VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
Fakulta informačních technologií

Matematická analýza 2016/2017
Domácí úkol č. 2, varianta 1

Iva Kavánková *xkavan05*,
Erik Kelemen *xkelem01*,
Martin Kobelka *xkobel02*,
Josef Kolář *xkolar71*,
Matej Kolesár *xkoles07*,
Son Hai Nguyen *xnguye16*

12. dubna 2017

1. úkol

Vyšetřete lokální extrémy funkce $f(x) = \int\limits_0^x t(t-1)(t-5)\mathrm{d}t$.

Rozbor řešení

Budeme hledat lokální extrémy funkce, která je dána hodnotou určitého integrálu $\langle 0, x \rangle$. Zjistíme si tedy funkci, která určuje hodnotu tohoto integrálu, poté nalezneme podezřelé body a přidáme k nim krajní bod, ve kterém je hodnota integrálu 0, dosadíme do

Řešení

Nalezení funkce, která určuje hodnotu určitého integrálu

$$f(x) = \int_0^x t(t-1)(t-5)\mathrm{d}t = \int_0^x (t^3 - 6t^2 + 5t)\mathrm{d}t = \left[\frac{t^4}{4} - 2t^3 + \frac{5t^2}{2}\right]_0^x = \frac{x^4}{4} - 2x^3 + \frac{5x^2}{2}$$

Nalezení podezřelých bodů

$$f'(x) = x^3 - 6x^2 + 5x$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ x^3 - 6x^2 + 5x &= 0 \\ x(x-5)(x-1) &= 0 \end{aligned}$$

$$x_1 = 1 \qquad x_2 = 5$$

Nyní máme dvě hodnoty funkce, ve kterých může nabývat extrému. K těmto dvoum hodnotá ještě přičteme bod $x_3 = 0$

Nyní máme tři x, ve kterých první derivace určitého integrálu je rovna nule. U hodnot x_2 a x_3 musíme ještě rozhodnout, zda se jedná o skutečné extrémy nebo jen inflexní body. Tedy označíme x_2 a x_3 jako podezřelá z extrémů.

$$\begin{aligned} f'(0.5) = 1.125 \quad f'(2) = -6 &\Rightarrow \text{Lokální maximum} \\ f'(2) = -6 \quad f'(6) = 30 &\Rightarrow \text{Lokální minimum} \end{aligned}$$

Dosazením do $f(x)$ získáme hodnoty konkrétních určitých integrálů.

$$f(x_1) = 0 \qquad f(x_2) = \frac{3}{4} \qquad f(x_3) = -31.25$$

Závěr

Funkce má v bodě $x = 0$ lokální minimum a jeho hodnota je 0
Funkce má v bodě $x = 1$ lokální maximum a jeho hodnota je $\frac{3}{4}$
Funkce má v bode $x = 5$ lokální minimum a jeho hodnota je -31.25

2. úkol

Zadání

Vypočítejte $\int\limits_0^\infty f(x)\mathrm{d}x$, kde $f(x)$ je funkce **??**, kterou jste v 1. úloze rozkládali na parciální zlomky (rozklad znovu neprovádějte). Použijte již rozložený tvar.

$$f(x) = \frac{3x^3 + x^2 - 4x + 16}{x^5 + 5x^4 + 9x^3 + 13x^2 + 14x + 6} \tag{1}$$

Rozbor příkladu

1. Funkci rozložíme na parciální zlomky (viz úloha č. 1)
2. Jednotlivé parciální zlomky budeme integrovat jako nevlastní integrály.
3. Získané hodnoty sečteme a dostaneme hodnotu $\int\limits_0^\infty f(x)\mathrm{d}x$

Řešení

Rozklad na parciální zlomky (viz úloha č. 1)

$$f(x) = \frac{3x^3 + x^2 - 4x + 16}{x^5 + 5x^4 + 9x^3 + 13x^2 + 14x + 6} = \frac{1}{x+1} + \frac{3}{(x+1)^2} - \frac{1}{x+3} - \frac{2}{x^2+2}$$

A jednotlivé zlomky poté integrujeme

$$\int_0^\infty \frac{1}{x+1}dx = \lim_{a\to+\infty} \int_0^a \frac{1}{x+1}dx = \lim_{a\to+\infty} \left[\ln(x+1)\right]_0^a = \ln(+\infty) - \ln(1) = \ln(+\infty)$$

$$\int_0^\infty \frac{3}{(x+1)^2}dx = 3\cdot \lim_{a\to+\infty} \int_0^a \frac{1}{(x+1)^2}dx = 3\cdot \lim_{a\to+\infty} \left[-\frac{1}{x+1}\right]_0^a = 3\cdot(-0+1) = 3$$

$$\int_0^\infty \frac{1}{x+3}dx = \lim_{a\to+\infty} \int_0^a \frac{1}{x+3}dx = \lim_{a\to+\infty} \left[\ln(x+3)\right]_0^a = \ln(+\infty) - \ln(3) = \ln(+\infty) - \ln(3)$$

$$\int_0^\infty \frac{2}{x^2+2}dx = 2\cdot \int_0^\infty \frac{1}{x^2+2}dx = 2\cdot \lim_{a\to+\infty} \int_0^a \frac{1}{x^2+2}dx = 2\cdot \lim_{a\to+\infty} \left[\mathrm{arctg}\Big(x\Big)\right]_0^a = \pi$$

Dostáváme tedy, že

$$\int_0^\infty f(x)dx = \ln(+\infty) - \ln(+\infty) + \ln(3) + 3 - \pi = 3 - \pi + \ln(3)$$

3. úkol

Zadání

Pomocí derivace nebo integrace najděte součet řady a vyšetřete její obor konvergence.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^{2n}}{2n} \tag{2}$$

Rozbor příkladu

Máme vyšetři obor konvergence a majít součet nekonečné řady **??**. Najít obor konvergence znamená najít všechna x, pro která po dosazení vznikne konvergující číselná řada. Toho dosáhneme za pomoc podílového kritéria. D8le máme vypočítat součet řady za pomoci derivace nebo integrace. Řadu si upravíme tak, aby n začínalo na hodnotě nula a provedeme integraci řady.

Řešení

Výpočet oboru konvergence

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left| c_{n+1}(x-x_o)^{n+1} \right|}{\left| c_n(x-x_o)^n \right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\left| x-3 \right|^{2(n+1)}}{2(n+1)}}{\frac{\left| x-3 \right|^{2n}}{2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n\left| x-3 \right|^{2n+2}}{2(n+1)\left| x-3 \right|^{2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\left| x-3 \right|^2}{n+1} =$$

$$= \left| x-3 \right|^2 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \left| x-3 \right|^2 \cdot \overbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}}^{\to 1} = \left| x-3 \right|^2$$

Budeme hledat takové hodnoty, pro které je výraz $\left| x-3 \right|^2 < 0$

$$\left| x-3 \right|^2 < 0 \Leftrightarrow \left| x-3 \right| < 0 \Leftrightarrow x \in (2,4)$$

Dále musíme prověřit krajní body intervalu.

Pro $c = 4$ dostaneme číselnou řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^{2n}}{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} \tag{3}$$

Jedná se o řadu, o které víme že diverguje.

Pro $c = 2$ dostaneme číselnou řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n}}{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$$

Což diverguje, viz. **??**

Obor konvergence je tedy interval $(2,4)$

Výpočet součtu nekonečné řady

$$\sum_{a=1}^{\infty} \frac{(x-3)^{2n}}{2n} = \sum_{a=0}^{\infty} \frac{(x-3)^{2(n+1)}}{2(n+1)} = \int_3^x \sum_0^{\infty} (x-3)^{2n-1} =$$

Vnitřní řada je geometrická řada, pro kterou platí

$$a1 = x-3 \qquad q = (x-2)^2$$

$$= \int_3^x \frac{x-3}{1-(x-3)^2} dx = \int_3^x \frac{x-3}{-x^2+6x-8} dx = -\frac{1}{2} \int_3^x \frac{-2x+6}{-x^2+6x-8} dx = -\frac{1}{2} \Big[\ln(-x+6x-8) \Big]_3^x =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln(-x^2 + 6x - 8)$$

4. úkol

Zadání

Najděte a nakreslete definiční obor funkce

$$f(x, y) = \frac{1}{\ln(\cos(\pi x) - y)} + \sqrt{\cos(\pi y) + x} \tag{4}$$

Rozbor příkladu

Máme najít definiční obor funkce dvou neznámých, která je zadána přepisem **??**.

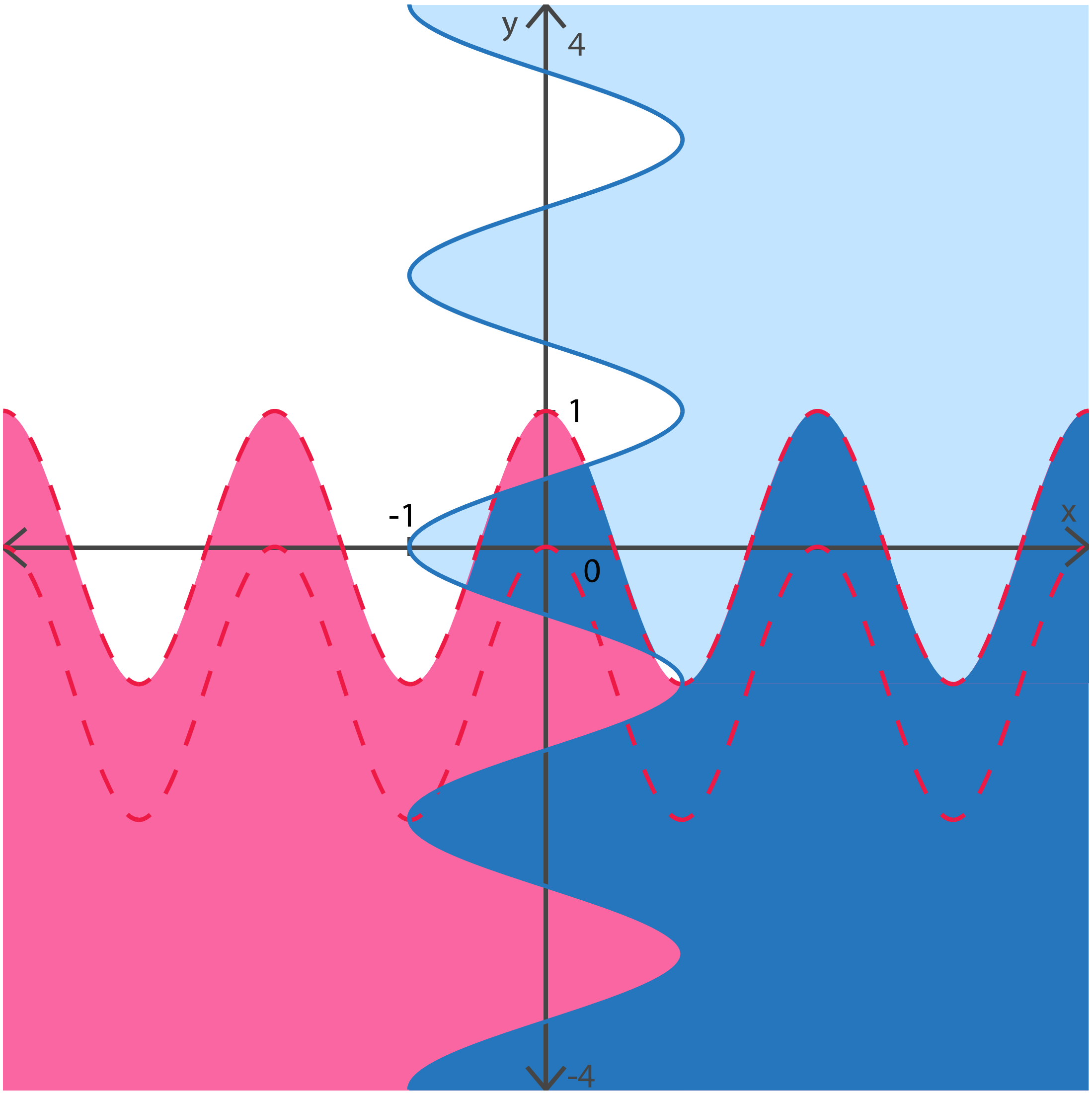
Najdeme tedy definiční obory všech elementárních funkcí a výsledný definiční obor bude průnikem těchto dílčích definičních oborů.

Řešení

Musí jednoznačně platit, že

$$\cos(\pi x) - y > 0 \quad \wedge \quad \cos(\pi x) - y \neq 1 \quad \wedge \quad \cos(\pi y) + x \geq 0$$

Nerovnice zakreslíme:



Obrázek 1: Řešením je průnik oblastí modré a růžové barvy

5. úkol

Zadání

Najděte lokální extrémy funkce

$$f(x, y, z) = 6x^2 + 5y^2 + 14z^2 + 4xy - 8xz - 2yz + 1 \tag{5}$$

Rozbor příkladu

1. Máme za úkol najít lokální extrémy funkce ??. Nejdříve vypočítáme jednotlivé parciální derivace a položíme je rovny 0. Uspořádané trojice, které budou řešením této soustavy rovnic budeme považovat za podezřelé body.

2. Sestavíme si Hassovu matici z derivací druhého řádu a dosadíme do ní jednotlivé podezřelé body. Zda se jedná o extrém nebo ne poznáme z hodnot subdeterminantů této matice.

Řešení

Výpočet parciálních derivací:

$$\begin{aligned} f'_x &= 12x + 4y - 8z \\ f'_y &= 10y + 4x - 2z \\ f'_z &= 28z - 8x - 2y \end{aligned}$$

Položení parciálních derivací 0 a získání soustavy rovnic:

$$\begin{aligned} 12x + 4y - 8z &= 0 \\ 10y + 4x - 2z &= 0 \\ 28z - 8x - 2y &= 0 \end{aligned}$$

Jedná se o homogenní soustavu tří rovnic o třech neznámých. Řešením soustavy je jeden bod o souřadniciích $[0, 0, 0]$. Sestavíme si Hassovu matici

$$A = \begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{yx} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 4 & -8 \\ 4 & 10 & -2 \\ -8 & -2 & 28 \end{bmatrix}$$

$$D_1 = 12 > 0 \qquad D_2 = 104 > 0 \qquad D_3 = 2352 > 0$$

Všechny subdeterminanty v jsou kladné. Z toho lze vyvodit, že funkce má v bodě $[0, 0, 0]$ lokální minimum. Vyčíslíme jeho hodnotu:

$$f(0, 0, 0) = 6 \cdot 0^2 + 5 \cdot 0^2 + 14 \cdot 0^2 + 4 \cdot 0 \cdot 0 - 8 \cdot 0 \cdot 0 - 2 \cdot 0 \cdot 0 + 1 = 1$$