VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
Fakulta informačních technologií

Matematická analýza 2016/2017
Domácí úkol č. 1, varianta 1

Iva Kavánková *xkavan05*,
Erik Kelemen *xkelem01*,
Martin Kobelka *xkobel02*,
Josef Kolář *xkolar71*,
Matej Kolesár *xkoles07*,
Son Hai Nguyen *xnguye16*

27. února 2017

1. úkol

Zadání

Rozložte na parciální zlomky tuto racionální lomenou funkci.

$$f(x) = \frac{3x^3 + x^2 - 4x + 16}{x^5 + 5x^4 + 9x^3 + 13x^2 + 14x + 6}$$

Rozbor příkladu

Máme za úkol najít rozklad na parciální zlomky. Polynom ve jmenovateli ma vyšší stupneň, než polynom v čitateli. Není třeba provádět dělení, a můžeme rovnou přistoupit k rozkladu.

Pro rozklad polynomu ve jmenovateli použijeme hornerovo schéma. Poté si napíšeme rovnici vyjadřující rozklad na jednotlivé parciální zlomky v obecném tvaru. Podle rovnice si sestavíme soustavu rovnic pro výpočet jednotlivých koeficientů. Řešením rovnice budou koeficienty z množiny Q. Tím získáme rozklad funkce na parciální zlomky.

Řešení

Rozklad čitatele za pomoci hornerova schémata na součin závorek.

	1	5	9	13	14	6	
-1	1	4	5	8	6	0	OK
-1	1	3	2	6	0		OK
-3	1	0	2	0			OK

Tabulka 1: Rozklad čitatele

Rozklad jmenovatele na součin v oboru reálných čísel je tedy.

$$x^5 + 5x^4 + 9x^3 + 13x^2 + 14x + 6 = (x + 1)^2(x + 3)(x^2 + 2)$$

Výraz $x^2 + 2$ nelze dále v oboru reálných čísel rozložit. Dostáváme tedy funkci

$$f(x) = \frac{3x^3 + x^2 - 4x + 16}{(x + 1)^2(x + 3)(x^2 + 2)}$$

Funkci můžeme nyní rozložit na parciální zlomky. Rozklad bude vypadat následovně.

$$f(x) = \frac{3x^3 + x^2 - 4x + 16}{(x + 1)^2(x + 3)(x^2 + 2)} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{(x + 1)^2} + \frac{C}{x + 3} + \frac{Dx + E}{x^2 + 2}$$

Rovnici upravíme na tvar

$$3x^3 + x^2 - 4x + 16 = A(x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 8x + 6) + B(x^3 + 3x^2 + 2x + 6) + C(x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 2) +$$

$$+ (Dx + E) \cdot (x^3 + 5x^2 + 7x + 3)$$

Po roznásobení závorky dostáváme

$$3x^3 + x^2 - 4x + 16 = A(x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 8x + 6) + B(x^3 + 3x^2 + 2x + 6) + C(x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 2) +$$

$$+ D(x^4 + 5x^3 + 7x^2 + 3x) + E(x^3 + 5x^2 + 7x + 3)$$

Rovnici si upravíme vytknutím mocnin

$$3x^3 + x^2 - 4x + 16 = x^4(A + C + D) + x^3(4A + B + 2C + 5D + E) + x^2(5A + 3B + 3C + 7D + 5E) +$$
$$+x(8A + 2B + 4C + 3D + 7E) + (6A + 6B + 2C + 3E)$$

Podle této rovnice si sestavíme soustavu rovnic pro výpočet koeficientů A, B, C, D a E

$$0 = A + C + D$$
$$3 = 4A + B + 2C + 5D + E$$
$$1 = 5A + 3B + 3C + 7D + 5E$$
$$-4 = 8A + 2B + 4C + 3D + 7E$$
$$16 = 6A + 6B + 2C + 3E$$

Vyřešením soustavy rovnic dostáváme $A = 1, B = 3, C = -1, D = 0, E = -2$ Funkce rozložená na parciální zlomky má tedy tvar.

$$f(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{3}{(x+1)^2} - \frac{1}{x+3} - \frac{2}{x^2+2}$$

2. úkol

Zadání

Najděte asymptoty grafu funkce

$$f(x) = x^2(\frac{\pi}{4} - arctg(\frac{x^2}{x^2-1}))$$

Rozbor příkladu

Máme najít asymptoty grafu funkce. To znamená najít všechny svislé asymptoty, šikmé asymptoty a vodorovné asymptoty.

Svislou asymptotou rozumíme přímku ve tvaru $x = a$, jestliže

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty \bigvee \lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$$

Vodorovnou asymptotou rozumíme přímku ve tvatu $y = a$ jestliže

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = c \bigvee \lim_{x\to -\infty} f(x) = c$$

Šikmmou asymptotou rozumíme přímku, ve tvaru $y = ax + b; a \neq 0$. Ta existuje v případě, že

$$\lim_{x\to \pm\infty} f(x) = c; c \neq 0$$

Tyto limity je třeba najít a ověřit.

Řešení

Svislé asymptoty

Limita ze součinu dvou závorek je rovna $\pm\infty$, pokud jedna z techto závorek je rovna $\pm\infty$. Výraz x^2 je primitiní funkcí, která má nevlastní limitu pouze v $\pm\infty$ Výraz $\frac{\pi}{4} - arctg(\frac{x^2}{x^2-1})$ má obor hodnot $(-\frac{\pi}{2}; +\frac{3\pi}{4})$ Funkce tedy nemá svislou asymptotu.

Vodorovné asymptoty

$$\lim_{x\to-\infty} \underbrace{x^2}_{\to+\infty}(\frac{\pi}{4} - \underbrace{arctg(\frac{x^2}{x^2-1})}_{\to\pi/4}) = \infty\cdot 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} \underbrace{x^2}_{\to+\infty}(\frac{\pi}{4} - \underbrace{arctg(\frac{x^2}{x^2-1})}_{\to\pi/4}) = \infty\cdot 0$$

Zjitíme, jestli funkce je sudá.

$$x^2(\frac{\pi}{4} - arctg(\frac{x^2}{x^2-1})) = (-x)^2(\frac{\pi}{4} - arctg(\frac{(-x)^2}{(-x)^2-1}))$$

Což platí. Funkce má tedy nanejvýše jednu vodorovnou asymptotu. Pro výpočet limity použijeme l-hospitalovo pravidlo.

$$\lim_{x\to\pm\infty} x^2(\frac{\pi}{4} - arctg(\frac{x^2}{x^2-1})) = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\pi}{4} - arctg(\frac{x^2}{x^2-1})}{x^{-2}} =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{1}{1+(\frac{x^2}{x^2-1})^2}\cdot\frac{2x(x^2-1)-2x\cdot x^2}{(x^2-1)^2}}{-2x^{-3}} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{1+(\frac{x^2}{x^2-1})^2}\cdot\frac{2x(x^2-1)-2x\cdot x^2}{(x^2-1)^2}\cdot(-\frac{1}{2})\cdot x^{-3}$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{-x^4+2x^2-1}{2x^4-2x^2+1}\cdot\frac{x^4}{x^4-2x^2+1} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{-x^8+\overbrace{\cdots}^{\to 0}}{2x^8+\underbrace{\cdots}_{\to 0}} = -\frac{1}{2}$$

Funkce má tedy jedinou vodorovnou asymtotu s rovnicí

$$y = -\frac{1}{2}$$

Šikmé asymptoty

Jelikož $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = c$, tak potom $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = 0$ Šikmá asymptota neexistuje.

2. úkol

3. úkol

3. úkol

4. úkol

4. úkol

5. úkol

5. úkol