VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
Fakulta informačních technologií

Matematická analýza 2016/2017
Domácí úkol č. 1, varianta 1

Iva Kavánková *xkavan05*,
Erik Kelemen *xkelem01*,
Martin Kobelka *xkobel02*,
Josef Kolář *xkolar71*,
Matej Kolesár *xkoles07*,
Son Hai Nguyen *xnguye16*

8. března 2017

1. úkol

Zadání

Rozložte na parciální zlomky tuto racionální lomenou funkci:

$$f(x) = \frac{3x^3 + x^2 - 4x + 16}{x^5 + 5x^4 + 9x^3 + 13x^2 + 14x + 6}$$

Rozbor příkladu

Máme za úkol najít rozklad na parciální zlomky. Polynom ve **jmenovateli má vyšší stupeň**, než polynom v čitateli. Není třeba provádět dělení a můžeme rovnou přistoupit k rozkladu.

Pro rozklad polynomu ve jmenovateli použijeme Hornerovo schéma a následně si napíšeme rovnici vyjadřující rozklad na jednotlivé parciální zlomky v obecném tvaru. Dle rovnice si poté sestavíme soustavu rovnic pro výpočet jednotlivých koeficientů. Řešením rovnice budou koeficienty z množiny $\mathbb{Q}$, čímž získáme rozklad funkce na parciální zlomky.

Řešení

Rozklad čitatele za pomocí Hornerova algoritmu na součin závorek.

	1	5	9	13	14	6	
-1	1	4	5	8	6	0	OK
-1	1	3	2	6	0		OK
-3	1	0	2	0			OK

Tabulka 1: Rozklad čitatele

Rozklad jmenovatele na součin v oboru reálných čísel je

$$x^5 + 5x^4 + 9x^3 + 13x^2 + 14x + 6 = (x+1)^2(x+3)(x^2+2)$$

Výraz $x^2 + 2$ nelze dále v oboru reálných čísel rozložit. Dostáváme funkci:

$$f(x) = \frac{3x^3 + x^2 - 4x + 16}{(x+1)^2(x+3)(x^2+2)}$$

Funkci můžeme nyní rozložit na parciální zlomky. Rozklad vypadá tedy následovně:

$$f(x) = \frac{3x^3 + x^2 - 4x + 16}{(x+1)^2(x+3)(x^2+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x+3} + \frac{Dx+E}{x^2+2}$$

Rovnici upravíme:

$$\begin{aligned} 3x^3 + x^2 - 4x + 16 = {} & A(x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 8x + 6) + \\ & + B(x^3 + 3x^2 + 2x + 6) + \\ & + C(x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 2) + \\ & + (Dx + E) \cdot (x^3 + 5x^2 + 7x + 3) \end{aligned}$$

a po roznásobení dostáváme:

$$
\begin{aligned}
3x^3 + x^2 - 4x + 16 = {} & A(x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 8x + 6)+ \\
& + B(x^3 + 3x^2 + 2x + 6)+ \\
& + C(x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 2)+ \\
& + D(x^4 + 5x^3 + 7x^2 + 3x)+ \\
& + E(x^3 + 5x^2 + 7x + 3)
\end{aligned}
$$

Vytkneme mocniny:

$$
\begin{aligned}
3x^3 + x^2 - 4x + 16 = {} & x^4(A + C + D)+ \\
& + x^3(4A + B + 2C + 5D + E)+ \\
& + x^2(5A + 3B + 3C + 7D + 5E)+ \\
& + x^1(8A + 2B + 4C + 3D + 7E)+ \\
& + x^0(6A + 6B + 2C + 3E)
\end{aligned}
$$

a dle této rovnice sestavíme soustavu rovnic pro výpočet koeficientů A, B, C, D a E:

$$
\begin{aligned}
0 &= A + C + D \\
3 &= 4A + B + 2C + 5D + E \\
1 &= 5A + 3B + 3C + 7D + 5E \\
-4 &= 8A + 2B + 4C + 3D + 7E \\
16 &= 6A + 6B + 2C + 3E
\end{aligned}
$$

Vyřešením soustavy rovnic dostáváme $A = 1, B = 3, C = -1, D = 0, E = -2$.
Výsledkem rozkladu je:

$$f(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{3}{(x+1)^2} - \frac{1}{x+3} - \frac{2}{x^2+2}$$

2. úkol

Zadání

Najděte asymptoty grafu funkce

$$f(x) = x^2\Big(\frac{\pi}{4} - arctg\Big(\frac{x^2}{x^2-1}\Big)\Big)$$

Rozbor příkladu

Máme najít asymptoty grafu funkce, což znamená najít svislé, šikmé i vodorovné asymptoty.

Svislou asymptotou rozumíme přímku ve tvaru $x = a$, jestliže

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty \bigvee \lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$$

Vodorovnou asymptotou rozumíme přímku ve tvaru $y = a$, jestliže

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = c \bigvee \lim_{x\to -\infty} f(x) = c$$

Šikmmou asymptotou rozumíme přímku, ve tvaru $y = ax + b; a \neq 0$. Ta existuje v případě, že

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = c; c \neq 0$$

Tyto limity je třeba najít a ověřit.

Řešení

Svislé asymptoty

Funkce může mít svislou asymptotu pouze v bodech, ve kterých je nespojitá. Určíme si proto body nespojitosti. Budou to body, ve kterých jmenovatel argumentu funkce $arctg(x) = 0$, protože nulou nelze dělit.

$$x^2 - 1 \neq 0 \implies x \neq 1 \wedge x \neq -1 \implies D(f) = \mathbb{R}$$

Limita ze součinu dvou závorek je rovna $\pm\infty$, pokud alespoň jedna z těchto závorek je rovna $\pm\infty$. Obor hodnot funkce $arctg(x) = \langle -\pi/2, \pi/2\rangle$. Můžeme tedy říct, že $\frac{\pi}{4} - arctg(\frac{x^2}{x^2-1})$ se nikdy nebude limitně blížit k $\pm\infty$. Musel by se výraz x^2 rovnat v bodech nespojitosti $\pm\infty$. Vzhledem k tomu, že $(-1)^2 = 1^2 = 1$, můžeme tvrdit, že funkce nemá svisou asymptotu, protože v žádném ze svých bodů nemá nespojitost druhého druhu. Levá a pravá limita by byly rovny konstantě $\mathbb{C}$. Ve výpočtu není třeba dále pokračovat.

Vodorovné asymptoty

$$\lim_{x\to-\infty} \underbrace{x^2}_{\to+\infty} \left(\underbrace{\frac{\pi}{4} - arctg\Big(\frac{x^2}{x^2-1}\Big)}_{\to\pi/4}\right) = \infty \cdot 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} \underbrace{x^2}_{\to+\infty} \left(\underbrace{\frac{\pi}{4} - arctg\Big(\frac{x^2}{x^2-1}\Big)}_{\to\pi/4}\right) = \infty \cdot 0$$

Zjistíme, zda funkce je sudá.

$$x^2\Big(\frac{\pi}{4} - arctg\Big(\frac{x^2}{x^2-1}\Big)\Big) = (-x)^2\Big(\frac{\pi}{4} - arctg\Big(\frac{(-x)^2}{(-x)^2-1}\Big)\Big)$$

Což platí. Funkce má tedy nanejvýše jednu vodorovnou asymptotu. Pro výpočet limity použijeme L'Hospitalovo pravidlo.

$$\lim_{x\to\pm\infty} x^2\Big(\frac{\pi}{4} - arctg\Big(\frac{x^2}{x^2-1}\Big)\Big) = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\pi}{4} - arctg\Big(\frac{x^2}{x^2-1}\Big)}{x^{-2}} =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\dfrac{1}{1+\Big(\dfrac{x^2}{x^2-1}\Big)^2} \cdot \dfrac{2x(x^2-1) - 2x\cdot x^2}{(x^2-1)^2}}{-2x^{-3}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{1+\Big(\dfrac{x^2}{x^2-1}\Big)^2} \cdot \frac{2x(x^2-1) - 2x\cdot x^2}{(x^2-1)^2} \cdot \Big(-\frac{1}{2}\Big) \cdot x^3$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-x^4 + 2x^2 - 1}{2x^4 - 2x^2 + 1} \cdot \frac{x^4}{x^4 - 2x^2 + 1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^8 \cdot (-1 + \overbrace{\cdots}^{\to 0})}{x^8 \cdot (2 + \underbrace{\cdots}_{\to 0})} = -\frac{1}{2}$$

Funkce má tedy jedinou vodorovnou asymtotu s rovnicí

$$y = -\frac{1}{2}$$

Šikmé asymptoty

Jelikož $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = c$, tak potom $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ Šikmá asymptota neexistuje.

3. úkol

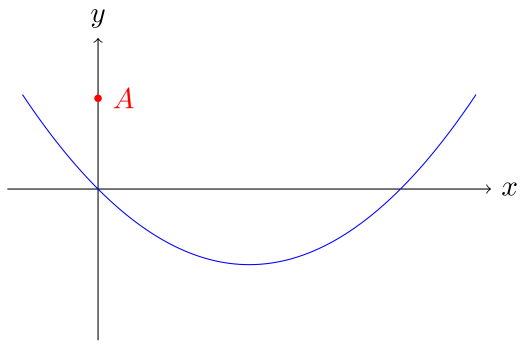
Zadání

Na grafu funkce $f(x) = x^2 - x$ najděte bod, který má nejkratší vzdálenost od bodu $A = [0, 1]$. Řešte jako úlohu na extrém.

Rozbor příkladu

Nejdříve musíme zjistit účelovou funkci, u které funkční hodnota je vzdálenost mezi bodem A a bodem ležícím na funkci f. Následně budeme hledat minima naší účelové funkce U. A globální minimum funkce U bude souřadnice na ose x hledaného bodu.

Řešení



Obrázek 1: Nákres funkce f a bodu A

Určíme si účelovou funkci U, jejiž funkční hodnoty nabývají hodnoty vzdálenosti mezi body A a bodem ležící na funkci f.

$$u(x) = \sqrt[2]{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$
$$u(x) = \sqrt[2]{(x - 0)^2 + (x^2 - x - 1)^2}$$
$$u(x) = (x^4 - 2x^3 + 2x + 1)^{\frac{1}{2}}$$

Ze zadání vyplývá, že máme najít takové x, jehož funkční hodnota je nejmenší, respektive má nejkratší vzdálenost od bodu A.
K nalezení minima zderivujeme funkci.

$$u'(x) = \frac{1}{2}(x^4 - 2x^3 + 2x + 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot (4x^3 - 6x^2 + 2)$$

$$u'(x) = \frac{2x^3 - 3x^2 + 1}{\sqrt[2]{x^4 - 2x^3 + 2x + 1}}$$

Podezřelé body jsou v místech, kdy funkce nabývá nulové nebo nedefinované hodnoty. Jediná situace, kdy bude mít funkce nedefinované hodnoty, je když bude ve jmenovateli hodnota 0 nebo výraz pod od mocninou bude záporný. Abychom zjistili, zda bude někdy výraz pod odmocninou někdy záporný, či nulový, tak budeme hledat opět extrémy výrazu pod odmocninou, dále funkce k.

$$k(x) = x^4 - 2x^3 + 2x + 1$$

Opět funkci zderivujeme a najdeme pouze nulové body, protože tato funkce má $\implies D(f) = \mathbb{R}$.

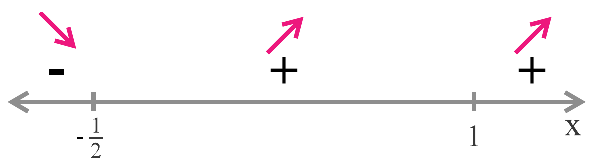
$$k'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2$$

Výraz si upravíme pomocí Hornerova schématu, aby se nám snadněji zjišťovaly snadněji nulové body.

	4	-6	0	2	
1	4	-2	-2	0	OK
1	4	2	0		OK

Tabulka 2: Hornerovo schéma pro rozklad $4x^3 - 6x^2 + 2$

Po úpravě dostaneme $k'(x) = (x-1)^2(4x+2)$, najdeme podezřelé body, které jsou: 1 a $-\frac{1}{2}$
.



Obrázek 2: Monotónost funkce k

Když ověříme monotónnost funkce, tak zjistíme, že v $x = 1$ je pouze inflexní bod a v $x = -\frac{1}{2}$ minimum, které můžeme označit za globální, protože na intervalu $\langle -\frac{1}{2}, +\infty \rangle$ je funkce rostoucí a na intervalu $\langle -\infty, -\frac{1}{2} \rangle$ je klesající.

$$k(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}^4 - 2 - \frac{1}{2}^3 + 2 - \frac{1}{2} + 1$$

$$k(-\frac{1}{2}) = \frac{5}{16}$$

Když dosadíme naše minimum do funkce k, zjistíme, že pod odmocninou bude minimální hodnota $\frac{5}{16}$, tudíž jmenovatel nikdy nebude nulové nebo nedefinované hodnoty.

Čitatele si upravíme pomocí Hornerova schématu, aby se nám snadněji zjišťovaly snadněji nulové body.

Jelikož jsme předtím zjistili, že jmenovatel bude vždy nabývat nenulové a definované hodnoty, tak můžeme jmenovatel zanedbat při hledání minima funkce f.

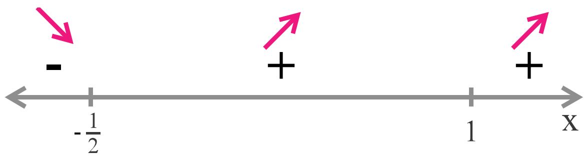
Pro úpravu výrazu opět použijeme Hornerovo schéma.

	2	-3	0	1	
1	2	-1	-1	0	OK
1	2	1	0		OK

Tabulka 3: Hornerovo schéma pro rozklad $2x^3 - 3x^2 + 1$

$$f(x) = (x-1)^2 \cdot (2x+1)$$

Podezřelé body: 1, $-\frac{1}{2}$



Obrázek 3: Monotónost funkce f

Opět když ověříme monotónnost funkce, tak zjistíme, že v $x = 1$ je pouze inflexní bod a v $x = -\frac{1}{2}$ minimum, které můžeme označit za globální, protože na intervalu $\langle -\frac{1}{2}, +\infty \rangle$ je funkce rostoucí a na intervalu $\langle -\infty, -\frac{1}{2} \rangle$ je klesající.
Nyní dosadíme do naší původní funkce, abychom našli souřadnici na ose y hledaného bodu.

$$f(-\frac{1}{2}) = x^2 - x$$

$$f(-\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$$

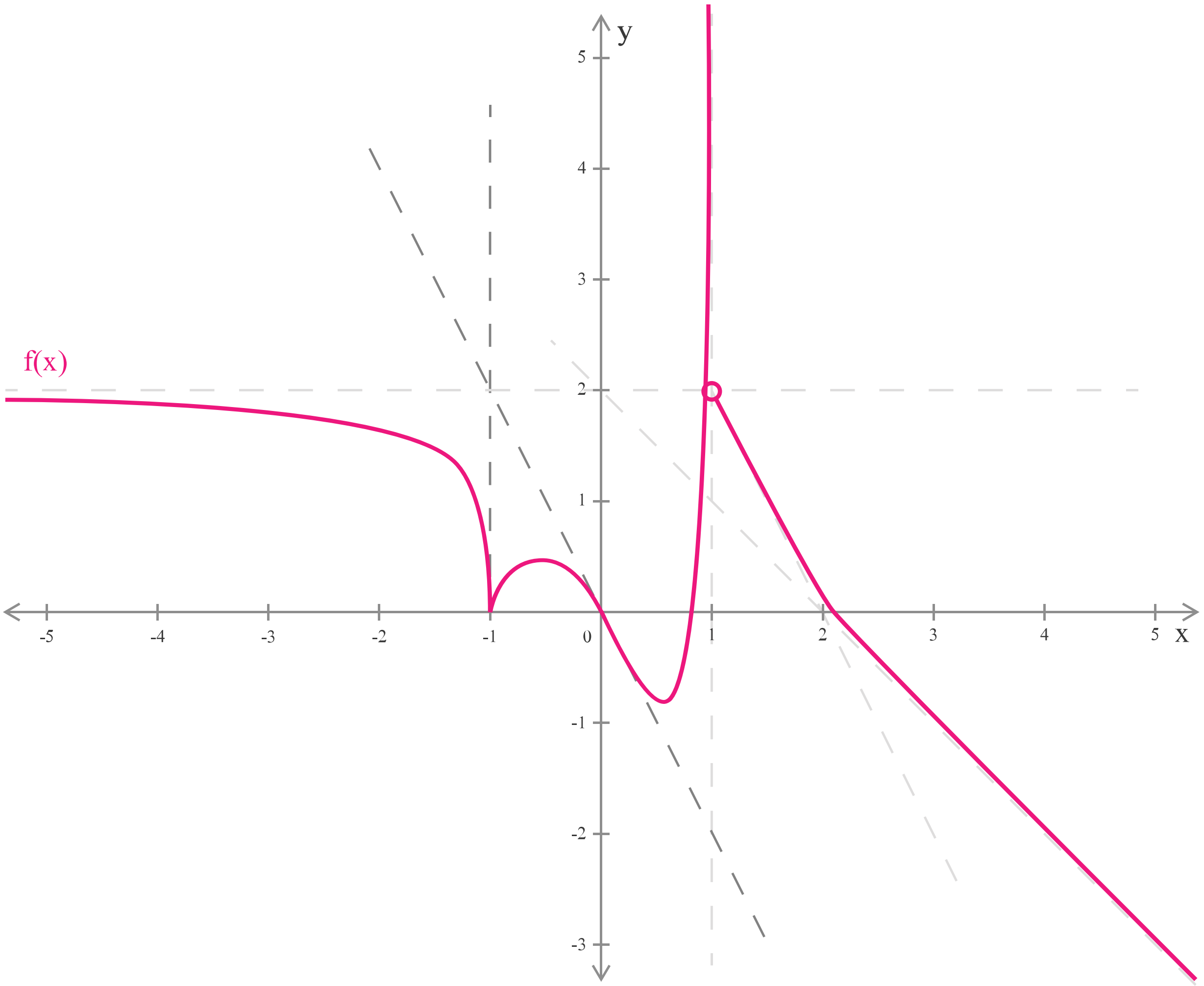
Nejbližší bod k bodu A, z funkce f je : $[-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$.

4. úkol

Zadání

Načrtněte graf funkce f, pro kterou platí: $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$, pro $x = 1$ má nespojitost 2.druhu a následně platí:

Do obrázku nakreslete i asymptoty a tečny resp. polotečny ke grafu funkce v bodech $x = 0, x = 1$ a $x = -1$.



Obrázek 4: Nákres funkce f

$$f(0) = f(-1) = 0 \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x) = 2$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = 2 \qquad f'(0) = -2$$

$$\lim_{x\to -1^-} f'(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to -1^+} f'(x) = \infty$$

$$\lim_{x\to 1^+} f'(x) = -2$$

$$f''(x) > 0; \qquad \forall x \in (0,1) \cup (1,\infty)$$

$$f''(x) < 0; \qquad \forall x \in (-\infty,-1) \cup (-1,0)$$

přímka $y = 2 - x$ je asymptota pro $x \to \infty$

Řešení

Po určení definičního oboru jsme si do grafu zakreslili funkční hodnoty v přímo zadaných bodech (0 a − 1). Poté jsme dle limit k 1^+ a $-\infty$ zakreslili limitní hodnoty pro tyto hodnoty. Dle funkčních hodnot první derivace jsme zakreslili tečny v daných bodech, dle druhé derivace potom vyznačili intervaly konvexnosti, resp. konkávnosti.

5. úkol

Zadaní

Najděte největší a nejmenší hodnotu funkce $f(x) = \sqrt[3]{(6x^2 - x^3)}$ na intervalu $\langle -2, 9 \rangle$.

Rozbor příkladu

Funkce může nabývat svého maxima a minima v bodech, kdy je derivace rovna nule nebo v bodech, kde není derivace definována. Vypočítáme proto první derivaci funkce a najdeme tyto body. K bodům přidáme krajní body zadaného intervalu.

V těchto bodech zjistíme funkční hodnoty, z čehož zjistíme v kterých bodech má funkce maximum a v kterých bodech má funkce minimum.

Výpočet

Určíme definičný obor funkce: $D(f) = R$

Funkci máme zadanou s odmocninami. Odmocniny si přepíšeme do tvaru mocnin.

$$f(x) = \sqrt[3]{(6x^2 - x^3)} = (6x^2 - x^3)^{\frac{1}{3}}$$

Najdeme první derivaci funkce a upravíme ji na vhodný tvar tak, abychom snáze našli stacionární body a určili definiční obor $f'(x)$.

$$f'(x) = \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{(6x^2 - x^3)}} \right) \cdot (12x - 3x^2) = \frac{3 \cdot (4x - x^2)}{3 \cdot \sqrt[3]{(6x^2 - x^3)}}$$

Jmenovatel zlomku nesmí být roven 0. Z následující rovnice zjistíme body, kde není derivace definována. V těchto bodech může také funkce nabývat svého maxima nebo minima (limita derivace může být $\pm\infty$.)

$$6x^2 - x^3 \neq 0$$
$$x^2(6 - x) \neq 0$$
$$x \neq 0 \wedge x \neq 6$$
$$D(f') = R - \{0, 6\}$$

Derivaci položíme rovnu 0. To může nastat pouze v případě, kdy čitatel zlomku je roven 0.

$$x \cdot (4 - x) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = 4$$

K stacionárním bodům přidáme ješte hraniční hodnoty. Podezřelé hodnoty tedy jsou body $\in -2, 0, 4, 6, 9$

$$f(0) = 0, f(4) \doteq 3.17, f(6) = 0, f(-2) \doteq 3.17, f(9) \doteq 3.12$$

Maximum na intevalu $\langle -2, 9 \rangle$ je v bodech $x = 4$ a $x = -2$ jeho hodnota je přibližně 3.17.

Minimum na intevalu $\langle -2, 9 \rangle$ je v bodě $x = 0$ a $x = 6$ a jeho hodnota je 0.