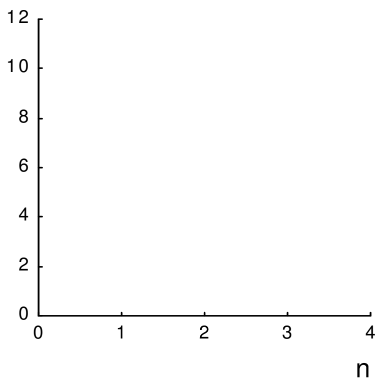
Diercksen 4. Arbeitsbogen **Exponentialfunktion und Logarithmus** (3.6-3.11)

1) Wie häufig müssen Sie einen riesigen Bogen Papier (0.1mm dick) **falten**, damit der Stapel Raumhöhe (3.20m) erreicht? Erstellen Sie eine Tabelle! Erkennen Sie das Bildungsgesetz?

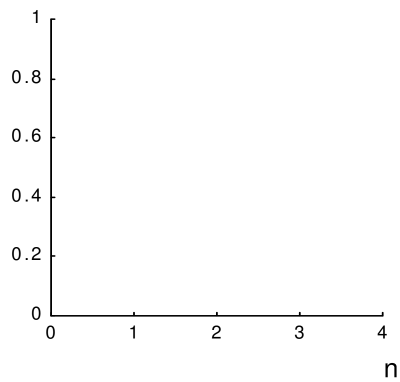
Schätzen Sie: Wie häufig müssen Sie falten, um den Abstand Erde – Mond von 384000 km zu übertreffen?

2) Skizzieren Sie die rekursiv definierten Funktionen

a) $h(0) = 1$, $h(n) = 2\,h(n-1)$



b) $h(0) = 1$, $h(n) = 0.5\,h(n-1)$.



3) a) O**hne** Taschenrechner: $\log_{10}1000$ $\log_2 16$ $\log_{16} 4$ $\log_{10} 0.001$ $\log_2 \sqrt{8}$

b) Vereinfachen Sie: $\log_a (3\sqrt[3]{x^5})$

c) $x^n = 7$. Wie ermitteln Sie x? Wie berechnen Sie n?

4) **Die Basis der Exponentialfunktion bei kontinuierlichem Wachstum – Herleitung** (1 Zeiteinheit = 1 h)

1. Eine Bakterienkultur mit K Bakterien verdoppelt sich in 1 h: Nach 1 h → K + K = **K (1+1)** **Bakterien**

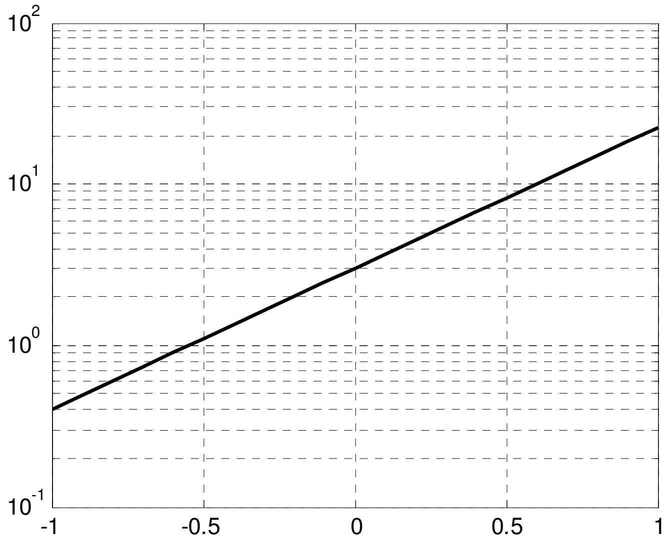
2. Die Vermehrung wird in 2 Schritte aufgeteilt:
   Jeweils nach ½ h wächst K um die Hälfte des aktuellen Wertes:
   Nach ½ h → $K + \frac{1}{2}K = K(1+\frac{1}{2})$,
   nach 1 h → $K(1+\frac{1}{2}) + \frac{1}{2}K(1+\frac{1}{2}) = (K + \frac{1}{2}K)(1+\frac{1}{2}) = \mathbf{K(1+\frac{1}{2})^2}$

3. Die Vermehrung wird in 3 Schritte aufgeteilt:
   Jeweils nach $\frac{1}{3}$ h wächst K um ein Drittel des aktuellen Wertes:
   Nach $\frac{1}{3}$ h → $K + \frac{1}{3}K = K(1+\frac{1}{3})$,
   nach $\frac{2}{3}$ h → $K(1+\frac{1}{3}) + \frac{1}{3}K(1+\frac{1}{3}) = (K + \frac{1}{3}K)(1+\frac{1}{3}) = K(1+\frac{1}{3})^2$,
   nach 1 h → $K(1+\frac{1}{3})^2 + \frac{1}{3}K(1+\frac{1}{3})^2 = \mathbf{K(1+\frac{1}{3})^3}$

Fortsetzung ergibt **für kontinuierliches Wachstum nach 1h die Bakterienzahl** $\boxed{\cdot \; n \to \infty \; (\quad \frac{1}{n} \;)}$

5) Stellt man $y= a \cdot e^{bx}$, b>0, mit MATLAB über **semilogy** dar, wird die y-Achse logarithmisch geteilt, und es ergibt sich die nebenstehende Grafik.

Lesen Sie aus der Zeichnung a und b ab. Wie lautet die e-Funktion?



6) Vergleichen Sie für $H(\Omega) = \dfrac{1}{\sqrt{1+\Omega^2}}$ (Amplitudengang des Tiefpasses) die unterschiedlichen Darstellungen der H-Werte :

a) H = 1 auf der linearen y-Achse $\triangleq$ H_{dB} = ….. auf der 20 lg H – Achse
H = ….. auf der linearen y-Achse $\triangleq$ H_{dB} = - 20 dB auf der 20 lg H – Achse

b) Warum ergibt sich im Bode-Diagramm für große Frequenzen eine Gerade?

7) Differenzieren Sie: a) $y = e^{-x^2}$

b) $y = \sqrt{x}\, e^{2x}$

8) Stellen Sie für eine Ausgleichskurve der Form $y = \lambda_1 e^{x} + \lambda_2$ das überbestimmte Gleichungssystem auf.

3) a) 3 , 4 , ½ , -3 , 3/2 b) log3 + 5/3·logx c) $x= \sqrt[n]{7}$, $n= \log_a 7 / \log_a x$ bzw. $n= \log_x 7$
5) $y= 3\, e^{2x}$ 7) a) $-2x\, e^{-x^2}$ b) $\frac{1}{2} x^{-1/2} e^{2x} + 2 x^{1/2} e^{2x}$