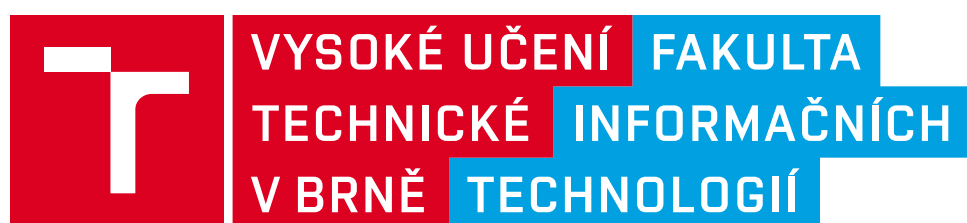


VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

Fakulta informačních technologií



Matematická analýza 2016/2017

Domácí úkol č. 1, varianta 1

Iva Kavánková *xkavan05*,

Erik Kelemen *xkelem01*,

Martin Kobelka *xkobel02*,

Josef Kolář *xkolar71*,

Matej Kolesár *xkoles07*,

Son Hai Nguyen *xnguye16*

27. února 2017

1. úkol

Zadání

Rozložte na parciální zlomky tuto racionální lomenou funkci.

$$f(x) = \frac{3x^3 + x^2 - 4x + 16}{x^5 + 5x^4 + 9x^3 + 13x^2 + 14x + 6}$$

Rozbor příkladu

Máme za úkol najít rozklad na parciální zlomky. Polynom ve jmenovateli má vyšší stupeň, než polynom v čitateli. Není třeba provádět dělení, a můžeme rovnou přistoupit k rozkladu.

Pro rozklad polynomu ve jmenovateli použijeme hornerovo schéma. Poté si napíšeme rovnici vyjadřující rozklad na jednotlivé parciální zlomky v obecném tvaru. Podle rovnice si sestavíme soustavu rovnic pro výpočet jednotlivých koeficientů. Řešením rovnice budou koeficienty z množiny Q . Tím získáme rozklad funkce na parciální zlomky.

Řešení

Rozklad čitatele za pomoci hornerova schémata na součin závorek.

	1	5	9	13	14	6	
-1	1	4	5	8	6	0	OK
-1	1	3	2	6	0		OK
-3	1	0	2	0			OK

Tabulka 1: Rozklad čitatele

Rozklad jmenovatele na součin v oboru reálných čísel je tedy.

$$x^5 + 5x^4 + 9x^3 + 13x^2 + 14x + 6 = (x + 1)^2(x + 3)(x^2 + 2)$$

Výraz $x^2 + 2$ nelze dále v oboru reálných čísel rozložit. Dostáváme tedy funkci

$$f(x) = \frac{3x^3 + x^2 - 4x + 16}{(x + 1)^2(x + 3)(x^2 + 2)}$$

Funkci můžeme nyní rozložit na parciální zlomky. Rozklad bude vypadat následovně.

$$f(x) = \frac{3x^3 + x^2 - 4x + 16}{(x + 1)^2(x + 3)(x^2 + 2)} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{(x + 1)^2} + \frac{C}{x + 3} + \frac{Dx + E}{x^2 + 2}$$

Rovnici upravíme na tvar

$$3x^3 + x^2 - 4x + 16 = A(x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 8x + 6) + B(x^3 + 3x^2 + 2x + 6) + C(x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 2) + (Dx + E) \cdot (x^3 + 5x^2 + 7x + 3)$$

Po roznásobení závorky dostáváme

$$3x^3 + x^2 - 4x + 16 = A(x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 8x + 6) + B(x^3 + 3x^2 + 2x + 6) + C(x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 2) + D(x^4 + 5x^3 + 7x^2 + 3x) + E(x^3 + 5x^2 + 7x + 3)$$

Rovnici si upravíme vytknutím mocnin

$$3x^3 + x^2 - 4x + 16 = x^4(A + C + D) + x^3(4A + B + 2C + 5D + E) + x^2(5A + 3B + 3C + 7D + 5E) + x(8A + 2B + 4C + 3D + 7E) + (6A + 6B + 2C + 3E)$$

Podle této rovnice si sestavíme soustavu rovnic pro výpočet koeficientů A, B, C, D a E

$$\begin{aligned} 0 &= A + C + D \\ 3 &= 4A + B + 2C + 5D + E \\ 1 &= 5A + 3B + 3C + 7D + 5E \\ -4 &= 8A + 2B + 4C + 3D + 7E \\ 16 &= 6A + 6B + 2C + 3E \end{aligned}$$

Vyřešením soustavy rovnic dostáváme $A = 1, B = 3, C = -1, D = 0, E = -2$ Funkce rozložená na parciální zlomky má tedy tvar.

$$f(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{3}{(x+1)^2} - \frac{1}{x+3} - \frac{2}{x^2+2}$$

2. úkol

Zadání

Najděte asymptoty grafu funkce

$$f(x) = x^2 \left(\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} \left(\frac{x^2}{x^2 - 1} \right) \right)$$

Rozbor příkladu

Máme najít asymptoty grafu funkce. To znamená najít všechny svislé asymptoty, šikmé asymptoty a vodorovné asymptoty.

Svislou asymptotou rozumíme přímkou ve tvaru $x = a$, jestliže

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty \vee \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$$

Vodorovnou asymptotou rozumíme přímkou ve tvaru $y = a$ jestliže

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = c \vee \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = c$$

Šikmou asymptotou rozumíme přímkou, ve tvaru $y = ax + b; a \neq 0$. Ta existuje v případě, že

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = c; c \neq 0$$

Tyto limity je třeba najít a ověřit.

Řešení

Svislé asymptoty

Limita ze součinu dvou závorek je rovna $\pm\infty$, pokud jedna z těchto závorek je rovna $\pm\infty$. Výraz x^2 je primitivní funkcí, která má nevlastní limitu pouze v $\pm\infty$. Výraz $\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg}(\frac{x^2}{x^2-1})$ má obor hodnot $(-\frac{\pi}{2}; +\frac{3\pi}{4})$. Funkce tedy nemá svislou asymptotu.

Vodorovné asymptoty

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \underbrace{x^2}_{\rightarrow +\infty} \left(\frac{\pi}{4} - \underbrace{\arctg\left(\frac{x^2}{x^2-1}\right)}_{\rightarrow 0.7854} \right) = +\infty \cdot 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \underbrace{x^2}_{\rightarrow +\infty} \left(\frac{\pi}{4} - \underbrace{\arctg\left(\frac{x^2}{x^2-1}\right)}_{\rightarrow 0.7854} \right) = \infty \cdot 0$$

????

Šikmé asymptoty

2. úkol

3. úkol

3. úkol

4. úkol

4. úkol

5. úkol

5. úkol