

# VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

## Fakulta informačních technologií



### Matematická analýza 2016/2017

Domácí úkol č. 2, varianta 1

Iva Kavánková *xkavan05*,

Erik Kelemen *xkelem01*,

Martin Kobelka *xkobel02*,

Josef Kolář *xkolar71*,

Matej Kolesár *xkoles07*,

Son Hai Nguyen *xnguye16*

4. dubna 2017

**1. úkol**

1. Vyšetřete lokální extrémy funkce  $f(x) = \int_0^x t(t-1)(t-5)dt$ .

## 2. úkol

### Zadání

Vypočítejte  $\int_0^{\infty} f(x)dx$ , kde  $f(x)$  je funkce ??, kterou jste v 1. úloze rozkládali na parciální zlomky (rozklad znovu neprovádějte). Použijte již rozložený tvar.

$$f(x) = \frac{3x^3 + x^2 - 4x + 16}{x^5 + 5x^4 + 9x^3 + 13x^2 + 14x + 6} \quad (1)$$

### Rozbor příkladu

1. Funkci rozložíme na parciální zlomky (viz úloha č. 1)
2. Jednotlivé parciální zlomky budeme integrovat jako nevlastní integrály.
3. Získané hodnoty sečteme a dostaneme hodnotu  $\int_0^{\infty} f(x)dx$

### Řešení

Rozklad na parciální zlomky (viz úloha č. 1)

$$f(x) = \frac{3x^3 + x^2 - 4x + 16}{x^5 + 5x^4 + 9x^3 + 13x^2 + 14x + 6} = \frac{1}{x+1} + \frac{3}{(x+1)^2} - \frac{1}{x+3} - \frac{2}{x^2+2}$$

A jednotlivé zlomky poté integrujeme

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x+1} dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a \frac{1}{x+1} dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} [\ln(x+1)]_0^a = \ln(+\infty) - \ln(1) = \ln(+\infty)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{3}{(x+1)^2} dx = \frac{1}{3} \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a \frac{1}{(x+1)^2} dx = \frac{1}{3} \lim_{a \rightarrow +\infty} \left[ -\frac{1}{x+1} \right]_0^a = \frac{1}{3} \cdot (-0 + 1) = \frac{1}{3}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x+3} dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a \frac{1}{x+3} dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} [\ln(x+3)]_0^a = \ln(+\infty) - \ln(3) = \ln(+\infty) + \ln(3)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{2}{x^2+2} dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a \frac{2}{x^2+2} dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} \left[ \sqrt{2} \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \right]_0^a = \frac{\sqrt{2}\pi}{2}$$

Dostáváme tedy, že

$$\int_0^{\infty} f(x)dx = \ln(+\infty) - \ln(+\infty) - \ln(3) + \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{2}\pi}{2} = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{2}\pi}{2} - \ln(3)$$

### 3. úkol

3. Pomocí derivace nebo integrace najděte součet řady  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^{2n}}{2n}$ . Vyšetřete obor konvergence.

## 4. úkol

### Zadání

Najděte a nakreslete definiční obor funkce

$$f(x, y) = \frac{1}{\ln(\cos(\pi x) - y)} + \sqrt{\cos(\pi y) + x} \quad (2)$$

### Rozbor příkladu

Máme najít definiční obor funkce dvou neznámých, která je zadána přepisem ??.

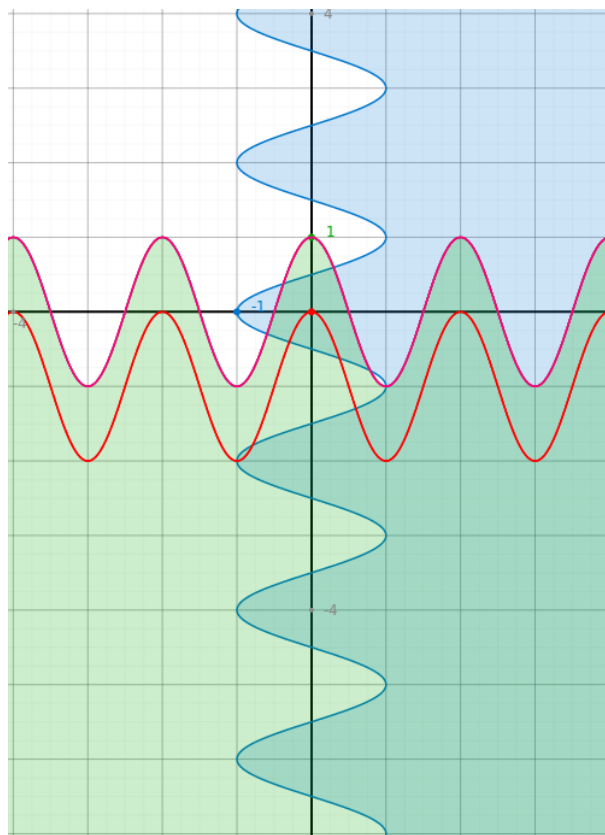
Najdeme tedy definiční obory všech elementárních funkcí a výsledný definiční obor bude průnikem těchto dílčích definičních oborů.

### Řešení

Musí jednoznačně platit, že

$$\cos(\pi x) - y > 0 \quad \wedge \quad \cos(\pi x) - y \neq 1 \quad \wedge \quad \cos(\pi y) + x \geq 0$$

Nerovnice je možné si nyní zakreslit



Obrázek 1: Červená a růžová barva do průniku nepatří, modrá a zelená ano

## 5. úkol

### Zadání

Najděte lokální extrémy funkce

$$f(x, y, z) = 6x^2 + 5y^2 + 14z^2 + 4xy - 8xz - 2yz + 1 \quad (3)$$

### Rozbor příkladu

1. Máme za úkol najít lokální extrémy funkce **??**. Nejdříve vypočítáme jednotlivé parciální derivace a položíme je rovny 0. Uspořádané trojice, které budou řešením této soustavy rovnic budeme považovat za podezřelé body.
2. Sestavíme si Hassovu matici z derivací druhého řádu a dosadíme do ní jednotlivé podezřelé body. Zda se jedná o extrém nebo ne poznáme z hodnot subdeterminantů této matice.

### Řešení

Výpočet parciálních derivací

$$\begin{aligned} f'_x &= 12x + 4y - 8z \\ f'_y &= 10y + 4x - 2z \\ f'_z &= 28z - 8x - 2y \end{aligned}$$

Položením parciálních derivací 0 získáme soustavu rovnic.

$$\begin{aligned} 12x + 4y - 8z &= 0 \\ 10y + 4x - 2z &= 0 \\ 28z - 8x - 2y &= 0 \end{aligned}$$

Jedná se o homogenní soustavu tří rovnic o třech neznámých. Řešením soustavy je jeden bod o souřadnicích  $[0, 0, 0]$  Sestavíme si Hassovu matici

$$A = \begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{yx} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 4 & -8 \\ 4 & 10 & -2 \\ -8 & -2 & 28 \end{bmatrix}$$

$$D_1 = 12 > 0 \quad D_2 = 104 > 0 \quad D_3 = 2352 > 0$$

Všechny subdeterminanty  $v$  jsou kladné. Z toho lze vyvodit, že funkce má v bodě  $[0, 0, 0]$  lokální minimum. Jeho hodnota je.

$$f(0, 0, 0) = 6 \cdot 0^2 + 5 \cdot 0^2 + 14 \cdot 0^2 + 4 \cdot 0 \cdot 0 - 8 \cdot 0 \cdot 0 - 2 \cdot 0 \cdot 0 + 1 = 1$$