Diercksen   Mathe 1 EK 1 Übungsblatt 2 **Lineare Gleichungssysteme, Matrizen, Determinanten** (2.1-2.7)

2-1) Bestimmen Sie die Lösung:

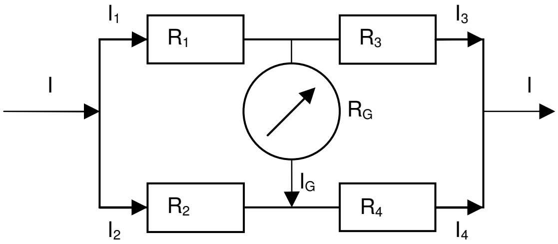
a) $\begin{aligned} 13a - 8b &= 28 \\ 9a + 12b &= 72 \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} 12x - 18y &= 6 \\ 10x - 15y &= 5 \end{aligned}$ c) $\begin{aligned} 9x + 12y &= 5 \\ 12x + 16y &= 4 \end{aligned}$

2-2) Zeigen Sie, dass das Gleichungssystem genau eine Lösung besitzt, und berechnen Sie diese nach der Cramerschen Regel !

a) $\begin{aligned} 7x - 5y &= 15 \\ 5x - 7y &= -3 \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 3 \\ x_1 + 7x_2 + 4x_3 &= 18 \\ 3x_1 + 13x_2 + 4x_3 &= 30 \end{aligned}$

Berechnen Sie die Determinanten in b) sowohl nach Sarrus als auch nach dem Entwicklungssatz!

2-3)



Für die angegebene Brückenschaltung ist bei bekanntem Strom I die Größe des Stromes I_G in Abhängigkeit von I und den Widerständen R_1 bis R_4 und R_G zu bestimmen. Es gilt

$$\begin{array}{rrrrrl} I_1 & + I_2 & & & & = I \\ -I_1 & & + I_3 & & + I_G & = 0 \\ & I_2 & & - I_4 & + I_G & = 0 \\ R_1 I_1 & - R_2 I_2 & & & + R_G I_G & = 0 \\ & & R_3 I_3 & - R_4 I_4 & - R_G I_G & = 0 \end{array}$$

Da die Koeffizientendeterminante viele Nullen hat, ist der Aufwand für die Cramersche Regel noch vertretbar.
Man erhält für die Koeffizientendeterminante $\mathbf{D = -\left[R_G (R_1+R_2+R_3+R_4) + (R_1+R_2)(R_3+R_4) \right]}$
Ermitteln Sie I_G über die Cramersche Regel (Sie dürfen D benutzen).

2-4) Lösen Sie die folgenden Gleichungssysteme mit dem Gaußschen Algorithmus:

a) $\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 &= 11 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 2 \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 &= 1 \\ 2x_1 + 4x_3 - 2x_4 &= 4 \\ x_1 + 2x_2 - 6x_3 + 5x_4 &= 0 \\ -x_1 + x_2 - 6x_3 + 4x_4 &= -3 \end{aligned}$ c) $\begin{aligned} r + s + t + 2 &= 0 \\ -r + 2s &= 6 - t \\ 2r - 4s - 2t &= -6 \end{aligned}$

d) Geben Sie jeweils den Rang der Koeffizientenmatrix an! Bedeutung für die Lösung?

2-5) Berechnen Sie für die obige Brückenschaltung den Strom I_G mit dem Gauß-Algorithmus, wenn
$R_1 = 10\Omega$, $R_2 = 40\Omega$, $R_3 = 10\Omega$, $R_4 = 5\Omega$, $R_G = 10\Omega$, $I = 20A$.
Kontrollieren Sie Ihr Ergebnis mit der Determinanten-Formel für die Brückenschaltung.

2-6) A sei eine 4x4-Matrix in oberer Dreiecksform. Zeigen Sie:
det A berechnet sich als Produkt der Diagonalelemente. (Hinweis: Entwicklungssatz für 1. Spalte)

2-7) Berechnen Sie $\underline{A \circ B}$ und $B \circ A$ für die Matrizen $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

2-8) Die inverse Matrix zu $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ ist $A^{-1} = \begin{pmatrix} -6 & -8 & 5 \\ 4 & 5 & -3 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Lösen Sie mit A^{-1} das lineare Gleichungssystem $A \circ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$ und machen Sie die Probe!

2-9) a) Zeigen Sie mit Hilfe der Probe: Die Inverse der 2x2-Matrix A ist $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$.

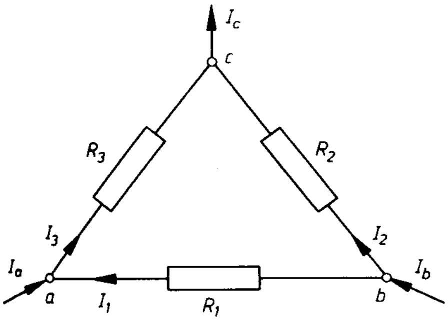
b) Bestimmen Sie mit der Formel aus a) die Inverse zu $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0.5 & 3 \end{pmatrix}$!

2-10) mxn-Systeme (mit dem Gauß-Algorithmus):

a)
$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 &= 11 \\ -5x_1 + x_2 &= -8 \\ x_1 - 5x_2 &= 15 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 1 \\ -3x_1 + 2x_2 + x_4 &= 5 \\ 8x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 &= 0 \end{aligned}$$

2-11)



$R_1 = 1\,\Omega$
$R_2 = 5\,\Omega$
$R_3 = 3\,\Omega$
$I_a = 1\,\text{A}$
$I_b = 2\,\text{A}$

Berechnen Sie I_1, I_2 und I_3 aus den Knotenpunktsgleichungen für die Ströme in a und b und aus der Maschengleichung für die Spannungen.

Ermitteln Sie anschließend noch I_c.

Zum **Vorrechnen**: 2-2) b) (2 P.), 2-3) (2), 2-4) a) (1.5), b) (2.5), c) (1), 2-6) (2), 2-7) (1), 2-8) (1.5), 2-9) (2.5), 2-10) a)(1.5), b) (1.5), 2-12) (1.5), 2-13) (1.5)

Aufgaben mit MATLAB: Bearbeiten Sie 2-1) – 2-11) mit MATLAB.

2-12) **Messdatenausgleich**

Die Temperaturabhängigkeit eines Ohmschen Widerstandes R ist anhand der folgenden Messwerte zu bestimmen.

T / °C	20	25	30	40	50	60	65	80
R / Ω	16.3	16.44	16.61	16.81	17.10	17.37	17.38	17.86

Die Messwerte liegen nahezu auf einer Geraden. Gehen Sie deshalb vom Ansatz $R = R(T) = \lambda_1 T + \lambda_2$ aus. Bearbeiten Sie die Aufgabe mit MATLAB. Benutzen Sie einmal polyfit und lösen Sie das Problem ein zweites Mal direkt über das überbestimmte Gleichungssystem.
Kontrollieren Sie das Ergebnis grafisch.

2-13) Ist |detA| sehr klein (A fast singulär), können kleine Abweichungen in der Koeffizientenmatrix starke Abweichungen bei der Lösung hervorrufen. Man nennt ein solches System schlecht konditioniert.
Die Kondition abhängig von der Koeffizientenmatrix lässt sich in MATLAB mit der sog. Konditionszahl prüfen (cond(A), cond(A) sehr groß – große Schwankungen bei der Lösung möglich).

Experimentieren Sie mit dem Gleichungssystem $A_\varepsilon \circ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1.5 \end{pmatrix}$, $A_\varepsilon = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8+\varepsilon \end{pmatrix}$, $\varepsilon = 0.1,\ 0.05,\ 0.01, \ldots$

Vergleichen Sie die Ergebnisse für **x**, vergleichen Sie die Koeffizientendeterminanten, vergleichen Sie die Konditionszahlen!

2-1) a) a=4, b=3 b) $L = \{ \begin{pmatrix} \lambda \\ \frac{2}{3}\lambda - \frac{1}{3} \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \}$ c) nicht lösbar 2-2) a) detA ≠0 ⇒ eindeutig lösbar, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ b) det A≠0 (=–8), $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

2-3) $I_G = -I\,(R_2R_3 - R_1R_4)\,/\,D$ 2-4) a) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ b) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2+\lambda \\ -1-3\lambda \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$ c) nicht lösbar 2-5) $I_G = 5\,\text{A}$

2-7) $A \circ B = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 5 \\ 10 & 8 & 9 \\ -8 & 4 & 11 \end{pmatrix}$, $B \circ A = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 8 & 16 \end{pmatrix}$ 2-8) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ 2-9) b) $\begin{pmatrix} 1.5 & -1 \\ -0.25 & 0.5 \end{pmatrix}$

2-10) b) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 7/15 - t/3 \\ 16/5 - t \\ -4/3 + 2t/3 \\ t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$ 2-11) $I_1 = \frac{7}{9}\,\text{A},\ I_2 = \frac{11}{9}\,\text{A},\ I_3 = \frac{16}{9}\,\text{A},\ I_C = 3\,\text{A}$ 2-12) R =(0.0253 Ω/°C) T + 15.813 Ω