Diercksen

Statistische Auswertung einer Messreihe von n Messdaten $x_1, \dots, x_n$

Messergebnis $x = \bar{x} \pm v(x)$ $\bar{x}$ Mittelwert, v(x) Vertrauensgrenze

Es ist $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ der arithmetische Mittelwert. MATLAB : **mean(** […] **)**

$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$ Standardabweichung der Messreihe, MATLAB : **std(** […] **)**

Maß für die Streuung der Einzelwerte x_i um den Mittelwert $\bar{x}$

$s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$ Standardabweichung des Mittelwertes $\bar{x}$

$v(x) = t\,\frac{s}{\sqrt{n}} = t \cdot s_{\bar{x}}$ Vertrauensgrenze oder Messunsicherheit

t hängt ab von n und vom Vertrauensniveau γ.
Im Vertrauensbereich $\bar{x} \pm v(x)$ wird der unbekannte wahre Wert von x mit der Wahrscheinlichkeit γ vermutet.

Tabelle für t:

Werte für den Zahlenfaktor (Parameter) t in Abhängigkeit von der Anzahl n der Messwerte und dem gewählten Vertrauensniveau γ

n	Vertrauensniveau γ 68.3%	90%	95%	99%
6	1.11	2.02	2.57	4.03
8	1.08	1.90	2.37	3.50
10	1.06	1.83	2.26	3.25
15	1.04	1.77	2.14	2.98
20	1.03	1.73	2.09	2.86
50	1.01	1.68	2.01	2.68
100	1.00	1.66	1.98	2.63

t

Beispiel: Widerstandsmessung

i	R_i / Ω	$R_i - \bar{R}$ / Ω	$(R_i - \bar{R})^2$/ Ω^2
1	198	-2	4
2	199	-1	1
3	203	3	9
4	200	0	0
5	202	2	4
6	198	-2	4
7	201	1	1
8	197	-3	9
9	203	3	9
10	199	-1	1

$\bar{R} = 200.0\,\Omega,\ \ s_{\bar{R}} = \sqrt{\frac{1}{10\cdot 9}}\cdot 42 = 0.69\,\Omega$

Für γ=95% : $R = (\,200.0 \pm \underbrace{1.6}_{2.26\cdot 0.69}\,)\,\Omega$

Fehlerfortpflanzung:

y= f(x), $x = x_0 \pm \Delta x$ $y = f(x_0) \pm |\Delta y|$, $|\Delta y| \approx |f'(x_0)\,\Delta x|$

z= f(x,y), $x = x_0 \pm \Delta x$, $y = y_0 \pm \Delta y$, $z = f(x_0,y_0) \pm |\Delta f_{max}|$, $|\Delta f_{max}| \approx \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot\Delta x\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot\Delta y\right|$

Speziell für $\mathbf{z = K\,x^{\alpha}\,y^{\beta}}$ gilt für d. relativen Fehler: $\left|\frac{\Delta f_{max}}{f(x_0,y_0)}\right| = \left|\alpha\,\frac{\Delta x}{x_0}\right| + \left|\beta\,\frac{\Delta y}{y_0}\right|$,

Für die Fehlerabschätzung bei der **Ausgleichsgeraden** gilt

$$s_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left[y_i - (\lambda_1 x_i + \lambda_2)\right]^2}{n-2}}\,,\quad s_{\lambda_1} = s_y\cdot\sqrt{\frac{n}{n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2}}\,,\quad s_{\lambda_2} = s_y\cdot\sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2}}$$