



# **Materialien zu Vorlesung**

## **Grundlagen der Messtechnik**

Prof. Dr. K. Metzger

Stand  
30.03.2010

<b>1</b>	<b>LITERATUR</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>EINLEITUNG (INTRODUCTION)</b>	<b>5</b>
2.1	Begriffe	5
2.2	Maßeinheiten (measurement units)	6
2.2.1	SI-Einheiten ( <i>SI units</i> )	6
2.3	Messfehler (measuring error)	8
2.3.1	Fehlerarten (types of error)	8
2.3.2	Fehlergrenzen (error limits)	11
2.3.3	Fehlerfortpflanzung ( <i>error spread</i> )	11
2.4	Wichtige Mittelwerte und Benennungen	13
2.4.1	Der zeitlich lineare Mittelwert ( <i>mean value</i> )	14
2.4.2	Gleichrichtwert ( <i>rectified value</i> )	14
2.4.3	Effektivwert ( <i>Root Mean Square, RMS</i> )	15
2.4.4	Kenngrößen ( <i>characteristics</i> )	16
<b>3</b>	<b>DIE KLASSISCHEN MESSGERÄTE UND IHRE ANWENDUNG</b>	<b>18</b>
3.1	Beschriftung von Messwerken	18
3.2	Das Drehspulmessgerät (moving coil instrument)	19
3.2.1	Das Drehspulinstrument zur Strom- und Spannungsmessung	19
3.2.2	Das Drehspulinstrument als Vielfachmesser	20
3.2.3	Messung von ohmschen Widerständen mit Strom- und Spannungsmessung	20
3.3	Das Dreheisenmessinstrument (moving iron instrument)	25
3.4	Digitalmultimeter (digital multimeter)	27
3.4.1	Fehlerangabe bei DMMs	27
3.4.2	Aufbau und Funktion von DMMs	28
3.4.3	Einfluss sinusförmiger Störungen auf das Messergebnis	30
3.4.4	Messen mit DMMs	31
3.5	Oszilloskope	34
3.5.1	Funktion des Analogoszilloskops	35
3.5.2	Das Digitalspeicheroszilloskop	38
3.5.3	Anschluss von Messsignalen	41
3.5.4	Arbeiten mit dem Oszilloskop	43
<b>4</b>	<b>KOMPENSATOREN (COMPENSATOR)</b>	<b>47</b>
4.1	Kompensatoren für Gleichspannung	47
4.1.1	Kompensator nach Poggendorff	47
4.1.2	Kompensator nach Lindeck-Rothe	47
4.2	Kompensator für Gleichstrom	48
4.3	Automatisch abgleichende Kompensationsschaltungen	48
<b>5</b>	<b>BRÜCKENSCHALTUNGEN (BRIDGE CIRCUIT)</b>	<b>50</b>

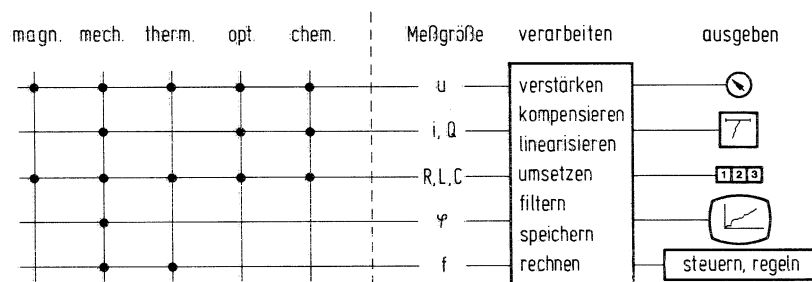
<b>5.1</b>	<b>Gleichstrommessbrücken (DC bridge)</b>	<b>50</b>
5.1.1	Wheatstone-Schaltung	50
5.1.2	Thomson-Doppelbrücke	51
<b>5.2</b>	<b>Wechselstrommessbrücken (AC bridge)</b>	<b>52</b>
5.2.1	Kapazitätsmessbrücke nach Wien	52
5.2.2	Induktivitätsmessbrücke nach Maxwell	53
<b>6</b>	<b>LEISTUNGSMESSUNG (POWER MEASUREMENT)</b>	<b>55</b>
<b>6.1</b>	<b>Theoretische Grundlagen der Leistungsmessung</b>	<b>55</b>
<b>6.2</b>	<b>Messeinrichtungen zur Leistungsmessung</b>	<b>59</b>
6.2.1	Elektrodynamische Messinstrumente	59
6.2.2	Time Division Verfahren	61
<b>7</b>	<b>DIGITALE VERARBEITUNG ANALOGER MESSSIGNALE</b>	<b>63</b>
<b>7.1</b>	<b>Strukturen von Messsystemen</b>	<b>64</b>
<b>7.2</b>	<b>Sample &amp; Hold Verstärker</b>	<b>67</b>
<b>7.3</b>	<b>A/D-Umsetzverfahren</b>	<b>68</b>
7.3.1	ADU mit schrittweiser Näherung (Sukzessive Approximation)	69
7.3.2	Flash ADU	69
7.3.3	Kaskadenumsetzer	70
7.3.4	Sigma-Delta-Umsetzer	71
<b>7.4</b>	<b>Wahl der Abtastfrequenz</b>	<b>72</b>
<b>8</b>	<b>MESSSCHALTUNGEN MIT OPERATIONSVERSTÄRKERN</b>	<b>75</b>
<b>8.1</b>	<b>OA Grundsaltungen</b>	<b>76</b>
<b>9</b>	<b>LÖSUNG DER ÜBUNGSAUFGABEN</b>	<b>84</b>
<b>1</b>	<b>Literatur</b>	
/1/	"Elektrische Meßtechnik" Schrüfer, E. Carl Hanser Verlag	
/2/	"Elektrische Meßtechnik" Stöckl/Winterling Teubner Verlag	
/3/	"Elektrische und elektronische Meßtechnik" Felderhoff, R. Carl Hanser Verlag	
/4/	"Taschenbuch der MESSTECHNIK" Hoffmann, J. Fachbuchverlag Leipzig	
/5/	"Oszilloskope" Meyer, G. Hüttig Verlag	

- /6/ "Langenscheidts Fachwörterbuch Elektrotechnik und Elektronik"  
Budig, P.-K.  
Langenscheidt
- /7/ "Meßtechnik"  
Schöne, A.  
Springer-Verlag
- /8/ "Grundlagen der Meßtechnik"  
Profos, P. / Pfeifer, T.  
R. Oldenburg Verlag
- /9/ " Protective Relaying, Theory and Applications"  
Walter A. Elmore,  
Marcel Dekker, New York

## 2 Einleitung (introduction)

Messen heißt vergleichen. Es wird dabei eine Größe (*quantity*) quantitativ erfasst und festgestellt, wie viel mal eine Maßeinheit in der zu messenden Größe enthalten ist. Die zum Messen eingesetzten Messgeräte erweitern dabei den unseren Sinnen zugänglichen Wahrnehmungsraum. So sieht z.B. das Auge nur diejenigen elektromagnetischen Schwingungen, die sich im Wellenlängenbereich von 0,38 bis 0,78 mm bewegen, während entsprechende Messgeräte einen Messbereich über 18 Zehnerpotenzen zugänglich ist.

Die hier behandelte elektrische Messtechnik befasst sich mit der Messung elektrischer Größen und aller anderen Größen, die sich in elektrische Größen umformen lassen.



Mit Hilfe von Sensoren oder Aufnehmern werden nichtelektrische Größen in elektrische umgeformt und damit der elektrischen Messung zugänglich.

### 2.1 Begriffe

Die Grundbegriffe der Messtechnik sind in DIN 1319

Teil 1 Allgemeine Grundbegriffe

Teil 2 Begriffe für die Anwendung von Messgeräten

Teil 3 Begriffe für die Messunsicherheit und die Beurteilung von Messgeräten und Messeinrichtungen

festgelegt. Wichtige Begriffe sind:

Die **Messgröße** (*quantity to be measured*) ist die zu messende physikalische, chemische oder sonstige Größe.

Der **Messwert** (*measured value*) ist der mit Hilfe einer Messeinrichtung ermittelte Wert der Messgröße. Es wird das Produkt aus Zahlenwert und Einheit der Messgröße angegeben (z.B.  $U = 2,1 \text{ V}$ ).

$$\text{Messgröße} = \text{Zahlenwert} \times \text{Einheit}$$

Das **Messverfahren** (*measuring method*) nutzt bestimmte Eigenschaften oder Wirkungen des Messobjektes aus, um in einer geeigneten Messeinrichtung die untersuchte Messgröße mit einer definierten Maßeinheit in Beziehung zu setzen.

Die **Messeinrichtung** (*measuring equipment*) (auch Messanordnung oder Messanlage genannt) ist die Gesamtheit aller Teile, mit denen ein auf einem bestimmten Messprinzip beruhendes Messverfahren verwirklicht wird. Besteht die Messeinrichtung aus einem einzigen Teil, so spricht man von einem **Messgerät** (*measuring device*).

## 2.2 Maßeinheiten (measurement units)

Damit man messen kann, sind vorher Einheiten zu definieren. Zunächst haben sich die Einheiten an den Menschen (z.B. Fuß, Elle) bzw. an seiner Umgebung (Erdumfang, mittlerer Sonnentag) orientiert.

Es sollen sechszehen Mann,  
klein und groß,  
wie sie ungefehrlich  
nach einander auß der Kirchen  
gehen, ein jeder vor den  
anderen einen Schuch stellen.  
Dieselbige Lenge ist, und  
sol seyn, ein gerecht gemeyn  
Meßrute.



Mittelalterliche Definition einer Längeneinheit. (Nach Jacob Köbel: Geometrey, Frankfurt 1575)

Dabei gab es jedoch Schwierigkeiten mit der Anwendung dieser Einheiten. Schon J. Cl. Maxwell (1831-1879) hat empfohlen auf Quantenmaße überzugehen, die überall und jederzeit durch Experimente nachvollziehbar sind.

### 2.2.1 SI-Einheiten (SI units)

1960 wurde von der Generalkonferenz für Maß und Gewicht das "Système International d'Unités" empfohlen, das inzwischen weltweit eingeführt und in der Bundesrepublik Deutschland gesetzlich vorgeschrieben ist.

Diese Basiseinheiten sind nach DIN 1301 oder ISO 1000:

Gebiet	Basisgröße	Formelzeichen	Basiseinheiten	Einheitenzeichen
Mechanik	Länge	$l$	Meter	m
	Masse	$m$	Kilogramm	kg
	Zeit	$t$	Sekunde	s
Elektrotechnik	Stromstärke	$I$	Ampere	A
Thermodynamik	thermodyn. Temperatur	$T$	Kelvin	K
Optik	Lichtstärke	$I_L$	Candela	cd
Chemie	Stoffmenge		Mol	mol

1 Meter ist die Länge der Strecke, die Licht im Vakuum während des Intervalls von  $(1/299\,792\,458)$  Sekunden durchläuft (1983).

1 Kilogramm ist die Masse des Internationalen Kilogrammprototyps (1889).

1 Sekunde ist das 9 192 631 770fache der Periodendauer der dem Übergang zwischen den beiden Hyperfeinstrukturniveaus des Grundzustands von Atomen des Nuklids  $^{133}\text{Cs}$  entsprechenden Strahlung (1967).

1 Ampere ist die Stärke eines zeitlich unveränderlichen elektrischen Stromes, der, durch zwei im Vakuum parallel im Abstand 1 m voneinander angeordnete, geradlinige, unendlich lange Leiter von vernachlässigbar kleinem, kreisförmigen Querschnitt fließend, zwischen diesen Leitern je 1 m Leiterlänge elektrodynamisch die Kraft  $0,2 \cdot 10^{-6} \text{ N}$  hervorrufen würde (1948).

1 Kelvin ist der 273,16te Teil der thermodynamischen Temperatur des Tripelpunktes des Wassers (1967).

1 Candela ist die Lichtstärke in einer bestimmten Richtung einer Strahlungsquelle, die monochromatische Strahlung der Frequenz  $540 \cdot 10^{12} \text{ Hz}$  aussendet und deren Strahlstärke in dieser Richtung (1/683) Watt durch Steradian beträgt.

1 Mol ist die Stoffmenge eines Systems bestimmter Zusammensetzung, das aus ebenso vielen Teilchen besteht, wie Atome in  $(12/1000) \text{ kg}$  des Nukleids  $^{12}\text{C}$  enthalten sind. Bei Benutzung des Mol müssen die Teilchen spezifiziert, werden. Es können Atome, Moleküle, Ionen, Elektronen usw. oder eine Gruppe solcher Teilchen genau angegebener Zusammensetzung sein (1971).

Diese Einheiten bilden ein kohärentes System, d.h. aus diesen Grundeinheiten abgeleitete Einheiten lassen sich mit dem Zahlenfaktor 1 umrechnen.

z.B.  $[v] = [s/t] = 1 \text{ m/s}$

In der Elektrotechnik beschränkt man sich oft auf das aus m, kg, s, A bestehende Teilsystem (MKSA). Nachstehend sind einige abgeleitete SI-Einheiten angegeben, die einen besonderen Namen haben.

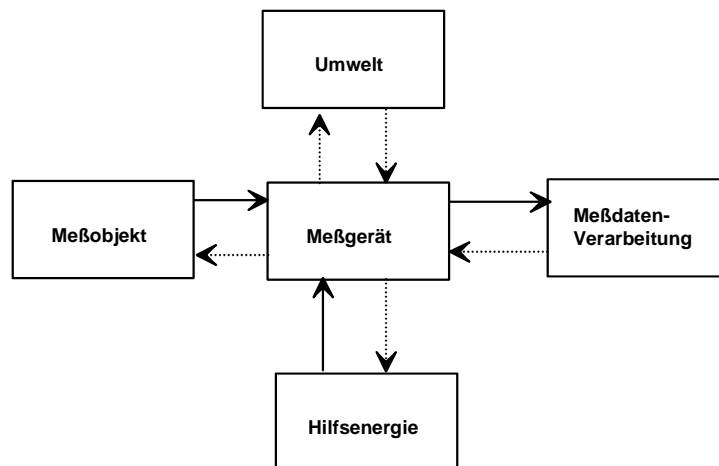
	Name	Einheit	SI-Einheit durch andere SI-Einheiten ausgedrückt	durch SI-Basiseinheit ausgedrückt
Frequenz	Hertz	Hz		$\text{s}^{-1}$
Kraft	Newton	N		$\text{m kg s}^{-2}$
Druck	Pascal	Pa	$\text{N / m}^2$	$\text{m}^{-1} \text{ kg s}^{-2}$
Energie, Arbeit, Wärmemenge	Joule	J	$\text{N m}$	$\text{m}^2 \text{ kg s}^{-2}$
Leistung	Watt	W	$\text{J / s}$	$\text{m}^2 \text{ kg s}^{-3}$
el. Ladung	Coulomb	C		$\text{s A}$
el. Spannung	Volt	V	$\text{W / A}$	$\text{m}^2 \text{ kg s}^{-3} \text{ A}^{-1}$
el. Kapazität	Farad	F	$\text{C / V}$	$\text{m}^{-2} \text{ kg}^{-1} \text{ s}^4 \text{ A}^2$
el. Widerstand	Ohm	$\Omega$	$\text{V / A}$	$\text{m}^2 \text{ kg s}^{-3} \text{ A}^{-2}$
el. Leitwert	Siemens	S	$\text{A / V}$	$\text{m}^{-2} \text{ kg}^{-1} \text{ s}^3 \text{ A}^2$
mag. Fluss	Weber	Wb	$\text{V s}$	$\text{m}^2 \text{ kg s}^{-2} \text{ A}^{-1}$
mag. Flussdichte, Induktion	Tesla	T	$\text{Wb / m}^2$	$\text{kg s}^{-2} \text{ A}^{-1}$
Induktivität	Henry	H	$\text{Wb / A}$	$\text{m}^2 \text{ kg s}^{-2} \text{ A}^{-2}$



Aufgabe (2.1): Man ermittle aus den SI-Einheiten die abgeleitete Einheit der Leistung.

## 2.3 Messfehler (measuring error)

Fehlerfreies Messen ist nicht möglich. Messobjekt und Messgerät stehen stets in Wechselwirkung und beeinflussen sich gegenseitig.



Fehler lassen sich aufgrund ihrer Ursache in systematische Fehler und zufällige Fehler unterteilen.

### 2.3.1 Fehlerarten (types of error)

Der (absolute) Fehler (*absolute error*) ist definiert zu:

$$x_F = x_A - x_W \quad (\text{absoluter Fehler} = \text{Istanzeige} - \text{Sollanzeige})$$

mit  $x_A$  = angezeigter Wert (*indicated value*) und  $x_W$  wahrer Wert (*true value*).

Der relative Fehler (*relative error*) ist definiert zu:

$$F_r = \frac{x_F}{x_W} = \frac{x_A - x_W}{x_W} \quad \text{rel. Fehler} = \frac{\text{Istanzeige} - \text{Sollanzeige}}{\text{Sollanzeige}}$$

Bei analog anzeigenden Messgeräten ist es üblich, als relativen Anzeigefehler  $F_{Ar}$  den absoluten Fehler der Anzeige auf den Messbereichsendwert  $x_M$  zu beziehen.

$$F_{Ar} = \frac{x_A - x_W}{x_M} \quad \text{rel. Anzeigefehler} = \frac{\text{Istanzeige} - \text{Sollanzeige}}{\text{Meßbereichsendwert}}$$



Beispiel (2.2): Ein Strom hat den wahren Wert  $I_W = 1,50\text{A}$ . Ein analog anzeigendes Messgerät mit dem Skalenendwert  $I_M = 2,5\text{A}$  zeigt  $I_A = 1,47\text{A}$ . Wie groß sind absoluter Fehler  $I_F$ , relativer Fehler  $F_r$  und relativer Anzeigefehler  $F_{Ar}$ ?

Systematische Fehler:  
(systematic error)

Bestimmter Betrag und bestimmtes Vorzeichen.  
Unrichtiges Ergebnis.  
Bei Kenntnis des Fehlers kann der Messwert



korrigiert werden.

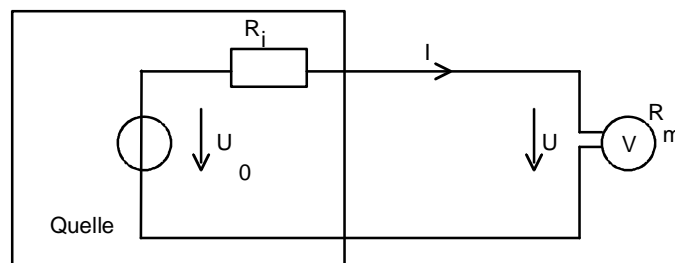
Zufällige Fehler:  
(random error)

Schwankend nach Betrag und Vorzeichen.  
Unsicheres Ergebnis.  
Mit statistischen Methoden kann ein zuverlässiger  
Messwert gewonnen werden.

Sind systematische Fehler nach Betrag und Vorzeichen bekannt, wird das unrichtige Ergebnis korrigiert.



Beispiel (2.3): Es soll die Spannung  $U_0$  bestimmt werden. Der Innenwiderstand  $R_i$  der Quelle und  $R_m$  des Messgerätes sind bekannt. Wie ist das Messergebnis zu berichtigen, damit systematische Fehler ausgeschlossen werden ?



$U_0$  = wahrer Wert     $U$  = Istanzeige

Zufällige Fehler lassen sich mit Methoden der Statistik behandeln

### Statistische Größen (*statistic values*)

Durch mehrfaches Messen der gleichen Größe mit gleichen oder mit verschiedenen Verfahren erhält man infolge der zufälligen Fehler unterschiedliche Messergebnisse. Die Auswertung dieser Ergebnisse mit Hilfe der Statistik ermöglicht Schlüsse auf die Größe des wahren Wertes und die Messunsicherheit.

**Mittelwert** (*mean value*) (Arithmetisches Mittel, linearer Mittelwert). Wiederholt ein Beobachter die gleiche Messung mit denselben Mitteln unter gleichen Bedingungen, so haben alle Einzelwerte gleiches statistisches Gewicht. Der Mittelwert  $\bar{x}$  berechnet sich dann aus den  $n$  Einzelwerten  $x_1$  bis  $x_n$  nach

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

Dieser Wert ist der optimale Wert in dem Sinne, dass die Summe aller Abweichungsquadrate von diesem optimalen Wert zu einem Minimum wird.

Humoristische Anmerkung zum Mittelwert (nach Eugen Roth):

### Mittelwert und Streuung

Ein Mensch, der von Statistik hört,  
denkt dabei nur an Mittelwert.

Er glaubt nicht dran und ist dagegen,  
ein Beispiel soll es gleich belegen:

Ein Jäger auf der Entenjagd  
hat einen ersten Schuss gewagt.  
Der Schuss, zu hastig aus dem Rohr,  
lag eine gute Handbreit' vor.

Der zweite Schuss mit lautem Krach  
lag eine gute Handbreit' nach.  
Der Jäger spricht ganz unbeschwert  
voll Glauben an den Mittelwert:  
Statistisch ist die Ente tot!

Doch wär er klug und nähme Schrot  
- dies sei gesagt ihn zu belehren -  
er würde seine Chancen mehren:  
Der Schuss geht ab, die Ente stürzt,  
weil Streuung ihr das Leben kürzt!

**Standardabweichung** (*standard deviation*). Man kennzeichnet die statistische Schwankung der Einzelwerte um den Mittelwert durch die mittlere quadratische Abweichung, die Standardabweichung

$$s = + \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

Für eine hinreichend große Anzahl von geht  $s$  in den Grenzwert  $\sigma$ , der die Standardabweichung der Grundgesamtheit ist, über. Die relative Standardabweichung  $s_r = s / \bar{x}$  ist der Quotient, aus der Standardabweichung und Mittelwert.

**Vertrauensbereich** (*confidence interval*). Der Mittelwert wird häufig als das Messergebnis einer Messreihe angegeben. Es ist nun keinesfalls sicher, dass dieser Wert gleich dem wahren Wert der Messgröße ist. Mit den Methoden der Statistik lassen sich zwei Grenzwerte, die Vertrauensgrenzen  $v$  angeben, innerhalb derer der wahre Wert mit einer gewissen statistischen Sicherheit  $P$  zu erwarten ist. Der Vertrauensbereich liegt zwischen

$$\bar{x} - v = \bar{x} - \frac{t}{\sqrt{n}} s \quad \text{und} \quad \bar{x} + v = \bar{x} + \frac{t}{\sqrt{n}} s$$

Der Vertrauensfaktor  $t$  als Funktion von  $P$  und der Anzahl der Messungen  $n$  ist nachfolgender Tabelle zu entnehmen. DIN 1319 empfiehlt, der Angabe des Vertrauensbereichs die statistische Sicherheit  $P = 95\%$  zugrunde zu legen.

$n$	$t / \sqrt{n}$ für $P=68,3\%$	$t / \sqrt{n}$ für $P=95\%$	$t / \sqrt{n}$ für $P=99\%$
3	0,76	2,5	5,7
6	0,45	1,05	1,6
10	0,34	0,72	1,03
20	0,23	0,47	0,64
100	0,10	0,20	0,26



Beispiel (2.4): Bei wiederholten Messungen desselben Widerstandes werden folgende Werte abgelesen.

$R_1=783,9\Omega$ ;  $R_2=784,3\Omega$ ;  $R_3=785,2\Omega$ ;  $R_4=784,8\Omega$ ;  $R_5=784,1\Omega$ ;  $R_6=785,2\Omega$

Bestimme den Vertrauensbereich für eine statistische Sicherheit von 95% und gebe das Messergebnis an.

### 2.3.2 Fehlergrenzen (error limits)

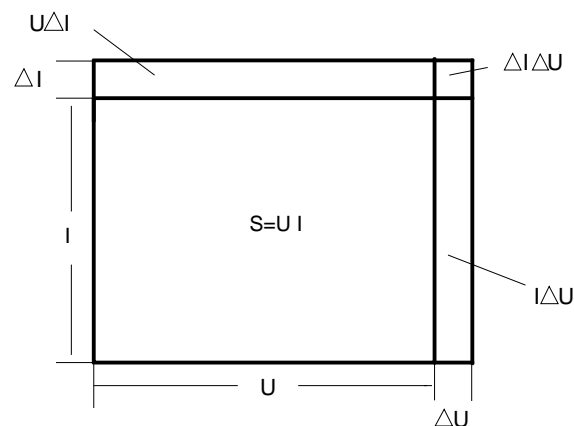
Fehlergrenzen sind die bei Nennbedingungen zulässigen äußersten Abweichungen des Messwertes vom richtigen Wert. Hersteller von Messgeräten geben Garantiefehlergrenzen an und garantieren damit, dass der Fehler des Gerätes innerhalb der Fehlergrenzen liegt. Bei anzeigenden Messgeräten werden die Fehlergrenzen auf den Messbereichsendwert bezogen und ergeben so die Klassenzahl, die in Prozent angegeben wird.

Geräteart	Klassenzahl			
Feinmessgeräte (precision measuring instrument)	0,1	0,2	0,5	
Betriebsmessgeräte (shop test equipment)	1	1,5	2,5	5

### 2.3.3 Fehlerfortpflanzung (error spread)

Wird ein Messergebnis aus mehreren Messwerten gebildet, so gehen die einzelnen Fehler, mit denen die Messwerte behaftet sind, in das Messergebnis ein.

Die Fehlerfortpflanzung soll zunächst am Beispiel der Scheinleistungsmessung erläutert werden. Messgrößen sind die Spannung  $U$  und der Strom  $I$ , die mit Messinstrumenten der Klassen 0,5 für den Spannungsmesser und 1,0 für den Strommesser gemessen wurden. Die Scheinleistung  $S$  berechnet sich zu



Aus der Grafik ist zu entnehmen, dass

$$\Delta S = U \Delta I + I \Delta U + \Delta I \Delta U$$

gilt. Bei hinreichend kleinen Fehlern kann  $\Delta I \Delta U$  gegen die beiden übrigen Summanden vernachlässigt werden. Für den relativen Fehler ergibt sich

$$\frac{\Delta S}{S} = \frac{\Delta U}{U} + \frac{\Delta I}{I}$$

Dieses Ergebnis zeigt, dass sich bei multiplikativer Verknüpfung der Messwerte die relativen Fehler addieren. Nun soll der relative Fehler mit Hilfe der Klassengenauigkeiten (KI) ausgedrückt werden. Seien  $U_E$  und  $I_E$  die Skalenendwerte (*full scale value*) der Messgeräte, so lassen sich die Fehler  $\pm \Delta U$  und  $\pm \Delta I$  durch

$$\pm \Delta U = \frac{KI_U U_E}{100} \quad \text{und} \quad \pm \Delta I = \frac{KI_I I_E}{100}$$

ausdrücken. Damit errechnet sich der relative Fehler der Scheinleistung zu

$$\frac{\Delta S}{S} = \frac{KI_U}{100} \frac{U_E}{U} + \frac{KI_I}{100} \frac{I_E}{I}$$

Aus diesem Ergebnis ist zu ersehen, dass der minimale Fehler der Addition der Klassenangaben entspricht. Hierbei ist Voraussetzung, dass  $U = U_E$  und  $I = I_E$  ist. D.h. minimaler Fehler kann nur dann erreicht werden, wenn die Messgeräte bei Vollaussteuerung (*full scale*) arbeiten.

Sind  $n$  Messgrößen  $x_1, x_2, \dots, x_n$  mit dem zu ermittelnden Ergebnis über

$$y = y(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

verknüpft und die systematischen Fehler (*error*)  $\Delta x_1, \dots, \Delta x_n$  relativ klein, so kann man mit Hilfe des totalen Differentials den Fehler  $\Delta y$  bestimmt werden.

$$\Delta y = \frac{\partial y}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2} \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial y}{\partial x_n} \Delta x_n$$

Beispiel Leistungsmessung:

$$S = U I = S(U, I) \quad \begin{array}{l} S \text{ entspricht } y \\ U \text{ entspricht } x_1 \\ I \text{ entspricht } x_2 \end{array}$$

$$\Delta S = \frac{\partial S}{\partial U} \Delta U + \frac{\partial S}{\partial I} \Delta I$$

$$\Delta S = I \Delta U + U \Delta I$$

Dieses Ergebnis ist identisch mit dem vorher auf andere Weise ermittelten Ergebnis.

Entsprechend kann für die Gesamtfehlergrenze angegeben werden, falls  $G_1$  bis  $G_n$  die Fehlergrenzen der einzelnen Messgeräte darstellen:

$$\pm G_{ys} = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial y}{\partial x_i} G_i \right|$$

$G_{ys}$  ist die sichere Fehlergrenze.

Da es praktisch unwahrscheinlich ist, dass alle Fehler der einzelnen Geräte an der gleichen (positiven oder negativen) Fehlergrenze liegen, ist es unwahrscheinlich, dass die sichere Fehlergrenze in Anspruch genommen wird. Daher wird zusätzlich die wahrscheinliche Fehlergrenze  $G_{yw}$  definiert.

$$\pm G_{yw} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial y}{\partial x_i} G_i \right)^2}$$



Beispiel (2.5) Fehlerrechnung:

Es soll die Leistung an einem ohmschen Widerstand  $R$  gemessen werden. Der Widerstand  $R$  sei genau bekannt und habe den Wert  $1\Omega$ . Der Spannungsabfall  $U$  beträgt  $12\text{ V}$  und die Spannung wurde mit einem Spannungsmesser der Klasse 1 im  $30\text{ V}$  - Bereich gemessen. Bestimmen Sie die Leistung und den maximale Unsicherheit.



Beispiel (2.6) Fehlerrechnung:

Es soll ein Widerstand  $R$  mit seiner sicheren Fehlergrenze bestimmt werden.  $R$  wird aus den Messgrößen  $U$ ,  $I_2$  und  $I_1$  gebildet.  $I_1$  und  $I_2$  wurden mit dem selben Messinstrument im  $100\text{ mA}$  - Bereich mit  $\Delta I_1 = \Delta I_2 = 5\mu\text{A}$  gemessen. Der wahre Wert von  $U = 5\text{ V}$  sei bekannt.

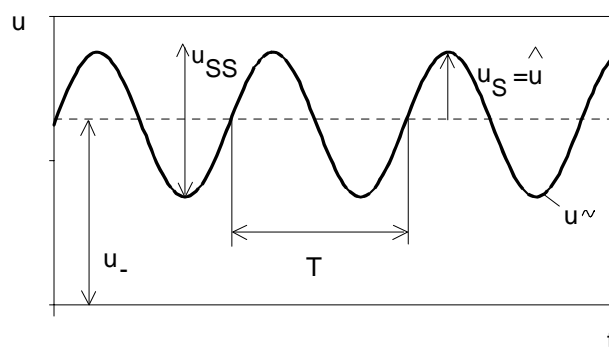
Die Messwerte lauten  $I_1 = 79,9985\text{ mA}$  und  $I_2 = 79,9960\text{ mA}$ .

Zwischen diesen Messgrößen besteht folgender Zusammenhang

$$R = \frac{U}{I_1 - I_2}$$

## 2.4 Wichtige Mittelwerte und Benennungen

Die folgenden Ausführungen werden für Spannungen gemacht und gelten sinngemäß auch für Ströme.



Wechselgrößen: z.B. Wechselspannung, Wechselstrom  
(*alternating quantity*) sind periodische Größen mit Mittelwert Null

Gleichgrößen: Innerhalb des Beobachtungszeitraums konstante Größen

(aperiodic quantity)

Mischgrößen: Bestehen aus Gleich- und Wechselanteil

$$u = u_{\sim} + u_{\sim}$$

### 2.4.1 Der zeitlich lineare Mittelwert (*mean value*)

$$\bar{u} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} u(t) dt$$

Für periodisch zeitabhängige Wechselgrößen ist dieser Wert Null; für Gleichgrößen ist er gleich dem Augenblickswert und für Mischgrößen entspricht er dem Gleichanteil.

Beispiel Sinus:

$$\bar{u} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \hat{u} \sin(\omega t) d\omega t = \frac{\hat{u}}{2\pi} (-\cos(\omega t)) \Big|_0^{2\pi} = \frac{\hat{u}}{2\pi} (-1 - (-1)) = 0$$

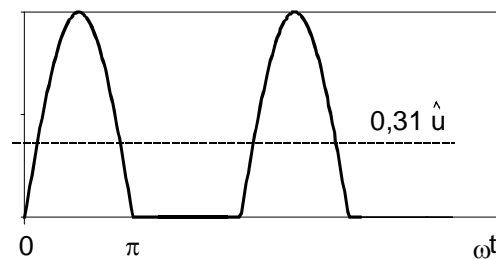
### 2.4.2 Gleichrichtwert (*rectified value*)

Zeitlich linearer Mittelwert des Betrages der Größe  $u$  ist

$$|\bar{u}| = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} |u(t)| dt$$

a) Einweggleichrichtung (*half-wave rectifier*)

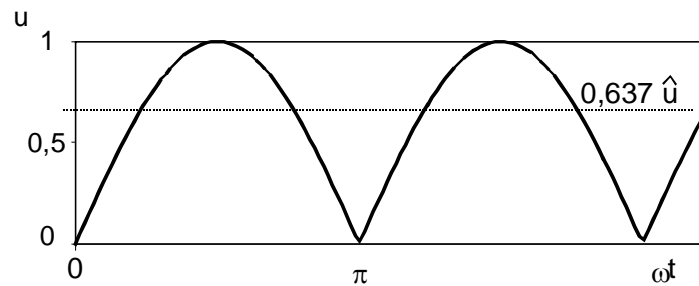
sinusförmige Wechselspannung  $u = \hat{u} \sin(\omega t)$



$$|\bar{u}|_{EW} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \hat{u} \sin(\omega t) d\omega t = \frac{\hat{u}}{2\pi} (-\cos(\omega t)) \Big|_0^{\pi} = \frac{\hat{u}}{2\pi} (1 - (-1)) = \frac{\hat{u}}{\pi} = 0,318 \hat{u}$$

b) Zweiweggleichrichtung (*double-way rectifier*)

$$|\bar{u}|_{ZW} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \hat{u} \sin(\omega t) d\omega t = \frac{\hat{u}}{\pi} (-\cos(\omega t)) \Big|_0^{\pi} = \frac{2 \hat{u}}{\pi} = 0,637 \hat{u}$$

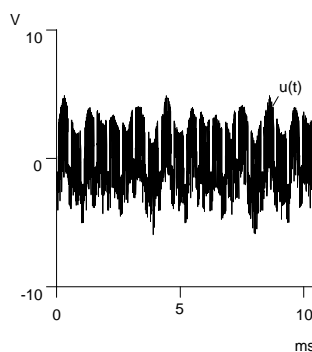


### 2.4.3 Effektivwert (Root Mean Square, RMS)

Der Effektivwert ist in der Messtechnik der wichtigste Mittelwert. Er ist definiert zu

$$U = U_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_t^{t+T} u^2(t) dt}$$

Diese Spannung setzt in einem Widerstand die gleiche mittlere Leistung um wie eine äquivalente Gleichspannung



Spannung  $u$

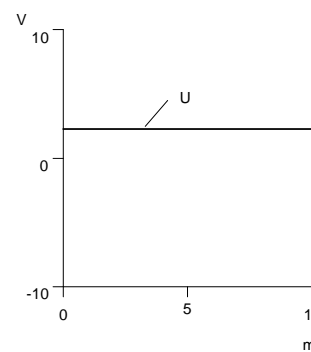


$$P = \frac{1}{T} \int_0^T u i dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{u^2}{R} dt$$

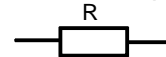
Leistung der Spannung  $u$  an  $R$

$\Leftrightarrow$

$=$   
 $\Downarrow$



Äquivalente Gleichspannung  $U$



$$P = U I = \frac{U^2}{R}$$

Leistung der Gleichspannung an  $R$

$$P = \frac{U^2}{R} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{u^2}{R} dt$$

Bei sinusförmiger Wechselgröße gilt:

$$U^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \hat{u}^2 \sin^2(\omega t) d\omega t = \frac{\hat{u}^2}{\pi} \left( -\frac{1}{4} \sin(2\omega t) + \frac{\omega t}{2} \right)_0^\pi = \frac{\hat{u}^2}{2} \quad \text{bzw.}$$

$$U = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}} = 0,707 \hat{u}$$

Bei nicht sinusförmigen Größen gilt unter der Voraussetzung dass ein periodisches Signal vorliegt, das nach Fourier zerlegt werden kann.

$$U = \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + U_2^2 + \dots}$$



Beispiel (2.7): Bestimme den Effektivwert der Spannung  $u(t) = 5V + 3V \sin(\omega t)$

#### 2.4.4 Kenngrößen (*characteristics*)

a) Scheitelfaktor (*Crestfactor*)

$$F_C = \frac{|\text{Scheitelwert}|_{\max}}{\text{Effektivwert}} = \frac{|\hat{u}|_{\max}}{U}$$

b) Formfaktor (*form factor*)

$$F_F = \frac{\text{Effektivwert}}{\text{Gleichrichtwert}} = \frac{U}{|\bar{u}|}$$

Für sinusförmige Größen ergibt sich bei Zweiweggleichrichtung  $F_{\sin} = \frac{0,707\hat{u}}{0,637\hat{u}} = 1,11$

c) Grundswingungsgehalt (fundamental factor)

$$g = \frac{U_1}{U}$$

d) Klirrfaktor (distortion factor)

Der Klirrfaktor ist das Verhältnis des Effektivwertes aller Oberschwingungen zum Gesamteffektivwert.

$$k = \frac{\sqrt{U_2^2 + U_3^2 + U_4^2 + \dots}}{U}$$

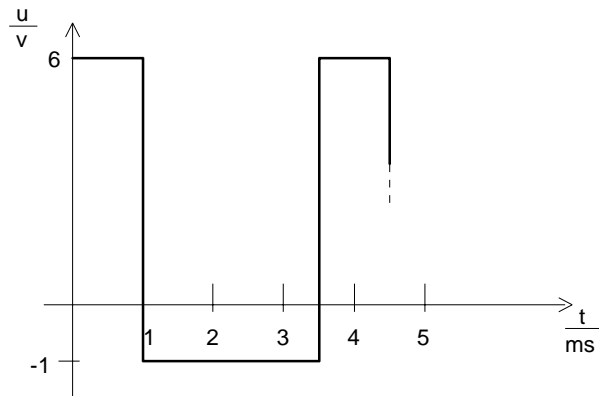


Beispiel (2.8): Berechne den Formfaktor einer einweggleichgerichteten Spannung



Beispiel (2.9):

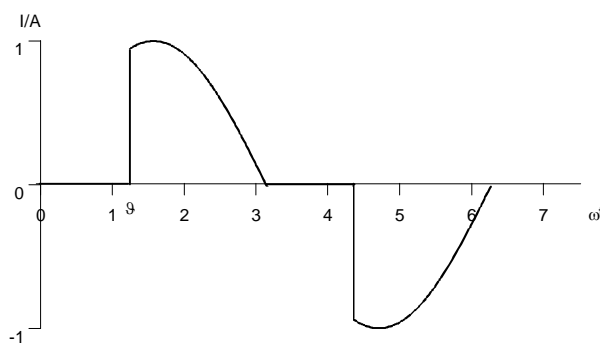




Für nebenstehende Spannung sollen die Werte  $\bar{u}$ ;  $|\bar{u}|$ ;  $U$ ;  $F_F$ ;  $F_C$  berechnet werden.



Beispiel (2.10):



Bestimme den Effektivwert des abgebildeten Stromes in Abhängigkeit des Phasenanschnittswinkels  $\vartheta$ , wenn  $\vartheta$  in den Grenzen von  $0 \dots \pi$  variiert werden kann. Das Ergebnis ist für die Grenzfälle  $\vartheta = 0$  und  $\vartheta = \pi$  zu überprüfen.

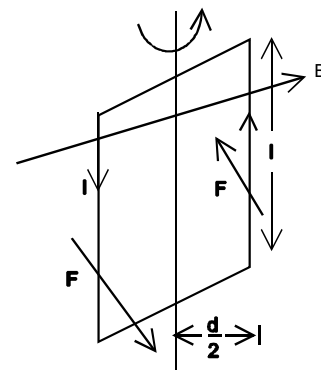
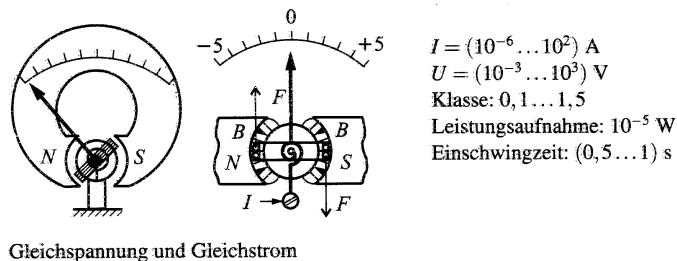
### 3 Die klassischen Messgeräte und ihre Anwendung

Diese Geräte werden hier nur kurz behandelt. In der Praxis sind diese Geräte immer noch weit verbreitet.

#### 3.1 Beschriftung von Messwerken

	Drehspulmeßwerk mit Dauermagnet, allgemein		Isolierter Thermoumformer
	Drehspul-Quotientenmeßwerk		Drehspulgerät mit eingebautem Thermoumformer
	Drehmagnetmeßwerk		Gleichrichter
	Drehmagnet-Quotientenmeßwerk		Drehspulgerät mit eingebautem Gleichrichter
	Dreheisenmeßwerk		Magnetische Schirmung
	Dreheisen-Quotientenmeßwerk		Elektrostatische Schirmung
	Elektrodynamisches Meßwerk, eisenlos	ast.	Astatisches Meßwerk
	Elektrodynamisches Quotientenmeßwerk, eisenlos	—	Gleichstrom
	Elektrodynamisches Meßwerk, eisengeschlossen	~	Wechselstrom
	Elektrodynamisches Quotientenmeßwerk, eisengeschlossen	~	Gleich- und Wechselstrom
	Induktionsmeßwerk		Drehstromgerät mit einem Meßwerk
	Induktions-Quotientenmeßwerk		Drehstromgerät mit zwei Meßwerken
	Hitzdrahtmeßwerk		Drehstromgerät mit drei Meßwerken
	Bimetallmeßwerk		Senkrechte Gebrauchslage (Nennlage)
	Elektrostatisches Meßwerk		Waagerechte Gebrauchslage
	Vibrationsmeßwerk		Schräge Gebrauchslage, z. B. 60°
	Thermoumformer, allgemein		Zeigernullstellung
			Prüfspannungszeichen (500 V)
			Prüfspannung höher als 500 V, z. B. 2 kV

### 3.2 Das Drehspulmessgerät (moving coil instrument)



Drehspule (eine Windung)  
W = Windungszahl

Das elektrische Moment ist im homogenen Magnetfeld ( $B$  konst. über dem Winkelbereich) unabhängig vom Ausschlagwinkel.

Kraft :  $F = I W B$

Drehmoment :  $M_l = F \cdot \frac{d}{2} = I W A B$  mit  $A$  = Spulenfläche

Damit das Moment  $M_l$  nicht wie beim Gleichstrommotor zu einer dauernden Umdrehung der Spule führt, ist diese durch eine Feder gefesselt. Das von der Feder ausgeübte Moment nimmt mit dem Ausschlagwinkel  $\alpha$  zu. Es gilt für das Drehmoment der Feder  $M_D = D\alpha$  wobei  $D$  die Drehfederkonstante ist.

Der Zeiger stellt sich im stationären Fall so ein, dass  $M_l = M_D$  gilt. Der Dauerausschlag wird daher  $\alpha = \frac{I W A B}{D}$

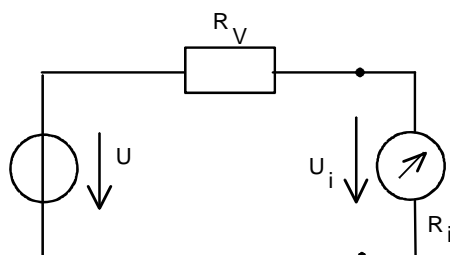
Die Stromempfindlichkeit  $S$  (*sensitivity*) ist daher  $S = \frac{\alpha}{I} = \frac{W A B}{D}$

#### 3.2.1 Das Drehspulinstrument zur Strom- und Spannungsmessung

Mit dem Messwerk können nur Ströme und Spannungen in einem engen Bereich gemessen werden (z. B.  $100\mu A$  bzw.  $50mV$ ). Durch Vor- und Nebenwiderstände lassen sich die Messbereiche erweitern.

*Erweiterung des Spannungsmessbereiches*

Zur Erweiterung kann ein Vorwiderstand in Serie mit dem Messwerk geschaltet werden.



$$\frac{U}{U_i} = \frac{R_V + R_i}{R_i}$$

Erweiterung auf das  $n$ -Fache

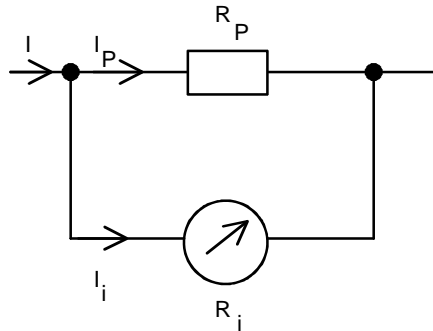
$$n = \frac{U}{U_i} \mapsto R_V = (n-1)R_i$$



Beispiel (3.1): Der 100 V - Bereich eines Spannungsmessers mit dem Kennwiderstand  $20 \text{ k}\Omega/\text{V}$  soll auf 300 V erweitert werden. Bestimme  $R_V$ .

### Erweiterung des Strommessbereiches

Die Erweiterung erfolgt mit einem Nebenwiderstand (*shunt*)



$$I = I_P + I_i \text{ und } n = \frac{I}{I_i}$$

$$\frac{I}{I_i} = 1 + \frac{I_P}{I_i} = 1 + \frac{R_i}{R_P} \text{ Damit folgt}$$

$$R_P = \frac{1}{n-1} R_i$$



Beispiel (3.2): Der 10A Strommessbereich eines Strommessers, der bei 10A einen Spannungsabfall von 0,3V hat, soll auf 40A erweitert werden. Bestimme  $R_P$ .



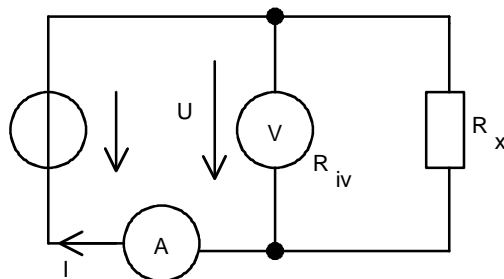
Beispiel (3.3): Ein Vielfachinstrument mit dem Kennwiderstand  $R_{iV}/V=1 \text{ k}\Omega/\text{V}$  zeigt im 100 V - Bereich eine Spannung von 50 V und im 30 V - Bereich eine Spannung von 23,1 V. Wie groß sind Innenwiderstand  $R_x$  und Leerlaufspannung  $U_0$  der Ersatzspannungsquelle.

### 3.2.2 Das Drehspulinstrument als Vielfachmesser

Siehe Umdruck

### 3.2.3 Messung von ohmschen Widerständen mit Strom- und Spannungsmessung

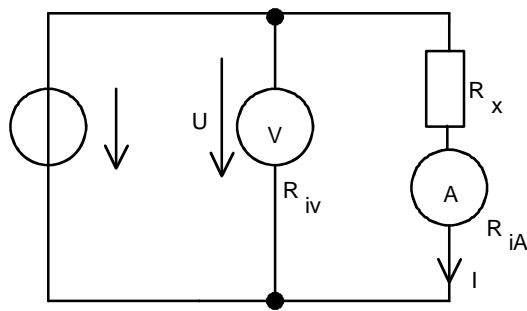
a) Rel. kleine Widerstände mit spannungsrichtiger Schaltung (Stromfehlerschaltung)



$$R_x = \frac{U}{I - \frac{U}{R_{iV}}} = \frac{U}{I} \frac{1}{1 - \underbrace{\frac{U}{IR_{iV}}}_{\text{Korrektur}}}$$

$$R_x \approx \frac{U}{I} \text{ für } R_x \ll R_{iV}$$

b) Rel. große Widerstände mit stromrichtiger Schaltung (Spannungsfehlerschaltung)



$$R_x = \frac{U}{I} - \underbrace{R_{iA}}_{\text{Korrektur}}$$

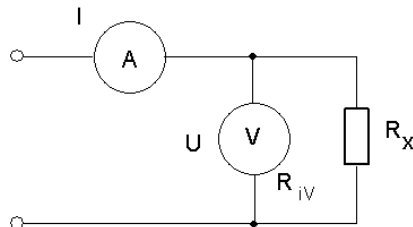
$$R_x \approx \frac{U}{I} \text{ für } R_x \gg R_{iA}$$

## Fehler der Widerstandsbestimmung bei Strom- und Spannungsfehlerschaltung

### Bestimmung der systematischen Fehler

#### zu a) Stromfehlerschaltung

Bei dieser Schaltung wird die Spannung richtig, d. h. direkt über dem unbekannten Widerstand  $R_x$  und der Strom falsch gemessen. Der Strom ist um den Strom durch das Voltmeter zu groß. Zunächst soll der systematische Fehler der Schaltung berechnet werden.



$R_x$  : unbekannter Widerstand  
 $R_{iV}$ : Innenwiderstand des Voltmeters

Schaltung 1:

Ohne Korrektur gilt:

$$R = \frac{U}{I} \quad (1.1)$$

Berücksichtigt man den Strom durch das Voltmeter, so folgt für den gesuchten Widerstand  $R_x$

$$R_x = \frac{U}{I - \frac{U}{R_{iV}}} = \frac{U}{I} \frac{1}{1 - \frac{U}{IR_{iV}}} = R \frac{1}{1 - \frac{R}{R_{iV}}} \quad (1.2)$$

Der Schaltungsfehler  $f_{s1}$  ergibt sich mit (1.1) und (1.2) zu

$$f_{s1} = \frac{R - R_x}{R_x} = \frac{R}{R_x} - 1 = -\frac{R}{R_{iV}} \quad (1.3)$$

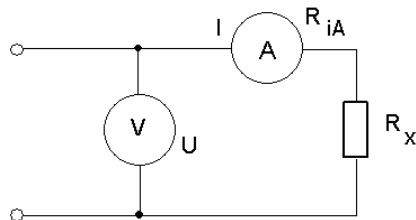
Wird der Schaltungsfehler nicht durch den fehlerhaften Widerstand  $R$ , sondern durch  $R_x$  ausgedrückt, so folgt aus (1.2)

$$R = \frac{R_x}{1 + \frac{R_x}{R_{iV}}} \quad (1.4)$$

Damit ergibt sich für  $f_{s1}$

$$f_{S1} = -\frac{1}{1 + \frac{R_{iV}}{R_x}} \quad (1.5)$$

## 1.2 Spannungsfehlerschaltung



$R_x$  : unbekannter Widerstand  
 $R_{iA}$ : Innenwiderstand des  
 Amperemeters

Schaltung 2:

Bei dieser Schaltung wird der Strom durch  $R_x$  direkt gemessen. Die Spannung  $U$  setzt sich hingegen aus dem Spannungsabfall über  $R_x$  und über dem Spannungsabfall am Amperemeter zusammen.

Ohne Korrektur folgt:

$$R = \frac{U}{I} \quad (1.6)$$

Berücksichtigt man, dass sich  $R$  aus  $R_x$  und  $R_{iA}$  zusammensetzt, so folgt für den gesuchten Widerstand  $R_x$

$$R_x = \frac{U}{I} - R_{iA} \quad (1.7)$$

Somit ergibt sich der Schaltungsfehler  $f_{S2}$  zu

$$f_{S2} = \frac{R - R_x}{R_x} = \frac{R - (R - R_{iA})}{R_x} = \frac{R_{iA}}{R_x} \quad (1.8)$$

## 2. Berechnung der Fehler durch Fehlerfortpflanzung

Die Berechnung der Fehler erfolgt mit dem Totalen Differential. Bei den beiden Schaltungsarten soll vorausgesetzt werden, dass die Innenwiderstände von Voltmeter und Amperemeter ohne Fehler bekannt sind.

## 2.1 Fehler von $R_x$ bei der Schaltung 1

Es gilt

$$R_x = \frac{U}{I - \frac{U}{R_{IV}}} = R_x(U, I, R_{IV}) \quad (2.1)$$

$R_x$  ist also vom Strom als auch von der Spannung sowie von deren Verknüpfung abhängig. Für den maximalen Fehler von  $R_x$  folgt

$$\pm \Delta R_x = \left| \frac{\partial R_x}{\partial U} \Delta U \right| + \left| \frac{\partial R_x}{\partial I} \Delta I \right| \quad (2.2)$$

$$\pm \Delta R_x = \left| \frac{I}{\left( I - \frac{U}{R_{IV}} \right)^2} \Delta U \right| + \left| \frac{-U}{\left( I - \frac{U}{R_{IV}} \right)^2} \Delta I \right| \quad (2.3)$$

Führt man die relativen Fehler  $f_{rU} = |\Delta U / U|$  und  $f_{rI} = |\Delta I / I|$  ein, so ergibt sich aus (2.3)

$$\pm \Delta R_x = \frac{IU}{\left( I - \frac{U}{R_{IV}} \right)^2} (f_{rU} + f_{rI}) \quad (2.4)$$

Setzt man in (2.4) den in (2.1) gefundenen Widerstand  $R_x$  ein, so ergibt sich

$$\pm \Delta R_x = R_x^2 \frac{I}{U} (f_{rU} + f_{rI}) \quad (2.5)$$

Beachtet man, dass  $R = U/I$  gilt und drückt  $R$  nach (1.4) durch  $R_x$  aus, dann erhält man

$$\pm \Delta R_x = R_x \left( 1 + \frac{R_x}{R_{IV}} \right) (f_{rU} + f_{rI}) \quad (2.6)$$

oder für den relativen Fehler von  $R_x$

$$\pm \frac{\Delta R_x}{R_x} = f_{Rx} = \left( 1 + \frac{R_x}{R_{IV}} \right) (f_{rU} + f_{rI}) = K_1 (f_{rU} + f_{rI}) \quad (2.7)$$

Dabei ist  $K_1$  der Vergrößerungsfaktor.

## 2.2 Fehler von $R_x$ bei der Schaltung 2

Wendet man hier ebenfalls das totale Differential auf (1.7) an, so erhält man

$$\pm \Delta R_x = \left| \frac{\partial R_x}{\partial U} \Delta U \right| + \left| \frac{\partial R_x}{\partial I} \Delta I \right| = \left| \frac{\Delta U}{I} \right| + \left| -\frac{U \Delta I}{I^2} \right| = \left| \frac{1}{I} U \frac{\Delta U}{U} \right| + \left| \frac{U}{I} \frac{\Delta I}{I} \right| \quad (2.8)$$

oder mit den relativen Spannungs- und Stromfehlern

$$\pm \Delta R_x = \frac{U}{I} (f_{rU} + f_{rI}) \quad (2.9)$$

Mit (1.7) folgt

$$\pm \Delta R_x = (R_x + R_{iA}) (f_{rU} + f_{rI}) \quad (2.10)$$

Somit ergibt sich für den relativen Fehler von  $R_x$

$$\pm \frac{\Delta R_x}{R_x} = f_{Rx} = \left( 1 + \frac{R_{iA}}{R_x} \right) (f_{rU} + f_{rI}) = K_2 (f_{rU} + f_{rI}) \quad (2.11)$$

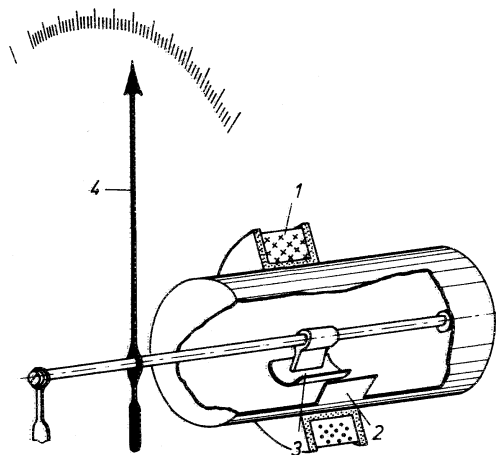
## 3. Zusammenfassung

Mit Hilfe der Korrekturrechnung lassen sich die systematischen Fehler, die bei den beiden Schaltungsarten auftreten, durch einfache Berichtigung beseitigen (Gleichungen 1.2 und 1.7). Hierbei müssen lediglich die Innenwiderstände der beteiligten Messgeräte bekannt sein.

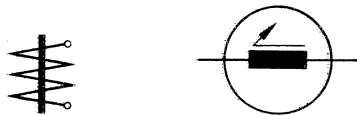
Im zweiten Abschnitt wurden mit Hilfe der Fehlerfortpflanzungsrechnung die relativen Fehler der Widerstandsbestimmung ermittelt. Hier zeigt sich, dass allein kleine relative Spannungs- bzw. Stromfehler  $f_{rU}$  und  $f_{rI}$  noch keine Gewähr für ein brauchbares Messergebnis bieten, da die Summe der Fehler mit den Vergrößerungsfaktoren  $K_1$  bzw.  $K_2$  multipliziert sind. Nur wenn bei der Schaltung 1 der Innenwiderstand des Spannungsmessers viel größer ist als der zu bestimmende Widerstand bleibt der Vergrößerungsfaktor  $K_1$  klein. Bei der Schaltung 2 ergeben sich nur dann kleine Fehler, wenn das Amperemeter einen relativ kleinen Widerstand im Vergleich zum zu messenden Widerstand aufweist.



### 3.3 Das Dreheisenmessinstrument (moving iron instrument)



1 Spule, 2 festes Eisenplättchen, 3 bewegliches Eisenplättchen, 4 Zeiger



Man erkennt die Spule, die vom Messstrom durchflossen wird. Im Zentrum der Spule befinden sich zwei Weicheisenplättchen. Eines davon ist am Spulenkörper befestigt, das andere an der Zeigerwelle. Der Messstrom erzeugt ein Magnetfeld welches beide Eisenplättchen gleichsinnig magnetisiert. Dadurch wird das drehbar angeordnete Plättchen abgestoßen - der Zeiger bewegt sich.

#### Aufbau und Wirkungsweise

Die Kraft  $F_a$  der sich abstoßenden Eisenplättchen ist proportional dem Quadrat der magnetischen Flussdichte  $B$ .

$$F_a \sim B^2$$

Damit wird das Ablenkmoment bei einem Radius  $r$  zu

$$M_a \sim rB^2$$

Da der magnetische Kreis zum größten Teil aus Luft besteht, sind Flussdichte und der Strom durch das Messwerk proportional  $B \sim i_i$ . Wie beim Drehspulinstrument ist das von der Rückstellfeder ausgeübte Moment proportional dem Ausschlagwinkel  $\alpha$ , so dass

$$\alpha \sim i_i^2$$

gilt.

Ist die Frequenz des Messstromes hoch genug ( $f > 15\text{Hz}$ ), so bildet die Massenträgheit des beweglichen Organs den Mittelwert und es verbleibt das Effektivwertquadrat des Stromes

$$\alpha \sim \frac{1}{T} \int_0^T i_i^2 dt = I_i^2$$

Durch entsprechende Formgebung der Bleche wird

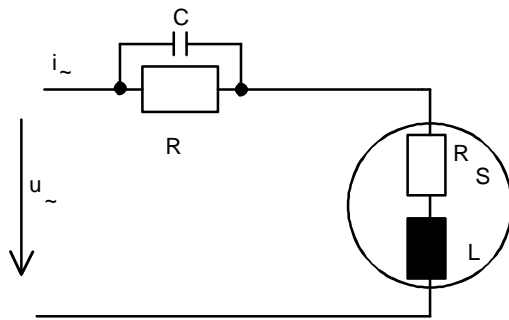
$$\alpha \sim I_i$$

erreicht.

Der Effektivwert des Stromes wird auch bei nicht sinusförmigem Stromverlauf angezeigt, sofern die Oberschwingungen des Messstromes den Frequenzbereich des Instruments nicht überschreiten (zulässig z. B. 1kHz)

### Spannungsbereichserweiterung

Sind Spannungen zu messen, so muss die Impedanz der Feldspule  $\underline{Z}_S = R_S + j\omega L$  beachtet werden, da sich bei Messbereichserweiterungen mit Widerständen ein komplexer Spannungsteiler ergibt. Die Erweiterung kann mit einem RC Glied vorgenommen werden. Es wird dabei versucht, den Spannungsteiler frequenzunabhängig zu machen.



Der eingekreiste Teil stellt die Spule des Messwerks dar.

Es gilt für den komplexen Widerstand an den Eingangsklemmen:

$$\underline{Z} = R_S + j\omega L + R \parallel C = R_S + j\omega L + \frac{R}{1 + j\omega RC}$$

Die Aufteilung in Real- und Imaginärteil ergibt:

$$\underline{Z} = R_S + \frac{R}{1 + (\omega RC)^2} + j\omega \left( L - \frac{R^2 C}{1 + (\omega RC)^2} \right)$$

Durch konstruktive Maßnahmen kann erreicht werden, dass  $(\omega RC)^2 \ll 1$  wird. Das vorgeschaltete RC-Glied ist so zu bemessen, dass  $L = R^2 C$  ist. Damit verschwindet der Imaginärteil und der Realteil ist unabhängig von der Frequenz.  $Z$  ist nicht mehr komplex und wird

$$Z = R_S + R$$

Der Nachteil dieses Messgerätes ist sein hoher Eigenverbrauch, der zwischen 0,1 und 1 W liegen kann (zum Vergleich Drehspulinstrument  $10^{-5}$  W).

### 3.4 Digitalmultimeter (digital multimeter)

Digitalmultimeter (DMM) werden heute für Spannungs-, Strom- und Widerstandsmessungen mit Auflösungen (*resolution*) bis zu 8 ½ Stellen angeboten. Hierbei werden folgende Begriffe verwendet:

Auflösung = Messbereich/Anzeigeumfang

Beispielsweise hat ein DMM einen Spannungsbereich von  $\pm 10\text{V}$  und 2000 unterscheidbare Stufen (Anzeigeumfang=2000), so ist die Auflösung, d. h. die Bedeutung der letzten Stelle  $20\text{V}/2000=10\text{mV}$ . Jede Stelle, die nicht von 0 bis 9 variieren kann, wird üblicherweise als "halbe" Stelle bezeichnet.

Beispiele für DMMs

Anzeigeumfang	Stellenzahl
1 999	3 ½
6 000	3 ½
240 000	5 ½
190 000 000	8 ½

#### 3.4.1 Fehlerangabe bei DMMs

Verschiedene Angaben sind gebräuchlich:

Fehlergrenze =  $\pm(\% \text{ vom Messwert} + \% \text{ vom Endwert})$

Fehlergrenze =  $\pm(\% \text{ vom Messwert} + \text{Digits})$

Beispiel: Ein DMM hat eine Fehlergrenze im Spannungsbereich von  $\pm(0,1 \% \text{ vom Messwert} + 6 \text{ Digits})$ . Der Anzeigeumfang ist 5000. Es wird die Spannung 4 V im 5 V - Bereich und im 50 V - Bereich gemessen. Bestimme die jeweiligen Messfehler.

Lösung: Die Auflösung im 5 V Bereich beträgt  $5\text{V}/5000=1\text{mV}$  entspricht 1 Digit (Bedeutung der kleinsten Stelle) und im 50 V Bereich  $50/5000=10\text{mV}$ . Damit ergeben sich die Unsicherheiten zu

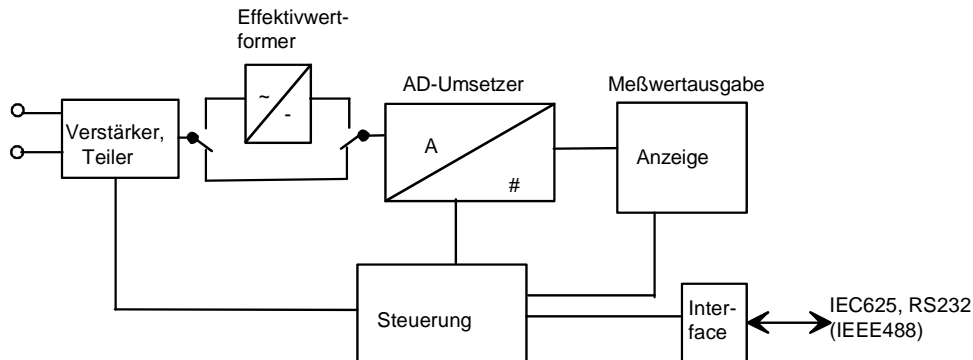
$$\pm(0,1 \text{ 4 V}/100 + 6 \times 1\text{mV}) = \pm 10 \text{ mV}$$

$$\pm(0,1 \text{ 4 V}/100 + 6 \times 10 \text{ mV}) = \pm 64 \text{ mV}$$

Man erkennt, dass die Angabe der Digits ihre Entsprechung bei der Klassenangabe bei analog anzeigenden Messgeräten hat. Auch bei DMMs muss der Bereich möglichst gut ausgenutzt werden, damit die Messunsicherheit möglichst klein bleibt.

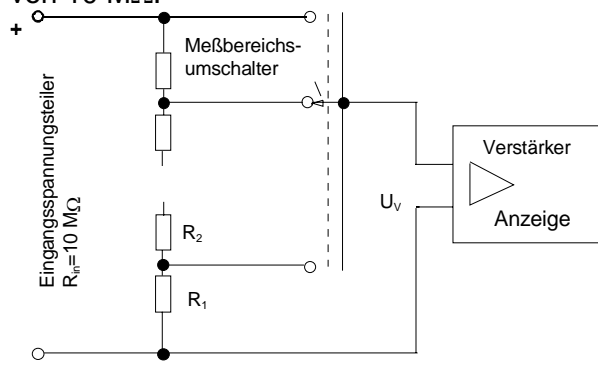
### 3.4.2 Aufbau und Funktion von DMMs

#### Blockschaltbild



#### Verstärker, Teiler

Meist haben die DMMs im Spannungsmessbereich einen konstanten Eingangswiderstand von  $10\text{ M}\Omega$ .

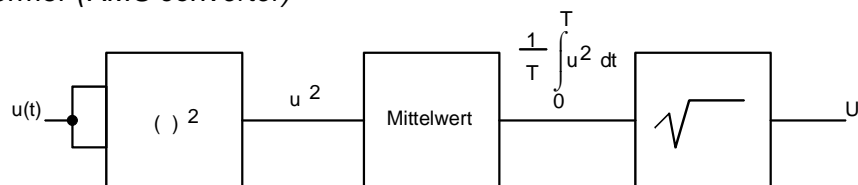


Nebenstehendes Bild zeigt den Eingangsspannungsteiler eines DMM. Der Eingangsstrom in den Verstärker kann vernachlässigt werden.



Beispiel (3.4): Entwerfe einen Spannungsteiler für die Spannungsbereiche 0,1 V, 1 V und 100 V mit einem konstanten Eingangswiderstand von  $10\text{ M}\Omega$  (siehe Bild oben). Am nachfolgenden Verstärker sollen beim Bereichsendwert (full scale)  $U_v = 100\text{ mV}$  anstehen.

#### Effektivwertformer (RMS converter)

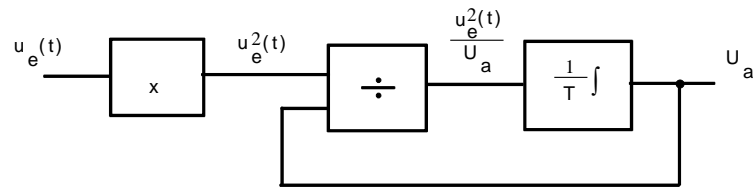


Die Bildung des Effektivwertes erfolgt entsprechend der Definitionsgleichung für den

$$\text{Effektivwert } U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt}.$$



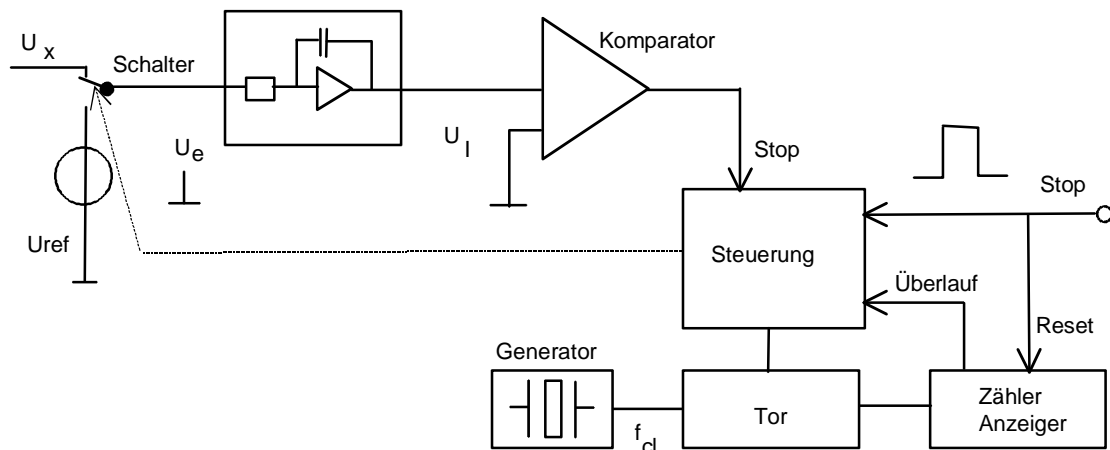
Beispiel (3.5): Gegeben ist die nachfolgende Schaltung zur Bestimmung des Effektivwertes. Leiten Sie den Zusammenhang zwischen  $U_a$  und  $u_e(t)$  her und zeigen Sie dass es sich um einen Effektivwertbildner handelt.



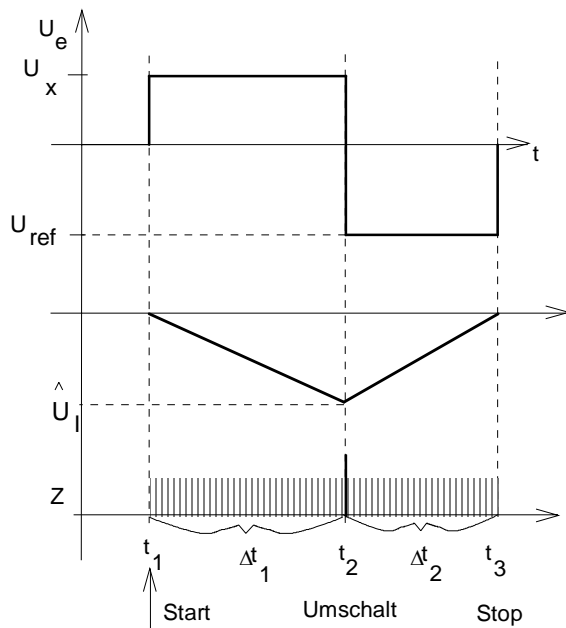
### AD-Umsetzer

Meist wird ein integrierendes Mehrrampenverfahren benutzt, um Messstörungen unterdrücken zu können.

### Zweirampenverfahren (*dual slope integration*)



Das Messsignal  $U_x$  lädt während einer festen Zeit ( $\Delta t_1$ ) den vorher entladenen Kondensator eines Integrierers auf. Anschließend wird die Zeit ( $\Delta t_2$ ) gemessen, die notwendig ist, um den Kondensator bei vorgegebenem Entladestrom (durch  $U_{Ref}$ ) zu entladen. Zur Festlegung der Zeit  $\Delta t_1$  setzt man den Zähler auf einen vorgegebenen Wert  $Z=K$  und zählt rückwärts. Es ist die Zeit  $\Delta t_1$  durch  $\Delta t_1 = K/f_{Cl}$  festgelegt ( $f_{Cl}$  = Clockfrequenz). Ist beispielsweise  $K=100000$  und  $f_{Cl} = 1 \text{ MHz}$ , so wird  $\Delta t_1 = 100 \text{ ms}$ .



Während  $\Delta t_1$  gilt  $U_i = -\frac{1}{RC} \int U_x dt$ . Im Umschaltzeitpunkt  $t_2$  (Nulldurchgang des Zählers) gilt  $\hat{U}_i = -\frac{1}{RC} \int_{t_1}^{t_2} U_x dt$  und es wird

sofort auf die Referenzspannung (umgekehrtes Vorzeichen wie  $U_x$ ) umgeschaltet. Während  $\Delta t_2$  gilt  $U_i(t) = \hat{U}_i + \frac{1}{RC} \int U_{Ref} dt$ . Der gesamte Ablauf wird durch den Nullwert - Komparator zum Zeitpunkt  $t_3$  gestoppt, sobald  $U_i(t)=0$  gilt.

$$U_i(t_3) = 0 = \hat{U}_i + \frac{1}{RC} \int_{t_2}^{t_3} U_{Ref} dt$$

$$\text{Es gilt } \frac{1}{RC} \int_{t_1}^{t_2} U_x dt = \frac{1}{RC} \int_{t_2}^{t_3} U_{Ref} dt \text{ oder } U_x = U_{Ref} \frac{t_3 - t_2}{t_1 - t_2} = U_{Ref} \frac{\Delta t_2}{\Delta t_1}$$

Während  $\Delta t_2$  wird mit  $f_{Cl}$  eingezählt und der Vorgang zum Zeitpunkt  $t_3$  gestoppt. Der Zählerstand zum Zeitpunkt  $t_3$  sei  $n = \Delta t_2 f_{Cl}$  und man erhält daher als Messergebnis

$$U_x = \frac{U_{Ref}}{k} n$$

Wie diese Gleichung zeigt, ist das Messergebnis unabhängig von den Parametern  $R$ ,  $C$  und  $f_{Cl}$ . Als Forderung existiert allerdings, dass diese Größen während eines Messzyklusses  $t_1 \dots t_3$  konstant sind. Dagegen spielt die Langzeitdrift der Werte keine Rolle. Messunsicherheiten  $< 10^{-5}$  sind mit DMMs möglich.

Um häufig vorkommende netzfrequente Störungen zu unterdrücken, wird für  $\Delta t_1$  ein ganzzahliges Vielfaches der Netzperiodendauer gewählt.

### 3.4.3 Einfluss sinusförmiger Störungen auf das Messergebnis

Die Messgröße sei  $U_x$  und die Störgröße lasse sich durch  $u_s = \hat{u}_s \sin(\omega t - \varphi)$  beschreiben. Die Integrationszeit sei  $\Delta t_i = T_i$ . Damit ergibt sich die Messgröße mit Störspannung bei einer Störkreisfrequenz  $\omega_s$  zu  $u(t) = U_x + \hat{u}_s \sin(\omega_s t - \varphi)$ . Integrierende Umsetzer (z. B. das vorgestellte Dual Slope Verfahren) bilden den Mittelwert über die Integrationszeit  $T_i$ .

$$\bar{u} = U_x + \frac{1}{T_i} \int_0^{T_i} \hat{u}_s \sin(\omega_s t - \varphi) dt. \text{ Der Mittelwert der Störgröße ist}$$

$$\bar{u}_s = \frac{1}{T_i} \int_0^{T_i} \hat{u}_s \sin(\omega_s t - \varphi) dt = \frac{\hat{u}_s}{T_i \omega_s} [-\cos(\omega_s T_i - \varphi) + \cos(\varphi)]$$

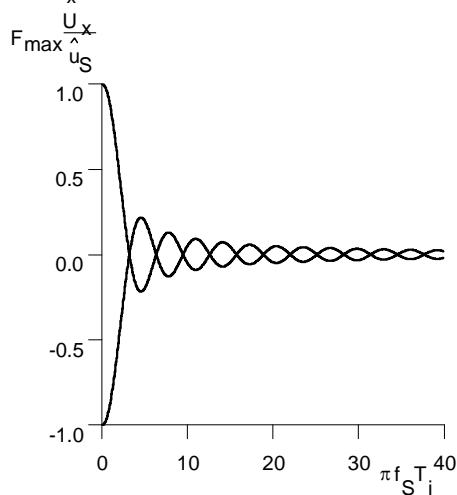
$$\bar{u}_s(T_i) = \frac{\hat{u}_s}{\omega_s T_i} \left[ 2 \sin\left(\frac{\omega_s T_i}{2}\right) \sin\left(\frac{\omega_s T_i}{2} - \varphi\right) \right] = \hat{u}_s \frac{\sin(\pi f_s T_i)}{\pi f_s T_i} \sin\left(\frac{\omega_s T_i}{2} - \varphi\right)$$

$$\text{mit } \frac{\sin(x)}{x} = \text{SI}(x) = \text{Spaltfunktion folgt } \bar{u}_s(T_i) = \hat{u}_s \text{SI}(\pi f_s T_i) \sin\left(\frac{\omega_s T_i}{2} - \varphi\right)$$

Hieraus folgt für die relative Messunsicherheit

$F_{\text{rel}} = \frac{\hat{u}_S}{U_x} \text{SI}(\pi f_S T_i) \sin\left(\frac{\omega_S T_i}{2} - \varphi\right)$ , wobei zu beachten ist, dass  $-1 < \sin(\pi f_S T_i - \varphi) < +1$  ist. Der maximal mögliche relative Fehler ist daher

$$F_{\text{max}} = \pm \frac{\hat{u}_S}{U_x} \text{SI}(\pi f_S T_i)$$



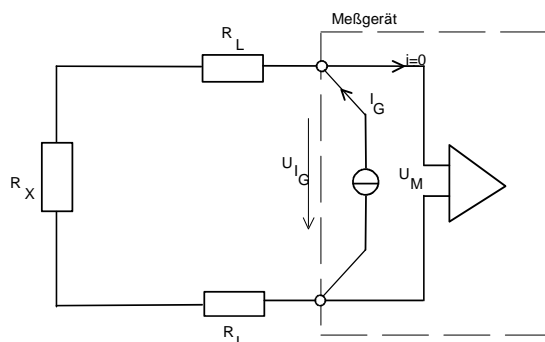
Nebenstehendes Bild zeigt den normierten Verlauf des maximalen Fehlers, der mit wachsendem Produkt aus Störfrequenz und Integrationszeit abnimmt. Der Fehler wird immer dann Null, wenn  $f_S T_i = n$  mit  $n \in \mathbb{N}$  bzw. wenn  $T_i = n T_S$  gilt. Um häufig vorkommende netzfrequente Störungen zu unterdrücken, wird für  $\Delta t_i = T_i$  ein ganzzahliges Vielfaches der Netzperiodendauer gewählt.

### 3.4.4 Messen mit DMMs

#### 3.4.4.1 Widerstandsmessung

DMMs enthalten zur Widerstandsmessung eine Konstantstromquelle. Es wird bei bekanntem Strom der Spannungsabfall über dem Prüfobjekt ermittelt und daraus der Widerstandswert ermittelt.

##### Zweidrahtmessung



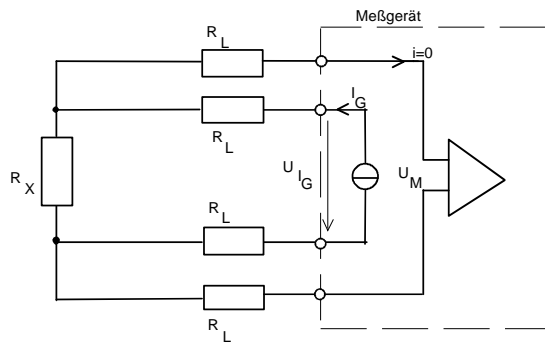
Seien  $R_L$  die unvermeidlichen Zuleitungswiderstände, so fließt zwar der Strom  $I_G$  durch  $R_x$ ; die Messspannung  $U_M$  wird aber um den Spannungsabfall an den Zuleitungswiderständen zu groß gemessen.

$$U_M = I_G (R_x + 2R_L)$$

Der Widerstand ist also um  $2 R_L$  zu groß.

Sind relativ kleine Widerstände ( $\text{m}\Omega$  - Bereich) zu messen, so ist eine Vierdrahtmethode vorzuziehen. Nicht alle DMMs verfügen über diese Messmöglichkeit.

##### Vierdrahtmessung

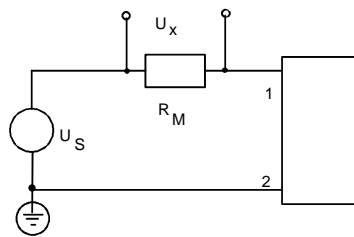


Der Strom  $I_G$  fließt weiterhin durch  $R_x$ . Es ist  $U_M = U_{I_G}$ , da die äußeren Spannungsanschlussleitungen stromlos sind und an ihnen daher keine Spannung abfallen kann. Es sind also der Strom durch  $R_x$  und der Spannungsabfall an  $R_x$  bekannt, so dass gilt  $U_M = I_G R_x$

### 3.4.4.2 Wechselspannungsmessung

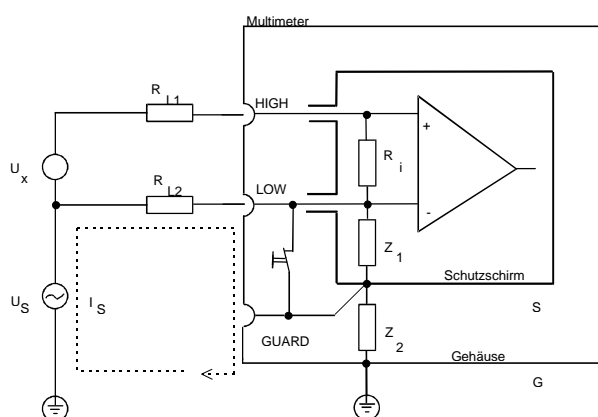
DMMs müssen potentialfrei sein, um Spannungen, die nicht auf Schutz Erde bezogen sind, messen zu können. Dabei entstehen sogenannte Gleichtaktspannungen, die sich störend auf die Messung auswirken können. Mit einer speziellen Guard-Technik, über die industrielle Geräte verfügen, kann das Problem gelöst werden.

#### Zur Entstehung von Gleichtaktspannen



Soll beispielsweise die Spannung über dem Widerstand  $R_M$  gemessen werden, so kann dies durch eine Schaltung mit zwei Quellen ausgedrückt werden.  $U_S$  wird als Gleichtaktquelle bezeichnet und  $U_x$  ist die Messquelle.

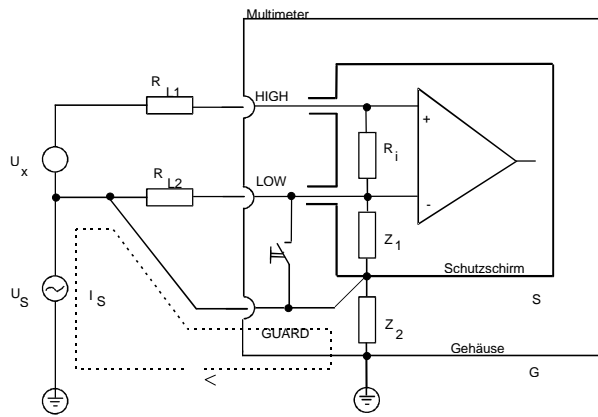
Wie nachstehendes Bild veranschaulicht, kann durch die Gleichtaktspannung  $U_S$  eine Strom  $I_S$  über  $R_{L2}$  und  $Z_2$  nach Schutz Erde fließen. Die an  $R_{L2}$  abfallende Spannung ist bezüglich des HIGH und LOW Eingangs des Multimeters eine additive Spannung zu  $U_x$  und kann dadurch einen Messfehler verursachen.



Multimeter mit geschlossenem GUARD - Schalter (GUARD ausgeschaltet). An  $R_{L2}$  entsteht die Störspannung  $U_S = I_S(R_{L2} + Z_2)$

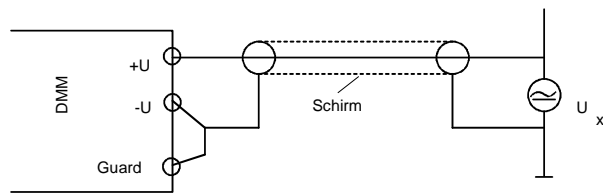
(Die eingezeichneten Widerstände  $R_{L1}$ ,  $R_{L2}$ ,  $R_i$ ,  $Z_1$  und  $Z_2$  repräsentieren ersatzweise die physikalischen Gegebenheiten. Es handelt sich also nicht um reale Bauteile)



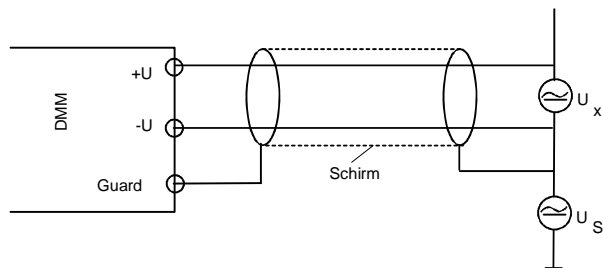


Bei geöffnetem GUARD - Schalter (aktiver GUARD), wird der Schutzschirm direkt zwischen Mess- und Störquelle geschaltet. Dadurch fließt  $I_s$  über den GUARD und  $Z_2$  nach Schutzterde. Über  $R_{L2}$  wird praktisch keine Strom fließen, da der Strom zusätzlich durch den hochohmigen Zweig über  $Z_1$ ,  $Z_2$  zum Gehäuse fließen müsste.

Die übliche Anschlusstechnik sieht daher folgendermaßen aus:



Anschlusstechnik ohne GUARD



Anschlusstechnik mit GUARD und geschirmtem Kabel

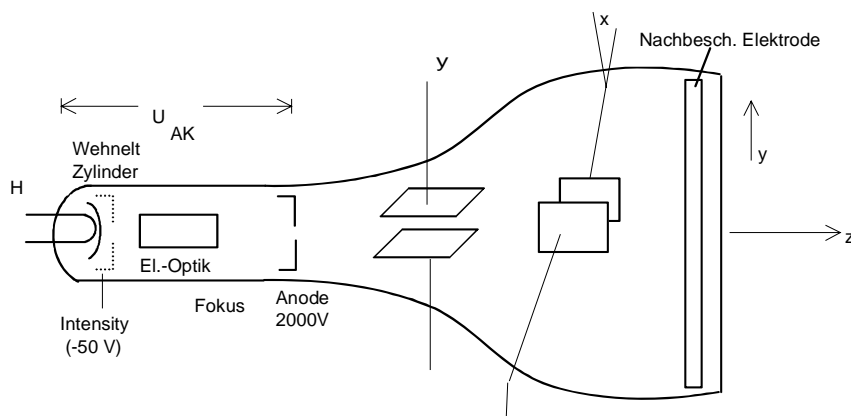
### 3.5 Oszilloskope

Oszilloskope dienen der optischen Darstellung zeitveränderlicher Vorgänge. Ein oder mehrere Spannungen (Y - Eingänge) werden meist über der Zeit (x - Eingang) dargestellt. Man unterscheidet zwischen analog und digital arbeitenden Geräten.

Es befinden sich zwar derzeit noch sehr viele Analogoszilloskope im Einsatz; der eindeutige Trend bei Neubeschaffungen geht in Richtung Digitalspeicheroszilloskope (DSOs).

Die Elektronenstrahlröhre

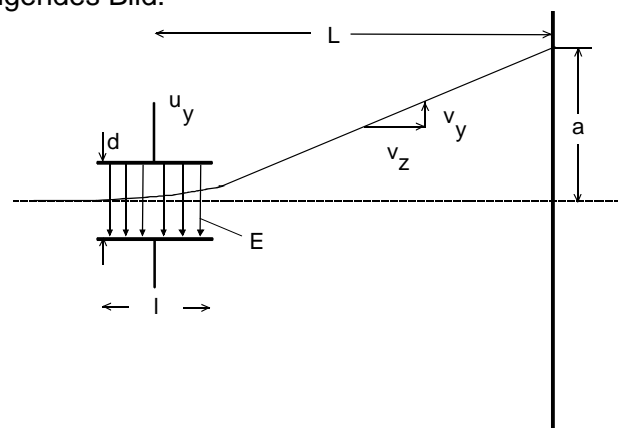
- Evakuierter Glaskörper (Braun'sche Röhre)
- geheizte Kathode emittiert Elektronen. Beschleunigung aufgrund der Spannung zwischen Anode und Kathode



Funktion:

Es soll, wie bei allen analogen Instrumenten, die Empfindlichkeit (*sensitivity*)  $S = \frac{a}{u_y}$

hergeleitet werden. Dieser Koeffizient kann auch als Ablenkoeffizient [cm/V] angesehen werden. Hierzu dient folgendes Bild:



Aus obiger Zeichnung kann man entnehmen  $\frac{a}{L} = \frac{v_y}{v_z} \rightarrow a = L \frac{v_y}{v_z}$

Die Elektronen werden aufgrund von  $U_{AK}$  beschleunigt und es gilt der Zusammenhang zwischen der Bewegungsenergie eines Elektrons und seiner potentiellen Energie:

$$eU_{AK} = \frac{1}{2} m_e v_z^2 \text{ mit } e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ As und } m_e = 9,108 \cdot 10^{-28} \text{ g}$$

Hieraus kann  $v_z$  abgeleitet werden.

Während sich das Elektron zwischen den Ablenkplatten befindet, wird aufgrund des elektrischen Feldes die Kraft

$$F_y = eE = m_e \frac{dv_y}{dt} \quad \text{mit } E = \frac{u_y}{d}$$

Daraus folgt für die Geschwindigkeitskomponente in y - Richtung

$$v_y = \frac{e}{m_e d} \int_0^\tau u_y dt \quad \text{mit der Verweildauer des Elektrons zwischen den Platten } \tau = \frac{l}{v_z}.$$

Für eine Gleichspannung  $u_y$  ergibt sich daher die y - Geschwindigkeitskomponente zu

$$v_y = \frac{e}{m_e d} u_y \tau \quad \text{und für die Empfindlichkeit folgt daher}$$

$$S = \frac{a}{u_y} = \frac{Lv_y}{u_y v_z} = \frac{LeI}{m_e d v_z^2} = \frac{LI}{2dU_{AK}}$$

Aus dieser Gleichung ist zu sehen, dass die Empfindlichkeit dann besonders groß wird, wenn die Elektronengeschwindigkeit  $v_z$  gering ist. Dies bedeutet aber andererseits dass die Helligkeit auf dem Bildschirm nur gering sein kann.

Eine Abhilfe wird dadurch erreicht, dass die Elektronen erst kurz vor ihrem Auftreffen auf die Leuchtschicht des Bildschirms mit Hilfe einer Nachbeschleunigungselektrode beschleunigt werden.

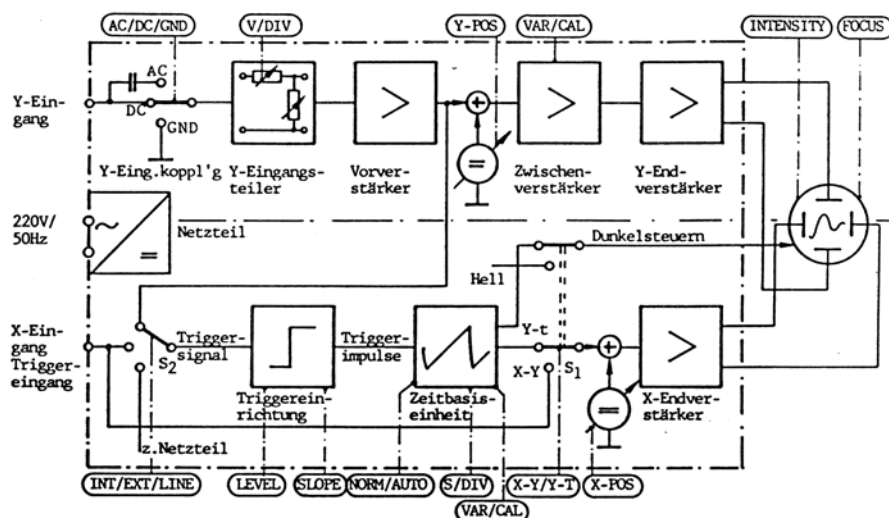


#### Beispiel (3.6)

Berechnen Sie die Geschwindigkeit  $v_y$  für den Fall, dass die Ablenkspannung durch  $u_y = \hat{u}_y \cos(\omega t)$  beschrieben werden kann. Bestimmen Sie die maximale Frequenz der Ablenkspannung, wenn ein Anzeigefehler von 5% zugelassen wird bei  $U_{AK} = 2kV$ ;  $l = 2cm$ . (Hinweise: Berücksichtigen Sie, dass  $v_y$  und die Bildschirmauslenkung proportional sind und dass  $\frac{\sin(x)}{x} = 0,95 \rightarrow x = 0,1757\pi$ )

### 3.5.1 Funktion des Analogoszilloskops

Nachfolgend ist das Blockschaltbild eines einkanalen Oszilloskops dargestellt.



Prinzipschaltbild eines analogen Einkanal-Oszilloskops

Das Blockschaltbild ist so dargestellt, dass die Wirkungsrichtungen der Blöcke und des Gesamtsystems von links nach rechts gerichtet sind. Ganz links befinden sich die Eingänge, für X und Y, ganz rechts der Bildschirm. Alle Bedienelemente sind durch runde Umrandungen gekennzeichnet. Sie sind in der obersten und untersten Schriftleiste dargestellt. Die Komponenten oberhalb der horizontalen Mittellinie bilden den Y-Kanal, jene die unterhalb liegen, dienen zur horizontalen Ablenkung, wahlweise für den X-Y- oder den Y-t-Betrieb. Der Y-Kanal beginnt mit dem Wahlschalter für die Eingangskopplung (AC/DC/GND). Zur Anpassung der Eingangssignale an den Eingangsbereich des Vorverstärkers müssen alle zu großen Signale zunächst im Eingangsteiler verkleinert werden. Durch Änderung des Teilverhältnisses lässt sich der Y-Spannungsablenkkoeffizient stufenweise verstellen. Nach dem Teiler erfolgt eine Gleichspannungsaddition, welche die Y-Verschiebung des Bildes ermöglicht. Zumeist wird diese Addition im Vorverstärker realisiert. Der Y-Vorverstärker muss so ausgelegt sein, dass er auch noch die Signale für den empfindlichsten Bereich ausreichend verstärkt. Weiterhin ermöglicht er eine kontinuierliche Verstärkungseinstellung, womit der Y-Ablenkkoeffizient stufenlos veränderbar ist. Dies geschieht i.a. mit dem Einsteller VAR/CAL. Die Y-Ablenkkoeffizienten welche am Einsteller V/DIV ablesbar sind, gelten nur in der kalibrierten Stellung, die zumeist in der Form eines einrastenden Potentiometeranschlages realisiert wird. Im Y-Endverstärker erfolgt die entsprechende Spannungsanpassung zur Ansteuerung der Ablenkplatten. Die horizontale Ablenkung ist bei dem dargestellten EO hauptsächlich für den Y-t-Betrieb ausgelegt. Trotzdem kann durch den Umschalter X-Y auch diese Betriebsart gewählt werden. Letztere ist allerdings nur sehr unkomfortabel, denn weder ist eine umschaltbare X-Eingangskopplung noch ein umschaltbarer X-Eingangsteiler vorhanden.

Die Triggereinrichtung kann von drei unterschiedlichen Signalquellen angesteuert werden:

- In der Stellung INTERN wird das Signal nach dem Y-Eingangsteiler verwendet, ggf. jenes nach dem Vorverstärker.
- In der Stellung EXTERN wird ein an der X-Eingangsbuchse anliegendes Signal verwendet.
- In der Stellung LINE wird dem Netzteil des EO eine Spannung mit Netzfrequenz entnommen und der Triggereinrichtung zugeführt. Dies ist vor allem bei Messungen in der Energietechnik vorteilhaft.

Auf die Triggereinrichtung wirken die Einsteller LEVF-L/AUTO und SLOPE.

Die Zeitbasiseinheit wird von der Triggereinrichtung angesteuert. Mit dem Einsteller für den Zeitablenkkoeffizienten (s/DIV), kann der Ablenkkoeffizient in Stufen und mit dem Potentiometer VAR/CAL stufenlos verändert werden. Wiederum gelten die aufgedruckten Ablenkkoeffizienten nur für die eingerastete Stellung CAL des Einstellers. Zur Verschiebung des Bildes in X-Richtung, wird vor dem X-Endverstärker eine Gleichspannungsaddition durchgeführt (X-POS).

Damit einfache Prüf- und Einstellarbeiten am EO ohne zusätzliche Signalquellen möglich sind, ist i.a. noch ein Kalibriergenerator (Rechteckgenerator) eingebaut, dessen Ausgangsspannung an dem Tastanschluss CAL oder an einer besonderen BNC-Buchse abgegriffen werden kann. Üblicherweise werden hierbei Rechteckspannungen von  $U = 1\text{V}$  mit  $f = 1\text{ kHz}$  verwendet.

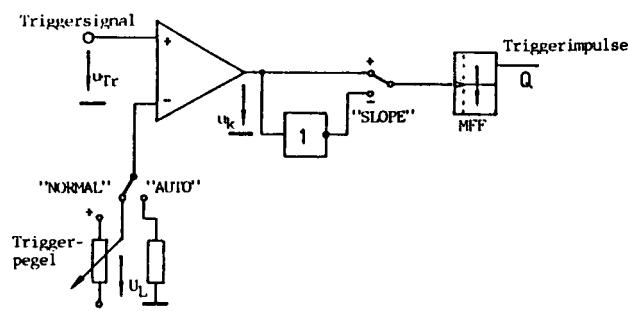
### 3.5.1.1 Triggereinrichtung

Die Aufgabe der Triggereinrichtung besteht in der ständigen Überwachung des angebotenen Triggersignals (INTERN, EXTERN, LINE), welches mit dem Umschalter  $S_2$ , ausgewählt werden kann. Sind an einer Stelle des Triggersignals die mit dem LEVEL- und SLOPE-Einsteller vorgewählten Triggerbedingungen erfüllt, so wird dies der Zeitbasiseinheit von der Triggereinrichtung (TRE) gemeldet. Das Prinzipschaltbild der TRE ist im nächsten Bild dargestellt wobei die TRE in zwei Arten, nämlich in der Stellung AUTO und in der Stellung NORMAL betrieben werden kann.

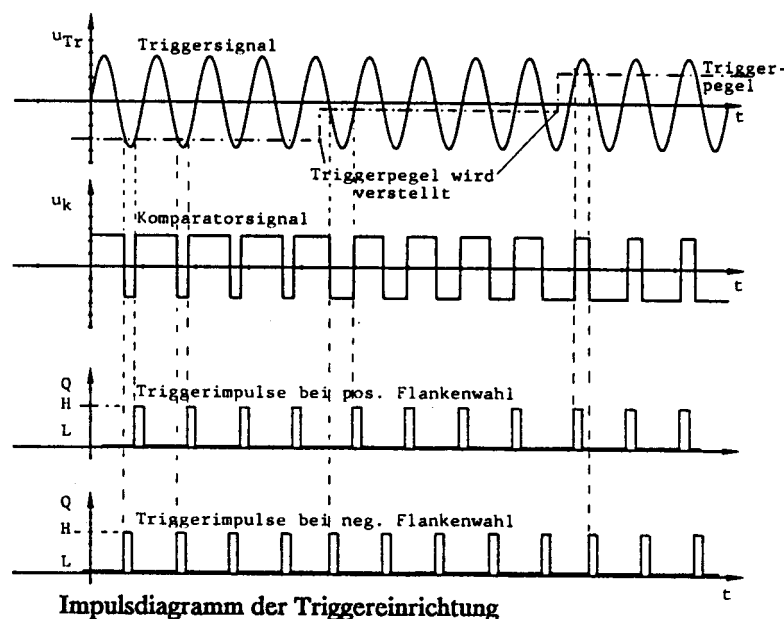
Bei automatischer Triggerung ist im dargestellten Fall der Triggerpegel auf  $U=0$  eingestellt. Komfortablere Oszilloskope besitzen eine zusätzliche Automatschaltung, welche aus dem Triggersignal einen geeigneten Triggerpegel erzeugt.

Bei normaler Triggerung kann eine beliebige Vergleichsspannung mit Hilfe des LEVEL-Potentiometers eingestellt werden. Der Komparator vergleicht den eingestellten Triggerpegel mit dem Eingangssignal. Besitzt letzteres einen Funktionswert, der dem Triggerpegel entspricht, so schaltet der Komparator. Liegt ein periodisches Triggersignal an, das den Triggerpegel erreicht, so weist der Komparatorausgang ein Rechtecksignal auf, dessen Frequenz gleich jener des Triggersignals ist. Erreicht das Triggersignal den Triggerpegel nicht, so erfolgt auch kein Signalwechsel am Komparatorausgang und die TRE liefert keine Ausgangsimpulse.

In der Stellung "+" des Flankenwahlschalters (SLOPE) gelangt die Komparatorausgangsspannung an den flankengesteuerten Eingang des monostabilen Flipflops (MFF). Jede dort erscheinende positive Flanke bewirkt an dessen Ausgang 0 einen Impuls mit der Dauer  $T_i$ . In der Stellung "-" wird das invertierte Komparatorsignal zur Ansteuerung des MFF verwendet, so dass in diesem Fall die negativen Flanken des Rechtecksignals, und somit auch des Triggersignals, die Ausgangsimpulse an Q erzeugen.



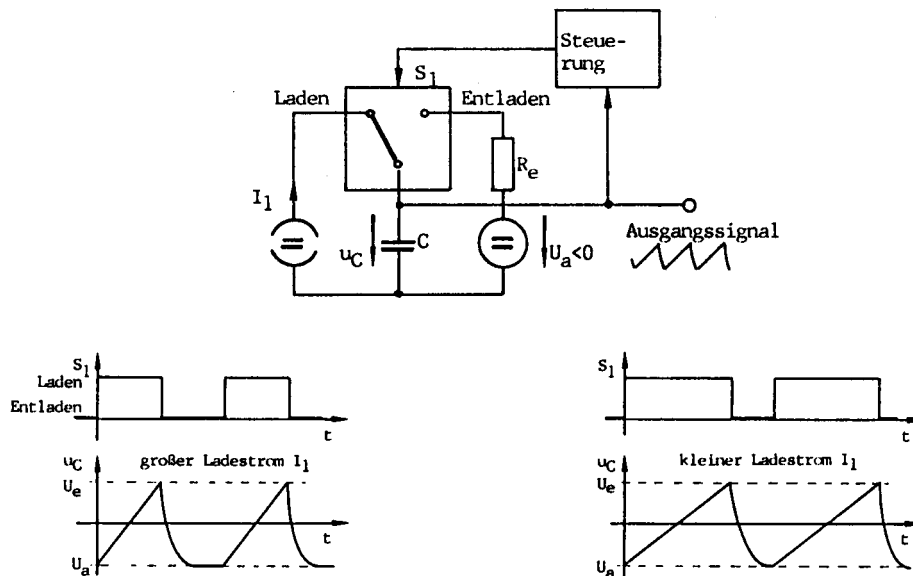
Prinzipschaltbild der Triggereinrichtung



Die Impulsdauer  $T_i$  ist für die Funktionsweise der Triggereinrichtung praktisch belanglos. Sie muss lediglich so kurz sein, dass auch bei der höchsten zu erwartenden Triggersignalfrequenz noch Impulse am Ausgang des monostabilen Flipflops entstehen.

### 3.5.1.2 Zeitbasiseinheit

Die Hauptaufgabe der Zeitbasiseinheit besteht in der Erzeugung einer zeitlich ansteigenden, linearen Spannungsrampe. Mit ihr kann dann der Elektronenstrahl von links nach rechts über den Bildschirm geführt werden. Die Spannungsrampe wird üblicherweise durch das Aufladen eines Kondensators  $C$  mit einem Konstantstrom  $I_1$  realisiert.



Prinzipschaltung der Zeitbasiseinheit (Rampenerzeugung)

Zu Beginn des Ladevorganges muss die Kondensatorspannung den negativen Anfangswert  $U_a$  aufweisen, mit dem der linke Bildrand erreicht wird. Am Ende des Ladevorganges besitzt der Kondensator die Spannung  $U_e$ , die dem rechten Bildrand entspricht. Für die bei  $t=0$  beginnende Rampe gilt:

$$u_C(t) = U_a + \frac{1}{C} \int_0^t I_1 dt = U_a + \frac{I_1}{C} t$$

Mit der Stromstärke  $I_1$  des Ladestromes und/oder dem Wert  $C$  des Kondensators lässt sich also die Steigung der Rampe einstellen. Zum Ende des Ladevorganges erkennt die Zeitbasissteuerung das Erreichen der Kondensatorendspannung  $U_e$  und veranlasst das Umschalten vom Lade- zum Entladevorgang, d.h. vom Strahlvorlauf zum -rücklauf. An letzteren werden keine Linearitätsforderungen gestellt, lediglich die Dauer sollte möglichst kurz sein. Hierzu wird der Kondensator über den Entladewiderstand  $R_e$  und die Spannungsquelle  $U_a$  entladen. Am Ende des Entladevorgangs weist damit die Kondensatorspannung den Wert  $U_a$  auf.

In der Betriebsart AUTO wird durch eine Zusatzschaltung erreicht, dass auch ohne Eingangssignal eine periodische Zeitablenkspannung erzeugt wird und dadurch der Strahl sichtbar bleibt. Man spricht dann vom sog. Freilauf der Zeitbasis. Realisiert wird diese Eigenschaft durch das retriggerbare Zeitglied, das ständig (ca. alle 0,3 s) die Triggerimpulse angeboten bekommt.

### 3.5.2 Das Digitalspeicheroszilloskop

Die Entwicklung digitaler Speicheroszilloskope verlief außerordentlich rasant und ist z.Z. in vollem Fluss. Die Idee der Speicherung von Messdaten wurde zunächst bei sog. Transientenrekordern verwirklicht. Das sind Geräte mit denen analoge Messsignale zu bestimmten Zeitpunkten abgetastet und die Abtastwerte gespeichert werden. Hatte man

zunächst analoge Speicher (Kondensatoren) verwendet, so kam mit fortschreitender Halbleitertechnik der digitale Speicher zum Einsatz. Einmal gespeichert, können die Messwerte dann beliebig oft mit fast beliebiger Geschwindigkeit ausgelesen werden und sie sind vor allem beliebig lange speicherbar. Zusätzlich wird heute verlangt, dass die Signale mit Signalanalysepaketen auf dem PC nachverarbeitet werden können. Damit ist die Möglichkeit der Messsignalausgabe an so unterschiedliche Ausgabemedien wie X-Y-Schreiber oder Oszilloskopröhre gegeben. Transientenrekorder ermöglichen vor allem die Speicherung schneller Ausgleichsvorgänge (sog. transiente Vorgänge, transient - vorübergehend) und deren relativ langsame Wiedergabe. Dem Prinzip nach erfüllt jedes digitale Speicheroszilloskop auch die Funktion eines Transientenrekorders, bietet darüber hinaus aber noch eine Reihe weiterer Leistungsmerkmale.

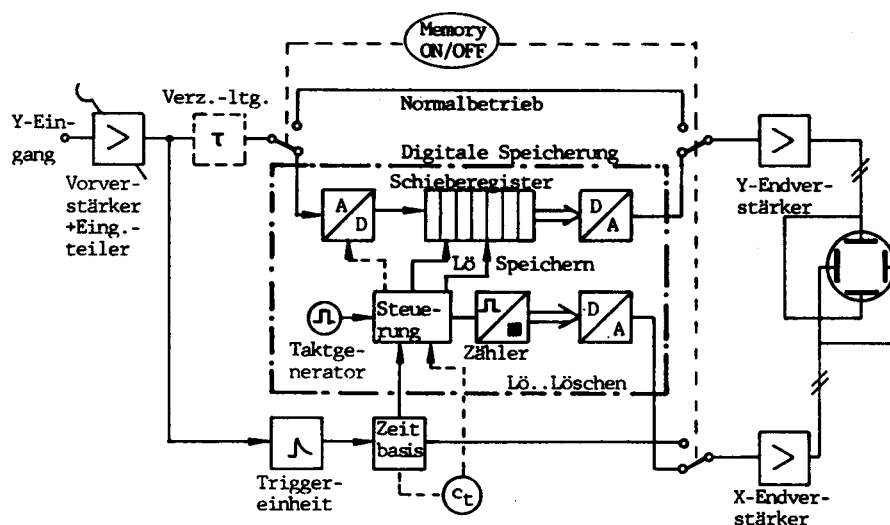
### Wirkungsweise

Im Prinzip könnte jedes nicht speichernde Elektronenstrahloszilloskop zu einem digitalen Speicheroszilloskop erweitert werden. Das heißt, dass die ohnehin schon vorhandenen Funktionsbaugruppen vollständig beibehalten werden können und nur durch zusätzliche Signalverarbeitungs- und -speicherglieder zu ergänzen sind. Dies ist im folgenden Bild dargestellt. Die dort strichpunktiert eingerahmten Blöcke dienen zur digitalen Speicherung des Messsignals und zu dessen Wiedergabe. Mit Hilfe des Schalters MEMORY ON/OFF kann der Speicherteil zu- oder abgeschaltet werden. Die gezeichnete Schalterstellung entspricht dem Betrieb als Speicheroszilloskop.

Die gespeicherte Abbildung eines Messsignals kann in zwei Stufen unterteilt werden: in die Speicherphase und in die Wiedergabephase.

### Speicherphase

- Ein Analog-Digital-Umsetzer (ADU) setzt das Ausgangssignal des Vorverstärkers zu vorgegebenen Zeitpunkten in ein paralleles digitales Signal um.
- In einem digitalen Halbleiterspeicher, der im einfachsten Fall aus mehreren parallel angeordneten Schieberegisterketten besteht, werden die digitalisierten Messwerte der Reihe nach abgelegt.
- Die Steuereinrichtung mit Taktgenerator veranlasst den ADU zu bestimmten Zeitpunkten einen Messwert zu digitalisieren. Weiterhin veranlasst sie das Schieberegister, alle gespeicherten Werte um einen Schritt weiterzuschieben. Damit die Steuereinheit weiß, in welchen Zeitabständen das Messsignal abgetastet werden muss, benötigt Sie eine Information über den eingestellten Zeitablenkoeffizienten, die sie von der Zeitbasis mitgeteilt erhält.

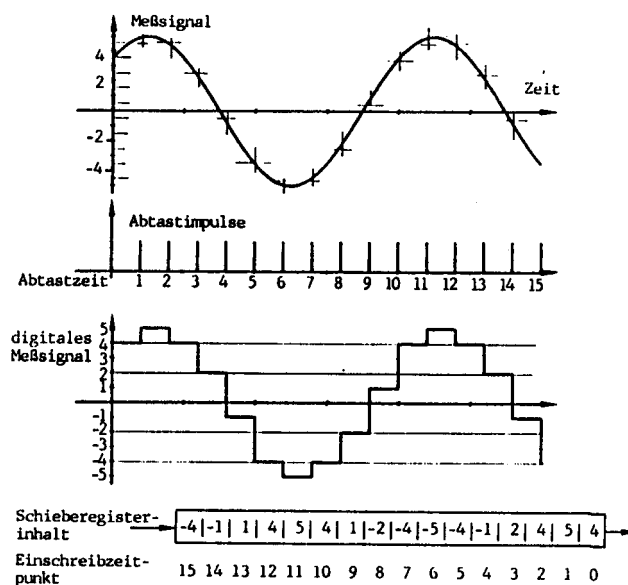


Blockschaltbild des digitalen Speicheroszilloskopes

## Wiedergabephase

- Die Steuereinrichtung veranlasst das Schieberegister mit dem Lesetakt, alle Informationen um eine Stelle weiterzuschieben. Hierdurch werden die beim Speichervorgang als erstes eingelesenen Informationen auch als erste wieder am Ende des Registers erscheinen und stehen somit am Ausgang des Halbleiterspeichers zur Verfügung.
- Der Digital-Analog-Umsetzer (DAU) für die Y-Darstellung erhält die Messinformationen, setzt sie um und gibt die analogen Größen an den Y-Endverstärker ab. Damit können auf der Oszilloskopröhre die Y-Werte dargestellt werden.
- Der Digital-Analog-Umsetzer für die X-Darstellung ist deshalb erforderlich, weil die (analoge) Zeitbasis nicht auf den X-Endverstärker durchgeschaltet ist. Deshalb hat die Steuereinrichtung die Aufgabe, zusammen mit dem Taktgenerator und dem X-Digital-Analog-Umsetzer die Rampe für die X-Ablenkung zu erzeugen.

Praktisch ist also ein zweiter, ein digitaler Rampengenerator vorhanden, der folgendermaßen arbeitet: Die Leseimpulse des Schieberegisters werden in einem Zähler aufsummiert. Der Zählerstand wird dem X-Digital-Analog-Umsetzer zugeführt und die dort entstehende Spannung dem X-Endverstärker. Beispielsweise beträgt nach 10 Leseimpulsen der Zählerstand 10, und die Information der zehntletzten Schieberegisterstelle wird an zehnter Stelle des Schirmbildes als Punkt angeschrieben. Die Geschwindigkeit des Auslesens - das ist einer der vielen Vorteile dieses Verfahrens - ist dabei nicht vom eingestellten Zeitablenkkoeffizienten abhängig. Praktisch wird sie gerade so groß gewählt, dass ein flackerfreies Schirmbild entsteht.



Zeitlicher Verlauf in der Speicherphase

Die zeitlichen Vorgänge sind in den Bildern für das Speichern und für die Wiedergabe dargestellt. Die Abtastzeitpunkte hängen von dem gewünschten Zeitablenkkoeffizienten ab. Bei rascher Zeitablenkung werden Sie entsprechend kurze Abstände aufweisen. Das ADU-Ausgangssignal ist von Anzahl der Quantisierungsstufen abhängig. Für obiges Bild ist angenommen, dass der ADU nur ganze Zahlen zwischen -5 und +5 darstellen kann. Das Ergebnis des Speichervorganges zeigt die Schieberegisterbelegung nach beendetem Einschreiben.

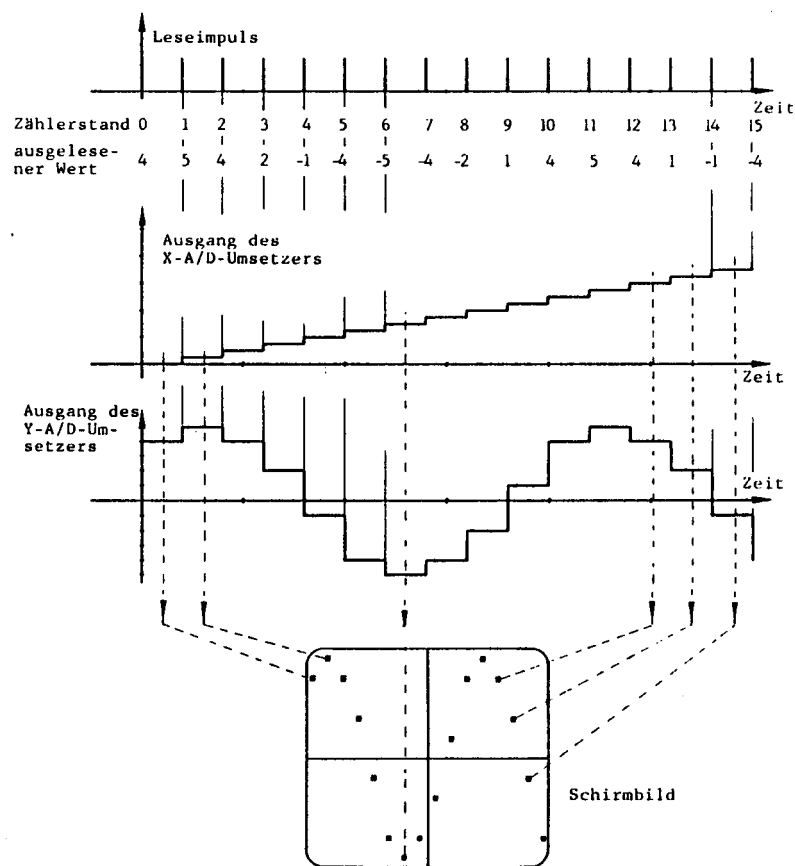
Für die bildliche Darstellung der Wiedergabe ist absichtlich der gleiche Zeitmaßstab verwendet worden. Man erkennt gut, dass in dem gewählten Beispiel der Lesevorgang deutlich



langsamer abläuft als der Speichervorgang, dass also Wiedergabezeit und Zeitablenk-  
koeffizient unabhängig voneinander sind.

Ein Problem stellt evtl. die Organisation der Speicher- und Lesephasen des Speichers dar. So wie der Ablauf bisher erklärt wurde, kann entweder eingespeichert oder ausgelesen werden. Damit beides gleichzeitig und unabhängig voneinander geschehen kann, besitzen manche digitalen Speicheroszilloskope zwei Speicherbereiche, einen für das Einschreiben und einen für die Wiedergabe. Wenn z.B. das Einschreiben beendet ist, werden möglichst schnell alle Messwerte vom Einschreibespeicher in den Wiedergabespeicher übertragen. Letzterer kann nun periodisch ausgelesen werden und unabhängig davon kann der Einschreibespeicher wieder beim nächsten Triggerimpuls beschrieben werden. Einfachere Geräte verfügen jedoch nur über einen einzigen Speicher, bei dem eine entsprechende zeitliche Verzahnung der Schreib- und Lesephasen erfolgt.

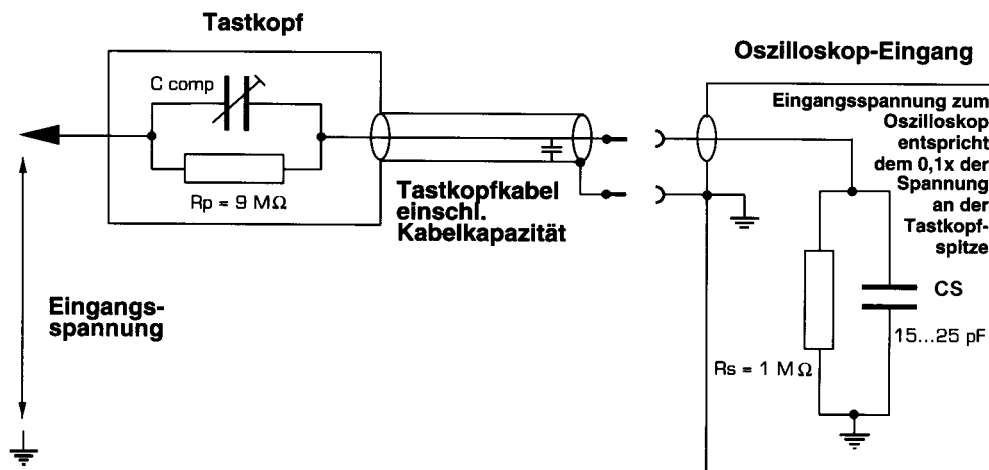
Gut ist im nächsten Bild die treppenförmige Spannung des X-DAU zu erkennen, welche die Spannungsrampe des abgeschalteten Zeitbasisgenerators ersetzt. Werden sprungförmige Änderungen der DAU-Ausgangssignale vorausgesetzt, So ergeben sich auf dem Bildschirm lediglich die eingetragenen Punkte und kein zusammenhängender Linienzug.



Zeitlicher Verlauf in der Wiedergabephase

### 3.5.3 Anschluss von Messsignalen

Beim Anschluss von Messsignalen an Oszilloskope werden meist passive Tastköpfe (*voltage probes*) benutzt. Die Eingangskapazität des Oszilloskops hat einen für hohe Signalfrequenzen nicht zu vernachlässigende Eingangskapazität. Daher müssen Tastköpfe, mit denen auch der Eingangsspannungsbereich erweitert oder ein hochohmiger Signalanschluss realisiert werden kann, als frequenzkompensierter Spannungsteiler realisiert werden.



### Oszilloskop mit Tastkopf (10:1 Teiler)

Für das Übertragungsverhältnis der komplexen Eingangsspannungen  $\underline{u}_1$  und der am Oszilloskop anliegenden Spannung  $\underline{u}_2$  ergibt sich folgender Ausdruck:

$$\frac{\underline{u}_1}{\underline{u}_2} = \frac{C_{\text{comp}} // R_p + R_s // C_s}{R_s // C_s} = 1 + \frac{R_p}{1 + j\omega R_p C_{\text{comp}}} \frac{1 + j\omega R_s C_s}{R_s}$$

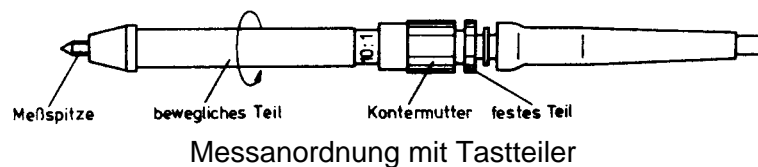
Hierbei soll in  $C_s$  sowohl die Eingangskapazität des Oszilloskops als auch die Kapazität der Zuleitung enthalten sein. Für den Fall, dass

$$R_s C_s = R_p C_{\text{comp}}$$

gilt, ist der Spannungsteiler frequenzunabhängig und es wird

$$\frac{u_1}{u_2} = 1 + \frac{R_p}{R_s}$$

Nachstehendes Bild zeigt einen 10:1 Tastteiler, bei dem die Einstellung des Plattenkondensators  $C_{\text{comp}}$  durch Drehung erfolgen kann.

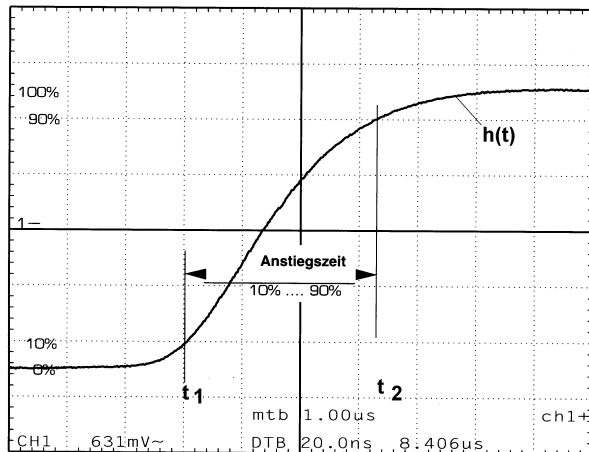


Die Einstellung selbst erfolgt mit Hilfe eines eingebauten Rechteckgenerators im Oszilloskop. Der Tastteiler wird so lange verstellt, bis ein optimales Übertragungsverhalten für das Rechtecksignal erreicht wird. Da das periodische Rechtecksignal aus vielen Sinusschwingungen aufgebaut gedacht werden kann, ist bei gutem Rechteckübertragungsverhalten von Frequenzunabhängigkeit auszugehen.

### 3.5.4 Arbeiten mit dem Oszilloskop

#### Messung der Anstiegszeit (rise time)

Die Anstiegszeit ist die Zeit, die ein Signal benötigt, um von 10% auf 90% seines Maximalwertes zu gelangen.

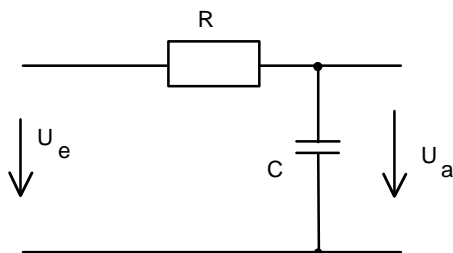


Nebenstehendes Bild zeigt die Sprungantwortfunktion  $h(t)$  eines dynamischen Systems. Die Anstiegszeit ergibt sich zu

$$t_A = t_2 - t_1 = t_{90\%} - t_{10\%}$$

Üblicherweise sind die 10 und 90%-Marken bei Oszilloskopen eingeblendet.

Für ein System erster Ordnung soll der Zusammenhang zwischen Anstiegszeit und Bandbreite näher betrachtet werden.



Die komplexe Übertragungsfunktion ergibt sich zu

$$\frac{U_a(j\omega)}{U_e(j\omega)} = \frac{1}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

Der Amplitudengang errechnet sich zu

$$\left| \frac{U_a(j\omega)}{U_e(j\omega)} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \text{ und die Grenzfrequenz ist definiert zu}$$

$$\left| \frac{U_a(j\omega)}{U_e(j\omega)} \right|_{\omega=\omega_g} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ (-3dB)} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega_g RC)^2}} \rightarrow \omega_g = \frac{1}{RC}$$

Die Sprungantwortfunktion  $h(t)$  eines solchen Systems berechnet sich zu:

$$h(t) = u_a(t) = \left( 1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right)$$

für  $u_e(t) = 1V\sigma(t)$  mit  $\sigma(t)$  = Einheitssprung. Damit folgt für die Zeiten  $t_1$  und  $t_2$

$$\begin{aligned}
 t_1: \quad 0,1 &= 1 - e^{-\frac{t_1}{RC}} \rightarrow 0,9 = e^{-\frac{t_1}{RC}} \rightarrow \ln(0,9) = -\frac{t_1}{RC} \\
 t_2: \quad 0,9 &= 1 - e^{-\frac{t_2}{RC}} \rightarrow 0,1 = e^{-\frac{t_2}{RC}} \rightarrow \ln(0,1) = -\frac{t_2}{RC} \\
 t_A = t_1 - t_2 &= RC(-\ln(0,1) + \ln(0,9)) = RC \ln(9) = \frac{1}{2\pi f_g} \ln(9) \\
 t_A &= \frac{0,35}{f_g}
 \end{aligned}$$

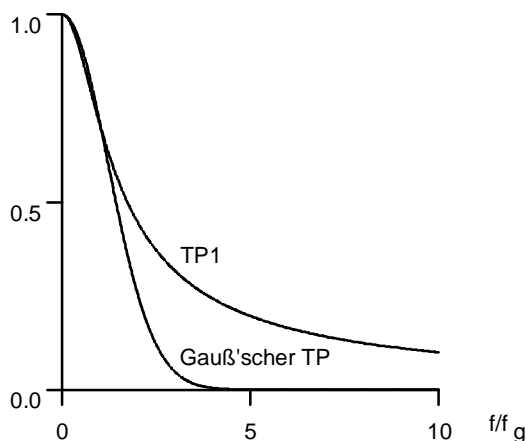


Beispiel (3.7): Bei einem RC-Glied ist  $R=10k\Omega$ . Gemessen wurde mit einem Oszilloskop die Anstiegszeit bei sprunghafter Anregung zu  $t_A=7\mu s$ . Welchen Wert hat der Kondensator?

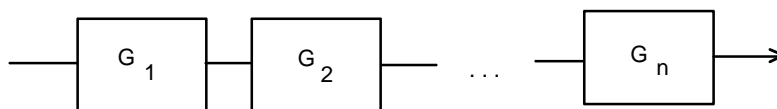
### Anstiegszeitbestimmung bei Zusammenschaltung mehrerer Übertragungsglieder

Schaltet man mehrere Tiefpässe erster Ordnung hintereinander, so wird die Ermittlung der Gesamtanstiegszeit rechnerisch schwierig.

In sehr guter Näherung können solche Übertragungsglieder durch Gauß'sche Tiefpässe angenähert werden.



$$\text{Ansatz: } G(\omega) = e^{-k^2 \omega^2}$$



$$\begin{aligned}
 G_{\text{ges}} &= G_1 G_2 \cdots G_n = e^{-\omega^2 (k_1^2 + k_2^2 + \cdots + k_n^2)} \\
 k_{\text{ges}}^2 &= k_1^2 + k_2^2 + \cdots + k_n^2
 \end{aligned}$$

bei  $\omega = \omega_g$  gilt

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = e^{-k^2 \omega_g^2} \rightarrow \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -k^2 \omega_g^2 \quad \text{und damit } k = \frac{1}{\omega_g} \sqrt{\ln(\sqrt{2})}$$

Es gilt daher  $G(\omega) = e^{-\ln(\sqrt{2}) \left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2}$  und somit

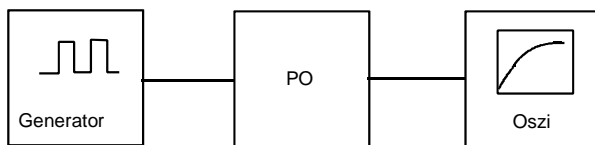
$$\frac{1}{\omega_{g_{ges}}^2} = \frac{1}{\omega_{g_1}^2} + \frac{1}{\omega_{g_2}^2} + \dots + \frac{1}{\omega_{g_n}^2}$$

Wegen  $k \sim 1/\omega_g$  und der Beziehung zwischen  $f_g$  und  $t_A$ , die beim Gauß'schen Tiefpass mit  $f_g = \frac{0,34}{t_A}$  angegeben werden kann, folgt für die Anstiegszeit

$$t_{A_{ges}}^2 = t_{A_1}^2 + t_{A_2}^2 + \dots + t_{A_n}^2$$



Beispiel (3.8): Eine Messschaltung besteht aus Generator, Prüfobjekt (PO) und Oszilloskop.



Bekannt:

Anstiegszeit Generator 10 ns

Grenzfrequenz Oszilloskop  $f_{g_{Oszi}} = 50\text{MHz}$

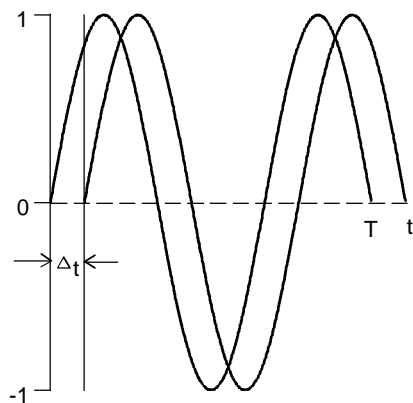
Ablesung Oszilloskop  $t_{Oszi} = 20\text{ ns}$

Wie groß ist die Grenzfrequenz des PO, falls generell ein TP - Charakter der Baueinheiten unterstellt werden kann?

### Messung von Phasenverschiebungen

Durch Zeitmessung

Sei die Bezugsschwingung definiert durch  $u_1 = \hat{u}_1 \sin(\omega t)$  und die zweite Messgröße durch  $u_2 = \hat{u}_2 \sin(\omega t + \varphi)$ , so kann die gesuchte Phasenverschiebung über die Zeitdifferenz  $\Delta t$  ermittelt werden.



$$\text{Ansatz: } \frac{\Delta t}{T} = \frac{\varphi}{360^\circ}$$

Hinweise zur Messung: t - Achse dehnen, so dass  $\Delta t$  möglichst den gesamten x - Bereich des Bildschirms ausfüllt. Y - Verstärkung groß wählen (Übersteuerung des Verstärkers unkritisch), so dass keine "schleifenden Schnitte" entstehen.

## Lissajous - Figuren

Messung erfolgt in x/y - Darstellung

x - Auslenkung

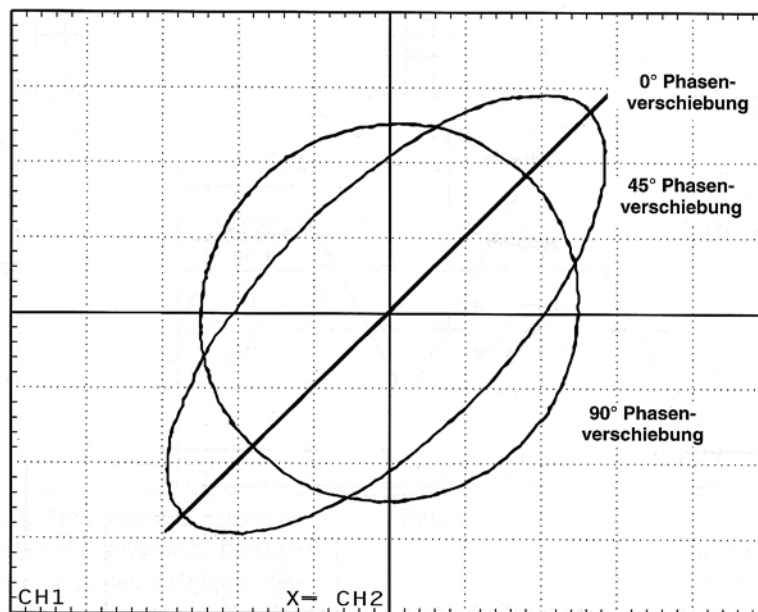
$$x = u_1 = \hat{u}_1 \sin(\omega t)$$

y - Auslenkung

$$y = u_2 = \hat{u}_2 \sin(\omega t + \varphi)$$

Für  $t=0$  oder für  $\omega t = n\pi$  ( $n=0,1,2,\dots$ ) ist  $x(t) = 0$ ; d.h. diese Punkte liegen auf der y - Achse.

$$y|_{t=0} = \hat{u}_2 \sin \varphi \text{ und damit ergibt sich der Winkel } \varphi = \arcsin\left(\frac{y_{t=0}}{\hat{u}_2}\right)$$



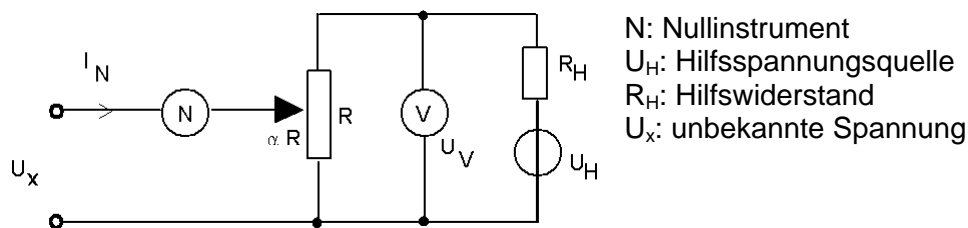
Aufgabe (3.9): Bestimme den maximalen Messfehler  $\Delta\varphi$  bei Lissajous Messungen auf Grund der Unsicherheiten von  $y$  und  $\hat{u}_2$ . Für welche Winkel sollte eine andere Messmethode ausgewählt werden.

## 4 Kompensatoren (compensator)

Mit Kompensatoren werden Messgrößen mit genau bekannten Vergleichsgrößen verglichen. Man unterscheidet das Abgleichverfahren nach Poggendorff und das Ausschlagverfahren nach Lindeck-Rothe. Beim abgeglichenen Kompensator wird dem Messobjekt keine Leistung zur Messung entzogen.

### 4.1 Kompensatoren für Gleichspannung

#### 4.1.1 Kompensator nach Poggendorff



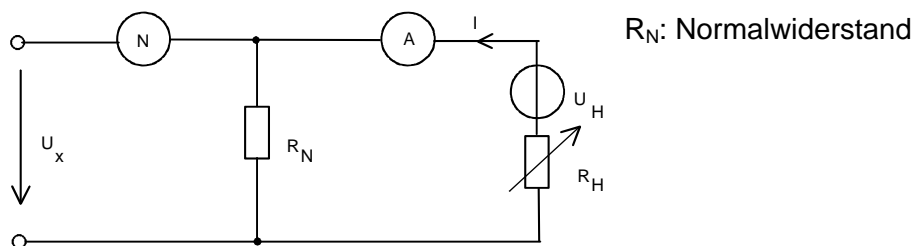
Der Abgleich von  $R$  erfolgt derart, dass  $I_N=0$  wird (keine Last der Quelle  $U_x$ ). Dann gilt:

$$U_x = U_V \frac{\alpha R}{R} = U_V \alpha$$

Minimaler relativer Fehler:  $\sim 10^{-4}$

Nachteil: Kontakte (Schleifer) erzeugen im Kompensationskreis eine Thermo-/Kontaktspannung.

#### 4.1.2 Kompensator nach Lindeck-Rothe

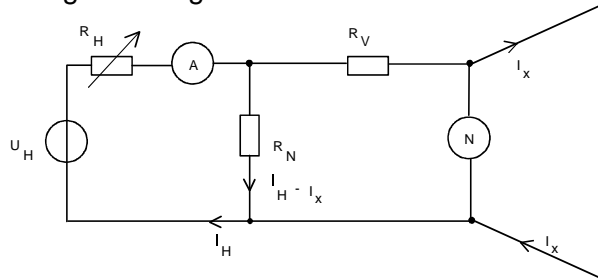


Im Abgleichfall fließt der Strom  $I$  über den Normalwiderstand  $R_N$  und es gilt:

$$U_x = R_N I$$

## 4.2 Kompensator für Gleichstrom

### Saugschaltung



Im abgeglichenen Zustand ist der Innenwiderstand der Schaltung Null. Der Widerstand  $R_H$  wird so lange geändert, bis der Nullindikator N (Galvanometer) Null anzeigt.

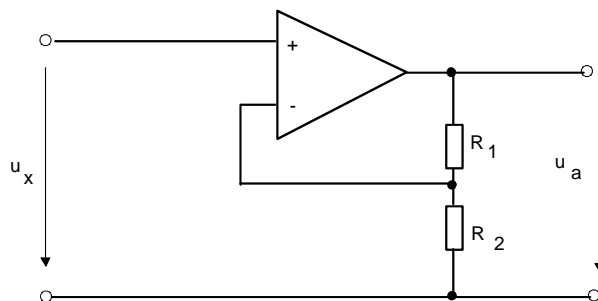
Im Abgleichfall gilt:

$$R_N(I_H - I_x) = R_V I_x \quad \text{und damit folgt} \quad I_x = I_H \frac{R_N}{R_N + R_V}$$

## 4.3 Automatisch abgleichende Kompensationsschaltungen

Beispiele aus der Elektrotechnik

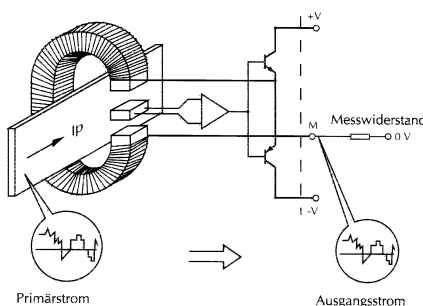
### a) Spannungskompensation



Setzt man die Verstärkung des Operationsverstärkers mit  $V \rightarrow \infty$  an, so wird die Spannung zwischen dem + und - Eingang gegen Null gehen. Die Spannung über  $R_2$  muss im Kompensationsfalle gleich der Spannung  $U_x$  werden.

Für die Ausgangsspannung gilt  $\frac{u_a}{u_x} = \frac{R_1 + R_2}{R_2} \rightarrow u_a = u_x \left( 1 + \frac{R_1}{R_2} \right)$

### b) Flusskompensation



Das vom Primärstrom  $I_P$  (eine Windung) erzeugte magnetische Feld wird durch den Strom durch die Sekundärwicklung (viele Windungen) kompensiert. Als Nullinstrument dient eine Hallsonde. Der Sekundärstrom wird so lange erhöht, bis der Kern flussfrei ist.



Vorteile:

- Das Eisen ist feldfrei. Nichtlinearitäten des Eisens spielen keine Rolle
- Es entstehen keine Eisenverluste
- Der Messwiderstand muss nicht null sein wie bei passiven Stromwandlern
- Der Wandler misst auch Gleichstrom, da der Hallgenerator den magnetischen Fluss auch statisch misst

## 5 Brückenschaltungen (*bridge circuit*)

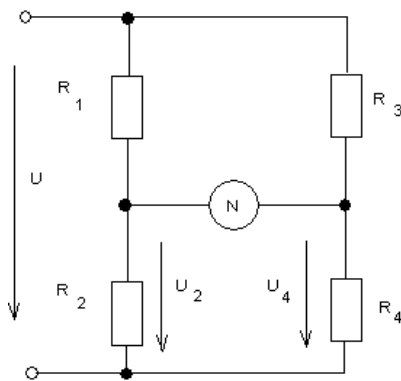
Man unterscheidet Gleichstrommessbrücken zur Widerstandsmessung und Wechselstrommessbrücken zur Scheinwiderstands- Frequenz- und Klirrfaktormessung.

### 5.1 Gleichstrommessbrücken (*DC bridge*)

Für die Messung hoher und mittlerer Widerstände wird die Wheatstone-Schaltung benutzt. Die Messung kleiner Widerstände kann mit der Thomson - Schaltung erfolgen.

#### 5.1.1 Wheatstone-Schaltung

Abgleich einer Brückenschaltung



Der Abgleich ist dann gegeben, wenn das Nullinstrument Null zeigt. Dann gilt

$$U_2 = U_4$$

$$\text{mit } \frac{U_2}{U} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \text{ und } \frac{U_4}{U} = \frac{R_4}{R_3 + R_4}$$

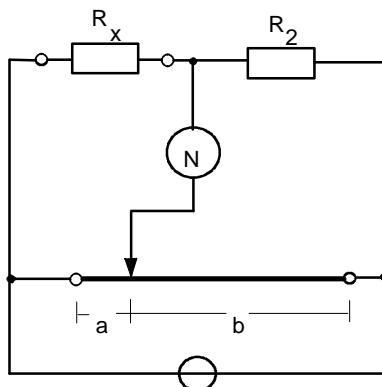
Damit folgt  $\frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{R_4}{R_3 + R_4}$  oder

$$R_2 R_3 + R_2 R_4 = R_1 R_4 + R_2 R_4$$

Somit ergibt sich als Abgleichbedingung  $\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4}$ . Ist ein Widerstand in der Brücke nicht

bekannt (z. B.  $R_1$ ), so kann dieser aus  $R_1 = R_2 \frac{R_3}{R_4}$  berechnet werden.

Als Beispiel für eine Wheastonsche Brücke kann untenstehende Schleifdrahtbrücke betrachtet werden.



Es handelt sich bei dem Schleifdraht um einen homogenen Draht der Länge  $l = a + b$ . Der unbekannt Widerstand sei  $R_x$ .

Die Abgleichbedingung lautet  $\frac{R_x}{R_2} = \frac{a}{b}$  oder

$$R_x = R_2 \frac{a}{l - a}$$

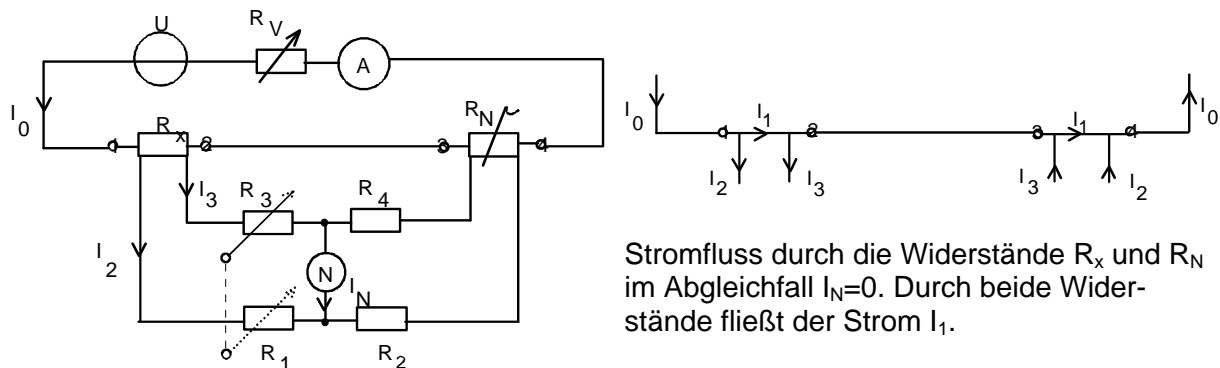


Aufgabe (5.1): Bestimme den maximalen Fehler  $\pm \Delta R_x$  und den relativen Fehler  $\pm \frac{\Delta R_x}{R_x}$  falls bei der Schleifdrahtbrücke nur  $a$  unsicher sein soll. Für welchen Wert von  $a$  ist der relative Messfehler am geringsten, falls  $l = 100 \text{ cm}$  und  $\pm \Delta a = 1 \text{ cm}$  ist.

### 5.1.2 Thomson-Doppelbrücke

Um Widerstände im  $\mu\Omega$  und  $m\Omega$  Bereich zu messen, ist es notwendig, die Zuleitungswiderstände bei der Messung zu eliminieren. Man greift daher mit Prüfspitzen direkt am unbekannten Widerstand  $R_x$  - und beim Normalwiderstand  $R_N$  über Potentialklemmen - den jeweiligen Spannungsabfall ab.

Die Widerstände  $R_1, R_2, R_3$  und  $R_4$  sind gegenüber  $R_x$  und  $R_N$  hochohmig.



Stromfluss durch die Widerstände  $R_x$  und  $R_N$  im Abgleichfall  $I_N=0$ . Durch beide Widerstände fließt der Strom  $I_1$ .

Im Abgleichfall  $I_N=0$  gilt:

$$I_1 R_x + I_3 R_3 = I_2 R_1 \quad (\text{linke Masche})$$

$$I_1 R_N + I_3 R_4 = I_2 R_2 \quad (\text{rechte Masche})$$

Es gilt die Nebenbedingung  $\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4}$ , die durch die Doppelkurbel immer erfüllt ist. Wird

diese Bedingung in obige Maschengleichungen eingesetzt, so folgt:

$$I_1 R_x = I_2 R_1 - I_3 \frac{R_1 R_4}{R_2} = R_1 \left( I_2 - I_3 \frac{R_4}{R_2} \right) = R_1 K$$

$$\text{mit der Konstanten } K = \frac{I_1 R_x}{R_1} = \frac{I_1 R_N}{R_2}$$

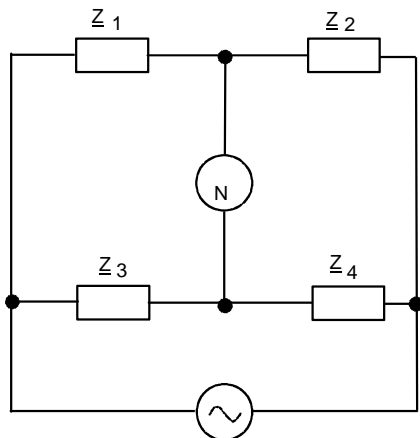
$$I_1 R_N = I_2 R_2 - I_3 \frac{R_2 R_3}{R_1} = R_2 \left( I_2 - I_3 \frac{R_3}{R_1} \right) = R_2 K$$

ergibt sich die Abgleichbedingung

$$\frac{R_x}{R_N} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4}$$

Beispielsweise hat eine solche Messbrücke die technischen Daten: Meßbereich  $1\mu\Omega$  bis  $111,1\Omega$  bei einer Messunsicherheit  $< 0,1\%$ .

## 5.2 Wechselstrommessbrücken (AC bridge)



Bei Wechselstrommessbrücken ist eine Speisung mit einer Wechselspannung erforderlich. Üblicherweise wird eine Sinusspannung mit 1 kHz genutzt. Die Brücke ist abgeglichen, wenn das Nullinstrument (z. B. Oszilloskop oder Log-In-Verstärker) Null anzeigt. Dann gilt:

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{Z_3}{Z_4} \rightarrow Z_1 Z_4 = Z_2 Z_3$$

Diese Gleichung lässt sich durch Real- und Imaginärteil oder durch Betrag und Phase darstellen.

Real- und Imaginärteil

$$(R_1 + jX_1)(R_4 + jX_4) = (R_2 + jX_2)(R_3 + jX_3)$$

Gleichheit ist dann gegeben, wenn sowohl Imaginär- als auch Realteil gleich sind.

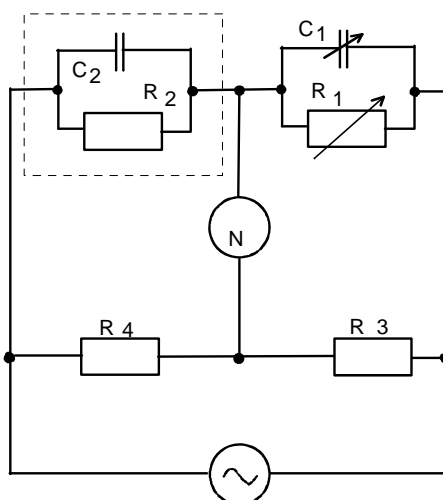
$$\begin{aligned} R_1 R_4 - X_1 X_4 &= R_2 R_3 - X_2 X_3 \\ X_1 R_4 + R_1 X_4 &= X_2 R_3 + R_2 X_3 \end{aligned}$$

Darstellung in Polarform

$$Z_1 Z_4 e^{j(\varphi_1 + \varphi_4)} = Z_2 Z_3 e^{j(\varphi_2 + \varphi_3)}$$

Gleichheit, falls  $Z_1 Z_4 = Z_2 Z_3$  und  $\varphi_1 + \varphi_4 = \varphi_2 + \varphi_3$

### 5.2.1 Kapazitätsmessbrücke nach Wien



Gemessen werden sollen  $C_2$  und  $R_2$ .  $C_2$  und  $R_2$  stellen einen verlustbehafteten Kondensator dar.

Im Abgleichfall gilt:

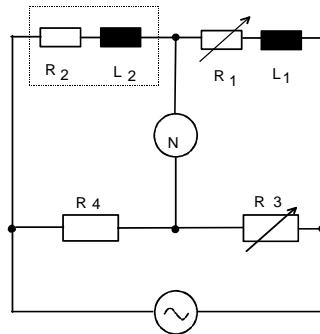
$$\begin{aligned} \frac{R_3 \frac{R_2}{j\omega C_2}}{R_2 + \frac{1}{j\omega C_2}} &= \frac{R_4 \frac{R_1}{j\omega C_1}}{R_1 + \frac{1}{j\omega C_1}} \\ \frac{R_2 R_3 \left( R_1 + \frac{1}{j\omega C_1} \right)}{C_2} &= \frac{R_1 R_4 \left( R_2 + \frac{1}{j\omega C_2} \right)}{C_1} \end{aligned}$$

Aus dem Realteilvergleich folgt für den unbekannten Kondensator  $C_2 = C_1 \frac{R_3}{R_4}$ .

Aus dem Vergleich der Imaginärteile folgt  $R_2 = R_1 \frac{R_4}{R_3}$ . Wie aus den letzten beiden Gleichungen ersichtlich ist, kann ein Abgleich durch Änderung von  $C_1$  und  $R_1$  erfolgen.

## 5.2.2 Induktivitätsmessbrücke nach Maxwell

Verlustbehaftete Induktivitäten lassen sich mit folgender Brücke messen:



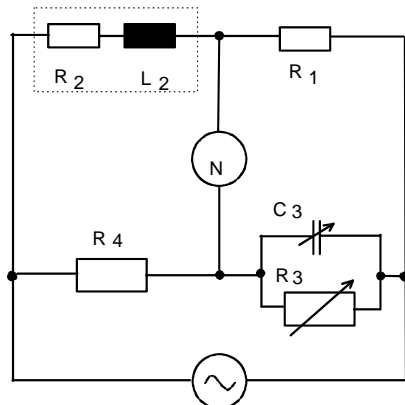
Im Abgleichfall gilt:

$$(R_2 + j\omega L_2)R_3 = R_4(R_1 + j\omega L_1)$$

$$\text{Realteilvergleich: } R_2 R_3 = R_1 R_4 \rightarrow R_2 = R_1 \frac{R_4}{R_3}$$

$$\text{Imaginärteilvergleich: } L_2 R_3 = R_4 L_1 \rightarrow L_2 = L_1 \frac{R_4}{R_3}$$

Ein Problem bei dieser Brücke ist die Beschaffung einer Referenzinduktivität  $L_1$ . Als Ausweg kann die Induktivitätsmessbrücke nach Maxwell-Wien genutzt werden. Hier ist an Stelle einer Normalinduktivität eine Normalkapazität erforderlich, die leichter beschaffbar ist.



Im Abgleichfall gilt:

$$(R_2 + j\omega L) \left( \frac{R_3 \frac{1}{j\omega C_3}}{R_3 + \frac{1}{j\omega C_3}} \right) = R_1 R_4 \quad \text{oder nach}$$

Umformung

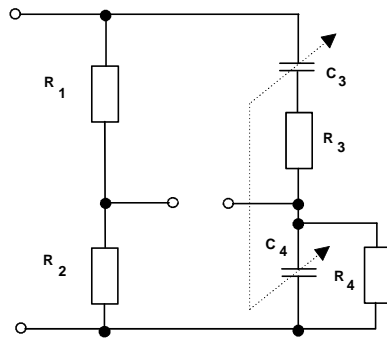
$$-j \frac{R_2 R_3}{\omega C_3} + \frac{L_2 R_3}{C_3} = R_1 R_3 R_4 - j \frac{R_1 R_4}{\omega C_3}$$

$$\text{Realteilvergleich: } L_2 = C_3 R_1 R_4$$

$$\text{Imaginärteilvergleich: } R_2 = \frac{R_1 R_4}{R_3}$$



Aufgabe (5.2): Gegeben ist eine Wien - Robinson Brücke zur Frequenzmessung.



Die Brücke ist so dimensioniert, dass  $R_1=2R_2$  und  $R_3=R_4=R$  und  $C_3=C_4=C$  ist. Leiten Sie unter Benutzung der Abgleichbedingung die Formel für die Frequenz her ( $\omega=...$ ).

## 6 Leistungsmessung (*power measurement*)

Bevor Sie mit der Durcharbeitung des folgenden Abschnitts über die Grundlagen der Leistungsmessung beginnen, will ich Ihnen „Dilbert's Theorem on Salary“ über die Messung von Leistung und deren angemessene Entlohnung zur Kenntnis geben. Sie sollten die nachfolgende Ableitung aber nicht allzu ernst nehmen:

Dilbert's Theorem on Salary states that engineers and scientists never earn as much salary as business executives and sales people.

This theorem can now be supported by a mathematical equation based on the following three postulates:

Postulate 1: Knowledge is Power (Knowledge=Power)

Postulate 2: Time is Money (Time=Money)

Postulate 3 (as every engineer knows): Power =Work/Time

It therefore follows: Knowledge = Work / Time

and since Time = Money,

we have: Knowledge =Work / Money.

Solving for Money, we get:

Money = Work/Knowledge

Thus, as Knowledge approaches zero, Money approaches infinity, regardless of the amount of Work done.

Conclusion 1: The Less you Know, the More you Make.

Conclusion 2: This is the reason why your BOSS is paid more!

Bezüglich der Definition der Leistungskenngrößen wird auf die DIN 40110 verwiesen. Es wird empfohlen, diese Norm durchzuarbeiten. Schwerpunktmäßig werden die Benennungen bei sinusförmiger Spannung und nichtsinusförmigem Strom behandelt, da dieser Fall besonders praxisrelevant ist.

### 6.1 Theoretische Grundlagen der Leistungsmessung

Zusammenfassung einiger wichtiger Kenngrößen

Augenblicksleistung (*instantaneous power*)

$$p(t) = u(t) i(t)$$

Wirkleistung (*active power*)

$$P = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} p(t) dt$$

Scheinleistung (*apparent power*)

$$S = UI$$

Blindleistung (*reactive power*)

$$Q = +\sqrt{S^2 - P^2}$$

Leistungsfaktor (*power factor*)

$$\lambda = \frac{P}{S}$$

Benennungen bei sinusförmigem Verlauf von Strom und Spannung

$$u(t) = \hat{u} \sin(\omega t) \text{ und } i(t) = \hat{i} \sin(\omega t + \varphi)$$

$$P = \frac{1}{T} \int u(t) i(t) dt = \frac{\hat{u} \hat{i}}{T} \int_0^T \sin(\omega t) \sin(\omega t + \varphi) dt$$

$$\begin{aligned} \text{Wirkleistung:} \quad &= \frac{\hat{u} \hat{i}}{T} \int \frac{1}{2} [\cos(\varphi) - \cos(2\omega t + \varphi)] dt \\ &= \frac{\hat{u} \hat{i}}{2} \cos(\varphi) = U I \cos(\varphi) \end{aligned}$$

$$\text{Scheinleistung:} \quad S = U I$$

$$\text{Blindleistung:} \quad Q = \sqrt{S^2 - P^2} = \sqrt{(UI)^2 - (UI \cos^2(\varphi))} = UI \sin(\varphi)$$

$$\text{Leistungsfaktor:} \quad \lambda = \frac{P}{S} = \cos(\varphi)$$

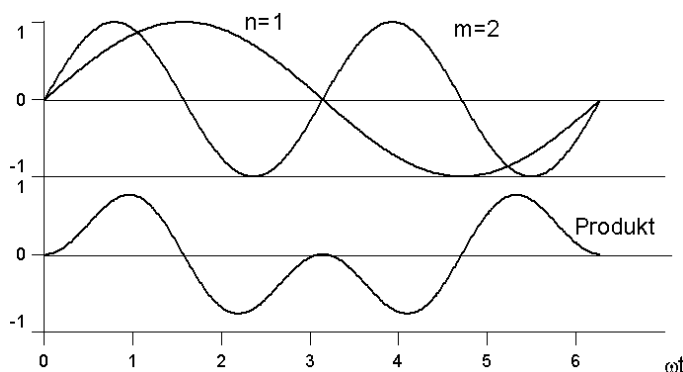
Benennungen bei sinusförmigem Verlauf der Spannung und nichtsinusförmigem Stromverlauf

Es wird vorausgesetzt, dass es sich um periodische Größen handelt, so dass der Strom durch Sinusschwingungen dargestellt werden kann. Dieser Fall ist für die Praxis wesentlich, da häufig von näherungsweise sinusförmiger Netzspannung ausgegangen werden kann. Die Ströme sind üblicherweise nichtsinusförmig.

$$u(t) = \hat{u} \sin(\omega t) \text{ und } i(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{i}_n \sin(n\omega t + \varphi_n)$$

Um die Leistungen hier auszurechnen, wird zunächst auf die sog. Orthogonalitätsrelation verwiesen ( $m, n \in \mathbb{N}$ ).

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \hat{u}_m \sin(m\omega t) \hat{i}_n \sin(n\omega t + \varphi_n) d\omega t = \begin{cases} 0 & \text{für } m \neq n \\ \neq 0 & \text{für } m = n \end{cases}$$



Man mache sich diesen Sachverhalt z. B. mit  $n=1$ ,  $m=2$  und  $\varphi_n = 0$  anhand nebenstehender Skizze klar.

Setzt man in die Definitionsgleichung für die Wirkleistung ein, so folgt unter Beachtung der Orthogonalitätsrelation



$$P = \frac{1}{T} \int_0^T \hat{u} \sin(\omega t) [\hat{i}_0 + \hat{i}_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + \hat{i}_2 \sin(2\omega t + \varphi_2) + \dots] dt = U I_1 \cos(\varphi_1)$$

Die Scheinleistung ergibt sich zu

$$S = UI = U \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} I_n^2}$$

Die Blindleistung  $Q = \sqrt{S^2 - P^2}$  ist eine reine Rechengröße. Diese Größe wird üblicherweise von digitalisierenden Leistungsmessern errechnet und angezeigt. Analog arbeitende Leistungsmesser (siehe elektrodynamisches Messgerät) zeigen aufgrund ihrer Bauart nur die Grundschwingungsblindleistung

$$Q_1 = U I_1 \sin(\varphi_1)$$

Diese Größe ergibt sich aus

$$\begin{aligned} Q &= \sqrt{S^2 - P^2} = \sqrt{U^2 (I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + \dots) - U^2 I_1^2 \cos^2(\varphi_1)} = \sqrt{U^2 I_1^2 (1 - \cos^2(\varphi_1)) + U^2 (I_0^2 + I_2^2 + I_3^2 + \dots)} \\ &= \sqrt{Q_1^2 + D^2} \end{aligned}$$

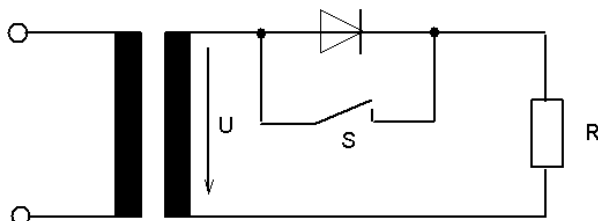
wobei D als Verzerrungsleistung bezeichnet wird. D wird durch die Oberschwingungen des Stromes und eventuell durch einen Gleichstromanteil erzeugt. Diese Größe ist nicht von der Phasenlage der Stromoverschwingungen abhängig, sondern nur von deren Größe.

Für den Leistungsfaktor ergibt sich

$$\lambda = \frac{P}{S} = \frac{U I_1 \cos(\varphi_1)}{U I} = \frac{I_1}{I} \cos(\varphi_1)$$



Beispiel (6.1): Leistungsbestimmung



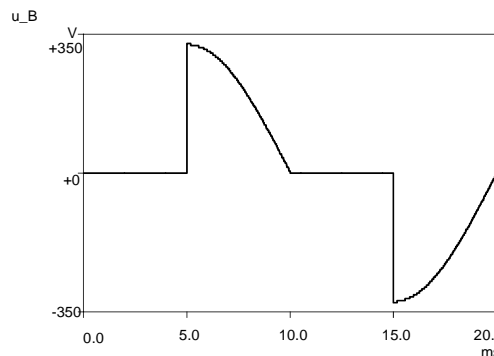
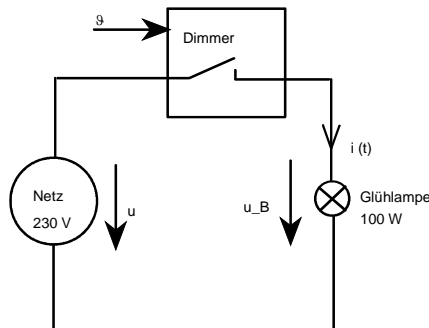
Der Widerstand R der Schaltung beträgt  $20 \Omega$  und die sinusförmige Spannung U hat einen Effektivwert von 100 V.

- Bestimmen Sie den Strom durch R sowie sämtliche Leistungen bei geschlossenem Schalter S.
- Geben Sie den Strom und die Leistungen des Transformators (P, S, Q, D) bei geöffnetem Schalter S an (ideale Diode).



### Beispiel (6.2): Leistungsmessung

Eine Glühlampe (Nennleistung 100 W) ist über einen über einen Dimmer betreibbar. Die Schaltung hat folgendes Aussehen:



Spannung an der Glühlampe bei  $\vartheta = 90^\circ$

Die Netzspannung  $u$  kann als sinusförmig vorausgesetzt werden. Der Dimmer ist als verlustfreier Schalter zu betrachten, mit dem die Spannung an der Glühlampe  $u_B$  über den Anschnittwinkel  $\vartheta$  gesteuert werden kann.

- Berechnen Sie den Effektivwert des Stromes  $i(t)$  als Funktion des Anschnittwinkels  $\vartheta$ .
- Für den Fall  $\vartheta = 90^\circ$  ist der Effektivwert des Stromes zu berechnen.
- Ermitteln Sie Schein-, Wirk-, und Blindleistung der Quelle (Netz) für  $\vartheta = 90^\circ$ .



Beispiel (6.3): Zeigen Sie, dass bei sinusförmiger Spannung und bei nichtsinusförmigem Strom die Blindleistung mit der Gleichung

$$|Q| = \sqrt{(U I_1 \sin(\varphi_1))^2 + U^2 (I_0^2 + I_2^2 + \dots)} = \sqrt{(U I_1 \sin(\varphi_1))^2 + D^2} \text{ ausgedrückt werden kann}$$

### Benennungen bei nichtsinusförmigem Verlauf von Spannung und Strom

In diesem Fall lassen sich die Größen durch

$$\begin{aligned} u(t) &= U_0 + \hat{u}_1 \sin(\omega t + \varphi_{1u}) + \hat{u}_2 \sin(2\omega t + \varphi_{2u}) + \hat{u}_3 \sin(3\omega t + \varphi_{3u}) + \dots \\ i(t) &= I_0 + \hat{i}_1 \sin(\omega t + \varphi_{1i}) + \hat{i}_2 \sin(2\omega t + \varphi_{2i}) + \hat{i}_3 \sin(3\omega t + \varphi_{3i}) + \dots \end{aligned}$$

ausdrücken und die Wirkleistung errechnet sich unter Beachtung der Orthogonalitätseigenschaft zu

$$P = U_0 I_0 + U_1 I_1 \cos(\varphi_{1u} - \varphi_{1i}) + U_2 I_2 \cos(\varphi_{2u} - \varphi_{2i}) + \dots$$

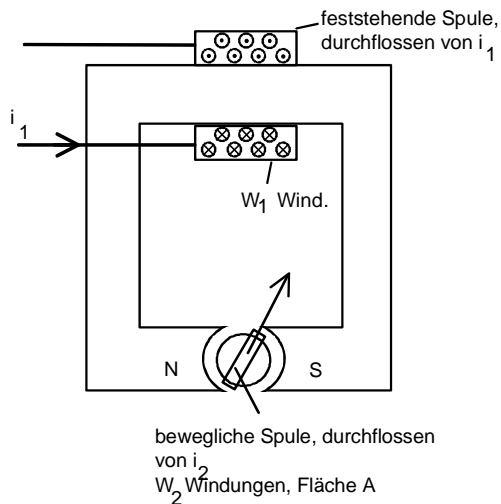
Allgemein ergibt sich der Teilleistungsterm  $P_n$ , der durch die  $n$ -ten Oberschwingungen aus Strom und Spannung gebildet wird zu

$$P_n = \frac{\hat{u}_n \hat{i}_n}{2} \cos(\varphi_{nu} - \varphi_{ni}) = U_n I_n \cos(\varphi_n)$$

## 6.2 Messeinrichtungen zur Leistungsmessung

### 6.2.1 Elektrodynamische Messinstrumente

Beim elektrodynamischen Messwerk ist, verglichen mit dem Drehspulmesswerk, der Dauermagnet durch einen Elektromagneten ersetzt.



Verschieden Ausführungsformen sind gebräuchlich (eisenlos und eisengeschlossen)

Magnetische Induktion durch  $i_1$  bei Luftspaltbreite (zwischen der beweglichen Spule)  $a$

$$B = \frac{\mu_0 W_1}{a} i_1$$

Dann wird das elektrische Moment (siehe Drehspulinstrument)

$$M_{el} = \frac{\mu_0 W_1 W_2 A}{a} i_1 i_2$$

Für das Direktionsmoments gilt  $M_D = D\alpha$ . Der Zeiger stellt sich so ein, dass  $M_{el} = M_D$  gilt

$$\frac{\mu_0 W_1 W_2 A}{a} i_1 i_2 = D\alpha$$

Für den Ausschlagwinkel folgt

$$\alpha = \frac{\mu_0 W_1 W_2 A}{aD} i_1 i_2$$

Wird die Drehspule durch einen vorgeschalteten Widerstand  $R_V$  zum Spannungspfad, so gilt für  $i_2$  bei einem Spulenwiderstand  $R_i$

$$i_2 = \frac{u_2}{R_V + R_i}$$

Dann wird

$$\alpha = \frac{\mu_0 W_1 W_2 A}{aD(R_V + R_i)} i_1 u_2 = Kp(t)$$

der Ausschlagwinkel proportional zur Augenblicksleistung.

Sei  $\omega_0$  die Eigenfrequenz des Messgerätes, so können zwei Fälle unterschieden werden.

$2\omega < \omega_0 \rightarrow$  Die Augenblicksleistung  $p(t)$  wird geschrieben bzw. angezeigt

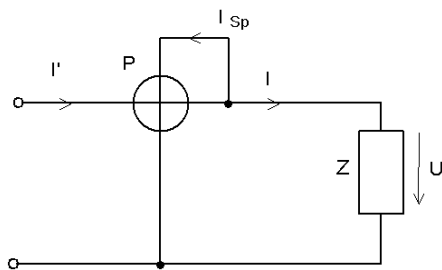
$2\omega > \omega_0 \rightarrow$  Durch die Massenträgheit des beweglichen Organs erfolgt eine

Mittelwertbildung und die Anzeige wird  $\bar{\alpha} = \frac{K}{T} \int_0^T p(t) dt = K P$

### 6.2.1.1 Schaltungsarten von Wattmetern

Da bei der Messung der elektrischen Leistung Spannung und Strom gemessen werden müssen, ist unter Umständen der Eigenverbrauch der Geräte zu berücksichtigen.

#### Spannungsrichtige Schaltung



$I_{SP}$  = Strom im Spannungspfad

$P_r = U I$  richtige Leistung

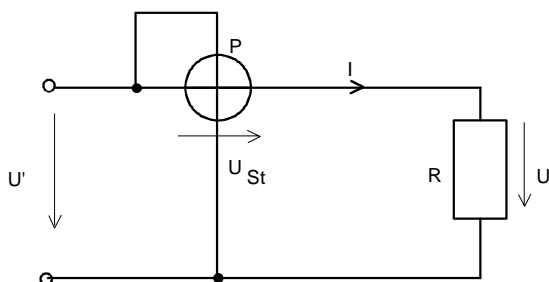
$P_a = U I'$  angezeigte Leistung

$P_a = U (I_{SP} + I) = P_{SP} + P_r$

mit  $P_{SP}$  = Verlustleistung des Spannungspfad

Der Fehler ist daher  $F = P_a - P_r = P_{SP}$ ; d.h. es wird immer ein größerer Wert angezeigt.

#### Stromrichtige Schaltung



$P_r = U I$  richtige Leistung

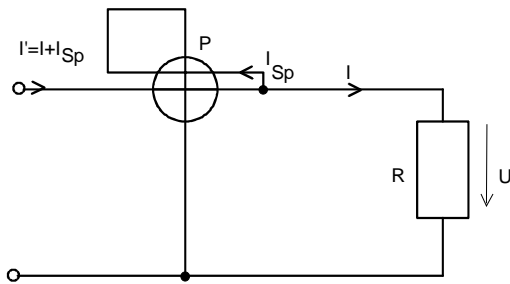
$P_a = U' I$  angezeigte Leistung

$P_a = (U_{St} + U) I = P_{St} + P_r$

mit  $P_{St}$  = Verlustleistung des Strompfades

Auch hier wird immer ein zu großer Wert angezeigt  $F = P_a - P_r = P_{St}$ .

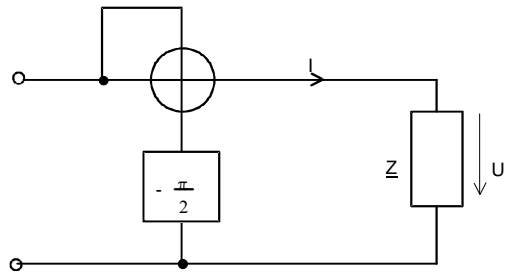
#### Fehlerkompensation (Wattmeter mit Korrekturspule)



Das Magnetfeld der Korrekturspule ist dem Magnetfeld der Stromfadenspule entgegengesetzt.

$$P_a = U I' - U I_{Sp} = U (I + I_{Sp}) - U I_{Sp} = U I = P_r$$

### Messung der Blindleistung



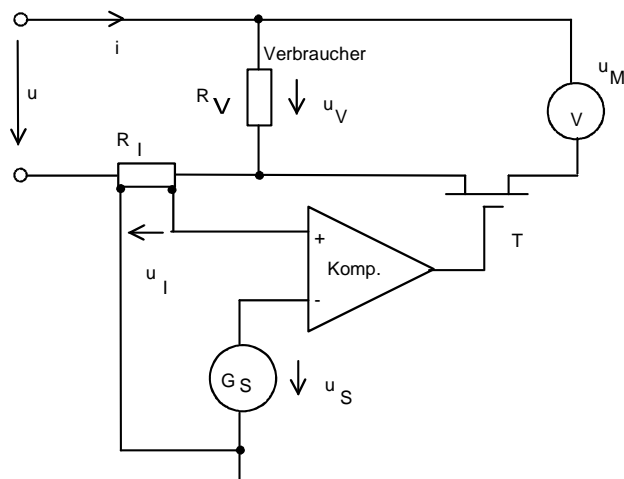
Bei Verwendung eines zusätzlichen Phasenschiebers kann mit dem Elektrodynamischen Messinstrument auch Blindleistung gemessen werden. Die Phasendrehung um  $-90^\circ$  erfolgt zweckmäßig im Spannungspfad. Bei sinusförmigen Größen gilt:

$$\bar{\alpha} = KUI \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) = KUI \sin(\varphi) = KQ$$

Bei sinusförmiger Spannung und nichtsinusförmigem Strom wird bei dieser Schaltung wegen der Orthogonalität die Grundschwingungsblindleistung  $Q_1 = KUI_1 \sin(\varphi_1)$  angezeigt.

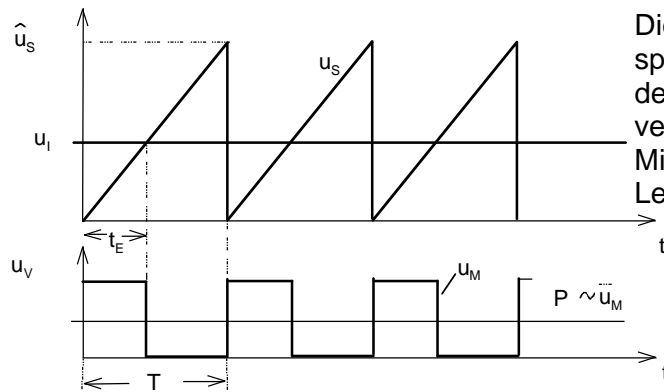
## 6.2.2 Time Division Verfahren

Vor allem kostengünstige Leistungsmesser zum Einbau in Schalttafeln arbeiten nach folgendem Prinzip



$R_V$  = Verbraucherwiderstand  
 $R_I$  = Strommesswiderstand  
 Komp. = Komparator  
 $G_S$  = Sägezahngenerator  
 T = Transistor als Schalter  
 V = Drehspulmesswerk

Die Funktionsweise lässt sich anhand des folgenden Bildes veranschaulichen. Es wird eine Gleichspannung  $u$  und ein ohmscher Verbraucher  $R_V$  angenommen.



Die kontinuierlich erzeugte Sägezahnspannung mit der Periodendauer  $T$  wird mit der stromproportionalen Gleichspannung  $u_I$  verglichen. Daraus ergibt sich die Zeit  $t_E$ . Der Mittelwert der Spannung  $u_M$  ist dann der Leistung proportional.

Unter der Voraussetzung  $T \ll 1/f_M$  ( $f_M$  ist die Eigenfrequenz des Drehspulmesswerkes) gilt

$$\beta = \frac{t_E}{T} = \frac{u_I}{\hat{u}_s} = \frac{R_I i}{\hat{u}_s}$$

und damit ergibt sich für die Spannung am Drehspulmesswerk

$$\bar{u}_M = \beta u_v = \frac{R_I}{\hat{u}_s} i \quad u_v = K P$$

## 7 Digitale Verarbeitung analoger Messsignale

Bei der Konzeptionserstellung für die messtechnische Instrumentierung eines Prozesses sind vorab Überlegungen anzustellen, welche Prozesssignale erfasst werden müssen, damit der Prozess hinreichend genau beobachtet, gesteuert oder geregelt werden kann. Ohne Anspruch auf Vollständigkeit ist folgendes festzulegen:

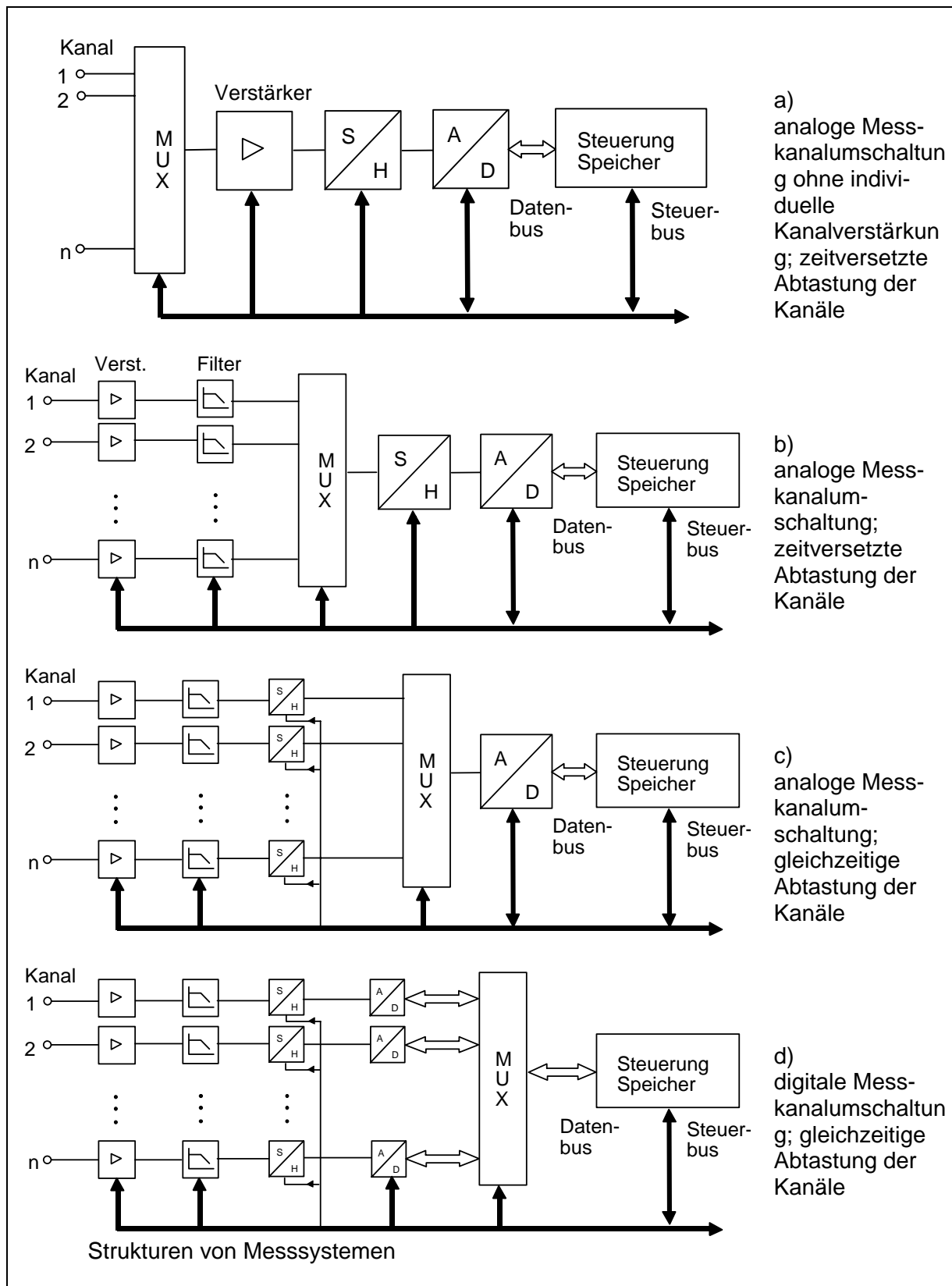
- Wie viel Messgrößen sind zu erfassen und welcher Art (analog oder digital) sind diese Größen?
- Ist eine Signalkonditionierung erforderlich oder liegen die Messgrößen als Einheitssignale bereits vor (z.B. 0-10 V oder 0/4-20mA)?
- Für welche Messgrößen ist eine Potentialtrennung erforderlich. Sind massebezogene Kanäle oder Differenzkanäle hinreichend?
- Welche Messunsicherheit ist für die einzelnen Messgrößen zulässig und welche Schlussfolgerungen sind daraus für die A/D-Umsetzer-Auflösungen zu ziehen?
- Welchen Frequenzinhalt haben diese Größen und welche Forderungen ergeben sich hieraus für die Abtastfrequenzen und die Summenabtastfrequenz der Messeinrichtung?
- Müssen die Messgrößen zeitgleich erfasst werden weil Berechnungen verschiedener Messgrößen zu gemeinsamen Zeitpunkten erforderlich sind (z. B. Leistungsmessung), oder können die Messgrößen im Zeitmultiplexverfahren (zeitlich nacheinander) erfasst werden?
- Welche Messdauer ist für die Kanäle geplant und was bedeutet dies für den Messwert-speicher?
- Ist eine Datenreduktion in Form von Triggereinrichtungen oder sonstigen Verfahren erforderlich und wie komplex soll diese Einrichtung sein?
- Ist eine online-Verrechnung der Messdaten erforderlich?
- Welche Anforderungen sind an die Robustheit der Messanlage zu stellen (Verhalten bei Störungen, Selbststartfähigkeit...)?
- Welche Anforderungen sind an die Verfügbarkeit (zulässige Ausfallrate, USV...) zu stellen?
- Ist ein Einsatz bei besonderen Umweltbedingungen geplant (Temperaturbereich, Klima, Schockbeanspruchung, Explosionsschutz, Einsatz in der Humanmedizin...)?
- Welche Entfernungen zwischen PC und Messort liegen vor und was bedeutet dies für das Interface?
- Müssen mehrere Messgeräte an unterschiedlichen Messorten zusammenarbeiten und soll die Messung synchron erfolgen?

Aus den verschiedenen Anforderungen haben sich eine Reihe von messtechnischen Lösungen ergeben, die nachfolgend diskutiert werden. Derzeit ist ein Trend darin zu sehen, dass versucht wird, immer mehr analoge Funktionen von Messbaugruppen durch "Software", d. h. durch Rechenprogramme auf digitalen Signalprozessoren zu verwirklichen. Beispiele hierfür sind Kennlinienkorrekturen, Kennwertberechnungen (Mittelwert, Effektivwert...), Signalfilterung usw.

Zuerst werden die Strukturen vorgestellt und anschließend die Strukturelemente (Verstärker, AD-Umsetzer...) näher erläutert. Abschließend sind die wichtigsten Begriffe und Verfahren zur qualitativen Beurteilung von diesen Systemen angegeben.

### 7.1 Strukturen von Messsystemen

Die Grundstrukturen der Messsysteme sind im nachfolgendem Bild wiedergegeben.

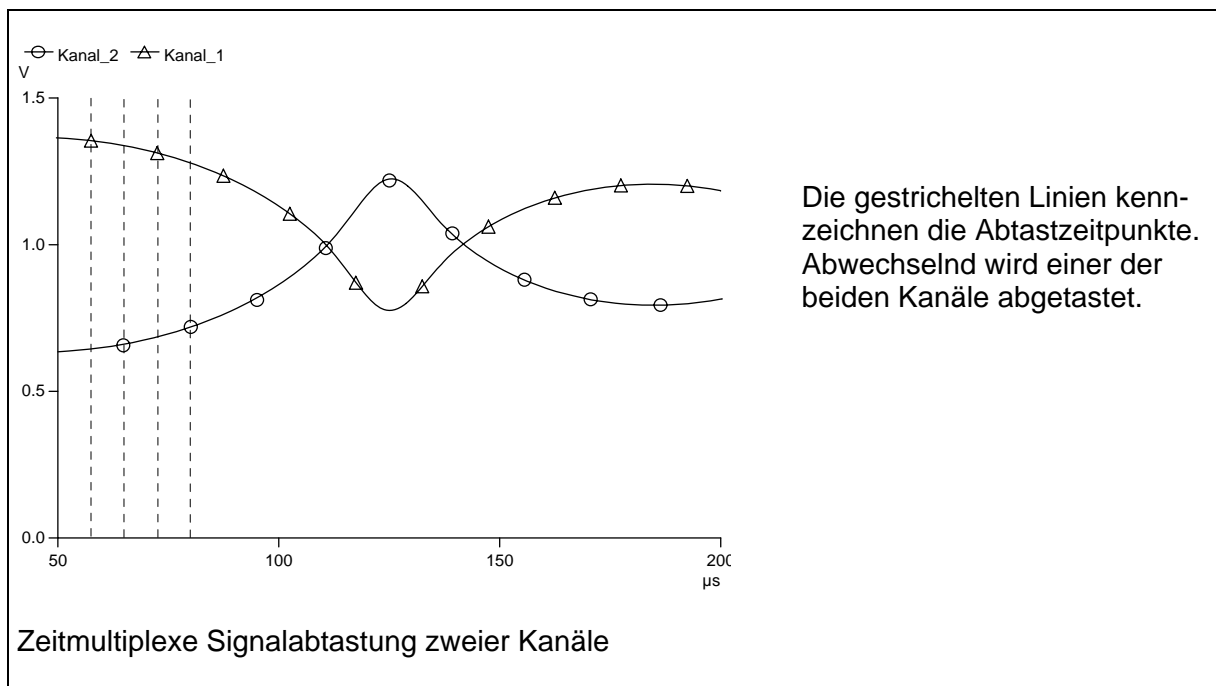




Die in Bild a) gezeigte Lösung wird bei einfachen Systemen (PC-Einsteckkarten) aus Kostengründen angewendet, hat aber eine Reihe entscheidender Nachteile gegenüber den übrigen Lösungen. Die Problematik einer solchen Anordnung liegt bei den gemultiplexten Signaleingängen, da hier das Messsignal erst hinter den Multiplexern verstärkt wird. Dadurch werden sämtliche Fehler des Multiplexers mitverstärkt und sind dem Messsignal überlagert. Hinzu kommt, dass die Messunsicherheit entscheidend vom Innenwiderstand der Signalquellen abhängt.

Wie später noch gezeigt wird, ist zur Vermeidung von Aliasingeffekten ein Filter im Regelfall erforderlich oder die Abtastfrequenz des Messsignals muss entsprechend hoch gewählt werden.

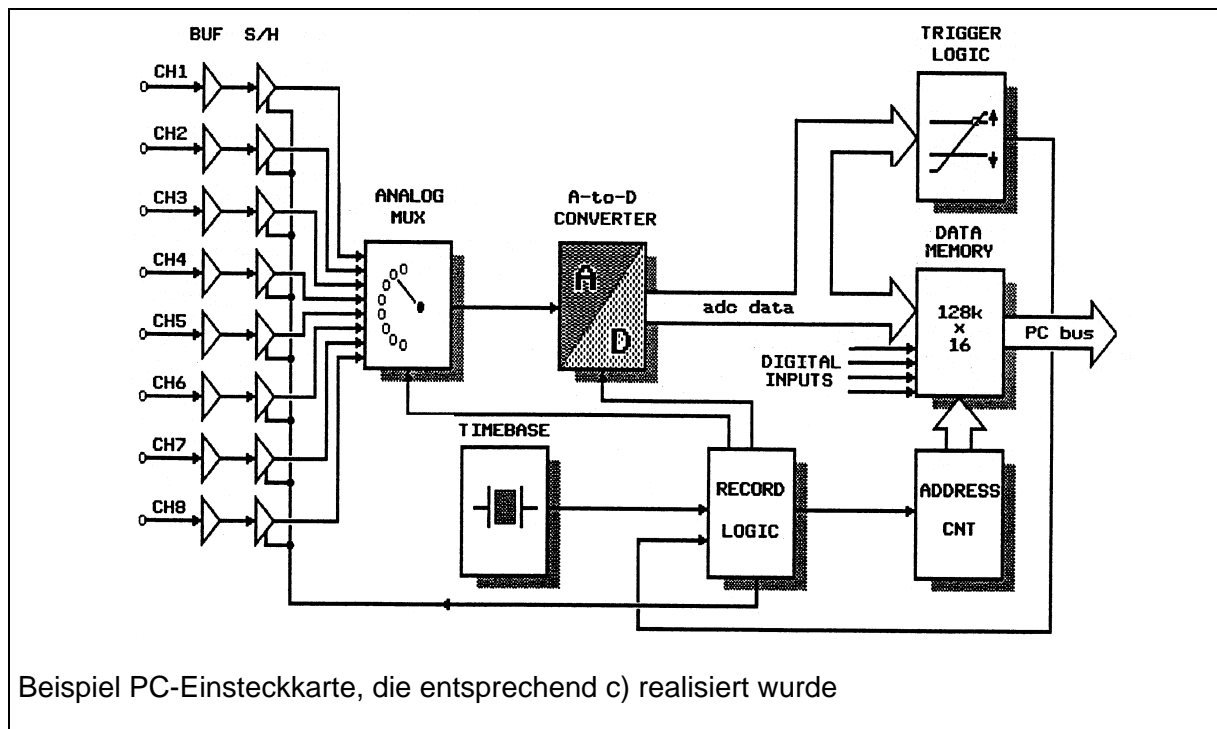
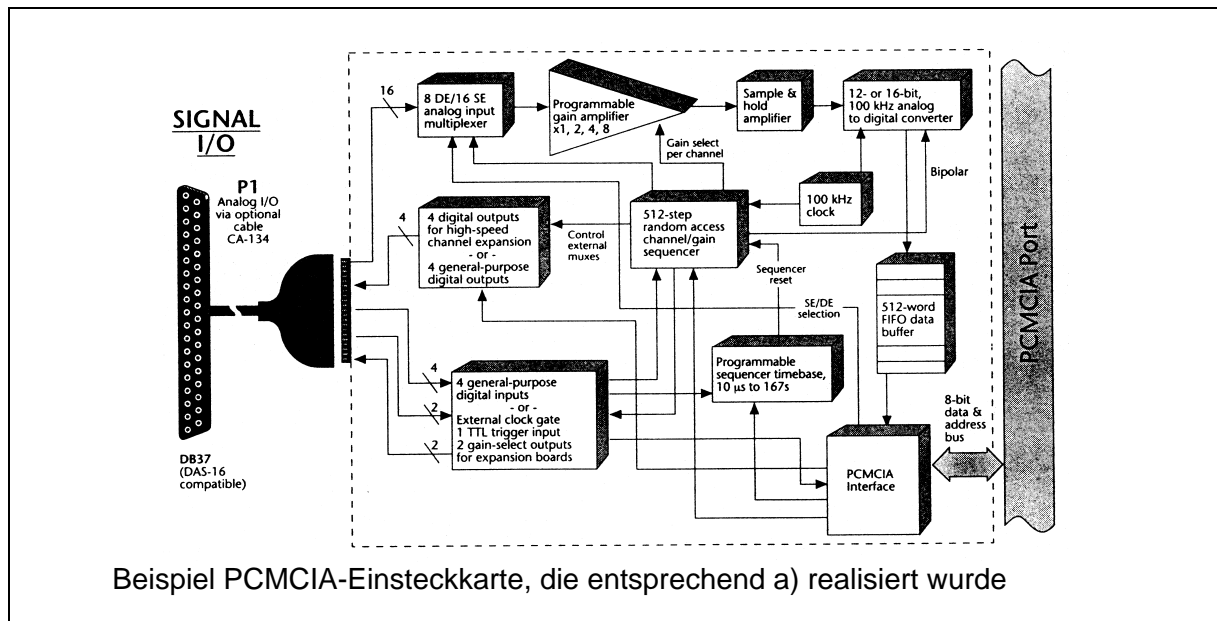
Da nur ein S&H-Baustein im System vorhanden ist, ist eine Erfassung aller n-Kanäle zu einem Zeitpunkt nicht möglich.



Ob die gleichzeitige Signalerfassung erforderlich ist, hängt direkt von der Anwendung ab. Fehlende Messwerte können bei intelligenten Systemen mit Rechnerunterstützung online durch Interpolationsverfahren berechnet werden. Dies wird jedoch bisher nur bei neueren Systemen mit erheblichen Rechenleistungen realisiert. Eine Anordnung nach Bild b) kann ebenfalls nicht mehrere Kanäle gleichzeitig erfassen und verarbeiten und arbeitet nach dem Zeitmultiplexverfahren. Die beschriebenen Nachteile der Lösung nach a) sind aber nicht mehr vorhanden. Bei dieser Lösung ist eine unabhängige Spannungsbereichswahl für jeden Kanal möglich und die zu messende Signalquelle wird nicht durch Leckströme des Multiplexers belastet. Der auch weiterhin in den Multiplexer fließende Leckstrom wird bei Variante b) von den ausgangsseitig niederohmigen Verstärkern problemlos zur Verfügung gestellt und verursacht keinen Spannungsabfall am Innenwiderstand der Messquelle. Ob ein Tiefpassfilter zur Vermeidung von Aliasingeffekten benötigt wird, hängt davon ab, ob das Messsignal Frequenzanteile oberhalb der halben Abtastfrequenz besitzt oder nicht. Die Problematik bezüglich der Wahl einer hinreichenden Abtastfrequenz wird später behandelt. Müssen alle Kanäle zu einem Zeitpunkt erfasst werden, so kommen die Anordnungen nach Bild c) und d) in Betracht. Die Anordnung nach d) ermöglicht eine parallele A/D-Umsetzung aller Kanäle, wodurch sich hohe Datenraten erzielen lassen. Diese Anordnung ist durch die n AD-Umsetzer relativ teuer. Bei der Lösung nach c) sind die S&H Bausteine so auszulegen, dass die n-fache A/D-Umsetzzeit nur einen tolerierbaren Spannungsrückgang (durch Droop-Rate) verursacht.

Manche PC-Einsteckkarten tasten grundsätzlich mit der höchst möglichen Abtastrate des AD-Umsetzers ab und speichern nur entsprechend der eingestellten Abtastrate. Sie haben dadurch scheinbar auch bei gemultiplexten Systemen einen vernachlässigbaren Zeitversatz zwischen den Kanälen. Beispielsweise sei die maximale AD-Umsetzfrequenz 10 kHz und es sollen ein Strom- und ein Spannungskanals mit 50 Hz Sinussignal abgetastet werden. Der Zeitliche Fehler von nur 100 ms entspricht einer Phasenverschiebung von  $1,8^\circ$ . Dieser ist unabhängig von der Speicherrate, die in diesem Fall üblicherweise 1 oder 5 kHz je Kanal beträgt. Damit wird die Blindleistungsbestimmung bei nahezu ohmschen Lasten praktisch nicht möglich.

Nachfolgend sind zwei Beispiele von handelsüblichen PC gestützten Messsystemen (PC-Einsteckkarten) angegeben, die entsprechend a) bzw. c) realisiert sind.



Die beiden Systeme unterscheiden sich stark hinsichtlich ihres Preises (ca. 800 Euro für PCMCIA-Karte gegenüber ca. 2.500 Euro für PC-Einsteckkarte). Beide Systeme überlassen

die Problematik der Signal-Bandbegrenzung zur Vermeidung von Aliasingfehlern dem Anwender.

Ein weiterer wichtiger Punkt für die Verwendbarkeit stellt die unterschiedlichen Möglichkeiten der Einstellung der Abtastraten für die einzelnen Kanäle dar. Einfache Systeme erlauben die Abtastrate des AD-Umsetzers (Summenabtastrate) lediglich gleichmäßig auf die gemultiplexten Kanäle aufzuteilen. Dies führt dazu, dass die Abtastrate nicht entsprechend den Anforderungen des Messprozesses aufteilbar ist. Häufig kommt es vor, dass einige Kanäle schnell und viele Kanäle langsam abzutasten sind. Muss man sich nach der schnellsten Abtastrate richten und gilt diese für sämtliche Kanäle, so ist die Gefahr, ein "Datengrab" zu erzeugen, recht hoch. Besser geeignet sind Systeme, bei denen jedem Kanal eine individuelle Abtastrate zugeordnet werden kann. Häufig reicht es, mindesten zwei unterschiedliche Abtastraten für die Gruppe der langsamen und der schnellen Kanäle zuzuordnen zu können.

## 7.2 Sample & Hold Verstärker

Sample & Hold-Bausteine haben die Aufgabe, Spannungswerte für eine bestimmte Zeit „einzufrieren“. Während dieser Zeit kann ein nachgeschalteter A/D-Umsetzer eine konstante Spannung umsetzen. Die Notwendigkeit solcher Bausteine in einem Datenverarbeitungssystem lässt sich anhand folgender Überlegung leicht einsehen. Soll beispielsweise eine sinusförmige Spannung  $u = \hat{u} \sin(\omega t)$  mit  $n$ -Bit-Genauigkeit umgesetzt werden, so muss man fordern, dass sich während der Umsetzzeit des A/D-Umsetzers die Spannung  $u$  um nicht mehr als  $1 \text{ LSB} = 2\hat{u} / (2^n - 1)$  ändert. Andernfalls könnte man einen A/D-Umsetzer mit einer geringeren Auflösung einsetzen. Im Nullpunkt von  $u$  (größte Steigung) gilt:

$$\left. \frac{du}{dt} \right|_{t=0} = \hat{u}\omega$$

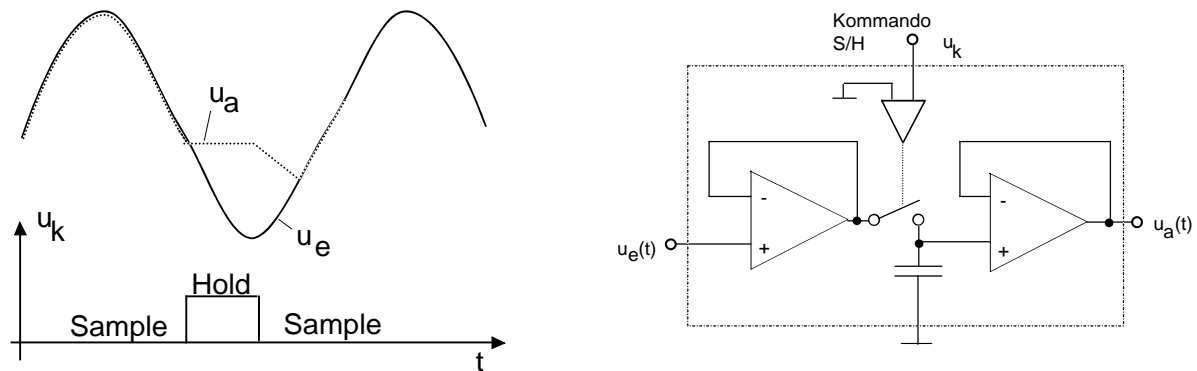
mit  $du \approx \Delta u = 1 \text{ LSB}$  und  $dt \approx t_u$  (Umsetzzeit des ADU) ergibt sich die höchste zu verarbeitende Frequenz zu

$$f_{\max} = \frac{1}{\pi(2^n - 1)t_u}$$

Beispiel: 12-Bit-ADU mit  $1 \mu\text{s}$  Umsetzzeit (z.B. Micro Networks MN 5246)

$$f_{\max} = \frac{1}{\pi(2^{12} - 1) 1 \mu\text{s}} = 78 \text{ Hz}$$

Dieses Ergebnis besagt, dass ein ADU mit  $10^6$  Messungen/s lediglich analoge Signale bis 78 Hz verarbeiten kann, falls kein S&H-Baustein eingesetzt wird.



Arbeitsweise eines Sample &amp; Hold-Verstärkers und Prinzipbild

Wird ein S&H-Baustein vor den ADU geschaltet, so kann der umzusetzende Wert während der Umsetzzeit konstant gehalten werden. Zwischen dem Eintreffen des Haltebefehls und seiner Ausführung vergeht eine gewisse Zeit (aperture time), die für sämtliche Kanäle eine gleichlange Verzögerung der Signale bedeutet und üblicherweise nicht stört. Diese Zeit ist jedoch unsicher, kann also schwanken (aperture uncertainty). Diese Unsicherheit bestimmt die maximale Umsetzrate und liegt üblicherweise im ps-Bereich.

Die Anforderungen an einen S&H-Baustein sind extrem, da er einerseits die Geschwindigkeit eines HF-Verstärkers besitzen soll und andererseits die Genauigkeit eines Präzisionsverstärkers. Entsprechend sind die Kosten für einen solchen Baustein relativ hoch und liegen im Bereich eines ADU. Falls die Verrechnung zeitgleich abgetasteter Kanäle erfolgen muss, kann jedoch auf kanalindividuelle S&H-Bausteine nicht verzichtet werden.

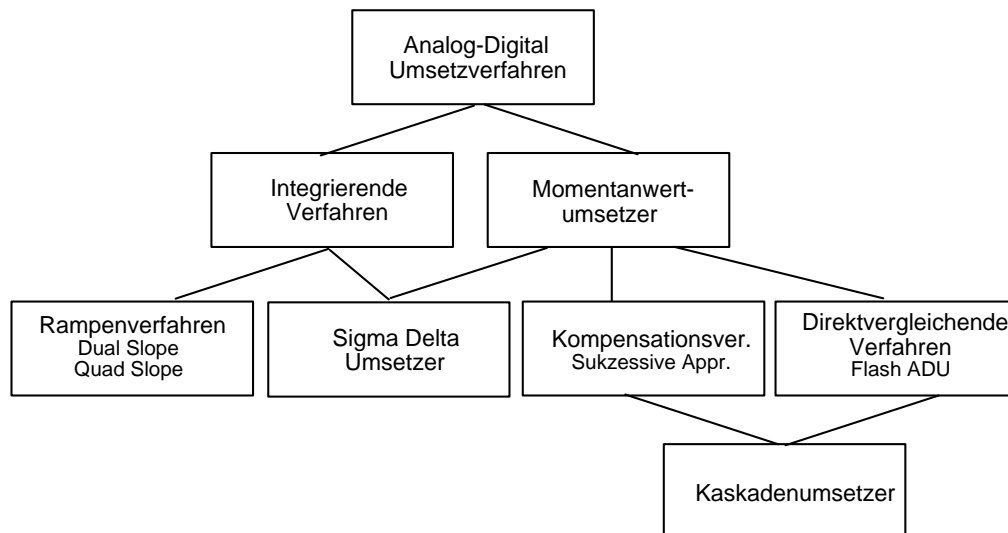
### 7.3 A/D-Umsetzverfahren

A/D-Umsetzer bilden das Bindeglied zwischen der analogen Welt des zu messenden Prozesses und der digitalen Welt der rechnermäßigen Aufbereitung und Weiterverarbeitung. Sie dienen als der Umsetzung der analogen in die digitale Darstellung von Messwerten. Die wichtigsten A/D-Umsetzverfahren für DAS sind

- Sukzessive Approximation
- Kaskadenumsetzer
- Flash ADU

Für Anwendungen, bei denen der Mittelwert einer Größe über eine bestimmte Zeit die interessierende Größe darstellt (z. B. bei Multimetern), gibt es integrierende Verfahren, die hier nicht dargestellt werden sollen.

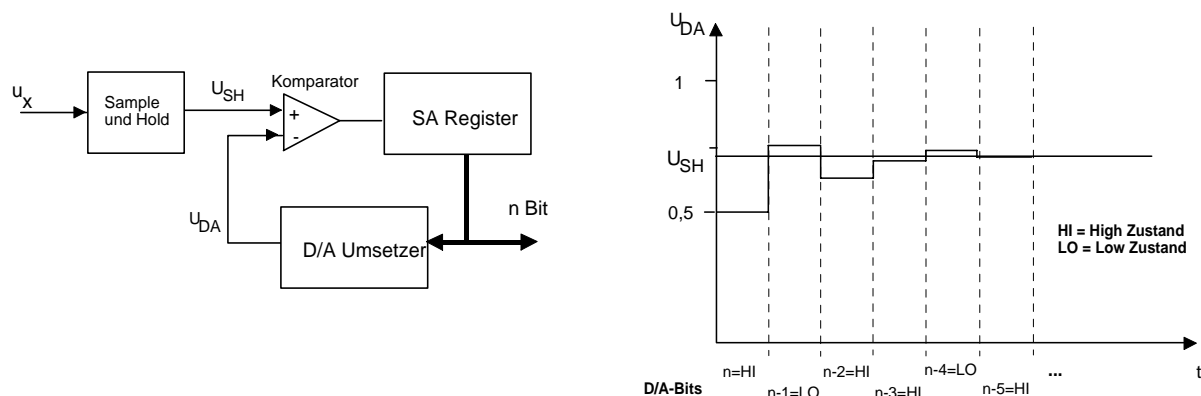
In jüngster Zeit gewinnen Sigma-Delta-Umsetzer an Bedeutung für DAS und werden daher kurz vorgestellt. Nachfolgendes Bild zeigt eine Einteilung der A/D-Umsetzer.



Einteilung der A/D-Umsetzer hinsichtlich der verwendeten Verfahren

### 7.3.1 ADU mit schrittweiser Näherung (Sukzessive Approximation)

Dieses Verfahren wird bei ADUs für DAS recht häufig eingesetzt. Das Wirkprinzip kann mit dem Wägeprinzip verglichen werden. Der ADU besteht aus einem Komparator, einer Ablaufsteuerung (SA Register) und einem D/A-Umsetzer. Das SA-Register setzt, beginnend mit dem höchstwertigen Bit (Wertigkeit =  $\frac{1}{2}$ ), die Vergleichsspannung  $U_{DA}$ . Ist  $U_{DA} < U_{SH}$ , so wird das n-te Bit 1 (High) gesetzt und beibehalten. Andernfalls wird es zurückgesetzt. Sukzessive werden die nächsten Bits zusätzlich hinzugebracht und entschieden, ob sie benötigt werden. Bei einem n-Bit ADU ist der Vorgang nach n-Vergleichsschritten abgeschlossen.

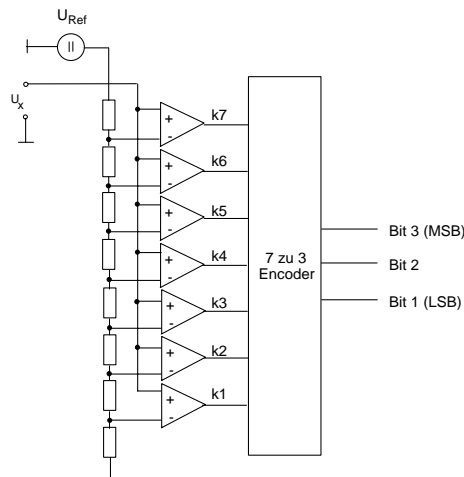


Blockschaltbild des Sukzessiven Approximation Umsetzers und Verlauf der D/A-Umsetzer Ausgangsspannung

### 7.3.2 Flash ADU

Bei diesem Verfahren wird die Eingangsspannung  $U_X$  gleichzeitig mit mehreren äquidistanten Bezugsspannungen verglichen. Diese werden über Widerstandsteiler erzeugt. Liegt z. B.  $U_X$  zwischen  $\frac{3}{7} U_{Ref}$  und  $\frac{4}{7} U_{Ref}$ , so liefern (bei gleichen Widerständen) die Komparatoren  $k_1$

bis  $k_3$  den Logikpegel High und die restlichen Low. Mittels einer Dekodierlogik wird an den Ausgängen der gewünschte Code erzeugt.

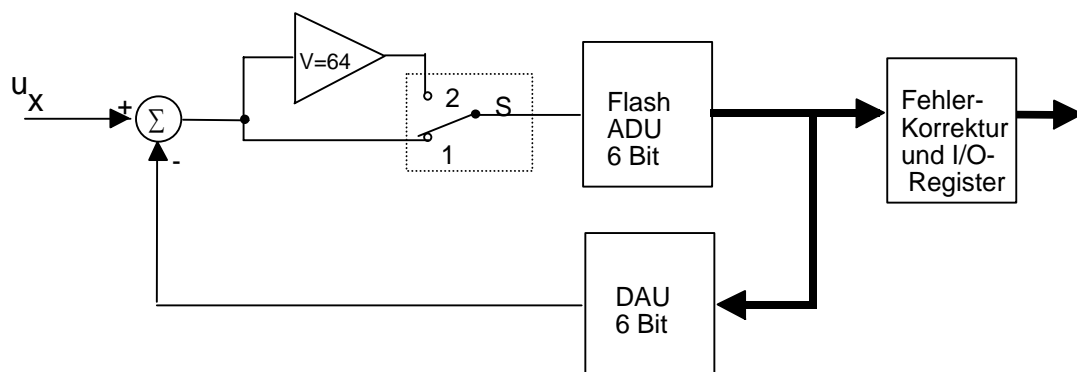


Prinzipschaltbild eine Flash ADU mit 3 Bit

Da bei diesem Verfahren  $2^n - 1$  Komparatoren benötigt werden, beschränkt sich derzeit der Einsatz auf Systeme mit 8 bis maximal 10 Bit. Je weiteres Bit verdoppelt sich die Anzahl der Komparatoren. Der Vorteil dieser Verfahren besteht in der hohen Umsetzfrequenz, die bei 8 Bit Systemen bis zu einigen 100 MHz reicht.

### 7.3.3 Kaskadenumsetzer

Der Kaskadenumsetzer verbindet das Prinzip der sukzessiven Approximation mit dem der direktvergleichenden ADUs. Besonders nachteilig bei den direktvergleichenden ADU (Flash--Umsetzer) ist die hohe Anzahl von benötigten Komparatoren (z. B. 1023 Komparatoren für einen 10 Bit-ADU). Diesen Nachteil kann man vermeiden, wenn man eine Umsetzung in zwei Schritten durchführt.



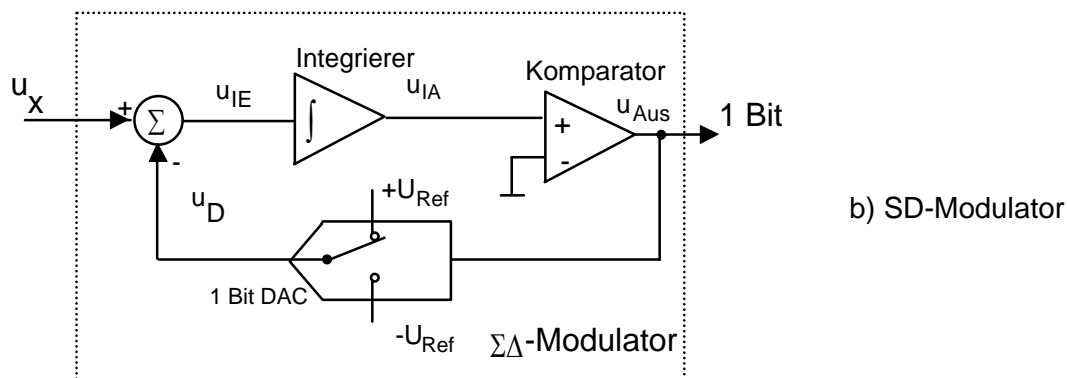
Prinzipschaltbild eines 12 Bit Kaskadenumsetzers

Zu Beginn des Umsetzvorganges steht der Schalter S in Stellung 1 und der Flash-ADU ermittelt die höchstwertigen 6 Bit. Das Ergebnis stellt den grob quantisierten Wert der Eingangsspannung  $u_x$  dar. Danach wird mit einem DAU die zugehörige Analogspannung dargestellt und die Differenz zwischen der Eingangsspannung  $u_x$  und der Ausgangsspannung des DAU gebildet. Damit diese Differenz in den Eingangsspannungsbereich des.

ADU fällt, muss eine Verstärkung in unserem Beispiel um den Faktor  $2^6 = 64$  vorgenommen werden. Dazu wird der Schalter S in die Stellung 2 gebracht. Im zweiten Umsetzzyklus ermittelt der Flash ADU die niederwertigen 6 Bit. Damit das Ergebnis der gesamten Umsetzung nicht schon im Bit 6 unsicher ist, muss der 6-Bit-ADU die Genauigkeit eines 12 - Bit-Umsetzers aufweisen. Kaskadenumsetzer werden in der Praxis sehr häufig eingesetzt, wenn Umsetzfrequenzen  $> 1$  MHz bei Auflösung  $> 10$  Bit erforderlich sind.

### 7.3.4 Sigma-Delta-Umsetzer

Der Sigma-Delta-Umsetzer hat sich im Anwendungsbereich der Audiotechnik durchgesetzt und dringt derzeit auch auf das Gebiet der Messtechnik vor. Mit ihm lassen sich hohe Auflösungen und sehr gute Signal-Rausch-Verhältnisse (SNR) erreichen. Nachfolgendes Bild zeigt, dass der Umsetzer aus einem SD-Modulator und einem Digitalen Filter hoher Ordnung besteht.



#### SD-Umsetzer

Das Grundprinzip des Sigma-Delta-Umsetzer ist ein Regelkreis, bestehend aus Integrierer und nachgeschaltetem Komparator. Da der Komparator nur die Werte "0" und "1" annehmen kann und andererseits der Mittelwert der Summe aus Komparatorsignal und Eingangssignal gerade Null ergeben muss (sonst läuft der Integrierer weg), entspricht der Mittelwert des Komparatorausgangssignals gleich dem Eingangssignal. Da das Ausgangssignal digitaler Natur ist, muss ein 1 Bit DAC dieses Signal zum Vergleich in ein analoges Signal rückwandeln. Andererseits lässt sich durch digitale Filterung der Mittelwert aus dem Komparatorsignal rückgewinnen.

Das Messsignal  $u_x$  wird sehr stark überabgetastet (Oversampling), so dass das Messrauschen über einen großen Frequenzbereich verteilt wird. Im interessierenden Bereich bis zur halben Abtastfrequenz ergibt sich eine verringerte Rauschleistung. Der nach Bild 2.6.2.4.-1 b) dargestellte Regelkreis bewirkt zusätzlich eine Verschiebung des Rauschspektrums zu hohen Frequenzen hin (Noise-Shaping).

Die Funktion soll an einem einfachen Beispiel im Zeitbereich gezeigt werden. Sei  $u_x = 0,6$  V und  $+U_{Ref} = 1$  V sowie  $-U_{Ref} = 0$  V. Der Integrierer kann als Baustein angesehen werden, der den letzten Spannungswert hält und einen neu hinzukommenden hinzuaddiert. Der

Komparator schaltet seinen Ausgang auf "1", falls  $u_{iA} \geq 0$  V gilt. Ist  $u_{Aus}$  gleich "1", so wird  $u_D = +U_{Ref}$ . Dann kann folgende Tabelle angegeben werden

Hierzu dient das nachgeschaltete Digitale Filter. Einerseits wird das Herausfiltern des Rauschens im interessierenden Frequenzbereich bewirkt und andererseits kann eine Reduzierung der Abtastfrequenz (Decimation) erfolgen.

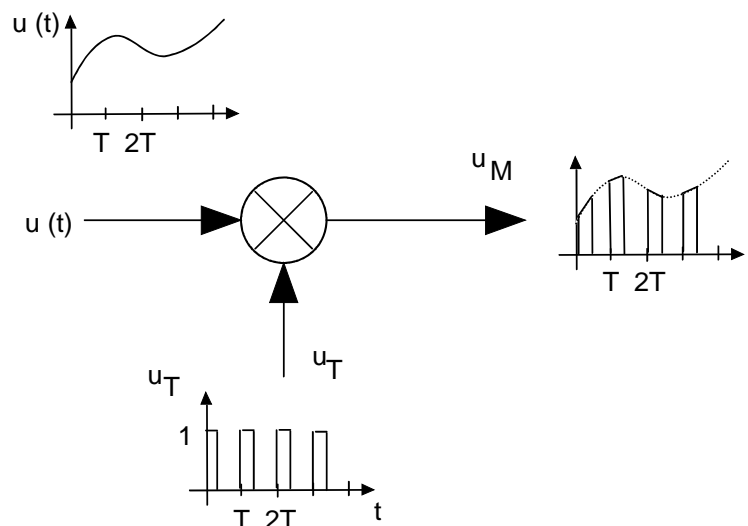
Mit diesen Umsetzern sind derzeit Auflösungen zwischen 16 und 24 Bit möglich.

## 7.4 Wahl der Abtastfrequenz

Eine für praktische Belange sehr wichtige Frage ist die nach der erforderlichen Abtastfrequenz. Die Preise für DAS sind u. a. eine Frage nach der Messgeschwindigkeit des Systems. Oft wird aus Unkenntnis zu langsam abgetastet und es entstehen Aliasingfehler, die die Messung unbrauchbar machen. Wird zu schnell abgetastet, so ist man zwar auf der "sicheren Seite"; es entstehen jedoch unnötig viele Daten, die möglicherweise nachverarbeitet werden sollen.

Bei der Digitalisierung analoger Signale entstehen einzelne Werte des Signals zu den Abtastzeitpunkten. Ein analoges Modell hierfür ist, das Signal mit einer Folge von Nadelimpulsen zu multiplizieren und dadurch das Signal auszublenden.

Um die für den Frequenzinhalt des zu erfassenden Analogsignals angepasste Abtastfrequenz zu finden, soll der Abtastprozess folgendermaßen dargestellt werden.

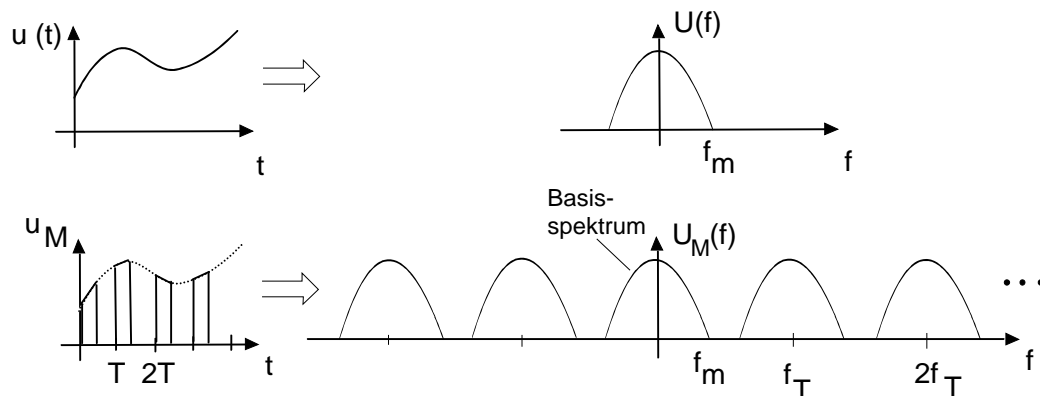


Abgetastetes Messsignal als multiplikatives Produkt

Obiges Bild stellt den Abtastprozess, der üblicherweise von der S&H-ADU-Kombination vorgenommen wird, als Multiplikation der Messgröße  $u$  mit einem Modulator  $u_T$  dar. Das Ausgangssignal  $u_M$  ist noch kein digitales Signal, da es zuerst von einem S&H-Baustein gehalten und vom ADU quantisiert werden muss. Folgendes kann festgestellt werden. Lässt man die Abtastzeit  $T$  gegen Null gehen, so erhält man offensichtlich das analoge Signal am Ausgang des Multiplizierers. Um zu verstehen was bei der Multiplikation passiert, soll zuerst ein Gedankenexperiment durchgeführt werden. Sind  $u$  und  $u_T$  zwei sinusförmige Signale mit den Frequenzen  $f$  und  $f_T$ , so ergibt die Multiplikation unter Beachtung dass  $\sin(\alpha) \sin(\beta) = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$  gilt, die Frequenzen  $f - f_T$  und  $f + f_T$ . Die Funktion  $u_T$  ist eine mit  $1/T = f_T$  periodische Funktion und besitzt ein breites Spektrum, das um so breiter wird, je schmaler der Modulationsimpuls ( $\delta$ -Funktion) wird. Es lässt sich zeigen, dass am Ausgang entste-



hende Spektrum mit der Abtastfrequenz  $f_T$  periodisch wird. Ist  $f_m$  die höchste im Analogsignal vorkommende Frequenz, so ergibt sich folgendes Bild für die Spektren der Signale.

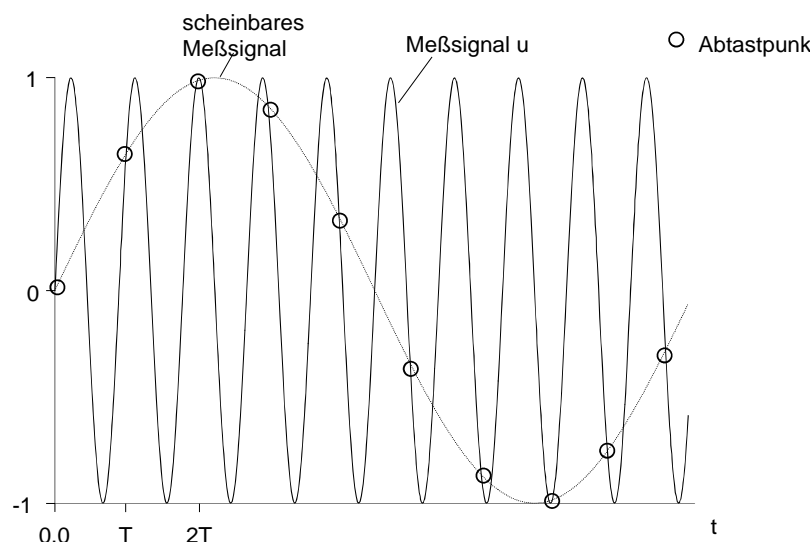


### Spektrum des Analogsignals und des abgetasteten Signals

Das Spektrum des abgetasteten Signals ist mit der Abtastfrequenz  $f_T$  periodisch und es ergibt sich eine Wiederholung des Basisspektrums. Um Überlappungen der durch die Abtastung entstehenden zusätzlichen Frequenzanteile mit dem Basisspektrum zu vermeiden, muss für die Abtastfrequenz nach Shannon gelten:

$$f_T > 2 f_m$$

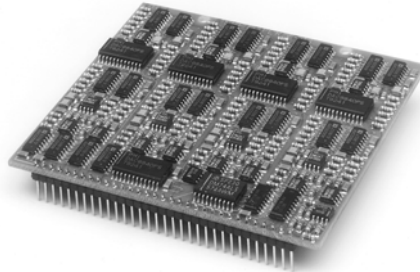
Wird diese Bedingung nicht eingehalten, so ergeben sich Effekte wie der im folgenden Bild dargestellte. In diesem Fall ist die Differenzfrequenz zwischen Signal- und Abtastfrequenz als scheinbare Messsignalfrequenz zu sehen.



Durch Unterabtastung ergibt sich scheinbar ein Signal mit tiefer Frequenz

Scheinbar ergibt sich für das zu langsam abgetastete Messsignal eine Messpunktfolge, die als Sinus mit niedriger Frequenz interpretiert wird. Um solche Effekte zu vermeiden, kann einerseits die Abtastfrequenz hinreichend hoch gewählt werden, andererseits hat der Anwender dafür Sorge zu tragen, dass das zu messende Analogsignal keine relevanten Frequenzanteile oberhalb der Frequenz  $f_m$  aufweist. Dies kann dadurch erreicht werden,

dass vor der Digitalisierung das Signal mit einem Antialiasingfilter auf den Frequenzbereich bis  $f_m$  begrenzt wird. Diese Filter sind verhältnismäßig teuer, da es sich um analoge Filter handeln muss, die entsprechend der gewählten Abtastfrequenz  $f_T$  variabel einstellbar sein müssen.



Beispiel eines 4-kanaligen Antialiasingfilters für ein Messsystem das vollkommen rechnergesteuert einstellbar ist

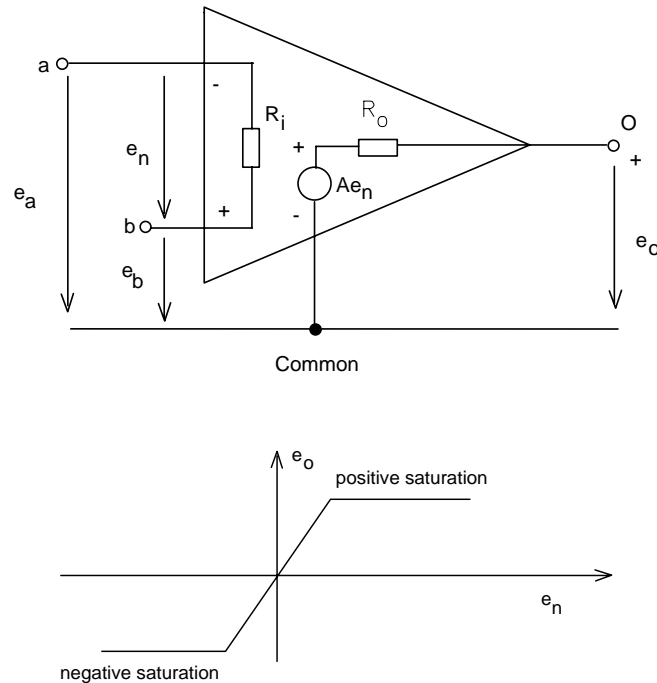
Bei PC-Einsteckkarten sind Antialiasingfilter aus Kostengründen nahezu nicht vorhanden. Der Anwender hat für die Vermeidung dieser Effekte selbst Sorge zu tragen.

Bei Messungen in der Praxis wird daher meist empfohlen, eine Abtastfrequenz zu wählen, die 5...10 mal so hoch ist wie die höchste noch relevante Signalfrequenz  $f_m$ . Auch hier werden häufig Fehler dadurch gemacht, dass diese Frequenz nicht richtig abgeschätzt wird. Soll beispielsweise ein Rechtecksignal mit einer Wiederholfrequenz von 1 kHz erfasst werden, so reicht es bei weitem nicht aus, die Abtastfrequenz mit 5...10 kHz zu wählen.

Denkt man sich das periodische Rechtecksignal in seine Frequenzanteile zerlegt (Fourier-Reihenentwicklung), so lassen sich quantitative Angaben machen. Da ein Rechtecksignal über steile Flanken verfügt, ist leicht einsichtig, dass eine hohe Abtastfrequenz erforderlich ist. Welcher Frequenzanteil eines Signals noch relevant ist, hängt auch von der Auflösung der nachfolgenden Digitalisierung ab. Beispielsweise sind Frequenzanteile, die unterhalb -74 dB des Aussteuerbereiches eines 12 Bit ADU liegen, nicht mehr relevant, da sie im Quantisierungsrauschen des ADU untergehen.

## 8 Messschaltungen mit Operationsverstärkern

Nachfolgend ist die äquivalente Schaltung eines Operationsverstärkers (Operational Amplifier; OA) dargestellt. Die Versorgungsleitungen  $\pm V_{CC}$  (üblicherweise  $\pm 15\text{ V}$ ) sind nicht dargestellt. Die Spannungen beziehen sich auf ein "common" von üblicherweise  $0\text{ V}$ . Die Eingänge sind a (non-inverting) und b (inverting).



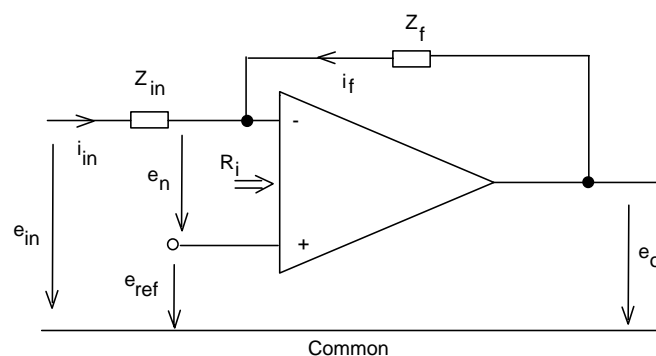
Typische Parameter (Type 741)  
 Input Resistance =  $R_i = 20\text{ M}\Omega$   
 Output Resistance  $R_o = 75\Omega$   
 Open Loop Gain  $A = 200000\text{ Volt/Volt}$

Bild 8-1 : Äquivalente Schaltung eines OA

Die Ausgangsspannung  $e_o$  ergibt sich aus der mit dem Verstärkungsfaktor  $A$  verstärkten Eingangsspannungen

$$e_o = Ae_n = A(e_b - e_a) \quad (8.1)$$

Wegen der hohen Verstärkung  $A$  treibt schon eine kleine Spannung  $e_n$  den OA in die Sättigung. Deshalb nutzen die meisten OA Schaltungen eine negative Rückkopplung.



## Bild 8-2 :OA mit negativer Rückkopplung

Im Eingangskreis gilt folgende Spannungsbilanz:

$$e_{in} - e_{ref} - e_n - Z_{in}i_{in} = 0 \quad (8.2)$$

Für den Strom  $i_{in}$  ergibt sich damit

$$i_{in} = \frac{e_{in} - e_{ref} - e_n}{Z_{in}} \quad (8.3)$$

Üblicherweise ist  $Z_f$  wesentlich kleiner als  $R_i$ , so dass kein Strom in den OA über die Klemmen a und b hineinläßt. Deshalb muss am Summenpunkt

$$i_{in} = -i_f \quad (8.4)$$

gelten. Führt man auch entlang der Rückkopplung  $Z_f$  ein Spannungsumlauf durch, so folgt

$$\begin{aligned} -e_o + Z_f i_f + e_n + e_{ref} &= 0 \\ i_f &= \frac{e_o - e_n - e_{ref}}{Z_f} \end{aligned} \quad (8.5)$$

Die Gleichungen 8.3 und 8.5 ergeben unter Beachtung der Bedingung 8.4 die Beziehung

$$e_n = e_{ref} - \left( \frac{Z_f}{Z_f + Z_{in}} \right) e_{in} - \left( \frac{Z_{in}}{Z_f + Z_{in}} \right) e_o \quad (8.6)$$

Setzt man die Ausgangsbeziehung 8.1 ein, so folgt

$$e_o \left( \frac{1}{A} + \frac{Z_{in}}{Z_{in} + Z_f} \right) = e_{ref} - \left( \frac{Z_f}{Z_f + Z_{in}} \right) e_{in} \quad (8.7)$$

Mit der Annahme, dass A sehr groß ist, geht  $1/A$  gegen 0, so dass sich für  $e_o$  die Gleichung

$$e_o = \left( 1 + \frac{Z_f}{Z_{in}} \right) e_{ref} - \left( \frac{Z_f}{Z_{in}} \right) e_{in} \quad (8.8)$$

ergibt, die die generelle Gleichung für OA Schaltungen mit negativer Rückkopplung darstellt. Setzt man Gleichung 8.8 in 8.6 ein, so ergibt sich für die Differenzeingangsspannung  $e_n$  der Wert 0. Das bedeutet, dass sich die Punkte a und b auf dem selben Potential befinden müssen. Befindet sich beispielsweise Punkt b auf Masse, so bezeichnet man Punkt a als "virtuelle Masse".

## 8.1 OA Grundsaltungen

An dieser Stelle werden die wichtigsten OA Schaltungen ohne weitere Bemerkungen bezüglich Genauigkeit, Stabilität usw. vorgestellt.

### Invertierende Schaltung

Das nächste Bild zeigt die invertierende Schaltung, bei der Punkt b direkt mit "common" (0 V) verbunden ist.

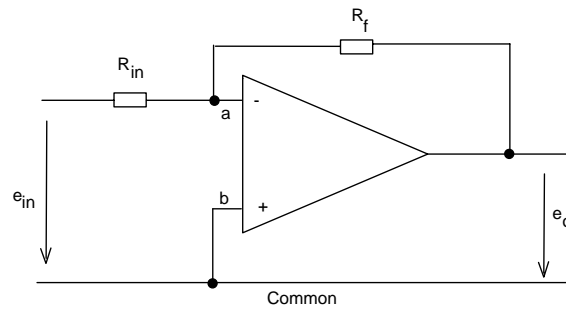


Bild 8-4 Invertierende OA Verstärkerschaltung

Damit erhält man für die Ausgangsspannung entsprechend 8.8

$$e_o = -\left(\frac{R_f}{R_{in}}\right)e_{in} \quad (8.9)$$

Mit den Widerständen  $R_f$  und  $R_{in}$  lässt sich das gewünschte Ein- Ausgangsverhältnis festlegen (z. B.  $R_f = 100\text{k}\Omega$  und  $R_{in} = 10\text{k}\Omega$  ergibt einen Verstärkungsfaktor 10).

#### Nichtinvertierender Verstärker

Wird Eingang a über einen nichtbelasteten Spannungsteiler ( in den Eingang a fließt kein Strom!)  $R_f$  und  $R_{in}$  angeschlossen, der an  $e_o$  angeschlossen ist, wird aus Gleichung 8.8

$$e_o = \left(1 + \frac{R_f}{R_{in}}\right)e_{in} \quad (8.10)$$

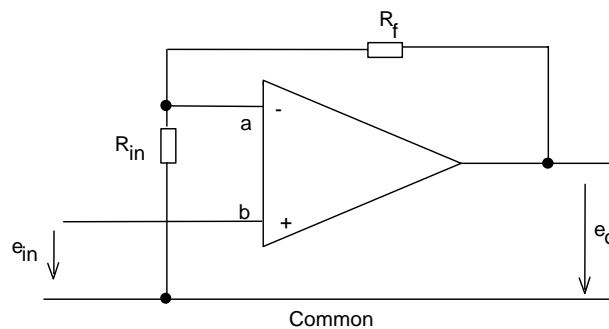


Bild 8-5 Nichtinvertierender OA

Einen Spannungsfolger (Impedanzwandler) mit hohem Eingangswiderstand und niedrigem Ausgangswiderstand erhält man dadurch, dass der Widerstand  $R_f$  zu 0 gewählt und  $R_{in} \rightarrow \infty$  (Widerstand weglassen) gewählt wird. Damit wird der Verstärkungsfaktor 1 und  $e_o = e_{in}$ . Der Strom in den Eingang b ist praktisch vernachlässigbar.

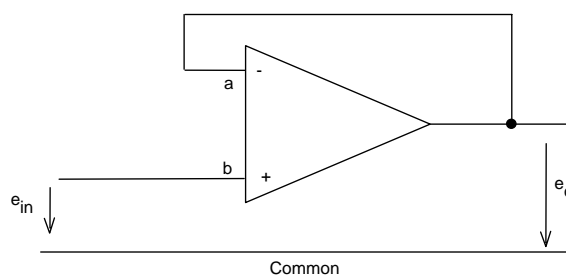


Bild 8-6: Spannungsfolger

Addierer

Ein Addierer hat zwei oder mehrere Eingänge, die über Widerstände ( $R_{a1}$ ,  $R_{a2}$ ) mit dem negativen Eingang b verbunden sind. Punkt a liegt bei dieser Schaltung auf virtueller Masse.

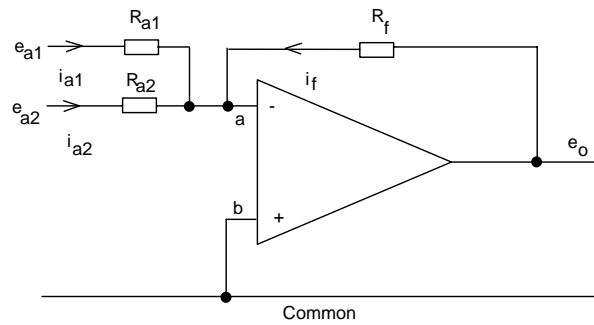


Bild 8-7 Addierer

Gleichung 8.8 wird daher zu

$$e_o = - \left( \frac{R_f}{R_{a1}} e_{a1} + \frac{R_f}{R_{a2}} e_{a2} \right) \quad (8.11)$$

Man überprüfe das Ergebnis durch Einsetzen der Stromsumme in Punkt a.



### Aufgabe 8.1: (Beispiel aus der Leistungselektronik)

Es soll bei einem 3-Leitersystem der Strom durch den Nulleiter nachgebildet werden

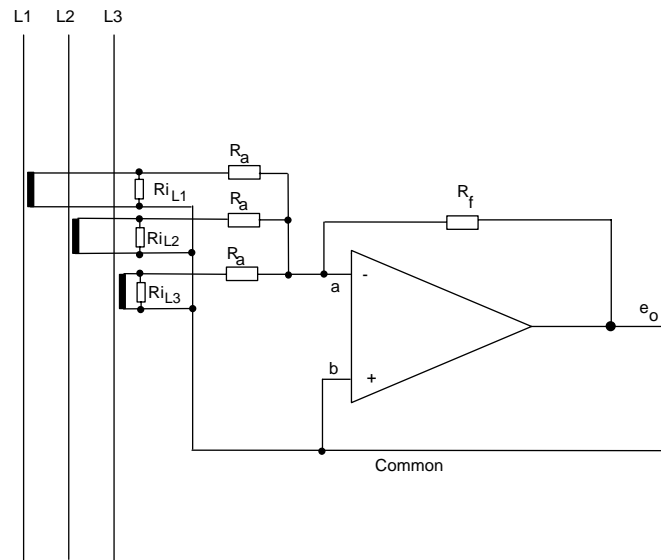


Bild 8-12 Nachbildung des Stromes im Nulleiter aus den Leiterströmen L1 bis L3

Bestimmen Sie die Ausgangsspannung  $e_o$  als Funktion der Leiterströme  $i_{L1}$  bis  $i_{L3}$ . Die Übersetzungsfaktoren der Stromwandler können mit dem Faktor 1 angenommen werden. Die Widerstände  $R$  sind sehr viel kleiner als  $R_a$ . Wie ist die Schaltung zu erweitern (entkoppeln), falls diese Bedingung nicht eingehalten werden kann?

### Subtrahierer

Die Grundsaltung zeigt nachfolgendes Bild. Unter der Voraussetzung, dass kein Strom in den OA - Eingang hineinfließt, bilden die Widerstände  $R_{in}$  und  $R_f$  an Punkt b einen nichtbelasteten Spannungsteiler und die Spannung an diesem Punkt wird (entspricht  $e_{ref}$  in Gl. 8.8)

$$\frac{R_f}{R_f + R_{in}} e_b \quad (8.12)$$

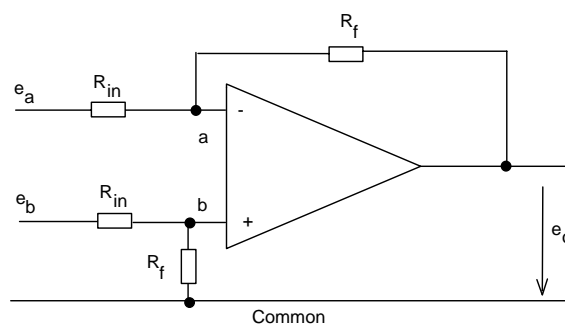


Bild 8-13 Subtrahierer

Damit wird aus Gleichung 8.8

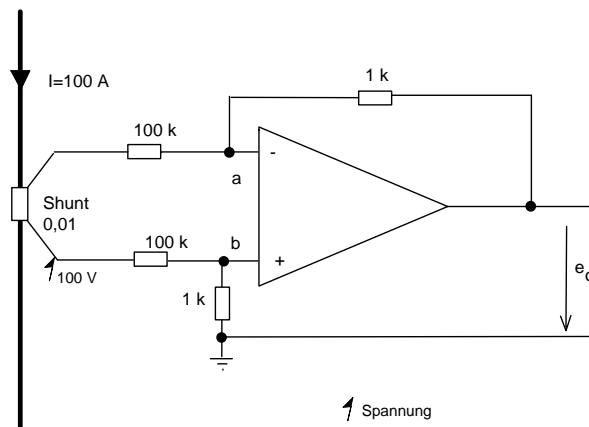
$$e_o = \frac{R_f}{R_{in}} (e_b - e_a) \quad (8.13)$$

Für den Fall  $R_f = R_{in}$  wird  $e_o = e_b - e_a$ .



### Aufgabe 8. 2: (Beispiel aus der Leistungselektronik)

An einem nicht potentialfreien Messwiderstand (*shunt*) von  $10 \text{ m}\Omega$  soll die dem Strom  $I$  proportionale Spannung über Potentialklemmen gemessen werden. Berechnen Sie die Spannungen an den Punkten a und b des OA und bestimmen Sie die Ausgangsspannung  $e_o$  für  $I = 100 \text{ A}$  und allgemein in Abhängigkeit des Stromes  $I$ . Am unteren Anschlusspunkt des Shunt steht die konstante Spannung von  $100 \text{ V}$ .



### Integrierer, Differenzierer

Fügt man einen Kondensator in den Rückkopplungsweig eines OAs, so entsteht ein Integrierer.

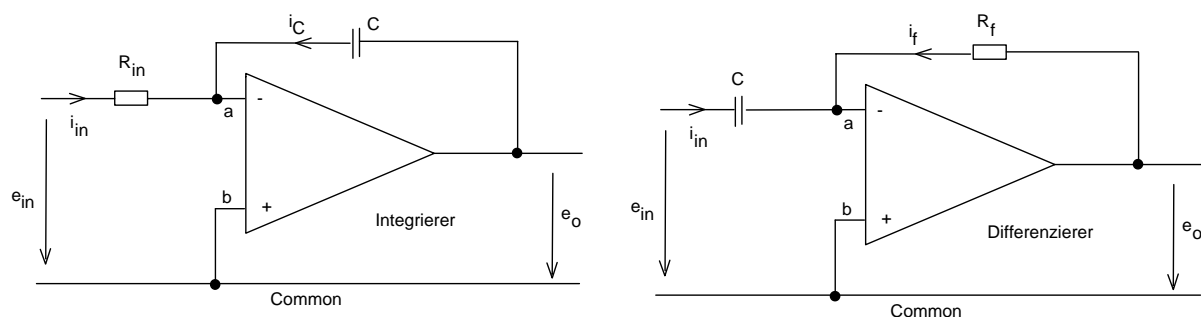


Bild 8-14 Integrierer und Differenzierer

Da Punkt b der Schaltung auf Masse liegt, ist an Punkt a virtuelle Masse und die Spannung  $e_o$  fällt am Kondensator  $C$  ab. Es muss also



$$e_o = \frac{1}{C} \int i_C dt \quad (8.14)$$

gelten. Andererseits ist die Stromsumme im Punkt b gleich null, so dass der Strom  $i_C$  durch  $-e_{in}/R_{in}$  ausgedrückt werden kann. Mit  $e_{in}$  lässt sich praktisch der Strom durch den Kondensator steuern. Damit folgt

$$e_o = -\frac{1}{R_{in}C} \int e_{in} dt \quad (8.15)$$

Für den Differenzierer führen analoge Überlegungen zu der Gleichung für die Ausgangsspannung. Es gilt hier

$$e_o = -R_f C \frac{de_{in}}{dt} \quad (8.16)$$

Für praktische Anwendungen ist diese Schaltung wenig hilfreich, da keine Bandbegrenzung vorhanden ist und kleinste Messstörungen auf  $e_{in}$  entsprechend der Änderungsgeschwindigkeit eine große Ausgangsspannung zur Folge haben.

Neben der Beschreibung der Schaltungen im Zeitbereich, ist eine Beschreibung mit der komplexen Wechselstromlehre im Frequenzbereich möglich. Da die Eingangsspannung beim Integrierer über  $R_{in}$  und die Ausgangsspannung über dem Kondensator abfällt, muss auch

$$\frac{\underline{e}_o}{\underline{e}_{in}} = -\frac{\frac{1}{j\omega C}}{R_{in}} = -\frac{1}{j\omega R_{in}C} \quad (8.17)$$

gelten.

Zum selben Ergebnis gelangt man, wenn man in Gleichung 8.8 für  $Z_{in}$  den Widerstand  $R_{in}$  und für den komplexen Widerstand  $Z_f = 1/j\omega C$  setzt und beachtet, dass  $e_{ref} = 0$  gilt.



### Aufgabe 8.3:

Man zeige, dass das Ergebnis von Gleichung 8.17 dadurch erhalten werden kann, wenn in Gleichung 8.15 eine komplexe sinusförmige Eingangsspannung angenommen wird.

Hinweis: Man setze für die Spannung  $e_{in}$  die komplexe Spannung  $\underline{e}_{in} = \hat{e}_{in} e^{j\omega t}$  an und führe die Integration durch.

### Phasenschieber mit OAs

Mit einer invertierenden Schaltung lassen sich mit einfachen RC-Kombinationen Phasendrehungen im Bereich von  $90^\circ$  bis  $180^\circ$  bzw. von  $180^\circ$  bis  $270^\circ$  erreichen. Setzt man die nichtinvertierende Schaltung ein, so können Phasendrehungen von  $0^\circ$  bis  $-90^\circ$  bzw.  $0^\circ$  bis  $90^\circ$  erzielen.

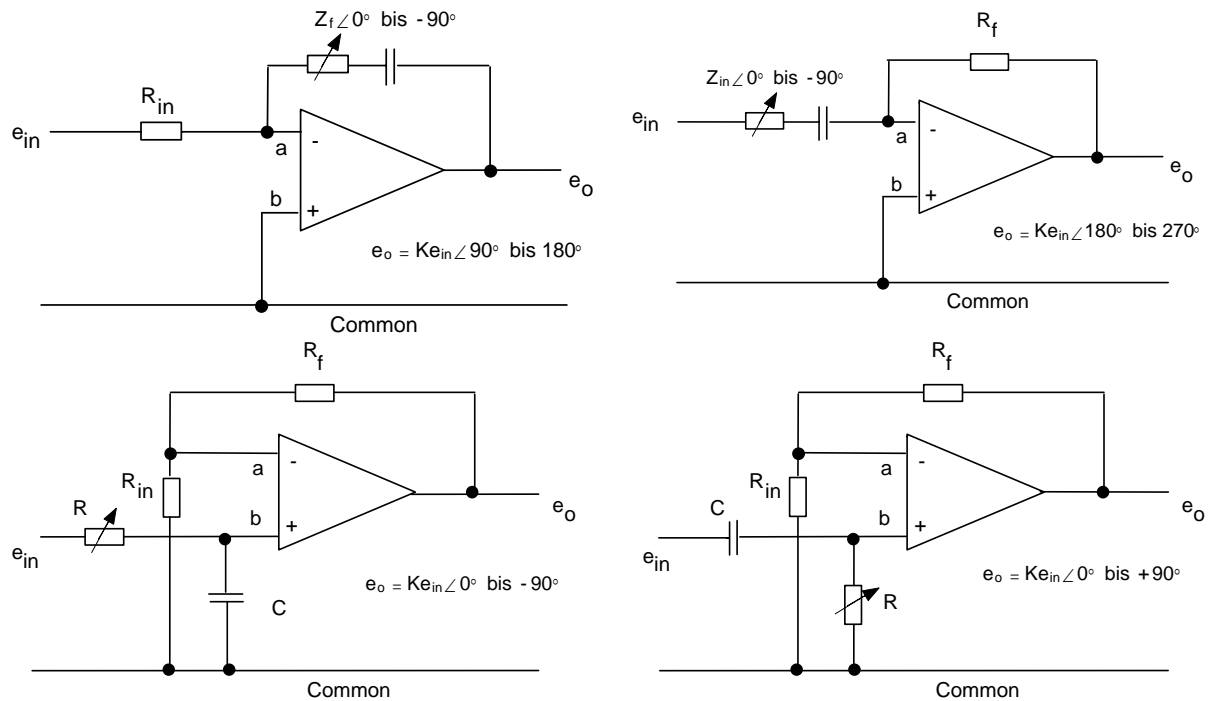


Bild 8-15 Phasenschieber-Schaltungen

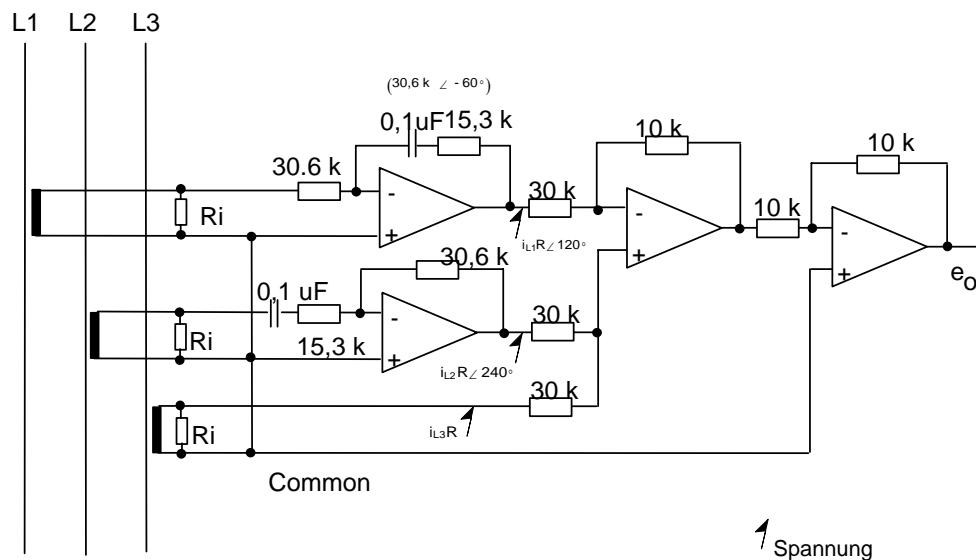


#### Aufgabe 8.4: (Beispiel aus der Leistungselektronik)

Man zeige, dass bei der gegebenen Schaltung die Ausgangsspannung  $e_o$  durch

$$e_o = \frac{R}{3} (i_{L1} + i_{L2} \angle 240^\circ + i_{L3} \angle 120^\circ)$$

bei einer Netzfrequenz von 60 Hz berechnet werden kann. Zur Unterstützung sind an einigen Punkten die Spannungen eingezeichnet, die nachzurechnen sind. Die Übersetzungsfaktoren der Stromwandler können mit dem Faktor 1 angenommen werden. Wozu kann diese Schaltung in der Schutztechnik eingesetzt werden?



## 9 Lösung der Übungsaufgaben

### Lösung (2.1):

Mit den Newton'schen Gesetz  $F = m a$  und  $W = F s$  sowie  $P = \frac{W}{t}$  folgt

$$P = \frac{Fs}{t} = \frac{ma s}{t} = [\text{kg m}^2 \text{s}^{-3}]$$

### Lösung (2.2):

Der absolute Fehler ist  $I_F = I_A - I_W = 1,47\text{A} - 1,50\text{A} = -0,03\text{A}$ . Die Berichtigung ist demnach  $I_B = -I_F = 0,03\text{A}$ . Der relative Fehler ist  $F_r = I_F / I_W = -0,03\text{A} / 1,50\text{A} = -0,02 = -2\%$ . Der relative Anzeigefehler wird  $F_{Ar} = I_F / I_M = -0,03\text{A} / 2,5\text{A} = -0,012 = -1,2\%$ .

### Lösung (2.3):

Fehler =  $U - U_0$

$U_0 = U + R_i I$  und  $I = U / R_m$  daraus folgt  $U_0 = U + U R_i / R_m$

damit wird der Fehler =  $-UR_i / R_m$  und die Berichtigung ist der negative Fehler und demnach  $UR_i / R_m$ .

### Lösung (2.4):

$$\bar{R} = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 R_i = 784,6\Omega \text{ und } s = \sqrt{\frac{1}{6-1} \left[ (783,9\Omega - 784,6\Omega)^2 + \dots + (785,2\Omega - 784,6\Omega)^2 \right]} = 0,56\Omega$$

Vertrauensbereich für  $P=95\%$  aus Tabelle

$$v = 1,05 \cdot 0,56\Omega = 0,59\Omega$$

Das Messergebnis wird damit  $R = \bar{R} \pm v = (784,6 \pm 0,59)\Omega$

### Lösung (2.5):

$$P = \frac{U^2}{R} = 144\text{W} \quad \pm \Delta U = \frac{K I_U U_E}{100} = \frac{1 \cdot 30\text{V}}{100} = 0,3\text{V}$$

$$\pm \Delta P = \left| \frac{dP}{dU} \right| \Delta U = \frac{2U}{R} \Delta U = 7,2\text{W} \text{ und damit ist das sichere Messergebnis } P = (144 \pm 7,2)\text{W}$$

### Lösung (2.6):

$$\pm \Delta R = \left| \frac{\partial R}{\partial I_1} \Delta I_1 \right| + \left| \frac{\partial R}{\partial I_2} \Delta I_2 \right| = \left| \frac{0(I_1 - I_2) - 1U}{(I_1 - I_2)^2} \Delta I_1 \right| + \left| \frac{0(I_1 - I_2) - (-1)U}{(I_1 - I_2)^2} \Delta I_2 \right| = 8\text{M}\Omega$$

$$R = 2\text{M}\Omega \pm 8\text{M}\Omega$$

Dieses Ergebnis zeigt, dass Messverfahren, bei denen das Messergebnis als Differenz großer Größen bestimmbar ist, zu vermeiden sind. Man erkennt gleichzeitig, dass die Fehlerrechnung auch dahingehend eingesetzt werden kann, um die Sinnhaftigkeit der Messmethode zu überprüfen.

Lösung (2.7)

$$U = \sqrt{(5V)^2 + \left(\frac{3}{\sqrt{2}} V\right)^2} = 5,43V \quad \text{Man überprüfe das Ergebnis indem man } u^2(t) \text{ bildet und in}$$

die Gleichung  $U = U_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_t^{t+T} u^2(t) dt}$  einsetzt.

Lösung (2.8):

Es war  $|\bar{u}|_{\text{EW}} = 0,318 \hat{u}$ . Für den Effektivwert gilt  $U = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \hat{u}^2 \sin^2(\omega t) d\omega t} = \frac{\hat{u}}{2}$  und damit

folgt für den Formfaktor  $F_{\text{EW}} = \frac{U}{|\bar{u}|_{\text{EW}}} = 1,57$

Lösung (2.9):

$$\text{Mittelwert: } \bar{u} = \frac{1}{3,5\text{ms}} \left[ \int_0^{1\text{ms}} 6V dt + \int_{1\text{ms}}^{3,5\text{ms}} (-1V) dt \right] = \frac{1}{3,5\text{ms}} [6V1\text{ms} - 1V2,5\text{ms}] = 1V$$

$$\text{Gleichrichtwert (Zweiweggleichrichtung): } |\bar{u}|_{\text{ZW}} = \frac{1}{3,5\text{ms}} [6V1\text{ms} + 1V2,5\text{ms}] = 2,43V$$

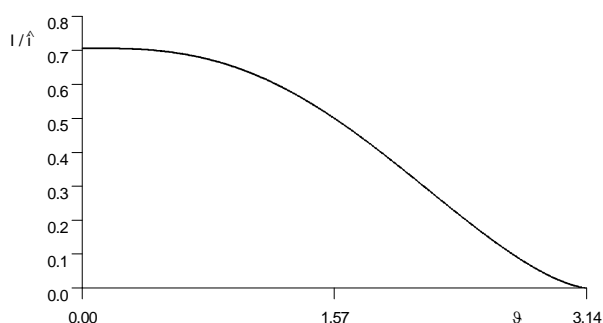
$$\text{Effektivwert: } U = \sqrt{\frac{1}{3,5\text{ms}} \left[ \int_0^{1\text{ms}} (6V)^2 dt + \int_{1\text{ms}}^{3,5\text{ms}} (-1V)^2 dt \right]} = \sqrt{\frac{1}{3,5\text{ms}} [36V^2\text{ms} + 2,5V^2\text{ms}]} = 3,32V$$

$$\text{Formfaktor: } F_F = \frac{3,32V}{2,43V} = 1,366$$

$$\text{Crestfactor: } F_C = \frac{6V}{3,32V} = 1,81$$

Lösung (2.10):

$$I = \sqrt{\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \hat{i}^2 \sin^2(\omega t) d\omega t} = \hat{i} \sqrt{\frac{1}{\pi} \left[ \frac{\omega t}{2} - \frac{\sin(2\omega t)}{4} \right]_0^\pi} = \hat{i} \sqrt{\left( \frac{1}{2} - \frac{0}{2\pi} + \frac{\sin(2\theta)}{4\pi} \right)}$$



Für  $\theta = 0$  (volle Sinusschwingung) folgt mit

$$\hat{i} = 1A \text{ für den Effektivwert } I = \frac{\hat{i}}{\sqrt{2}} = 0,707A$$

und für  $\theta = \pi$  entsprechend  $I=0A$

Lösung (3.1):

$$R_{i,100} = 20\text{k}\Omega / V100\text{V} = 2\text{M}\Omega \text{ und } n=300\text{V}/100\text{V}=3$$

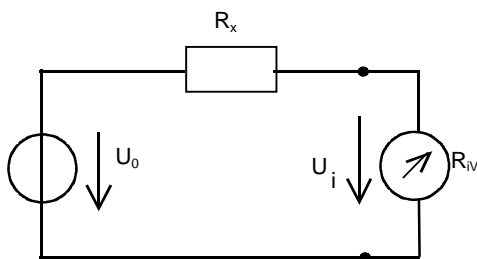
$$R_V = (3-1)R_{i,100} = 4\text{M}\Omega$$

Lösung (3.2):

$$R_{i,10} = \frac{0,3\text{V}}{10\text{A}} = 0,03\Omega$$

$$n = 4$$

$$R_P = \frac{1}{4-1} 0,03\Omega = 10\text{m}\Omega$$

Lösung (3.3):

$$\frac{U_0}{50\text{V}} = \frac{R_x + 100\text{k}\Omega}{100\text{k}\Omega}$$

$$\frac{U_0}{23,1\text{V}} = \frac{R_x + 30\text{k}\Omega}{30\text{k}\Omega}$$

Die Lösung dieses Gleichungssystems ergibt  $R_x = 99,6 \text{ k}\Omega$  und  $U_0 = 99,8 \text{ V}$

Lösung (3.4)

$$\frac{R_1}{0,1\text{V}} = \frac{10\text{M}\Omega}{100\text{V}} \rightarrow R_1 = 10\text{k}\Omega$$

$$\frac{R_1 + R_2}{0,1\text{V}} = \frac{10\text{M}\Omega}{1\text{V}} \rightarrow R_1 + R_2 = 1\text{M}\Omega \rightarrow R_2 = 990\text{k}\Omega$$

$$R_1 + R_2 + R_3 = 10\text{M}\Omega \rightarrow R_3 = 9\text{M}\Omega$$

Lösung (3.5):

Man beachte, dass  $U_a$  eine konstante Größe ist. Dann folgt

$$U_a = \frac{1}{T} \int \frac{u_e^2}{U_a} dt = \frac{1}{TU_a} \int u_e^2 dt \rightarrow U_a = \sqrt{\frac{1}{T} \int u_e^2 dt}$$

Lösung (3.6)

$$v_y = \frac{e \hat{u}_y}{m_e d} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \cos(\omega t) dt = \frac{e \hat{u}_y}{m_e d} \frac{\sin(\omega t)}{\omega} \Big|_{-\tau/2}^{\tau/2} = \frac{e \hat{u}_y}{m_e d} \tau \frac{\sin\left(\frac{\omega \tau}{2}\right)}{\frac{\omega \tau}{2}}$$

Aus dem Hinweis ist zu

entnehmen, dass wegen der Proportionalität zwischen der Auslenkung  $a$  und  $v_y$  die  $y$ -Geschwindigkeit minimal 0,95 von ihrem Maximalwert sein darf.  $\sin(x)/x = \text{Si}(x)$  wird als

Spaltfunktion bezeichnet und ist maximal 1. Es muss also  $\text{SI}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) = 0,95$  sein und daher

$$0,1757\pi = \frac{\omega_{\max}\tau}{2} \text{ gelten. Daraus folgt } f_{\max} = \frac{0,1757}{\tau} = \frac{0,1757}{l} \sqrt{\frac{2eU_{AK}}{m_e}} = 234\text{MHz}$$

Lösung (3.7):

$$f_g = \frac{0,35}{t_A} = \frac{0,35}{7\mu s} = 50\text{kHz} \rightarrow 2\pi 50\text{kHz} = \frac{1}{RC} \rightarrow C = 318\text{pF}$$

Lösung (3.8):

Da für ein Oszilloskop in sehr guter Näherung ein TP1 - Charakter unterstellt werden kann,

gilt  $t_{A_{\text{Oszi}}} = \frac{0,35}{f_{g_{\text{Oszi}}}} = 7\text{ns}$

$$t_{A_{\text{ges}}}^2 = t_{A_{\text{Gen}}}^2 + t_{A_{\text{PO}}}^2 + t_{A_{\text{Oszi}}}^2$$

$$t_{A_{\text{PO}}} = \sqrt{t_{A_{\text{ges}}}^2 - t_{A_{\text{Gen}}}^2 - t_{A_{\text{Oszi}}}^2} = \sqrt{(20\text{ns})^2 - (10\text{ns})^2 - (7\text{ns})^2} = 15,8\text{ns}$$

$$f_{g_{\text{PO}}} = \frac{0,34}{t_{A_{\text{PO}}}} = 21,5\text{MHz}$$

Lösung (3.9):

$$\pm \Delta\varphi = \left| \frac{\partial\varphi}{\partial y} \Delta y \right| + \left| \frac{\partial\varphi}{\partial \hat{u}_2} \Delta \hat{u}_2 \right|$$

$$\pm \Delta\varphi = \left| \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{y}{\hat{u}_2}\right)^2}} \frac{1}{\hat{u}_2} \Delta y \right| + \left| \frac{(-1)}{\sqrt{1 - \left(\frac{y}{\hat{u}_2}\right)^2}} \frac{y}{\hat{u}_2} \Delta \hat{u}_2 \right|$$

Wie aus der obigen Ableitung ersichtlich ist, geht der Fehler  $\Delta\varphi$  für  $y=\hat{u}_2$  gegen  $\infty$ . Diese Bedingung gilt für einen Kreis; d.h. wenn  $\varphi=90^\circ$  ist. Für Fälle, bei denen der Sinus eine Extremum aufweist, sollte eine andere Messmethode gewählt werden.

Lösung (5.1):

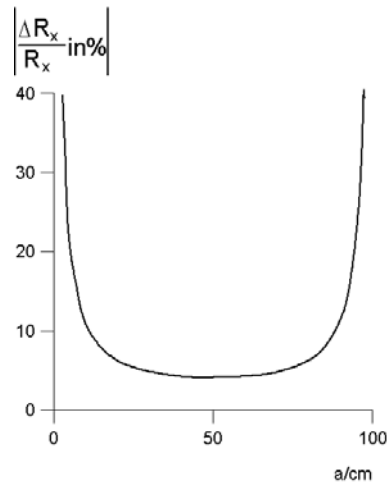
$$\pm \Delta R_x = \left| \frac{dR_x}{da} \Delta a \right| = R_2 \frac{(l-a) - (-1)a}{(l-a)^2} \Delta a = R_2 \frac{l}{(l-a)^2} \Delta a$$

Für den relativen Fehler folgt  $\frac{\pm \Delta R_x}{R_x} = \frac{l}{a(l-a)} \Delta a$

Lösungsmöglichkeit mit Graphik:

a/cm	0	25	50	75	100
$\pm \Delta R_x / R_x$	$\infty$	0,053	0,04	0,053	$\infty$

Wie aus der Tabelle bzw. der Graphik zusehen ist, tritt der kleinste relative Fehler dann auf, wenn der Schleifer in der Mitte ist.



Das selbe Ergebnis bekommt man mit einer Kurvendiskussion. Setzt man den relativen Fehler zu  $F$ , so wird  $F = \frac{l\Delta a}{a(l-a)}$ . Die notwendige Bedingung  $\frac{dF}{da} = 0$  führt zum Ergebnis  $a_{\text{opt}} = l/2$

#### Lösung (5.2):

$$\underline{Z}_1 \underline{Z}_4 = \underline{Z}_2 \underline{Z}_3$$

$$R_1 \left( \frac{R_4 \frac{1}{j\omega C_4}}{R_4 + \frac{1}{j\omega C_4}} \right) = R_2 \left( R_3 + \frac{1}{j\omega C_3} \right) \text{ mit } R_1=2R_2 \text{ und } R_3=R_4=R \text{ sowie } C_3=C_4=C \text{ folgt}$$

$$2R_2 \left( \frac{R \frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} \right) = R_2 \left( R + \frac{1}{j\omega C} \right) \text{ oder } 2R \frac{1}{j\omega C} = \left( R + \frac{1}{j\omega C} \right)^2 = R^2 + 2R \frac{1}{j\omega C} + \frac{1}{j^2 \omega^2 C^2}$$

$$R^2 = \frac{1}{\omega^2 C^2} \rightarrow \omega = \frac{1}{RC}$$

#### Lösung (6.1):

$$\text{zu a) } I = \frac{U}{R} = \frac{100V}{20\Omega} = 5A \text{ und damit } S=P=U I = 100V \cdot 5A = 500W \text{ sowie } Q=0 \text{ var}$$

$$\text{Zusätzlich gilt für den Scheitelwert des Stromes } \hat{i} = I\sqrt{2} = 7,07A$$

zu b): Nach der Öffnung des Schalters kann der Strom nur noch in der positiven Halbschwingung durch die verlustfrei angenommene Diode fließen. Die Wirkleistung  $\tilde{P}$  ist daher nur noch die Hälfte von  $P$  im Falle a).

$$\tilde{P} = \frac{1}{2}P = 250W$$

Die 100 V Spannung der Quelle ist unverändert und für den Effektivwert des Stromes findet man



$$\tilde{I} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \hat{i}^2 \sin^2(\omega t) d\omega t} = \frac{\hat{i}}{2} = 3,536 \text{ A}$$

so dass sich die Scheinleistung zu  $\tilde{S} = U \tilde{I} = 100 \text{ V} \cdot 3,536 \text{ A} = 353,6 \text{ VA}$  berechnen lässt. Die Blindleistung wird demnach

$$\tilde{Q} = \sqrt{\tilde{S}^2 - \tilde{P}^2} = \sqrt{353,6^2 - 250^2} \text{ var} = 250 \text{ var}$$

Da der Verbraucher ein rein ohmscher Widerstand ist, kann diese Leistung nur als Verzerrungsleistung  $D = \tilde{Q}$  auftreten.

Dieses Ergebnis könnte zunächst überraschen, da bei einer ohmschen Last Blindleistung auftreten soll obwohl sich keine Energiespeicher auf der Verbraucherseite befinden. Es kann für diesen Fall festgestellt werden, dass die Blindleistung für solche Fälle eine reine Rechengröße darstellt und keine physikalische Bedeutung hat.

#### Lösung (6.2):

$$\text{Für } \vartheta = 0 \text{ gilt } I = \frac{P}{U} = \frac{100 \text{ W}}{230 \text{ V}} = 0,435 \text{ A} \rightarrow \hat{i} = I\sqrt{2} = 0,615 \text{ A}$$

$$\text{Es war } I(\vartheta) = \hat{i} \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\vartheta}{2\pi} + \frac{\sin(2\vartheta)}{4\pi}} \quad (\text{siehe Aufgabe 2.10})$$

$$I(90^\circ) = \frac{\hat{i}}{2} = 0,307 \text{ A} \quad \text{und}$$

$$S = UI = 230 \text{ V} \cdot 0,307 \text{ A} = 70,7 \text{ VA}$$

$$P = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \hat{u} \sin(\omega t) \hat{i} \sin(\omega t) dt = \frac{\hat{u} \hat{i}}{\pi} \left[ \frac{\omega t}{2} - \frac{1}{4} \sin(2\omega t) \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = 50 \text{ W}$$

$$Q = \sqrt{S^2 - P^2} = 50 \text{ Var}$$

#### Lösung (6.3):

Es gilt  $P = UI_1 \cos(\varphi_1)$  und  $|Q| = \sqrt{S^2 - P^2}$ . Setzt man  $S$  und  $P$  in diese Gleichung ein, so folgt

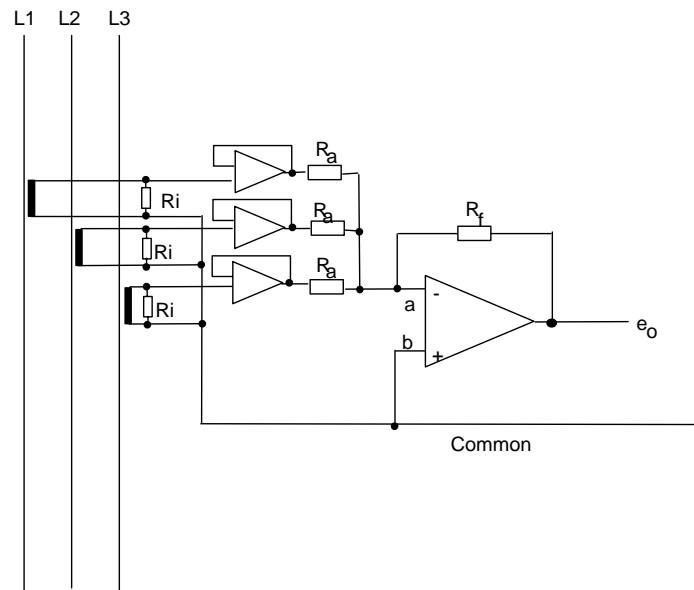
$$|Q| = \sqrt{\left( U \sqrt{I_1^2 + I_2^2 + \dots} \right)^2 - \left( U I_1 \cos(\varphi_1) \right)^2} = \sqrt{U^2 I_1^2 + U^2 I_2^2 + \dots - U^2 I_1^2 \cos^2(\varphi_1)} = \sqrt{\left( U I_1 \sin(\varphi_1) \right)^2 + D^2}$$

#### Lösung (8.1)

Aus Gleichung 3.11 folgt für die drei Ströme analog

$$e_o = -\frac{R_f R_i}{R_a} (i_{L1} + i_{L2} + i_{L3})$$

Falls die Spannungsteilung zwischen  $R_i$  und  $R_a$  einen nicht tolerablen Einfluss hat, kann zwischen  $R_i$  und  $R_a$  zur Entkopplung jeweils ein Spannungsfolger geschaltet werden.



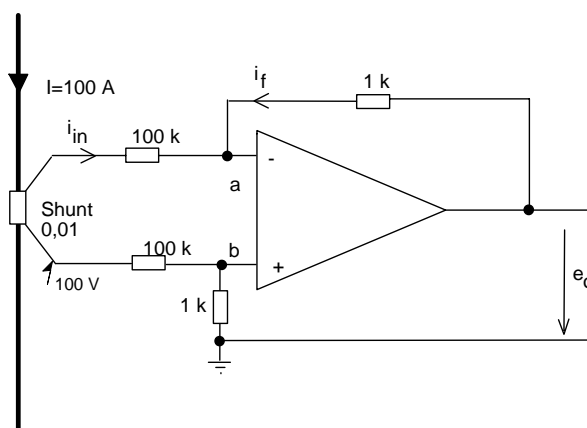
Üblicherweise ist die Stromsumme und damit  $e_o$  für symmetrische Netze 0. Damit lässt sich mit einer solchen Schaltung der Strom im Nulleiter ohne Messung ermitteln. In der Schutztechnik kann diese Schaltung für die Erkennung von Unsymmetrien des Netzes benutzt werden.

#### Lösung (8. 2):

Spannung an Punkt b:

$$e_b = 100V \frac{1k}{100k + 1k} = 0,99V = e_a$$

Spannungsabfall am Shunt  $I \cdot 0,01\Omega = 1\text{ V}$ ; Spannung am oberen Punkt des Shunts  $100\text{ V} + I \cdot 0,01\Omega$ . Es gilt  $i_{in} = -i_f$



$$i_{in} = \frac{(100V + I \cdot 0,01\Omega) - e_a}{100k\Omega} = \frac{99,09V - I \cdot 0,01\Omega}{100k\Omega} \quad \text{und} \quad i_f = \frac{e_o - e_a}{1k\Omega} = \frac{e_o - 0,99V}{1k\Omega}$$

Damit folgt  $e_o = -I \cdot 0,0001\Omega$ . Für  $I = 100\text{ A}$  wird  $e_o = -10\text{ mV}$

Setzt man in Gleichung 3.13 für  $e_a = 101 \text{ V}$  und für  $e_b = 100 \text{ V}$ , so erhält man sofort das selbe Ergebnis für  $I = 100 \text{ A}$ .

#### Lösung (8.3):

Betrachtet man Gleichung 3.15 für komplexe Größen, so folgt

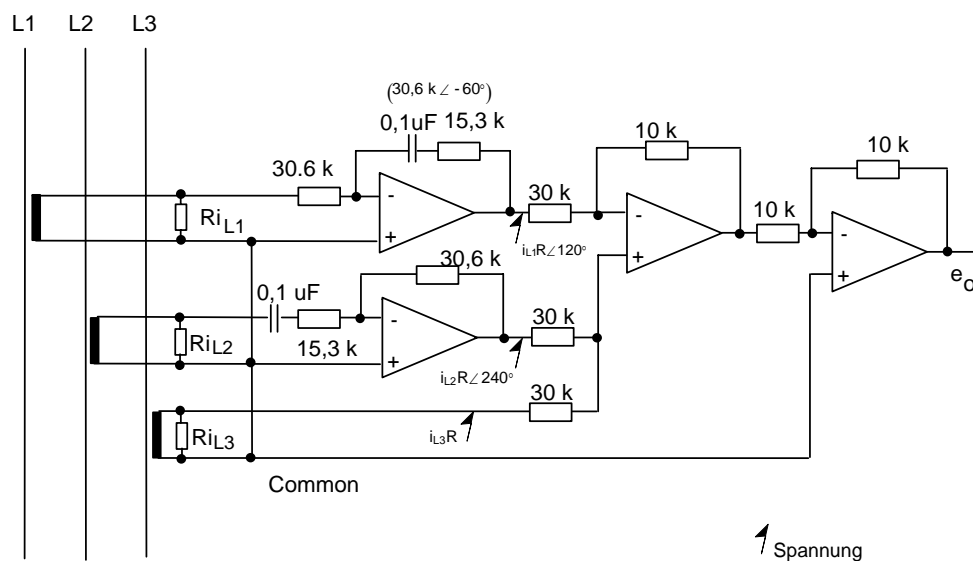
$$\underline{e}_o = -\frac{1}{R_{in}C} \int \underline{e}_{in} dt = -\frac{1}{R_{in}C} \int \hat{e}_{in} e^{j\omega t} dt = -\frac{1}{R_{in}C} \frac{\hat{e}_{in} e^{j\omega t}}{j\omega} = -\frac{1}{j\omega R_{in}C} \underline{e}_{in}$$

oder

$$\frac{\underline{e}_o}{\underline{e}_{in}} = -\frac{1}{j\omega R_{in}C} = G(j\omega)$$

Hierin wird  $G(j\omega)$  als komplexe Übertragungsfunktion oder Frequenzgang bezeichnet. Aus dieser Funktion lassen sich die Verhältnisse (Zeigerlängen) von Aus- zu Eingangsfunktion bei diesen sinusförmigen Größen als auch der Phasengang errechnen.

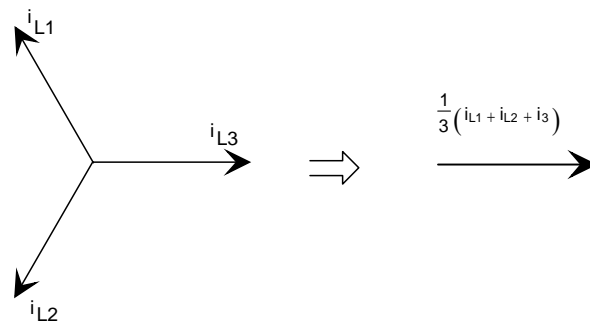
#### Lösung (8.4):



Beispiel für die Berechnung der Phasenverschiebungen

Das Rückkopplungsnetzwerk des OA für L1 besteht aus  $0,1 \mu\text{F}$  in Serie mit  $15,3 \text{ k}\Omega$ . Bei  $60 \text{ Hz}$  ergibt sich der komplexe Widerstand  $\underline{Z}_f = 15,3 \text{ k}\Omega + 1/(j 2\pi 60 \text{ Hz } 0,1 \mu\text{F}) = 15,3 \text{ k}\Omega - j 26,526 \text{ k}\Omega$ . Die Phasendrehung kann aus  $\varphi = \arctan (-26,526 \text{ k}\Omega/15,3 \text{ k}\Omega) = -60^\circ$  ermittelt werden.

Werden alle drei Phasen des Netzes gleichmäßig vergrößert, so zeigt die Schaltung aus Aufgabe 1 weiterhin die Ausgangsgröße 0 an, obwohl die Ströme in den Leitungen L1 bis L3 unzulässig große Ströme führen können. Mit der gegebenen Schaltung werden die Ströme  $i_{L1}$  um  $120^\circ$  und  $i_{L2}$  um  $240^\circ$  gedreht, so dass sie in der Ebene von  $i_{L3}$  liegen.



Die zweite Stufe bewertet die Ströme mit jeweils 1/3 und die Ausgangsstufe addiert die verschobenen Spannungen mit der nichtverschobenen Spannung. An  $e_o$  kann daher sehr gut detektiert werden, ob die Leiterströme unzulässig groß sind.