Differenziationsregeln	**Integrationsregeln** (Integrale gebrochen rat. F. s. hinten)
Produktregel: $(u\cdot v)' = u'\,v + u\,v'$ Quotientenregel: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$ Kettenregel $[\,f(g(x))\,]' = f'(g(x))\cdot g'(x)$	$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\,F(ax+b) + C$ $\int f(g(x))\cdot g'(x)\,dx = F(g(x)) + C$, $\int \frac{g'(x)}{g(x)}\,dx = \ln\lvert g(x)\rvert + C$ Substitution: $\int f(g(x))\,dx$, $u = g(x)$, $\frac{du}{dx} = g'(x)$, $dx = \frac{du}{g'(x)}$ im Integral ersetzen, verbleibendes x durch u ausdrücken Partielle Int.: $\int u'\,v\,dx = u\cdot v - \int u\,v'\,dx$ $\left(\int f(x)\,dx = \int 1\cdot f(x)\,dx\right)$

$$F'(x) = f(x) \;\Rightarrow\; F(x) = \int f(x)\,dx + C$$

$f(x)$	$f'(x)$	Integral
$f(x) = c$	$f'(x) = 0$	
$f(x) = x^n,\ n \in \mathbb{R}$	$f'(x) = n\,x^{n-1}$	$\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}\,x^{n+1} + C$ für $n \neq -1$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$	$\int e^x\,dx = e^x + C$
$f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x\cdot\ln a$	$\int a^x\,dx = \frac{1}{\ln a}\,a^x + C$
$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \frac{1}{x}$	$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln\lvert x\rvert + C$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$	$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$	$\int \cos x\,dx = \sin x + C$
$f(x) = \tan x$	$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{\cos^2 x} \\ 1 + \tan^2 x \end{cases}$	$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + C$
$f(x) = \cot x$	$f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\cot x + C$
$f(x) = \arcsin x$	$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C$
$f(x) = \arctan x$	$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$	$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + C$
$f(x) = \sinh x$	$f'(x) = \cosh x$	$\int \sinh x\,dx = \cosh x + C$
$f(x) = \cosh x$	$f'(x) = \sinh x$	$\int \cosh x\,dx = \sinh x + C$
$f(x) = \tanh x$	$f'(x) = \frac{1}{\cosh^2 x}$	
$f(x) = \operatorname{arsinh} x$	$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \operatorname{ar\,sinh} x + C_1 = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + C_2$
$f(x) = \operatorname{arcosh} x$	$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \operatorname{ar\,cosh}\lvert x\rvert\cdot\operatorname{sgn} x + C_1 = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2-1}\right\rvert + C_2$ für $\lvert x\rvert > 1$

$$\sin\alpha\sin\beta = \tfrac{1}{2}\,[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$$
$$\cos\alpha\cos\beta = \tfrac{1}{2}\,[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)]$$
$$\sin\alpha\cos\beta = \tfrac{1}{2}\,[\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)]$$

Integration gebrochen rationaler Funktionen f(x)		Anwendungen des bestimmten Integrals
1. f(x) unecht gebrochen → f(x) zerlegen in ganzen und echt gebrochenen Anteil (Polynomdivision).		Linearer Mittelwert $\bar{y}_{lin} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$
2. Nullstellen x_{0i} des Nenners bestimmen, Nenner zerlegen in ein Produkt aus Linearfaktoren $(x-x_{0i})$ und quadratischen Termen (x^2+bx+c) ohne reelle Nullstellen.		Quadrat. Mittelwert $\bar{y}_{quad} = \sqrt{\frac{1}{b-a}\int_a^b f^2(x)\,dx}$
3. Der Integrand ist nun in eine Summe von Partialbrüchen zerlegbar, Ansatz für $(x-x_{0i})$ im Nenner → $\frac{A_i}{x-x_{0i}}$ für $(x-x_{0i})^r$ im Nenner → $\frac{A_{i1}}{(x-x_{0i})}+\frac{A_{i2}}{(x-x_{0i})^2}+\ldots+\frac{A_{ir}}{(x-x_{0i})^r}$ für $(x^2+bx+c) \neq 0$ → $\frac{Ex+F}{(x^2+bx+c)}$		Fläche zwischen y =f(x) und x-Achse in [a,b] $A = \left\|\int_a^{x1} f(x)\,dx\right\| + \left\|\int_{x1}^{x2} f(x)\,dx\right\| + \ldots + \left\|\int_{xn}^{b} f(x)\,dx\right\|$ x1,…,xn Nullstellen von f(x) zwischen a und b
		Arbeit einer Kraft $\vec{F}$ längs eines Weges $\vec{\ell}(t),\ t_1 \le t \le t_2$: $W = \int_{t1}^{t2} \vec{F}(\vec{\ell}(t)) \cdot \dot{\vec{\ell}}(t)\,dt$
4. Koeffizienten bestimmen über Koeffizientenvergleich oder Einsetzverfahren.		Mehrdimensionale Integrale n=2: Flächenelement $dA = dx\,dy \mid dA = r\,dr\,d\varphi$ n=3: Vol.element $dV = dx\,dy\,dz \mid dV = r\,dr\,d\varphi\,dz$
5. Integration der Partialbrüche: $\int \frac{1}{x-x_0}\,dx = \ln\|x-x_0\|+C$ $\int \frac{1}{(x-x_0)^n}\,dx = \frac{1}{-n+1}(x-x_0)^{-n+1}+C$ für $n>1$ $\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$ $\int \frac{1}{\underbrace{x^2+bx+c}_{\text{Nenner o. Nullst.}}}\,dx = \int \frac{1}{\underbrace{(x-x_0)^2+a^2}_{\text{quadrat. Ergänzung}}}\,dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x-x_0}{a}+C$ (*) $\int \frac{Ex+F}{\underbrace{x^2+bx+c}_{\text{Nenner o. Nullst.}}}\,dx$ im Zähler Ableitung des Nenners + Konstante erzeugen, integrieren mit f '/ f und (*).		Numerische Integration Rechteckformel $\int_a^b f(x)\,dx \approx h\,[y_0+y_1+\ldots+y_{n-1}]$, n Streifen, $h=\frac{b-a}{n}$ Trapezformel $\int_a^b f(x)\,dx \approx h\left[\frac{y_0}{2}+y_1+\ldots+y_{n-1}+\frac{y_n}{2}\right]$, n Streifen, $h=\frac{b-a}{n}$ Simpsonsche Formel $\int_a^b f(x)\,dx \approx$ $\frac{h}{3}[y_0+y_{2n}+2(y_2+y_4+..y_{2n-2})+4(y_1+y_3+..y_{2n-1})]$ Teilung in 2n Streifen der Breite $h=\frac{b-a}{2n}$

Vorgehen beim Integrieren: Prüfen: Grundintegral (ev. mit f(ax+b)) ?

Fall f '/ f ?

Gebrochen rationale Funktion?

Ansonsten: Substitution / partielle Integration