
بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی‌تکنیک تهران)
دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

Maple

در هندسه دیفرانسیل

بر پایه جزوه درسی دکتر بهروز بیدآباد

میلاد غنیمت ۸۷۱۲۰۴۳

Maple نرم افزاری برای حل مسائل ریاضی است که اولین بار در سال ۱۹۸۱برای انجام مجموعه ای از محاسبات در دانشگاه waterloo طراحی شد. در سال ۱۹۸۸، این نرم افزار توسعه داده شد و توسط یک کمپانی کانادایی مستقر در دانشگاه به بازار تجاری کامپیوتر عرضه شد. فروش و عرضه این نرم افزار به بازار، سود زیادی را نصیب صاحبان شرکت کرد. این نرم افزار ابزاری قدرتمند در انجام محاسبات ریاضی و مهندسی می باشد.

Maple یک مفسر برای زبان برنامه نویسی پویا است، به طور معمول، عبارات جبری و عبارات منطقی در حافظه کامپیوتر، ذخیره می شوند و پس از آن بوسیله این نرم افزار پردازش شده و حل میگردند. از این نرم افزار در حل مسایل مختلف ریاضی از قبیل هندسه، حساب و... استفاده می شود.

از خصوصیات نرم افزار Maple طراحی الگوریتم های ریاضی و به نوعی برنامه نویسی ریاضیات است.

از دیگر خصوصیات این نرم افزار راهنمای بسیار قوی آن است که کار کردن با این نرم‌افزار را بسیار راحت می‌کند. جدیدترین نگارش این نرم‌افزار نگارش ۱۵ آن است که در تمام زمینه‌های ریاضی از جمله:

-جبر خطی
-ریاضیات گسسته
-حسابان
-محاسبات علمی
-فیزیک محاسباتی
-جبر خطی عددی
-دینامیک محاسباتی سیالات
-مشتق‌گیری عددی
-انتگرال‌گیری عددی
-رسم نمودار های اعم از متحرک و ثابت
-و...

کتابخانه ها در Maple:

برای استفاده از بعضی دستورات در Maple نیاز است تا کتابخانه مربوط به آن دستور در برنامه فراخوانی شده باشد تا برنامه دستور مورد نظر را بشناسد.

کتابخانه های مورد نیاز در درس هندسه دیفرانسیل موضعی عبارتند از:

Plots, Vector Calculus, Student,…

بخش اول (منحنی ها)

با استفاده از دستور Plots می توان منحنی های پارامتری در صفحه را رسم کرد.

> $plot([t^3-4t, t^2-4, t=-3..3])$ 　　　　شکل ۲,۱

> $C1 := plot([\cos(t), \sin(t), t=0..2\pi])$

> $C2 := plot([\cos(2t), \sin(2t), t=0..2\pi])$

> $display([C1, C2])$ 　　　　شکل ۴,۱

استفاده از Maple براي پارامتري سازي بر حسب طول قوس (نمايش پارامتري طبيعي):

ابتدا كتابخانه Vector Calculus را فراخواني مي كنيم، سپس منحني را تعريف كرده و مشتق آن را با دستور diff() به دست مي آوريم. با دستور Norm() اندازه بردار مشتق را مي يابيم، از آن توسط دستور int() انتگرال گرفته و برابر با پارامتر طول قوس قرار مي دهيم. در انتها با دستور solve()، t را بر حسب s به دست مي آيد.

مثال: تمرين ۲,۱,۱

> $with(VectorCalculus): \alpha := \langle e^t \cdot \cos(t), e^t \cdot \sin(t), e^t \rangle$

$$\alpha := (e^t \cos(t))e_x + (e^t \sin(t))e_y + (e^t)e_z$$

> $alpha1 := diff(\alpha, t)$

$$\alpha1 := (e^t \cos(t) - e^t \sin(t))e_x + (e^t \sin(t) + e^t \cos(t))e_y + (e^t)e_z$$

> $t := solve(s = int(Norm(alpha1, 2), t=0..t), t)$

$$t := \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{3}s^2 + \frac{2}{3}\sqrt{3}\,s + 1\right)$$

> alpha

$$\frac{1}{3}\sqrt{3s^2 + 6\sqrt{3}\,s + 9}\,\cos\left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{3}s^2 + \frac{2}{3}\sqrt{3}\,s + 1\right)\right)e_x + \frac{1}{3}\sqrt{3s^2 + 6\sqrt{3}\,s + 9}\,\sin\left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{3}s^2 + \frac{2}{3}\sqrt{3}\,s + 1\right)\right)e_y + \frac{1}{3}\sqrt{3s^2 + 6\sqrt{3}\,s + 9}\,e_z$$

انحنا، تاب و كنج فرنه:

پس از تعريف منحني، با استفاده از دستور TNBFrame() كنج فرنه را به دست مي آوريم كه مقادير به دست آمده به ترتيب از چپ به راست، T، N و B مي باشند.

با استفاده از دستورهاي Curvature() و Torsion() به ترتيب انحنا و تاب منحني به دست مي آيد.

نكته ۱: در محاسبه كنج فرنه، انحنا و تاب به كمك دستورات فوق، نيازي به نمايش پارامتري طبيعي منحني نيست و مي توان منحني را به فرم دلخواه تعريف كرد.

نكته ۲: دستور simplify() جهت ساده سازي عبارات خروجي به كار مي رود.(براي آشنايي بيشتر با اين دستور، به Help نرم افزار Maple مراجعه كنيد)

مثال: تمرين ۴،۳،۱

> $with(VectorCalculus):$

> $\text{alpha} := \left\langle 3\cdot\cos\left(\frac{s}{5}\right), 3\cdot\sin\left(\frac{s}{5}\right), \frac{4\cdot s}{5}\right\rangle$

$$\alpha := 3\cos\left(\frac{1}{5}s\right)e_x + 3\sin\left(\frac{1}{5}s\right)e_y + \frac{4}{5}se_z$$

> $TNBFrame(\text{alpha}, s)$

$$\begin{bmatrix} -\frac{3}{5}\sin\left(\frac{1}{5}s\right) \\ \frac{3}{5}\cos\left(\frac{1}{5}s\right) \\ \frac{4}{5} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\cos\left(\frac{1}{5}s\right) \\ -\sin\left(\frac{1}{5}s\right) \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \frac{4}{5}\sin\left(\frac{1}{5}s\right) \\ -\frac{4}{5}\cos\left(\frac{1}{5}s\right) \\ \frac{3}{5}\sin\left(\frac{1}{5}s\right)^2 + \frac{3}{5}\cos\left(\frac{1}{5}s\right)^2 \end{bmatrix}$$

> $\text{kappa} := simplify(Curvature(\text{alpha}, s))$

$$\kappa := \frac{3}{25}$$

> $\text{tau} := simplify(Torsion(\text{alpha}, s))$

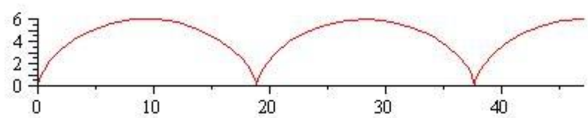
$$\tau := \frac{4}{25}$$

منحني هاي جالب:

براي رسم انواع منحني هاي ثابت و متحرك در Maple از كتابخانه plots استفاده مي شود.

> $with(plots):$

> $animatecurve([3\cdot(t-\sin(t)), 3\cdot(1-\cos(t)), t=0..5\cdot \mathrm{Pi}], frames = 100, scaling = constrained)$



رسم منحني تقاطع دو رويه:

در حالت کلی برای رسم تقاطع دو رویه باید معادلات منحنی های فصل مشترک را بدست بیاوریم که برای این کار از دستور solve() استفاده می شود . سپس با دستور display() آن ها را با هم رسم می کنیم .

> $with(plots):$

> $C1 := x^2+y^2-1$

$$C1 := x^2+y^2-1$$

> $C2 := x^2+z^2-1$

$$C2 := x^2+z^2-1$$

> $C := implicitplot3d([C1=0, C2=0], x=-2..2, y=-2..2, z=-2..2, color=[red, cyan], style=wireframe,):$

> $S := solve(C1-C2=0, [x(t), y(t)])$

$$S := \left[\left[x=\frac{z}{t}, y=z\right], \left[x=-\frac{z}{t}, y=-z\right]\right]$$

> $R := eval(C2, S[1])$

$$R := \frac{z^2}{t^2}+z^2-1$$

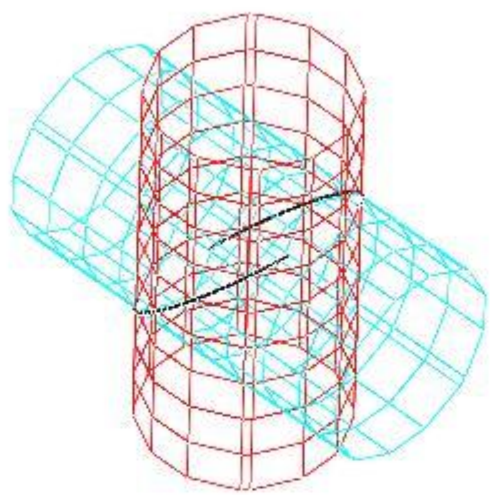
> $solve(R=0, z)$

$$\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}, -\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}$$

> $R1 := spacecurve\left(\left[\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}, \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}, \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\right], t=-2..2, color=black, style=wireframe, thickness=2\right):$

> $R2 := spacecurve\left(\left[\frac{-1}{\sqrt{t^2+1}}, \frac{-t}{\sqrt{t^2+1}}, \frac{-t}{\sqrt{t^2+1}}\right], t=-2..2, color=black, style=wireframe, thickness=2\right):$

> $display(\{C, R1, R2\}, scaling=constrained)$



قضیه اساسی نظریه منحنی ها و معادلات ذاتی:

مثال ۲,۵,۱:

برای به دست آوردن معادله یک منحنی مسطح بر اساس تابع انحنا آن، در Maple از دستور زیر استفاده می کنیم:

> $with(VectorCalculus):$

```
> alpha := proc(kappa)
      int(⟨cos(int(kappa, s = 0 ..s)), sin(int(kappa, s = 0 .. s))⟩, s = 0 ..s)
  end proc :
```

```
> alpha(1)
```

$$(\sin(s))e_x + (1 - \cos(s))e_y$$

```
> alpha(s)
```

$$\left(\sqrt{\pi}\ \mathrm{FresnelC}\left(\frac{s}{\sqrt{\pi}}\right)\right)e_x + \left(\sqrt{\pi}\ \mathrm{FresnelS}\left(\frac{s}{\sqrt{\pi}}\right)\right)e_y$$

بخش دوم(رویه ها)

توابع چند متغیره را در میپل به دو روش می توانیم تعریف کنیم:

۱ .کل تابع را برابر یک متغیر جدید قرار می دهیم , در این حالت می توانیم مانند توابع یک متغیره از تابع مشتق و انتگرال گرفته و نمودار آن را رسم کنیم ولی برای مقداردهی به تابع باید از دستور eval(f,[]) استفاده کنیم.

```
> z1 := x^2 - y^2
```

$$z1 := x^2 - y^2$$

```
> z1(1, 2)
```

$$x(1, 2)^2 - y(1, 2)^2$$

```
> eval(z1, [x = 1, y = 2])
```

$$-3$$

۲ .حالت دوم برای مقداردهی به تابع مناسبتر است و نسبت به حالت اول روشهای بیشتری را برای تعریف شامل می شود اما نمی توان برای مشتق و انتگرال و رسم مثل حالت اول رفتار کرد.

```
> z2 := (x, y) → x^2 - y^2
```

$$z2 := (x, y) \rightarrow x^2 - y^2$$

```
> z2(1, 2)
```

$$-3$$

۲,۱,۱ نقاط منفرد و نمایش پارامتری:

برای یافتن نقاط منفرد نمایش پارامتری به کمک میپل از دستورهای زیر استفاده می کنیم:
ابتدا بسته VectorCalculus را فراخوانی می کنیم و سپس رویه را تعریف می کنیم و مشتقات جزئی آن را با استفاده از دستور diff() بدست می آوریم .بعد ضرب خارجی آنها را با دستور CrossProd() حساب می کنیم .
برای یافتن نقاط بحرانی هر مؤلفه از بسته Student[Calculus 1] استفاده می کنیم و دستور CriticalPoints را به کار می بریم .

> $with(VectorCalculus):$
> $R := \langle r\cdot\cos(\text{theta}), r\cdot\sin(\text{theta}), 0\rangle$

$$R := (r\cos(\theta))e_x + (r\sin(\theta))e_y$$

> $R1 := diff(R, r)$

$$R1 := (\cos(\theta))e_x + (\sin(\theta))e_y$$

> $R2 := diff(R, \text{theta})$

$$R2 := -r\sin(\theta)e_x + (r\cos(\theta))e_y$$

> $J := CrossProd(R1, R2)$

$$J := \left(\cos(\theta)^2 r + \sin(\theta)^2 r\right)e_z$$

> $with(Student[Calculus1]):$
> $CriticalPoints(x^2 - \tan(x) + 1, x = -\text{Pi}..\text{Pi})$

$$\left[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\right]$$

۱,۳,۱ و ۲,۳,۱
منحنی روی رویه و بردار و صفحه مماس بر یک رویه

برای تعریف یک منحنی روی یک رویه کافیست به پارامترهای رویه مقدار ثابتی بدهیم تا فقط یک متغیر باقی بماند ,در این صورت یک منحنی خواهیم داشت و تمام دستورهای قبل روی آن قابل اجراست.
به طور کلی برای به دست آوردن شئ مماس بر روی یک صفحه یا منحنی پارامتری از دستور Tangent() استفاده می کنیم .
آرگومان اول این دستور تابعی که مماس آن را می خواهیم است و بقیه آرگومان ها نقطه تماس است.
این دستور حداقل دو ورودی دارد.

> $with(VectorCalculus):$
> $X := \langle u, v, u^2 + v^2\rangle$

$$X := (u)e_x + (v)e_y + \left(u^2 + v^2\right)e_z$$

> $x := eval(X, [u = u, v = 1])$

$$x := (u)e_x + e_y + \left(u^2 + 1\right)e_z$$

> $dx := diff(x, u)$

$$dx := e_x + 2\,ue_z$$

> $S := Tangent(X, u = 1, v = 1)$

$$S := \begin{bmatrix} 1 + u \\ 1 + v \\ 2 + 2\,u + 2\,v \end{bmatrix}$$

> $L := Tangent(x, u = 1)$

$$L := \begin{bmatrix} 1+u \\ 1 \\ 2+2u \end{bmatrix}$$

۴,۱ نگاشت گاوس:

نگاشت گاوس به طور مستقیم در میپل تعریف نشده است ولی با چند دستور ساده می توانیم آن را حساب کنیم.
اگر رویه پارامتری باشد کافیست بردارهای مشتقات جزیی آن را بدست بیاوریم و سپس حاصلضرب خارجی آنها را بر اندازه اش تقسیم کنیم تا نگاشت گاوس حاصل شود.
در صورتی که رویه پارامتری نباشد باید گرادیان آن را با استفاده از دستور Gradient یا Del یا Nabal بدست بیاوریم .

$> with(VectorCalculus):$

مثال ۵,۴,۱

$> \mathrm{F} := z^2+\left(\sqrt{x^2+y^2}-a\right)^2-b^2$

$$F := z^2+\left(\sqrt{x^2+y^2}-a\right)^2-b^2$$

$> dF := Gradient(X, [x, y, z])$

$$dF := \frac{2\left(\sqrt{x^2+y^2}-a\right)x}{\sqrt{x^2+y^2}}\bar{e}_x+\frac{2\left(\sqrt{x^2+y^2}-a\right)y}{\sqrt{x^2+y^2}}\bar{e}_y+2z\bar{e}_z$$

$> G_p := simplify\left(\frac{dF}{norm(dF, 2)}, 'symbolic'\right)$

$$G_p := \left(\frac{\left(\sqrt{x^2+y^2}-a\right)x}{\sqrt{a^2+x^2+y^2-2\sqrt{x^2+y^2}\,a+z^2}\,\sqrt{x^2+y^2}}\right)\bar{e}_x+\left(\frac{\left(\sqrt{x^2+y^2}-a\right)y}{\sqrt{a^2+x^2+y^2-2\sqrt{x^2+y^2}\,a+z^2}\,\sqrt{x^2+y^2}}\right)\bar{e}_y+\left(\frac{z}{\sqrt{a^2+x^2+y^2-2\sqrt{x^2+y^2}\,a+z^2}}\right)\bar{e}_z$$

تمرین ۲,۴,۱

$> X := \langle 1-u, u\cdot\cos(v), u\cdot\sin(v)\rangle$

$$X := (1-u)e_x+(u\cos(v))e_y+(u\sin(v))e_z$$

$> x1 := diff(X, u) : x2 := diff(X, v) :$

$> dX := CrossProd(x1, x2)$

$$dX := \left(\cos(v)^2u+\sin(v)^2u\right)e_x+(u\cos(v))e_y+(u\sin(v))e_z$$

$> U_p := simplify\left(\frac{dX}{norm(dX, 2)}, 'symbolic'\right)$

$$U_p := \frac{1}{2}\sqrt{2}\,e_x+\frac{1}{2}\sqrt{2}\,\cos(v)e_y+\frac{1}{2}\sqrt{2}\,\sin(v)e_z$$

* رسم رویه ها:

رسم سه بعدی رویه ها مانند رسم منحنی ها می باشد با این تفاوت که باید دستور plot را به plot3d تبدیل کرد و نمودار را به لحاظ پارامتری مقید کرده و دامنه و برد را بر حسب x و y بنویسیم .

در صورتی که بخواهیم چند نمودار را با هم رسم کنیم هر کدام از آنها را جداگانه تعریف می کنیم و سپس مجموعه آنها را در دستور plot3d() قرار می دهیم.

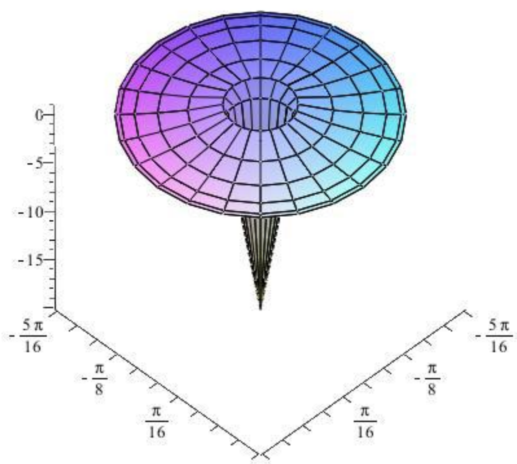
برای رسم رویه هایی که معادله آنها به صورت ضمنی تعریف شده از دستور implicitplot3d استفاده می کنیم.

مجموعه تراز یک رویه در میپل با دستور contourplot برای دو بعد و contourplot3d برای سه بعد رسم می شود .

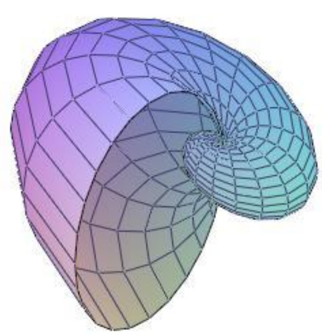
این دستور در کتابخانه plots قرار دارد.

> $with(plots)$:

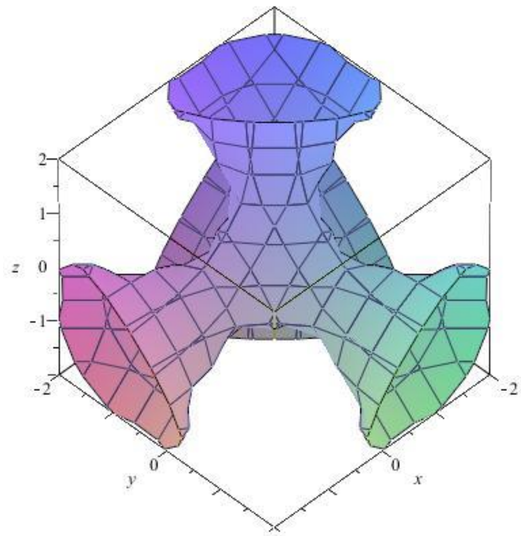
> $plot3d\left(\left[\cos(u)\cdot\sin(v), \sin(u)\cdot\sin(v), \cos(v) + \ln\left(\tan\left(\frac{v}{2}\right)\right)\right], u=-\pi..\pi, v=-\pi..\pi, axes=frame\right)$



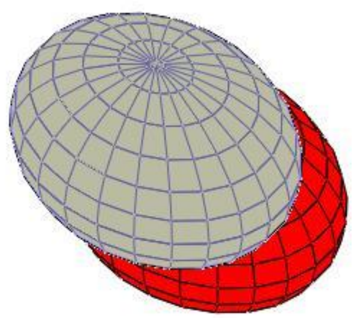
> $plot3d\left(1.3^x\cdot\sin(y), x=-\pi..2\pi, y=0..\pi, coords=spherical\right)$



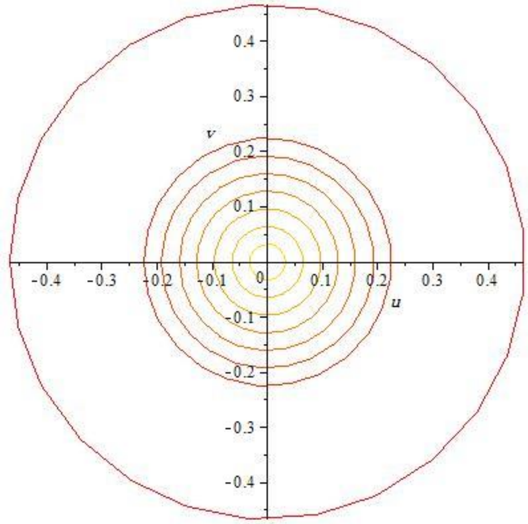
> $implicitplot3d\left(x^3+y^3+z^3+1=(x+y+z+1)^3, x=-2..2, y=-2..2, z=-2..2, axes=boxed\right)$



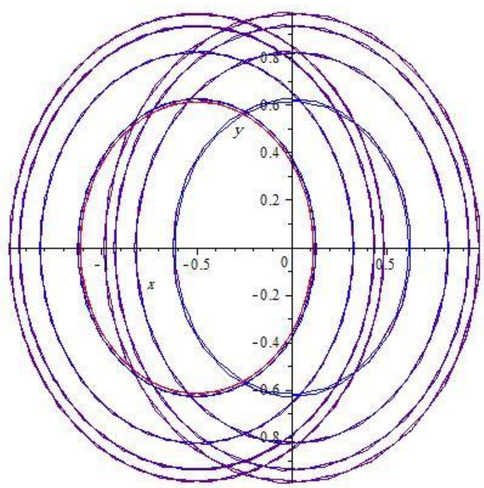
> $plot3d\left(\left[\left[\cos(x)\cdot\cos(y), \sin(x)\cdot\cos(y), \sin(y)\right], \left[\cos(x)\cdot\sin(y)-0.5, \sin(x)\cdot\sin(y), \cos(y)-1\right]\right], x=0..2\pi, y=0..2\pi, color=[yellow, red]\right)$



> $contourplot\left(\left[\cos(u)\cdot\sin(v), \sin(u)\cdot\sin(v), \cos(v)+\ln\left(\tan\left(\frac{v}{2}\right)\right)\right], u=-\pi..\pi, v=-\pi..\pi\right)$



> $contourplot(\{[\cos(x)\cdot\cos(y), \sin(x)\cdot\cos(y), \sin(y)], [\cos(x)\cdot\sin(y) - 0.5, \sin(x)\cdot\sin(y), \cos(y) - 1]\}, x = 0..2\,\pi, y = 0..2\,\pi, coloring = [blue, red])$



۵٫۱ جهت رویه:

برای بررسی جهت پذیری رویه S به کمک میپل، پس از تغییر مختصات، دترمینان ماتریس ژاکوبی آن را به صورت زیر محاسبه می کنیم:

> $with(VectorCalculus):$

> $S := \langle u, v, u^2 - v^2\rangle$

$$S := (u)e_x + (v)e_y + (u^2 - v^2)e_z$$

> $u := r\cdot\cos(\text{theta})$

$$u := r\cos(\theta)$$

> $v := r\cdot\sin(\text{theta})$

$$v := r\sin(\theta)$$

> S

$$(r\cos(\theta))e_x + (r\sin(\theta))e_y + (r^2\cos(\theta)^2 - r^2\sin(\theta)^2)e_z$$

> $with(LinearAlgebra):$
> $simplify(Determinant(Jacobian([u, v], [r, \theta])),'symbolic')$

$$r$$

> $restart$

با دستوراتی که تا اینجا یاد گرفته ایم اکنون می توانیم جهت پذیر نبودن نوار موبیوس را طبق تمرین آخر بخش فصل دوم (تمرین ۱،۵،۱) ثابت کنیم.
در این تمرین تنها دستوری که تا اینجا استفاده نکرده بودیم دستور حدگیری است که limit(f, point, dir) این کار را انجام می دهد .
f تابعی است که حد آن را می خواهیم که می تواند یک متغیره یا چند متغیره باشد.
Point نقطه حد گیری است و dir جهتی است که به طرف نقطه حدگیری نزدیک می شویم.

> $with(VectorCalculus):$
> $M := \left\langle \cos(u)\cdot\left(1 + v\cdot\sin\left(\frac{u}{2}\right)\right), \sin(u)\cdot\left(1 + v\cdot\sin\left(\frac{u}{2}\right)\right), v \cdot\cos\left(\frac{u}{2}\right)\right\rangle$

$$M := \left(\cos(u)\left(1 + v\sin\left(\frac{1}{2}u\right)\right)\right)e_x + \left(\sin(u)\left(1 + v\sin\left(\frac{1}{2}u\right)\right)\right)e_y + \left(v\cos\left(\frac{1}{2}u\right)\right)e_z$$

> $x1 := diff(M, u)$

$$x1 := \left(-\sin(u)\left(1 + v\sin\left(\frac{1}{2}u\right)\right) + \frac{1}{2}\cos(u)\,v\cos\left(\frac{1}{2}u\right)\right)e_x + \left(\cos(u)\left(1 + v\sin\left(\frac{1}{2}u\right)\right) + \frac{1}{2}\sin(u)\,v\cos\left(\frac{1}{2}u\right)\right)e_y - \frac{1}{2}v\sin\left(\frac{1}{2}u\right)e_z$$

> $x2 := diff(M, v)$

$$x2 := \left(\cos(u)\sin\left(\frac{1}{2}u\right)\right)e_x + \left(\sin(u)\sin\left(\frac{1}{2}u\right)\right)e_y + \left(\cos\left(\frac{1}{2}u\right)\right)e_z$$

> $dM := CrossProd(x1, x2)$

$$dM := \left(\left(\cos(u)\left(1 + v\sin\left(\frac{1}{2}u\right)\right) + \frac{1}{2}\sin(u)\,v\cos\left(\frac{1}{2}u\right)\right)\cos\left(\frac{1}{2}u\right) + \frac{1}{2}v\sin\left(\frac{1}{2}u\right)^2\sin(u)\right) e_x + \left(-\frac{1}{2}v\sin\left(\frac{1}{2}u\right)^2\cos(u) - \left(-\sin(u)\left(1 + v\sin\left(\frac{1}{2}u\right)\right) + \frac{1}{2}\cos(u)\,v\cos\left(\frac{1}{2}u\right)\right)\cos\left(\frac{1}{2}u\right)\right)e_y + \left(\left(-\sin(u)\left(1 + v\sin\left(\frac{1}{2}u\right)\right) + \frac{1}{2}\cos(u)\,v\cos\left(\frac{1}{2}u\right)\right)\sin(u)\sin\left(\frac{1}{2}u\right) - \left(\cos(u)\left(1 + v\sin\left(\frac{1}{2}u\right)\right) + \frac{1}{2}\sin(u)\,v\cos\left(\frac{1}{2}u\right)\right)\cos(u)\sin\left(\frac{1}{2}u\right)\right)e_z$$

> $solve(\{dM[1] = 0, dM[2] = 0, dM[3] = 0\}, [u, v])$

$$[\ ]$$

> $U := simplify\left(eval\left(\frac{dM}{norm(dM, 2)}, [u = u, v = 0]\right), 'symbolic'\right)$

$$U := \left(\cos\left(\frac{1}{2}u\right)\left(2\cos\left(\frac{1}{2}u\right)^2 - 1\right)\right)e_x + 2\cos\left(\frac{1}{2}u\right)^2\sin\left(\frac{1}{2}u\right)e_y - \sin\left(\frac{1}{2}u\right)e_z$$

> $M1 := eval(M, [u = u, v = 0])$

$$M1 := (\cos(u))e_x + (\sin(u))e_y$$

> $limit(M1, u = \mathrm{Pi}, left) - limit(M1, u = -\mathrm{Pi}, right)$

$$0e_x$$

> $limit(U, u = \mathrm{Pi}, left)$

$$-e_z$$

> $limit(U, u = -\mathrm{Pi}, right)$

$$e_z$$

بخش سوم (رویه در توپولوژی و هندسه منیفلد)

تصویر استریوگرافیک یک نقطه را با دستور زیر پیدا می کنیم:

StereographicProjection(P, P1, s)

Pنام نقطه تصویر است، P۱ یک نقطه است و s یک کره است که با دستور sphere(c, r) تعریف می شود .

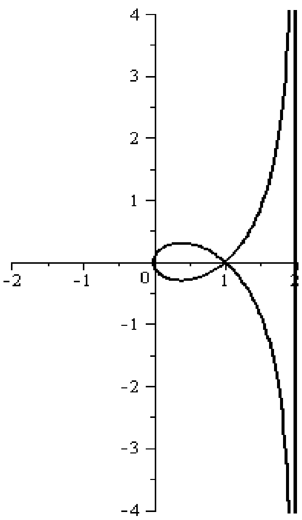
تمام این دستورات در کتابخانه geom3d قرار دارند.

همچنین برای رسم تصویر استریوگرافیک یک منحنی و وارون تصویر استریوگرافیک، از دستورهای زیر استفاده می کنیم:

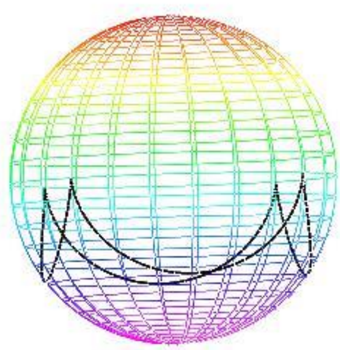
```
> with(geom3d) :
> sphere(s, [point(o, 0, 0, 2), 2]), point(P, 4/3, 4/3, 4/3);
                                   s, P
> StereographicProjection(P1, P, s);
                                   P1
> detail(P1)
                        name of the object       P1
                        form of the object       point3d
                        coordinates of the point [2, 2, 0]
> StereographicProjection(P2, P1, s);
                                   P2
> detail(P2)
                        name of the object       P2
                        form of the object       point3d
                        coordinates of the point [4/3, 4/3, 4/3]
>
  Stereo := proc(alpha, a, b, view1, view2)
   local sqleng, curv, sph, projcurv;
   sqleng := nrm(alpha)^2;
   curv := [alpha[1]/(1-alpha[3]), alpha[2]/(1-alpha[3]), t = a ..b];
   projcurv := plot(curv, color = black, thickness = 2, numpoints = 200);
   plots[display]({projcurv}, scaling = constrained, view = [-view1
       ..view1,-view2 ..view2]);
  end:
```

```
> 
InvStereo := proc(alpha, a, b)
 local sqleng, curv, sph, plcurv, sphcurv;
 sqleng := alpha[1]^2 + alpha[2]^2;
 curv := [2*alpha[1]/(1 + sqleng), 2*alpha[2]/(1 + sqleng),
     (sqleng-1)/(1 + sqleng)];
 sphcurv := plots[spacecurve](curv, t = a ..b, color = black, thickness
      = 2, numpoints = 200);
 sph := plot3d([cos(theta)*cos(phi), sin(theta)*cos(phi), sin(phi)],
     theta = 0 ..2*Pi, phi = -Pi/2 ..Pi/2) :
 plots[display]({sph, sphcurv}, scaling = constrained, shading = zhue,
     style = wireframe);
end:
```

```
> Stereo([cos(t)^2, sin(t)*cos(t), sin(t)], -Pi, Pi, 2, 4);
```




```
> InvStereo([cos(t)^3, sin(t)^3, 0], -Pi, Pi);
```



بخش چهارم (فرم های اساسی، انحنا و ژئودزیک های رویه)

۱,۱ اولین فرم اساسی یا متریک ریمان

برای محاسبه ماتریس ضرایب اولین فرم اساسی یا ماتریس متریک ریمان در میپل پس از تعریف رویه از [] برای اندیس گذاری مشتقات جزیی استفاده می کنیم تا از دستورات تکراری جلوگیری کنیم.

برای وارد کردن ماتریس از Toolbar میپل استفاده می کنیم و برای محاسبه وارون آن توان ۱- را به کار می بریم.

مثال ۳,۱,۱:

> $with(VectorCalculus):$
> $X := \langle u, v, f(u,v) \rangle$

$$X := (u)e_x + (v)e_y + (f(u,v))e_z$$

> $x[1] := diff(X, u)$

$$x_1 := e_x + \left(\frac{\partial}{\partial u} f(u,v)\right)e_z$$

> $x[2] := diff(X, v)$

$$x_2 := e_y + \left(\frac{\partial}{\partial v} f(u,v)\right)e_z$$

> $g := (i,j) \rightarrow simplify(DotProd(x[i], x[j], 'symbolic'))$

$$g := (i,j) \rightarrow simplify\left(VectorCalculus\text{:-}DotProd\left(x_i, x_j, 'symbolic'\right)\right)$$

> $G := \begin{bmatrix} g(1,1) & g(1,2) \\ g(2,1) & g(2,2) \end{bmatrix}$

$$G := \begin{bmatrix} 1 + \left(\frac{\partial}{\partial u} f(u,v)\right)^2 & \left(\frac{\partial}{\partial u} f(u,v)\right)\left(\frac{\partial}{\partial v} f(u,v)\right) \\ \left(\frac{\partial}{\partial u} f(u,v)\right)\left(\frac{\partial}{\partial v} f(u,v)\right) & 1 + \left(\frac{\partial}{\partial v} f(u,v)\right)^2 \end{bmatrix}$$

نکته) محاسبات انتگرالی در میپل:

به کمک دستور int می توانیم انتگرال های معین و نامعین را محاسبه کنیم.

همچنین برای محاسبه انتگرال های چندگانه می توان این دستور را به صورت متوالی به کار برد یا از دستور MultiInt() که در کتابخانه Student[MultivariateCalculus] قرار دارد استفاده کرد.

> $int(x \cdot \sin(x), x)$

$$\sin(x) - x\cos(x)$$

> $int\left(\exp(-x^2)\cdot\ln(x), x = 0 ..infinity\right)$

$$-\frac{1}{4}\sqrt{\pi}\,\gamma - \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\ln(2)$$

> $int\left(int\left(x\cdot y - (x\cdot y)^2 - 1, x = 1 ..y - 1\right), y = 1 ..4\right)$

$$-\frac{2531}{40}$$

> $with(Student[MultivariateCalculus]) :$

> $MultiInt\left(r + \theta + z, r = 0 ..2, \theta = 2 ..4, z = \frac{\pi}{2} ..\pi, coordinates = cylindrical_{r, \theta, z}\right)$

$$\frac{26}{3}\pi + \frac{3}{2}\pi^2$$

> $MultiInt\left(x^2 + y^2 + z, z = -2 ..4 + y^2, y = x - 1 ..x + 6, x = 2 ..4, output = integral\right)$

$$\int_{2}^{4}\int_{x-1}^{x+6}\int_{-2}^{4+y^2} \left(x^2 + y^2 + z\right) \mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

> $MultiInt\left(x^2 + y^2, y = x - 1 ..x + 6, x = 2 ..4, output = steps\right)$

$$\int_{2}^{4}\int_{x-1}^{x+6} \left(x^2 + y^2\right) \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_{2}^{4} \left(\left.\left(x^2 y + \frac{1}{3} y^3\right)\right|_{y = x - 1 ..x + 6}\right) \mathrm{d}x$$

$$= \int_{2}^{4} \left(7x^2 + \frac{(x+6)^3}{3} - \frac{(x-1)^3}{3}\right) \mathrm{d}x$$

$$= \left.\left(\frac{7x^3}{3} + \frac{(x+6)^4}{12} - \frac{(x-1)^4}{12}\right)\right|_{x = 2 ..4}$$

$$616$$

۳,۱ دومین فرم اساسی یک رویه:

ماتریس دومین فرم اساسی یک رویه را به صورت زیر محاسبه می کنیم:

مثال ۴,۳,۱:

> $with(VectorCalculus) :$

> $X := \langle u, v, v^2 - u^2\rangle$

$$X := (u)e_x + (v)e_y + \left(v^2 - u^2\right)e_z$$

> $x[1] := diff(X, u)$

$$x_1 := e_x - 2\,u e_z$$

> $x[2] := diff(X, v)$

$$x_2 := e_y + 2\,v e_z$$

> $n := simplify(CrossProd(x[1], x[2]), 'symbolic')$

$$n := 2\,u e_x - 2\,v e_y + e_z$$

> $N := simplify\left(\frac{n}{norm(n, 2)}, 'symbolic'\right)$

$$N := \frac{2\,u}{\sqrt{1 + 4\,u^2 + 4\,v^2}} e_x - \frac{2\,v}{\sqrt{1 + 4\,u^2 + 4\,v^2}} e_y + \left(\frac{1}{\sqrt{1 + 4\,u^2 + 4\,v^2}}\right) e_z$$

> $n[1] := diff(N, u)$

$$n_1 := \left(-\frac{8\,u^2}{\left(1 + 4\,u^2 + 4\,v^2\right)^{3/2}} + \frac{2}{\sqrt{1 + 4\,u^2 + 4\,v^2}}\right) e_x + \frac{8\,v\,u}{\left(1 + 4\,u^2 + 4\,v^2\right)^{3/2}} e_y - \frac{4\,u}{\left(1 + 4\,u^2 + 4\,v^2\right)^{3/2}} e_z$$

> $n[2] := diff(N, v)$

$$n_2 := -\frac{8\,v\,u}{\left(1 + 4\,u^2 + 4\,v^2\right)^{3/2}} e_x + \left(\frac{8\,v^2}{\left(1 + 4\,u^2 + 4\,v^2\right)^{3/2}} - \frac{2}{\sqrt{1 + 4\,u^2 + 4\,v^2}}\right) e_y - \frac{4\,v}{\left(1 + 4\,u^2 + 4\,v^2\right)^{3/2}} e_z$$

> $b := (i, j) \rightarrow simplify(DotProd(-x[i], n[j], 'symbolic'))$

$$b := (i, j) \rightarrow simplify\left(VectorCalculus\text{:-}DotProd\left(VectorCalculus\text{:-}\grave{}-\grave{}\left(x_i\right), n_j, 'symbolic'\right)\right)$$

> $B := \begin{bmatrix} b(1,1) & b(1,2) \\ b(2,1) & b(2,2) \end{bmatrix}$

$$B := \begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{1 + 4\,u^2 + 4\,v^2}} & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{1 + 4\,u^2 + 4\,v^2}} \end{bmatrix}$$

۴,۱ انحنای گاوسی یک رویه:

با محاسبه ماتریس فرم اساسی اول و دوم به راحتی می توانیم انحنای گاوسی یک رویه را حساب کنیم.

مثال ۲,۴,۱:

$$> with(VectorCalculus):$$

$$> X := \langle a\cdot\cos(u)\cdot\cos(v), a\cdot\sin(u)\cdot\cos(v), a\cdot\sin(v)\rangle$$

$$X := (a\cos(u)\cos(v))e_x + (a\sin(u)\cos(v))e_y + (a\sin(v))e_z$$

$$> x[1] := diff(X, u)$$

$$x_1 := -a\sin(u)\cos(v)e_x + (a\cos(u)\cos(v))e_y$$

$$> x[2] := diff(X, v)$$

$$x_2 := -a\cos(u)\sin(v)e_x - a\sin(u)\sin(v)e_y + (a\cos(v))e_z$$

$$> g := (i, j) \rightarrow simplify(DotProd(x[i], x[j], 'symbolic'))$$

$$g := (i, j) \rightarrow simplify\left(VectorCalculus\text{:-}DotProd\left(x_i, x_j, 'symbolic'\right)\right)$$

$$> G := \begin{bmatrix} g(1,1) & g(1,2) \\ g(2,1) & g(2,2) \end{bmatrix}$$

$$G := \begin{bmatrix} a^2\cos(v)^2 & 0 \\ 0 & a^2 \end{bmatrix}$$

$$> dX := simplify(CrossProd(x[1], x[2]), 'symbolic')$$

$$dX := \left(a^2\cos(u)\cos(v)^2\right)e_x + \left(a^2\sin(u)\cos(v)^2\right)e_y + \left(a^2\cos(v)\sin(v)\right)e_z$$

$$> N := simplify\left(\frac{dX}{norm(dX, 2)}, 'symbolic'\right)$$

$$N := (\cos(v)\cos(u))e_x + (\cos(v)\sin(u))e_y + (\sin(v))e_z$$

$$> n[1] := diff(N, u)$$

$$n_1 := -\cos(v)\sin(u)e_x + (\cos(v)\cos(u))e_y$$

$$> n[2] := diff(N, v)$$

$$n_2 := -\sin(v)\cos(u)e_x - \sin(v)\sin(u)e_y + (\cos(v))e_z$$

$$> b := (i, j) \rightarrow simplify(DotProd(-x[i], n[j], 'symbolic'))$$

$$b := (i, j) \rightarrow simplify\left(VectorCalculus\text{:-}DotProd\left(VectorCalculus\text{:-}`\text{-}`\left(x_i\right), n_j, 'symbolic'\right)\right)$$

$$> B := \begin{bmatrix} b(1,1) & b(1,2) \\ b(2,1) & b(2,2) \end{bmatrix}$$

$$B := \begin{bmatrix} -a\cos(v)^2 & 0 \\ 0 & -a \end{bmatrix}$$

```
> with(LinearAlgebra):
```

$$> K := \frac{Determinant(B)}{Determinant(G)}$$

$$K := \frac{1}{a^2}$$

> K := $simplify\left(\frac{norm(CrossProd(n[1], n[2]), 2)}{norm(CrossProd(x[1], x[2]), 2)}, 'symbolic'\right)$

$$K := \frac{1}{a^2}$$

ضرایب کریستوفل و ژئودزیک ها:

ضرایب کریستوفل و معادلات ژئودزیک ها در کتابخانه Tensor قرار دارند .برای محاسبه آنها ابتدا دستگاه مختصات را به میپل معرفی می کنیم، سپس ماتریس اجزای ناصفر ماتریس متریک ریمان را می سازیم.

در مرحله بعد مشتقهای کواریان ماتریس را محاسبه کرده و برای بدست آوردن ضرایب کریستوفل دستور Christoffel را به کار می بریم و برای نمایش اجزای ناصفر آن از دستور displayGR() استفاده می کنیم .

به کمک دستور geodesic_eqns معادلات خمهای ژئودزیک رویه بدست می آیند.

> $with(tensor)$:

> $coord := [u1, u2]$

$$coord := [u1, u2]$$

> $g\_compts := array\left(symmetric, sparse, 1..2, 1..2, \left[(1,1) = a^2, (2,2) = a^2 \cdot \cos(u1)^2\right]\right)$:

> $g := create([-1, -1], eval(g\_compts))$

$$g := table\left(\left[compts = \begin{bmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2\cos(u1)^2 \end{bmatrix}, index\_char = [-1, -1]\right]\right)$$

> $ginv := invert(g, 'detg')$:

> $d1g := d1metric(g, coord)$: $d2g := d2metric(d1g, coord)$:

> $Cf1 := Christoffel1(d1g)$:

> $Cf2 := Christoffel2(ginv, Cf1)$:

> $displayGR(Christoffel1, Cf1)$

The Christoffel Symbols of the First Kind

non-zero components :

$$[12,2] = -a^2\cos(u1)\sin(u1)$$

$$[22,1] = a^2\cos(u1)\sin(u1)$$

> $displayGR(Christoffel2, Cf2)$

The Christoffel Symbols of the Second Kind

non-zero components :

$$\{1,22\} = \cos(u1)\sin(u1)$$

$$\{2,12\} = -\frac{\sin(u1)}{\cos(u1)}$$

> $eqns := geodesic\_eqns(coord, t, Cf2)$

$$eqns := \left\{ \frac{d^2}{dt^2} u1(t) + \cos(u1)\sin(u1)\left(\frac{d}{dt}u2(t)\right)^2 = 0, \frac{d^2}{dt^2}u2(t) - \frac{2\sin(u1)\left(\frac{d}{dt}u1(t)\right)\left(\frac{d}{dt}u2(t)\right)}{\cos(u1)} = 0 \right\}$$

برای حل دستگاه معادلات دیفرانسیل ژئودزیک ها ابتدا دستگاه و توابع وابسته را مشخص می کنیم و سپس با دستور dsolve() جوابهای آن را می یابیم.

> $sys := \left[\frac{d^2}{dt^2} u1(t) + \cos(u1(t))\sin(u1(t))\left(\frac{d}{dt}u2(t)\right)^2 = 0, \frac{d^2}{dt^2}u2(t) - \frac{2\sin(u1(t))\left(\frac{d}{dt}u1(t)\right)\left(\frac{d}{dt}u2(t)\right)}{\cos(u1(t))} = 0 \right]$

$$sys := \left[\frac{d^2}{dt^2} u1(t) + \cos(u1(t))\sin(u1(t))\left(\frac{d}{dt}u2(t)\right)^2 = 0, \frac{d^2}{dt^2}u2(t) - \frac{2\sin(u1(t))\left(\frac{d}{dt}u1(t)\right)\left(\frac{d}{dt}u2(t)\right)}{\cos(u1(t))} = 0 \right]$$

> $dsolve(sys)$

$$\left[\left\{u2(t) = -\frac{1}{2}\,\mathrm{I}\ln\left(e^{\left(\frac{1}{3}t+\frac{1}{3}\_C3\right)\sqrt{-12\_C1^4-9\_C2\_C1^2}} - 48\_C1^2 - 9\_C2 - 12\,\mathrm{I}\sqrt{-12\_C1^4-9\_C2\_C1^2}\right) + \frac{1}{2}\,\mathrm{I}\ln\left(e^{\left(\frac{1}{3}t+\frac{1}{3}\_C3\right)\sqrt{-12\_C1^4-9\_C2\_C1^2}} - 48\_C1^2 - 9\_C2 + 12\,\mathrm{I}\sqrt{-12\_C1^4-9\_C2\_C1^2}\right) + \_C4, u2(t) = \frac{1}{2}\,\mathrm{I}\ln\left(e^{\left(-\frac{1}{3}t-\frac{1}{3}\_C3\right)\sqrt{-12\_C1^4-9\_C2\_C1^2}} - 48\_C1^2 - 9\_C2 - 12\,\mathrm{I}\sqrt{-12\_C1^4-9\_C2\_C1^2}\right) - \frac{1}{2}\,\mathrm{I}\ln\left(e^{\left(-\frac{1}{3}t-\frac{1}{3}\_C3\right)\sqrt{-12\_C1^4-9\_C2\_C1^2}} - 48\_C1^2 - 9\_C2 + 12\,\mathrm{I}\sqrt{-12\_C1^4-9\_C2\_C1^2}\right) + \_C4\right\}, \left\{u1(t) = \arccos\left(\frac{\_C1}{\sqrt{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u2(t)}}\right)\right\}\right]$$

رسم ژئودزیک ها:

برای رسم ژئودزیک ها نیاز به تعریف چند ساختار مانند ضرب داخلی و خارجی، معادلات ژئودزیک و... داریم که پس از تعریف ساختارهای فوق، برای به دست آوردن معادلات ژئودزیک و رسم آنها به صورت زیر عمل می کنیم:

```
> restart:
> with(plots):
> dp := proc(X,Y)
>      X[1]*Y[1]+X[2]*Y[2]+X[3]*Y[3];
>      end:
> nrm := proc(X)
>       sqrt(dp(X,X));
>       end:
> xp := proc(X,Y)
>      local a,b,c;
>      a := X[2]*Y[3]-X[3]*Y[2];
>      b := X[3]*Y[1]-X[1]*Y[3];
>      c := X[1]*Y[2]-X[2]*Y[1];
>      [a,b,c];
>      end:
> Jacf := proc(X)
>       local Xu,Xv;
>       Xu := [diff(X[1],u),diff(X[2],u),diff(X[3],u)];
>       Xv := [diff(X[1],v),diff(X[2],v),diff(X[3],v)];
>       simplify([Xu,Xv]);
>       end:
> EFG := proc(X)
>       local E,F,G,Y;
>       Y := Jacf(X);
>       E := dp(Y[1],Y[1]);
>       F := dp(Y[1],Y[2]);
>       G := dp(Y[2],Y[2]);
>       simplify([E,F,G]);
>       end:
```

in the following lines " t$2 " means t,t   t$6 means t,t,t,t,t,t

```
> geoeq:=proc(X)
>       local M,eq1,eq2;
>       M:=EFG(X);
>       eq1:=diff(u(t),t$2)+subs({u=u(t),v=v(t)},
      diff(M[1],u)/(2*M[1]))*diff(u(t),t)^2

+subs({u=u(t),v=v(t)},diff(M[1],v)/(M[1]))*diff(u(t),t)*diff(v(t
),t)
      -
subs({u=u(t),v=v(t)},diff(M[3],u)/(2*M[1]))*diff(v(t),t)^2=0;
```

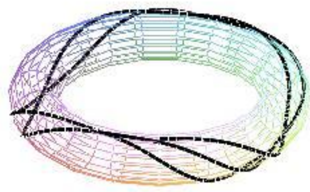
```
>       eq2:=diff(v(t),t$2)-subs({u=u(t),v=v(t)},
      diff(M[1],v)/(2*M[3]))*diff(u(t),t)^2

+subs({u=u(t),v=v(t)},diff(M[3],u)/(M[3]))*diff(u(t),t)*diff(v(t
),t)
      +
subs({u=u(t),v=v(t)},diff(M[3],v)/(2*M[3]))*diff(v(t),t)^2=0;
>        eq1,eq2;
>        end:

> plotgeo:=proc(X,ustart,uend,vstart,vend,u0,v0,Du0,Dv0,n,gr,
theta,phi)
>       local sys,desys,dequ,deqv,listp,j,geo,plotX;
>       sys:=geoeq(X);
>
desys:=dsolve({sys,u(0)=u0,v(0)=v0,D(u)(0)=Du0,D(v)(0)=Dv0},
          {u(t),v(t)}, type=numeric, output=listprocedure);
>       dequ:=subs(desys,u(t)); deqv:=subs(desys,v(t));
>
listp:=[seq(subs({u=dequ(j/n[3]),v=deqv(j/n[3])},X),j=n[1]..n[2]
)];
>       geo:=spacecurve({listp}, color=black,thickness=3):
>       plotX:=plot3d(X,u=ustart..uend,v=vstart..vend,grid=
[gr[1], gr[2]]):
>       display ({geo,plotX},style=wireframe,
scaling=constrained,
           orientation= [theta,phi]);
>       end:
> Tor:=[(5+cos(u))*cos(v), (5+cos(u))*sin(v) ,sin(u)];
```

$$Tor := [(5+\cos(u))\cos(v), (5+\cos(u))\sin(v), \sin(u)]$$

```
> geoeq(Tor);
```

$$\frac{d^2}{dt^2}u(t) + (5+\cos(u(t)))\sin(u(t))\left(\frac{d}{dt}v(t)\right)^2 = 0, \frac{d^2}{dt^2}v(t) - \frac{2\sin(u(t))\left(\frac{d}{dt}u(t)\right)\left(\frac{d}{dt}v(t)\right)}{5+\cos(u(t))} = 0$$

```
> plotgeo(Tor,0,2*Pi,0,2*Pi,Pi/2,0,0,1,[0,240,15],[20,20],0,60)
```



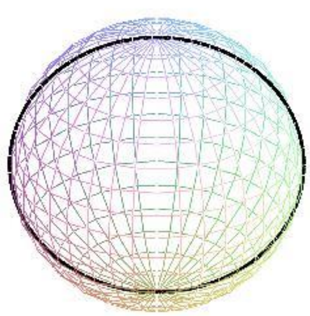
```
> Sph:=[cos(u)*cos(v), cos(v)*sin(u) ,sin(v)];
```

$$Sph := [\cos(v)\cos(u), \sin(u)\cos(v), \sin(v)]$$

```
> geoeq(Sph);
```

$$\frac{d^2}{dt^2}u(t) - \frac{2\sin(v(t))\left(\frac{d}{dt}u(t)\right)\left(\frac{d}{dt}v(t)\right)}{\cos(v(t))} = 0, \frac{d^2}{dt^2}v(t) + \cos(v(t))\sin(v(t))\left(\frac{d}{dt}u(t)\right)^2 = 0$$

```
> plotgeo(Sph,0,2*Pi,0,2*Pi,Pi/2,0,0,1,[0,240,15],[20,20],0,60)
```



```
> p1:=[v*cos(u),v*sin(u),v^2];
```

$$p1 := [v\cos(u), v\sin(u), v^2]$$

```
> geoeq(p1);
```

$$\frac{d^2}{dt^2} u(t) + \frac{2 \left(\frac{d}{dt} u(t)\right) \left(\frac{d}{dt} v(t)\right)}{v(t)} = 0, \frac{d^2}{dt^2} v(t) - \frac{v(t) \left(\frac{d}{dt} u(t)\right)^2}{1 + 4 v(t)^2} + \frac{4 v(t) \left(\frac{d}{dt} v(t)\right)^2}{1 + 4 v(t)^2} = 0$$

```
> plotgeo(p1,0,6,0,6,3,2,3/2,1/2,[0,100,10],[25,25],0,60)
```

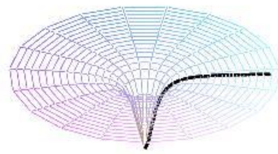
```
> p2:=[v*cos(u),v*sin(u),-4/(4*v^2+1)];
```

$$p2 := \left[v \cos(u), v \sin(u), -\frac{4}{1 + 4 v^2}\right]$$

```
> geoeq(p2);
```

$$\frac{d^2}{dt^2} u(t) + \frac{2 \left(\frac{d}{dt} u(t)\right) \left(\frac{d}{dt} v(t)\right)}{v(t)} = 0, \frac{d^2}{dt^2} v(t) - \frac{v(t) \left(1 + 4 v(t)^2\right)^4 \left(\frac{d}{dt} u(t)\right)^2}{1 + 1040 v(t)^2 + 96 v(t)^4 + 256 v(t)^6 + 256 v(t)^8} + \frac{1}{2} \left(\left(-\frac{32 \left(1 + 1040 v(t)^2 + 96 v(t)^4 + 256 v(t)^6 + 256 v(t)^8\right) v(t)}{\left(1 + 4 v(t)^2\right)^5} + \frac{2080 v(t) + 384 v(t)^3 + 1536 v(t)^5 + 2048 v(t)^7}{\left(1 + 4 v(t)^2\right)^4}\right) \left(1 + 4 v(t)^2\right)^4 \left(\frac{d}{dt} v(t)\right)^2\right) \Big/ \left(1 + 1040 v(t)^2 + 96 v(t)^4 + 256 v(t)^6 + 256 v(t)^8\right) = 0$$

```
>
plotgeo(p2,0,2*Pi,0,2*Pi,Pi/2,1/100,0,5,[0,24,15],[20,20],0,60)
```



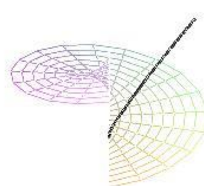
```
> p3:=[u*cos(v),u*sin(v),v];
```

$$p3 := [u\cos(v), u\sin(v), v]$$

```
> geoeq(p3);
```

$$\frac{d^2}{dt^2}u(t) - u(t)\left(\frac{d}{dt}v(t)\right)^2 = 0, \frac{d^2}{dt^2}v(t) + \frac{2u(t)\left(\frac{d}{dt}u(t)\right)\left(\frac{d}{dt}v(t)\right)}{u(t)^2+1} = 0$$

```
> plotgeo(p3,0,2*Pi,0,2*Pi,0,0,1/2,2,[0,100,15],[10,20],0,60)
```



```
> p4:=[u-u^3/3+u*v^2,v-v^3/3+v*u^2,u^2-v^2];
```

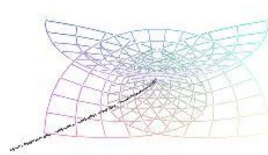
$$p4 := \left[u - \frac{1}{3}u^3 + u v^2, v - \frac{1}{3}v^3 + v u^2, u^2 - v^2\right]$$

```
> geoeq(p4);
```

$$\frac{d^2}{dt^2}u(t)+\frac{1}{2}\frac{(4u(t)+4u(t)^3+4u(t)v(t)^2)\left(\frac{d}{dt}u(t)\right)^2}{1+2u(t)^2+2v(t)^2+u(t)^4+2v(t)^2u(t)^2+v(t)^4}+\frac{(4v(t)+4v(t)u(t)^2+4v(t)^3)\left(\frac{d}{dt}u(t)\right)\left(\frac{d}{dt}v(t)\right)}{1+2u(t)^2+2v(t)^2+u(t)^4+2v(t)^2u(t)^2+v(t)^4}-\frac{1}{2}\frac{(4u(t)+4u(t)^3+4u(t)v(t)^2)\left(\frac{d}{dt}v(t)\right)^2}{1+2u(t)^2+2v(t)^2+u(t)^4+2v(t)^2u(t)^2+v(t)^4}=0,$$

$$\frac{d^2}{dt^2}v(t)-\frac{1}{2}\frac{(4v(t)+4v(t)u(t)^2+4v(t)^3)\left(\frac{d}{dt}u(t)\right)^2}{1+2u(t)^2+2v(t)^2+u(t)^4+2v(t)^2u(t)^2+v(t)^4}+\frac{(4u(t)+4u(t)^3+4u(t)v(t)^2)\left(\frac{d}{dt}u(t)\right)\left(\frac{d}{dt}v(t)\right)}{1+2u(t)^2+2v(t)^2+u(t)^4+2v(t)^2u(t)^2+v(t)^4}+\frac{1}{2}\frac{(4v(t)+4v(t)u(t)^2+4v(t)^3)\left(\frac{d}{dt}v(t)\right)^2}{1+2u(t)^2+2v(t)^2+u(t)^4+2v(t)^2u(t)^2+v(t)^4}=0$$

```
> plotgeo(p4,-2*Pi,2*Pi,-
2*Pi,2*Pi,0,2,1,3,[0,240,15],[20,20],0,60)
```



```
> p5:=[u,v,u*v];
```

$$p5 := [u, v, v\,u]$$

```
> geoeq(p5);
```

$$\frac{d^2}{dt^2}u(t)+\frac{2v(t)\left(\frac{d}{dt}u(t)\right)\left(\frac{d}{dt}v(t)\right)}{1+v(t)^2}-\frac{u(t)\left(\frac{d}{dt}v(t)\right)^2}{1+v(t)^2}=0,$$

$$\frac{d^2}{dt^2}v(t)-\frac{v(t)\left(\frac{d}{dt}u(t)\right)^2}{u(t)^2+1}+\frac{2u(t)\left(\frac{d}{dt}u(t)\right)\left(\frac{d}{dt}v(t)\right)}{u(t)^2+1}=0$$

```
> plotgeo(p5,-7,7,-7,7,1,0,0,1,[0,240,15],[20,20],0,60)
```

تانسور انحنای ریمان، تانسور ریچی و انحنای اسکالر:

برای محاسبه این تانسورها پس از بدست آوردن ضرایب اولین فرم اساسی ماتریس متریک را تشکیل می دهیم.
با کمک دستور tensorsGR() تانسور های مورد نظر را در دستگاه مختصات داده شده حساب می کنیم و سپس برای نمایش آنها از دستور displayGR(**GR_name**, **object**) استفاده می کنیم.

> $with(tensor):$

> $coord := [u1, u2]$

$$coord := [u1, u2]$$

> $g := array(symmetric, sparse, 1..2, 1..2):$

> $g[1,1] := \left(\frac{d}{du1} f(u1)\right)^2 + \left(\frac{d}{du1} h(u1)\right)^2 : g[1,2] := 0 : g[2,1] := 0 : g[2,2] := f(u1)^2 :$

> $metric := create([-1, -1], eval(g))$

$$metric := table\left(\left[index\_char = [-1, -1], compts = \begin{bmatrix} \left(\frac{d}{du1} f(u1)\right)^2 + \left(\frac{d}{du1} h(u1)\right)^2 & 0 \\ 0 & f(u1)^2 \end{bmatrix}\right]\right)$$

> $tensorsGR(coord, metric, contra\_metric, det\_met, C1, C2, Rm, Rc, R, G, C)$

> $displayGR(Christoffel1, C1)$

The Christoffel Symbols of the First Kind *non-zero components :*

$$[11,1] = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u1} f(u1)\right)\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}u1^2} f(u1)\right) + \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u1} h(u1)\right)\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}u1^2} h(u1)\right)$$

$$[12,2] = f(u1)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u1} f(u1)\right)$$

$$[22,1] = -f(u1)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u1} f(u1)\right)$$

> *displayGR(Christoffel2, C2)*

The Christoffel Symbols of the Second Kind

non-zero components :

$$\{1,11\} = \frac{1}{\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u1} f(u1)\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u1} h(u1)\right)^2}\left(\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u1} f(u1)\right)\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}u1^2} f(u1)\right) + \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u1} h(u1)\right)\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}u1^2} h(u1)\right)\right)$$

$$\{1,22\} = -\frac{f(u1)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u1} f(u1)\right)}{\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u1} f(u1)\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u1} h(u1)\right)^2}$$

$$\{2,12\} = \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u1} f(u1)}{f(u1)}$$

> *displayGR(Riemann, Rm)*

The Riemann Tensor

non-zero components :

$$R1212 = \frac{1}{\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u1} f(u1)\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u1} h(u1)\right)^2}\left(f(u1)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u1} h(u1)\right)\left(-\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}u1^2} f(u1)\right)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u1} h(u1)\right) + \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u1} f(u1)\right)\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}u1^2} h(u1)\right)\right)\right)$$

character : [-1, -1, -1, -1]

> $displayGR(Ricci, Rc)$

The Ricci tensor

non-zero components :

$$R11 = -\left(\left(\frac{d}{du1}\,h(u1)\right)\left(-\left(\frac{d^2}{du1^2}\,f(u1)\right)\left(\frac{d}{du1}\,h(u1)\right) + \left(\frac{d}{du1}\,f(u1)\right)\left(\frac{d^2}{du1^2}\,h(u1)\right)\right)\right) \bigg/ \left(f(u1)\left(\left(\frac{d}{du1}\,f(u1)\right)^2 + \left(\frac{d}{du1}\,h(u1)\right)^2\right)\right)$$

$$R22 = -\left(f(u1)\left(\frac{d}{du1}\,h(u1)\right)\left(-\left(\frac{d^2}{du1^2}\,f(u1)\right)\left(\frac{d}{du1}\,h(u1)\right) + \left(\frac{d}{du1}\,f(u1)\right)\left(\frac{d^2}{du1^2}\,h(u1)\right)\right)\right) \bigg/ \left(\left(\frac{d}{du1}\,f(u1)\right)^2 + \left(\frac{d}{du1}\,h(u1)\right)^2\right)^2$$

character : [-1, -1]

> $displayGR(Ricciscalar, R)$

The Ricci Scalar

$$R = -\left(2\left(\frac{d}{du1}\,h(u1)\right)\left(-\left(\frac{d^2}{du1^2}\,f(u1)\right)\left(\frac{d}{du1}\,h(u1)\right) + \left(\frac{d}{du1}\,f(u1)\right)\left(\frac{d^2}{du1^2}\,h(u1)\right)\right)\right) \bigg/ \left(\left(\left(\frac{d}{du1}\,f(u1)\right)^2 + \left(\frac{d}{du1}\,h(u1)\right)^2\right)^2 f(u1)\right)$$

> *restart*