VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
Fakulta informačních technologií

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ FAKULTA INFORMAČNÍCH TECHNOLOGIÍ

Matematická analýza 2016/2017
Domácí úkol č. 1, varianta 1

Iva Kavánková *xkavan05*,
Erik Kelemen *xkelem01*,
Martin Kobelka *xkobel02*,
Josef Kolář *xkolar71*,
Matej Kolesár *xkoles07*,
Son Hai Nguyen *xnguye16*

5. března 2017

1. úkol

Zadání

Rozložte na parciální zlomky tuto racionální lomenou funkci.

$$f(x) = \frac{3x^3 + x^2 - 4x + 16}{x^5 + 5x^4 + 9x^3 + 13x^2 + 14x + 6}$$

Rozbor příkladu

Máme za úkol najít rozklad na parciální zlomky. Polynom ve **jmenovateli má vyšší stupneň**, než polynom v čitateli. Není třeba provádět dělení a můžeme rovnou přistoupit k rozkladu.

Pro rozklad polynomu ve jmenovateli použijeme Hornerovo schéma a následně si napíšeme rovnici vyjadřující rozklad na jednotlivé parciální zlomky v obecném tvaru. Dle rovnice si poté sestavíme soustavu rovnic pro výpočet jednotlivých koeficientů. Řešením rovnice budou koeficienty z množiny $\mathbb{Q}$, čímž získáme rozklad funkce na parciální zlomky.

Řešení

Rozklad čitatele za pomocí Hornerova algoritmu na součin závorek.

	1	5	9	13	14	6	
-1	1	4	5	8	6	0	OK
-1	1	3	2	6	0		OK
-3	1	0	2	0			OK

Tabulka 1: Rozklad čitatele

Rozklad jmenovatele na součin v oboru reálných čísel je

$$x^5 + 5x^4 + 9x^3 + 13x^2 + 14x + 6 = (x+1)^2(x+3)(x^2+2)$$

Výraz $x^2 + 2$ nelze dále v oboru reálných čísel rozložit. Dostáváme funkci:

$$f(x) = \frac{3x^3 + x^2 - 4x + 16}{(x+1)^2(x+3)(x^2+2)}$$

Funkci můžeme nyní rozložit na parciální zlomky. Rozklad vypadá tedy následovně:

$$f(x) = \frac{3x^3 + x^2 - 4x + 16}{(x+1)^2(x+3)(x^2+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x+3} + \frac{Dx+E}{x^2+2}$$

Rovnici upravíme:

$$\begin{aligned} 3x^3 + x^2 - 4x + 16 = {} & A(x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 8x + 6) + \\ & + B(x^3 + 3x^2 + 2x + 6) + \\ & + C(x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 2) + \\ & + (Dx + E) \cdot (x^3 + 5x^2 + 7x + 3) \end{aligned}$$

a po roznásobení dostáváme:

$$\begin{aligned}3x^3 + x^2 - 4x + 16 = {} & A(x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 8x + 6)+\\ & + B(x^3 + 3x^2 + 2x + 6)+\\ & + C(x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 2)+\\ & + D(x^4 + 5x^3 + 7x^2 + 3x)+\\ & + E(x^3 + 5x^2 + 7x + 3)\end{aligned}$$

Vytkneme mocniny:

$$\begin{aligned}3x^3 + x^2 - 4x + 16 = {} & x^4(A + C + D)+\\ & + x^3(4A + B + 2C + 5D + E)+\\ & + x^2(5A + 3B + 3C + 7D + 5E)+\\ & + x^1(8A + 2B + 4C + 3D + 7E)+\\ & + x^0(6A + 6B + 2C + 3E)\end{aligned}$$

a dle této rovnice sestavíme soustavu rovnic pro výpočet koeficientů A, B, C, D a E:

$$\begin{aligned}0 &= A + C + D\\ 3 &= 4A + B + 2C + 5D + E\\ 1 &= 5A + 3B + 3C + 7D + 5E\\ -4 &= 8A + 2B + 4C + 3D + 7E\\ 16 &= 6A + 6B + 2C + 3E\end{aligned}$$

Vyřešením soustavy rovnic dostáváme $A = 1, B = 3, C = -1, D = 0, E = -2$.
Výsledkem rozkladu je:

$$f(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{3}{(x+1)^2} - \frac{1}{x+3} - \frac{2}{x^2+2}$$

2. úkol

Zadání

Najděte asymptoty grafu funkce

$$f(x) = x^2\Big(\frac{\pi}{4} - arctg\Big(\frac{x^2}{x^2-1}\Big)\Big)$$

Rozbor příkladu

Máme najít asymptoty grafu funkce. To znamená najít svislé asymptoty, šikmé asymptoty i vodorovné asymptoty.

Svislou asymptotou rozumíme přímku ve tvaru $x = a$, jestliže

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty \bigvee \lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$$

Vodorovnou asymptotou rozumíme přímku ve tvatu $y = a$, jestliže

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = c \bigvee \lim_{x\to -\infty} f(x) = c$$

Šikmmou asymptotou rozumíme přímku, ve tvaru $y = ax + b; a \neq 0$. Ta existuje v případě, že

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = c; c \neq 0$$

Tyto limity je třeba najít a ověřit.

Řešení

Svislé asymptoty

Limita ze součinu dvou závorek je rovna $\pm\infty$, pokud jedna z techto závorek je rovna $\pm\infty$. Výraz x^2 je primitiní funkcí, která má nevlastní limitu pouze v $\pm\infty$ Výraz $\frac{\pi}{4} - arctg\left(\frac{x^2}{x^2-1}\right)$ má obor hodnot $\left(-\frac{\pi}{2}; +\frac{3\pi}{4}\right)$ Funkce tedy nemá svislou asymptotu.

Vodorovné asymptoty

$$\lim_{x\to-\infty} \underbrace{x^2}_{\to+\infty} \left(\frac{\pi}{4} - \underbrace{arctg\left(\frac{x^2}{x^2-1}\right)}_{\to\pi/4}\right) = \infty \cdot 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} \underbrace{x^2}_{\to+\infty} \left(\frac{\pi}{4} - \underbrace{arctg\left(\frac{x^2}{x^2-1}\right)}_{\to\pi/4}\right) = \infty \cdot 0$$

Zjistíme, zda funkce je sudá.

$$x^2\left(\frac{\pi}{4} - arctg\left(\frac{x^2}{x^2-1}\right)\right) = (-x)^2\left(\frac{\pi}{4} - arctg\left(\frac{(-x)^2}{(-x)^2-1}\right)\right)$$

Což platí. Funkce má tedy nanejvýše jednu vodorovnou asymptotu. Pro výpočet limity použijeme L'Hospitalovo pravidlo.

$$\lim_{x\to\pm\infty} x^2\left(\frac{\pi}{4} - arctg\left(\frac{x^2}{x^2-1}\right)\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\pi}{4} - arctg\left(\frac{x^2}{x^2-1}\right)}{x^{-2}} =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{1}{1+\left(\frac{x^2}{x^2-1}\right)^2} \cdot \frac{2x(x^2-1) - 2x \cdot x^2}{(x^2-1)^2}}{-2x^{-3}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{1+\left(\frac{x^2}{x^2-1}\right)^2} \cdot \frac{2x(x^2-1) - 2x \cdot x^2}{(x^2-1)^2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot x^3$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-x^4 + 2x^2 - 1}{2x^4 - 2x^2 + 1} \cdot \frac{x^4}{x^4 - 2x^2 + 1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^8 \cdot (-1 + \overbrace{\cdots}^{\to 0})}{x^8 \cdot (2 + \underbrace{\cdots}_{\to 0})} = -\frac{1}{2}$$

Funkce má tedy jedinou vodorovnou asymtotu s rovnicí

$$y = -\frac{1}{2}$$

Šikmé asymptoty

Jelikož $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = c$, tak potom $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ Šikmá asymptota neexistuje.

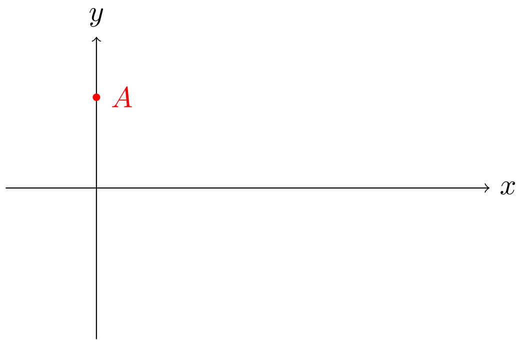
3. úkol

Zadání

Na grafu funkce $f(x) = x^2 - x$ najděte bod, který má nejkratší vzdálenost od bodu $A = [0, 1]$. Řešte jako úlohu na extrém.

3. úkol

Řešení



4. úkol

4. Načrtněte graf funkce f, pro kterou platí: $\mathrm{D}_f = \mathbb{R}{-}1$, pro $x = 1$ má nespojitost 2.druhu,

$$f(0) = f(-1) = 0, \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x) = 2 \quad \lim_{x\to -\infty} f(x) = 2$$

$$f'(0) = -2, \qquad \lim_{x\to -1^-} f'(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to -1^+} f'(x) = \infty \qquad \lim_{x\to 1^+} f'(x) = -2$$

$f''(x) > 0$ pro $x \in (0, 1)$ a $x \in (1, \infty)$, $\qquad f''(x) < 0$ pro $x \in (-\infty, -1)$ a $x \in (-1, 0)$,
přímka $y = 2 - x$ je asymptota pro $x \to \infty$.
Do obrázku nakreslete i asymptoty a tečnz resp. polotečny ke grafu funkce v bodech $x = 0, x = 1$ a $x = -1$.

5. úkol

Zadanie

Najděte největší a nejmenší hodnotu funkce $f(x) = \sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2}$ na intervale $< -2, 2 >$.

Výpočet

$$f'(x) = \left(\frac{2}{3} * \frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)}}\right) * 1 \left(\frac{2}{3} * \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)}}\right) * 1$$

Upravíme na vhodný tvar a nájdeme stacionárne body

$$f'(x) = \frac{2 * (\sqrt[3]{(x-1)} - \sqrt[3]{(x+1)})}{3 * \sqrt[3]{(x+1)} * \sqrt[3]{(x-1)}}$$

Body $x = 1 \wedge x = 1$ su stacionarne body.

Zistíme kedy sa derivácia rovná 0.

$$2 * (\sqrt[3]{(x-1)} - \sqrt[3]{(x+1)}) = 0$$

Upravíme podľa vzorca $a^2 - b^2$

$$\left(\sqrt[6]{(x-1)} - \sqrt[6]{(x+1)}\right) * \left(\sqrt[6]{(x-1)} + \sqrt[6]{(x+1)}\right) = 0$$

$$x - 1 = x + 1 \Rightarrow -1 \neq 1$$

$$x - 1 = -x - 1 \Rightarrow 2x = 0$$

K stacionárnym bodom pridáme ešte hraničné hodnoty$< -2, 2 >$.
Dostaneme body $-2, -1, 0, 1, 2$. Tieto body dosadíme do základnej funkcie.

$$f(-2) = 1 - \sqrt[3]{9} \qquad f(-1) = -\sqrt[3]{4} \qquad f(0) = 0$$

$$f(1) = \sqrt[3]{4} \qquad f(2) = \sqrt[3]{9} - 1$$

Maximum na intevale $< -2, 2 >$ je v bode $x = 1$
Minimum je v bode $x = -1$