است، اگر و تنها اگر

$$\frac{d^\gamma \alpha(s)}{ds^\gamma} + \lambda \alpha(s) = 0,$$

که در آن λ تابعی از a است.

راهنمایی: از اثبات گزاره ۵.۷.۲ در صفحه ۱۷۰ استفاده کنید.

۸.۳ مجموعه تراز و نگاشت گاوس

تاکنون رویه‌ها را با استفاده از کارت‌ها تعریف نمودیم. این روش رانمایش پارامتری یک رویه می‌نماییم. راه دیگری نیز برای معرفی رویه‌های منظم به شرح زیر وجود دارد.
فرض کنیم $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع حقیقی سه متغیره و دیفرانسیل‌پذیر باشد (به مفهوم آنچه در ریاضی عمومی فراگرفتیم). در این صورت مجموعه

$$S(c) = \{p \in \mathbb{R}^3 | F(p) = c\},$$

را یک مجموعه ترازیا رویه تراز^{۳۶} تابع F نسبت به c می‌نماییم. این نمایش از رویه را نمایش غیر پارامتری^{۳۷} یک رویه نیز می‌گویند. به عنوان مثال مجموعه تراز تابع $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ تابع $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\text{grad } F = \frac{\partial F}{\partial x} e_1 + \frac{\partial F}{\partial y} e_2 + \frac{\partial F}{\partial z} e_3.$$

گزاره ۱.۸.۳. اگر F یک تابع حقیقی سه متغیره دارای مشتقات جزیی پیوسته باشد، به طوری که بردار گرادیان $\text{grad } F$ در تمام نقاط مخالف صفر باشد، آنگاه مجموعه تراز آن یک رویه منظم است.

اثبات. برای آن که نشان دهیم مجموعه تراز یک رویه است، کافی است نشان دهیم که در یک همسایگی هر یک از نقاط آن، یک کارت مختصاتی مانند $x_u \times x_v$ وجود دارد که در شرط $(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z})_{(p)} \neq 0$ ، داریم: $(\text{grad } F)_p \neq 0$. با استفاده از فرض $(\text{grad } F)_p \neq 0$ ، فرض کنیم $\frac{\partial F}{\partial z}(p) \neq 0$ بنا بر قضیه توابع ضمنی معادله $F(x, y, z) = c$ که یک تابع ضمنی سه متغیره است را می‌توان به صورت تابعی از z نوشت. به عبارت معادل تابع

^{۳۶}level set or level surface

^{۳۷}nonparametric representation

$F(x, y, h(x, y)) = c$ وجود دارد به طوری که $z = h(x, y)$ دیفرانسیل پذیری مانند لذا می توان کارتی به صورت زیر تعریف نمود که تصویر آن همه نقاط رویه را بپوشاند.

$$x(u, v) = (u, v, h(u, v)),$$

$$x_u \times x_v = \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & h_u \\ 0 & 1 & h_v \end{pmatrix} = h_u i + h_v j + k \neq 0.$$

بنابراین مجموعه تراز تابع F یک رویه منتظم است. \square

گزاره ۲.۸.۳. اگر F یک تابع حقیقی سه متغیره دارای مشتقات جزیی پیوسته باشد به طوری که بردار گرادیان $\text{grad } F$ در تمام نقاط مخالف صفر باشد، آنگاه بردار گرادیان در تمام نقاط بر سطح رویه تراز F عمود است.

اثبات. نشان می دهیم که بردار گرادیان بر سطح رویه تراز F عمود است. فرض کنیم $V_p = (v_1, v_2, v_3)_p$ یک بردار مماس بر رویه باشد، بنابر تعریف بردار مماس، یک منحنی مانند $\alpha(t)$ روی رویه قرار دارد به طوری که $\alpha(0) = p$ و $\alpha'(0) = V_p$. اگر $\alpha(t)$ را به

عنوان یک منحنی در \mathbb{R}^3 نگاه کنیم داریم

$$\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t))$$

چون $\alpha(t)$ روی رویه قرار دارد پس باید در معادله آن صدق کند. به عبارت دیگر برای هر t داریم

$$F(\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t)) = c$$

بنابر قاعدة زنجیره‌ای

$$\begin{aligned} \cdot &= \frac{\partial F(\alpha(t))}{\partial t} = \frac{\partial F \circ \alpha(t)}{\partial t} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial F}{\partial u_i}(\alpha(\cdot)) \frac{d\alpha_i}{dt}(\cdot) \\ &= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial F}{\partial u_i}(p) v_i = \text{grad } F(p) \cdot V_p = \langle \text{grad } F(p), V_p \rangle. \end{aligned}$$

لذا \square در هر نقطه p بر رویه عمود است.

۱.۸.۳ نگاشت گاوس

فرض کنیم که F یک تابع حقیقی سه متغیره دارای مشتقات جزیی پیوسته باشد، به طوری که بردار گرادیان $gradF$ در تمام نقاط مخالف صفر باشد. در گزاره ۲.۸.۳ در صفحه ۱۷۵ دیلیم که مجموعه تراز آن یک رویه منتظم است که آن را با M نمایش می‌دهیم. چون بردار گرادیان تابع F در هر نقطه بر مجموعه تراز عمود بوده و مخالف صفر است، با استفاده از آن می‌توان یک بردار یکهٔ قائم به شرح زیر به طور سرتاسری روی مجموعه تراز معرفی نمود.

$$n_p = \frac{grad F_p}{\|grad F_p\|}. \quad (39.3)$$

n_p برداری است یکهٔ که در هر نقطه بر رویه تراز $(c) S$ عمود است.

تعريف ۳.۸.۳. ^{۳۸} نگاشتی که به هر نقطه p از رویه M بردار یکهٔ n_p را وابسته می‌کند با $G : M \rightarrow S^1$ نمایش داده آن را نگاشت گاوس می‌نامیم.

باید توجه داشت که $(G(M))$ بنابر تعريف بخشی از کره واحد است. عموماً اگر M یک رویه باشد آنگاه تصویر آن توسط نگاشت گاوس نیز یک رویه است. لذا نگاشت گاوس رویه M نگاشتی بین رویه M و کره واحد S^1 است. این قاعده استنشاها بی نیز به شرح زیر دارد. در حالتی که رویه M یک صفحه باشد آنگاه n یک بردار ثابت است. اگر M یک استوانه یا یک مخروط باشد آنگاه $(G(M))$ از یک دایره تشکیل شده است. (چرا؟)

از طرف دیگر فرض کنیم رویه منتظم M دارای کارت (x, U) و بانمایش پارامتری $(u^1, u^2) \in D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow U \subset M$

^{۳۸}Gauss map

آنگاه می توان آن را با استفاده از کارت $x(u, v)$ و رابطه

$$n = \frac{x_u \times x_v}{|x_u \times x_v|}$$

به صورت پارامتری $n = n(u, v)$ نمایش داد. به عبارت دیگر

$$n : (u, v) \in D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow G(M) \subset S^2,$$

نقش کارت های $G(M) \subset S^2$ را بازی می کند. از این موضوع در تعریف انحنای گاووسی با استفاده از نگاشت گاووس در زیربخش ۲.۹.۳ در صفحه ۱۸۳ استفاده خواهیم کرد.

گزاره ۴.۸.۳. فرض کنیم p یک نقطه از رویه منتظم M و رویه $G(M)$ تصویر M تحت نگاشت گاووس باشد. آنگاه صفحه مماس بر رویه M در نقطه p و صفحه مماس بر رویه $G(M)$ در نقطه $G(p)$ موازی اند.

اثبات. فرض کنیم $x(u, v)$ یک تابع پارامتری از رویه M با بردار یکه عمود $U = U(u, v)$ باشد. با مشتقگیری از $U = U.U$ داریم

$$U.U_u + U_u.U = 0.$$

داریم $0 = U.U_u$ لذا U_u در صفحه x_u و x_v قرار دارد و می توان آن را به صورت ترکیب خطی از x_u و x_v نوشت. بنابراین اعدادی مانند p_1, p_2 وجود دارد به طوری که

$$U_u = p_1 x_u + p_2 x_v.$$

همچنین اعدادی مانند q_1, q_2 وجود دارد به طوری که

$$U_v = q_1 x_u + q_2 x_v.$$

از آنجا داریم

$$U_u \times U_v = (p_1 q_2 - p_2 q_1) x_u \times x_v.$$

از این رابطه نتیجه می شود که بردار عمود بر صفحه مماس بر رویه M در نقطه p و صفحه مماس بر رویه $G(M)$ در نقطه $G(p)$ در یک راستا قرار دارند و در نتیجه صفحات مماس آنها موازی هستند. \square

مثال ۵.۸.۳. اگر دایره‌ای به مرکز $(0, a, 0)$ و به شعاع b را حول محور z دوران دهیم، چنبره‌ای پدید می آید که معادله آن را می توان به صورت زیر نوشت. معادله ۹.۲ در صفحه **۸۷** را ببینید.

$$z^2 + \left(\sqrt{x^2 + y^2} - a \right)^2 = b^2 \quad a > b > 0.$$

الف. چنبره را به عنوان رویه تراز یک تابع سه متغیره معرفی کنید.

ب. نشان دهید که چنبره یک رویه منتظم است.

ج. نگاشت گاووس را برای چنبره معرفی کنید.

حل الف. چنبره T^2 را می توان به عنوان رویه تراز تابع F در نظر گرفت.

$$F(x, y, z) = z^2 + \left(\sqrt{x^2 + y^2} - a \right)^2 - b^2 = 0.$$

در این صورت $F^{-1}(0) = T^2$.

حل ب. نشان می دهیم که چنبره یک رویه منتظم است و بردار یکه نرمال آن را محاسبه می کنیم.

$$\begin{aligned} \text{grad } F &= \left\{ \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right\} \\ &= \left\{ \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} (\sqrt{x^2 + y^2} - a), \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} (\sqrt{x^2 + y^2} - a), 2z \right\} \end{aligned}$$

به وضوح داریم $(0, 0, 0) \neq \text{grad } F$. لذا بنابر گزاره ۲.۸.۳ چنبره یک رویه منتظم است. حل ج. برای تعریف نگاشت گاووس یا محاسبه بردار یکه قائم U_p کافی است مقادیر فوق را در $U_p = \frac{\text{grad } F}{\sqrt{\text{grad } F \cdot \text{grad } F}}$ جایگذاری کنیم.

۲.۸.۳ تمرین های بخش

تمرین ۱.۸.۳. فرض کنیم معادله رویه ای توسط نگاشت $f(x, y) = z = f(x, y)$ داده شود. نشان دهید بردار یکه عمود بر سطح که نگاشت گاووس را معرفی می کند برابر است با

$$U_p = \frac{(-f_x, -f_y, 1)}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}}.$$

تمرین ۲.۸.۳. الف. نشان دهید اگر معادله رویه مخروط راستگرد M توسط

$$x(u, v) = (1 - u, u \cos v, u \sin v).$$

داده شود آنگاه بردار یکه عمود بر سطح که نگاشت گاووس را معرفی می کند عبارت است از

$$U_p = \frac{(\cos^2 v, \cos v, \sin v)}{\sqrt{1 + \cos^2 v}}.$$

ب. نمودار این رویه را رسم کنید و از اینکه بردار U_p به متغیر u بستگی ندارد نتیجه بگیرید که این بردار در طول مولد مخروط ثابت است.

ج. نشان دهید که $G(M)$ تصوره M توسط نگاشت گاووس یک دایره است.

تمرین ۳.۸.۳. الف. معادله کرده S^2 را به صورت پارامتری نوشه نگاشت گاووس کرده را معرفی کنید.

ب. نشان دهید که $G(S^2)$ تصوره S^2 توسط نگاشت گاووس یک کره کامل است.

۹.۳ مساحت یک رویه

در اینجا می خواهیم مساحت روی رویه را با استفاده از اولین فرم اساسی محاسبه کنیم. فرض کنیم M یک رویه منظم با کارت (x, U) و بانمایش پارامتری (u^1, u^2) باشد. اگر مجموعه بردارهای مماس بر رویه M در نقطه $p \in U$ را با $T_p M$ نمایش دهیم، آنگاه

یک فضای برداری ۲-بعدی است که پایه های آن عبارتند از $\{x_1, x_2\}$ که در آن $T_p M$ و $x_2 = \frac{\partial x}{\partial u^2}$ گزاره ۵.۴.۲ در صفحه ۹۷ را بینید. مستقل از نمایش پارامتری یا کارت x ، پایه $T_p M$ را می توان توسط $\{\frac{\partial}{\partial u^1}, \frac{\partial}{\partial u^2}\}_{(p)}$ نمایش داد. تعریف دوم بردار مماس بر رویه ۲.۵.۲ در صفحه ۱۰۷ را بینید.

لم ۱۰.۳. فرض کنیم M یک رویه منتظم با کارت (x, U) و بانمایش پارامتری (u^1, u^2) باشد. آنگاه مساحت $U \subset \mathcal{U}$ از رابطه زیر به دست می آید.

$$S = \iint_{\mathcal{U} \subset M} \sqrt{\mathcal{G}} du^1 du^2, \quad (40.3)$$

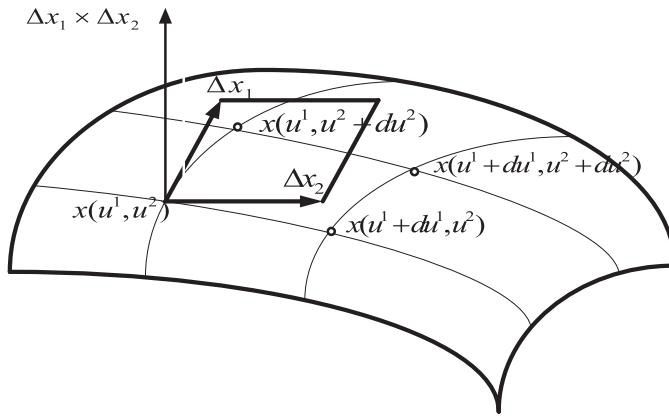
که در آن \mathcal{G} ، دترمینان ماتریس ضرایب متریک رویه است.

اثبات. فرض کنیم ناحیه ای از رویه $x(u^1, u^2) \subset M$ توسط کارت (u^1, u^2) پوشیده شود. همچنین فرض کنیم ناحیه ΔU یک ناحیه کوچک روی رویه باشد که توسط چهار منحنی زیر محدود شود. شکل ۸.۳ را بینید.

$$x(u^1(t), cte), \quad x(u^1(t)+du^1, cte), \quad x(cte, u^2(t)), \quad x(cte, u^2(t)+du^2).$$

می دانیم در هر نقطه $p \in M$ بردارهای $x_1 du^1$ و $x_2 du^2$ بسطح رویه در نقطه p مماسند زیرا مضربی از اعضای پایه فضای مماس هستند. اگر فرض کنیم $\Delta x_2 = x_2 du^2$ و $\Delta x_1 = x_1 du^1$ آنگاه مساحت ناحیه ΔU را می توان تقریبی از مساحت متوازی الاضلاعی که روی Δx_1 و Δx_2 ساخته می شود در نظر گرفت. اگر مساحت متوازی الاضلاع را با d نمایش دهیم، داریم

$$d U = |\Delta x_1 \times \Delta x_2| = |x_1 \times x_2| du^1 du^2. \quad (41.3)$$



شکل ۸.۳: کاربرد اولین فرم اساسی در محاسبه مساحت رویه با تقریب زدن مساحت ناحیه ΔU در روی رویه با مساحت متوازی الاضلاعی که روی دو بردار Δx_1 و Δx_2 ساخته می شود.

با استفاده از رابطه (۴.۳) داریم

$$dU = \sqrt{g_{11}g_{22} - (g_{12})^2} du^1 du^2 = \sqrt{\mathcal{G}} du^1 du^2. \quad (42.3)$$

با فرض $0 > du^1$ و $0 > du^2$ ، حد مجموع مساحت های این نواحی روی رویه M برابر مساحت ناحیه $\mathcal{U} \subset M$ است که آن را انتگرال رویه ای تعریف نموده با نماد زیر نمایش می دهیم.

$$S = \iint_{\mathcal{U} \subset M} dU = \iint_{\mathcal{U} \subset M} \sqrt{\mathcal{G}} du^1 du^2.$$

از آنجا رابطه ۴۰.۳ نتیجه می شود. یاد آوری می کنیم که برای محاسبه انتگرال رویه ای باید تصویر معکوس ناحیه \mathcal{U} روی M را به دست آورده مقدار انتگرال را روی ناحیه $x^{-1}(\mathcal{U}) \subset \mathbb{R}^2$ به روش انتگرال دوگانه معمولی ریمان محاسبه نمود.

$$\iint_{\mathcal{U} \subset M} \sqrt{\mathcal{G}} du^1 du^2 = \iint_{x^{-1}(\mathcal{U}) \subset \mathbb{R}^2} \sqrt{\mathcal{G}} du^1 du^2.$$



مثال ۲.۹.۳. مساحت کره به شعاع a را حساب کنید.

حل: در مثال ۶.۱.۳ در صفحه ۱۳۵ دیدیم که اولین فرم اساسی کره در مختصات (ρ, θ, ϕ) عبارت است از:

$$ds^2 = a^2 d\theta^2 + a^2 \cos^2 \theta d\phi^2$$

که در آن ناحیه $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ و $0 < \phi < 2\pi$ نیمی از کره را مشخص می‌کند.

$$\begin{aligned} S &= \int \int_{S_+^2 \subset S^2} dU = \int \int_{S_+^2 \subset S^2} \sqrt{g} d\theta d\phi = \int \int_{x^{-1}(S_+^2) \subset \mathbb{R}^2} \sqrt{a^2(a^2 \cos^2 \theta)} d\theta d\phi, \\ &= a^2 \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta d\phi = 4\pi a^2. \end{aligned}$$

۱.۹.۳ تمرین‌های بخش

تمرین ۱.۹.۳. الف. اولین فرم اساسی یا متریک چنبره به معادله پارامتری زیر را پیدا کنید.

$$x^1 = (b + a \cos u^1) \cos u^2, \quad x^2 = (b + a \cos u^1) \sin u^2, \quad x^3 = a \sin u^1.$$

ب. نشان دهید که مساحت چنبره برابر $4\pi ab^2$ است.

تمرین ۲.۹.۳. فرض کنیم $x : (u^1, u^2) \in D \subset \mathbb{R}^2$, $U \subset M$ یک کارت روی روبه منظم M و با اولین فرم اساسی g_{ij} باشد. فرض کنیم کارت دیگری $y : (v^1, v^2) \in (\bar{D} \subset \mathbb{R}^2)$ با اولین فرم اساسی \bar{g}_{ab} روی M تعریف شود که با کارت $x(u^1, u^2)$ توسط تابع $f : (u^1, u^2) \in D$, $(v^1, v^2) \in \bar{D}$ مرتبط است.

الف. نشان دهید که رابطه بین اولین فرم‌های اساسی روی این دو کارت به صورت زیر بیان می‌شود.

$$\bar{g}_{ab} = \sum_{i,j=1,2} g_{ij} \frac{\partial f_i}{\partial v^a} \frac{\partial f_j}{\partial v^b}, \quad a, b = 1, 2.$$

ب. از آن نتیجه بگیرید

$$g_{ij} = \sum_{a,b=1,2} \bar{g}_{ab} \frac{\partial v^a}{\partial u^i} \frac{\partial v^b}{\partial u^j}.$$

راهنمایی. الف. فرض کنیم

$$y = x \circ f, \quad y_a = \frac{\partial y}{\partial v^a}, \quad y_a = \sum_i x_i \frac{\partial f_i}{\partial v^a}.$$

سپس از تعریف $\bar{g}_{ab} = \langle y_a, y_b \rangle$ استفاده کنید.

ب. می توانید از روش بخش ۲.۳.۳ در صفحه ۱۴۴ که در آن رابطه بین اولین فرم اساسی در دو مختصات مختلف محاسبه گردیده است استفاده کنید.

تمرین ۳.۹.۳. نشان دهید که مساحت ناحیه D از رویه منتظم و جهت پذیر M به انتخاب کارت ها بستگی ندارد.

راهنمایی. فرض کنیم $y(v^1, v^2)$ کارت دیگری روی رویه باشد که با کارت $x(u^1, u^2)$ مرتبط باشد. به عبارت دیگر در رابطه $0 < \frac{\partial(v^1, v^2)}{\partial(u^1, u^2)} \leq 1$ صدق کند. نشان دهید $\int_M g = \int_D \bar{g}$ سپس از فرمول تغییر متغیر در انتگرال دوگانه استفاده کنید.

۲.۹.۳ تعریف انحنای گاووسی با استفاده از نگاشت گاووس

در این بخش می خواهیم انحنای گاووسی را با استفاده از نگاشت گاووس تعریف کنیم. فرض کنیم M یک رویه منتظم و کارت (x, U) با نمایش پارامتری (u^1, u^2) روی آن تعریف شده باشد. تصویر M توسط نگاشت گاووس یا بردار یکه قائم N بخشی از کره واحد است. از آنجا می توان بردار (u^1, u^2) را به عنوان یک کارت یا پارامتری سازی کرده در نظر گرفت. اگر قرار دهیم $N_i = \frac{\partial N}{\partial u^i}$ آنگاه در نقاطی که $N_1 \times N_2 \neq 0$ باشد این پارامتری سازی منتظم است. بردار $N_1 \times N_2$ بر دو بردار مماس بر کره N_1 و N_2 عمود است، لذا در راستای N است. اگر دو بردار $N_1 \times N_2$ و $N_1 \times N_2$ همجهت باشند می گوییم نگاشت گاووس

جهت را حفظ می کند و اگر این دو بردار دارای جهت مخالف باشند، می گوییم نگاشت گاوس جهت را تغییر می دهد. ابتدا گزاره زیر را که ارتباط بین $N_1 \times N_2$ و انحنای گاوس را برقرار می نماید، ثابت می کنیم.

گزاره ۴.۹.۳. فرض کنیم M یک رویه منتظم و کارت (x, U) با نمایش پارامتری $x(u^1, u^2)$ باشد. انحنای گاووسی رویه M در نقطه $U \in p$ را می توان از رابطه زیر به دست آورد.

$$\kappa(x_1 \times x_2) = N_1 \times N_2. \quad (43.3)$$

اثبات. چون N یک است مشتقات جزیی آن N_1 و N_2 بر N عمودند و در نتیجه با صفحه مماس $T_p M$ موازی اند. بنابراین می توان آنها را بر حسب اعضای پایه $T_p M$ نوشته از ضرب داخلی این فضا استفاده کرد.

$$N_1 = ax_1 + bx_2, \quad N_2 = cx_1 + dx_2. \quad (44.3)$$

از ضرب خارجی این دو بردار داریم

$$N_1 \times N_2 = (ax_1 + bx_2) \times (cx_1 + dx_2) = (ad - bc)(x_1 \times x_2).$$

لذا برای اثبات ۴۳.۳ کافی است نشان دهیم

$$(ad - bc) = \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \kappa. \quad (45.3)$$

با جایگذاری از رابطه ۴۴.۳ و رابطه ۱۴.۳ در صفحه ۱۴۱ داریم

$$-b_{11} = x_{1\bullet} N_1 = x_{1\bullet} (ax_1 + bx_2) = ag_{11} + bg_{12} \quad (46.3)$$

$$-b_{12} = x_{1\bullet} N_2 = x_{1\bullet} (cx_1 + dx_2) = cg_{11} + dg_{12}$$

$$-b_{21} = x_{2\bullet} N_1 = x_{2\bullet} (ax_1 + bx_2) = ag_{21} + bg_{22}$$

$$-b_{22} = x_{2\bullet} N_2 = x_{2\bullet} (cx_1 + dx_2) = cg_{21} + dg_{22}.$$

چون ضرایب اولین و دومین فرم اساسی متقارن هستند و داریم $b_{ij} = b_{ji}$, $g_{ij} = g_{ji}$ این روابط را می شود به شکل ضرب ماتریسی زیر نوشت.

$$\begin{pmatrix} -b_{11} & -b_{12} \\ -b_{21} & -b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}.$$

از آنجا بنا بر خاصیت دترمینان حاصلضرب دو ماتریس داریم

$$\det \begin{pmatrix} -b_{11} & -b_{12} \\ -b_{21} & -b_{22} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}.$$

با تقسیم طرفین فوق بر دترمینان ماتریس سوم و تعریف انحنای گاوی داریم

$$\kappa = \frac{b_{11}b_{22} - (b_{12})^2}{g_{11}g_{22} - (g_{12})^2} = (ad - bc).$$

□ این عبارت رابطه ۴۵.۳ را ثابت نموده اثبات گزاره کامل می شود.

فرض کنیم M رویه ای دیفرانسیل پذیر از کلاس C^r برای r به اندازه کافی بزرگ و کارت (x, U) با نمایش پارامتری $x(u^1, u^2)$ روی آن تعریف شده باشد. فرض کنیم $\mathcal{U} \subset U$ زیر مجموعه ای از برد کارت (x, U) باشد. می دانیم نقاط انتهایی بردار یکه عمود N در ناحیه \mathcal{U} بخشی از کره واحد را تشکیل می دهد که آن را با $G(\mathcal{U})$ نمایش داده و تصویر کروی \mathcal{U} می نامیم. $G(\mathcal{U})$ تصویر \mathcal{U} توسط نگاشت گاوی است. می خواهیم انحنای گاوی را با استفاده از نگاشت گاوی تعریف کنیم. در اینجا به علت ۲- بعدی بودن رویه به عنصر حجمی عنصر مساحت نیز گفته می شود.

گزاره ۵.۹.۳. فرض کنیم M رویه دیفرانسیل پذیر با کارت (x, U) و $\mathcal{U} \subset U$ یک همسایگی نقطه $p \in M$ باشد. اگر $G(\mathcal{U})$ تصویر \mathcal{U} توسط نگاشت گاوی باشد، آنگاه انحنای گاوی در نقطه p برابر است با حد مساحت $G(\mathcal{U})$ به مساحت \mathcal{U} وقتی که ناحیه \mathcal{U} به نقطه p تقلیل می یابد.

$$\kappa = \lim_{\mathcal{U} \rightarrow p} \frac{\text{Area } G(\mathcal{U})}{\text{Area } \mathcal{U}}.$$

اثبات. در لم ۱.۹.۳ در صفحه ۱۸۰ دیدیم که مساحت ناحیه \mathcal{U} از رویه M توسط رابطه (۴۲.۳) مجازبه می شود. عنصر سطح برای \mathcal{U} برابر است با

$$d\mathcal{U} = \sqrt{g} du^1 du^2 = |x_1 \times x_2| du^1 du^2. \quad (47.3)$$

$G(\mathcal{U})$ بخشی از کره واحد است و بردار $N(u^1, u^2)$ یک کارت یا پارامتری سازی کرده است. در نقاطی که $N_1 \times N_2 \neq 0$ باشد این پارامتری سازی منظم است. لذا عنصر سطح برای $G(\mathcal{U})$ عبارت است از

$$d\mathcal{U}' = |N_1 \times N_2| du^1 du^2. \quad (48.3)$$

لذا از روابط (۴۳.۳)، (۴۷.۳) و (۴۸.۳) داریم

لذا انحنای گاووسی را می توان با استفاده از گزاره فوق به شرح زیر تعریف نمود.

تعریف ۶.۹.۳. فرض کنیم M یک رویه منظم با کارت (x, U) باشد. اگر U' تصویر U توسط نگاشت گاوس باشد، آنگاه $\kappa = \lim_{U \rightarrow p} \frac{\text{Area } G(\mathcal{U})}{\text{Area } \mathcal{U}}$ را **انحنای گاووسی** در نقطه $p \in U$ می نامیم.

تعریف معادل دیگری از انحنای گاووسی مانند انحنای گاووسی به عنوان دترمینان ماتریس نگاشت خطی مشتق نگاشت گاوس که به آن نگاشت وینگارتمن یا عملگر شکل^{۳۹}، نیز می گویند وجود دارد که به منظور جلوگیری از اطالله کلام از آوردن آن خودداری می کنیم. خواننده علاقه مند می تواند به عنوان مثال به کتاب های [۳۸] صفحه ۸۷ و یا فصل هفتم [۴۲] مراجعه کند.

^{۳۹}shape operator

۳.۹.۳ تمرین های بخش

تمرین ۷.۹.۳. با استفاده از اثبات گزاره ۴.۹.۳ را برهه ای بین ضرایب اولین و دومین فرم اساسی بیابید. به عبارت دیگر نشان دهید که b_{ij} ضرایب دومین فرم اساسی را می توان بر حسب g_{ij} نوشت.

راهنمایی. با توجه به روابط ۴۱.۳ و ۴۲.۳ در صفحه ۱۸۰ داریم

تمرین ۸.۹.۳. با استفاده از تعریف ۶.۹.۳ مستقیماً انحنای گاووسی کره را به دست آورید.

۱۰.۳ چند کاربرد از تانسورها در نظریه رویه ها

فرض کنیم M رویه ای دیفرانسیل پذیر از کلاس C^2 بوده و کارت (x, U) با نمایش پارامتری $x(u^1, u^2)$ روی آن تعریف شده باشد. دیدیم که ضرایب اولین و دومین فرم اساسی یک رویه، مؤلفه های دو تانسور هستند. تانسور های مهم دیگری نیز روی رویه ها تعریف می شوند. یکی از آنها تانسوری است که توسط ریمان معرفی و به نام خود او مشهور گردید. متريک ریمان به نوعی تعمیم اولین فرم اساسی رویه M است، با این تفاوت که ضرب داخلی تعریف شده توسط آن روی فضای مماس $T_p M$ ، الزاماً مانند اولین فرم اساسی تحدید ضرب داخلی فضای اقلیدسی \mathbb{R}^3 نیست. تانسور مهم دیگری که توسط ریمان معرفی گردید تانسور انحنای ریمان است که می توان آن را مهم ترین نوآوری وی در هندسه نامید. یکی از کاربردهای تانسور ریمان تانسور ریچی است که اساس تعریف فضای اینشتین است. در این بخش به تعریف این تانسورها در روی رویه M می پردازیم.

۱.۱۰.۳ تعریف عمومی متريک ریمانی

فرض کنیم M یک رویه دیفرانسیل پذیر از کلاس C^2 و (x, U) یک کارت روی آن باشد.

تعريف ۱۰.۳. یک متريک ريماني^{۴۰} روی رویه M عبارتست از یک تانسور g از درجه (۲) روی M به طوری که در هر نقطه p از M ، در سه شرط زير صدق کند.

$$g_p : T_p M \times T_p M \longrightarrow I\!\!R,$$

$$(X, Y) \mapsto g_p(X, Y), \quad \forall X, Y \in T_p M,$$

- تانسور g_p مثبت باشد، یعنی به ازای هر $X \neq 0 \in T_p M$ داشته باشیم:

$$g_p(X, X) > 0.$$

- تانسور g_p متقارن باشد، یعنی

$$g_p(X, Y) = g_p(Y, X), \quad \forall X, Y \in T_p M,$$

- تانسور g_p ناتبھگون^{۴۱} باشد. یعنی $\det(g_{ij}) \neq 0$ باشد.

تعريف ۲۰.۳. فرض کنيم M یک رویه دیفرانسیل پذير از کلاس C^2 و g یک متريک ريماني روی آن باشد. دو تابع (M, g) را یک رویه ريماني^{۴۲} می نامند.

به راحتی می توان بررسی نمود که تانسور g در هر نقطه M یک ضرب داخلی روی $T_p M$ تعريف می کند. اين ضرب داخلی را توسط تانسور $(X, Y) \mapsto g_p(X, Y)$ نمایش می دهیم. چنانچه اين ضرب داخلی تحديد ضرب داخلی $I\!\!R^3$ روی M باشد آن را با $\langle X, Y \rangle_p$ نمایش داده به آن اولین فرم اساسی رویه می گوییم. بخش ۱۰.۲ در صفحه ۱۲۵ را ببینید. اگر (x, U) یک کارت در همسایگی نقطه p از رویه M ، $x = x(u^1, u^2)$ مختصات موضعی وابسته

^{۴۰} Reimannian metric

^{۴۱} non-degenerate

^{۴۲} Riemannian surface

به آن و $\{\frac{\partial x}{\partial u^i}\}$ پایه ای در همسایگی p روی $T_p M$ باشد داریم:

$$X = \sum_{i=1}^n X^i x_i(p) \quad , \quad Y = \sum_{i=1}^n Y^i x_i(p).$$

آنگاه در مختصات موضعی تانسور ریمان به صورت زیر نوشته می شود.

$$g_p(X, Y) = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} X^i Y^j,$$

که در آن (u^1, u^2) توابعی هستند که روی کارت (x, U) در همسایگی نقطه $p \in M$ در آن $g_{ij}(u^1, u^2)$ معرفی شوند.

$$g_{ij}(p) = g(x_i(p), x_j(p)),$$

و در رابطه $g_{ji} = g_{ij}$ صدق می کنند. در اینجا ضرایب g_{ij} را مولفه های تانسور ریمان می نامند. اگر ماتریسی ناتبه گون و مثبت باشد به آن معین مثبت^{۴۳} نیز می گویند.

مثال ۲۰.۳. اگر متریک ریمانی (X, Y) اولین فرم اساسی رویه یا تحدید ضرب داخلی بین دو بردار X و Y در فضای \mathbb{R}^n رویه باشد می توان آن را به صورت زیر نوشت:

$$\langle X, Y \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n X^i x_i, \sum_{j=1}^n Y^j x_j \right\rangle = \sum_{i,j} X^i Y^j \langle x_i, x_j \rangle = g_{ij} X^i Y^j.$$

یادآوری می شود که در تساوی آخر از قانون جمعبندی استفاده شده است.

۲۰.۳ تانسور انحنای ریمان

فرض کنیم M یک رویه منظم از کلاس C^3 و (x, U) یک کارت روی آن باشد. روی رویه M علائم ریمان از نوع اول را به صورت زیر معرفی می کنند،

$$R_{lijk} = b_{ik} b_{lj} - b_{ij} b_{lk},$$

^{۴۳}definite-positive

که در آن $i, j, k, l = 1, 2$ و b_{ij} ضرایب دومین فرم اساسی رویه هستند. به همین صورت علائم ریمان از نوع دوم به صورت زیر تعریف می شوند.

$$R_{ijk}^l = g^{ml} R_{mijk}.$$

می توان نشان داد که R_{mijk}^l مؤلفه های یک تانسور از درجه (4) و علائم R_{ijk}^l مؤلفه های یک تانسور از درجه (3) هستند که آنها را به ترتیب تانسور انحنای ریمان^{۴۴} نوع اول و دوم می نامند. با استفاده از تعریف می توان نشان داد که R_{mijk}^l نسبت به دو اندیس اول و دو اندیس آخر پادمتقارن می باشد؛ یعنی

$$R_{imjk} = -R_{mijk}, \quad R_{mikj} = -R_{mijk}.$$

از این خاصیت نتیجه می شود که هرگاه دو اندیس اول یا دو اندیس آخر با هم برابر باشند، مقدار این تانسور صفر می شود. بنابراین تنها چهار مؤلفه از R_{mijk}^l هستند که مخالف صفر هستند.

$$R_{1212} = R_{2121} = b_{22}b_{11} - b_{12}b_{21} = b, \quad (49.3)$$

$$R_{1221} = R_{2112} = b_{12}b_{21} - b_{22}b_{11} = -b.$$

در عبارت های بالا b مبین دومین فرم اساسی است.

مثال ۴.۱۰.۳. مؤلفه های تانسور انحنای ریمان صفحه در دستگاه مختصات اقلیدسی و در دستگاه مختصات قطبی صفر است. زیرا همان طور که در بخش دومین فرم اساسی دیدیم، برای هر دستگاه مختصات داریم $b_{ij} = 0$.

مثال ۵.۱۰.۳. مؤلفه های تانسور انحنای ریمان کره در دستگاه مختصات (θ, ϕ) را به دست می آوریم. در تمرین ۱۰.۳ در صفحه ۱۴۴ دیدیم که دومین فرم اساسی کره در مختصات

^{۴۴}Riemann Curvature Tensor

عبارت است از:

$$II = ad\theta^{\natural} + a\cos^{\natural}\theta d\phi^{\natural}.$$

از آنجا داریم $b_{11} = a$, $b_{22} = a \cos^{\natural}\theta$, $b_{12} = b_{21} = 0$ بنابراین از رابطه **۴۹.۳** مؤلفه های تانسور انحنای ریمان به دست می آیند.

$$R_{1212} = R_{2121} = a^{\natural} \cos^{\natural}\theta,$$

$$R_{1221} = R_{2112} = -a^{\natural} \cos^{\natural}\theta.$$

بقیه مؤلفه ها صفر هستند.

۳.۱۰.۳ تانسور ریچی و فضای اینشتین

اگر اثر ماتریس تانسور انحنای ریمان نوع دوم R_{ijk}^p را برای اندیس های اول از بالا و اندیس آخر از پایین بنویسیم تانسور جدیدی از درجه (۲) بدست می آید که آن را **تانسور ریچی**^{۴۵} می نامند و مؤلفه های آن را به صورت زیر نمایش می دهند:

$$R_{ijk}^k = R_{ij}.$$

می توان بررسی نمود که مؤلفه های تانسور ریچی نیز متقارن هستند. یعنی $R_{ij} = R_{ji}$. عمل مساوی قرار دادن یک اندیس بالایی و یک اندیس پایینی در مؤلفه های یک تانسور را عمل، انقباض تانسور^{۴۶} نامیدیم. تعریف **۱۰.۳.۳** در صفحه **۱۴۸** را بینید. در اینجا از انقباض تانسور ریمان نوع دوم R_{ijk}^p که تانسوری از درجه (۳) است برای اندیس های اول از بالا و اندیس آخر از پایین تانسور جدیدی از درجه (۲) حاصل شد که آن را تانسور ریچی نامیدیم. دیدیم که عمل انقباض برای حاصلضرب مؤلفه های دو تانسور

^{۴۵}Ricci Tensor

^{۴۶}contraction of tensor

نیز به شکل مشابه تعریف می‌شود. در اینجا از انقباض تانسور ریچی R_{ij} که تانسوری از درجه (۲) است با معکوس تانسور متريک ریمان g^{jk} که تانسوری از درجه (۲) است تانسور جدیدی از درجه (۴) یا یک اسکالر حاصل می‌شود که آن را انحنای اسکالر نامیده با $R = g^{mj}R_{mj}$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۶.۱۰.۳. می‌گوییم رویه ریمانی (M, g) یک فضای اینشتین^{۴۷} ۲-بعدی است اگر تانسور ریچی آن مضری از تانسور متريک ریمان باشد.

به عبارت دیگر رویه ریمانی (M, g) یک فضای اینشتین است اگر و تنها اگر داشته باشیم $R_{ik} = \alpha g_{ik}$ که در آن α یک تابع عددی یا یک تابع حقیقی روی M است. به راحتی می‌توان نشان داد که $R = g^{mj}R_{mj} = \frac{R}{2}$ که در آن $\alpha = \frac{R}{2}$ انحنای عددی است. تمرین ۶.۱۰.۳ در صفحه ۱۹۴ را ببینید.

مثال ۷.۱۰.۳. مؤلفه‌های تانسور انحنای ریچی کره در دستگاه مختصات (ϕ, θ) را به دست می‌آوریم. در مثال ۵.۱۰.۳ در صفحه ۱۹۰ دیدیم که مؤلفه‌های تانسور انحنای ریمان نوع اول عبارتند از:

$$\begin{aligned} R_{1212} &= R_{2121} = a^2 \cos^2 \theta, \\ R_{1221} &= R_{2112} = -a^2 \cos^2 \theta. \end{aligned}$$

بقیه مؤلفه‌ها صفر هستند. از رابطه ۱۲.۳ در صفحه ۱۳۶ نتیجه می‌شود که ضرایب اولین فرم اساسی کره عبارتند از θ $g_{11} = a^2$, $g_{12} = g_{21} = 0$, $g_{22} = a^2 \cos^2 \theta$ و لذا دترمینان آن عبارت است از θ $g = a^4 \cos^4 \theta$. مؤلفه‌های ماتریس معکوس اولین فرم اساسی کره عبارتند از

$$\begin{aligned} g_{11}g^{11} &= \delta_1^1 = 1, \quad g^{11} = \frac{1}{a^4}, \\ g_{11}g^{21} &= \delta_1^2 = 0, \quad a^2 g^{21} = 0, \quad g^{21} = g^{12} = 0, \\ g_{22}g^{22} &= \delta_2^2 = 1, \quad g^{22} = \frac{1}{a^4 \cos^4 \theta}. \end{aligned}$$

^{۴۷}Einstein Space

از آنجا می توان مؤلفه های تانسور انحنای ریمان نوع دوم را از رابطه زیر به دست آورد.

$$R_{ijk}^l = g^{ml} R_{mijk} = g^{\lambda l} R_{\lambda ijk} + g^{\gamma l} R_{\gamma ijk}.$$

با استفاده از این روابط مؤلفه های تانسور انحنای ریچی کره در دستگاه مختصات (ϕ, θ) به دست می آید. این موضوع به عنوان تمرین واگذار می شود.

گزاره ۴.۱۰.۳. هر رویه از کلاس C^3 با اولین فرم اساسی آن یک فضای اینشتین ۲-بعدی است.

اثبات. اثبات به عنوان تمرین به خواننده واگذار می گردد. تمرین ۴.۱۰.۳ در صفحه ۱۹۴ را ببینید. \square

۴.۱۰.۳ تمرین های بخش

تمرین ۱.۱۰.۳. الف. با استفاده از تعریف نشان دهید که مؤلفه های تانسور انحنای ریمان R_{mijk} نسبت به دو اندیس اول و دو اندیس آخر پادمتری ایست.

ب. با استفاده از خاصیت پادمتری بودن مؤلفه های تانسور انحنای ریمان R_{mijk} نشان دهید که اگر دو اندیس اول و دو اندیس آخر با هم برابر باشند آن مؤلفه صفر است.

ج. مؤلفه های غیر صفر تانسور انحنای ریمان را بنویسید.

تمرین ۲.۱۰.۳. نشان دهید که علائم R_{mijk} مؤلفه های یک تانسور از درجه $(\frac{4}{3})$ و علائم R_{ijk}^l مؤلفه های یک تانسور از درجه $(\frac{1}{3})$ هستند.

تمرین ۳.۱۰.۳. نشان دهید مؤلفه های تانسور انحنای ریچی متقارن هستند.

تمرین ۴.۱۰.۳. مؤلفه های تانسور انحنای ریچی کره در دستگاه مختصات (ϕ, θ) را به دست آورید.

تمرین ۵.۱۰.۳. ثابت کنید ارتباط تانسور انحنای ریمان با انحنای گاووسی K یک رویه از رابطه زیر به دست می آید که در آن \mathcal{G} مبین اولین فرم اساسی است.

$$R_{1212} = K\mathcal{G}.$$

تمرین ۶.۱۰.۳. فرض کنیم که (M, g) یک رویه ریمانی از کلاس C^3 و $R_{ij} R_{ij}$ تانسور ریچی آن باشد. نشان دهید که (M, g) فضای ۲-بعدی اینشتین است اگر و تنها اگر

$$R_{jk} = \frac{R}{2} g_{jk}.$$

راهنمایی. رابطه $R = g^{jk} R_{jk} = g^{jk} \alpha g_{jk} = 2\alpha$, از آن استفاده کنید.

تمرین ۷.۱۰.۳. سطح دوار را با نمایش پارامتری زیر همراه با اولین فرم اساسی آن به عنوان یک رویه ریمانی در نظر بگیرید.

$$x(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, h(u)).$$

- الف. یکی از مؤلفه‌های غیر صفر تانسور انحنای ریمان نوع اول را محاسبه کنید.
- ب. یکی از مؤلفه‌های غیر صفر تانسور انحنای ریمان نوع دوم را محاسبه کنید.
- ج. یکی از مؤلفه‌های غیر صفر تانسور انحنای ریچی را به دست آورید.
- د. انحنای اسکالر را برای سطح دوار محاسبه کنید.

راهنمایی. برای مولفه‌های دومین فرم اساسی این رویه به تمرین ۲.۳.۳ در صفحه ۱۴۴ مراجعه کنید.

تمرین ۸.۱۰.۳. هر رویه ۲-بعدی از کلاس C^3 با اولین فرم اساسی آن یک فضای اینشتین است.

راهنمایی. به زیربخش ۳.۱۲.۳ در صفحه ۲۱۳ مراجعه کنید. در یک دستگاه مختصات متعامد یکه

نشان دهید:

$$R_{1221} = R_{11}g_{22} = R_{11}g_{11}, R_{12} = 0$$

$$R = R_{ij}g^{ij} = \frac{2R_{1221}}{g_{11}g_{22}}.$$

در صورت نیاز می توانید کتاب [۳۶] صفحه ۲۲۸ را ببینید.

تمرین ۹.۱۰.۳. می توان نشان داد که تانسور انحنای ریمان از فرمول زیر نیز محاسبه می شود. در حقیقت در فیزیک و هندسه این رابطه را برای تعریف مولفه های تانسور انحنای ریمان در روی هر منیفلد ریمانی n بعدی استفاده می کنند. یک رویه ساده که قبلاً ضرایب کریستوفل و انحنای ریمان آن را محاسبه کرده اید مثال بزنید و نشان دهید تانسور انحنای ریمان آن در رابطه زیر صدق می کند.

$$R^t_{ijk} = \partial_i \Gamma^t_{jk} - \partial_j \Gamma^t_{ik} + \Gamma^s_{jk} \Gamma^t_{is} - \Gamma^s_{ik} \Gamma^t_{js}.$$

۱۱.۳ نگاشت ایزومتری

رویه دیفرانسیل پذیر M از کلاس C^3 با نمایش پارامتری $(x(u^1, u^2))$ را در نظر می گیریم. فرض کنیم \bar{M} رویه دیفرانسیل پذیر دیگری از کلاس C^3 با نمایش پارامتری $(\bar{x}(\bar{u}^1, \bar{u}^2))$ باشد، که در یک تناظر دوسویی و دیفرانسیل پذیر^{۴۸} با رویه M قرار دارد،

$$F : M \rightarrow \bar{M}.$$

می گوییم این تناظر یک ایزومتری است اگر F طول قوس منحنی های متناظر روی هر دو رویه را حفظ نماید. در این صورت اگر g_{ij} و \bar{g}_{ij} مولفه های اولین فرم اساسی این دو رویه باشند، می گوییم دو رویه (M, g_{ij}) و (\bar{M}, \bar{g}_{ij}) ایزومتریک^{۴۹} هستند. اگر هر نقطه

^{۴۸} یعنی یک نگاشت دیفئومورفیسم بین این دو رویه وجود داشته باشد.

^{۴۹} isometric

از یک رویه دارای یک همسایگی باشد که بتوان آن را به طور ایزومتریک روی همسایگی نقطه‌ای از رویه‌ای دیگر تصویر کرد، آنگاه این دو رویه راموضعاً ایزومتریک^{۵۰} می‌گویند. توجه کنید که هر دو رویه ایزومتریک موضعاً ایزومتریک نیز هستند اما عکس این موضوع الزاماً برقرار نیست.

مثال ۱۱.۳. رویه هایی را که بتوان بدون بریدن، چسباندن و کش دادن (استفاده از حالت ارجاعی)، بر یکدیگر منطبق نمود، با هم ایزومتریک هستند. در مثال ۱۱.۳ نشان می‌دهیم که صفحه با استوانه موضعاً ایزومتریک است. قبل از آنکه به حل تحلیلی مساله بپردازیم توجه کنید که اگر یک خط روی صفحه رسم نموده و سپس صفحه را بدون کشیدن یعنی بدون آنکه از حالت ارجاعی خود خارج شود به شکل نیم استوانه درآوریم آنگاه طول آن خط روی صفحه و طول آن خط روی استوانه با هم برابر است. این تغییر شکل یک نگاشت ایزومتری است. باید توجه داشت که این تناظر فقط در همسایگی های هر نقطه برقرار است، از این رو آن را موضعاً ایزومتریک می‌گوییم. واضح است که اگر دو لبه صفحه را به یکدیگر بچسبانیم دیگر نگاشت بین صفحه و استوانه یک به یک نبوده و در نتیجه تناظر بین صفحه و استوانه کامل یک ایزومتری نیست. بنابراین صفحه را می‌توان به طور موضعی بر روی استوانه منطبق نمود.

موضوع دیگری که در هنگام تغییر شکل صفحه باید در نظر داشت آن است که نباید صفحه را تا نمود زیرا در این صورت اگرچه طول منحنی های روی صفحه ثابت می‌ماند اما صفحه از حالت دیفرانسیل پذیری خارج می‌شود و این موضوع مشکلاتی در تعریف ایزومتری ایجاد می‌کند.

^{۵۰} locally isometric

۱.۱۱.۳ نمایش پارامتری سازگار و قضیه اساسی

فرض کنیم M و \bar{M} دو رویه دیفرانسیل پذیر از کلاس C^3 با نمایش های پارامتری $x = x(u^1, u^2)$ و $\bar{x} = \bar{x}(\bar{u}^1, \bar{u}^2)$ یک نگاشت دیفرانسیل پذیر باشد. فرض کنیم $p \in M$ و $\bar{p} \in \bar{M}$ تصور آن توسط $G : M \rightarrow \bar{M}$ باشد. در این صورت برای نقطه $\bar{p} \in \bar{M}$ دو مختصات تعریف می شود یکی توسط کارت \bar{x} و دیگری توسط تصور کارت x تحت G که ارتباط آنها توسط رابطه زیر داده شده است.

$$\bar{u}^1 = \bar{u}^1(u^1, u^2) \quad \bar{u}^2 = \bar{u}^2(u^1, u^2).$$

این رابطه مشابه رابطه ۱.۲ در صفحه ۶۵ است که آن را تغییر پارامتر تحت نگاشت G نیز می نامیم. از آنجا مختصات هر نقطه $\bar{p} \in \bar{M}$ را با نمایش پارامتری زیر نیز می توان نوشت.

$$\bar{x}_*(u^1, u^2) = \bar{x}(\bar{u}^1(u^1, u^2), \bar{u}^2(u^1, u^2)).$$

با این پارامتر سازی جدید برای \bar{M} ، نقاط متناظر از هر دو سطح دارای یک مختصات بوده و بردارهای متناظر دارای مولفه های یکسان نسبت به پایه های طبیعی هردو سطح می باشند. در این صورت می گوییم که این نمایش پارامتری رویه ها نسبت به نگاشت G سازگار^{۵۱} است. به عبارت دیگر وقتی که دو رویه M و \bar{M} دارای نمایش پارامتری سازگار هستند، می توان فرض نمود که $\bar{u}^i = u^i$. نمایش پارامتری سازگار باعث می شود که انجام محاسبات در روی رویه ها ساده تر گردد. از این رو در ادامه هرگاه با نگاشتی بین دو رویه مواجه شویم فرض می کنیم که نمایش پارامتری آن ها سازگار باشد.

قضیه ۲.۱۱.۳. فرض کنیم M و \bar{M} دو رویه دیفرانسیل پذیر از کلاس C^3 باشند. این دو

^{۵۱}compatible parametrization

رویه ایزومتریک موضعی هستند اگر و تنها اگر در نمایش پارامتری سازگار داشته باشیم

$$g_{ij} = \bar{g}_{ij}.$$

اثبات. فرض کنید $(a \leq t \leq b)$, $C = C(t)$ نمایش پارامتری منحنی دلخواه روی M باشد. در حالت کلی ممکن است C به طور کامل روی یک کارت قرار نگیرد، با این وجود با توجه به فشردگی C می‌توان آن را به تعداد متناهی منحنی مانند $C_i = C_i(t)$ به طوری که برای هر $t_i \leq t \leq t_{i+1}$, $i = 0, \dots, n-1$ تقسیم کرد که هر C_i روی یک کارت $x^i = x^i(u, v)$ قرار داشته باشد. فرض کنیم $g_{ij} du^i du^j$ اولین فرم اساسی M و $\bar{g}_{ij} du^i du^j$ اولین فرم اساسی \bar{M} باشد. اگر C یک منحنی روی M و \bar{C} تصویر آن توسط $F : M \rightarrow \bar{M}$ باشد، با توجه به سازگاری پارامترها C و \bar{C} دارای معادلات پارامتری یکسان در مختصات $u^i = u^i(t)$ هستند. در لم ۴.۱.۳ در صفحه ۱۳۳ دیدیم که طول قوس منحنی C از t تا t . روی M برابر است با

$$L = \int_{t_0}^t \sqrt{g_{ij} \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt}} dt$$

و طول قوس \bar{C} روی \bar{M} برابر است با

$$\bar{L} = \int_{t_0}^t \sqrt{\bar{g}_{ij} \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt}} dt$$

طبق تعریف، این تناظر ایزومتری است اگر و فقط اگر به ازای هر دو منحنی متناظر دلخواه بر حسب پارامتر t داشته باشیم $L = \bar{L}$. به عبارت دیگر

$$\int_{t_0}^t \sqrt{g_{ij} du^i du^j} = \int_{t_0}^t \sqrt{\bar{g}_{ij} du^i du^j}.$$

با مشتقگیری از طرفین تساوی نسبت به t داریم

$$g_{ij} du^i du^j = \bar{g}_{ij} du^i du^j.$$

از آنجا نتیجه می شود

$$\sum_{ij=1,2} (\bar{g}_{ij} - g_{ij}) du^i du^j = 0.$$

چون در اینجا از زیگما استفاده شده است، نمی توانیم مستقیماً از این رابطه نتیجه بگیریم $\bar{g}_{ij} - g_{ij} = 0$. اما چون رابطه فوق برای هر منحنی دلخواه برقرار است، با انتخاب منحنی های مناسب می توان نتیجه مطلوب را به شرح زیر حاصل نمود. اگر منحنی های دلخواه $u^1 = u^1 + t$ و $u^2 = u^2 + t$ با اختیار منحنی $g_{11}(u^1, u^2) = g_{11}(u^1 + t, u^2 + t)$ داریم $u^1 = u^1 + t$ و $u^2 = u^2 + t$ با اختیار منحنی $g_{22}(u^1, u^2) = g_{22}(u^1 + t, u^2 + t)$ به دست می آید:

$$\begin{aligned} & \bar{g}_{11}(u^1, u^2) + \bar{g}_{12}(u^1, u^2) + \bar{g}_{22}(u^1, u^2) = \\ & g_{11}(u^1, u^2) + g_{12}(u^1, u^2) + g_{22}(u^1, u^2). \end{aligned}$$

از آنجا $(\bar{g}_{12}(u^1, u^2) = g_{12}(u^1, u^2))$ می تواند دلخواه باشد، از آن نتیجه $\bar{g}_{ij} = g_{ij}$ می شود. عکس قضیه نیز برقرار است؛ یعنی از رابطه $\bar{g}_{ij} = g_{ij}$ نتیجه می شود که در پارامتری سازی سازگار طول قوس منحنی در هر دو رویه برابر و در نتیجه نگاشت ایزومتری است. این موضوع اثبات قضیه را کامل می کند. \square

مثال ۳.۱۱.۳. می دانیم معادله پارامتری استوانه را می توان به صورت زیر نوشت.

$$x(u^1, u^2) = (\cos u^1, \sin u^1, u^2)$$

$$x_1 = \frac{\partial x}{\partial u^1} = (-\sin u^1, \cos u^1, 0), \quad x_2 = \frac{\partial x}{\partial u^2} = (0, 0, 1)$$

$$g_{11} = \sin^2 u^1 + \cos^2 u^1 = 1, \quad g_{12} = g_{21} = 0, \quad g_{22} = 1.$$

از طرف دیگر معادله پارامتری صفحه عبارت است از (u_1, u_2, \cdot) . لذا برای صفحه داریم:

$$g_{11} = 1, \quad g_{12} = g_{21} = 0, \quad g_{22} = 1.$$

در نتیجه $g_{ij} = g_{ij}$ و بنا بر قضیه فوق هر دو رویه موضعی ایزومتریک هستند.

مثال ۴.۱۱.۳. زنجیرگون ^{۵۲} رویه‌ای است دوار که معادله پارامتری آن توسط رابطه زیر داده می‌شود.

$$x(u^1, u^2) = \left(a \cosh \frac{u^1}{a} \cos u^2, a \cosh \frac{u^1}{a} \sin u^2, au^1 \right).$$

در تمرین ۱۱.۱.۳ در صفحه ۱۳۷ دیدیم که اولین فرم اساسی آن عبارت است از

$$ds^2 = a^2 \cosh^2 \frac{u^1}{a} ((du^1)^2 + (du^2)^2). \quad (1.3)$$

در تمرین ۱۲.۱.۳ در صفحه ۱۳۸ دیدیم که مارپیچگون رویه‌ای است که از خطوط ماربر یک مارپیچ و عمود بر محور آن تشکیل می‌شود. معادله پارامتری مارپیچگون توسط رابطه زیر داده می‌شود.

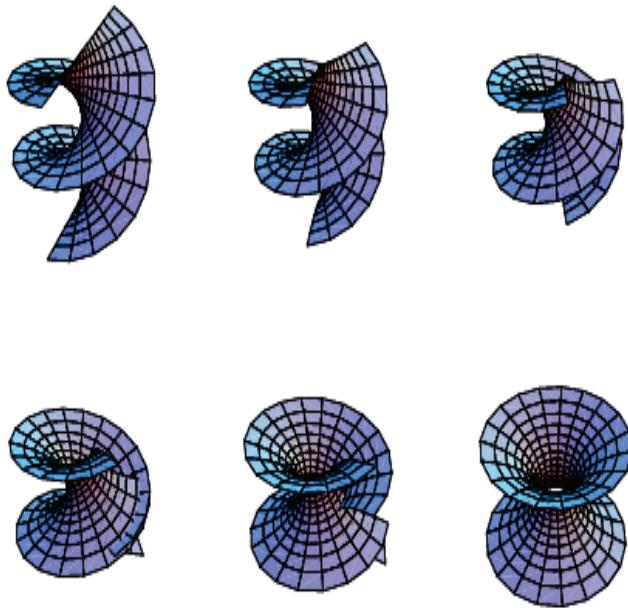
$$\bar{x}(v^1, v^2) = (v^1 \cos v^2, v^1 \sin v^2, av^2).$$

دیدیم که اولین فرم اساسی آن عبارت است از

$$ds^2 = (dv^1)^2 + ((v^1)^2 + a^2) (dv^2)^2. \quad (2.3)$$

نشان دهید که زنجیرگون با مارپیچگون ایزومتریک (موضعی) است و نگاشت ایزومتری موضعی را ارائه نمایید.

^{۵۲}catenoid



شکل ۹.۳: با استفاده از نگاشت های ایزومتری موضعی می توان مارپیچ گون رابه تدریج به زنجیرگون تبدیل کرد.

حل. اگر F نگاشت ایزومتری بین دو رویه زنجیرگون و مارپیچگون باشد، باید در پارامتر سازگار به صورت زیر نوشته شود.

$$F(u^1, u^2) = (F_1(u^1, u^2), F_2(u^1, u^2)) = (v^1, v^2). \quad (3.3)$$

برای آنکه این دو رویه ایزومتریک موضعی باشند بنا بر قضیه ۲۰۱۱.۳ در صفحه ۱۹۷ در پارامتر سازگار باید دارای اولین فرم های اساسی برابر باشند. از تساوی روابط ۲.۳ و ۱.۳ نتیجه می شود که

$$a^2 \cosh^2 \frac{u_1}{a} (du_1)^2 = (dv_1)^2,$$

از آنجا با انتگرال گیری مقدار v^1 ، به دست می آید.

$$v^1 = a \sinh \frac{u^1}{a} + c_1. \quad (4.3)$$

به راحتی مقدار عدد ثابت c_1 به دست می آید. از طرف دیگر از تساوی روابط ۲.۳ و

۱.۳ نتیجه می شود

$$\sqrt{(v^1)^2 + a^2} dv^2 = a \cosh \frac{u^1}{a} du^2.$$

در نتیجه $c + \sqrt{(v^1)^2 + a^2} v^2 = a \cosh \frac{u^1}{a} u^2$ از رابطه (۴.۳) داریم $a \left(\sinh^2 \frac{u^1}{a} + 1 \right)^{\frac{1}{2}} v^2 = a \cosh \frac{u^1}{a} u^2 + c$. بنابراین

$$v^2 = u^2. \quad (5.3)$$

حال می توان نگاشت ایزومتری را به صورت زیر تعیین نمود. با جایگذاری مقادیر v^1 و v^2 در رابطه ۳.۳، نگاشت ایزومتری به دست می آید.

$$F(u^1, u^2) = \left(a \sinh \frac{u^1}{a}, u^2 \right).$$

این نگاشت یک ایزومتری است و چون فقط وقتی یک به یک است که پارامتر u در بازه ای به طول کوچکتر از 2π محدود شود، این نگاشت موضعی ایزومتریک است. با توجه به شکل ۹.۳ در میابیم که چگونه با نگاشت های ایزومتری موضعی می توان مارپیچ گون را به تدریج به زنجیرگون تبدیل کرد.

از مطالب فوق نتیجه می شود که وقتی که دو رویه با هم ایزومتریک باشند، می توان آنها را بر هم منطبق نمود. برای نمونه مثال ۳.۱۱.۳ در صفحه ۱۹۹ را در نظر بگیرید. البته این انطباق فقط وقتی ایزومتریک باقی می ماند که هیچیک از دو صفحه کشیده نشوند. زیرا چنانچه کشیده شده و از حالت ارجاعی اولیه خود خارج شوند آنگاه طول

منحنی های متناظر روی آنها از حالت اصلی خود خارج شده کمتر یا بیشتر می شوند. برای مثال به یک منحنی که در روی یک بادکنک رسم شده است دقت کنید. اگر دو رویه با هم به طور موضعی ایزومتریک باشند فقط آن همسایگی ها را می توان برهم منطبق نمود. البته باید شرایطی که در مثال ۳.۱۱.۳ ذکر شد را رعایت نماییم.

نتیجه ۵.۱۱.۳. به طور کلی دو رویه ایزومتریک را می توان برهم منطبق نمود.

۲.۱۱.۳ روابط گاووس و کودازی

با مشق گیری از رابطه ۲۶.۳ در صفحه ۱۵۷ موسوم به فرمول گاووس می توان نشان داد^{۵۳} که ضرایب اولین و دومین فرم اساسی در روابط زیر موسوم به روابط گاووس و کودازی^{۵۴} صدق می کنند.

$$\det(b_{ij}) = \frac{\partial^2 g_{12}}{\partial u^1 \partial u^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{11}}{\partial u^2 \partial u^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{22}}{\partial u^1 \partial u^1} - (\Gamma_{11}^s \Gamma_{22}^r - \Gamma_{12}^s \Gamma_{21}^r) g_{sr}. \quad (6.3)$$

این رابطه که دترمینان دومین فرم اساسی را بر حسب ضرایب اولین فرم اساسی بیان می کند، معادلات گاووس نام دارد. همچنین می توان نشان داد

$$\begin{aligned} \frac{\partial b_{11}}{\partial u^2} + \Gamma_{11}^l b_{l2} &= \frac{\partial b_{12}}{\partial u^1} + \Gamma_{12}^l b_{l1}, \\ \frac{\partial b_{21}}{\partial u^2} + \Gamma_{21}^l b_{l2} &= \frac{\partial b_{22}}{\partial u^1} + \Gamma_{22}^l b_{l1}. \end{aligned} \quad (7.3)$$

روابط اخیر را معادلات کودازی می نامند.

^{۵۳} نظر به اینکه این محاسبات بدون هیچ گونه مشکلی قابل انجام است و بعلاوه تکنیک خاصی به خواننده آموخت نمی دهد از آوردن جزئیات این محاسبات خودداری می کنیم. خواننده علاقه مند می تواند به عنوان مثال به ترجمه فارسی کتاب [۲۶] صفحه ۲۰۸ رجوع نماید.

^{۵۴}Codazzi and Gauss

۳.۱۱.۳ تمرین‌های بخش

تمرین ۱.۱۱.۳. آیا صفحه با استوانه در مختصات قطبی و استوانه ای با یکدیگر موضع‌ایزومتریک هستند. اگر یکی از این دو رویه را در مختصات دکارتی و دیگری را در مختصات استوانه ای در نظر بگیریم چه اتفاقی می‌افتد.

تمرین ۲.۱۱.۳. نشان دهید که بردار انحنای ژئودزیک یک پایایی ایزومتری است. راهنمایی. از رابطه 163 در صفحه (33.2) استفاده کرده نشان دهید که بردارهای انحنای ژئودزیک و انحنای قائم به انتخاب x بستگی ندارند.

تمرین ۳.۱۱.۳. رویه ریمانی (M, g) را مسطح^{۵۵} گوییم اگر با صفحه همراه با متريک اقلیدسی ایزومتریک موضعی باشد. نشان دهید که رویه (M, g) مسطح است اگر و تنها اگر تانسور انحنای ریمان آن برابر صفر باشد.

۱۲.۳ پایایی انحنای گاووس تحت ایزومتری

در هندسه به کمیت‌ها و خواصی که تحت نگاشتهای ایزومتری حفظ می‌شوند کمیت‌های ذاتی می‌گویند. هندسه ای که خواص ذاتی را مورد مطالعه قرار می‌دهد هندسه ذاتی می‌نامند. انحنای گاووسی یک کمیت ذاتی است، زیرا یکی از خواص اساسی انحنای گاووسی پایا بودن آن تحت نگاشتهای ایزومتری است. این موضوع توسط گاووس ثابت شد. این قضیه به قدری برای او جالب و غیرمنتظره بود که وی این قضیه را باهیبت^{۵۶} نامید. اهمیت این قضیه از آنجا ناشی می‌شود که به عنوان مثال انحنای گاووسی یک برگ کاغذ بدون توجه به هر گونه خمیدگی که در کاغذ ایجاد کنیم همواره در هر حالت ثابت است. در این صورت می‌گوییم که انحنای گاووسی یک کمیت ذاتی است.

^{۵۵}flat

^{۵۶}Theorema Egregium

قضیه ۱۰.۳. (قضیه با هیبت گاووس) یک نگاشت موضع‌آیزومتریک انحنای گاووسی را حفظ می‌کند.

اثبات. فرض کنیم (M, g_{ij}) و (\bar{M}, \bar{g}_{ij}) دو رویه دیفرانسیل پذیر موضع‌آیزومتریک بوده و κ و $\bar{\kappa}$ به ترتیب انحنای گاووسی آنها در نقاط متناظر باشد. بنا بر تعریف، انحنای گاووسی رویه (M, g_{ij}) برابر است با $\kappa = \frac{b}{g} = \det(g_{ij})$ که در آن $b = \det(b_{ij})$ و $g = \det(g_{ij})$. اگر مقدار $\det(b_{ij})$ را از معادلات گاووس (۶.۳) جای‌گزین کنیم، داریم:

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{1}{\det g} \left(\frac{\partial^2 g_{12}}{\partial u^1 \partial u^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{11}}{\partial u^2 \partial u^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{22}}{\partial u^1 \partial u^1} \right. \\ &\quad \left. - (\Gamma_{11}^s \Gamma_{22}^r - \Gamma_{12}^s \Gamma_{12}^r) g_{sr} \right). \end{aligned} \quad (۸.۳)$$

اگر F یک نگاشت موضع‌آیزومتریک از رویه (M, g_{ij}) در رویه (\bar{M}, \bar{g}_{ij}) باشد، بنا بر قضیه ۲.۱۱.۳ در همسایگی نقاط متناظر، در نمایش پارامتری سازگار داریم $\bar{g}_{ij} = g_{ij}$. از طرف دیگر در رابطه (۸.۳) مشاهده می‌کنیم که انحنای گاووسی را می‌توان فقط بر حسب ضرایب متریک رویه و مشتقهای مرتبه اول و دوم آن نوشت و این ضرایب نیز برای این دو رویه در همسایگی نقاط متناظر، با هم برابرند. لذا در همسایگی‌های نقاط متناظر از هر دو رویه داریم $\kappa = \bar{\kappa}$. \square

در گزاره ۳.۴.۳ در صفحه ۱۵۱ نشان دادیم که انحنای گاووسی به تغییر مختصات بستگی ندارد. این موضوع به عبارتی مشابه آن است که در قضیه بالا $M = \bar{M}$ باشد و M با دو کارت (x, U) و (\bar{x}, \bar{U}) مورد مطالعه قرار گیرد.

عكس قضیه گاووس صحت ندارد، به عبارت دیگر ممکن است که دو رویه دارای انحنای گاووسی برابر بوده، اما ایزومتریک نباشند. به مثال زیر توجه نمایید.

مثال ۱۰.۳. نشان دهید که رویه‌های زیر به معادلات پارامتری

$$x(u, v) = (u \cos v, u \sin v, \ln u), \quad (۹.۳)$$

$$\bar{x}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v). \quad (۱۰.۳)$$

دارای انحنای گاوی برابر بوده، اما ایزومنتیک نیستند.
حل. انحنای گاوی دو رویه را حساب نموده با یکدیگر مقایسه می‌کنیم. سپس نشان
می‌دهیم که متریک‌های دو رویه با هم برابر نیستند.

برای رویه اول از معادله (۹.۳) با فرض $u^2 = v = u^1$ و $u = u^1$ نتیجه می‌شود

$$x_1 = (\cos v, \sin v, \frac{1}{u}), \quad x_{11} = (\cdot, \cdot, -\frac{1}{u^2}),$$

$$x_2 = (-u \sin v, u \cos v, \cdot), \quad x_{22} = (-u \cos v, -u \sin v, \cdot),$$

$$x_{12} = x_{21} = (-\sin v, \cos v, \cdot).$$

با ضرب خارجی دو بردار مماس می‌توان بردار یکه عمود و با ضرب داخلی آنها ضرایب فرم
های اساسی و بالاخره انحنای گاوی رویه را به دست آورد.

$$x_1 \times x_2 = \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ \cos v & \sin v & \frac{1}{u} \\ -u \sin v & u \cos v & \cdot \end{pmatrix} = (-\cos v, -\sin v, u),$$

$$N = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}(-\cos v, -\sin v, u), \quad g_{11} = 1 + \frac{1}{u^2}, \quad g_{22} = u^2,$$

$$ds^2 = \left(1 + \frac{1}{u^2}\right)(du)^2 + u^2(dv)^2,$$

$$b_{11} = N \cdot x_{11} = \frac{-1}{u\sqrt{1+u^2}}, \quad b_{22} = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}, \quad b_{12} = \cdot, \quad \kappa = \frac{-1}{(1+u^2)^2}.$$

برای رویه دوم از معادله (۱۰.۳) با فرض $u^2 = v = u^1$ و $u = u^1$ نتیجه می‌شود

$$\bar{x}_1 = (\cos v, \sin v, \cdot), \quad \bar{x}_{11} = (\cdot, \cdot, \cdot), \quad \bar{x}_2 = (-u \sin v, u \cos v, 1),$$

$$\bar{x}_{22} = (-u \cos v, -u \sin v, \cdot), \quad \bar{x}_{12} = \bar{x}_{21} = (-\sin v, \cos v, \cdot),$$

$$\bar{N} = \frac{1}{\sqrt{u^2+1}}(\sin v, -\cos v, u), \quad \bar{g}_{11} = 1, \quad \bar{g}_{22} = u^2 + 1, \quad \bar{g}_{12} = \cdot,$$

$$\bar{b}_{11} = \bar{b}_{22} = \cdot, \quad \bar{b}_{12} = \frac{-1}{\sqrt{1+u^2}}, \quad d\bar{s}^2 = du^2 + (u^2 + 1)dv^2, \quad \bar{\kappa} = \frac{-1}{(1+u^2)^2}.$$

انحنای گاوی رویه اول و دوم با هم برابرند. اما این دو رویه ایزومتریک نمی‌باشند، چون ضرایب اولین فرم اساسی آنها با یکدیگر متفاوت است. یا به عبارت دیگر دستگاه $1 + \frac{1}{u^2} = u^2$ جواب ندارد و به طور معادل نگاشتی نمی‌توان تعریف نمود که ضرایب این دو فرم را به هم تبدیل کند.

مثال ۳.۱۲.۳. کره با صفحه نمی‌تواند موضعاً ایزومتریک باشد. به عبارت دیگر همسایگی نقاط کره با همسایگی نقاط متناظر از صفحه ایزومتریک نیستند. در گزاره ۳.۴.۳ در صفحه ۱۵۱ دیدیم که انحنای گاوی به انتخاب دستگاه مختصات موضعی بستگی ندارد. بنابراین برای یک رویه با انحنای گاوی ثابت مقدار انحنای گاوی در هر مختصات عدد ثابتی است. در مثال ۲.۴.۳ در صفحه ۱۵۱ دیدیم که انحنای گاوی کره ای به شعاع a برابر با $1/a^2$ است. و از طرفی بنا بر قضیه با هیبت گاوس ۱.۱۲.۲ در صفحه ۲۰۵ نگاشت موضعی ایزومتریک انحنای گاوی را حفظ می‌نماید. بنابراین کره که انحنای آن ثابت است نمی‌تواند با صفحه که انحنای آن صفر است، ایزومتریک موضعی باشد.

به طور کلی دو رویه با انحنای ثابت متفاوت نمی‌توانند با یکدیگر موضعاً ایزومتریک باشند. این موضوع از قضیه گاوس نتیجه می‌شود.

نتیجه ۴.۱۲.۳. (عکس نقیض قضیه گاوس) فرض کنیم (\bar{M}, g_{ij}) و (M, g_{ij}) دو رویه دیفرانسیل پذیر و نگاشت، $\bar{M}, g_{ij} \rightarrow (M, g_{ij})$: طوری تعریف شده باشد که انحنای گاوی دو رویه در نقاط متناظر متفاوت باشند. آنگاه F موضعی ایزومتریک نیست.

۱.۱۲.۳ تمرین‌های بخش

تمرین ۱.۱۲.۳. آیا استوانه با صفحه و یا استوانه با کره موضعی ایزومتریک است؟

تمرین ۱۲.۳. ثابت کنید رویه‌ای به معادله پارامتری زیر

$$x(u^1, u^2) = (3u^1 + 3u^1(u^2)^2 - (u^1)^3, 3u^2 - 3(u^1)^2u^2 + (u^2)^3, 3(u^1)^2 - 3(u^2)^2).$$

با یک سطح دوار ایزومتریک (موضعی) است.

راهنمایی. یادآوری می‌کنیم که معادله پارامتری سطح دوار عبارت است از

$$x = f(v^1) \cos v^2, \quad y = f(v^1) \sin v^2, \quad z = h(v^1).$$

تغییر مختصات زیر را به عنوان یک نگاشت موضعی ایزومتریک در نظر بگیرید.

$$v^1 = (u^1)^2 + (u^2)^2, \quad v^2 = \arctan \frac{u^2}{u^1}.$$

۱۳.۳ زاویه و نگاشت همدیس

می‌خواهیم نگاشتهایی را مورد مطالعه قرار دهیم که زاویه بین بردارهای مماس را حفظ می‌کند. فرض کنیم M به معادله پارامتری $x(u^1, u^2)$ یک رویه منظم باشد. چون $\{x_i\}_{(p)}$ پایه‌ای برای فضای مماس بر رویه در نقطه p است، هر بردار مماس را می‌توان به صورت ترکیبی خطی از آن‌ها نوشت. حال دو منحنی از کلاس C^1 روی M به معادلات نقطه t از M . محل تقاطع این دو منحنی باشد، می‌خواهیم زاویه بین این دو منحنی در نقطه p را حساب کنیم. در بخش اولین فرم اساسی با ارائه رابطه ۱۳.۳ در صفحه ۱۴۰

یک تعریف برای زاویه بین دو بردار ارائه نمودیم. در اینجا می‌خواهیم زاویه بین دو منحنی جهت‌دار را محاسبه کنیم. باید توجه داشت که در این حالت حاده و منفرجه بودن زاویه بستگی به تغییرات متغیر روی دو منحنی و مثبت و منفی بودن آن تغییرات دارد. در حقیقت اگر

تعیین زاویه حاده یا منفرجه بین دو منحنی نیز مهم باشد باید از جهت تغییرات منحنی در دو راستای مختلف روی هر یک از منحنی‌ها استفاده شود. نظر به اینکه در اینجا می‌خواهیم نگاشتهایی را مورد مطالعه قرار دهیم که زاویه بین بردارهای مماس را حفظ می‌کند، حاده و منفرجه بودن زاویه برای ما مهم است لذا از رابطه ۱۳.۳ در صفحه ۱۴۰ نمی‌توانیم مستقیماً استفاده کنیم.

лем ۱۳.۳. فرض کنیم (M, g_{ij}) رویه‌ای دیفرانسیل پذیر از کلاس C^2 با نمایش پارامتری $x(u^1, u^2)$ باشد. زاویه بین دو منحنی روی M از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$\cos \phi = \frac{g_{ij} du^i \delta u^j}{\sqrt{g_{ij} du^i du^j} \sqrt{g_{ij} \delta u^i \delta u^j}}. \quad (11.3)$$

که در آن du^i و δu^i دیفرانسیل در راستای جهت دو منحنی هستند.

اثبات. اگر دیفرانسیل در راستای دو منحنی $u^i = \psi^i(t)$ و $u^i = \phi^i(t)$ را به ترتیب با δu^i و du^i نمایش دهیم، آنگاه بنا بر تعریف دیفرانسیل کل داریم

$$du^i = \frac{d\phi^i}{dt} dt, \quad \delta u^i = \frac{d\psi^i}{ds} ds.$$

در نقطه تقاطع p . فرض کنیم $u^i = \phi^i(t_0) = \psi^i(s_0)$. در این صورت دو بردار $\frac{\delta x}{\delta s} = x_i \frac{\delta u^i}{\delta s}$ و $\frac{dx}{dt} = x_i \frac{du^i}{dt}$ در p بر دو منحنی مماسند. در نتیجه زاویه بین آن‌ها از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$\cos \theta = \frac{\frac{dx}{dt} \cdot \frac{\delta x}{\delta s}}{\left| \frac{dx}{dt} \right| \left| \frac{\delta x}{\delta s} \right|}.$$

با توجه به روابط $\delta x = x_i \delta u^i$ و $dx = x_i du^i$ داریم

$$\cos \theta = \frac{x_i \cdot x_j du^i \delta u^j}{\sqrt{x_i \cdot x_j du^i du^j} \sqrt{x_i \cdot x_j \delta u^i \delta u^j}}.$$

از آنجا رابطه (۱۱.۳) به دست می‌آید. \square

چنانچه جهت حرکت در روی منحنی مهم نباشد، یا به عبارت دیگر زاویه حاده یا منفرجه بین دو منحنی تفاوتی نداشته باشد، می‌توان مقادیر دلخواه و مثبت du^i و δu^i را برابر فرض نموده از فرمول ۱۳.۳ در صفحه ۱۴۰ برای محاسبه زاویه دو منحنی استفاده کرد.

۱.۱۳.۳ نگاشت همدیس

تعریف ۲.۱۳.۳. فرض کنیم M و \bar{M} دو رویه منتظم با ضرایب اولین فرم‌های اساسی g_{ij} و \bar{g}_{ij} باشند. اگر نگاشتی بین این دو رویه موجود باشد که زاویه بین منحنی‌های متقاطع متناظر روی دو رویه را حفظ نماید، می‌گوییم این **نگاشت همدیس**^{۵۷} است. در این صورت می‌گوییم دو رویه (\bar{M}, \bar{g}_{ij}) و (M, g_{ij}) همدیس^{۵۸} هستند.

این تعریف برای رویه‌های دیفرانسیل پذیر نیز به همین صورت بیان می‌گردد.

گزاره ۳.۱۳.۳. یک نگاشت از کلاس C^1 بین دو رویه (M, g_{ij}) و (\bar{M}, \bar{g}_{ij}) موضع همدیس است، اگر و تنها اگر اولین فرم‌های اساسی دو رویه در مختصات سازگار، مضرب مشتبی از یکدیگر باشد. یعنی

$$\bar{g}_{ij} = e^{\sigma} g_{ij}, \quad (12.3)$$

که در آن σ تابعی حقیقی روی M است

اثبات. فرض کنیم (M, g_{ij}) و (\bar{M}, \bar{g}_{ij}) رویه‌های دیفرانسیل پذیر از کلاس C^2 با پارامترهای سازگار و با نمایش‌های پارامتری (x^1, x^2) و (\bar{x}^1, \bar{x}^2) باشند. فرض کنیم روی رویه M ، دو منحنی یکدیگر را با زاویه θ در نقطه p قطع نمایند. همچنین فرض کنیم که این دو منحنی توسط یک نگاشت به رویه \bar{M} منتقل شده و تصویر آن‌ها یکدیگر را

^{۵۷}conformal mapping

^{۵۸}conformal surfaces

با زاویه $\bar{\theta}$ قطع کند. بنا بر لم ۱۰.۹ در صفحه ۲۰.۳ زاویه بین این دو منحنی عبارت است از

$$\cos \bar{\theta} = \frac{g_{ij} d\bar{u}^i \delta \bar{u}^j}{\sqrt{g_{ij} d\bar{u}^i d\bar{u}^j} \sqrt{g_{ij} \delta \bar{u}^i \delta \bar{u}^j}}. \quad (13.3)$$

قبل اگفته که منظور از مختصات سازگار آن است که $u^i = du^i$ و $d\bar{u}^i = \delta u^i$. از آنجا $d\bar{u}^i = \delta u^i$ و از اینجا نتیجه می شود که اگر رابطه (۱۲.۳) برقرار باشد، آنگاه

$$\cos \bar{\theta} = \frac{e^{\sigma} g_{ij} du^i \delta u^j}{\sqrt{e^{\sigma} g_{ij} du^i du^j} \sqrt{e^{\sigma} g_{ij} \delta u^i \delta u^j}}. \quad (14.3)$$

پس از ساده کردن نتیجه می شود $\cos \bar{\theta} = \cos \theta$. لذا این نگاشت زاویه بین دو منحنی را حفظ نموده و در نتیجه همدیس است.

بر عکس اگر $\cos \bar{\theta} = \cos \theta$ از مقایسه رابطه (۱۱.۳) با رابطه (۱۳.۳) نتیجه می شود که g_{ij} و \bar{g}_{ij} را می توان به صورت مضرب مثبتی از یکدیگر نوشت. از آنجا رابطه (۱۲.۳) نتیجه می شود. لذا دو زاویه با یکدیگر برابرند اگر و تنها اگر رابطه (۱۲.۳) برقرار باشد. \square

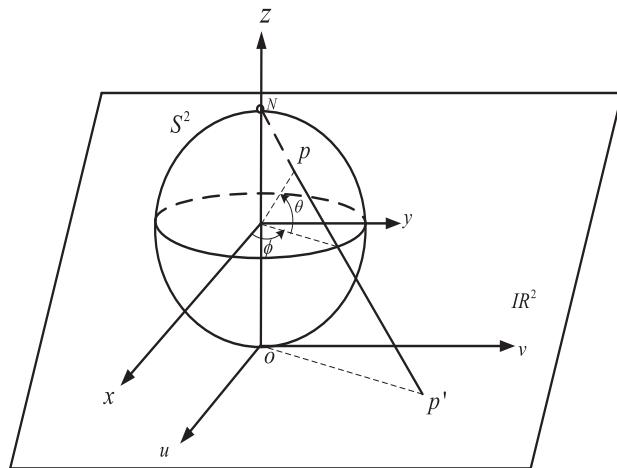
تعريف ۴.۱۳.۳. اگر رویه ای همراه با یک متريک ريماني با صفحه همراه با متريک اقليدسي به طور همدیس مرتبط باشد آن رویه را به طور همدیس تخت^{۵۹} می نامیم.

يکی از مسایل جالب در هندسه که کاربرد زیاد در فیزیک نیز دارد یافتن اينگونه رویه ها است. در حقیقت در فیزیک معادلات ماکزول^{۶۰} تحت نگاشت های همدیس پایا هستند. لذا روی اینگونه رویه ها معادلات ماکزول را می توان در صفحه مورد مطالعه قرار داده جواب های آن را به دست آورد.

مثال ۴.۱۳.۴. کره به طور همدیس تخت است. اگر کره با اولین فرم اساسی آن را با $(\mathbb{R}^3, \delta_{ij})$ و صفحه اقلیدسی را با (S^2, g_{ij}) نمایش دهیم آنگاه

^{۵۹}conformally flat

^{۶۰}Maxwell



شکل ۱۰.۳: تصویر استریوگرافیک یک نگاشت همدیس است.

به طور همدیس مرتبط است. در حقیقت یک نگاشت حافظ زاویه یا نگاشت همدیس موضعی بین (S^2, g_{ij}) و $(\mathbb{R}^2, \delta_{ij})$ به شرح زیر وجود دارد. نشان می‌دهیم که تصویر استریوگرافیک که به صورت زیر تعریف می‌شود یک نگاشت همدیس بین صفحه و کره است. شکل ۱۰.۲ را ببینید. نگاشت x از صفحه \mathbb{R}^2 در کره S^2 را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$x : (u, v) \mapsto (x, y, z) \in S^2,$$

$$x(u, v) = \left(\frac{4a^3 u}{4a^2 + u^2 + v^2}, \frac{4a^3 v}{4a^2 + u^2 + v^2}, \frac{a(4a^3 - u^2 - v^2)}{4a^2 + u^2 + v^2} \right).$$

قبلانیز با این نگاشت در تمرین ۱۰.۲ در صفحه \mathbb{R}^2 آشنا شده ایم. این معادلات تمام نقاط کره $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ به جز نقطه $(0, 0, a)$ را می‌پوشاند. این نگاشت تمام نقاط صفحه را بر روی کره تصویر می‌کند لذا عکس نگاشت استریوگرافیک است. با پارامتری‌سازی فوق ضرایب اولین فرم اساسی کره را به دست می‌آوریم. تمرین ۱۰.۲ در صفحه \mathbb{R}^2 را ببینید.

$$g_{11} = g_{22} = \frac{16a^4}{(4a^2 + u^2 + v^2)^2}, \quad g_{12} = 0.$$

و اولین فرم اساسی به صورت زیر است.

$$d\bar{s}^2 = \frac{16a^4}{(4a^2 + u^2 + v^2)^2} (du^2 + dv^2).$$

چون اولین فرم اساسی صفحه در مختصات اقلیدسی (u, v) به صورت $ds^2 = du^2 + dv^2$ می باشد، ضرایب آن عبارت است از $\delta_{ij} = g_{ij}$. از آنجا

$$\bar{g}_{ij} = \frac{16a^4}{(4a^2 + u^2 + v^2)^2} g_{ij}.$$

لذا g_{ij} و \bar{g}_{ij} را می توان به صورت مضرب مثبتی از یکدیگر نوشت. در نتیجه این نگاشت همدیس است.

۲.۱۳.۳ تمرین‌های بخش

تمرین ۱.۱۳.۳. نشان دهید در مثال ۵.۱۳.۳ در صفحه ۲۱۱ تصویر استریوگرافیگ نقطه ای از کره S^2 به مختصات (ϕ, θ) را به نقطه ای از صفحه \mathbb{R}^2 به مختصات (u, v) می برد که رابطه آنها به صورت زیر داده شده است.

$$u = 2a \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right) \cos \phi, \quad v = 2a \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right) \sin \phi.$$

۳.۱۳.۳ مختصات متعامد

یکی از کاربردهای دیگر فرمول زاویه بین دو منحنی معرفی مختصات متعامد^{۶۱} است. اگر (M, g_{ij}) یک رویه منتظم با کارت (x, U) و با نمایش پارامتری $x(u^1, u^2)$ باشد. مختصات (u^1, u^2) را متعامد گوییم اگر خطوط مختصات بر یکدیگر عمود باشند.

لم ۲.۱۳.۳. فرض کنیم (M, g_{ij}) یک رویه منتظم با کارت (x, U) و با نمایش پارامتری

$g_{ij} = 0, \quad i \neq j$ باشد. مختصات (u^1, u^2) متعامد است اگر و تنها اگر $x(u^1, u^2)$

^{۶۱}orthogonal coordinate

اثبات. فرض کنیم (M, g_{ij}) یک رویه منظم بانمایش پارامتری $x(u^1, u^2)$ باشد. مختصات (u^1, u^2) را در نظر می‌گیریم. همانطور که در بالا اشاره شد تغییرات این مختصات در راستای هر منحنی به طور مستقل تغییر می‌کند لذا می‌توان هر مقدار مثبت برای du^1 اختیار کرد در حالی که $du^2 = 0$ و به همین ترتیب هر مقدار مثبت برای δu^2 اختیار کرد در حالی که $\delta u^1 = 0$ به عنوان مثال

$$du^1 = 1, \quad du^2 = 0, \quad \delta u^1 = 0, \quad \delta u^2 = 1.$$

با جایگذاری این مقادیر در فرمول $\cos \theta = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}}\sqrt{g_{22}}}$ از این رابطه نتیجه می‌شود که خطوط مختصات بر یکدیگر عمودند اگر و تنها اگر $g_{12} = 0$ باشد. از این عبارت \square اثبات لم کامل می‌شود.

این مختصات در هندسه دیفرانسیل و آنالیز روی رویه‌ها و منیفلدها کاربردهای فراوانی دارد. علت آنهم واضح است اگر در روی رویه‌ای چنین مختصاتی موجود باشد آنگاه در آن رویه همواره مولفه‌های متريک رویه در شرط $j \neq i$ صدق می‌کنند. مختصات متعامد را متعامد یکه گوییم اگر مولفه‌های متريک رویه در شرط $g_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$ صدق کنند که مشابه متريک اقلیدسی است و محاسبات پیچیده تansورها و برخی از توابع را که به مختصات بستگی ندارند بسیار ساده می‌کند.

مثال ۳.۱۳.۳. مختصات اقلیدسی در صفحه متعامد یکه هستند زیرا $g_{ij} = \delta_{ij}$. مختصات قطبی در صفحه متعامد هستند ولی یکه نیستند زیرا در تمرین ۱.۱.۳ در صفحه ۱۳۰ دیدیم که ضرایب متريک صفحه در مختصات قطبی (r, θ) به شکل زیر نوشته می‌شود.

$$g_{11} = 1, \quad g_{12} = g_{21} = 0, \quad g_{22} = r^2.$$

۴.۱۳.۳ تمرین‌های بخش

تمرین ۱.۱۳.۳. الف. در مثال ۶.۱.۳ در صفحه ۱۳۵ اولین فرم اساسی کره در مختصات (ρ, θ, ϕ) را دیدیم. نشان دهید که این مختصات متعامد است.

ب. نشان دهید که در رویه های دوار مختصات داده شده متعامد است.

تمرین ۲.۱۳.۳. حالت خاصی از رویه های خط دار که در زیربخش ۴.۳.۲ در صفحه ۸۴ معرفی شدند را با معادله پارامتری زیر در نظر می گیریم.

$$x(u^1, u^2) = \alpha(u^1) + u^2 \alpha'(u^1).$$

در اینجا $\alpha(u^1)$ یک منحنی پارامتری شده برحسب طول قوس u^1 و $\alpha'(u^1)$ بردار یکه مماس آن است.

الف. نشان دهید که در این مختصات ضرایب اولین فرم اساسی عبارت است از

$$I(u^1, u^2) = (1 + (u^1)^2 \kappa^2)(du^1)^2 + 2du^1 du^2 + (du^2)^2.$$

در اینجا κ انحنای اول فرنه منحنی $\alpha(u^1)$ است.

ب. از الف نتیجه بگیرید که این مختصات متعامد نیست.

۱۴.۳ نگاشت هم مساحت

نگاشت هم مساحت^{۶۲} نگاشتی است که مساحت یک ناحیه را حفظ می کند. نگاشتهای حافظ مساحت که حالت خاص نگاشتهای حافظ حجم هستند، کاربردهای زیادی در آنالیز حقیقی و آنالیز رویه ها در هندسه دارند.

^{۶۲}volume preserving mapping

گزاره ۱۰.۱۴.۳. یک نگاشت از کلاس^۱ C بین دو روش (M, g_{ij}) و (\bar{M}, \bar{g}_{ij}) موضعا هم مساحت است، اگر و تنها اگر مبین‌های اولین فرم‌های اساسی دو روش در مختصات سازگار، برابر باشند. یعنی

$$\bar{\mathcal{G}} = \mathcal{G}$$

اثبات. فرض کنیم (M, g_{ij}) و (\bar{M}, \bar{g}_{ij}) روش‌های دیفرانسیل پذیر از کلاس^۲ C با پارامترهای سازگار و با نمایش‌های پارامتری $x(u^1, u^2)$ و $\bar{x}(u^1, u^2)$ باشند. اگر $\mathcal{U} \subset M$ ناحیه‌ای در (M, g_{ij}) و $\bar{\mathcal{U}} \subset \bar{M}$ تصویر آن روی (\bar{M}, \bar{g}_{ij}) باشد، آنگاه مساحت آنها بنابر فرمول ۱۸۰ در صفحه ۴۰.۳ به ترتیب برابر است با

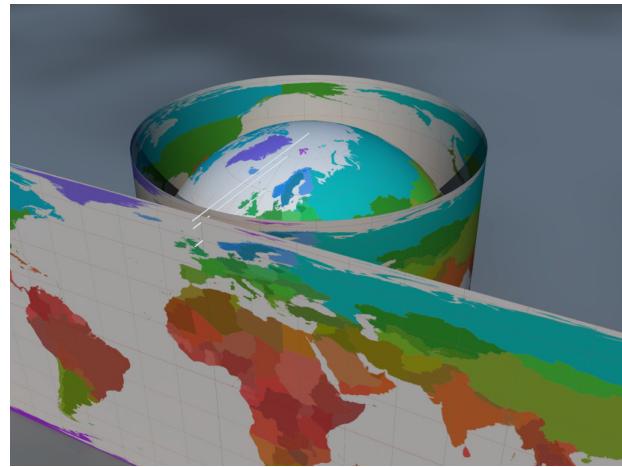
$$S = \iint_{\mathcal{U} \subset M} \sqrt{\mathcal{G}} du^1 du^2, \quad \bar{S} = \iint_{\bar{\mathcal{U}} \subset \bar{M}} \sqrt{\bar{\mathcal{G}}} du^1 du^2.$$

بنابر تعریف یک نگاشت از کلاس^۱ C بین دو روش (M, g_{ij}) و (\bar{M}, \bar{g}_{ij}) موضعا هم مساحت است، اگر و تنها اگر به ازای هر $\mathcal{U} \subset M$ داشته باشیم $\bar{S} = S$. چون ناحیه \mathcal{U} دلخواه است از $S = \bar{S}$ نتیجه می‌شود که عبارت‌های زیر انتگرال باید با هم برابر باشند. از آنجا این نگاشت موضعا هم مساحت است اگر و تنها اگر $\sqrt{\mathcal{G}} = \sqrt{\bar{\mathcal{G}}}$ که چون دترمینان اولین فرم اساسی مثبت است این عبارت معادل $\mathcal{G} = \bar{\mathcal{G}}$ است. این موضوع اثبات گزاره را کامل می‌کند. \square

مثال ۲۰.۱۴.۳. از تصویر کرده بدون قطب شمال و جنوب، به روی استوانه محیطی آن توسط عمودهایی بر محور استوانه نگاشتی پذید می‌آید که به آن تصویر لامبرت^{۶۳} گفته می‌شود. به راحتی می‌توان نشان داد^{۶۴} که تصویر لامبرت یک نگاشت هم مساحت است.

^{۶۳}Lambert projection

^{۶۴}صفحه ۲۴۰ از ترجمه فارسی کتاب [۲۶] را ببینید.



شکل ۱۱.۳: تصویر نگاشت لمبرت از کره به روی استوانه.

۱.۱۴.۳ تمرین‌های بخش

تمرین ۱.۱۴.۳. الف. نشان دهید که یک نگاشت همدیس و هم مساحت یک ایزومتری است.

ب. نشان دهید که عکس گزاره الف نیز صحیح است.

۱۵.۳ نگاشت تصویری و مسئله چهارم هیلبرت

نگاشت حافظ ژئودزی یا نگاشت تصویری^{۶۵} نگاشتی است که ژئودزیک های یک رویه را حفظ می کند.

یکی از سوالات اساسی در ریاضی که در ضمن مسایل هیلبرت در سال ۱۹۰۰ میلادی مطرح گردید مسئله چهارم او بود. در این مسئله هیلبرت به دنبال یافتن هندسه‌ای بود که اصول موضوعه آن هندسه نزدیکترین به اصول هندسه اقلیدسی باشد به طوری که هم ارزی

^{۶۵}geodesic-preserving or projective mapping

اصل توازی حذف شده و اصول ترتیب پذیری و تقاطع در آن حفظ شود. اگرچه این سؤال در رویکرد های اولیه توسط هیلبرت آن طور که باید، به طور روشی بیان نگردیده بود که بتوان برای آن جواب دقیقی یافت ولی بعد از این مسئله به شکل زیر مطرح گردید و جواب های متنوعی نیز در شرایط متفاوت به آن داده شد.

مسئله چهارم هیلبرت در روی رویه ها: تمام مترهای ریمانی را پیدا کنید که با یک متر ریمانی مفروض به طور تصویری مرتبط باشد.

تعريف ۱۰.۳. اگر رویه ای همراه با یک متریک ریمانی با صفحه همراه با متریک اقلیدسی به طور تصویری مرتبط باشد آن رویه را به طور تصویری تخت^{۶۶} می نامیم.

با توجه به این تعریف، مسئله چهارم هیلبرت در روی رویه ها را می توان پیدا کردن تمام مترهای ریمانی به طور تصویری تخت آن رویه، بیان نمود.

مثال ۲۰.۳. به عنوان مثال اگر استوانه با اولین فرم اساسی آن را با (M, g_{ij}) و صفحه اقلیدسی را با $(\mathbb{R}^3, \delta_{ij})$ نمایش دهیم آنگاه (M, g_{ij}) با $(\mathbb{R}^3, \delta_{ij})$ به طور تصویری مرتبط است. لذا می توان گفت که استوانه به طور تصویری تخت است. در حقیقت یک نگاشت حافظ ژئودزی یا نگاشت تصویری موضعی بین (M, g_{ij}) و $(\mathbb{R}^3, \delta_{ij})$ به شرح زیر وجود دارد.

$$F : (\mathbb{R}^3, \delta_{ij}) \longleftrightarrow (M, g_{ij}),$$

$$F(u, v) = (\cos u, \sin u, v).$$

در مثال ۳۴.۲ در صفحه ۹۵ دیدیم که این نگاشت خطوط راست در صفحه را به ژئودزیک های استوانه می برد.

مثال ۳۰.۳. در تمرین ۳۰.۲ در صفحه ۷۷ با نگاشتی که نیمکره را به روی قرص زیر آن تصویر می کند آشنا شدیم. در اینجا می گوییم که این نگاشت یک نگاشت حافظ ژئودزی یا

^{۶۶}projectively flat

نگاشت تصویری نیست، اگر چه برخی از ژئودزیک‌های نیمکره مانند دوایر عظیمه گذرنده از قطب شمال نیمکره را به روی ژئودزیک‌های صفحه می‌نگارد. در حقیقت تصویر ژئودزیک‌هایی که از قطب شمال عبور نمی‌کنند دیگر خط راست نیست و نمی‌تواند ژئودزیک باشد.

۱۶.۳ راهنمای حل تمرین‌های فصل ??

حل تمرین ?? در صفحه ۱۱

۱۷.۳ هندسه ذاتی

یکی از دیدگاه های مهم در هندسه مطالعه خواصی از رویه است که تحت یک خانواده داده شده از نگاشت های یک به یک پایا هستند. به عنوان مثال یک خاصیت توپولوژیکی برای رویه M خاصیتی است که تحت یک همتومورفیسم یک به یک پایا باشد. همچنین یک خاصیت ذاتی^{۶۷} برای رویه M خاصیتی است که تحت یک ایزومتری آن رویه پایا است.

به مجموعه خواص ذاتی یک رویه هندسه ذاتی^{۶۸} آن رویه گفته می شود.

از قضیه ۲.۱۱.۳ در صفحه ۱۹۷ نتیجه می شود که خواص ذاتی یک رویه خواصی هستند که تنها به اولین فرم اساسی آن رویه بستگی دارند، بنابراین انحنای گاوی^{۶۹} یکی از خواص ذاتی رویه هاست.

تعريف ۱۷.۳. فرض کنید P و Q دو نقطه روی رویه M باشند. خانواده تمام منحنی های منتظم روی M که P را به Q وصل می کند با $\mathcal{C}(P, Q)$ نمایش می دهیم. فاصله ذاتی یا به طور اختصار فاصله P و Q را با $d(P, Q)$ نشان داده و به صورت اینفیم طول تمام منحنی های منتظم روی M که P را به Q وصل می کند، تعریف می کنیم.

$$d(P, Q) = \inf\{L(C) | C \in \mathcal{C}(P, Q), C \text{ طول منحنی } L(C)\}$$

به وضوح $d(P, Q)$ همواره موجود است زیرا مجموعه مذکور ناتهی و از پایین کراندار است ($|P - Q|$ ، فاصله اقلیدسی P و Q ، کران پایینی برای این مجموعه است). همچنین فاصله ذاتی دو نقطه خاصیتی ذاتی از رویه می باشد.

قضیه ۲.۱۷.۳. فاصله ذاتی در شرایط زیر صدق می کند.

^{۶۷}intrinsic property

^{۶۸}intrinsic geometry

$$, d(P, Q) = d(Q, P) . \quad 1$$

$$, d(P, R) \leq d(P, Q) + d(Q, R) . \quad 2$$

$$. \quad P = Q \text{ اگر و تنها اگر } d(P, Q) = 0 \quad d(P, Q) \geq 0 . \quad 3$$

اگر برای دو نقطه P و Q یک منحنی منتظم مانند C با طول $d(P, Q)$ موجود باشد که P را به Q متصل سازد آنگاه C را منحنی با طول مینیمم بین P و Q می‌نامیم. از تعریف اینفیمم نتیجه می‌شود اگر C منحنی با طول مینیمم بین P و Q باشد آنگاه $L(C)$ در روابط زیر صدق می‌کند :

- (i) به ازای هر منحنی C' بین دو نقطه P و Q داریم $. L(C) \leq L(C')$
- (ii) به ازای هر $\epsilon > 0$ یک منحنی منتظم C'' بین دو نقطه P و Q موجود است که $. L(C) + \epsilon > L(C'')$

در صفحه اقلیدسی $d(P, Q)$ فاصله اقلیدسی و منحنی با طول مینیمم خط راستی است که نقطه P را به Q متصل می‌کند. در مثال زیر نشان خواهیم داد که بین دو نقطه روی یک رویه منحنی با طول مینیمم لزوماً وجود ندارد، همچنین چنین منحنی در صورت وجود لزوماً یکتا نیست.

مثال ۳.۱۷.۳. M را رویه‌ای در نظر بگیرید که با حذف مبدأ از صفحه xy به دست می‌آید و فرض کنید $(0, 1) = P$ و $(0, -1) = Q$. بهوضوح به ازای هر $\epsilon > 0$ یک منحنی با طول کمتر از $\epsilon + 2$ بین P و Q موجود است (فرض کنید $0 < R$ به اندازه کافی بزرگ باشد و کمانی از یک دایره به مرکز $(R, 0)$ را در نظر بگیرید که بین دو نقطه P و Q واقع شده). همچنین هر منحنی که P را به Q متصل می‌کند دارای طول بزرگتر یا مساوی ۲ می‌باشد، بنابراین $2 = d(P, Q)$. از طرف دیگر هیچ منحنی روی M موجود نیست که P را به Q وصل کرده و دارای طول ۲ باشد به عبارت دیگر هیچ منحنی با طول مینیمم بین P و Q موجود نیست.

مثال ۴.۱۷.۳. رویه M را برابر یک کره در نظر بگیرید . به وضوح هر دایره عظیمه یک منحنی با طول مینیمم بین قطب های کره است . بنابراین بین دو نقطه روی یک رویه تعداد نامتناهی منحنی با طول مینیمم میتواند وجود داشته باشد .

تعريف ۵.۱۷.۳. فرض کنید M یک مجموعه و P و Q دو نقطه روی آن باشند. اگر روی M تابعی مانند d موجود باشد که در سه شرط قضیه ۲.۱۷.۳ صدق کند آن تابع را یک فاصله (متريک) و (M, d) را یک فضای متريک می نامند.

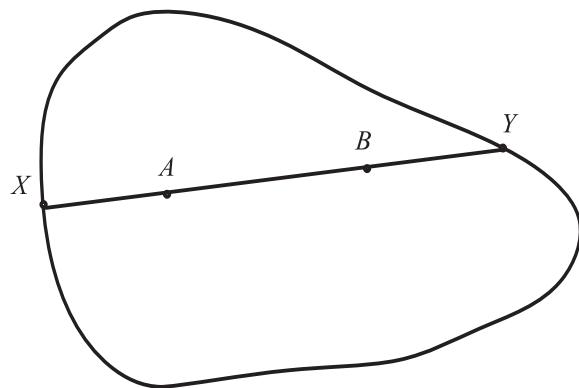
مثال ۶.۱۷.۳. فرض کنید P و Q دو نقطه روی صفحه اقلیدسی $(\mathbb{R}^2, \delta_{ij})$ باشد. تابع فاصله بین دو نقطه P و Q را توسط $d(P, Q) := |P - Q|$ معرفی می کنیم . به وضوح اين تابع در سه شرط فوق صدق می کند. لذا (\mathbb{R}^2, d) یک فضای متريک است.

مثال ۷.۱۷.۳. متريک هيلبرت در يك ناحيه محدب از صفحه به صورت زير تعريف می شود. فرض کنيد Ω يك ناحيه باز محدب در يك فضای اقلیدسی ۲-بعدی باشد. دو نقطه متماييز Ω مرز ناحيه را در نظر گرفته خط AB را امتداد می دهيم تا مرز را در نقاط X و Y قطع کند. حال فاصله دو نقطه A و B را بالگاريتم خارج قسمت زير تعريف می کنیم. شكل ۱۲.۳ را ببینيد.

$$d(A, B) := \log \left(\frac{|YA|}{|YB|} \frac{|XB|}{|XA|} \right).$$

تابع d را می توان به هر جفت دلخواه از نقاط Ω با $d(A, A) = 0$ توسعه داد. در اين صورت می توان نشان داد که d يك متريک روی ناحيه Ω تعريف می کند. اين متريک را متريک هيلبرت^{۶۹} می ناميم. اگر يکی از نقاط A و B در روی مرز Ω قرار گيرد، در اين صورت مخرج يکی از کسرها برابر صفر بوده و تابع d را برابر $+\infty$ تعريف می کنیم.

^{۶۹}Hilbert metric



شکل ۱۲.۳: متریک هیلبرت روی ناحیه محدب Ω .

همچنین می توان نشان داد که ناحیه محدب Ω همراه با متریک هیلبرت به طور تصویری مسطح است. از این رو این متریک را متریک تصویری هیلبرت^{۷۰} نیز می نامند.

^{۷۰} Hilbert projective metric

۳

رویه در توپولوژی و هندسه منیفلد

ریاضیدانان پس از مطالعه مجموعه‌های باز در فضای اقلیدسی دریافتند که خانواده مجموعه‌های باز دارای خواصی است که می‌توان آنها را در روی مجموعه‌های دلخواه نیز مورد مطالعه قرار داده تعاریفی مانند تابع پیوسته را روی این مجموعه‌های دلخواه بیان کرد. این موضوع منجر به پیدایش مبحثی در ریاضی به نام فضای توپولوژیک گردید. اما چون تعریف توابع پیوسته روی این فضا کافی به نظر نمی‌رسید، دانشمندان بر آن شدند که شرایطی به فضای توپولوژیک اضافه کنند که بتوان روی آن تابع مشتقپذیر نیز تعریف کرد. در اواسط قرن

بیستم این شرایط را ساختار دیفرانسیل پذیری و فضای حاصل را به زبان انگلیسی منیفلد^۱ و به زبان فرانسه واریته^۲ نامیدند. نظر به اینکه در علوم و فنون امروز بیشترین کاربرد ریاضی در استفاده از توابع مشتقپذیر است این تعریف به علت سهولت موجب تحولات بزرگی در ریاضی و کاربرد آن گردید. به طوری که در صنعت امروز مشکل می‌توان علمی را نام برد که در مژهای دانش از مفهوم ساختار دیفرانسیل پذیری استفاده نکرده باشد.

در این فصل رویه‌ها را به عنوان مثالی از فضای توپولوژیک، منیفلد توپولوژیک و منیفلد دیفرانسیل پذیر^۲-بعدی مورد مطالعه قرار می‌دهیم. خواهیم دید که چگونه یک رویه منتظم مثالی از یک منیفلد توپولوژیک و یک رویه دیفرانسیل پذیر مثالی از یک منیفلد دیفرانسیل پذیر است. این موضوع ما را با تعمیم رویه‌ها در ابعاد بالاتر آشنا می‌کند. این مباحث موجب می‌گردد که دانشجویان کارشناسی در رشته‌های ریاضی، فیزیک و فنی‌مهندسی آمادگی بیشتری برای مطالعه هندسه و کاربرد آن در تحقیقات خود یا در مقطع کارشناسی ارشد داشته باشند.

۱.۳ رویه به عنوان یک فضای توپولوژیک

برای آنکه خواننده هنگام مطالعه این مبحث نیازی به کتب دیگر نداشته باشد، در بخش اول برخی از مفاهیم مورد نیاز را یادآوری می‌کنیم.

۱.۱.۳ یادآوری چند تعریف از توپولوژی

فرض کنید T یک مجموعه دلخواه باشد. خانواده مجموعه‌های باز دارای خواصی است که می‌توان آنها را در روی مجموعه‌های دلخواه نیز مورد مطالعه قرار داده مفاهیمی مانند تابع

^۱manifold

^۲variété

پیوسته را برای مجموعه‌های دلخواه تعریف کرد. بدیهی است که این مجموعه‌های دلخواه باید دارای حداقل شرایطی به شرح زیر باشند که بتوان روی آنها خواصی مشابه فضای اقلیدسی تعریف نمود. این شرایط را در تعریف زیر جمع آوری کرده‌ایم.

تعریف ۱.۱.۳. خانواده \mathcal{T} از زیرمجموعه‌های T را یک توپولوژی روی T می‌نامیم اگر در شرایط زیر صدق کند.

(۱) مجموعه \emptyset و T متعلق به \mathcal{T} باشد.

(۲) اشتراک هر دو عضو \mathcal{T} به \mathcal{T} تعلق داشته باشد.

(۳) اجتماع هر خانواده از اعضای \mathcal{T} به \mathcal{T} تعلق داشته باشد.

اعضای توپولوژی \mathcal{T} را مجموعه‌های باز یا همسایگی باز T نسبت به \mathcal{T} و اگر احتمال اشتباه نرود، فقط باز می‌نامیم. زوج (T, \mathcal{T}) را یک فضای توپولوژیک می‌گوییم و آن را با T نیز نمایش می‌دهیم.

مثال ۲.۱.۳. فرض کنید T یک مجموعه دلخواه باشد. مجموعه تمام زیرمجموعه‌های T تشکیل یک فضای توپولوژیک می‌دهند که به آن توپولوژی گسسته^۳ می‌گویند. توپولوژی گسسته بیشترین تعداد ممکن از بازها را داراست و به اصطلاح بزرگترین توپولوژی است که روی یک مجموعه تعریف می‌شود.

مثال ۳.۱.۳. اگر T یک مجموعه دلخواه باشد، آنگاه مجموعه $\{T, \emptyset\}$ نیز تشکیل یک فضای توپولوژیک روی T می‌دهند که به آن توپولوژی مقید^۴ یا توپولوژی بدیهی^۵ می‌گویند. توپولوژی بدیهی، کوچکترین توپولوژی است که روی یک مجموعه تعریف می‌شود.

مثال ۴.۱.۳. مجموعه اعداد حقیقی یک فضای توپولوژیک است که بازه‌های آن از فاصله‌های باز تشکیل شده‌اند.

^۳discrete topology

^۴concrete topology

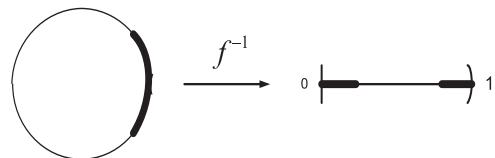
^۵trivial topology

تعريف ۵.۱.۳. نگاشت $f : T \rightarrow T'$ از فضای توپولوژیک (T, \mathcal{T}) در فضای توپولوژیک (T', \mathcal{T}') را پیوسته^۶ گوییم اگر برای هر زیرمجموعه باز U از T' ، $f^{-1}(U)$ زیرمجموعه باز T باشد. به عبارت دیگر f پیوسته است اگر هر باز را به یک باز برگرداند.

تعريف ۶.۱.۳. نگاشت f از فضای توپولوژیک T در فضای توپولوژیک T' را یک همومنورفیسم^۷ گوییم اگر دوسویی بوده، f و f^{-1} پیوسته باشد. در این صورت می‌گوییم T' با T همومنورفیک است.

اگر فضای توپولوژیک (T, τ) و (T', τ') همومنورفیک باشند، آنگاه تمام خواص توپولوژیک آنها یکسان است.

مثال ۷.۱.۳. تابع $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه $f(x) = 3x + 1$ پیوسته، یک به یک و پوششی است. معکوس آن تابع پیوسته $f^{-1}(y) = \frac{y-1}{3}$ است. لذا یک همومنورفیسم است.



شکل ۱.۳: تابع معکوس f^{-1} پیوسته نیست.

مثال ۸.۱.۳. تابع $f : [0, 1] \rightarrow S^1$ که با ضابطه $f(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ تعریف می‌شود، پیوسته، یک به یک و پوششی است، اما همومنورفیسم نیست. تابع معکوس f^{-1} یک بخش همبند از دایره را به یک ناحیه ناهمبند می‌برد، لذا پیوسته نیست. شکل ۱.۳ را ببینید. اگرچه دایره با خط به طور سرتاسری همومنورف نیست اما به طور موضعی همومنورف است.

⁶continuous

⁷homeomorphism

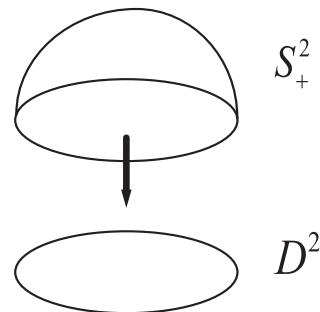
مثال ۹.۱.۳. نیم-کره S_+^2 با قرص باز D^2 همئومورفیک است (با نگاشت تصویر).

$$\begin{aligned} S_+^2 &= \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 = 1, z > 0\} \\ D^2 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 < 1\}. \end{aligned}$$

آنگاه نگاشت تصویر

$$\begin{aligned} Proj &: S_+^2 \mapsto D^2, \\ Proj &: (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2}) \mapsto (x, y, 0), \end{aligned}$$

پیوسته، یک به یک و پوششی است. معکوس آن $Proj^{-1}(x, y) = (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2})$ است. پیوسته است، لذا S_+^2 با D^2 همئومورفیک است. شکل ۲.۳ را ببینید.



شکل ۲.۳: نیمکره باز با بازی از صفحه همئومورف است.

اگر هر نقطه از یک فضای توپولوژیک در یک همسایگی قرار داشته باشد که با بازی از \mathbb{R}^n همئومورف باشد می‌گوییم که آن فضا با \mathbb{R}^n موضعاً همئومورفیک است. می‌دانیم که کره با صفحه همئومورفیک نیست، اما بنا بر مثال ۹.۱.۳ صفحه با کره به طور موضعی همئومورفیک است.

تعريف ۱۰.۱.۳. فضای توپولوژیک T را هاسدورف^۱ گوییم، اگر به ازای هر دو نقطه مجازی u_1, u_2 ، $u_1 \neq u_2$ (ع) مجموعه‌های باز مجازی U_1 و U_2 موجود باشند که به ترتیب شامل u_1 و u_2 بوده و $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ باشد.

مثال ۱۱.۱.۳. مجموعه اعداد حقیقی یک فضای توپولوژیک هاسدورف است. (چرا؟)

این شرط برای وجود و یکتایی حد ضروری است. در حقیقت شرط هاسدورف بودن نشان می‌دهد که نقاط فضای توپولوژیک مورد نظر به طور پیوسته‌ای به یکدیگر مرتبط هستند.

تعريف ۱۲.۱.۳. فضای توپولوژیک T را همبند^۲ گوییم، اگر هیچ زوجی از زیرمجموعه‌های باز و ناتهی T مانند A و B وجود نداشته باشد که در دو شرط $A \cup B = T$ ، $A \cap B = \emptyset$ و وجود نداشته باشد که در دو شرط صدق کند.

در حقیقت وجود شرط همبندی مانع از آن است که بتوان فضای توپولوژیک مورد نظر را به صورت اجتماع دو زیرمجموعه جدا از یکدیگر نوشت. به عنوان مثال مجموعه اعداد حقیقی یک فضای توپولوژیک همبند است.

تعريف ۱۳.۱.۳. فرض کنید $T \subseteq S$ باشد، یک پوشش^۳ روی S عبارت است از یک خانواده P از زیرمجموعه‌هایی از T که S را بپوشانند. یعنی

$$P = \{U_i | i \in I\} , \quad S \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i.$$

به عنوان مثال فاصله‌های باز \mathbb{R} یک پوشش باز برای این مجموعه تعریف می‌کنند.

^۱Hausdorff

^۲connected

^۳covering

۲.۱.۳ تمرین‌های بخش

تمرین ۱.۱.۳. نشان دهید فضای اقلیدسی \mathbb{R}^3 یک فضای توپولوژیک هاسدورف و همبند است. یک پوشش باز برای \mathbb{R}^3 معرفی کنید.

تمرین ۲.۱.۳. کره S^2 را می‌توان توسط شش کارت پوشانید. با معرفی آن‌ها نشان دهید این شش کارت تشکیل یک پوشش باز برای کره S^2 می‌دهد.

تمرین ۳.۱.۳. فرض کنید M یک رویه معمولی باشد. با استفاده از کارت‌ها یک توپولوژی روی M تعریف کنید.

تمرین ۴.۱.۳. فرض کنید M یک رویه معمولی باشد. با استفاده از اشتراک‌گوی‌های باز \mathbb{R}^3 با M یک توپولوژی روی M تعریف کنید.

۳.۱.۳ توپولوژی القایی و ذاتی روی رویه‌ها

دیدیم که تعریف توپولوژی روی یک مجموعه به نوعی بستگی به تعریف همسایگی‌های باز روی آن مجموعه دارد. تعریف همسایگی نقطه p در روی رویه M با تعریف همسایگی نقطه p از M به عنوان زیرمجموعه‌ای از \mathbb{R}^3 ممکن است متفاوت باشد. به این صورت که همسایگی نقطه p روی M به عنوان زیرمجموعه‌ای از \mathbb{R}^3 عبارت است از اشتراک یک گوی باز شامل p از \mathbb{R}^3 و رویه M ، در حالی که همسایگی نقطه p در روی M عبارت است از ناحیه‌ای (مثلاً یک قرص به مرکز p) در روی رویه M . اغلب اوقات این دو نوع همسایگی بر یکدیگر منطبق می‌شوند، ولی در حالت کلی این طور نیست. این تفاوت در تعریف همسایگی ما را به تعریف دو نوع توپولوژی روی رویه هدایت می‌کند. به عبارت دیگر با توجه به تعریف هر یک از این همسایگی‌های نقطه p در M یک نوع توپولوژی روی M به شرح زیر تعریف می‌کنیم.

تعريف ۵.۱.۳. فرض کنید $M \subseteq \mathbb{R}^3$ یک رویه منتظم و \mathcal{T} یک توپولوژی روی \mathbb{R}^3 باشد. اگر قرار دهیم

$$\mathcal{T}_M = \{V = U \cap M \mid U \in \mathcal{T}\},$$

آنگاه \mathcal{T}_M را توپولوژی القایی از \mathbb{R}^3 یا توپولوژی زیرفضایی^{۱۱} روی M می‌نامیم.

بنابراین توپولوژی القایی M توپولوژی است که توسط توپولوژی \mathbb{R}^3 به M القا می‌شود.

لم ۶.۱.۳. هر رویه منتظم M یک فضای توپولوژیک است که بازهای آن از برد خانواده کارت‌های M تشکیل شده است.

اثبات. در گزاره ۱۳.۲.۲ در صفحه ۷۵ دیدیم که هر کارت x از رویه منتظم M یک همئومورفیسم موضعی از بازی در صفحه \mathbb{R}^2 روی برد x است. به عبارت دیگر همسایگی‌های باز در روی M تصویر همسایگی‌های باز صفحه توسط کارت‌های M هستند. بنا بر تعريف برد خانواده کارت‌های M کل آن را می‌پوشاند. لذا برد این کارت‌ها در شرایط تعريف ۱۱.۳ صدق نموده و یک توپولوژی روی M تعريف می‌کند. بنابراین رویه M یک فضای توپولوژیک است. این توپولوژی را توپولوژی کارت‌ها یا توپولوژی ذاتی می‌نامند. \square

تعريف ۷.۱.۳. توپولوژی کارت‌ها یا توپولوژی ذاتی^{۱۲} M توپولوژی است که با استفاده از تعريف همسایگی روی M توسط برد کارت‌ها تعريف می‌شود.

در اغلب رویه‌ها (به عنوان مثال کره و استوانه) دو توپولوژی ذاتی و القایی بر یکدیگر منطبق می‌شوند، اما در حالت کلی این دو توپولوژی با یکدیگر تفاوت دارند. برای مشخص شدن تفاوت این دو توپولوژی مثال زیر را می‌آوریم.

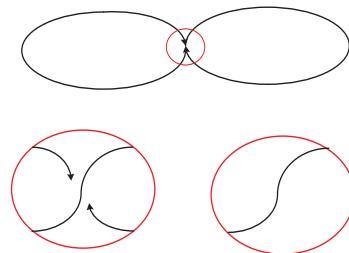
^{۱۱}induced topology or subspace topology

^{۱۲}intrinsic topology

مثال ۸.۱.۳. فرض کنید $t \in \mathbb{R}$ به ازای $g(t) \in C^\infty$ باشد که روی بازه $t > 0$ صعودی بوده و $\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = 2\pi$, $\lim_{t \rightarrow -\infty} g(t) = 0$, $g(0) = \pi$ همچنین را توسط رابطه زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(t) = \left(2\cos\left(g(t) - \frac{\pi}{2}\right), \sin 2\left(g(t) - \frac{\pi}{2}\right) \right).$$

تصویر f یک هشت لاتین ناقص و افقی است که وقتی $t \rightarrow \pm\infty$ از دو طرف، f به نقطه $(0, 0)$ نزدیک می‌شود ولی به آن نمی‌رسد چون $t \in \mathbb{R}$ است. شکل ۳.۳ را ببینید. در روی این منحنی که به صورت عدد هشت لاتین است، دو نوع همسایگی در نقطه $(0, 0)$

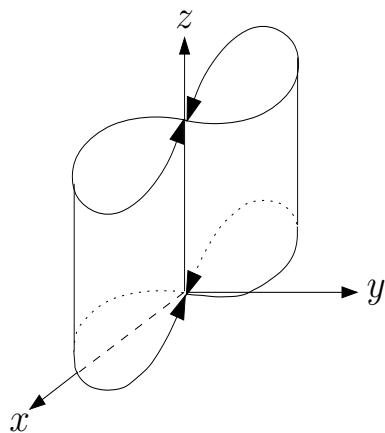


شکل ۳.۳: تفاوت توپولوژی ذاتی و القایی روی یک هشت لاتین ناقص و افقی. وقتی $t \rightarrow \pm\infty$ از دو طرف، f به نقطه $(0, 0)$ نزدیک می‌شود ولی به آن نمی‌رسد.

در نظر می‌گیریم. یک همسایگی که از صفحه \mathbb{R}^2 به منحنی القا می‌شود که اشتراک منحنی با قرص بازی به مرکز مبدا است، و دیگری همسایگی که از تصویر \mathbb{R} یعنی دامنه تابع f روی منحنی به دست می‌آید. این دو همسایگی دو توپولوژی به ترتیب به نام توپولوژی القایی و ذاتی روی منحنی تعریف می‌کنند. تفاوت این دو منحنی را می‌توان با توجه به شکل ۳.۳ دریافت. در توپولوژی القایی که از تقاطع قرص‌های باز صفحه با منحنی پدید می‌آید تعداد سه قطعه منحنی داریم، اما تعداد قطعه منحنی‌ها در توپولوژی ذاتی برابر یک است. لذا یک نگاشت پیوسته دو سویی (همئومorfیسم) بین آنها نمی‌تواند برقرار باشد که سه قطعه خم مجزا را به یک قطعه خم پیوسته متصل کند.

با استفاده از این منحنی می‌توان یک رویه استوانه‌ای شکل روى اين منحنى طوری تعریف کرد که توپولوژی القایی و توپولوژی ذاتی آن با یکدیگر متفاوت باشند. **تمرين ۱.۱.۳** را ببینید.

۴.۱.۳ تمرین‌های بخش



شکل ۴.۳: تفاوت توپولوژی ذاتی و القایی روی یک رویه.

تمرين ۱.۱.۳. رویه‌ای را که توسط خطوط عمود بر صفحه منحنی مثال **۸.۱.۳** تشکیل می‌شود، در نظر می‌گیریم. شکل **۴.۳** را ببینید. این رویه یک استوانه قائم است که روی منحنی فوق تعریف شده است.

الف) معادله پارامتری این رویه را نوشته نشان دهید یک رویه دیفرانسیل‌پذیر است.

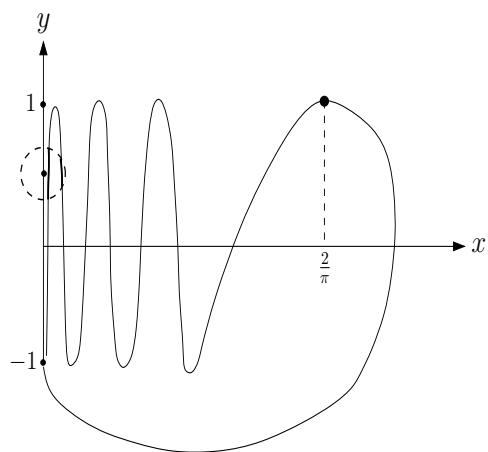
ب) توپولوژی ذاتی و القایی این رویه را تعیین کنید.

ج) با استفاده از تصویر بازه‌ای القایی و ذاتی و تفاوت تعداد خم‌ها در هر یک از آنها (یا با استفاده از ناهمبندی یکی از آنها و همبندی دیگری) تفاوت این دو توپولوژی ذاتی و القایی را بیان کنید.

د) آیا این رویه جهت‌پذیر است؟

راهنمایی: د) با یک کارت کلی می‌توان رویه را پوشاند، لذا نگاشت تغییر کارت همانی است.

تمرین ۲۰.۳. روی رویه نیم-محروم توپولوژی ذاتی و القایی را معرفی نموده، نشان دهید
بر یکدیگر منطبق هستند.



شکل ۵.۳: تفاوت توپولوژی ذاتی و القایی روی یک رویه استوانه ای شکل که روی این منحنی ساخته شده است.

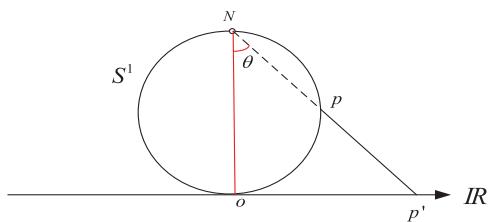
تمرین ۲۰.۳. یک منحنی در نظر می‌گیریم که از پاره خط $(1, -1)$ از محور y ، نمودار تابع $y = \sin \frac{1}{x}$ به ازای $\frac{2}{\pi} < x$ و قوس واصل بین نقطه $(1, 0)$ و نقطه $(\frac{2}{\pi}, 1)$ تشکیل شده است. واضح است که این منحنی را می‌توان به وسیله طول قوس پارامتری کرد، به این صورت که از نقطه $(1, 0)$ شروع کرده در امتداد پاره خط روی محور y ، سپس در امتداد قوس واصل بین $(1, 0)$ و نقطه $(\frac{2}{\pi}, 1)$ و نهایتاً در امتداد منحنی $y = \sin \frac{1}{x}$ حرکت می‌کنیم. در نتیجه این منحنی نقش پیوسته و موضعی یک به یک نیم خط $(0, \infty)$ است و یک منحنی معمولی می‌باشد. سطح استوانه‌ای که از عمود وارد بر صفحه و مار بر نقاط این منحنی تشکیل می‌شود، یک رویه می‌باشد. شکل ۵.۳ را ببینید.
ثابت کنید توپولوژی ذاتی و القایی روی این رویه با هم متفاوت است.

راهنمایی: تصویر یک همسایگی از توپولوژی ذاتی رویه روی محور u ها و تصویر یک همسایگی از توپولوژی القایی رویه روی محور u ها را با هم مقایسه کنید.

تمرین ۴.۱.۳. آیا کره S^2 باصفحه \mathbb{IR}^3 همنومورفیک است.

۵.۱.۳ تصویر استریوگرافیک

یکی از کارتهایی که روی کره در هر بعد دلخواه قابل تعریف است تصویر استریوگرافیک نام دارد و به صورت زیر تعریف می شود. اگر p نقطه دلخواهی از یک دایره یا کره باشد، تصویر آن توسط نگاشت استریوگرافیک^{۱۳} نسبت به قطب شمال N را با p' نمایش می دهیم. به این صورت تمام نقاط دایره یا کره به جز قطب شمال دارای تصویر روی محور یا صفحه است. نمودارهای ۶.۳ و ۷.۳ را ببینید.



شکل ۶.۳: تصویر استریوگرافیک دایره نسبت به قطب شمال.

مثال ۵.۱.۳. نشان دهید دایره بدون قطب شمال $\{N\} - S^1$ با \mathbb{IR} همنومورفیک است (تصویر استریوگرافیک).

حل: فرض کنید که شعاع دایره برابر a بوده و در مبدأ بر خط حقیقی مماس باشد. نمودار ۶.۳ را ببینید. p نقطه‌ای دلخواه از دایره غیر از N , p' تصویر استریوگرافیک p و θ زاویه

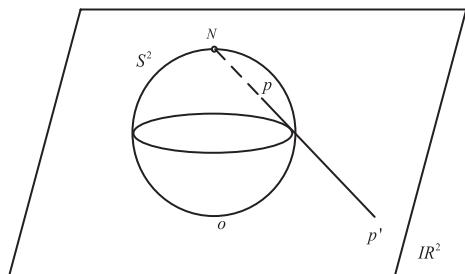
stereographic^{۱۳}

Np بامحور عمودی است. با توجه به شکل داریم $op' = 2a \tan \theta$. تعريف می‌کنیم

$$\begin{aligned} f : S^1 - \{N\} &\longrightarrow I\!\!R, \\ \theta &\mapsto 2a \tan \theta, \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

این تابع دوسویی و پیوسته است و در نتیجه یک کارت از $\{N\} - S^1$ روی $I\!\!R$ تعريف می‌کند. لذا کل دایره به جز نقطه N را می‌پوشاند. اگر این کار را برای قطب جنوب تکرار کنیم، کارت دیگری از $\{S\} - S^1$ روی $I\!\!R$ تعريف می‌کنیم که دایره به جز نقطه S را می‌پوشاند. اجتماع این دو کارت کل دایره را می‌پوشاند. دامنه و برد آن را تعیین کنید.

مثال ۱۰.۳. اگر p نقطه دلخواهی از کره S^2 باشد، تصویر آن توسط نگاشت استریوگرافیک^{۱۴} نسبت به قطب شمال را با p' نمایش می‌دهیم. به این صورت تمام نقاط کره به جز قطب شمال دارای تصویر روی صفحه $I\!\!R^2$ است. به عبارت دیگر می‌توان نشان داد که $\{N\} - S^1$ با صفحه $I\!\!R^2$ همنوئومorfیک است. اگر بخواهیم کل کره S^2 را بپوشانیم، باید از دو تصویر



شکل ۷.۳: تصویر استریوگرافیک کرده نسبت به قطب شمال.

استریوگرافیک استفاده کنیم. یکی نسبت به قطب شمال و یکی نسبت به قطب جنوب.

شکل ۷.۳ را ببینید.

با این روش می‌توان تصویر استریوگرافیک را برای کره‌های در ابعاد بالاتر نیز تعريف کرد. فصل اول از کتاب [۱] را ببینید.

^{۱۴}stereographic

۶.۱.۳ تمرین‌های بخش

تمرین ۱.۱.۳. در مثال ۵.۱.۳ در صفحه ۲۳۶ تصویر استریوگرافیک دایره را برای کره تعمیم دهید. به عبارت دیگر تصویر استریوگرافیک کره‌ای به شعاع a را که مبدأ O مرکز کره و خط جهت‌دار ON محور z باشد، را می‌توان به صورت زیر بیان کرد.

$$(\theta, \varphi) \longrightarrow (2a \tan \theta \cos \varphi, 2a \tan \theta \sin \varphi),$$

که در آن اگر p نقطه دلخواهی از کره S^2 باشد، تصویر آن توسط نگاشت استریوگرافیک نسبت به قطب شمال را با p' نمایش می‌دهیم، θ زاویه بین محور z و Np است. شکل ۷.۳ رابینید. φ زاویه بین Op' و محور x فرض شده است.

تمرین ۲.۱.۳. تصویر استریوگرافیک را می‌توان با استفاده از کارت‌ها نیز به صورت زیر معرفی نمود. فرض کنیم x نگاشتی از صفحه روی کره 2 -بعدی S^2 باشد.

$$x : D \longrightarrow S^2 \subset I\!\!R^3,$$

$$(u, v) \mapsto (x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v)),$$

$$x_1 = \frac{4u}{4 + u^2 + v^2}, \quad x_2 = \frac{4v}{4 + u^2 + v^2}, \quad x_3 = \frac{4 - u^2 - v^2}{4 + u^2 + v^2}.$$

الف. تعیین کنید تحت چه شرایطی این نگاشت یک کارت کره است و چه نقاطی از کره را می‌پوشاند.

ب. چند کارت از این نوع برای پوشاندن کل کره کافی است.

ج. آیا می‌توانید یک تصویر استریوگرافیک مشابه برای کره در ابعاد بالاتر ارائه کنید.

۲.۳ رویه به عنوان منیفلد توپولوژیک

در این بخش با مفهوم جدیدی به نام منیفلد توپولوژیک آشنا می‌شویم. منیفلدهای توپولوژیک پایه مطالعه آنالیز و هندسه پیشرفتی بوده کاربردهای متنوعی در علوم و مهندسی دارند. نظر

به نیاز روز افزون دانشجویان به این مبحث قبل از رسیدن به دوره کارشناسی ارشد بر آن شدیم تا به مناسبت ارتباط منیفلدهای توپولوژیک با رویه ها اشارهای نیز به مبحث منیفلدها بنماییم. کلیه مطالبی که در این بخش تحت عنوان بعد ۲ مطرح می‌گردد برای هر بعد دلخواه نیز برقرار است.

۱.۲.۳ منیفلد توپولوژیک

تعريف ۱.۲.۳. یک منیفلد توپولوژیک^{۱۵} یک فضای توپولوژیک است که هر نقطه آن دارای یک همسایگی باز، همئومorf با بازی از یک فضای اقلیدسی باشد.

در این صورت به هر فضای توپولوژیک می‌توان به طور طبیعی یک بعد نسبت داد. به عنوان مثال اگر یک فضای توپولوژیک به طور موضعی با یک فضای اقلیدسی به بعد n همئومorf باشد، آن را یک منیفلد توپولوژیک n -بعدی می‌گوییم. برای آنکه بتوان تعریف حد را برای توابعی بیان نمود که روی فضای توپولوژیک تعریف می‌شوند، شرط هاسدورف را نیز به این تعریف اضافه می‌کنیم. در این صورت در تعریف و یکتاوی حد توابع دچار مشکل نمی‌شویم.

مثال ۲.۲.۳. مجموعه اعداد حقیقی \mathbb{R} یک منیفلد توپولوژیک ۱-بعدی است.

مثال ۳.۲.۳. خط راست $1 = 3x + f(x)$ یک منیفلد توپولوژیک ۱-بعدی است. نگاشت همئومorfیسم آن در مثال ۷.۱.۳ بررسی گردید.

مثال ۴.۲.۳. هر منحنی هموار در \mathbb{R}^3 را می‌توان توسط معادله پارامتری آن به عنوان یک منیفلد توپولوژیک ۱-بعدی معرفی کرد.

$$\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3,$$

$$t \mapsto \alpha(t) = (x(t), y(t), z(t)).$$

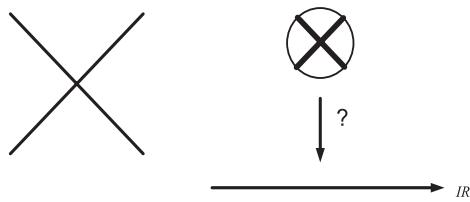
^{۱۵} topological manifold

در اینجا α پیوسته و موضعی یک به یک بوده روی تصویرش پوششی است. لذا هر منحنی هموار، منیفلد توپولوژیک ۱-بعدی است.

مثال ۵.۲.۳. کره یک فضای توپولوژیک ۲-بعدی است. کارت‌های کره در اینجا نگاشتهای همئومورفیسم موضعی با صفحه \mathbb{R}^2 هستند.

مثال ۶.۲.۳. نظر به اینکه روی یک رویه منتظم M ، نگاشت x از کارت (x, U) یک همئومورفیسم موضعی روی برد x است. می‌توان نشان داد که هر رویه منتظم یک منیفلد توپولوژیک ۲-بعدی است. تمرین ۱.۲.۳ در صفحه ۲۴۱ را ببینید.

مثال ۷.۲.۳. دو خط راست متقاطع که توسط تابع $y = x^2$ تعریف می‌شود را در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم ببینیم آیا می‌توان روی آن ساختار منیفلد توپولوژیک تعریف نمود. نمودار ۸.۳ را ببینید. با کمی دقت می‌توان دید که خط راست با دو خط متقاطع موضعی



شکل ۸.۳: دو خط متقاطع و محور اعداد حقیقی همئومorf نیستند.

همئومورف نیست، چون نمی‌توان یک رابطه دوسویی و پیوسته بین آنها برقرار نمود. این مشکل از انجا ناشی می‌شود که هر همسایگی که شامل نقطه تقاطع باشد از دو پاره خط تشکیل شده است و اگر این نقطه را حذف نماییم چهار پاره خط مجزا داریم. در حالی که در روی \mathbb{R} هر همسایگی از یک پاره خط تشکیل شده است و اگر این نقطه را حذف نماییم دو پاره خط مجزا داریم. لذا دو خط متقاطع به طور موضعی با \mathbb{R} همئومورف موضعی نیست. در نتیجه دو خط متقاطع یک منیفلد توپولوژیک ۱-بعدی نیست. به همین صورت دو خط

متقطع به طور موضعی با \mathbb{R}^3 نیز همئمورف موضعی نیست و در نتیجه نمی‌تواند منیفلد توپولوژیک باشد.

مثال ۸.۲.۳. مجموعه ماتریس‌های $M_{2 \times 2}$ حقیقی یک منیفلد توپولوژیک است.

۲.۲.۳ تمرین‌های بخش

تمرین ۱.۲.۳. با توجه به گزاره ۱۲.۲.۲ در صفحه ۷۵ نشان دهید هر رویه منتظم یک منیفلد توپولوژیک ۲-بعدی است.

تمرین ۲.۲.۳. دو صفحه متقطع که توسط تابع $(y - z) = \pm(x - z)$ تعریف می‌شود را در نظر می‌گیریم. نشان دهید که نمی‌توان روی دو صفحه متقطع ساختار منیفلد توپولوژیک تعریف نمود.

راهنمایی. از مثال ۷.۲.۳ استفاده کنید.

تمرین ۳.۲.۳. اگر چه مخروط یک رویه منتظم نیست، اما نشان دهید که می‌توان روی مخروط ساختار منیفلد توپولوژیک تعریف نمود.

تمرین ۴.۲.۳. مخروط کامل توسط تابع $y^2 + z^2 = x^2$ تعریف می‌شود. نشان دهید که نمی‌توان روی مخروط کامل ساختار منیفلد توپولوژیک تعریف نمود.

۳.۳ رویه به عنوان منیفلد دیفرانسیل‌پذیر

۱.۳.۳ منیفلد دیفرانسیل‌پذیر

روی یک منیفلد توپولوژیک نمی‌توان تابع مشتق پذیر تعریف کرد. نظر به اینکه مهمترین کاربرد ریاضی استفاده از مشتق برای به دست آوردن اکسترمم‌ها ی یک تابع و در نتیجه

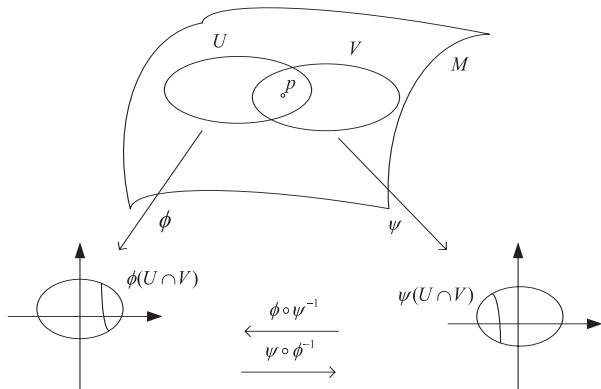
تعریف تابع مشتق پذیر است، باید شرایطی فراهم کنیم که تعریف تابع مشتق پذیر روی یک منیفلد توپولوژیک امکان پذیر گردد. برای این کار روشی را که در مورد تعریف تابع دیفرانسیل پذیر روی رویه ها به کار بردهیم، تعمیم می دهیم.

تعریف ۱۰.۳.۳. فرض کنید $U \subset M$ بازی از فضای توپولوژیک M باشد و نگاشت

$$\phi : U \subset M \longrightarrow \phi(U) \subset \mathbb{R}^n$$

یک هموئومورفیسم از U به بازی از \mathbb{R}^n باشد. در این صورت زوج (U, ϕ) را یک کارت موضعی^{۱۶} ۲ بعدی می نامیم.

توجه نمایید که در اینجا جهت تعریف کارت در منیفلدها را عکس جهت تعریف کارت در رویه تعریف می کنیم. نمودار ۹.۳ را ببینید.



شکل ۹.۳: نگاشت تغییر کارت.

تعریف ۱۰.۳.۴. فرض کنید (U, ϕ) , (V, ψ) دو کارت موضعی روی M و $U \cap V \neq \emptyset$ باشد. نگاشت

$$\phi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \longrightarrow \phi(U \cap V).$$

^{۱۶}local chart

را یک نگاشت تغییر کارت یا تغییر مختصات نامیده می‌گوییم این دو کارت C^k -مرتبط^{۱۷} هستند، هرگاه نگاشت تغییر کارت و معکوس آن از کلاس C^k باشند.

تعریف ۳.۳.۳. یک خانواده از کارت‌های M را یک C^k -اطلس گوییم، هرگاه دامنه کارت‌ها M را بپوشاند.

تعریف ۴.۳.۳. اگر A یک C^k -اطلس باشد، با اضافه کردن تمام کارت‌های C^k -مرتبط به A یک C^k -اطلس جدید حاصل می‌شود که آن را C^k -اطلس ماقسیمال یا اطلس اشباع شده یا در نهایت یک ساختار دیفرانسیل پذیری^{۱۸} C^k می‌نامیم.

تعریف ۵.۳.۳. منیفلد توپولوژیک M همراه با یک ساختار دیفرانسیل پذیری C^k را یک منیفلد دیفرانسیل پذیر C^k عبارت می‌نامیم. در اینجا نیز مانند منیفلدهای توپولوژیک بعد هر منیفلد را می‌توان با بعد دامنه کارت‌های آن تعیین نمود.

مثال ۶.۳.۳. دیدیم $M = \mathbb{R}$ ، یک فضای توپولوژیک است. یک کارت سرتاسری ψ در نظر می‌گیریم که کل \mathbb{R} را بپوشاند. چون کل فضا با یک کارت پوشیده می‌شود احتیاجی به بررسی دیفرانسیل پذیری نگاشت تغییر کارت نداریم. مجموعه تمام کارت‌های C^k -مرتبط با کارت ψ تشکیل یک ساختار دیفرانسیل پذیری روی \mathbb{R} می‌دهد.

مثال ۷.۳.۳. دایره یک فضای توپولوژیک است. کارت‌های (U, ϕ) و (V, ψ) را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

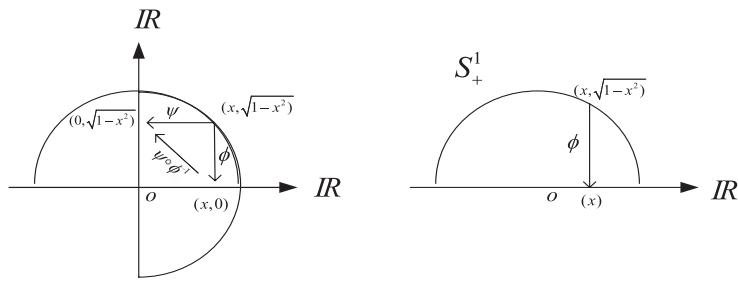
$$\begin{aligned} \phi : S_+^1 &\longrightarrow \mathbb{R}, & \psi : S_+^1 &\longrightarrow \mathbb{R}, \\ (x, \sqrt{1-x^2}) &\longrightarrow (x, 0), & (x, \sqrt{1-x^2}) &\longrightarrow (0, \sqrt{1-x^2}). \end{aligned}$$

در اینجا نگاشت تغییر کارت و معکوس آن عبارتند از $\psi \circ \phi^{-1} : x \rightarrow (\sqrt{1-x^2})$ و $\phi \circ \psi^{-1} : y \rightarrow (\sqrt{1-y^2})$ که هر دو روی تصویر نیمدایره باز S_+^1 یعنی فاصله

^{۱۷} C^k -related

^{۱۸}differentiable structure

(۱, ۱) مشتقپذیر و از کلاس C^k می باشد. دایره را می توان با یک اطلس ۴ کارتی از این نوع پوشانید. لذا دایره یک منیفلد دیفرانسیل پذیر ۱ بعدی از کلاس C^k است. نمودار 10.3 را ببینید.



شکل ۱۰.۳ : دایره با ۴ کارت یک منیفلد دیفرانسیل پذیر است.

مثال ۸.۳.۳. فرض کنید M ، یک رویه منظم در \mathbb{R}^3 باشد. دیدیم که هر رویه منظم یک منیفلد توپولوژیک است. مجموعه تمام کارت‌های C^k مرتبه M تشکیل یک ساختار دیفرانسیل پذیری روی $M \subset \mathbb{R}^3$ می‌دهد. لذا هر رویه منظم یک منیفلد دیفرانسیل پذیر به بعد ۲ است.

مثال ۹.۳.۳. فرض کنید \mathbb{R}^2 ، می‌دانیم که \mathbb{R}^2 یک فضای توپولوژیک است. یک کارت سرتاسری (V, ψ) در نظر می‌گیریم به طوری که $V = \mathbb{R}^2$ و $\psi = Id$. مجموعه تمام کارت‌های C^k -مرتبه با این کارت تشکیل یک ساختار دیفرانسیل پذیری روی \mathbb{R}^n می‌دهد. لذا \mathbb{R}^2 یک منیفلد دیفرانسیل پذیر به بعد ۲ است.

مثال ۱۰.۳.۳. اگر U زیرمجموعه بازی از \mathbb{R}^2 باشد، آنگاه U یک منیفلد دیفرانسیل پذیر ۲ بعدی است که ساختار آن با کارت $(U, \psi|_U)$ مشخص می‌شود. $\psi|_U = Id_U$.

تذکر ۱۱.۳.۳. می‌توان ساختار منیفلد دیفرانسیل پذیر را روی یک مجموعه بدون استفاده از تعریف فضای توپولوژیک نیز بیان نمود. به عبارت دیگر کارت‌های تعریف شده روی هر

مجموعه به خودی خود یک توپولوژی روی آن مجموعه تعریف می‌کنند که آن را توپولوژی کارت‌ها یا توپولوژی ذاتی می‌گویند. در این صورت لازم نیست شرط فضای توپولوژیک بودن را تحقیق کنیم. برای توضیحات بیشتر در این مورد خواننده علاقه مند می‌تواند به کتاب [۱۴] رجوع نماید.

۲.۳.۳ تمرین‌های بخش

تمرین ۱.۳.۳. دیدیم که جهت تعریف کارت در منیفلدها عکس جهت تعریف کارت در رویه است. اگر چه وقتی که یک نگاشت همتومورفیسم باشد، جهت آن مهم نیست، توضیح دهید چرا نمی‌توان جهت تعریف کارت در رویه منظم را عکس آنچه که در تعریف آورده شد بیان کرد.

تمرین ۲.۳.۳. نشان دهید با تعریف کارتی که هر نقطه از نیم‌کره باز را به تصویر آن وابسته می‌کند، کره S^3 یک منیفلد دیفرانسیل پذیر ۲- بعدی است. راهنمایی. برای پوشاندن کل کره شش نوع از این کارت‌ها لازم است. کافی است نشان دهیم نگاشت تغییر کارت و معکوس آن مشتق پذیر هستند. مثال ۷.۳.۳ در صفحه ۲۴۳ و شکل ۵.۲ در صفحه ۷۸ را ببینید.

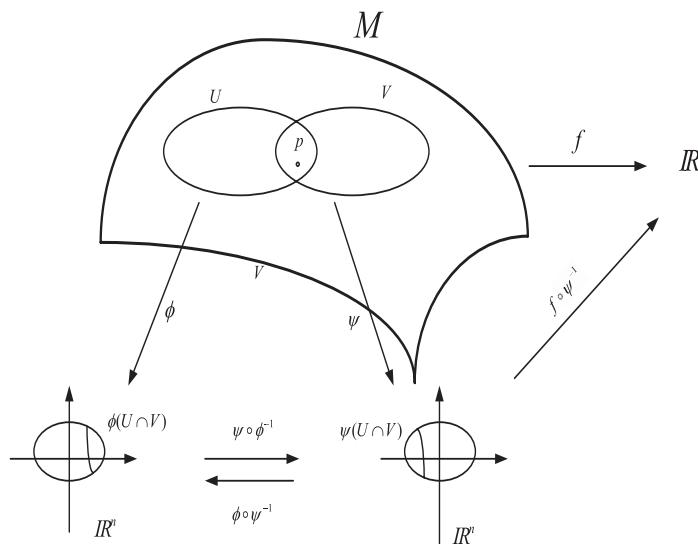
تمرین ۳.۳.۳. نشان دهید هر فضای برداری حقیقی ۲- بعدی، یک منیفلد دیفرانسیل پذیر است.

تمرین ۴.۳.۳. نشان دهید مجموعه ماتریس‌های $M_{2 \times 2}$ حقیقی یک منیفلد دیفرانسیل پذیر ۴- بعدی است.

تمرین ۵.۳.۳. منیفلد توپولوژیک و منیفلد دیفرانسیل پذیر n - بعدی را تعریف کنید.

۴.۳ تابع مشتق‌پذیر روی منیفلدها

اگر بخواهیم تابع مشتق‌پذیر روی رویه‌ها را برای هر منیفلد M تعیین دهیم، باید یک کارت در همسایگی هر نقطه در نظر بگیریم. سپس می‌گوییم f در نقطه p مشتق‌پذیر است، هرگاه $f \circ \phi^{-1}$ در (p) مشتق‌پذیر باشد. اما لازم است که این تعریف از مشتق‌پذیری برای تمام کارت‌ها برقرار باشد تا قابل قبول بوده یا به عبارتی خوش تعریف باشد. این کارت‌ها باید طوری تعریف شوند که اگر (V, ψ) کارت دیگری در همسایگی p باشد، آنگاه $f \circ \psi^{-1}$ نیز مشتق‌پذیر باشد. به همین دلیل است که در تعریف منیفلد کارت‌های خاصی را انتخاب کردیم و آنها C^k -مرتبه نامیدیم. این کارت‌ها خاصیت عدم وابستگی مشتق‌پذیری به انتخاب کارت‌ها را حفظ کرده و فضای را نیز می‌پوشانند. نمودار ۱۱.۳ را ببینید. مشابه



شکل ۱۱.۳: اگر تابع f روی یک کارت مشتق‌پذیر باشد به طور طبیعی باید روی کارت‌های دیگر نیز دیفرانسیل پذیر باشد.

آنچه در بخش ۴.۲ برای تعریف توابع مشتق‌پذیر روی رویه‌ها گفته شد را می‌توان برای منیفلدها به صورت زیر تکرار کرد. تنها باید در اینجا توجه داشت که جهت تعریف کارت‌ها

عضو شده است.

تعریف ۱.۴.۳. فرض کنید M یک منیفلد از کلاس C^k باشد. تابع $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ در نقطه $p \in U \subseteq M$ مشتقپذیر گوییم، اگر یک کارت (ϕ, U) شامل p موجود باشد به طوری که تابع $f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \rightarrow \mathbb{R}$ در نقطه $\phi(p)$ مشتق پذیر باشد. اگر تابع f در تمام نقاط همسایگی U مشتقپذیر باشد آن را در U مشتقپذیر گوییم.

$$f : U \subseteq M \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\phi \downarrow \nearrow$$

$$\phi(U)$$

بدیهی است که این تعریف بستگی به انتخاب کارت (U, ϕ) ندارد. این موضوع را تحقیق کنید.

مثال ۲.۴.۳. می‌دانیم که \mathbb{R} یک منیفلد دیفرانسیلپذیر به بعد ۱ است. هر تابع حقیقی مشتقپذیر $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ است. در حقیقت

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\phi \downarrow \nearrow f \circ \phi^{-1}$$

$$U \subseteq \mathbb{R}$$

کارت‌های \mathbb{R} یعنی $\phi = Id$ همانی بوده و درنتیجه $f \circ \phi^{-1} = f$ مشتقپذیر است. از آنجا بنابر تعریف تابع f روی منیفلد \mathbb{R} مشتقپذیر است.

مثال ۳.۴.۳. می‌دانیم که مجموعه ماتریس‌های 2×2 حقیقی یک منیفلد دیفرانسیلپذیر به بعد ۴ است. تابع اثر^{۱۹} $M_{2 \times 2}$ روی \mathbb{R} یک نگاشت مشتق پذیر است.

^{۱۹}trace

در حقیقت هر عضو $M_{2 \times 2}$ متناظر با یک 2×2 تایی \mathbb{R}^4 است.

$$\begin{aligned} tr : M_{2 \times 2} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \phi \downarrow &\nearrow tr \circ \phi^{-1} \\ U \subseteq \mathbb{R}^4 & \end{aligned}$$

از آنجا نگاشت چهار متغیره حقیقی $tr \circ \phi^{-1}$ مشتقپذیر است. زیرا بنابر قضیه ای در آنالیز مشتقات جزیی آن موجود و پیوسته است.

$$tr \circ \phi^{-1} : (x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}) \longrightarrow x_{11} + x_{22}.$$

به عبارت دیگر ۱ از آنجا بنابر تعریفتابع اثر روی $M_{2 \times 2}$ مشتقپذیر است.

تذکر ۴.۴.۳. آنچه در مورد تعریف منیفلد توپولوژیک و منیفلد دیفرانسیل پذیر ۲-بعدی گفته شد عینا برای تعریف منیفلد توپولوژیک و منیفلد دیفرانسیل پذیر n -بعدی نیز برقرار است.

۱.۴.۳ تمرین‌های بخش

تمرین ۱.۴.۳. مشابه آنچه در مورد رویه های دیفرانسیل پذیر دیدیم، نشان دهید که دیفرانسیل پذیری یک تابع در نقطه $p \in M$ به انتخاب کارت ها بستگی ندارد.

تمرین ۲.۴.۳. نشان دهید که اگر تابعی مانند $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ در یک نقطه از منیفلد M مشتقپذیر باشد در آن نقطه پیوسته است.

تمرین ۳.۴.۳. دیدیم که مجموعه ماتریس‌های 2×2 حقیقی یک منیفلد دیفرانسیل پذیر به بعد ۴ است. نشان دهید تابع دترمینان روی $M_{2 \times 2}$ یک نگاشت مشتقپذیر است.

راهنمایی. هر عضو $M_{2 \times 2}$ متناظر با یک 2×2 تایی $\in \mathbb{R}^4$ است. مثال ۳.۴.۲ در صفحه ۲۴۷ را ببینید.

کتاب‌نامه

- [۱] بیدآباد بهروز، هندسه منیفلد ۱، انتشارات دانشگاه امیرکبیر، چاپ چهارم نوروز ۱۳۸۹.
- [۲] بیدآباد بهروز، هندسه منیفلد ۲، انتشارات دانشگاه امیرکبیر، چاپ اول نوروز ۱۳۹۰.
- [۳] بیدآباد بهروز و فاطمه آهنگری، مدل سازی حرکت هوایپیما در گردباد و مسیرهای بهینه زمانی، نشریه علمی پژوهشی دانشگاه امیرکبیر، سال بیستم، شماره ۷۰-ه زمستان ۱۳۸۷.
- [۴] بیدآباد بهروز و زعیم امیرحسام، مسیرهای کوتاهترین زمان برای یک ربات دیفرانسیلی، نشریه علمی پژوهشی دانشگاه امیرکبیر، سال نوزدهم، شماره ۶۹-ه زمستان ۱۳۸۷.
- [۵] بیدآباد بهروز و آهنگری فاطمه، مدل سازی حرکت هوایپیما در گردباد و مسیرهای بهینه زمانی، نشریه علمی پژوهشی دانشگاه امیرکبیر، سال بیستم، شماره ۷۰-ه زمستان ۱۳۸۸.
- [۶] جذبی ع.، هندسه ایرانی در عمل، ابولوفا محمد بن البوزجانی، انتشارات سروش ۱۳۶۷.
- [۷] رضایی مرتضی میر محمد و نجفی بهزاد، هندسه منیفلدها، انتشارات سال ۱۳۸۲.
- [۸] رضوی اسدالله، جبر و گروه لی، انتشارات دانشگاه امیرکبیر، سال ۱۳۸۷.
- [۹] عابدی، حسین هندسه دیفرانسیل موضعی، انتشارات دانشگاه بوقعلی سینا، سال ۱۳۸۸.
- [10] Asanjarani A. and Bidabad B.; *A classification of complete Finsler manifolds*, Differential Geometry and its Applications, vol(26), 2008, 434-444.
- [11] Bao, D., Chern, S.S. and Z. Shen; *An Introduction to Riemann-Finsler Geometry*,

- [12] Bidabad, B. ;*On compact Finsler spaces of positive constant curvature*,C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 349 (2011) 1191–1194.
- [13] Bidabad, B. *Transformations conformes et projectives d'une variété riemannienne*. L'Université Paul Sabatier de Toulouse, France. Thèse de doctorat no 3402, (1987).
- [14] Bidabad, B. ;*Conformal vector fields on tangent bundle of Finsler manifolds*, Balkan Journal of Geometry and its Applications, 11, no. 2, 2006, pages 28-35.
- [15] Bidabad B.; *Complete Finsler manifolds and adapted coordinates*, Balkan Journal of Geometry and its Applications, Vol. 14, No 1, 2009, pp 21-29.
- [16] Bidabad B.; *A remark on the Gauss-Bonnet theorem in Finsler geometry* , BSG Proceeding 15, International Conference of Differential Geometry and Dynamical Systems, DGDS-2008, Bucarest Romania, pp. 1-10, Geometry of Balkan Press, 2009.
- [17] Bidabad B.; *Finsler manifolds of positive constant curvature*, 5th seminar of Geometry and Topology, Kurdestan University, Sanandaj, 12-14 May 2009.
- [18] Bidabad, B. and Hedayatian, S. ;*Conformal vector fields on tangent bundle of Riemannian manifolds*, Iranian Journal of Sciences and Technology, Transaction A, vol. 29, No. A3, 2005, 531-540.
- [19] Bidabad, B. and Hedayatian, S. ;*Compact Capacity on Finsler Spaces*, Iranian Journal of Sciences and Technology, Transaction A, vol. 31, No. A3, 2007.
- [20] Bidabad B. and Rafie-Rad, M.; *Pure pusuit Navigation on Riemannian Manifolds*, Non-Linear Analysis; Real World Application, Vol(10), 2009, 1265-1269.
- [21] Bidabad B. and Sedaghat, M.; *Geometric Modeling of Dubins Airplane Movement and its Metric*, Amirkabir Electrical, Electronics Engineering, Vol . 42, No.1, Spring 2010, 9-16.
- [22] Bidabad B. and Shen, Z.; *Circle-preserving transformations in Finsler spaces*, Publication Mathematicae Debrecen, 81, 3-4, (2012), 435-445.
- [23] Boothby, W. M.; *An Introduction to Differentiable Manifolds and and Riemannian Geometry*, Academic Press, 2003.
- [24] Do Carmo, M. P.; *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Printice-Hall, 1976.
- [25] Gallot S., Hulin D., Lafontaine J.; *Riemannian Geometry*, Springer-Verlag, second edition, 1990.
- [26] Goetz, A.; *Introduction to Differential Geometry*, Reading, Mass, Addison-Weseley, 1970.

- [27] Grifone, J. *Cours de maitrise en geometrie differentielle*, L'universite' Paul Sabatier de Toulouse, France, 2004.
- [28] Guillemin V. and Pollack A.; *Differential Topology*, Prentice Hall, 1974. Academic Press, 1978.
- [29] Jost J.; *Riemannian Geometry and Geometric Analysis*, Springer-Verlag, second edition, 1998.
- [30] Kuhnel, W. ; *Differntial Geometry, Curves-surfaces-Manifolds*, American Mathematical Society, second edition, 2006.
- [31] Lang, S.; *Differntial and Riemannian Manifolds*, Graduate texts in Math., Spriger, 1996.
- [32] Lee, J. M.; *Riemannian Manifolds*, Springer-Verlag, 1997.
- [33] Lee, J.M.; *Introducation to smooth manifolds*, Springer-Verlag, 2001.
- [34] Milnor, M.; *Morse Theory*,
- [35] Montiel, Sebastián; Ros, Antonio; *Curves and Surfaces.*, Second edition. Translated from the 1998 Spanish original by Montiel and edited by Donald Babbitt. Graduate Studies in Mathematics, 69. American Mathematical Society, Providence, RI; Real Sociedad Matemática Española, Madrid, 2009; American Mathematical Society, second edition, 2006.
- [36] Prakash, N *Differential geometry: an integrated approach*,Tata McGraw-Hill, 1981.
- [37] Nomizu, K; Yano, K. *On circles and spheres in Riemannian geometry*. Math. Ann. 210 (1974), 163–170.
- [38] Oprea, J.; *Differential Geometry and its Applications*, Second edition, Mathematical Association of America, Washington, DC, 2007.
- [39] Toponogov Victor A.; *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Birkhauser, 2006.

نمایه

- | | |
|--------------------------|---------------------------|
| تعمیم فرمول‌های فرنه، ۵۲ | اولین فرم اساسی، ۱۲۶ |
| رویه معمولی، ۶۹ | ایزومتری، ۱۹۵ |
| عملگر شکل، ۱۸۶ | ایزومتریک، ۱۹۵ |
| مختصات متعامد، ۲۱۳ | بردار انحنا، ۱۹ |
| پارامتری‌سازی، ۶۹ | بردار انحنای، ۱۶۱ |
| از کلاس C^k ، ۶۶ | بردار انحنای ژئودزیک، ۱۶۲ |
| استریوگرافیک، ۲۳۶ | بردار مماس، ۱۰۷، ۹۷ |
| استریوگرافیک، ۲۱۳ | بروچرخزاد، ۲۵ |
| استوانه، ۸۰ | به طور تصویری تخت، ۲۱۸ |
| اصول موضوعه اقلیدس، ۱۲۲ | به طور همیس تخت، ۲۱۱ |
| اطلس، ۲۴۳، ۷۳ | بیضوی، ۱۵۰ |
| اطلس اشباح شده، ۲۴۳ | تابع دیفرانسیل پذیر، ۹۰ |
| اطلس ماکسیمال، ۲۴۳ | تابع پیوسته، ۸۹ |
| انحنا، ۱۹ | تانسور، ۱۴۶، ۱۴۵ |
| انحنای اصلی، ۱۵۰ | تانسور ریمان، ۱۸۹ |
| انحنای اسکالار، ۱۹۲ | تانسور ریچی، ۱۹۱ |
| انحنای ریمان، ۱۹۰ | تراکتريس، ۱۰۳ |
| انحنای گاووسی، ۱۸۶، ۱۵۰ | تصویر استریوگرافیک، ۱۳۰ |
| | تندی، ۸ |

رویه دیفرانسیل پذیر، ۹۰	توبولوژی، ۲۲۷
رویه ریمانی، ۱۸۸	توبولوژی مقید، ۲۲۷
رویه منتظم، ۶۹	توبولوژی القایی، ۲۳۲
رویه تراز، ۱۷۴	توبولوژی بدیهی، ۲۲۷
زنگیرگون، ۱۳۷، ۲۰۰	توبولوژی ذاتی، ۲۳۲
ساختر دیفرانسیل پذیری، ۷۳	توبولوژی زیرفضایی، ۲۳۲
ساختر دیفرانسیل پذیری، ۲۴۳	توبولوژی گسسته، ۲۲۷
سرعت، ۸	جهت برگردان، ۱۶
سطح دوار، ۱۳۷	جهت نگهدار، ۱۶
سیکلوئید، ۳۴، ۲۷	جهت پذیر، ۱۱۹
شبہ کرہ، ۱۵۵	خاصیت ذاتی، ۲۲۱
شتاب، ۸	خط راست و دایره در \mathbb{R}^n ، ۵۴
صفحہ مماس، ۹۹	دایره، ۵۸
ضرایب کریستوفل نوع اول، ۱۵۷	دایره ژئودزیکی، ۵۶
ضرایب کریستوفل نوع دوم، ۱۵۷	دلوار، ۸۱
ضرب داخلی، ۱۳۱، ۱۸۸	دوره تناوب، ۱۴
طول قوس، ۸	دومین فرم اساسی، ۱۴۱
عملگر شکل، ۱۵۸	دیفئومورفیسم، ۶۷
فاصله، ۲۲۱	ذاتی، ۱۴، ۲۲۱
فاصله ذاتی، ۲۲۱	رویه استوانه‌ای، ۸۰
فرم مربعی معین مثبت، ۱۳۴	رویه مخروطی، ۸۲
فرمول اول فرنه، ۲۰	رویه خط دار، ۸۴
فرمول دوم فرنه، ۲۲	رویه خط دار پیچ ارشمیدسی، ۸۶
	رویه دوار، ۷۹

- فرمول سوم فرنه، ۲۱
 فرمول های فرنه در \mathbb{R}^n ، ۵۱
 فرمول وینگارتن، ۱۵۸
 فرمول گاوس، ۱۵۸
 فرمول های فرنه، ۲۰
 فضای اینشتین، ۱۹۲
 فضای مماس، ۹۶
 مارپیچ مخروطی، ۳۲
 مارپیچ گون، ۱۳۸
 مبین اولین فرم اساسی، ۱۲۷
 مبین دومین فرم اساسی، ۱۴۲
 متريک
 ريماني، ۱۸۸
 ناتبهگون، ۱۸۹
 متريک اقليدسي، ۱۲۷
 متريک تصويری هيبلرت، ۲۲۴
 متريک ريماني، ۱۲۶
 متريک هيبلرت، ۲۲۴
 متناوب، ۱۴
 مجموعة مatriس‌های 2×2 ، ۲۴۷، ۲۴۸
 مختصات سازگار، ۲۱۱
 مختصات متعامد يکه، ۲۱۴
 مختصات منحنی الخط منحنی، ۹۴
 منحنی ساده روی رویه، ۹۳
 منقبض کردن تانسور، ۱۴۸، ۱۹۱
 منيفلد توپولوژيک، ۲۳۹
 منيفلد دیفرانسیل پذیر، ۲۴۱
 منيفلد ريماني، ۱۲۶
- مختصات موضعی، ۶۳
 مختصات کروی، ۱۳۵
 مختصات گاوی، ۹۴
 مخروط، ۸۲
 مسئله چهارم هيبلرت، ۲۱۷
 مساحت رویه، ۱۸۰
 مسطح، ۱۵۰
 رویه، ۲۰۴
 مسیر، ۱۴
 مشتق سویی، ۱۰۵، ۱۰۶
 مشتق پذیر، ۲۴۷
 معادلات ماکزول، ۲۱۱
 معین مثبت، ۱۳۱، ۱۸۹
 منتظم، ۴
 منحنی
 دیفرانسیل پذیر، ۹۴
 پیوسته، ۹۳
 منحنی هم ارز، ۹۶
 منحنی در \mathbb{R}^n ، ۵۱
 منحنی ساده روی رویه، ۹۳

- همبند، ۲۳۰
همبند کمانی، ۹۵
همدیس، ۲۱۰
هموار، ۵
واریته، ۲۲۶
پارامتر سازگار، ۱۹۷
پوشش، ۲۳۰
پیوسته، ۲۲۸
پیچ اول، ۵۰
ژئودزیک، ۱۶۱، ۵۶
کارت مختصاتی، ۶۹
کارت منتظم، ۶۹
کارت موضعی، ۲۴۲
کارت موضعی، ۶۳
کلاس، ۳
کودازی، ۲۰۳
گاوس، ۲۰۳
موضعا همتومورفیک، ۲۲۹
مؤلفه مماسی انحنا، ۱۶۲
میپل، ۶، ۳، ۲
ناتیهگون، ۱۳۱، ۱۸۸
نقاط تکین، ۷۱
نقاط منتظم، ۷۱
نقشه، ۶۳
نمایش
دکارتی و قطبی، ۴
پارامتری، ۴
نمایش غیر پارامتری، ۱۷۴
نگاشت هم مساحت، ۲۱۵
نگاشت همدیس، ۲۱۰
نگاشت تغییر مختصات، ۲۴۳
نگاشت تغییر کارت، ۲۴۳
نگاشت حافظ ژئودزی یا نگاشت تصویری، ۲۱۷
نگاشت گاوس، ۱۸۵، ۱۷۶
هاسدرف، ۲۳۰
هذلولوی، ۱۵۰
هم ارز، ۹۶
همتومورفیسم، ۲۲۸، ۶۶
همتومورفیسم موضعی، ۷۵
همتومورفیک، ۲۲۸

