Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Übungen zur Mathematik I für Studierende Informatik und Wirtschaftsinformatik (Diskrete Mathematik) im Wintersemester 2016/2017
Fachbereich Mathematik, Stefan Geschke

A: Präsenzaufgaben am 27. und 28. Oktober 2016

1. $\mathbb{Z}$ ist die Menge der ganzen Zahlen. Wir definieren drei Funktionen $f, g, h : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$. Es sei $f(x) = x^2$, $g(x) = 2x + 5$ und $h(x) = x + 2$.

   (a) Beweisen Sie:

   i. f ist nicht injektiv.
   ii. g ist injektiv.
   iii. g ist nicht surjektiv.
   iv. h ist surjektiv.

   (b) Ist eine der Funktionen bijektiv? Ist eine der Funktionen weder injektiv noch surjektiv?

2. Die Abbildung $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ sei durch $f(n) = \big((n-2)^2, n^2\big)$ definiert. Beweisen oder widerlegen Sie:

   (a) f ist injektiv.

   (b) f ist surjektiv.

3. Für jede natürliche Zahl n sei $A(n)$ die folgende Behauptung:

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

   (a) Prüfen Sie, ob die Behauptung $A(n)$ für $n = 1, 2, 3, 4$ gilt.

   (b) Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, dass $A(n)$ für alle natürlichen Zahlen n gilt.

B: Hausaufgaben zum 3. und 4. November 2016

1. (a) Sei $A = \{1, 2, 3\}$ und $B = \{a, b\}$.

   i. Gibt es eine injektive Funktion $f : A \to B$, die nicht surjektiv ist?
   ii. Gibt es eine surjektive Funktion $g : A \to B$, die nicht injektiv ist?
   iii. Gibt es eine Bijektion $h : A \to B$?

   Falls die gesuchten Funktionen existieren, so gebe man sie zum Beispiel in Form eines Pfeildiagramms oder in Form einer Tabelle an. Falls eine der Funktionen nicht existiert, so gebe man ein kurzes Argument dafür an.

   (b) Wie a) für $A = \{1, 2, 3\}$ und $B = \{a, b, c\}$.

   (c) Wie a) und b) für $A = \{1, 2, 3\}$ und $B = \{a, b, c, d\}$.

2. Betrachte die folgenden drei Funktionen von den ganzen Zahlen in die ganzen Zahlen:

   (a) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}; n \mapsto -3n$
   (b) $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}; n \mapsto -2n + 3$
   (c) $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}; n \mapsto n^2 - 3$

   Entscheiden Sie, ob die Funktionen injektiv, surjektiv oder bijektiv sind, und beweisen Sie, dass Ihre Entscheidung jeweils korrekt ist.

3. Wie 2., aber für die folgenden Funktionen:
   (a) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}; m \mapsto (m^2 - 3, (m-2)^2)$
   (b) $g : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}; (n, m) \mapsto -m - n^2$
   (c) $h : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}; (m, n) \mapsto (m - n, m + n)$

4. Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für alle natürlichen Zahlen n die Gleichung

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2$$

   gilt.

5. Für welche natürlichen Zahlen n gilt die Ungleichung $3n^2 < 3^n$? Stellen Sie eine Vermutung auf und beweisen sie diese mit Hilfe vollständiger Induktion.