基礎コンピュータ工学
第２章 情報の表現
（パート３：２進数の計算と２の補数）

https://github.com/tctsigemura/TecTextBook

本スライドの入手：

２進数の和差の計算

10 進数の場合を思い出してみる．

- 9 より大きくなる時に桁上げが発生する．

$$\begin{array}{r} 103 \\ +\quad 104 \\ \hline 207 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 105 \\ +\quad 107 \\ \hline 212 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 135 \\ +\quad 127 \\ \hline 262 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 155 \\ +\quad 167 \\ \hline 322 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 099 \\ +\quad 001 \\ \hline 100 \end{array}$$

- 桁借りでは 10 借りてくる．

$$\begin{array}{r} 207 \\ -\quad 104 \\ \hline 103 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 212 \\ -\quad 107 \\ \hline 105 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 262 \\ -\quad 127 \\ \hline 135 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 322 \\ -\quad 167 \\ \hline 155 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 100 \\ -\quad 001 \\ \hline 099 \end{array}$$

２進数の和差の計算

2進数の場合は以下のようになる．

- 1より大きくなる時に桁上げが発生する．

$$\begin{array}{r}010\\ +\ \ 001\\ \hline 011\end{array}\quad\begin{array}{r}001\\ +\ \ 001\\ \hline 010\end{array}\quad\begin{array}{r}010\\ +\ \ 011\\ \hline 101\end{array}\quad\begin{array}{r}011\\ +\ \ 001\\ \hline 100\end{array}\quad\begin{array}{r}011\\ +\ \ 011\\ \hline 110\end{array}$$

- 桁借りでは2借りてくる．

$$\begin{array}{r}011\\ -\ \ 001\\ \hline 010\end{array}\quad\begin{array}{r}010\\ -\ \ 001\\ \hline 001\end{array}\quad\begin{array}{r}101\\ -\ \ 011\\ \hline 010\end{array}\quad\begin{array}{r}100\\ -\ \ 001\\ \hline 011\end{array}\quad\begin{array}{r}110\\ -\ \ 011\\ \hline 011\end{array}$$

２進数の和差の計算（問題）

問題８：10 進数の計算と２進数の計算をしなさい．

3+8

10 進	2 進
3	0011
+ 8	+ 1000

5+7

10 進	2 進
5	0101
+ 7	+ 0111

11-8

10 進	2 進
11	1011
- 8	- 1000

12-7

10 進	2 進
12	1100
- 7	- 0111

負数の表現

負の数を 2 進数でどのようにビットで表現するか約束する．

(1) 符号付き絶対値表現
左端のビットを符号（+ ／ −）として使用する．

4 ビット符号付き絶対値表現の例

負数	2 進数	正数	2 進数
-7	1111_2	$+7$	0111_2
-6	1110_2	$+6$	0110_2
-5	1101_2	$+5$	0101_2
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
-1	1001_2	$+1$	0001_2
-0	1000_2	$+0$	0000_2

- 4 ビットで -7 から $+7$ の範囲を表現できる．
- 0 の表現が二つある（-0 と $+0$）．

負数の表現

補数表現

- n 桁の b 進数において
  b^n から x を引いた数 y を x に対する「b の補数」と呼ぶ.
  $$y = b^n - x \qquad (y \text{ は } x \text{ に対する } b \text{ の補数})$$
- n 桁の b 進数において
  $b^n - 1$ から x を引いた数 z を x に対する「$(b-1)$ の補数」と呼ぶ.
  $$z = b^n - 1 - x \qquad (z \text{ は } x \text{ に対する } (b-1) \text{ の補数})$$

負数の表現

２桁の１０進数における補数の例

$b = 10$進数
$n = 2$桁
$b^n = 100$
$x = 25$

$$\begin{array}{r} 100 \\ -25 \\ \hline 75 \end{array}$$

75 は 25 に対する 10 の補数

$b = 10$進数
$n = 2$桁
$b^n - 1 = 99$
$x = 25$

$$\begin{array}{r} 99 \\ -25 \\ \hline 74 \end{array}$$

74 は 25 に対する 9 の補数

負数の表現

4 桁の 2 進数における補数の例

$b = 2$進数
$n = 4$桁
$b^n = 10000_2$
$x = 1010_2$

$$\begin{array}{r} 10000_2 \\ -1010_2 \\ \hline 0110_2 \end{array}$$

0110_2 は 1010_2 に対する <u>2 の補数</u>

$b = 2$進数
$n = 4$桁
$b^n - 1 = 1111_2$
$x = 1010_2$

$$\begin{array}{r} 1111_2 \\ -1010_2 \\ \hline 0101_2 \end{array}$$

0101_2 は 1010_2 に対する <u>1 の補数</u>

負数の表現

(2) 1 の補数による負数の表現
1 の補数を負数の表現に使用する．

4 ビット 2 進数の 1 の補数（$2^4 - 1 - x = z$）

もとの数（x）	補数へ変換		補数（z）
0	$1111_2 - 0000_2$	$=$	1111_2
1	$1111_2 - 0001_2$	$=$	1110_2
2	$1111_2 - 0010_2$	$=$	1101_2
3	$1111_2 - 0011_2$	$=$	1100_2
4	$1111_2 - 0100_2$	$=$	1011_2
5	$1111_2 - 0101_2$	$=$	1010_2
6	$1111_2 - 0110_2$	$=$	1001_2
7	$1111_2 - 0111_2$	$=$	1000_2

負数の表現

1 の補数を用いた符号付き数値

-7	1000_2	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$
-6	1001_2	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$\vert$
-5	1010_2	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$\vert$	$\vert$
-4	1011_2	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$\vert$	$\vert$	$\vert$
-3	1100_2	$-$	$-$	$-$	$+$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$
-2	1101_2	$-$	$-$	$+$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$
-1	1110_2	$-$	$+$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$
-0	1111_2	$+$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$
$+0$	0000_2	$+$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$
$+1$	0001_2	$-$	$+$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$
$+2$	0010_2	$-$	$-$	$+$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$
$+3$	0011_2	$-$	$-$	$-$	$+$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$
$+4$	0100_2	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$\vert$	$\vert$	$\vert$
$+5$	0101_2	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$\vert$	$\vert$
$+6$	0110_2	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$\vert$
$+7$	0111_2	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$

負数の表現

- １の補数の求め方
  ビット反転
  $x = +3_{10} = 0011_2$（もとの数）
  $y = -3_{10} = 1100_2$（１の補数）

- 表現できる数値の範囲
  4 ビット：$-7 \sim +7$ $(-(2^3-1) \sim +(2^3-1))$
  n ビット：$-(2^{n-1}-1) \sim +(2^{n-1}-1)$

- 正負の判定
  最上位ビットが
  0 ：正の値を表現している.
  1 ：負の値を表現している.

負数の表現

(3) 2の補数による負数の表現
2の補数（$2^n - x$）を負数の表現に使用する．

4ビット2進数の2の補数（$2^4 - x = y$）

もとの数 (x)	補数へ変換		補数 (y)
0	$1\boxed{0000}_2 - \boxed{0000}_2$	=	$1\boxed{0000}_2$
1	$1\boxed{0000}_2 - \boxed{0001}_2$	=	$\boxed{1111}_2$
2	$1\boxed{0000}_2 - \boxed{0010}_2$	=	$\boxed{1110}_2$
3	$1\boxed{0000}_2 - \boxed{0011}_2$	=	$\boxed{1101}_2$
4	$1\boxed{0000}_2 - \boxed{0100}_2$	=	$\boxed{1100}_2$
5	$1\boxed{0000}_2 - \boxed{0101}_2$	=	$\boxed{1011}_2$
6	$1\boxed{0000}_2 - \boxed{0110}_2$	=	$\boxed{1010}_2$
7	$1\boxed{0000}_2 - \boxed{0111}_2$	=	$\boxed{1001}_2$
8	$1\boxed{0000}_2 - \boxed{1000}_2$	=	$\boxed{1000}_2$

負数の表現

2の補数を用いた符号付き数値

-8	1000_2								
-7	1001_2	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$
-6	1010_2	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$\vert$
-5	1011_2	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$\vert$	$\vert$
-4	1100_2	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$\vert$	$\vert$	$\vert$
-3	1101_2	$-$	$-$	$-$	$+$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$
-2	1110_2	$-$	$-$	$+$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$
-1	1111_2	$-$	$+$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$
0	0000_2	$+$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$
1	0001_2	$-$	$+$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$
2	0010_2	$-$	$-$	$+$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$
3	0011_2	$-$	$-$	$-$	$+$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$
4	0100_2	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$\vert$	$\vert$	$\vert$
5	0101_2	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$\vert$	$\vert$
6	0110_2	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$\vert$
7	0111_2	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$

負数の表現

- ２の補数の求め方
  ビット反転＋１
  $x = +3_{10} = 0011_2$（もとの数）
  $y = -3_{10} = 1100_2 + 1 = 1101_2$（２の補数）
  元に戻すのもビット反転＋１
  $y = -3_{10} = 1101_2$（２の補数）
  $y = +3_{10} = 0010_2 + 1 = 0011_2$（もとの数）

- 表現できる数値の範囲
  4 ビット：$-8 \sim +7$ $(-2^3 \sim +(2^3 - 1))$
  n ビット：$-2^{n-1} \sim +(2^{n-1} - 1)$

- 正負の判定
  最上位ビットが
  ０：ゼロ，または，正の値を表現している.
  １：負の値を表現している.

負数の表現（問題 1/2）

問題９：次の 10 進数を 2 の補数表現形式の 4 桁の 2 進数に変換しなさい.

1) 4_{10}

2) -4_{10}

3) 5_{10}

4) -5_{10}

5) 6_{10}

6) -6_{10}

負数の表現（問題 2/2）

問題１０：次の 2 の補数表現形式の 4 桁の 2 進数を 10 進数に変換しなさい.

1) 1001_2

2) 0111_2

3) 1101_2

4) 0011_2

5) 1011_2

6) 1100_2