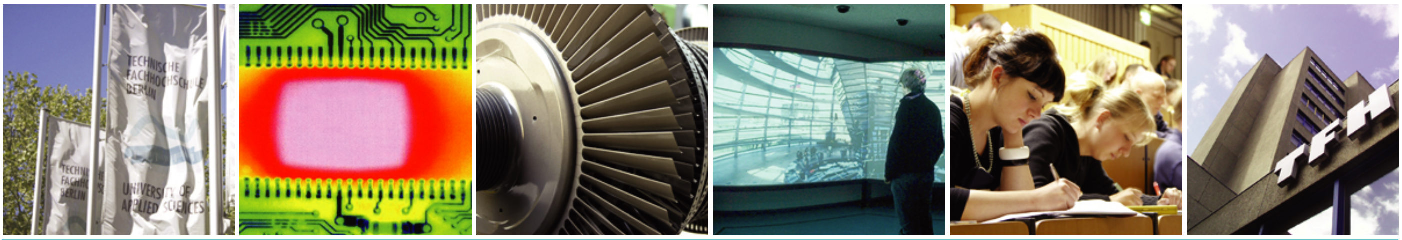
Grundlagen der Elektrotechnik I

Prof. Dr.-Ing. Sven Tschirley

University of Applied Sciences Berlin



Teil III

Netzwerkanalyse

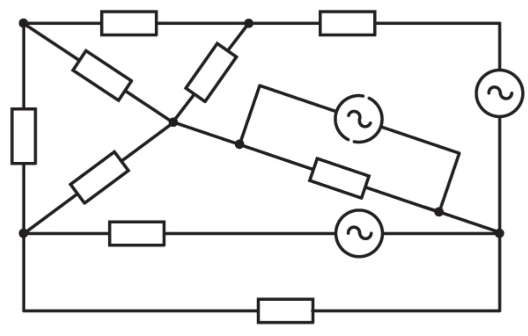
Abschnitt 3.1

Einleitung

Motivation

Motivation

- Anwendungsbereich ist der stationäre Zustand eines Netzwerkes
- Kirchhoffsche Regeln sind weiterhin anwendbar
  ➡ komplexe Rechnung



Abbildungen [Schmidt GdE 3]

Ziel

Bestimmen der Gleichungen zur Berechnung von Netzwerken nach einem Verfahren, dass

- die richtige Anzahl der Gleichungen liefert und
- deren lineare Unabhängigkeit garantiert

Basis 1.Kirchhoffsche Regel

- Knotenanalyse (Knotenpotenzialverfahren)
- Schnittmengenanalyse

Basis 2.Kirchhoffsche Regel

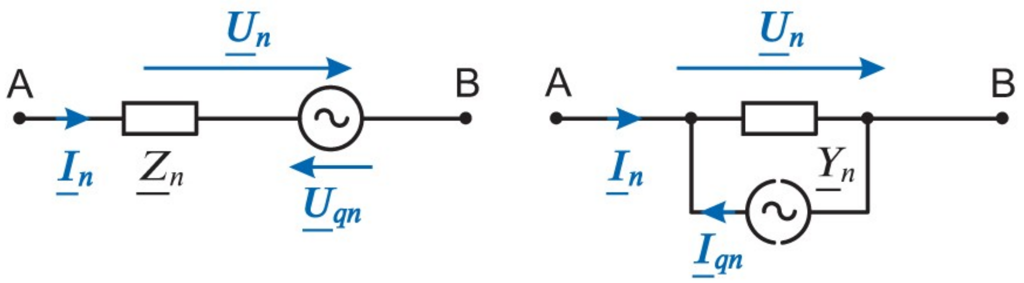
- Maschenanalyse (Kreisstromverfahren)
- Schleifenanalyse

Voraussetzungen

- Es handelt sich um lineare Netzwerke
- Betriebsgrößen werden als komplexe Zeiger dargestellt
- Es existieren zunächst keine Übertrager im Netzwerk

Definition (Zweige)

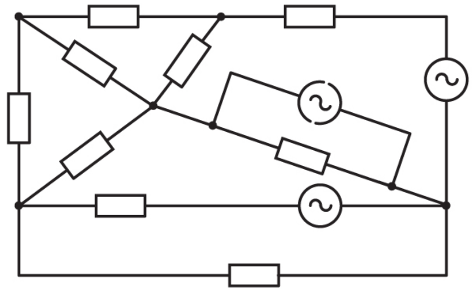
- Zweige beginnen und enden an jeweils einem Knoten
- Zweige bestehen aus einer Zweigimpedanz bzw. Zweigadmittanz
- Zweige bestehen aus einer Konstantspannungsquelle bzw. Konstantstromquelle
- Zweigstrom und Zweigspannung haben die selbe Richtung



Abbildungen [Schmidt GdE 3]

Konventionelle Berechnung am Beispiel

- $Z = 9$ Zweigströme
- $Z = 9$ Zweigspannungen
- Mit $\underline{U}_n = \underline{Z}_n \cdot \underline{I}_n - \underline{U}_q$ reduziert auf Z Unbekannte
- ➡ $K = 5$ bedeutet $K - 1 = 4$ Knotengleichungen und $Z - (K - 1) = 5$ Maschengleichungen
- ➡ Gleichungssystem mit 9 Unbekannten
- ➡ Nicht Schön: Einfaches Netzwerk, komplexe Rechnung



Abbildungen [Schmidt GdE 3]

- Die Folien verwenden sie Syntax *komplexer Zahlen* mit denen später Wechselspannungen beschrieben werden. Daher befinden sich unter Strömen und Spannungen Striche ($\underline{I}_1$) für die Notation einer komplexen Größe
- Alle Gesetzmäßigkeiten gelten ebenfalls für Gleichgrößen
- Komplexe Widerstände werden mit einem Z gekennzeichnet und beinhalten neben ohmschen Widerständen auch Induktivitäten und Kapazitäten.
- Komplexe Leitwerte werden mit einem Y gekennzeichnet.
- Wenn in Beispielen Spulen und Kondensatoren auftauchen, so ersetzen wir diese in den Rechnungen durch ein Z oder Y und rechen wie gewohnt weiter.

Abschnitt 3.2

Maschenstromverfahren

Ziel und Ansatz

Ziel des Verfahrens

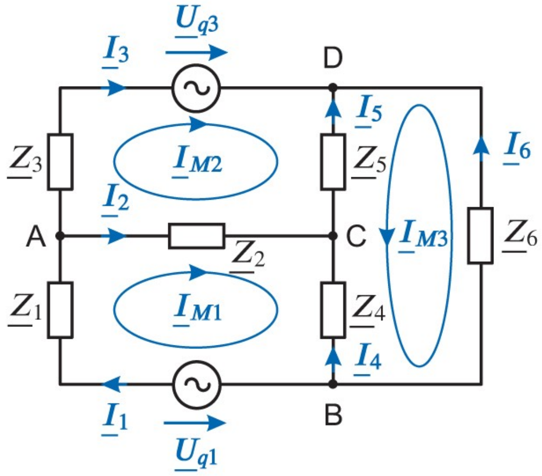
Bestimmung aller Zweigströme und Zweigspannnungen eines Netzwerkes

Ansatz

Reduzierung der Variablenanzahl durch Einführung von Maschenströmen

Definition (Maschenstrom)

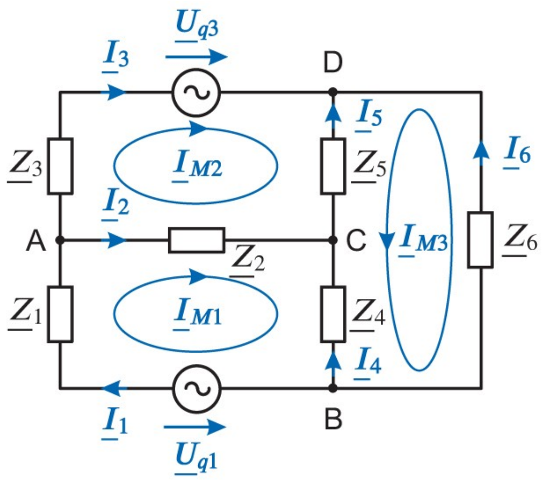
- Ein Maschenstrom $\underline{I}_{\mathrm{M,i}}$ st ein geschlossener Strompfad in einer Masche.
- In einem Zweig überlagern sich die Maschenströme zum Zweigstrom



Abbildungen [Schmidt GdE 3]

Bestimmung der Zweigströme $\underline{I}_{\mathrm{x}}$ aus den Maschenströmen $\underline{I}_{\mathrm{M,x}}$

$$\begin{aligned}
\underline{I}_1 &= \underline{I}_{\mathrm{M,1}} \\
\underline{I}_2 &= \underline{I}_{\mathrm{M,1}} - \underline{I}_{\mathrm{M,2}} \\
\underline{I}_3 &= \underline{I}_{\mathrm{M,2}} \\
\underline{I}_4 &= -\underline{I}_{\mathrm{M,1}} - \underline{I}_{\mathrm{M,3}} \\
\underline{I}_5 &= -\underline{I}_{\mathrm{M,2}} - \underline{I}_{\mathrm{M,3}} \\
\underline{I}_6 &= \underline{I}_{\mathrm{M,3}}
\end{aligned}$$



Abbildungen [Schmidt GdE 3]

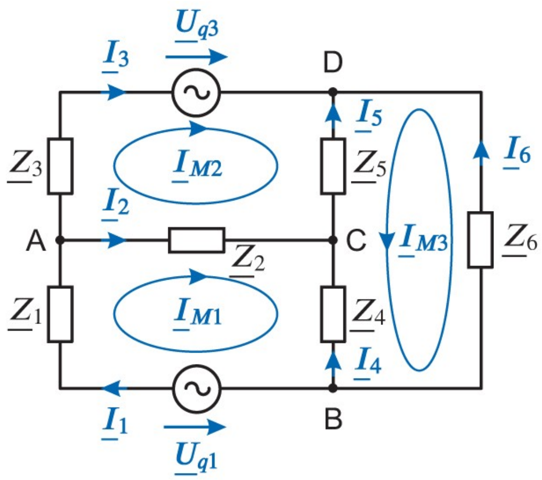
Darstellung in Matrixform

$$\underline{\mathbf{I}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \underline{\mathbf{I}}_{\mathrm{M}} \qquad (1)$$

oder kurz

$$\underline{\mathbf{I}} = \mathbf{A} \cdot \underline{\mathbf{I}}_{\mathrm{M}} \qquad (2)$$

A ist die Inzidenzmatrix



Abbildungen [Schmidt GdE 3]

Maschenströme und Zweigströme
3.2 – MASCHENSTROMVERFAHREN Verfahrensbeschreibung Maschenstromanalyse

Darstellung in Matrixform

$$\underline{\mathbf{I}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \underline{\mathbf{I}}_{\mathrm{M}} \qquad (3)$$

oder kurz

$$\underline{\mathbf{I}} = \mathbf{A} \cdot \underline{\mathbf{I}}_{\mathrm{M}} \qquad (4)$$

A ist die Inzidenzmatrix

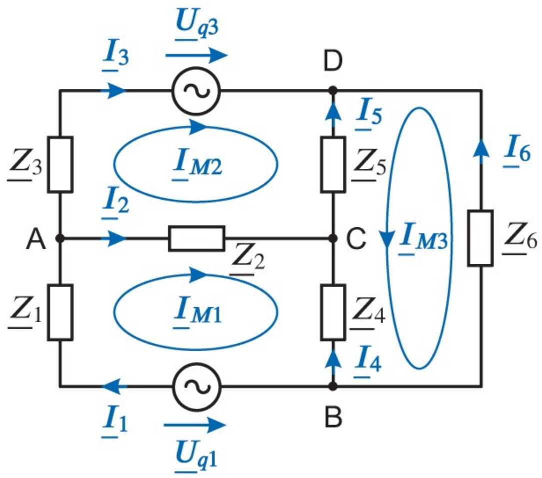
Für die Elemente a_{ij} der Inzidenzmatrix gilt

- $a_{ij} = +1$, wenn $\underline{I}_{\mathrm{i}}$ und $\underline{I}_{\mathrm{M,j}}$ in gleicher Richtung fliessen
- $a_{ij} = -1$, wenn $\underline{I}_{\mathrm{i}}$ und $\underline{I}_{\mathrm{M,j}}$ in unterschiedlicher Richtung fliessen
- $a_{ij} = 0$, wenn Zweig i von Maschenstrom $\underline{I}_{\mathrm{M,j}}$ nicht durchflossen wird

Zweigspannungen

Bestimmung der Zweigspannungen aus Maschenumläufen in Richtung der Maschenströme

$$\underline{U}_1 + \underline{U}_2 - \underline{U}_4 = 0$$
$$-\underline{U}_2 + \underline{U}_3 - \underline{U}_5 = 0$$
$$-\underline{U}_4 - \underline{U}_5 + \underline{U}_6 = 0$$



Abbildungen [Schmidt GdE 3]

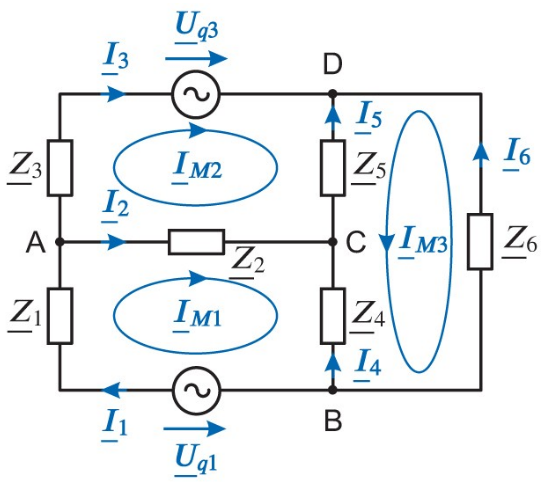
Zweigspannungen

In Matrixdarstellung

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \\ \underline{U}_3 \\ \underline{U}_4 \\ \underline{U}_5 \\ \underline{U}_6 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (5)$$

oder kurz

$$\mathbf{A}^T \cdot \underline{\mathbf{U}} = \mathbf{0} \qquad (6)$$

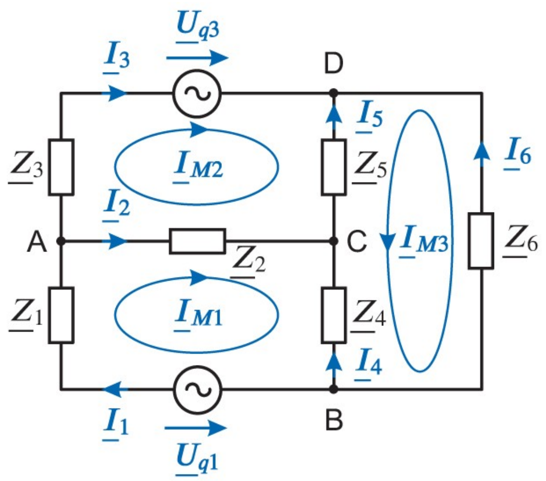


Abbildungen [Schmidt GdE 3]

$$\underline{Z}_1\underline{I}_{\mathrm{M},1} + \underline{Z}_2(\underline{I}_{\mathrm{M},1} - \underline{I}_{\mathrm{M},2}) + \underline{Z}_4(\underline{I}_{\mathrm{M},1} + \underline{I}_{\mathrm{M},3}) = \underline{U}_{q1}$$

$$\underline{Z}_2(\underline{I}_{\mathrm{M},2} - \underline{I}_{\mathrm{M},1}) + \underline{Z}_3\underline{I}_{\mathrm{M},2} + \underline{Z}_5(\underline{I}_{\mathrm{M},2} + \underline{I}_{\mathrm{M},3}) = -\underline{U}_{q3}$$

$$\underline{Z}_4(\underline{I}_{\mathrm{M},3} + \underline{I}_{\mathrm{M},1}) + \underline{Z}_5(\underline{I}_{\mathrm{M},3} + \underline{I}_{\mathrm{M},2}) + \underline{Z}_6\underline{I}_{\mathrm{M},3} = 0$$



Ausmultiplizieren, Sortieren, Maschenströme ausklammern liefert die Matrixform

$$\begin{bmatrix} \underline{Z}_1+\underline{Z}_2+\underline{Z}_4 & -\underline{Z}_2 & \underline{Z}_4 \\ -\underline{Z}_2 & \underline{Z}_2+\underline{Z}_3+\underline{Z}_5 & \underline{Z}_5 \\ \underline{Z}_4 & \underline{Z}_5 & \underline{Z}_4+\underline{Z}_5+\underline{Z}_6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{I}_{\mathrm{M},1} \\ \underline{I}_{\mathrm{M},2} \\ \underline{I}_{\mathrm{M},3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{U}_{q1} \\ -\underline{U}_{q3} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{7}$$

$$\begin{bmatrix} \underline{Z}_1+\underline{Z}_2+\underline{Z}_4 & -\underline{Z}_2 & \underline{Z}_4 \\ -\underline{Z}_2 & \underline{Z}_2+\underline{Z}_3+\underline{Z}_5 & \underline{Z}_5 \\ \underline{Z}_4 & \underline{Z}_5 & \underline{Z}_4+\underline{Z}_5+\underline{Z}_6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{I}_{\mathrm{M},1} \\ \underline{I}_{\mathrm{M},2} \\ \underline{I}_{\mathrm{M},3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{U}_{q1} \\ -\underline{U}_{q3} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Lösen des LGS

- mit einem bekannten Verfahren
- durch Invertieren von $\underline{\mathbf{Z}}$ mit

$$\underline{\mathbf{I}} = \underline{\mathbf{Z}}^{-1} \cdot \underline{\mathbf{U}}_q$$

- durch Software (MATLAB®, Scilab)

Lösen des Gesamtproblems

- Ermitteln der Zweigströme (Inzidenzmatrix)
- Ermitteln der Zweigspannungen (Beziehungen an den Bauelementen)

$$\begin{bmatrix} \underline{Z}_1+\underline{Z}_2+\underline{Z}_4 & -\underline{Z}_2 & \underline{Z}_4 \\ -\underline{Z}_2 & \underline{Z}_2+\underline{Z}_3+\underline{Z}_5 & \underline{Z}_5 \\ \underline{Z}_4 & \underline{Z}_5 & \underline{Z}_4+\underline{Z}_5+\underline{Z}_6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{I}_{\mathrm{M},1} \\ \underline{I}_{\mathrm{M},2} \\ \underline{I}_{\mathrm{M},3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{U}_{q1} \\ -\underline{U}_{q3} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Impedanzmatrix

- Die Matrix $\underline{\mathbf{Z}}$ ist symmetrisch zur Hauptdiagonalen
- Die Elemente $\underline{Z}_{ii}$ der Hauptdiagonalen besteht aus den Summen der vom Maschenstrom $\underline{I}_\mathrm{i}$ durchflossenen Impedanzen
- Die Elemnte $\underline{Z}_{ij}$ ausserhalb der Hauptdiagonalen sind die Elemente, die von den Maschenströmen $\underline{I}_\mathrm{i}$ und $\underline{I}_\mathrm{j}$ gemeinsam durchflossen werden
- Der Quellvektor $\underline{\mathbf{U}}_q$ beinhaltet vorzeichenrichtig die Quellen aus dem jeweiligen Maschenumlauf

Allgemeine Tipps

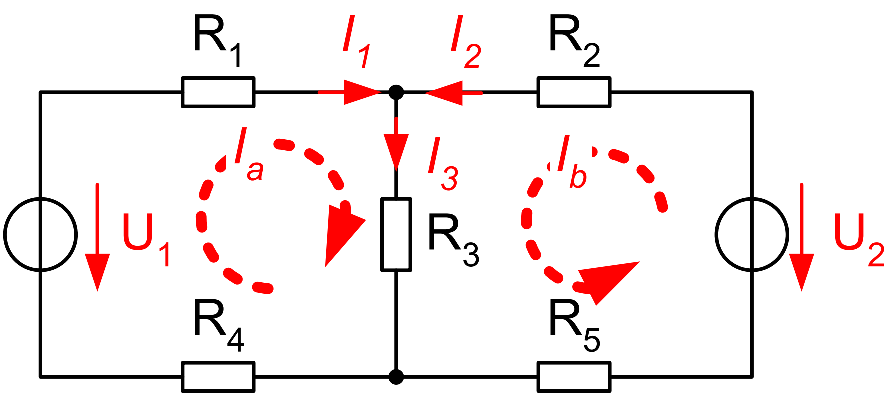
- Sucht man nur einzelne Ströme, so wählt man die Maschenströme so, dass der betreffende Zweig nur einmal durchflossen wird. Damit ist dann ein Zweigstrom gleich einem Maschenstrom.
- Die Matrix $\underline{\mathbf{Z}}$ kann mit den Kenntnissen der Anordnung der Elemente ohne Aufstellen der Spannungsumläufe belegt werden.
- Der Quellvektor $\underline{\mathbf{U}}_q$ enthält positive Quellen, wenn Sie dem Maschenstrom $\underline{I}_{\mathrm{M},\mathrm{x}}$ entgegenwirken.

Das Verfahren zusammengefasst

Maschenstromanalyse (Kreisstromverfahren)

- Maschenströme wählen
- Beziehung zwischen Maschenströmen und Zweigströmen aufstellen
- Maschenumlaufsgleichungen in der Form mit Maschenströmen aufstellen
- Lineares Gleichungssystemlösen
- Zweigströme aus Maschenströmen errechnen
- Zweigspannungen errechnen

Beispielaufgabe 1 – Kreisstromverfahren



Es ist $R_1 = 18\Omega$, $R_2 = R_4 = 22\Omega$, $R_3 = 100\Omega$, $R5 = 68\Omega$ und $U_1 = 20\mathrm{V}$, $U_2 = 25\mathrm{V}$

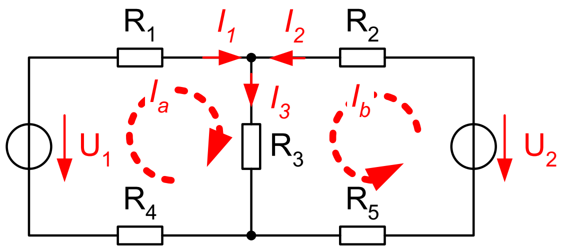
Idee [Zastrow GdE A1]

Beispielaufgabe 1

Maschen- und Kreisströme

$I_a \qquad I_b$

$$I_1 = I_a \qquad I_2 = I_b \qquad I_3 = I_a + I_b \tag{8}$$



Maschenumläufe

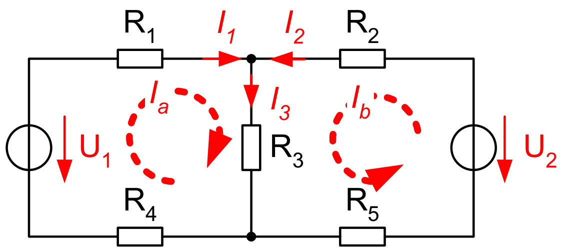
$$\begin{aligned} I_a R_1 + (I_a + I_b) R_3 + I_a R_4 &= U_1 \\ I_b R_2 + (I_a + I_b) R_3 + I_b R_5 &= U_2 \end{aligned} \tag{9}$$

Beispielaufgabe 1

Maschen- und Kreisströme

$I_a \qquad I_b$

$$I_1 = I_a \qquad I_2 = I_b \qquad I_3 = I_a + I_b$$



Maschenumläufe

$$\begin{bmatrix} R_1 + R_3 + R_4 & R_3 \\ R_3 & R_2 + R_3 + R_5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} \tag{10}$$

- Maschenstrom ↔ Zweigstrom

$$\underline{\mathbf{I}} = \mathbf{A}\,\underline{\mathbf{I}}_M, \qquad (11)$$

A ist die $[Z \times Z - (K-1)]$-Inzidenzmatrix

- Maschengleichungen

$$\mathbf{A}^T \cdot \underline{\mathbf{U}} = \underline{\mathbf{0}} \qquad (12)$$

- Verknüpfung zwischen Zweigspannungen und Zweigströmen

$$\underline{\mathbf{U}} = \underline{\mathbf{Z}} \cdot \underline{\mathbf{I}} - \underline{\mathbf{U}}_q \qquad (13)$$

mit $\underline{\mathbf{Z}}$ als Diagonalmatrix der Zweigimpedanzen

Einsetzen von (11) in (13), danach in (12) liefert

$$\underbrace{\underline{\mathbf{A}}^T\,\underline{\mathbf{Z}}\,\underline{\mathbf{A}}}_{\underline{\mathbf{Z}}_M} \cdot \underline{\mathbf{I}}_{\mathrm{M}} = \underline{\mathbf{A}}^T \cdot \underline{\mathbf{U}}_q \qquad (14)$$

$\underline{\mathbf{Z}}_M$ ist die Maschenimpedanzmatrix

Abschnitt 3.3

Knotenpotenzialverfahren

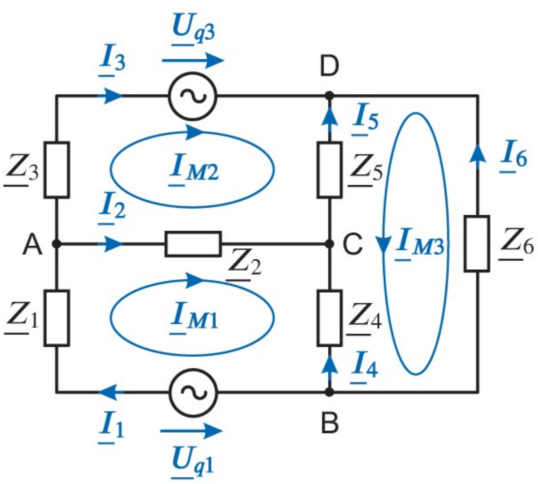
The Name of the Game

- Knotenpotenzialverfahren
- Knotenspannungsanalyse
- Knotenanalyse

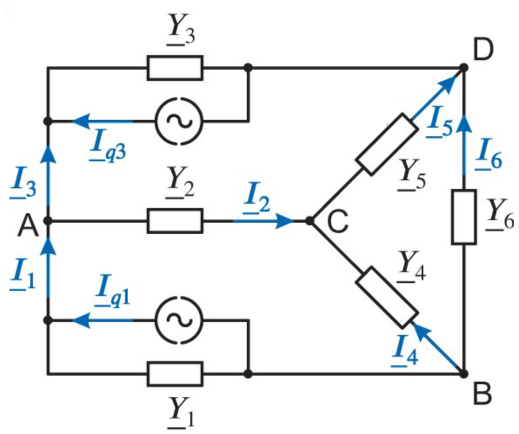
Ziel des Verfahrens

- Bestimmung aller Zweigspannungen und Ströme eines Netzwerkes
  Ansatz: Reduzierung der Variablenanzahl durch Einführung von Knotenspannungen
- Duales Verfahren zur Maschenstromanalyse
- Vorteilhaft in Netzwerken mit vielen Zweigen und wenigen Knoten
- Vorteilhaft in Netzwerken mit vielen Stromquellen

Schaltung aus der Maschenstromanalyse



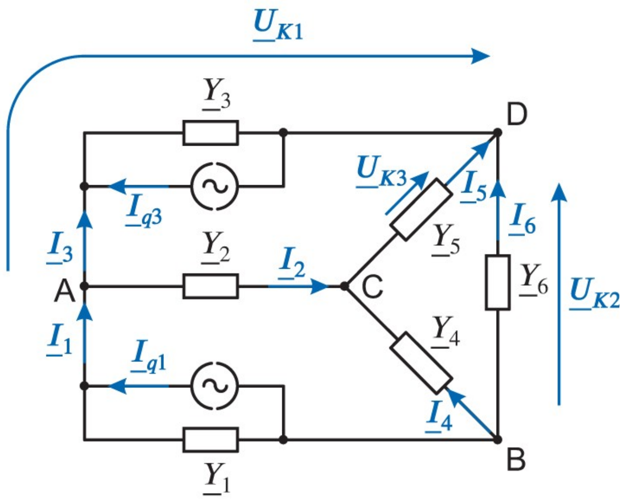
Nach Umwandlung der Spannungsquellen



Abbildungen [Schmidt GdE 3]

Definition (Knotenpotenziale und Knotenspannungen)

- Jedem Knoten X in einem Netzwerk wird ein Knotenpotenzial $\underline{\varphi}_X$ zugeordnet.
- Ein beliebiger Knoten des Netzwerkes wird als Bezugsknoten gewählt.
- Für die verbleibenden $K-1$ Knoten wird eine Knotenspannung als Differenz zwischen dem Potenzial des Knotens und des Referenzknotens definiert

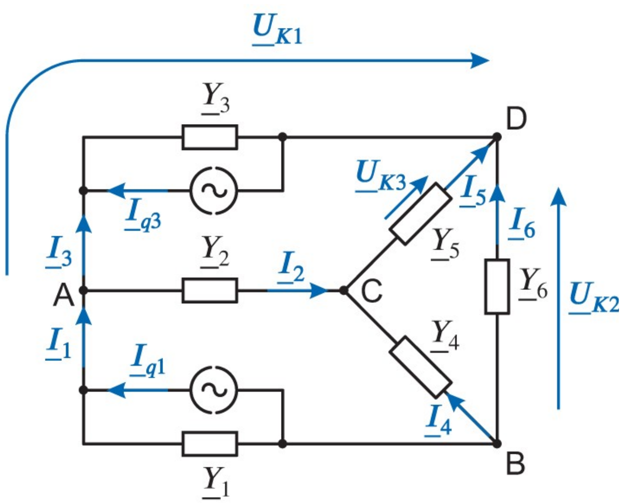


Abbildungen [Schmidt GdE 3]

Referenzknoten D

Knotenspannungen

$$\underline{U}_{\mathrm{K},1} = \underline{\varphi}_A - \underline{\varphi}_D$$
$$\underline{U}_{\mathrm{K},2} = \underline{\varphi}_B - \underline{\varphi}_D$$
$$\underline{U}_{\mathrm{K},3} = \underline{\varphi}_C - \underline{\varphi}_D$$



Abbildungen [Schmidt GdE 3]

Zweig- und Knotenspannung

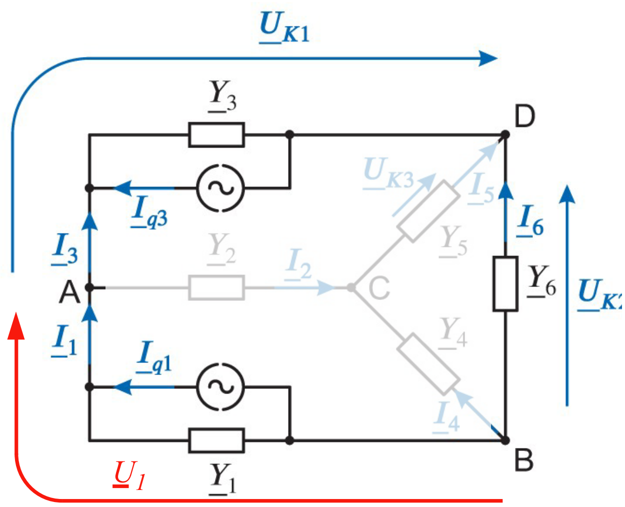
Jede Zweigspannung $\underline{U}_x$ kann durch eine oder mehrere Knotenspannungen $\underline{U}_K$ ausgedrückt werden

Der Umlauf

$$\underline{U}_1 + \underline{U}_{K,1} - \underline{U}_{K,2} = 0 \qquad (15)$$

liefert

$$\underline{U}_1 = -\underline{U}_{K,1} + \underline{U}_{K,2}$$

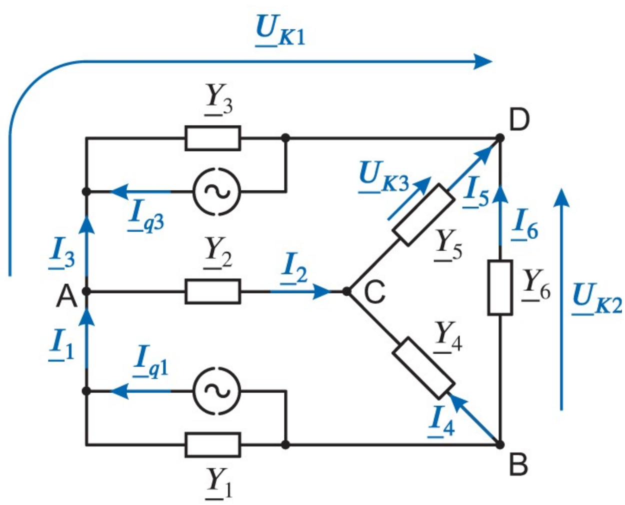


Abbildungen [Schmidt GdE 3]

Die Umläufe müssen Knotenspannungen enthalten!

Zweig- und Knotenspannung

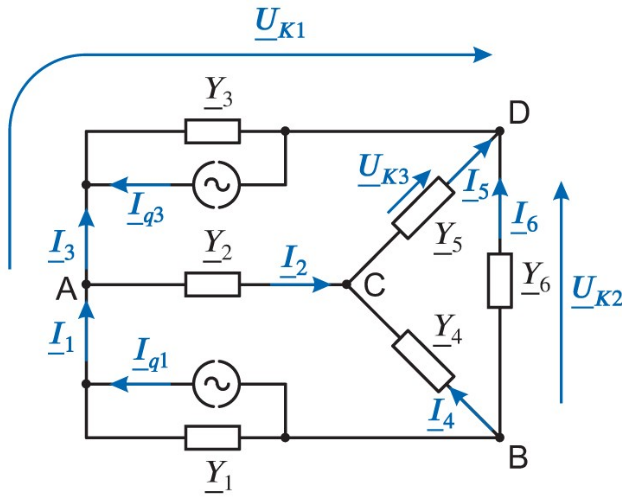
Jede Zweigspannung $\underline{U}_x$ kann durch eine oder mehrere Knotenspannungen $\underline{U}_K$ ausgedrückt werden



Abbildungen [Schmidt GdE 3]

$$\begin{aligned}
\underline{U}_1 &= -\underline{U}_{K,1} + \underline{U}_{K,2} \\
\underline{U}_2 &= \underline{U}_{K,1} - \underline{U}_{K,3} \\
\underline{U}_3 &= \underline{U}_{K,1} \\
\underline{U}_4 &= \underline{U}_{K,2} - \underline{U}_{K,3} \\
\underline{U}_5 &= \underline{U}_{K,3} \\
\underline{U}_6 &= \underline{U}_{K,2}
\end{aligned} \qquad (16)$$

$$\underline{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \underline{\mathbf{U}}_{\mathrm{K}} \qquad (17)$$



oder auch kurz

$$\underline{\mathbf{U}} = \mathbf{B} \cdot \underline{\mathbf{U}}_{\mathrm{K}} \qquad (18)$$

- $\underline{\mathbf{U}}$ Spaltenvektor der komplexen Zweigspannungen
- $\mathbf{B}$ Inzidenzmatrix
- $\underline{\mathbf{U}}_{\mathrm{K}}$ Spaltenvektor der komplexen Knotenspannungen

$$\underline{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \underline{\mathbf{U}}_{\mathrm{K}} \qquad (19)$$

oder auch kurz

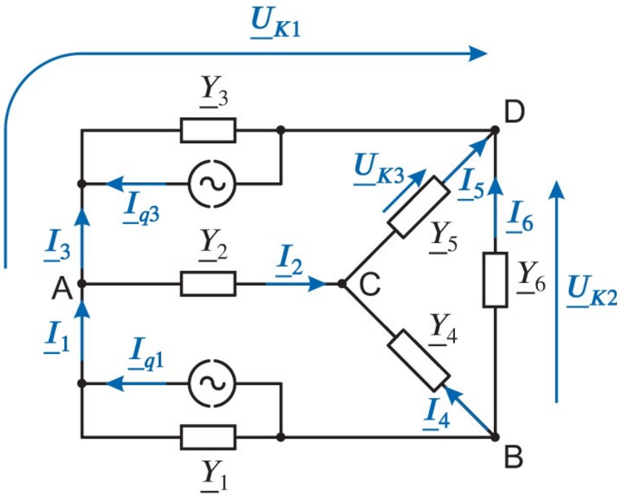
$$\underline{\mathbf{U}} = \mathbf{B} \cdot \underline{\mathbf{U}}_{\mathrm{K}} \qquad (20)$$

Für die Elemente b_{ij} der Inzidenzmatrix gilt

- $b_{ij} = +1$, wenn $\underline{U}_{\mathrm{i}}$ und $\underline{U}_{\mathrm{K,j}}$ gleiche Richtung haben
- $b_{ij} = -1$, wenn $\underline{U}_{\mathrm{i}}$ und $\underline{U}_{\mathrm{K,j}}$ verschiedene Richtungen haben
- $b_{ij} = 0$, wenn $\underline{U}_{\mathrm{i}}$ für die Knotenspannung $\underline{U}_{\mathrm{K,j}}$ nicht verwendet wird

Aufstellen der Knotengleichungen
mit Hilfe der Zweigströme
Achtung: Abfliessende Ströme
werden positiv gezählt

$$
\begin{aligned}
\text{Knoten A:} &\quad -\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 &= 0\\
\text{Knoten B:} &\quad \underline{I}_1 + \underline{I}_4 + \underline{I}_6 &= 0\\
\text{Knoten C:} &\quad -\underline{I}_2 - \underline{I}_4 + \underline{I}_5 &= 0
\end{aligned}
\tag{21}
$$



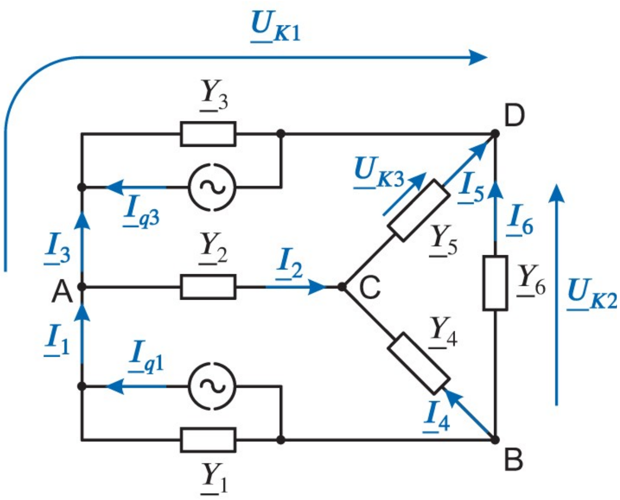
Abbildungen [Schmidt GdE 3]

Knotengleichungen in
Matrixdarstellung

$$
\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \\ \underline{I}_3 \\ \underline{I}_4 \\ \underline{I}_5 \\ \underline{I}_6 \end{bmatrix} = \mathbf{0}
$$

oder kurz

$$
\mathbf{B}^T \cdot \underline{\mathbf{I}} = \mathbf{0} \tag{22}
$$



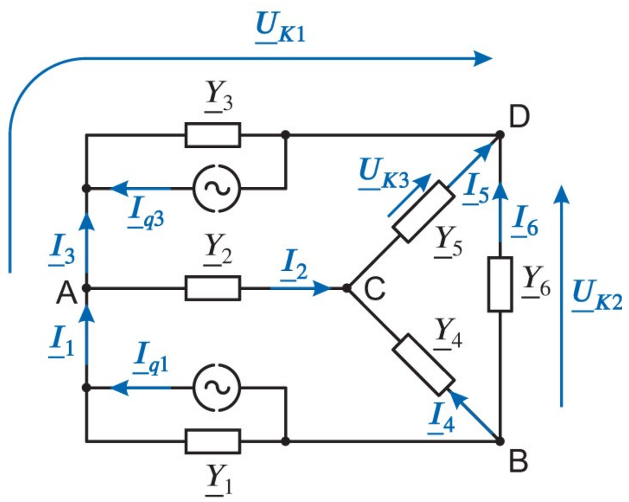
Abbildungen [Schmidt GdE 3]

Darstellung der Knotengleichungen als Funktion der Zweigspannungen nach

$$\underline{I}_1 = Y_1 \cdot \underline{U}_1 + \underline{I}_{q1}$$

liefert

$$-Y_1\underline{U}_1 + Y_2\underline{U}_2 + Y_3\underline{U}_3 = \underline{I}_{q1} + \underline{I}_{q3}$$
$$Y_1\underline{U}_1 + Y_4\underline{U}_4 + Y_6\underline{U}_6 = -\underline{I}_{q1}$$
$$-Y_2\underline{U}_2 + Y_4\underline{U}_4 + Y_5\underline{U}_5 = 0$$



Abbildungen [Schmidt GdE 3]

Ersetzen der Zweigspannungen nach (16) durch Knotenspannungen ergibt

$$-Y_1(-\underline{U}_{K,1} + \underline{U}_{K,2}) + Y_2(\underline{U}_{K,1} - \underline{U}_{K,3}) + Y_3\underline{U}_{K,1} = \underline{I}_{q1} + \underline{I}_{q3}$$
$$Y_1(-\underline{U}_{K,1} + \underline{U}_{K,2}) + Y_4(+\underline{U}_{K,2} - \underline{U}_{K,3}) + Y_6\underline{U}_{K,2} = -\underline{I}_{q1}$$
$$-Y_2(\underline{U}_{K,1} - \underline{U}_{K,3}) + Y_4(+\underline{U}_{K,2} - \underline{U}_{K,3}) + Y_5\underline{U}_{K,3} = 0$$

Ausmultiplizieren, Sortieren und Ausklammern der Knotenspannungen liefert die Matrixform

$$\begin{bmatrix} Y_1 + Y_2 + Y_3 & -Y_1 & -Y_2 \\ -Y_1 & Y_1 + Y_4 + Y_6 & -Y_4 \\ -Y_2 & -Y_4 & Y_2 + Y_4 + Y_5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_{K,1} \\ \underline{U}_{K,2} \\ \underline{U}_{K,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{I}_{q1} + \underline{I}_{q3} \\ -\underline{I}_{q1} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{23}$$

Lösen des Gleichungssystems

$$\begin{bmatrix} Y_1+Y_2+Y_3 & -Y_1 & -Y_2 \\ -Y_1 & Y_1+Y_4+Y_6 & -Y_4 \\ -Y_2 & -Y_4 & Y_2+Y_4+Y_5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_{\mathrm{K},1} \\ \underline{U}_{\mathrm{K},2} \\ \underline{U}_{\mathrm{K},3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{I}_{\mathrm{q}1}+\underline{I}_{\mathrm{q}3} \\ -\underline{I}_{\mathrm{q}1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Lösen des LGS

- mit einem bekannten Verfahren
- durch Invertieren von $\underline{\mathbf{Y}}$ mit

$$\underline{\mathbf{U}}_{\mathrm{K}} = \underline{\mathbf{I}}_q \cdot \underline{\mathbf{Y}}^{-1}$$

- durch Software (MATLAB®, Scilab)

Lösen des Gesamtproblems

- Ermitteln der Zweigspannungen (Inzidenzmatrix)
- Ermitteln der Zweigströme (Beziehungen an den Bauelementen)

Gesetzmäßigkeiten der Admittanzmatrix

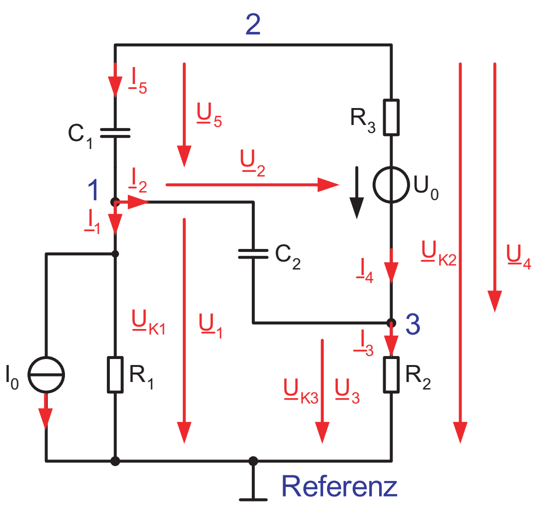
$$\begin{bmatrix} Y_1+Y_2+Y_3 & -Y_1 & -Y_2 \\ -Y_1 & Y_1+Y_4+Y_6 & -Y_4 \\ -Y_2 & -Y_4 & Y_2+Y_4+Y_5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_{\mathrm{K},1} \\ \underline{U}_{\mathrm{K},2} \\ \underline{U}_{\mathrm{K},3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{I}_{\mathrm{q}1}+\underline{I}_{\mathrm{q}3} \\ -\underline{I}_{\mathrm{q}1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

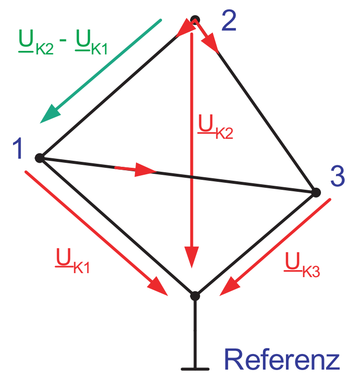
Knotenadmittanzmatrix

- Die Matrix $\underline{\mathbf{Y}}$ ist symmetrisch zur Hauptdiagonalen
- Die Elemente $\underline{Y}_{ii}$ der Hauptdiagonalen besteht aus den Summen der an den betreffenden Knoten angeschlossenen Admittanzen
- Die Elemente $\underline{Y}_{ij}$ ausserhalb der Hauptdiagonalen sind die negativen Summen der Admittanzen der Elemente, die auf dem Pfad von Knoten i nach j liegen
- Der Quellvektor enthält die Summe der dem betreffenden Knoten zufliessenden Quellströme, zufliessende Ströme werden positiv gezählt.

Knotenpotenzialverfahren

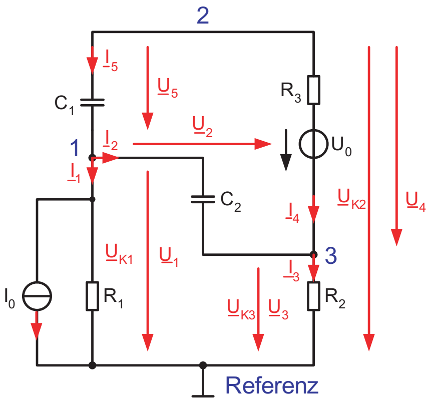
- Referenzknoten wählen
- $K - 1$ Knotenspannungen festlegen
- Beziehung zwischen Knotenspannungen und Zweigspannungen aufstellen
- Kirchhoffsche Knotenregel für alle $K - 1$ Knoten anwenden und Knotengleichungen mit *Knotenspannungen* als Variablen aufstellen
- Lineares Gleichungssystemlösen
- Zweigspannungen mit Inzidenzmatrix aus den Knotenspannungen berechnen
- Zweigströme ermitteln





Zweigspannungen beschrieben mit den Knotenspannungen

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_{\mathrm{K},1} \qquad \underline{U}_2 = \underline{U}_{\mathrm{K},1} - \underline{U}_{\mathrm{K},3} \qquad \underline{U}_3 = \underline{U}_{\mathrm{K},3}$$
$$\underline{U}_4 = \underline{U}_{\mathrm{K},2} - \underline{U}_{\mathrm{K},3} \qquad \underline{U}_5 = \underline{U}_{\mathrm{K},2} - \underline{U}_{\mathrm{K},1} \tag{24}$$



Anwendung der Knotenregel liefert (abfliessende Ströme positiv)

$$
\begin{aligned}
&\text{Knoten 1:} \quad \underline{I}_1 - \underline{I}_5 + \underline{I}_2 &&= 0\\
&\text{Knoten 2:} \quad \underline{I}_4 + \underline{I}_5 &&= 0\\
&\text{Knoten 3:} \quad \underline{I}_3 - \underline{I}_2 - \underline{I}_4 &&= 0
\end{aligned}
\qquad (25)
$$

Ausgedrückt mit Knotenspannungen erhält man

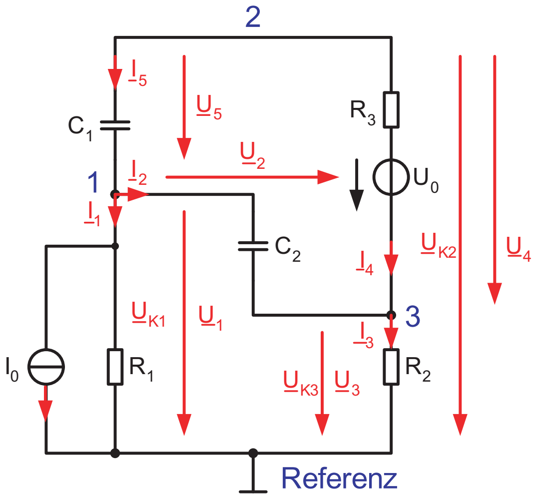
$$
\begin{aligned}
\frac{1}{R_1}\underline{U}_{\mathrm{K},1} + I_0 - (j\omega C_1(\underline{U}_{\mathrm{K},2} - \underline{U}_{\mathrm{K},1})) + (j\omega C_2(\underline{U}_{\mathrm{K},1} - \underline{U}_{\mathrm{K},3})) &= 0\\
(j\omega C_1(\underline{U}_{\mathrm{K},2} - \underline{U}_{\mathrm{K},1})) + \left(\frac{1}{R_3}(\underline{U}_{\mathrm{K},2} - \underline{U}_{\mathrm{K},3} - U_0)\right) &= 0\\
\frac{1}{R_2}\underline{U}_{\mathrm{K},3} - (j\omega C_2(\underline{U}_{\mathrm{K},1} - \underline{U}_{\mathrm{K},3})) - \left(\frac{1}{R_3}(\underline{U}_{\mathrm{K},2} - \underline{U}_{\mathrm{K},3} - U_0)\right) &= 0
\end{aligned}
\qquad (26)
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{R_1}\underline{U}_{\mathrm{K},1} + j\omega C_1(\underline{U}_{\mathrm{K},1} - \underline{U}_{\mathrm{K},2}) + j\omega C_2(\underline{U}_{\mathrm{K},1} - \underline{U}_{\mathrm{K},3}) &= -I_0\\
j\omega C_1(\underline{U}_{\mathrm{K},2} - \underline{U}_{\mathrm{K},1}) + \frac{1}{R_3}(\underline{U}_{\mathrm{K},2} - \underline{U}_{\mathrm{K},3}) &= \frac{U_0}{R_3}\\
\frac{1}{R_3}\underline{U}_{\mathrm{K},3} + j\omega C_2(\underline{U}_{\mathrm{K},3} - \underline{U}_{\mathrm{K},1}) + \frac{1}{R_3}(\underline{U}_{\mathrm{K},3} - \underline{U}_{\mathrm{K},2}) &= -\frac{U_0}{R_3}
\end{aligned}
\qquad (27)
$$

Ausmultiplizieren, Umordnen und Sortieren nach Knotenspannungen liefert die Matrixform des LGS

$$
\underbrace{\begin{bmatrix}
\frac{1}{R_1} + j\omega C_1 + j\omega C_2 & -j\omega C_1 & -j\omega C_2\\
-j\omega C_1 & \frac{1}{R_3} + j\omega C_1 & -\frac{1}{R_3}\\
-j\omega C_2 & -\frac{1}{R_3} & \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + j\omega C_2
\end{bmatrix}}_{\textit{Knotenadmittanzmatrix}}
\cdot
\begin{bmatrix}
\underline{U}_{\mathrm{K},1}\\
\underline{U}_{\mathrm{K},2}\\
\underline{U}_{\mathrm{K},3}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
-I_0\\
\frac{U_0}{R_3}\\
-\frac{U_0}{R_3}
\end{bmatrix}
$$

Knotenadmittanzmatrix



$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + j\omega C_1 + j\omega C_2 & -j\omega C_1 & -j\omega C_2 \\ -j\omega C_1 & \frac{1}{R_3} + j\omega C_1 & -\frac{1}{R_3} \\ -j\omega C_2 & -\frac{1}{R_3} & \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + j\omega C_2 \end{bmatrix} \qquad (28)$$

Zusammenhänge der Matrizen

- Knotenspannung ↔ Zweigspannung

$$\underline{\mathbf{U}} = \mathbf{B}\,\underline{\mathbf{U}}_K, \qquad (29)$$

mit **B** $[(K-1) \times Z]$-Inzidenzmatrix

- Knotengleichungen

$$\mathbf{B}^T \cdot \underline{\mathbf{I}} = \underline{\mathbf{0}} \qquad (30)$$

- Verknüpfung zwischen Zweigströmen und Zweigspannungen

$$\underline{\mathbf{I}} = \underline{\mathbf{Y}} \cdot \underline{\mathbf{U}} - \underline{\mathbf{I}}_q \qquad (31)$$

Einsetzen von (29) in (31), danach in (30) liefert

$$\underbrace{\mathbf{B}^T\,\underline{\mathbf{Y}}\,\mathbf{B}}_{\underline{\mathbf{Y}}_K} \cdot \underline{\mathbf{U}}_{\mathrm{K}} = \mathbf{B}^T \cdot \underline{\mathbf{I}}_q \qquad (32)$$

$\underline{\mathbf{Y}}_K$ ist die Knotenadmittanzmatrix

Abschnitt 3.4

Weiterführend: Graphendarstellung von Netzwerken

Motivation

Motivation

- Maschenstromananlyse und Knotenpotenzialverfahren bauen auf linear unabhängigen und vollständigen Gleichungssystemen
- Komplexe Netzwerke werden schnell unübersichtlich

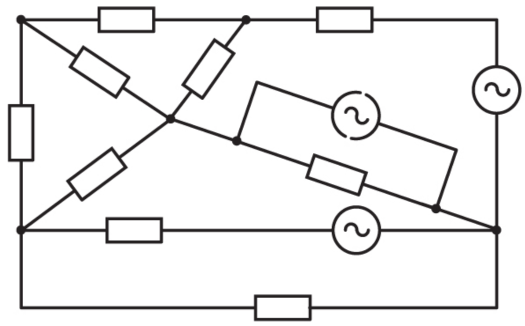
➡ Benötigt wird ein einfaches und betriebssicheres Verfahren
  - zur Festlegung von linear unabhängigen Maschenströmen beim Maschenstromverfahren
  - zur Festlegung von linear unabhängigen Knotenspannungen beim Knotenpotenzialverfahren

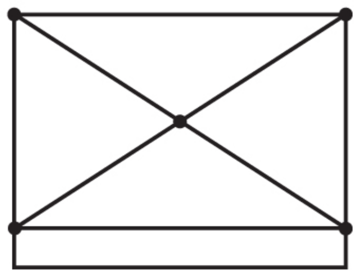
Ansatz

Darstellung eines Netzwerkes durch einen Graphen, der alle Information der Zweige beinhaltet.

Graphendarstellung

- Die Knotenstruktur des Netzwerkes bleibt erhalten
- Alle Zweige werden durch Verbindungslinien dargestellt
- Pfeile der Verbindungslinien geben die Richtung des Zweigstromes an und machen den Graphen zum gerichteten Graphen
- Alle Spannungsquellen in den Zweigen werden im Graphen durch Kurzschlüsse ersetzt
- Alle Stromquellen in den Zweigen werden entfernt



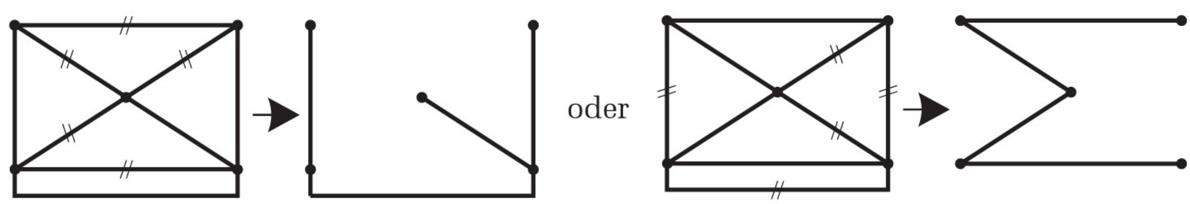


Abbildungen [Schmidt GdE 3]

Graphendarstellung

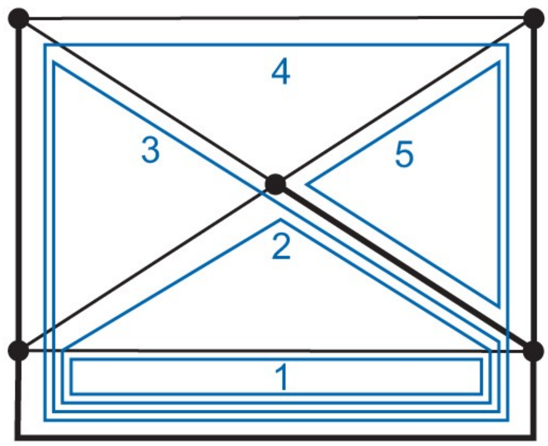
- Es werden so viele Verbindungslinien (unabhängige Zweige) entfernt, bis **keine** Maschen mehr vorkommen **aber** alle Knoten verbunden sind.
  ➡ Die verbleibenden Verbindungslinien heissen Baumzweige, bei K Knoten gibt es genau $K - 1$ Baumzweige
- Es gibt eine Mehrzahl von Bäumen

Bei $Z = 9$ Zweigen und $K = 5$ Knoten hat der Baum $K - 1 = 4$ Baumzweige, es wurden $Z - (K - 1)$ entfernt.



Anwendung im Maschenstromverfahren

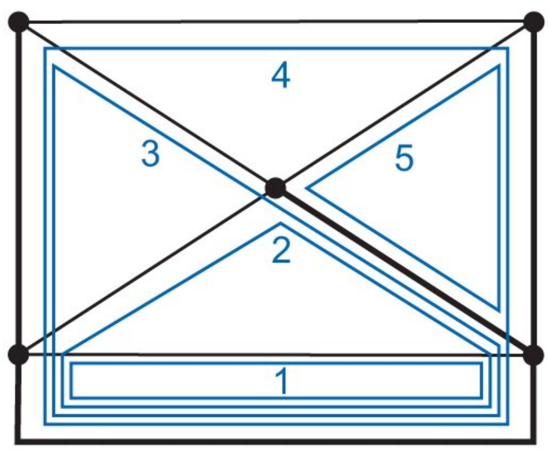
Mit jedem unabhängigen Verbindungszweig kann eine Masche gebildet werden, die nur Baumzweige enthält.
Diese Maschen heissen Fundamentalschleifen, mit denen genau $Z - (K - 1)$ Maschenströme festgelegt werden.



Das Verfahren stellt sicher, dass genau die erforderliche Anzahl von linear unabhängigen Maschengleichungen festgelegt werden kann.

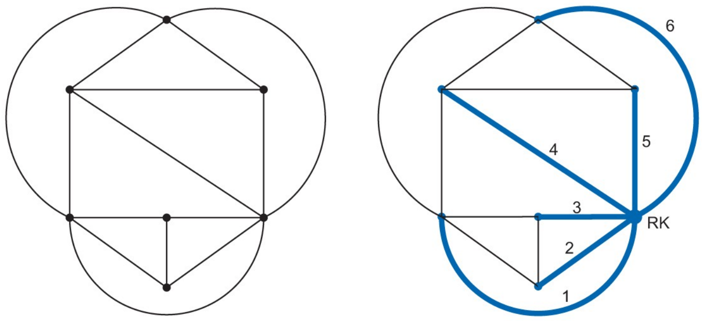
Anmerkungen

- Das auf Fundamentalschleifen basierende Maschenstromverfahren ist die Fundalmentalschleifenanalyse
- Das Aufstellen der Maschenimpedanzmatrix geschieht mit den bekannten Schritten, lediglich das Aufstellen der Maschengleichungen geschieht nach einer fomalen Methode



Anwendung im Knotenpotenzialverfahren

- Es wird ein Referenzknoten gewählt, der viele direkte Verbindungen zu möglichst vielen weiteren Knoten aufweist (meist ist das der Masseknoten)
- Es verbleiben $K - 1$ Knoten, deren Knotenspannungen notwendig und hinreichend zur Beschreibung sind.
- Der vollständige Baum enthält genau $K - 1$ Baumzweige
- Jede Knotenspannung erstreckt sich über einen Baumzweig

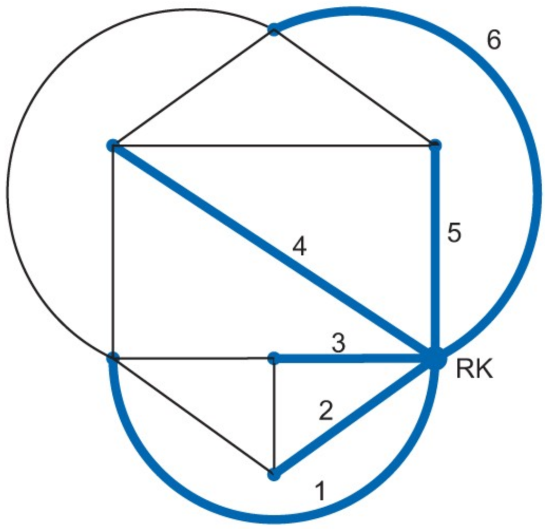


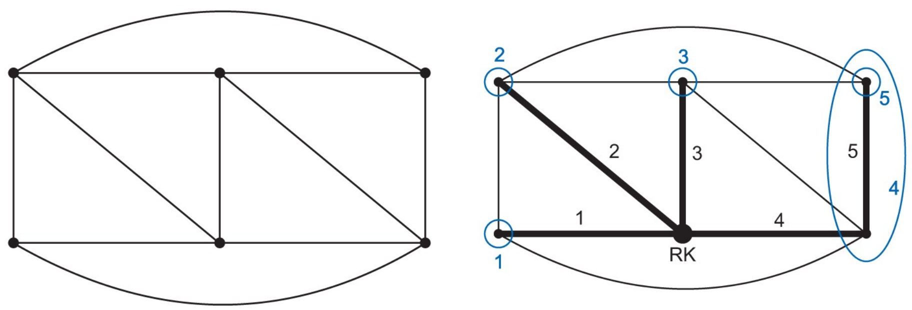
(a) (b)

Anwendung im Knotenpotenzialverfahren

- Beim Aufstellen der Knotengleichungen wird ein Knoten *freigeschnitten*
- Wird hierbei genau ein Baumzweig geschnitten, so entsteht eine Fundamentalschnittmenge

Problem: Das ist nicht in jedem Netzwerk immer sofort möglich

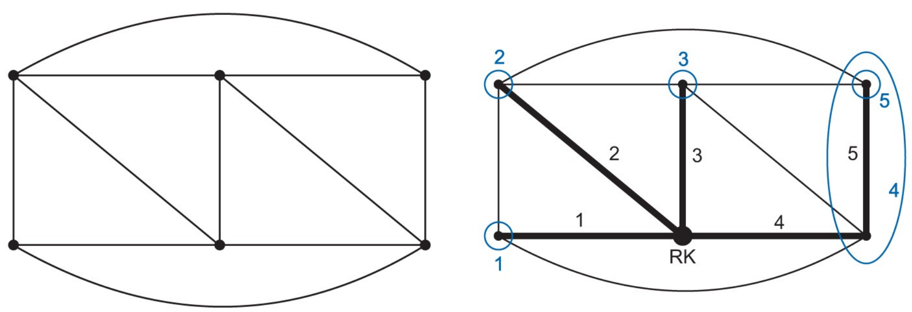




(a) (b)

Kann kein Knoten gefunden werden, von dem aus alle anderen Knoten erreicht werden

- es werden weiterhin die Knotenspannungen entlang von Baumzweigen gewählt
- Baumzweige ohne offenes Ende werden zu einem *Superknoten* ergänzt, der nur genau einen zugehörigen Baumzweig schneidet (➡Schnittmengenanalyse)



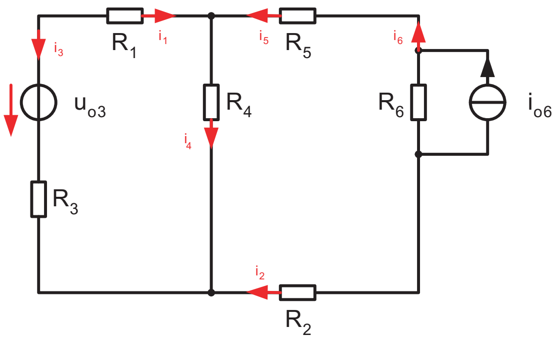
(a) (b)

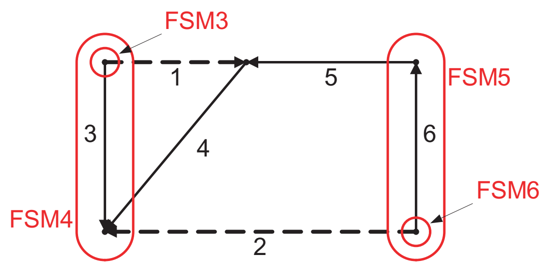
Am Beispiel:

- die Knotenspannung von Baumzweig 5 wird zusammengesetzt durch $\underline{U}_4 + \underline{U}_5$,
- der Baumzweig 4 hat kein offenes Ende ,
- es wird ein *Superknoten* gebildet
- dessen Knotenspannung ist die von Knoten 4 (also $\underline{U}_4$)

Ausgangspunkt

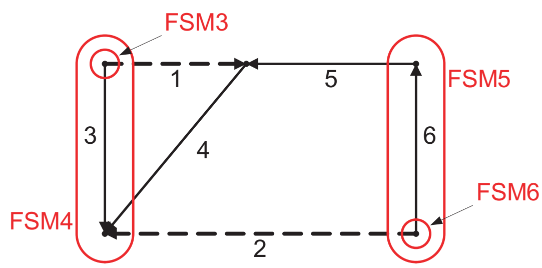
- Die Knotenspannungen des Knotenpotenzialverfahrens werden durch Baumzweigspannungen ersetzt
- Die Anzahl der Fundamentalschnittmengen (FSM) entspricht der Anzahl der Baumzweige
- Der Baumzweigstrom der FSM wird positiv gezählt





Fundamentalschnittmengen

$$\begin{aligned} \text{FSM 3:}\quad & i_1 + i_3 && = 0 \\ \text{FSM 4:}\quad & -i_1 + i_2 + i_4 && = 0 \\ \text{FSM 5:}\quad & i_2 + i_5 && = 0 \\ \text{FSM 6:}\quad & i_2 + i_6 && = 0 \end{aligned}$$



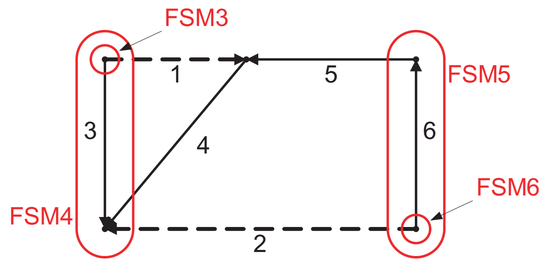
in Matrixform

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \underline{\mathbf{i}} = \underline{\mathbf{0}} \quad (33)$$

$$\underline{\mathbf{Q}} \cdot \underline{\mathbf{i}} = \underline{\mathbf{0}} \quad (34)$$

Fundamentalschnittmengenmatrix

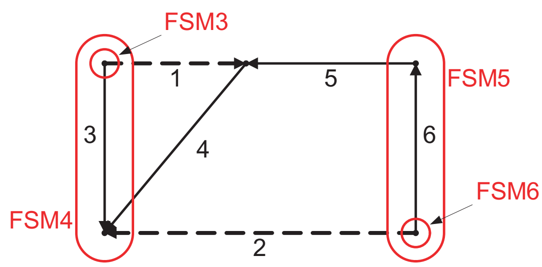
- $q_{ij} = +1$, wenn Zweig i zur FSM j gehört und die Richtungssinne übereinstimmen haben
- $q_{ij} = -1$, wenn Zweig i zur FSM j gehört und die Richtungssinne nicht übereinstimmen
- $q_{ij} = 0$, wenn Zweig i nicht zur FSM j gehört



$$\underline{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Die Baumzweigspannungen $\underline{U}_{\mathrm{B,x}}$ beschreiben die Zweigspannungen

$$\underline{U}_3 = \underline{U}_{\mathrm{B},3} \qquad \underline{U}_4 = \underline{U}_{\mathrm{B},4}$$
$$\underline{U}_1 = \underline{U}_{\mathrm{B},3} - \underline{U}_{\mathrm{B},4} \qquad \underline{U}_5 = \underline{U}_{\mathrm{B},5}$$
$$\underline{U}_6 = \underline{U}_{\mathrm{B},6} \qquad \underline{U}_2 = \underline{U}_{\mathrm{B},4} + \underline{U}_{\mathrm{B},5} + \underline{U}_{\mathrm{B},6}$$



und in Matrixschreibweise

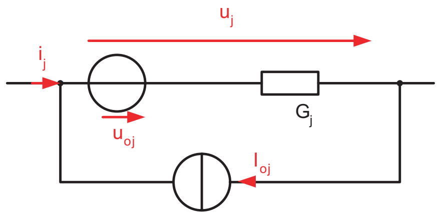
$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \\ \underline{U}_3 \\ \underline{U}_4 \\ \underline{U}_5 \\ \underline{U}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_{\mathrm{B},3} \\ \underline{U}_{\mathrm{B},4} \\ \underline{U}_{\mathrm{B},5} \\ \underline{U}_{\mathrm{B},6} \end{bmatrix} \tag{35}$$

$$\underline{\mathbf{U}} = \underline{\mathbf{Q}}^T \cdot \underline{\mathbf{U}}_{\mathrm{B}} \tag{36}$$

Die Matrix $\underline{\mathbf{Q}}$ stellt den Zusammenhang zwischen Baumzweigspannung und Zweigspannung her

Die Beziehungen in den Zweigen sind

$$i_j = G_j \cdot u_j + i_{oj} - G_j \cdot u_{oj} \qquad (37)$$



und in Matrixform

$$\underline{\mathbf{i}} = \underline{\mathbf{G}}\,\underline{\mathbf{u}} + \underline{\mathbf{i}}_o - \underline{\mathbf{G}}\,\underline{\mathbf{u}}_o \qquad (38)$$

mit

$$\underline{\mathbf{G}} = \begin{bmatrix} G_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & G_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & G_z \end{bmatrix} \qquad (39)$$

Multiplikation mit $\underline{\mathbf{Q}}$ liefert

$$\underline{\mathbf{Q}}\,\underline{\mathbf{i}} = \underline{\mathbf{Q}}\,\underline{\mathbf{G}}\,\underline{\mathbf{u}} + \underline{\mathbf{Q}}\,\underline{\mathbf{i}}_o - \underline{\mathbf{Q}}\,\underline{\mathbf{G}}\,\underline{\mathbf{u}}_o = \underline{\mathbf{0}} \qquad (40)$$

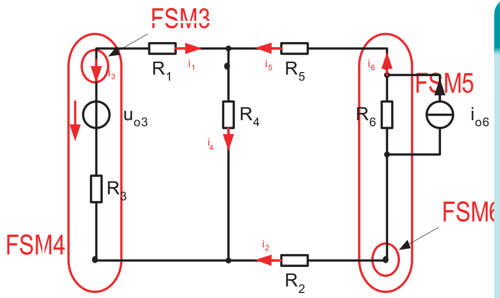
Der rechte Teil wird mit Baumzweigspannungen dargestellt

$$\underbrace{\underline{\mathbf{Q}}\,\underline{\mathbf{G}}\,\underline{\mathbf{Q}}^T}_{\underline{\mathbf{Y}}}\,\underline{\mathbf{U}}_B = \underbrace{-\underline{\mathbf{Q}}\underline{\mathbf{i}}_o + \underline{\mathbf{Q}}\,\underline{\mathbf{G}}\,\underline{\mathbf{u}}_o}_{\underline{\mathbf{i}}_q} \qquad (41)$$

und liefert

$$\underline{\mathbf{Y}}\,\underline{\mathbf{U}}_B = \underline{\mathbf{i}}_q \qquad (42)$$

$$\underline{\mathbf{Y}} = \underline{\mathbf{Q}}\,\underline{\mathbf{G}}\,\underline{\mathbf{Q}}^T = \begin{bmatrix} G_1 + G_3 & -G_1 & 0 & 0 \\ -G_1 & G_1 + G_2 + G_4 & G_2 & G_2 \\ 0 & G_2 & G_2 + G_5 & G_2 \\ 0 & G_2 & G_2 & G_2 + G_6 \end{bmatrix}$$

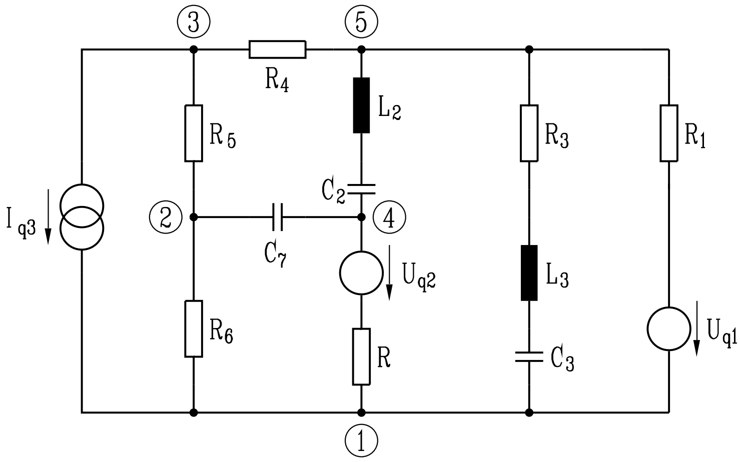


Eigenschaften von $\underline{\mathbf{Y}}$

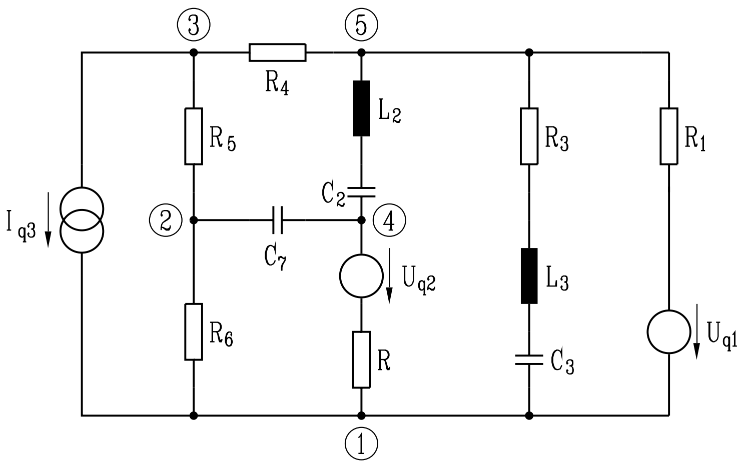
- Die Matrix $\underline{\mathbf{Y}}$ ist symmetrisch zur Hauptdiagonalen
- Auf der Hauptdiagonalen stehen die zur FSM gehörenden Admittanzen
- Die anderen Elemente enthalten die Admittanzen, die in den nach Zeile und Spalten zugeordneten FSM gemeinsam enthalten sind (diese sind immer in den Verbindungsgzweigen zu finden)

Abschnitt 3.5

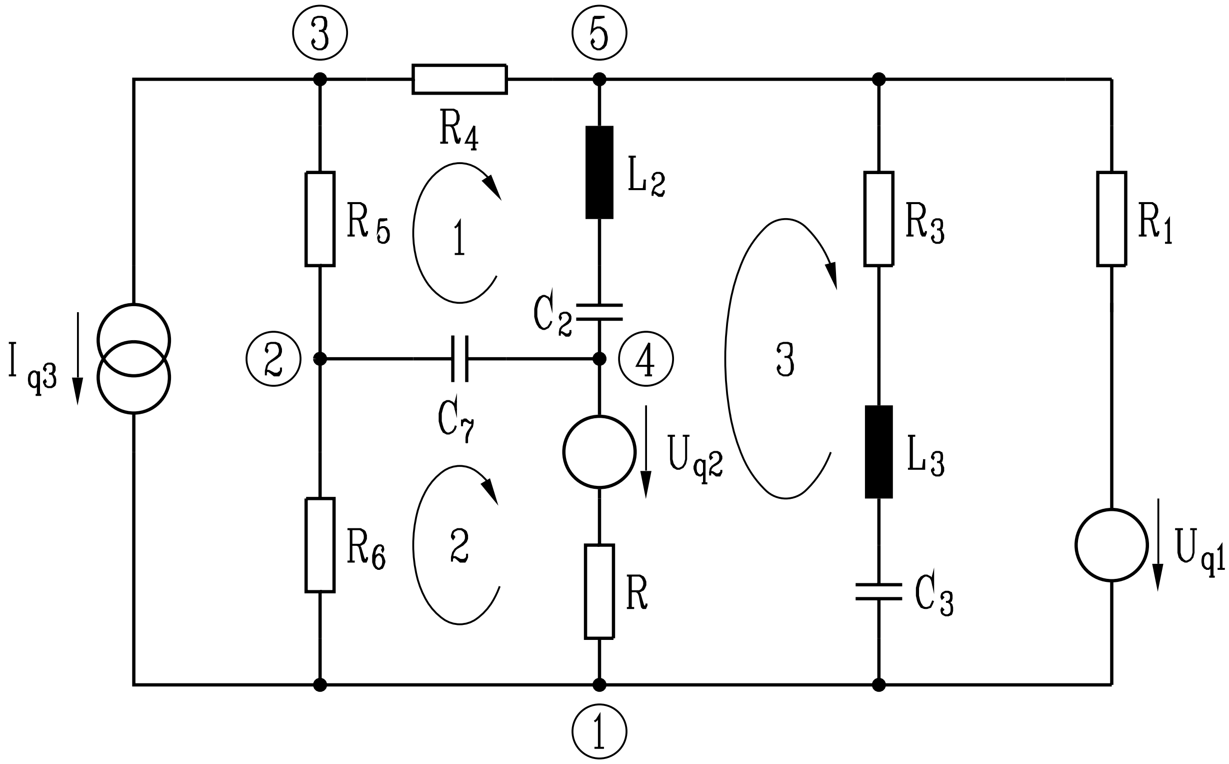
Beispiel



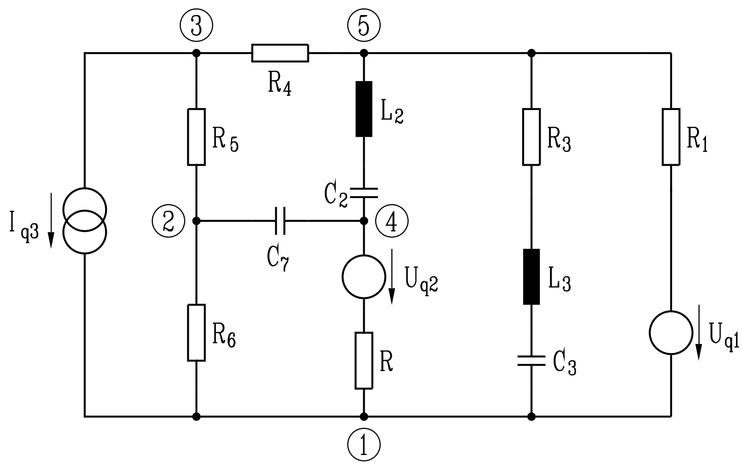
- Welche Schritte sind notwendig, um eine Maschenstromanalyse durchführen zu können
- Wandeln Sie das Netzwerk entsprechend um
- Stellen Sie das Gleichungssystem der Maschengleichungen in der Form $\underline{\mathbf{Z}}\underline{\mathbf{I}} = \underline{\mathbf{U}}_q$ auf



1. 3 oder 4 Maschen?
2. Behandlung von $R_3.L_3$, R_1, C_3 und U_{q1}?
3. Knotenspannunganalyse oder Maschenstromanalyse?



Beispiel
3.5 – Beispiel



- Welche Schritte sind notwendig, um eine Knotenpotenzialanalyse durchführen zu können
- Wandeln Sie das Netzwerk entsprechend um
- Stellen Sie das Gleichungssystem der Knotengleichungen in der Form $\underline{\mathbf{YU}} = \underline{\mathbf{I}}_q$ auf

Literatur I

Dieter Zastrow ➠ Bibliothek
Elektrotechnik – ein Grundlagenbuch
Vieweg Verlag 2006

Dieter Zastrow, Martin Vömel
Aufgabensammlung Elektrotechnik 1 ➠ Bibliothek Gleichstrom und elektrisches Feld
Vieweg Verlag 2006

Dieter Zastrow, Martin Vömel
Aufgabensammlung Elektrotechnik 2 ➠ Bibliothek Magnetisches Feld und Wechselstrom
Vieweg Verlag 2006

Dieter Zastrow ➠ Bibliothek
Elektronik – Lehr- und Übungsbuch
Vieweg Verlag 2007, 7. Auflage, ISBN-13:978-3-528-64210-5

M. Albach
Grundlagen der Elektrotechnik 1
Peason Studium, ISBN 3-8273-7106-6

M. Albach
Grundlagen der Elektrotechnik 2 – periodische und nicht periodische Signalformen
Peason Studium, ISBN 3-8273-7108-2

Lorenz-Peter Schmidt, Gerd Schaller, Siegfried Martin
Grundlagen der Elektrotechnik 3 – Netzwerke
Peason Studium, ISBN 3-8273-7107-4

Allan R. Hambley
Electrical Engineering
Pearson Education, ISBN 0-13-09349-5

Literatur II

Manfred Michel
Einführung in die Allgemeine Elektrotechnik
I. Arbeitsverfahren zur Berechnung einfacher elektrischer Netzwerke
DeGruyter Verlag, ISBN 3-11-003725-4

Jürgen Suchaneck
Grundlagen der Elektrotechnik I
im Web: `http://public.beuth-hochschule.de/ suchanek/et/ET1.pdf`