

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

Fakulta informačních technologií



Matematická analýza 2016/2017

Domácí úkol č. 2, varianta 1

Iva Kavánková *xkavan05*,

Erik Kelemen *xkelem01*,

Martin Kobelka *xkobel02*,

Josef Kolář *xkolar71*,

Matej Kolesár *xkoles07*,

Son Hai Nguyen *xnguye16*

11. dubna 2017

1. úkol

Vyšetřete lokální extrémy funkce $f(x) = \int_0^x t(t-1)(t-5)dt$.

Rozbor řešení

Budeme hledat lokální extrémy funkce, kterou získáme zintegrováním zadaného určitého integrálu v intervalu $\langle 0, x \rangle$.

Řešení

$$\begin{aligned}f(x) &= \int_0^x t(t-1)(t-5)dt = \int_0^x (t^3 - 6t^2 + 5t)dt = \left[\frac{t^4}{4} - 2t^3 + \frac{5t^2}{2} \right]_0^x \\f(x) &= \frac{x^4}{4} - 2x^3 + \frac{5x^2}{2} \\f'(x) &= (x^3 - 6x^2 + 5x)dx \\f'(x) &= 0 \rightarrow (x^3 - 6x^2 + 5x) = x(x-5)(x-1) \\x_1 &= 0 \quad x_2 = 1 \quad x_3 = 5\end{aligned}$$

Nyní máme tři x , ve kterých první derivace určitého integrálu je rovna nule, tato x tedy označíme jako x podezřelá z extrémů. Dosazením do $f(x)$ získáme hodnoty konkrétních určitých integrálů v podezřelých x .

$$f(x_1) = 0 \quad f(x_2) = \frac{3}{4} \quad f(x_3) = -31.25$$

Nyní můžeme x_1 vyloučit, protože se nejedná o lokální extrém ale pouze o hodnotu podezřelou z něj. Řešením je tedy lokální maximum v bodě $x_2 = 1$, kde je funkční hodnota $\frac{3}{4}$ a lokální minimum v bodě $x_3 = 5$ s funkční hodnotou -31.25 .

2. úkol

Zadání

Vypočítejte $\int_0^{\infty} f(x)dx$, kde $f(x)$ je funkce ??, kterou jste v 1. úloze rozkládali na parciální zlomky (rozklad znovu neprovádějte). Použijte již rozložený tvar.

$$f(x) = \frac{3x^3 + x^2 - 4x + 16}{x^5 + 5x^4 + 9x^3 + 13x^2 + 14x + 6} \quad (1)$$

Rozbor příkladu

1. Funkci rozložíme na parciální zlomky (viz úloha č. 1)
2. Jednotlivé parciální zlomky budeme integrovat jako nevlastní integrály.
3. Získané hodnoty sečteme a dostaneme hodnotu $\int_0^{\infty} f(x)dx$

Řešení

Rozklad na parciální zlomky (viz úloha č. 1)

$$f(x) = \frac{3x^3 + x^2 - 4x + 16}{x^5 + 5x^4 + 9x^3 + 13x^2 + 14x + 6} = \frac{1}{x+1} + \frac{3}{(x+1)^2} - \frac{1}{x+3} - \frac{2}{x^2+2}$$

A jednotlivé zlomky poté integrujeme

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x+1} dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a \frac{1}{x+1} dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} [\ln(x+1)]_0^a = \ln(+\infty) - \ln(1) = \ln(+\infty)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{3}{(x+1)^2} dx = \frac{1}{3} \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a \frac{1}{(x+1)^2} dx = \frac{1}{3} \lim_{a \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{x+1} \right]_0^a = \frac{1}{3} \cdot (-0 + 1) = \frac{1}{3}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x+3} dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a \frac{1}{x+3} dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} [\ln(x+3)]_0^a = \ln(+\infty) - \ln(3) = \ln(+\infty) + \ln(3)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{2}{x^2+2} dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a \frac{2}{x^2+2} dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} \left[\sqrt{2} \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \right]_0^a = \frac{\sqrt{2}\pi}{2}$$

Dostáváme tedy, že

$$\int_0^{\infty} f(x) dx = \ln(+\infty) - \ln(+\infty) - \ln(3) + \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{2}\pi}{2} = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{2}\pi}{2} - \ln(3)$$

3. úkol

Pomocí derivace nebo integrace najděte součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^{2n}}{2n}$. Vyšetřete obor konvergence.

4. úkol

Zadání

Najděte a nakreslete definiční obor funkce

$$f(x, y) = \frac{1}{\ln(\cos(\pi x) - y)} + \sqrt{\cos(\pi y) + x} \quad (2)$$

Rozbor příkladu

Máme najít definiční obor funkce dvou neznámých, která je zadána přepisem ??.

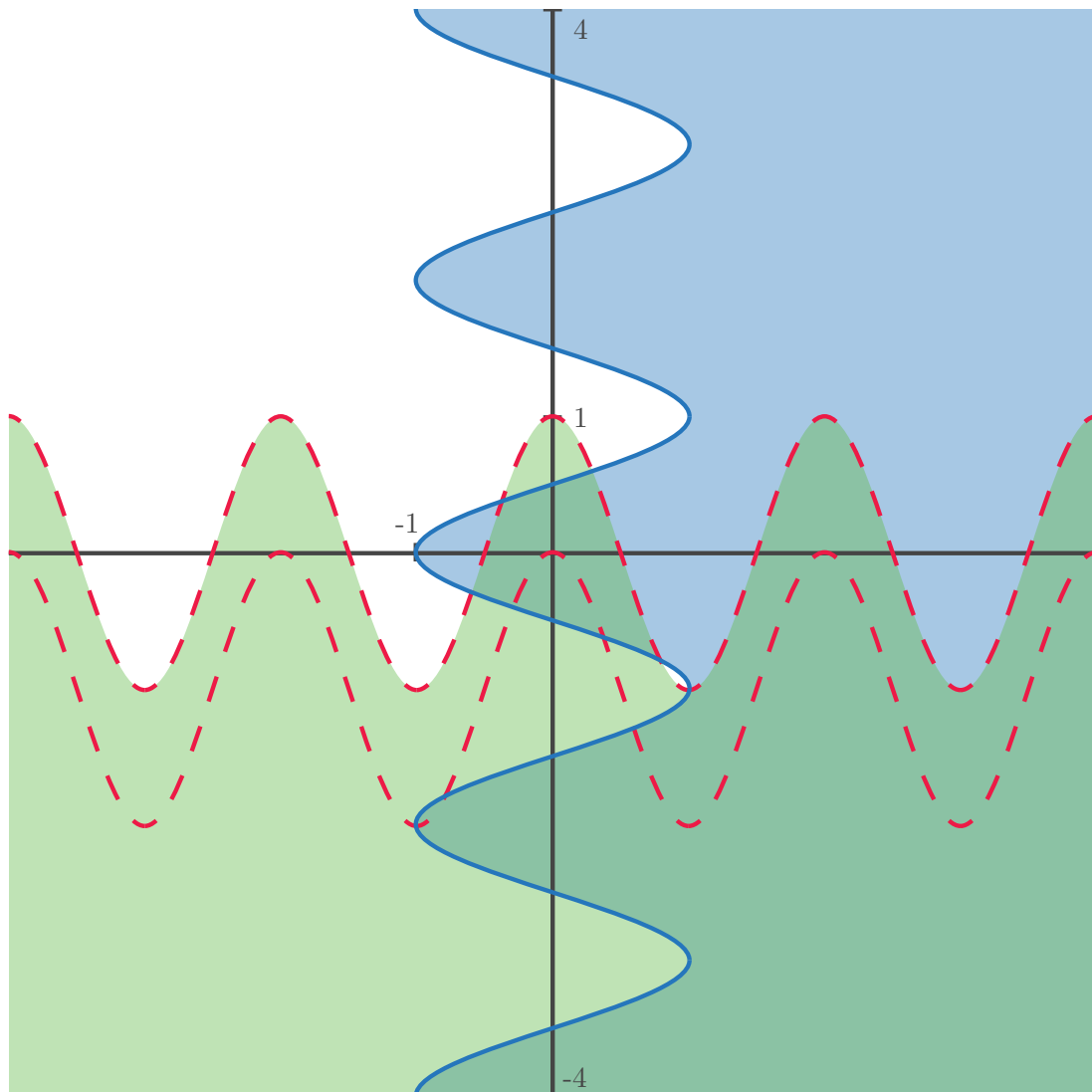
Najdeme tedy definiční obory všech elementárních funkcí a výsledný definiční obor bude průnikem těchto dílčích definičních oborů.

Řešení

Musí jednoznačně platit, že

$$\cos(\pi x) - y > 0 \quad \wedge \quad \cos(\pi x) - y \neq 1 \quad \wedge \quad \cos(\pi y) + x \geq 0$$

Nerovnice zakreslíme:



Obrázek 1: Červená a růžová barva do průniku nepatří, modrá a zelená ano

5. úkol

Zadání

Najděte lokální extrémy funkce

$$f(x, y, z) = 6x^2 + 5y^2 + 14z^2 + 4xy - 8xz - 2yz + 1 \quad (3)$$

Rozbor příkladu

1. Máme za úkol najít lokální extrémy funkce **??**. Nejdříve vypočítáme jednotlivé parciální derivace a položíme je rovny 0. Uspořádané trojice, které budou řešením této soustavy rovnic budeme považovat za podezřelé body.
2. Sestavíme si Hassovu matici z derivací druhého řádu a dosadíme do ní jednotlivé podezřelé body. Zda se jedná o extrém nebo ne poznáme z hodnot subdeterminantů této matice.

Řešení

Výpočet parciálních derivací:

$$\begin{aligned} f'_x &= 12x + 4y - 8z \\ f'_y &= 10y + 4x - 2z \\ f'_z &= 28z - 8x - 2y \end{aligned}$$

Položení parciálních derivací 0 a získání soustavy rovnic:

$$\begin{aligned} 12x + 4y - 8z &= 0 \\ 10y + 4x - 2z &= 0 \\ 28z - 8x - 2y &= 0 \end{aligned}$$

Jedná se o homogenní soustavu tří rovnic o třech neznámých. Řešením soustavy je jeden bod o souřadnicích $[0, 0, 0]$. Sestavíme si Hassovu matici

$$A = \begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{yx} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 4 & -8 \\ 4 & 10 & -2 \\ -8 & -2 & 28 \end{bmatrix}$$

$$D_1 = 12 > 0 \quad D_2 = 104 > 0 \quad D_3 = 2352 > 0$$

Všechny subdeterminanty v jsou kladné. Z toho lze vyvodit, že funkce má v bodě $[0, 0, 0]$ lokální minimum. Vyčíslíme jeho hodnotu:

$$f(0, 0, 0) = 6 \cdot 0^2 + 5 \cdot 0^2 + 14 \cdot 0^2 + 4 \cdot 0 \cdot 0 - 8 \cdot 0 \cdot 0 - 2 \cdot 0 \cdot 0 + 1 = 1$$