VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
Fakulta informačních technologií

Matematická analýza 2016/2017
Domácí úkol č. 1, varianta 1

Iva Kavánková *xkavan05*,
Erik Kelemen *xkelem01*,
Martin Kobelka *xkobel02*,
Josef Kolář *xkolar71*,
Matej Kolesár *xkoles07*,
Son Hai Nguyen *xnguye16*

12. dubna 2017

1. úkol

Zadání

Rozložte na parciální zlomky tuto racionální lomenou funkci:

$$f(x) = \frac{3x^3 + x^2 - 4x + 16}{x^5 + 5x^4 + 9x^3 + 13x^2 + 14x + 6}$$

Rozbor příkladu

Máme za úkol najít rozklad na parciální zlomky. Polynom ve **jmenovateli má vyšší stupeň**, než polynom v čitateli. Není třeba provádět dělení a můžeme rovnou přistoupit k rozkladu.

Pro rozklad polynomu ve jmenovateli použijeme Hornerovo schéma a následně si napíšeme rovnici vyjadřující rozklad na jednotlivé parciální zlomky v obecném tvaru. Dle rovnice si poté sestavíme soustavu rovnic pro výpočet jednotlivých koeficientů. Řešením rovnice budou koeficienty z množiny $\mathbb{Q}$, čímž získáme rozklad funkce na parciální zlomky.

Řešení

Rozklad čitatele za pomocí Hornerova algoritmu na součin závorek.

	1	5	9	13	14	6	
-1	1	4	5	8	6	0	OK
-1	1	3	2	6	0		OK
-3	1	0	2	0			OK

Tabulka 1: Rozklad čitatele

Rozklad jmenovatele na součin v oboru reálných čísel je

$$x^5 + 5x^4 + 9x^3 + 13x^2 + 14x + 6 = (x + 1)^2(x + 3)(x^2 + 2)$$

Výraz $x^2 + 2$ nelze dále v oboru reálných čísel rozložit. Dostáváme funkci:

$$f(x) = \frac{3x^3 + x^2 - 4x + 16}{(x + 1)^2(x + 3)(x^2 + 2)}$$

Funkci můžeme nyní rozložit na parciální zlomky. Rozklad vypadá tedy následovně:

$$f(x) = \frac{3x^3 + x^2 - 4x + 16}{(x + 1)^2(x + 3)(x^2 + 2)} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{(x + 1)^2} + \frac{C}{x + 3} + \frac{Dx + E}{x^2 + 2}$$

Rovnici upravíme:

$$\begin{aligned} 3x^3 + x^2 - 4x + 16 = {} & A(x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 8x + 6)+ \\ & + B(x^3 + 3x^2 + 2x + 6)+ \\ & + C(x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 2)+ \\ & + (Dx + E) \cdot (x^3 + 5x^2 + 7x + 3) \end{aligned}$$

a po roznásobení dostáváme:

$$\begin{aligned}3x^3 + x^2 - 4x + 16 = {} & A(x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 8x + 6)+ \\ & + B(x^3 + 3x^2 + 2x + 6)+ \\ & + C(x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 2)+ \\ & + D(x^4 + 5x^3 + 7x^2 + 3x)+ \\ & + E(x^3 + 5x^2 + 7x + 3)\end{aligned}$$

Vytkneme mocniny:

$$\begin{aligned}3x^3 + x^2 - 4x + 16 = {} & x^4(A + C + D)+ \\ & + x^3(4A + B + 2C + 5D + E)+ \\ & + x^2(5A + 3B + 3C + 7D + 5E)+ \\ & + x^1(8A + 2B + 4C + 3D + 7E)+ \\ & + x^0(6A + 6B + 2C + 3E)\end{aligned}$$

a dle této rovnice sestavíme soustavu rovnic pro výpočet koeficientů A, B, C, D a E:

$$\begin{aligned}0 &= A \quad + C + D \\ 3 &= 4A + B + 2C + 5D + E \\ 1 &= 5A + 3B + 3C + 7D + 5E \\ -4 &= 8A + 2B + 4C + 3D + 7E \\ 16 &= 6A + 6B + 2C + 3E\end{aligned}$$

Vyřešením soustavy rovnic dostáváme $A = 1, B = 3, C = -1, D = 0, E = -2$.
Výsledkem rozkladu je:

$$f(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{3}{(x+1)^2} - \frac{1}{x+3} - \frac{2}{x^2+2}$$

2. úkol

Zadání

Najděte asymptoty grafu funkce

$$f(x) = x^2\left(\frac{\pi}{4} - arctg\left(\frac{x^2}{x^2-1}\right)\right)$$

Rozbor příkladu

Máme najít asymptoty grafu funkce, což znamená najít svislé, šikmé i vodorovné asymptoty.

Svislou asymptotou rozumíme přímku ve tvaru $x = a$, jestliže

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty \bigvee \lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$$

Vodorovnou asymptotou rozumíme přímku ve tvaru $y = a$, jestliže

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = c \bigvee \lim_{x\to -\infty} f(x) = c$$

Šikmou asymptotou rozumíme přímku, ve tvaru $y = ax + b; a \neq 0$. Koeficienty A a B jsou definovány jako

$$A \; = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right) \quad \wedge \quad B = \lim_{a\to b}\big(f(x) - Ax\big)$$

Tyto limity je třeba najít a ověřit.

Řešení

Svislé asymptoty

Funkce může mít svislou asymptotu pouze v bodech, ve kterých je nespojitá. Určíme si proto body nespojitosti. Budou to body, ve kterých jmenovatel argumentu funkce $arctg(x) = 0$, protože nulou nelze dělit.

$$x^2 - 1 \neq 0 \implies x \neq 1 \wedge x \neq -1 \implies D(f) = \mathbb{R}$$

Limita ze součinu dvou závorek je rovna $\pm\infty$, pokud alespoň jedna z těchto závorek je rovna $\pm\infty$. Obor hodnot funkce $arctg(x) = (-\pi/2, \pi/2)$. Můžeme tedy říct, že $\frac{\pi}{4} - arctg(\frac{x^2}{x^2-1})$ se nikdy nebude limitně blížit k $\pm\infty$. Musel by se výraz x^2 rovnat v bodech nespojitosti $\pm\infty$. Vzhledem k tomu, že $(-1)^2 = 1^2 = 1$, můžeme tvrdit, že funkce nemá svisou asymptotu, protože v bodech $\{-1, 1\}$ je nespojitost prvního druhu. Ve výpočtu není třeba dále pokračovat.

Vodorovné asymptoty

$$\lim_{x\to-\infty} \underbrace{x^2}_{\to+\infty}\left(\frac{\pi}{4} - \underbrace{arctg\left(\frac{x^2}{x^2-1}\right)}_{\to\pi/4}\right) = \infty\cdot 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} \underbrace{x^2}_{\to+\infty}\left(\frac{\pi}{4} - \underbrace{arctg\left(\frac{x^2}{x^2-1}\right)}_{\to\pi/4}\right) = \infty\cdot 0$$

Zjistíme, zda funkce je sudá.

$$x^2\left(\frac{\pi}{4} - arctg\left(\frac{x^2}{x^2-1}\right)\right) = (-x)^2\left(\frac{\pi}{4} - arctg\left(\frac{(-x)^2}{(-x)^2-1}\right)\right)$$

Což platí. Funkce má tedy nanejvýše jednu vodorovnou asymptotu. Pro výpočet limity použijeme L'Hospitalovo pravidlo.

$$\lim_{x\to\pm\infty} x^2\left(\frac{\pi}{4} - arctg\left(\frac{x^2}{x^2-1}\right)\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\pi}{4} - arctg\left(\frac{x^2}{x^2-1}\right)}{x^{-2}} =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{x^2}{x^2-1}\right)^2}\cdot\dfrac{2x(x^2-1) - 2x\cdot x^2}{(x^2-1)^2}}{-2x^{-3}} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{1+\left(\dfrac{x^2}{x^2-1}\right)^2}\cdot\frac{2x(x^2-1)-2x\cdot x^2}{(x^2-1)^2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot x^3$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{-x^4+2x^2-1}{2x^4-2x^2+1}\cdot\frac{x^4}{x^4-2x^2+1} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^8\cdot(-1+\overbrace{\cdots}^{\to 0})}{x^8\cdot(2+\underbrace{\cdots}_{\to 0})} = -\frac{1}{2}$$

Funkce má tedy jedinou vodorovnou asymtotu s rovnicí

$$y = -\frac{1}{2}$$

Šikmé asymptoty

Jelikož $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = c$, tak potom $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ Šikmá asymptota neexistuje.

3. úkol

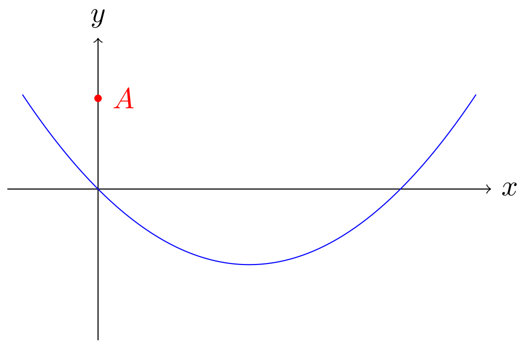
Zadání

Na grafu funkce $f(x) = x^2 - x$ najděte bod, který má nejkratší vzdálenost od bodu $A = [0, 1]$. Řešte jako úlohu na extrém.

Rozbor příkladu

Prvně nadefinujeme účelovou funkci, u které funkční hodnota je vzdálenost mezi bodem A a bodem ležícím na funkci f. Následně budeme hledat minima naší účelové funkce U. A globální minimum funkce U bude souřadnice na ose x hledaného bodu.

Řešení



Obrázek 1: Nákres funkce f a bodu A

Určíme si účelovou funkci U, jejiž funkční hodnoty nabývají hodnoty vzdálenosti mezi body A a bodem ležící na funkci f.

$$u(x) = \sqrt[2]{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$
$$u(x) = \sqrt[2]{(x - 0)^2 + (x^2 - x - 1)^2}$$
$$u(x) = (x^4 - 2x^3 + 2x + 1)^{\frac{1}{2}}$$

Ze zadání vyplývá, že máme najít takové x, jehož funkční hodnota je nejmenší, respektive má nejkratší vzdálenost od bodu A.
K nalezení minima zderivujeme funkci.

$$u'(x) = \frac{1}{2}(x^4 - 2x^3 + 2x + 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot (4x^3 - 6x^2 + 2)$$

$$u'(x) = \frac{2x^3 - 3x^2 + 1}{\sqrt[2]{x^4 - 2x^3 + 2x + 1}}$$

Podezřelé body jsou v místech, kdy funkce nabývá nulové nebo nedefinované hodnoty. Jediná situace, kdy bude mít funkce nedefinované hodnoty, je v případě nulového jmenovatele nebo záporné hodnoty pod druhou odmocninou. K zjištění, zda bude někdy výraz pod odmocninou někdy záporný či nulový, budeme hledat opět extrémy výrazu pod odmocninou (dále funkce k).

$$k(x) = x^4 - 2x^3 + 2x + 1$$

Opět funkci zderivujeme a najdeme pouze nulové body, protože tato funkce má $\implies D(f) = \mathbb{R}$.

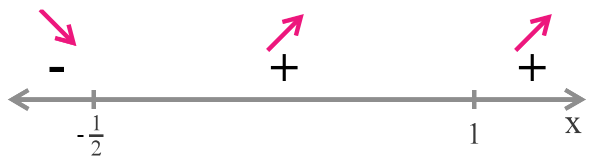
$$k'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2$$

Výraz si upravíme pomocí Hornerova schématu, abychom snadněji zjišťovali snadněji nulové body.

	4	-6	0	2	
1	4	-2	-2	0	OK
1	4	2	0		OK

Tabulka 2: Hornerovo schéma pro rozklad $4x^3 - 6x^2 + 2$

Po úpravě dostaneme $k'(x) = (x-1)^2(4x+2)$, najdeme podezřelé body, které jsou: 1 a $-\frac{1}{2}$
.



Obrázek 2: Monotónost funkce k

Po ověření monotónosti zjistíme, že v $x = 1$ je pouze inflexní bod a v $x = -\frac{1}{2}$ minimum, které můžeme označit za globální, protože na intervalu $\langle -\frac{1}{2}, +\infty \rangle$ je funkce rostoucí a na intervalu $\langle -\infty, -\frac{1}{2} \rangle$ je klesající.

$$k(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}^4 - 2 - \frac{1}{2}^3 + 2 - \frac{1}{2} + 1$$

$$k(-\frac{1}{2}) = \frac{5}{16}$$

Po dosazení našeho minima do funkce k zjistíme, že pod odmocninou bude minimální hodnota $\frac{5}{16}$, tudíž jmenovatel nikdy nebude nulové nebo nedefinované hodnoty.

Čitatele si upravíme pomocí Hornerova schématu, aby se nám snadněji zjišťovaly snadněji nulové body.

Vzhledem k předchozímu zjištění, že jmenovatel bude vždy nabývat nenulové a definované hodnoty, můžeme jmenovatel zanedbat při hledání minima funkce f.

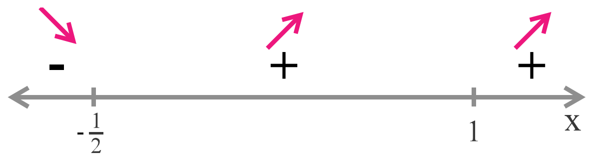
Pro úpravu výrazu opět použijeme Hornerovo schéma.

	2	-3	0	1	
1	2	-1	-1	0	OK
1	2	1	0		OK

Tabulka 3: Hornerovo schéma pro rozklad $2x^3 - 3x^2 + 1$

$$f(x) = (x-1)^2 \cdot (2x+1)$$

Podezřelé body: 1, $-\frac{1}{2}$



Obrázek 3: Monotónost funkce f

Opět když ověříme monotónnost funkce, tak zjistíme, že v $x = 1$ je pouze inflexní bod a v $x = -\frac{1}{2}$ minimum, které můžeme označit za globální, protože na intervalu $\langle -\frac{1}{2}, +\infty \rangle$ je funkce rostoucí a na intervalu $\langle -\infty, -\frac{1}{2} \rangle$ je klesající.
Nyní dosadíme do naší původní funkce, abychom našli souřadnici na ose y hledaného bodu.

$$f(-\frac{1}{2}) = x^2 - x$$

$$f(-\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$$

Nejbližší bod na funkci f k bodu A je bod $\left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$.

4. úkol

Zadání

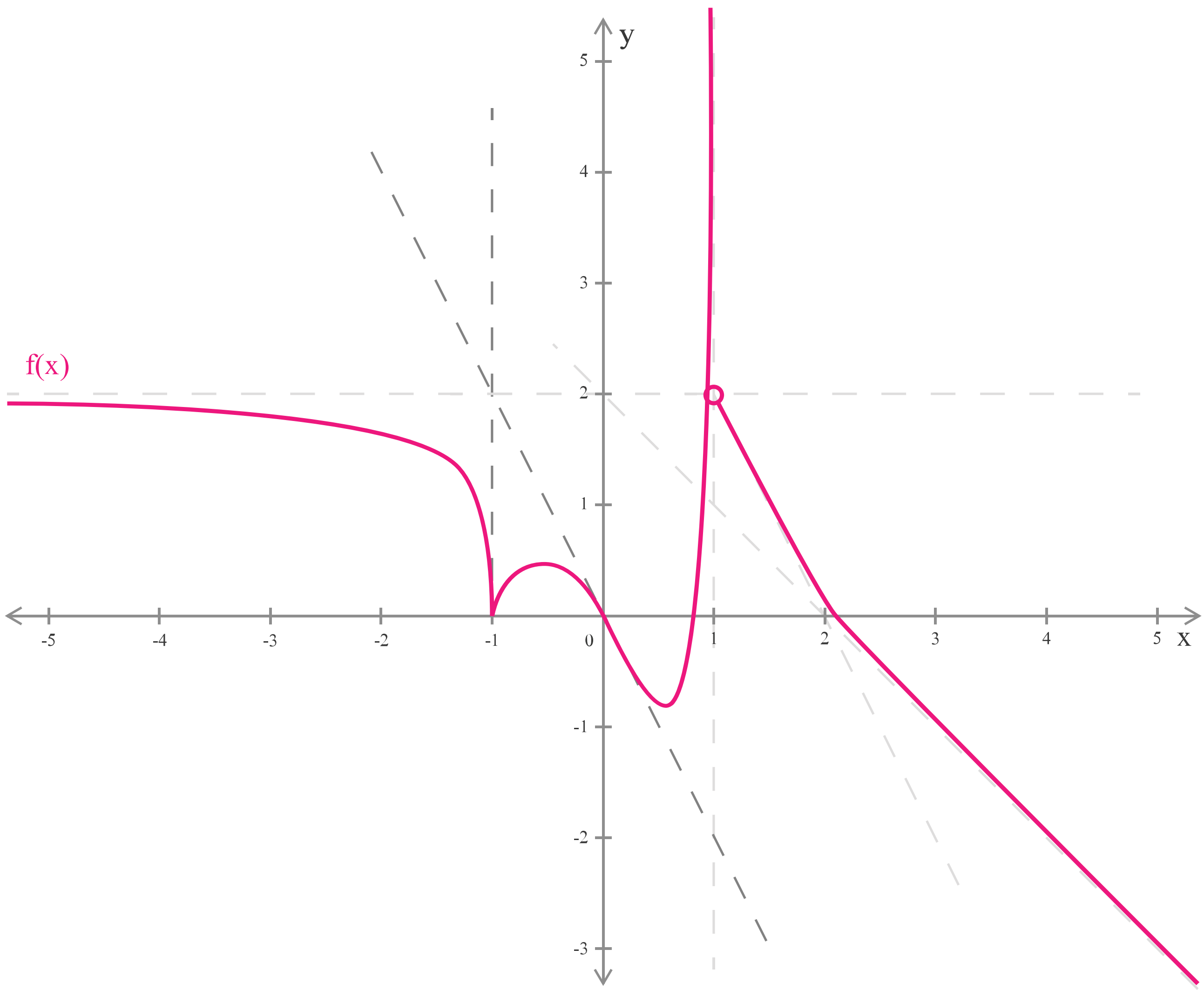
Načrtněte graf funkce f, pro kterou platí: $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$, pro $x = 1$ má nespojitost 2.druhu a následně platí:

Do obrázku nakreslete i asymptoty a tečny resp. polotečny ke grafu funkce v bodech $x = 0, x = 1$ a $x = -1$.

$$\begin{array}{rlll}
f(0) = f(-1) = 0 \quad f'(0) = -2 & \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 2 & \lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 2 \\
\lim\limits_{x\to -1^-} f'(x) = -\infty & \lim\limits_{x\to -1^+} f'(x) = \infty & \lim\limits_{x\to 1^+} f'(x) = -2 \\
f''(x) > 0; & \forall x \in (0,1) \cup (1,\infty) & \\
f''(x) < 0; & \forall x \in (-\infty,-1) \cup (-1,0) & \\
\text{přímka } y = 2 - x & \text{je asymptota pro } x \to \infty &
\end{array}$$

Řešení

Po určení definičního oboru jsme si do grafu zakreslili funkční hodnoty v přímo zadaných bodech $(0 \text{ a } -1)$. Poté jsme dle limit k 1^+ a $-\infty$ zakreslili limitní hodnoty pro tyto hodnoty. Dle funkčních hodnot první derivace jsme zakreslili tečny v daných bodech, dle druhé derivace potom vyznačili v daných intervalech konvexnost, resp. konkávnost.



Obrázek 4: Nákres funkce f

5. úkol

Zadaní

Najděte největší a nejmenší hodnotu funkce $f(x) = \sqrt[3]{(6x^2 - x^3)}$ na intervalu $\langle -2, 9 \rangle$.

Rozbor příkladu

Funkce může nabývat svého maxima a minima v bodech, kdy je derivace rovna nule nebo v bodech, kde není derivace definována. Vypočítáme proto první derivaci funkce a najdeme tyto body. K bodům přidáme krajní body zadaného intervalu.

V těchto bodech zjistíme funkční hodnoty, z čehož zjistíme v kterých bodech má funkce maximum a v kterých bodech má funkce minimum.

Výpočet

Určíme definičný obor funkce: $D(f) = R$

Funkci máme zadanou s odmocninami. Odmocniny si přepíšeme do tvaru mocnin.

$$f(x) = \sqrt[3]{(6x^2 - x^3)} = (6x^2 - x^3)^{\frac{1}{3}}$$

Najdeme první derivaci funkce a upravíme ji na vhodný tvar tak, abychom snáze našli stacionární body a určili definiční obor $f'(x)$.

$$f'(x) = \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{(6x^2 - x^3)^2}}\right) \cdot (12x - 3x^2) = \frac{3 \cdot (4x - x^2)}{3 \cdot \sqrt[3]{(6x^2 - x^3)^2}}$$

Jmenovatel zlomku nesmí být roven 0. Z následující rovnice zjistíme body, kde není derivace definována. V těchto bodech může také funkce nabývat svého maxima nebo minima (limita derivace může být $\pm\infty$.)

$$6x^2 - x^3 \neq 0$$

$$x^2(6 - x) \neq 0$$

$$x \neq 0 \wedge x \neq 6$$

$$D(f') = R - \{0, 6\}$$

Derivaci položíme rovnu 0. To může nastat pouze v případě, kdy čitatel zlomku je roven 0.

$$x \cdot (4 - x) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = 4$$

K stacionárním bodům přidáme ještě hraniční hodnoty. Podezřelé hodnoty tedy jsou body $\in \{-2, 0, 4, 6, 9\}$

$$f(0) = 0, \quad f(4) \doteq 3.17, \quad f(6) = 0, \quad f(-2) \doteq 3.17, \quad f(9) \doteq 3.12$$

Maximum na intevalu $\langle -2, 9 \rangle$ je v bodech $x = 4$ a $x = -2$ jeho hodnota je přibližně 3.17.

Minimum na intevalu $\langle -2, 9 \rangle$ je v bodě $x = 0$ a $x = 6$ a jeho hodnota je 0.