

# VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

## Fakulta informačních technologií



### Matematická analýza 2016/2017

Domácí úkol č. 2, varianta 1

Iva Kavánková *xkavan05*,

Erik Kelemen *xkelem01*,

Martin Kobelka *xkobel02*,

Josef Kolář *xkolar71*,

Matej Kolesár *xkoles07*,

Son Hai Nguyen *xnguye16*

12. dubna 2017

## 1. úkol

Vyšetřete lokální extrémy funkce  $f(x) = \int_0^x t(t-1)(t-5)dt$ .

### Rozbor řešení

Budeme hledat lokální extrémy funkce, která je dána hodnotou určitého integrálu  $\langle 0, x \rangle$ . Zjistíme si tedy funkci, která určuje hodnotu tohoto integrálu, poté nalezneme podezřelé body a přidáme k nim krajní bod, ve kterém je hodnota integrálu 0, dosadíme do

### Řešení

Nalezení funkce, která určuje hodnotu určitého integrálu

$$f(x) = \int_0^x t(t-1)(t-5)dt = \int_0^x (t^3 - 6t^2 + 5t)dt = \left[ \frac{t^4}{4} - 2t^3 + \frac{5t^2}{2} \right]_0^x = \frac{x^4}{4} - 2x^3 + \frac{5x^2}{2}$$

Nalezení podezřelých bodů

$$f'(x) = x^3 - 6x^2 + 5x$$

$$f'(x) = 0$$

$$x^3 - 6x^2 + 5x = 0$$

$$x(x-5)(x-1) = 0$$

$$x_1 = 1 \quad x_2 = 5$$

Nyní máme dvě hodnoty funkce, ve kterých může nabývat extrému. K těmto dvěma hodnotám ještě přičteme bod  $x_3 = 0$

Nyní máme tři  $x$ , ve kterých první derivace určitého integrálu je rovna nule. U hodnot  $x_2$  a  $x_3$  musíme ještě rozhodnout, zda se jedná o skutečné extrémy nebo jen inflexní body. Tedy označíme  $x_2$  a  $x_3$  jako podezřelá z extrémů.

$$f'(0.5) = 1.125 \quad f'(2) = -6 \Rightarrow \text{Lokální maximum}$$

$$f'(2) = -6 \quad f'(6) = 30 \Rightarrow \text{Lokální minimum}$$

Dosazením do  $f(x)$  získáme hodnoty konkrétních určitých integrálů.

$$f(x_1) = 0 \quad f(x_2) = \frac{3}{4} \quad f(x_3) = -31.25$$

### Závěr

Funkce má v bodě  $x = 0$  lokální minimum a jeho hodnota je 0

Funkce má v bodě  $x = 1$  lokální maximum a jeho hodnota je  $\frac{3}{4}$

Funkce má v bodě  $x = 5$  lokální minimum a jeho hodnota je  $-31.25$

## 2. úkol

### Zadání

Vypočítejte  $\int_0^{\infty} f(x)dx$ , kde  $f(x)$  je funkce ??, kterou jste v 1. úloze rozkládali na parciální zlomky (rozklad znovu neprovádějte). Použijte již rozložený tvar.

$$f(x) = \frac{3x^3 + x^2 - 4x + 16}{x^5 + 5x^4 + 9x^3 + 13x^2 + 14x + 6} \quad (1)$$

### Rozbor příkladu

1. Funkci rozložíme na parciální zlomky (viz úloha č. 1)
2. Jednotlivé parciální zlomky budeme integrovat jako nevlastní integrály.
3. Získané hodnoty sečteme a dostaneme hodnotu  $\int_0^{\infty} f(x)dx$

### Řešení

Rozklad na parciální zlomky (viz úloha č. 1)

$$f(x) = \frac{3x^3 + x^2 - 4x + 16}{x^5 + 5x^4 + 9x^3 + 13x^2 + 14x + 6} = \frac{1}{x+1} + \frac{3}{(x+1)^2} - \frac{1}{x+3} - \frac{2}{x^2+2}$$

A jednotlivé zlomky poté integrujeme

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x+1} dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a \frac{1}{x+1} dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} [\ln(x+1)]_0^a = \ln(+\infty) - \ln(1) = \ln(+\infty)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{3}{(x+1)^2} dx = 3 \cdot \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a \frac{1}{(x+1)^2} dx = 3 \cdot \lim_{a \rightarrow +\infty} \left[ -\frac{1}{x+1} \right]_0^a = 3 \cdot (-0 + 1) = 3$$

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x+3} dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a \frac{1}{x+3} dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} [\ln(x+3)]_0^a = \ln(+\infty) - \ln(3) = \ln(+\infty) - \ln(3)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{2}{x^2+2} dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a \frac{2}{x^2+2} dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} \left[ \sqrt{2} \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \right]_0^a = \frac{\sqrt{2}\pi}{2}$$

Dostáváme tedy, že

$$\int_0^{\infty} f(x)dx = \ln(+\infty) - \ln(+\infty) + \ln(3) + 3 - \frac{\sqrt{2}\pi}{2} = 3 - \frac{\sqrt{2}\pi}{2} + \ln(3)$$

## 3. úkol

### Zadání

Pomocí derivace nebo integrace najděte součet řady a vyšetřete její obor konvergence.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^{2n}}{2n} \quad (2)$$

### Rozbor příkladu

Máme vyšetřit obor konvergence a najít součet nekonečné řady ???. Najít obor konvergence znamená najít všechna  $x$ , pro která po dosazení vznikne konvergující číselná řada. Toho dosáhneme za pomoci podílového kritéria. Dále máme vypočítat součet řady za pomoci derivace nebo integrace. Řadu si upravíme tak, aby  $n$  začínalo na hodnotě nula a provedeme integraci řady.

### Řešení

#### Výpočet oboru konvergence

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|c_{n+1}(x-x_o)^{n+1}|}{|c_n(x-x_o)^n|} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{|x-3|^{2(n+1)}}{2(n+1)}}{\frac{|x-3|^{2n}}{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n|x-3|^{2n+2}}{2(n+1)|x-3|^{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n|x-3|^2}{n+1} = \\ &= |x-3|^2 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = |x-3|^2 \cdot \overbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1}}^{\rightarrow 1} = |x-3|^2 \end{aligned}$$

Budeme hledat takové hodnoty, pro které je výraz  $|x-3|^2 < 1$

$$|x-3|^2 < 1 \Leftrightarrow |x-3| < 1 \Leftrightarrow x \in (2, 4)$$

Dále musíme prověřit krajní body intervalu.

Pro  $c = 4$  dostaneme číselnou řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^{2n}}{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} \quad (3)$$

Jedná se o řadu, o které víme že diverguje.

Pro  $c = 2$  dostaneme číselnou řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n}}{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$$

Což diverguje, viz. ??

Obor konvergence je tedy interval  $(2, 4)$

**Výpočet součtu nekonečné řady**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^{2n}}{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-3)^{2(n+1)}}{2(n+1)} = \int_3^x \sum_{n=0}^{\infty} (x-3)^{2n-1} =$$

Vnitřní řada je geometrická řada, pro kterou platí

$$a_1 = x - 3 \quad q = (x - 3)^2$$

$$\begin{aligned} &= \int_3^x \frac{x-3}{1-(x-3)^2} dx = \int_3^x \frac{x-3}{-x^2+6x-8} dx = -\frac{1}{2} \int_3^x \frac{-2x+6}{-x^2+6x-8} dx = -\frac{1}{2} \left[ \ln(-x+6x-8) \right]_3^x = \\ &= -\frac{1}{2} \ln(-x^2+6x-8) \end{aligned}$$

**4. úkol****Zadání**

Najděte a nakreslete definiční obor funkce

$$f(x, y) = \frac{1}{\ln(\cos(\pi x) - y)} + \sqrt{\cos(\pi y) + x} \quad (4)$$

**Rozbor příkladu**

Máme najít definiční obor funkce dvou neznámých, která je zadána přepisem ??.

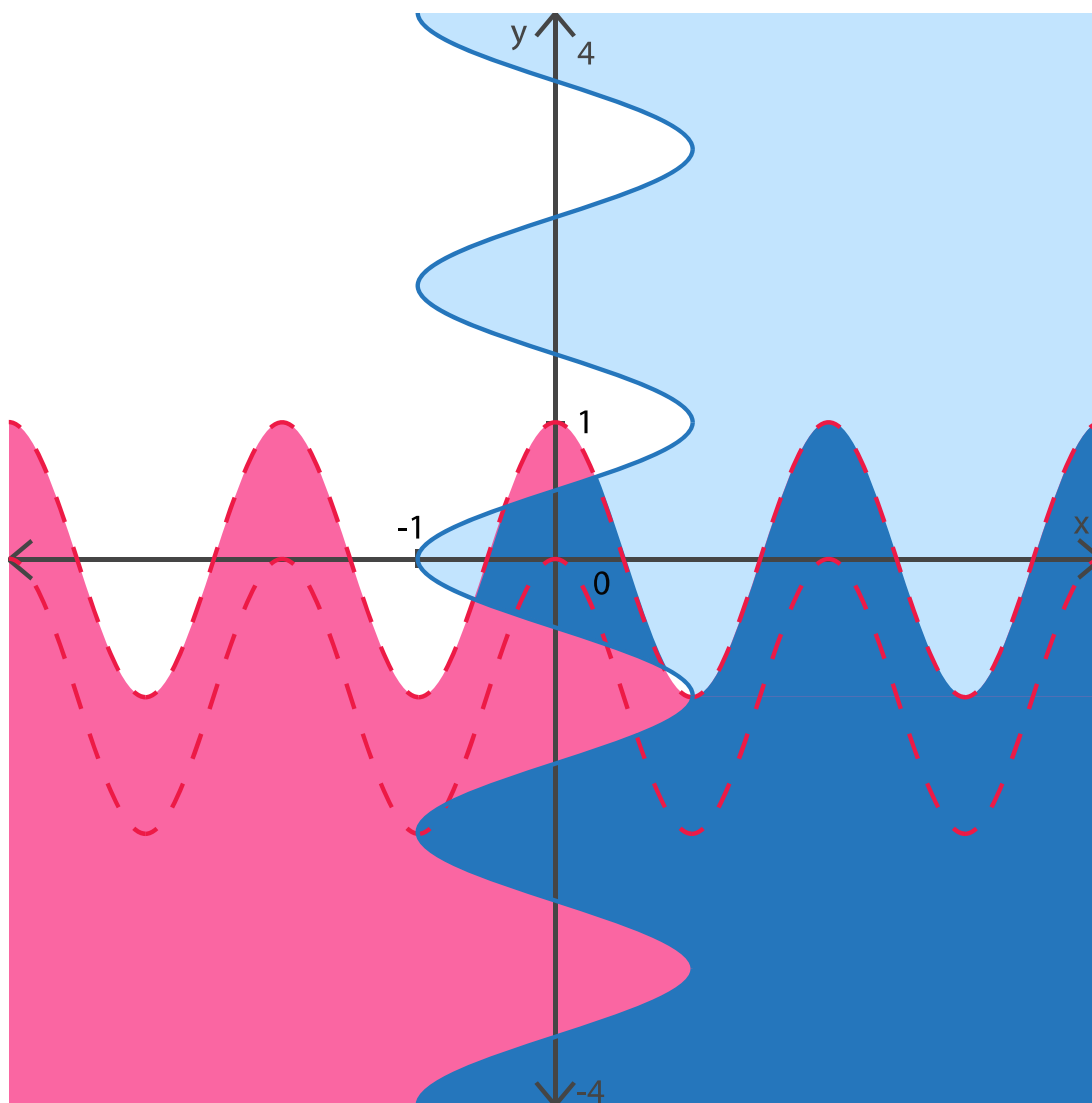
Najdeme tedy definiční obory všech elementárních funkcí a výsledný definiční obor bude průnikem těchto dílčích definičních oborů.

**Řešení**

Musí jednoznačně platit, že

$$\cos(\pi x) - y > 0 \quad \wedge \quad \cos(\pi x) - y \neq 1 \quad \wedge \quad \cos(\pi y) + x \geq 0$$

Nerovnice zakreslíme:



Obrázek 1: Řešením je průnik oblastí modré a růžové barvy

## 5. úkol

### Zadání

Najděte lokální extrémy funkce

$$f(x, y, z) = 6x^2 + 5y^2 + 14z^2 + 4xy - 8xz - 2yz + 1 \quad (5)$$

### Rozbor příkladu

1. Máme za úkol najít lokální extrémy funkce **??**. Nejdříve vypočítáme jednotlivé parciální derivace a položíme je rovny 0. Uspořádané trojice, které budou řešením této soustavy rovnic budeme považovat za podezřelé body.
2. Sestavíme si Hassovu matici z derivací druhého řádu a dosadíme do ní jednotlivé podezřelé body. Zda se jedná o extrém nebo ne poznáme z hodnot subdeterminantů této matice.

### Řešení

Výpočet parciálních derivací:

$$\begin{aligned} f'_x &= 12x + 4y - 8z \\ f'_y &= 10y + 4x - 2z \\ f'_z &= 28z - 8x - 2y \end{aligned}$$

Položení parciálních derivací 0 a získání soustavy rovnic:

$$\begin{aligned} 12x + 4y - 8z &= 0 \\ 10y + 4x - 2z &= 0 \\ 28z - 8x - 2y &= 0 \end{aligned}$$

Jedná se o homogenní soustavu tří rovnic o třech neznámých. Řešením soustavy je jeden bod o souřadnicích  $[0, 0, 0]$ . Sestavíme si Hassovu matici

$$A = \begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{yx} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 4 & -8 \\ 4 & 10 & -2 \\ -8 & -2 & 28 \end{bmatrix}$$

$$D_1 = 12 > 0 \quad D_2 = 104 > 0 \quad D_3 = 2352 > 0$$

Všechny subdeterminanty  $v$  jsou kladné. Z toho lze vyvodit, že funkce má v bodě  $[0, 0, 0]$  lokální minimum. Vyčíslíme jeho hodnotu:

$$f(0, 0, 0) = 6 \cdot 0^2 + 5 \cdot 0^2 + 14 \cdot 0^2 + 4 \cdot 0 \cdot 0 - 8 \cdot 0 \cdot 0 - 2 \cdot 0 \cdot 0 + 1 = 1$$