基礎コンピュータ工学
第２章 情報の表現
（パート３：２進数の計算と２の補数）

https://github.com/tctsigemura/TecTextBook

本スライドの入手：

２進数の和差の計算

10 進数の場合を思い出してみる．

- 9 より大きくなる時に桁上げが発生する．

103	105	135	155	099
+ 104	+ 107	+ 127	+ 167	+ 001
207	212	262	322	100

- 桁借りでは 10 借りてくる．

207	212	262	322	100
− 104	− 107	− 127	− 167	− 001
103	105	135	155	099

２進数の和差の計算

2 進数の場合は以下のようになる．

- 1 より大きくなる時に桁上げが発生する．

010	001	010	011	011
+ 001	+ 001	+ 011	+ 001	+ 011
011	010	101	100	110

- 桁借りでは 2 借りてくる．

011	010	101	100	110
− 001	− 001	− 011	− 001	− 011
010	001	010	011	011

２進数の和差の計算（問題）

問題８：10 進数の計算と 2 進数の計算をしなさい．

3+8

10 進	2 進
3	0011
+ 8	+ 1000

5+7

10 進	2 進
5	0101
+ 7	+ 0111

11-8

10 進	2 進
11	1011
− 8	− 1000

12-7

10 進	2 進
12	1100
− 7	− 0111

負数の表現

負の数を 2 進数でどのようにビットで表現するか約束する．

(1) 符号付き絶対値表現
左端のビットを符号（+／−）として使用する．

4 ビット符号付き絶対値表現の例

負数	2 進数	正数	2 進数
-7	1111_2	$+7$	0111_2
-6	1110_2	$+6$	0110_2
-5	1101_2	$+5$	0101_2
…	…	…	…
-1	1001_2	$+1$	0001_2
-0	1000_2	$+0$	0000_2

- ４ビットで -7 から $+7$ の範囲を表現できる．
- 0 の表現が二つある（-0 と $+0$）．

負数の表現

補数表現

- n 桁の b 進数において
  b^n から x を引いた数 y を x に対する「b の補数」と呼ぶ．
  $y = b^n - x$　　（y は x に対する b の補数）
- n 桁の b 進数において
  $b^n - 1$ から x を引いた数 z を x に対する「$(b-1)$ の補数」と呼ぶ．
  $z = b^n - 1 - x$　　（z は x に対する $(b-1)$ の補数）

負数の表現

２桁の１０進数における補数の例

$b = 10$進数 $n = 2$桁 $b^n = 100$ $x = 25$	$\begin{array}{r} 100 \\ -25 \\ \hline 75 \end{array}$	75 は 25 に対する 10 の補数
$b = 10$進数 $n = 2$桁 $b^n - 1 = 99$ $x = 25$	$\begin{array}{r} 99 \\ -25 \\ \hline 74 \end{array}$	74 は 25 に対する 9 の補数

負数の表現

４桁の２進数における補数の例

$b = 2$進数 $n = 4$桁 $b^n = 10000_2$ $x = 1010_2$	$\begin{array}{r} 10000_2 \\ -1010_2 \\ \hline 0110_2 \end{array}$	0110_2 は 1010_2 に対する <u>2 の補数</u>
$b = 2$進数 $n = 4$桁 $b^n - 1 = 1111_2$ $x = 1010_2$	$\begin{array}{r} 1111_2 \\ -1010_2 \\ \hline 0101_2 \end{array}$	0101_2 は 1010_2 に対する <u>1 の補数</u>

負数の表現

(2) １の補数による負数の表現
１の補数を負数の表現に使用する．

４ビット２進数の１の補数（$2^4 - 1 - x = z$）

もとの数（x）	補数へ変換		補数（z）
0	$1111_2 - 0000_2$	=	1111_2
1	$1111_2 - 0001_2$	=	1110_2
2	$1111_2 - 0010_2$	=	1101_2
3	$1111_2 - 0011_2$	=	1100_2
4	$1111_2 - 0100_2$	=	1011_2
5	$1111_2 - 0101_2$	=	1010_2
6	$1111_2 - 0110_2$	=	1001_2
7	$1111_2 - 0111_2$	=	1000_2

負数の表現

１の補数を用いた符号付き数値

−7	1000_2	−	−	−	−	−	−	−	+
−6	1001_2	−	−	−	−	−	−	+	$\vert$
−5	1010_2	−	−	−	−	−	+	$\vert$	$\vert$
−4	1011_2	−	−	−	−	+	$\vert$	$\vert$	$\vert$
−3	1100_2	−	−	−	+	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$
−2	1101_2	−	−	+	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$
−1	1110_2	−	+	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$
−0	1111_2	+	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$
+0	0000_2	+	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$
+1	0001_2	−	+	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$
+2	0010_2	−	−	+	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$
+3	0011_2	−	−	−	+	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$
+4	0100_2	−	−	−	−	+	$\vert$	$\vert$	$\vert$
+5	0101_2	−	−	−	−	−	+	$\vert$	$\vert$
+6	0110_2	−	−	−	−	−	−	+	$\vert$
+7	0111_2	−	−	−	−	−	−	−	+

負数の表現

- １の補数の求め方
  ビット反転
  $x = +3_{10} = 0011_2$（もとの数）
  $y = -3_{10} = 1100_2$（１の補数）
- 表現できる数値の範囲
  4 ビット：$-7 \sim +7$ $(-(2^3-1) \sim +(2^3-1))$
  n ビット：$-(2^{n-1}-1) \sim +(2^{n-1}-1)$
- 正負の判定
  最上位ビットが
  ０：正の値を表現している．
  １：負の値を表現している．

負数の表現

(3) ２の補数による負数の表現
２の補数（$2^n - x$）を負数の表現に使用する．

４ビット２進数の２の補数（$2^4 - x = y$）

もとの数 (x)	補数へ変換		補数 (y)
0	$1\boxed{0000}_2 - \boxed{0000}_2$	=	$1\boxed{0000}_2$
1	$1\boxed{0000}_2 - \boxed{0001}_2$	=	$\boxed{1111}_2$
2	$1\boxed{0000}_2 - \boxed{0010}_2$	=	$\boxed{1110}_2$
3	$1\boxed{0000}_2 - \boxed{0011}_2$	=	$\boxed{1101}_2$
4	$1\boxed{0000}_2 - \boxed{0100}_2$	=	$\boxed{1100}_2$
5	$1\boxed{0000}_2 - \boxed{0101}_2$	=	$\boxed{1011}_2$
6	$1\boxed{0000}_2 - \boxed{0110}_2$	=	$\boxed{1010}_2$
7	$1\boxed{0000}_2 - \boxed{0111}_2$	=	$\boxed{1001}_2$
8	$1\boxed{0000}_2 - \boxed{1000}_2$	=	$\boxed{1000}_2$

負数の表現

２の補数を用いた符号付き数値

<table>
<tr><td>-8</td><td>1000_2</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>-7</td><td>1001_2</td><td>−</td><td>−</td><td>−</td><td>−</td><td>−</td><td>−</td><td>−</td><td>+</td></tr>
<tr><td>-6</td><td>1010_2</td><td>−</td><td>−</td><td>−</td><td>−</td><td>−</td><td>−</td><td>+</td><td>|</td></tr>
<tr><td>-5</td><td>1011_2</td><td>−</td><td>−</td><td>−</td><td>−</td><td>−</td><td>+</td><td>|</td><td>|</td></tr>
<tr><td>-4</td><td>1100_2</td><td>−</td><td>−</td><td>−</td><td>−</td><td>+</td><td>|</td><td>|</td><td>|</td></tr>
<tr><td>-3</td><td>1101_2</td><td>−</td><td>−</td><td>−</td><td>+</td><td>|</td><td>|</td><td>|</td><td>|</td></tr>
<tr><td>-2</td><td>1110_2</td><td>−</td><td>−</td><td>+</td><td>|</td><td>|</td><td>|</td><td>|</td><td>|</td></tr>
<tr><td>-1</td><td>1111_2</td><td>−</td><td>+</td><td>|</td><td>|</td><td>|</td><td>|</td><td>|</td><td>|</td></tr>
<tr><td>0</td><td>0000_2</td><td>+</td><td>|</td><td>|</td><td>|</td><td>|</td><td>|</td><td>|</td><td>|</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0001_2</td><td>−</td><td>+</td><td>|</td><td>|</td><td>|</td><td>|</td><td>|</td><td>|</td></tr>
<tr><td>2</td><td>0010_2</td><td>−</td><td>−</td><td>+</td><td>|</td><td>|</td><td>|</td><td>|</td><td>|</td></tr>
<tr><td>3</td><td>0011_2</td><td>−</td><td>−</td><td>−</td><td>+</td><td>|</td><td>|</td><td>|</td><td>|</td></tr>
<tr><td>4</td><td>0100_2</td><td>−</td><td>−</td><td>−</td><td>−</td><td>+</td><td>|</td><td>|</td><td>|</td></tr>
<tr><td>5</td><td>0101_2</td><td>−</td><td>−</td><td>−</td><td>−</td><td>−</td><td>+</td><td>|</td><td>|</td></tr>
<tr><td>6</td><td>0110_2</td><td>−</td><td>−</td><td>−</td><td>−</td><td>−</td><td>−</td><td>+</td><td>|</td></tr>
<tr><td>7</td><td>0111_2</td><td>−</td><td>−</td><td>−</td><td>−</td><td>−</td><td>−</td><td>−</td><td>+</td></tr>
</table>

負数の表現

- ２の補数の求め方
  ビット反転＋１
  $x = +3_{10} = 0011_2$（もとの数）
  $y = -3_{10} = 1100_2 + 1 = 1101_2$（２の補数）
  元に戻すのもビット反転＋１
  $y = -3_{10} = 1101_2$（２の補数）
  $y = +3_{10} = 0010_2 + 1 = 0011_2$（もとの数）
- 表現できる数値の範囲
  4 ビット：-8〜$+7$（-2^3〜$+(2^3-1)$）
  n ビット：-2^{n-1}〜$+(2^{n-1}-1)$
- 正負の判定
  最上位ビットが
  0：ゼロ，または，正の値を表現している．
  1：負の値を表現している．

負数の表現（問題 1/2）

問題９：次の 10 進数を２の補数表現形式の４桁の２進数に変換しなさい．

1) 4_{10}
2) -4_{10}
3) 5_{10}
4) -5_{10}
5) 6_{10}
6) -6_{10}

負数の表現（問題 2/2）

問題１０：次の２の補数表現形式の４桁の２進数を 10 進数に変換しなさい．

1) 1001_2
2) 0111_2
3) 1101_2
4) 0011_2
5) 1011_2
6) 1100_2