VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
Fakulta informačních technologií

Matematická analýza 2016/2017
Domácí úkol č. 2, varianta 1

Iva Kavánková *xkavan05*,
Erik Kelemen *xkelem01*,
Martin Kobelka *xkobel02*,
Josef Kolář *xkolar71*,
Matej Kolesár *xkoles07*,
Son Hai Nguyen *xnguye16*

5. dubna 2017

1. úkol

1. Vyšetřete lokální extrémy funkce $f(x) = \int\limits_0^x t(t-1)(t-5)\mathrm{d}t$.

2. úkol

Zadání

Vypočítejte $\int\limits_0^\infty f(x)\mathrm{d}x$, kde $f(x)$ je funkce **??**, kterou jste v 1. úloze rozkládali na parciální zlomky (rozklad znovu neprovádějte). Použijte již rozložený tvar.

$$f(x) = \frac{3x^3 + x^2 - 4x + 16}{x^5 + 5x^4 + 9x^3 + 13x^2 + 14x + 6} \tag{1}$$

Rozbor příkladu

1. Funkci rozložíme na parciální zlomky (viz úloha č. 1)
2. Jednotlivé parciální zlomky budeme integrovat jako nevlastní integrály.
3. Získané hodnoty sečteme a dostaneme hodnotu $\int\limits_0^\infty f(x)\mathrm{d}x$

Řešení

Rozklad na parciální zlomky (viz úloha č. 1)

$$f(x) = \frac{3x^3 + x^2 - 4x + 16}{x^5 + 5x^4 + 9x^3 + 13x^2 + 14x + 6} = \frac{1}{x+1} + \frac{3}{(x+1)^2} - \frac{1}{x+3} - \frac{2}{x^2+2}$$

A jednotlivé zlomky poté integrujeme

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{1}{x+1}dx &= \lim_{a\to+\infty}\int_0^a \frac{1}{x+1}dx = \lim_{a\to+\infty}\big[\ln(x+1)\big]_0^a = \ln(+\infty) - \ln(1) = \ln(+\infty)\\
\int_0^\infty \frac{3}{(x+1)^2}dx &= \frac{1}{3}\lim_{a\to+\infty}\int_0^a \frac{1}{(x+1)^2}dx = \frac{1}{3}\lim_{a\to+\infty}\Big[-\frac{1}{x+1}\Big]_0^a = \frac{1}{3}\cdot(-0+1) = \frac{1}{3}\\
\int_0^\infty \frac{1}{x+3}dx &= \lim_{a\to+\infty}\int_0^a \frac{1}{x+3}dx = \lim_{a\to+\infty}\big[\ln(x+3)\big]_0^a = \ln(+\infty) - \ln(3) = \ln(+\infty) + \ln(3)\\
\int_0^\infty \frac{2}{x^2+2}dx &= \lim_{a\to+\infty}\int_0^a \frac{2}{x^2+2}dx = \lim_{a\to+\infty}\Big[\sqrt{2}\cdot\mathrm{arctg}\Big(\frac{x}{\sqrt{2}}\Big)\Big]_0^a = \frac{\sqrt{2}\pi}{2}
\end{aligned}$$

Dostáváme tedy, že

$$\int_0^\infty f(x)dx = \ln(+\infty) - \ln(+\infty) - \ln(3) + \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{2}\pi}{2} = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{2}\pi}{2} - \ln(3)$$

3. úkol

3. Pomocí derivace nebo integrace najděte součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^{2n}}{2n}$. Vyšetřete obor konvergence.

4. úkol

Zadání

Najděte a nakreslete definiční obor funkce

$$f(x,y) = \frac{1}{\ln(\cos(\pi x) - y)} + \sqrt{\cos(\pi y) + x} \tag{2}$$

Rozbor příkladu

Máme najít definiční obor funkce dvou neznámých, která je zadána přepisem **??**.

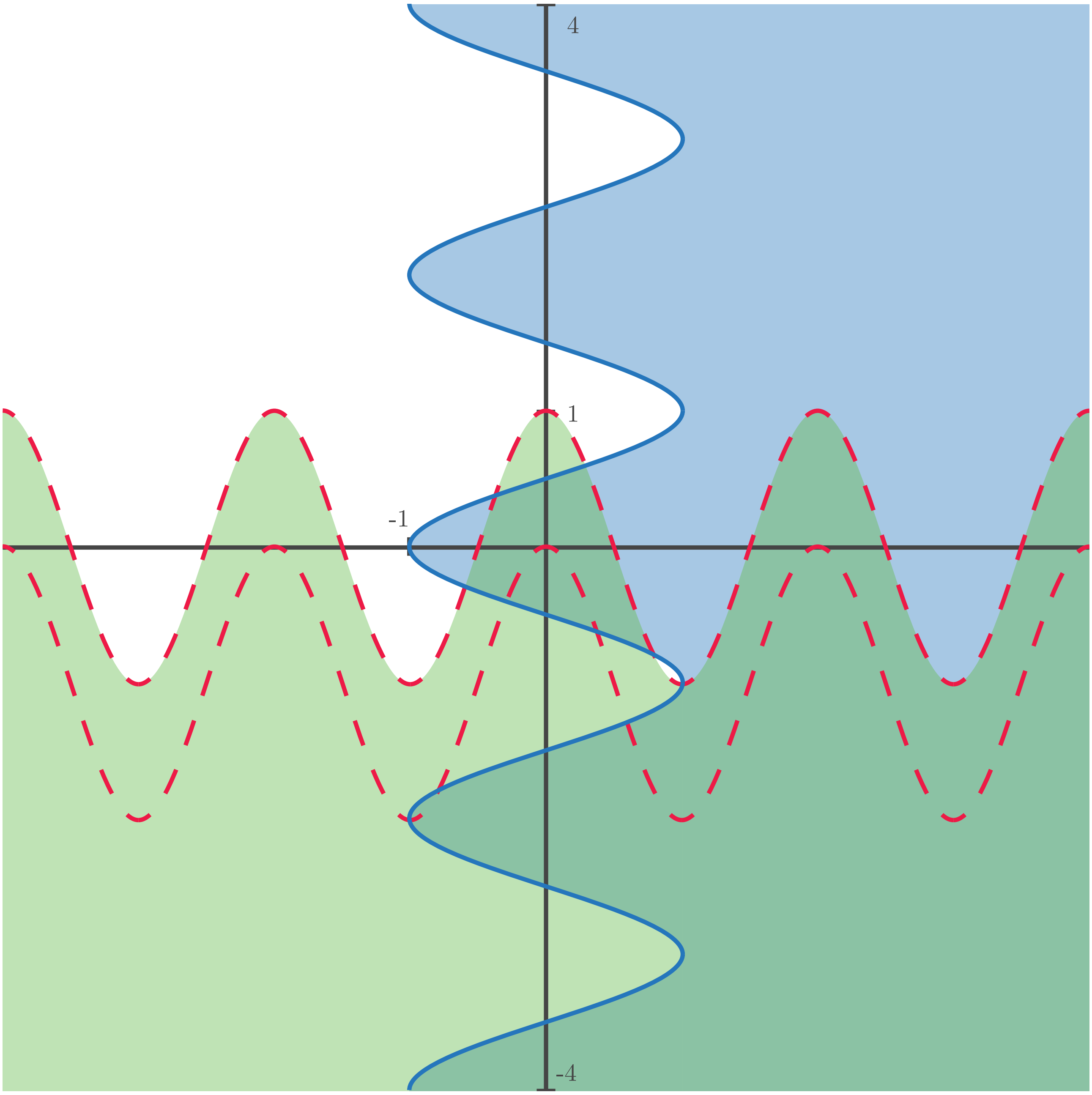
Najdeme tedy definiční obory všech elementárních funkcí a výsledný definiční obor bude průnikem těchto dílčích definičních oborů.

Řešení

Musí jednoznačně platit, že

$$\cos(\pi x) - y > 0 \quad \wedge \quad \cos(\pi x) - y \neq 1 \quad \wedge \quad \cos(\pi y) + x \geq 0$$

Nerovnice je možné si nyní zakreslit



Obrázek 1: Červená a růžová barva do průniku nepatří, modrá a zelená ano

5. úkol

Zadání

Najděte lokální extrémy funkce

$$f(x,y,z) = 6x^2 + 5y^2 + 14z^2 + 4xy - 8xz - 2yz + 1 \tag{3}$$

Rozbor příkladu

1. Máme za úkol najít lokální extrémy funkce **??**. Nejdříve vypočítáme jednotlivé parciální derivace a položíme je rovny 0. Uspořádané trojice, které budou řešením této soustavy rovnic budeme považovat za podezřelé body.

2. Sestavíme si Hassovu matici z derivací druhého řádu a dosadíme do ní jednotlivé podezřelé body. Zda se jedná o extrém nebo ne poznáme z hodnot subdeterminantů této matice.

Řešení

Výpočet parciálních derivací

$$\begin{aligned} f'_x &= 12x + 4y - 8z \\ f'_y &= 10y + 4x - 2z \\ f'_z &= 28z - 8x - 2y \end{aligned}$$

Položením parciálních derivací 0 získáme soustavu rovnic.

$$\begin{aligned} 12x + 4y - 8z &= 0 \\ 10y + 4x - 2z &= 0 \\ 28z - 8x - 2y &= 0 \end{aligned}$$

Jedná se o homogenní soustavu tří rovnic o třech neznámých. Řešením soustavy je jeden bod o souřadniciích $[0,0,0]$ Sestavíme si Hassovu matici

$$A = \begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{yx} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 4 & -8 \\ 4 & 10 & -2 \\ -8 & -2 & 28 \end{bmatrix}$$

$$D_1 = 12 > 0 \qquad D_2 = 104 > 0 \qquad D_3 = 2352 > 0$$

Všechny subdeterminanty v jsou kladné. Z toho lze vyvodit, že funkce má v bodě $[0,0,0]$ lokální minimumum. Jeho hodnota je.

$$f(0,0,0) = 6 \cdot 0^2 + 5 \cdot 0^2 + 14 \cdot 0^2 + 4 \cdot 0 \cdot 0 - 8 \cdot 0 \cdot 0 - 2 \cdot 0 \cdot 0 + 1 = 1$$