2. Natürliche Zahlen und vollständige Induktion

Natürliche Zahlen

Definition

Mit $\mathbb{N}$ bezeichnen wir die Menge der natürlichen Zahlen

$$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$$

und mit $\mathbb{N}_0$ die natürlichen Zahlen einschließlich der Null

$$\mathbb{N}_0 := \{0\} \cup \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}\,.$$

- oftmals wird auch die Null als natürliche Zahl angesehen
- die Existenz der natürlichen Zahlen (so wie wir sie kennen) kann aus den Zermelo-Fraenkel-Axiomen abgeleitet werden (Unendlichkeitsaxiom)
- in dieser VL werden wir $\mathbb{N}$ mit der Addition $(+)$ und Multiplikation $(\cdot)$ und den geltenden Rechenregeln erstmal als gegeben annehmen

Rechengesetze für natürliche Zahlen

Für alle Zahlen a, b, $c \in \mathbb{N}_0$ gelten:

- Assoziativgesetze:

$$a + (b + c) = (a + b) + c \qquad \text{und} \qquad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

- Kommutativgesetze:

$$a + b = b + a \qquad \text{und} \qquad a \cdot b = b \cdot a$$

- Distributivgesetz:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

- Existenz der neutralen Elemente:

$$a + 0 = a \qquad \text{und} \qquad a \cdot 1 = a$$

Vollständige Induktion

Beweisprinzip der vollständigen Induktion

Sei $A(n)$ eine Aussageform. Die Aussage „für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $A(n)$" ist wahr, wenn folgende zwei Bedingungen erfüllt sind:

1. $A(1)$ ist wahr — Induktionsanfang
2. und für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt die Implikation $A(n) \Rightarrow A(n+1)$. — Induktionsschritt

Bemerkungen

- vielseitiges Beweisprinzip, welches oft Anwendung findet
- andere Varianten der vollständigen Induktion betrachten wir später
- die im Induktionsschritt als wahr angenommene Aussage $A(n)$ heißt Induktionsannahme/Induktionsvoraussetzung und die herzuleitende Aussage $A(n+1)$ heißt Induktionsbehauptung
- in kondensierter Form kann man das Beweisprinzip selbst als folgende Aussage formulieren

$$A(1) \wedge \big(\forall n \in \mathbb{N}\colon A(n) \Rightarrow A(n+1)\big) \quad \Longrightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N}\colon A(n)$$

Beispiel: Gaußsche Summenformel

Satz

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{(n+1)n}{2}\,.$$

Beweis

Sei $A(n)$ die Aussageform $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{(n+1)n}{2}$. Wir zeigen mit vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Aussage $A(n)$ gilt.

Induktionsanfang: Die Aussage $A(1)$ lautet $\sum_{i=1}^{1} i = \frac{(1+1)\cdot 1}{2}$. Diese gilt, da

$$\sum_{i=1}^{1} i = 1 = \frac{(1+1)\cdot 1}{2}\,. \qquad (\checkmark)$$

Induktionsschritt: Wir zeigen $A(n) \Rightarrow A(n+1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei also $n \in \mathbb{N}$ beliebig und es gelte die Induktionsannahme $A(n)$, d. h. $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{(n+1)n}{2}$ gilt. Unter dieser Annahme leiten wir $A(n+1)$ her, d. h. wir zeigen $\sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{(n+1+1)(n+1)}{2} = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \sum_{i=1}^{n} i + (n+1) \overset{A(n)}{=} \frac{(n+1)n}{2} + \frac{2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(n+2)(n+1)}{2}\,. \qquad (\checkmark)$$

Somit gilt $A(n)$, also die im Satz behauptete Formel, für alle $n \in \mathbb{N}$. □

Beispiel: Bernoullische Ungleichung

Satz

Sei $q \geqslant -1$ eine reelle Zahl. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$(1+q)^n \geqslant 1 + nq\,.$$

Beweis (durch vollständige Induktion für ein reelles $q \geqslant -1$)

Induktionsanfang: Für $n = 1$ gilt

$$(1+q)^1 = 1 + q = 1 + 1 \cdot q\,. \qquad (\checkmark)$$

Induktionsschritt: Es gelte die Induktionsannahme $(1+q)^n \geqslant 1 + nq$ und wir zeigen damit $(1+q)^{n+1} \geqslant 1 + (n+1)q$. Tatsächlich gilt

$$\begin{aligned}(1+q)^{n+1} &= (1+q)^n \cdot (1+q) \overset{\text{I.Annahme}}{\geqslant} (1+nq) \cdot (1+q) \\ &= 1 + nq + q + nq^2 \geqslant 1 + nq + q = 1 + (n+1)q\,. \qquad (\checkmark)\end{aligned}$$

Somit gilt also die im Satz behauptete Ungleichung für alle $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Wo wurde $q \geqslant -1$ benötigt? Erste Ungleichung im I.Schritt!

Beispiel: Teilbarkeit

Für ganze Zahlen a und b schreiben wir $a|b$, falls a ein Teiler von b ist.

Satz

Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $n^3 - n$ durch 3 teilbar, d. h. $3|(n^3 - n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis

Sei $A(n)$ die Aussageform $3|(n^3 - n)$. Wir zeigen mit vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Aussage $A(n)$ gilt.

Induktionsanfang: Die Aussage $A(1)$ lautet $3|(1^3 - 1)$, also $3|0$. Somit ist $A(1)$ wahr, da jede ganze Zahl $\neq 0$ Teiler der 0 ist. $(\checkmark)$

Induktionsschritt: Für alle $n \in \mathbb{N}$ zeige $A(n+1)$, d. h. $3|((n+1)^3 - (n+1))$, unter der Induktionsannahme $A(n)$. Es gelte also $3|(n^3 - n)$. Durch elementares Umformen erhalten wir

$$(n+1)^3 - (n+1) = (n^3 + 3n^2 + 3n + 1) - (n+1) = (n^3 - n) + 3(n^2 + n)\,. \quad (*)$$

Wegen der Induktionsannahme $A(n)$ gilt $3|(n^3 - n)$ und da $3(n^2 + n)$ durch 3 teilbar ist, folgt auch

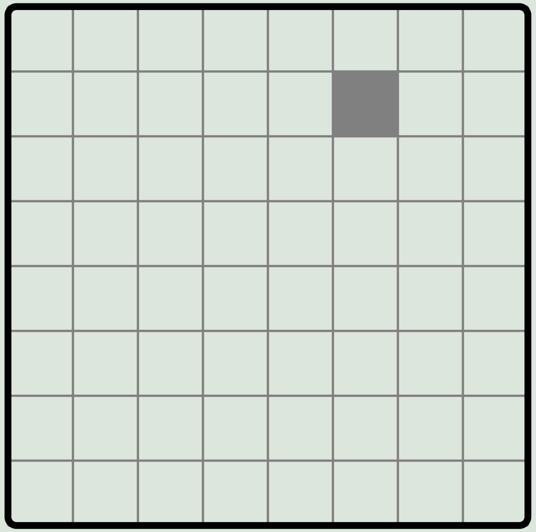
$$3\big|\big((n^3 - n) + 3(n^2 + n)\big) \quad \overset{(*)}{\Longleftrightarrow} \quad 3\big|\big((n+1)^3 - (n+1)\big)\,. \qquad (\checkmark)$$

Somit gilt $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. $\square$

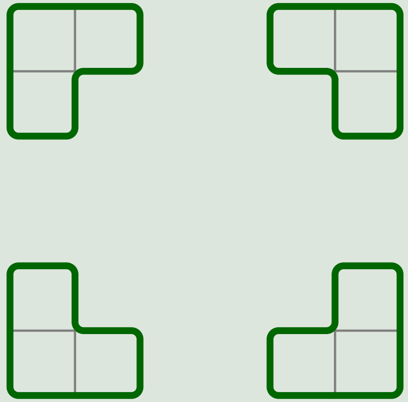
Beispiel: Geometrische Knobelei

Hof-Fliesen-Problem

Ein quadratischer Hof mit Seitenlängen 2^n soll mit L-förmigen Fliesen ausgelegt werden. Dabei soll ein vorgegebenes Quadrat mit der Seitenlänge 1 im Hof frei bleiben, weil da eine Statue aufgestellt werden soll. Die L-förmigen Fliesen haben die Form von drei aneinander gesetzten Quadraten mit Seitenlänge eins.



Hof

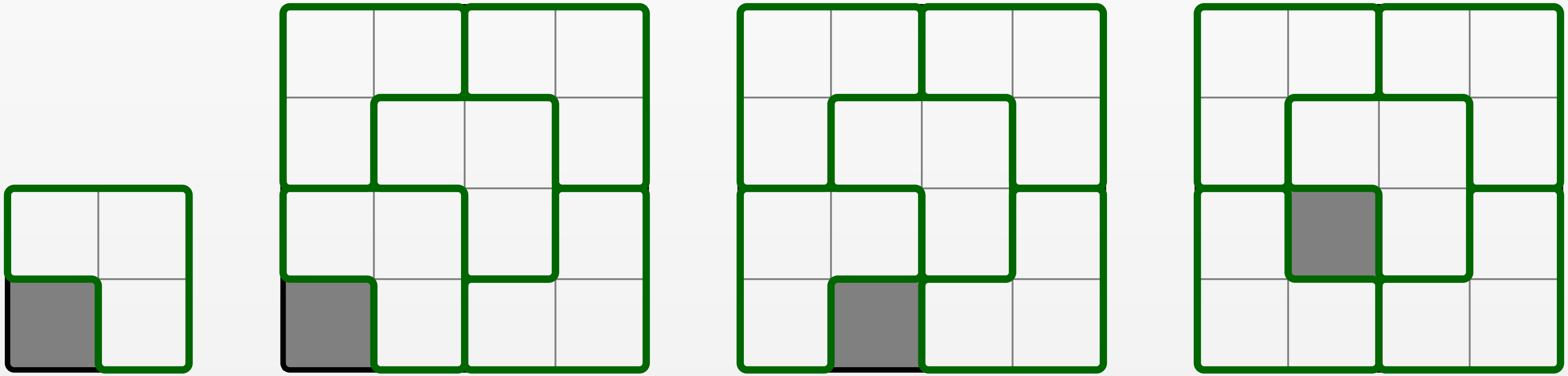


Fliesen

Ist es möglich, den Hof wie oben beschrieben vollständig mit L-förmigen Fliesen so zu überdecken, dass die Fliesen sich nicht überlappen und nicht zerschnitten werden müssen?

Hof-Fliesen-Problem — kleine Beispiele

Wir betrachten zunächst die Fälle $n = 1$ und $n = 2$ und sehen, dass wir den Hof wie gewünscht fliesen können. Schon der Fall $n = 1$ genügt für den Induktionsanfang.



$n = 1$ $\qquad$ $n = 2$

Die anderen Fälle sind symmetrisch zu einem der dargestellten Fälle.

Lösung vom Hof-Fliesen-Problem

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein Lösung für das Hof-Fliesen-Problem eines quadratischen Hofes mit Seitenlänge 2^n und beliebig vorgegebenem freien Quadrat mit Seitenlänge 1.

Beweis: Sei $A(n)$ die Aussage „jeder quadratische Hof mit Seitenlänge 2^n und beliebig vorgegebenem freien Quadrat mit Seitenlänge 1 kann mit L-förmigen Fliesen ausgelegt werden“.

Induktionsanfang: Die Aussage $A(1)$ gilt, da wie im Beispiel gesehen, das Entfernen eines Einheitsquadrats aus einem Quadrat mit Seitenlänge 2 genau eine L-Fliese ergibt. $(\checkmark)$

Induktionsschritt: Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig und es gelte $A(n)$. Sei ein quadratischer Hof mit Seitenlänge 2^{n+1} und einem vorgegebenem freien Quadrat gegeben.

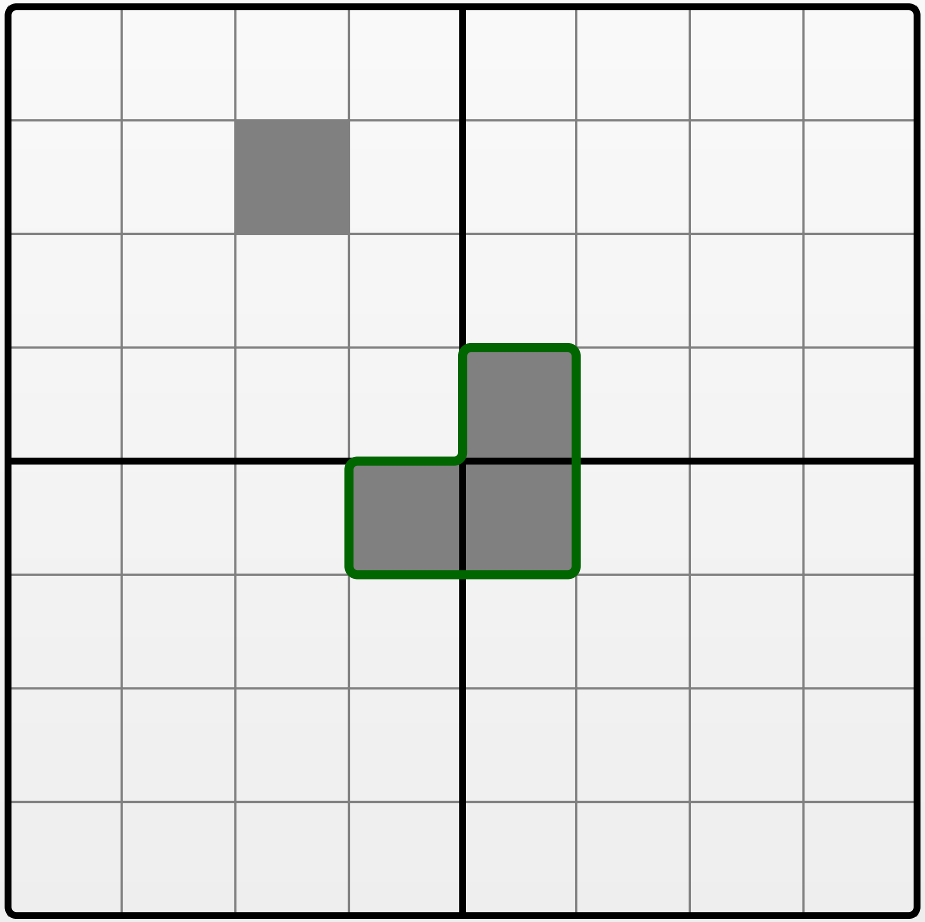
Zerlege den Hof in vier quadratische Höfe mit Seitenlänge 2^n, wobei genau einer das vorgegebene freie Quadrat enthält. Die Induktionsannahme liefert eine Fliesenüberdeckung für diesen Hof.

In die „Mitte“ können wir eine L-förmige Fliese F so legen, dass jeweils genau ein Quadrat der restlichen 3 Höfe belegt wird und so liefert die Induktionsannahme jeweils für jeden dieser 3 Höfe eine Fliesenüberdeckung, sodass jeweils das durch F belegte Quadrat frei bleibt. (siehe Bild nächste Folie)

Diese 4 Überdeckungen zusammen bilden eine Lösung für den ursprünglichen Hof. $\square$

Hof-Fliesen-Problem – Zerlegung für den Induktionsschritt

Zerlegung des Hofes mit Seitenlänge 2^{n+1} in 4 Höfe mit Seitenlänge 2^n und Lage der mittigen Fliese F:



Rekursiver Algorithmus

Der induktive Beweis liefert ein rekursives Verfahren zum fliesen eines so gegebenen Hofes:

- Wenn der Hof die Seitenlänge 2 hat, so bleibt neben dem markierten Quadrat genau Platz für eine L-förmige Fliese.
- Wenn der Hof für ein $n > 1$ die Seitenlänge 2^n hat, so unterteile den Hof in vier Höfe mit Seitenlänge 2^{n-1} und lege eine Fliese F so in die Mitte, dass sie genau die drei Höfe der Seitenlänge 2^{n-1} trifft, die nicht das markierte Quadrat enthalten.
- Führe den Algorithmus für die vier Höfe mit Seitenlänge 2^{n-1} durch, wobei das ursprünglich markierte Quadrat und die drei Quadrate, die von der ersten Fliese F überdeckt werden, markiert werden.

Bemerkung

Umgekehrt lassen sich die Laufzeit und Korrektheit eines rekursiven Algorithmus oft gut mit vollständiger Induktion analysieren.

Varianten der vollständigen Induktion

Vollständige Induktion (Standardvariante)

Sei $A(n)$ eine Aussageform. Die Aussage „für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $A(n)$“ ist wahr, wenn folgende zwei Bedingungen erfüllt sind:

1. $A(1)$ ist wahr
2. und für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt die Implikation $A(n) \Rightarrow A(n+1)$.

Vollständige Induktion mit beliebigem Startwert

Sei $A(n)$ eine Aussageform und sei n_0 eine ganze Zahl. Die Aussage „für alle ganzzahligen $n \geqslant n_0$ gilt $A(n)$“ ist wahr, wenn:

1. $A(n_0)$ wahr ist
2. und für jedes ganzzahlige $n \geqslant n_0$ die Implikation $A(n) \Rightarrow A(n+1)$ gilt.

Vollständige Induktion mit mehreren Vorgängern (und bel. Startwert)

Sei $A(n)$ eine Aussageform und sei n_0 eine ganze Zahl. Die Aussage „für alle ganzzahligen $n \geqslant n_0$ gilt $A(n)$“ ist wahr, wenn:

1. $A(n_0)$ ist wahr
2. und für jedes ganzzahlige $n \geqslant n_0$ gilt $(A(n_0) \wedge \cdots \wedge A(n)) \Rightarrow A(n+1)$.

Beispiele: Induktion mit anderem Startwert

Satz

Für alle natürlichen Zahlen $n \geqslant 3$ gilt $2n + 1 < 2^n$.

- Aussage ist tatsächlich falsch für ganzzahlige $n < 3$.

Beweis (durch vollständige Induktion mit Startwert $n_0 = 3$)

Induktionsanfang: Für $n = n_0$ gilt

$$2 \cdot 3 + 1 = 7 < 8 = 2^3 . \qquad (\checkmark)$$

Induktionsschritt: Es gelte die Induktionsannahme $2n + 1 < 2^n$ für $n \geqslant n_0$ und wir zeigen damit $2(n+1) + 1 < 2^{n+1}$. Tatsächlich gilt

$$2(n+1) + 1 = 2n + 1 + 2 \overset{\text{I.Annahme}}{<} 2^n + 2 \overset{n \geq 1}{<} 2^n + 2^n = 2^{n+1} . \qquad (\checkmark)$$

Somit gilt also die behauptete Ungleichung für ganzzahlige $n \geqslant n_0 = 3$. $\square$

Geometrische Reihe

Satz (Geometrische Summenformel)

Sei $q \neq 1$ eine reelle Zahl und $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt

$$\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}\,.$$

Beweis (durch vollständige Induktion mit Startwert $n_0 = 0$ für ein $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$)

Induktionsanfang: Für $n = 0$ gilt (mit der Konvention $0^0 = 1$ falls $q = 0$)

$$\sum_{i=0}^{0} q^i = q^0 = 1 = \frac{1-q}{1-q} = \frac{1-q^{0+1}}{1-q}\,. \qquad (\checkmark)$$

Induktionsschritt: Es gelte die Induktionsannahme für ein beliebiges $n \geqslant 0$ und wir zeigen die Induktionsbehauptung für $n+1$. Tatsächlich gilt

$$\sum_{i=0}^{n+1} q^i = q^{n+1} + \sum_{i=0}^{n} q^i \stackrel{\text{I.A.}}{=} q^{n+1} + \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{q^{n+1}-q^{n+2}+1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1-q^{n+2}}{1-q}\,. \quad (\checkmark)$$

Somit gilt also die behauptete Gleichung für alle $n \in \mathbb{N}_0$. $\square$

Rekursiv definierte Folgen

Definition (Folgen)

Eine Folge reeller Zahlen ist eine Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, die jeder natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ eine reelle Zahl $a_n \in \mathbb{R}$ zuordnet. Dafür schreibt man

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \qquad \text{und} \qquad (a_1, a_2, \dots)$$

und die a_n heißen auch Folgenglieder.

Eine solche Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist rekursiv definiert, wenn für ein $k \in \mathbb{N}$ die ersten k Folgenglieder $a_1, \dots, a_k$ festgelegt werden und es eine Funktion $g\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ gibt, sodass für $n \geqslant k$ gilt $a_{n+1} = g(a_{n-k+1}, \dots, a_n)$.

Allgemeiner kann als Indexmenge statt $\mathbb{N}$ auch $\mathbb{N}_0$ oder Mengen $\{n_0 \in \mathbb{Z}\colon n \geqslant n_0\}$ ganzer Zahlen größer-gleich einem bestimmten n_0 genommen werden.

Beispiele

- Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch $a_1 := 1$ und $a_{n+1} := 2a_n + 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
  $(k = 1,\ g(x) = 2x + 1)$
- Fibonacci-Folge: $f_0 := 0$, $f_1 := 1$ und $f_{n+1} := f_{n-1} + f_n$ für alle $n \geqslant 1$
  $(k = 2,\ g(x, y) = x + y)$

Abstecher: Rekursive Algorithmen

$a_{n+1} = 2a_n + 1$ in C

```
int a(int n) {
  if(n > 1) {
    /* a(n)=2a(n-1)+1 */
    return 2*a(n-1) + 1;
  }
  else {
    /* a(1)=1 */
    return 1;
  }
}
```

Fibonacci-Folge in C

```
int f(int n) {
  switch(n){
  case 0:   /* f(0)=0 */
    return 0;
  case 1:   /* f(1)=1 */
    return 1;
  default: /* Rekursion */
    return f(n-1)+f(n-2);
  }
}
```

Bemerkung

- rekursive Definition läßt sich einfach implementieren
- für rekursive Folgen mit $k \geqslant 2$ oft ineffektiv $\to$ Mehrfachberechnungen
- **Bsp.:** f_{90} mit 1,4 GHz Intel i5 Prozessor: rekursiv über 300 Jahre
  direkt unter 2 Millisekunden

Rekursion vs. Induktion

- $a_1 = 1,\ a_2 = 3,\ a_3 = 7,\ a_4 = 15,\ a_5 = 31, \dots, a_{10} = 1023$

Satz

Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei definiert durch $a_1 := 1$ und $a_{n+1} := 2a_n + 1$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$a_n = 2^n - 1\,.$$

Beweis (durch vollständige Induktion)

Induktionsanfang: Für $n = 1$ gilt offensichtlich

$$a_1 := 1 = 2^1 - 1\,. \qquad (\checkmark)$$

Induktionsschritt: Es gelte die Induktionsannahme für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$ und wir zeigen die Induktionsbehauptung für $n+1$. Tatsächlich gilt

$$a_{n+1} := 2a_n + 1 \overset{\text{I.Annahme}}{=} 2(2^n - 1) + 1 = 2^{n+1} - 1\,. \qquad (\checkmark)$$

Somit gilt also die behauptete Gleichung für alle $n \in \mathbb{N}$. $\square$

FIBONACCI-Zahlen

- $f_0 = 0,\ f_1 = 1,\ f_2 = 1,\ f_3 = 2,\ f_4 = 3,\ f_5 = 5\ f_6 = 8,\ f_7 = 13,\ f_8 = 21$

Satz (DE MOIVRE-BINET-Formel)

Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ die Folge der FIBONACCI-Zahlen definiert durch $f_0 := 0$, $f_1 := 1$ und $f_{n+1} := f_{n-1} + f_n$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $\varphi := \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ und $\psi := \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\varphi^n - \psi^n\right) .$$

- Echt jetzt? Wie kommt man darauf? $\rightarrow$ Lineare Algebra
- die reelle Zahl φ heißt auch goldener Schnitt

Beobachtung

Die Konstanten φ und ψ erfüllen die Gleichung $1 + \frac{1}{x} = x$.
Beweis: Für $x \neq 0$ gilt

$$1 + \frac{1}{x} = x \quad \Longleftrightarrow \quad x + 1 = x^2$$

und p-q-Formel liefert $x_{1/2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$.

$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^n - \psi^n\right)$

Beweis (durch vollständige Induktion mit zwei Vorgängern)

Induktionsanfang: Für $n = 0$ gilt

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^0 - \psi^0\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}(1-1) = 0 =: f_0$$

und für $n = 1$ haben wir

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi - \psi\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\sqrt{5}\right) = 1 =: f_1 . \qquad (\checkmark)$$

Induktionsschritt: Es gelte die Induktionsannahme für $n-1$ und für n und wir zeigen die Induktionsbehauptung für $n+1$. Es gilt

$$f_{n+1} := f_{n-1} + f_n \overset{\text{I.A.}}{=} \frac{\varphi^{n-1} - \psi^{n-1}}{\sqrt{5}} + \frac{\varphi^n - \psi^n}{\sqrt{5}} = \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{\varphi} + 1\right) - \frac{\psi^n}{\sqrt{5}}\left(1 + \frac{1}{\psi}\right) .$$

Wegen der Beobachtung wissen wir $\frac{1}{\varphi} + 1 = \varphi$ und $1 + \frac{1}{\psi} = \psi$ und somit folgt

$$f_{n+1} = \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{\varphi} + 1\right) - \frac{\psi^n}{\sqrt{5}}\left(1 + \frac{1}{\psi}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^{n+1} - \psi^{n+1}\right) . \qquad (\checkmark)$$

Somit gilt also die behauptete Formel für alle $n \in \mathbb{N}_0$. $\square$

- Beweis der DE MOIVRE-BINET-Formel für f_n benötigt Induktionsanfang für beide Anfangswerte $n = 0$ und $n = 1$, da der Induktionsschritt für $n + 1$ (unabhängig von n) auf beiden vorherigen Aussagen für n und $n - 1$ beruht. Der Fall $n = 1$ ist somit **nicht** im Induktionsschritt abgedeckt, da wir nicht auf eine Aussage für $n = -1$ zurückgreifen können.
- Üblicherweise benötigen Aussagen über rekursive Folgen mit $k \in \mathbb{N}$ einen Induktionsanfang für die ersten k Fälle.

Fragen

- Warum gilt denn eigentlich das Prinzip der vollständigen Induktion?
- Kann man beweisen, dass ein Beweisprinzip gilt?

- für die Beantwortung der Fragen brauchen wir klarere Vorstellungen von den natürlichen Zahlen $\longrightarrow$ Axiomatisierung

PEANO-Axiome

Definition (Natürliche Zahlen $\mathbb{N}$)

Die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ erfüllt die folgenden Axiome mit der Nachfolgerfolgerfunktion $N(\cdot)$:

1. $1 \in \mathbb{N}$ — 1 ist eine natürliche Zahl
2. $N(n) \in \mathbb{N}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ — jede Zahl n hat einen Nachfolger
3. $N(n) \neq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ — 1 ist kein Nachfolger
4. Funktion N ist injektiv — Nachfolgerfunktion ist injektiv
5. Sei M eine beliebige Menge mit
   - $1 \in M$ und $N(n) \in M$ für alle $n \in \mathbb{N}$,

   dann gilt $\mathbb{N} \subseteq M$. — vollständige Induktion gilt (Induktionsaxiom)

Bemerkungen

- für $N(n)$ schreiben wir einfach $n+1$, d. h. $n+1 := N(n)$
- Addition wird dann rekursiv definiert: $n + N(m) := N(n+m)$
- ebenso die Multiplikation: $n \cdot 1 := n$ und $n \cdot N(m) := n \cdot m + n$

$\Rightarrow$ diese Definitionen erlauben die Rechengesetze für $+$ und $\cdot$ auf $\mathbb{N}$ zu beweisen

- Mengen M wie in Axiom 5 heißen induktive Mengen und das Axiom besagt, dass $\mathbb{N}$ die „kleinste“ induktive Menge ist

Ordnung der natürlichen Zahlen

- Nachfolgerfunktion definiert Ordnung ($<$, $\leqslant$) auf $\mathbb{N}$: $n < N(m)$, falls

$$m = n \qquad \text{oder} \qquad N(n) < N(m)$$

  und $n \leqslant m$, falls $n < m$ oder $n = m$.
- das kleinste Element ($\min M$) einer Teilmenge $M \subseteq \mathbb{N}$ ist das Element $m \in M$ mit $m \leqslant m'$ für alle $m' \in M$.

Satz

Jede nichtleere Teilmenge der natürlichen Zahlen hat ein kleinstes Element.

Beweis (Widerspruchsbeweis)

Sei $\varnothing \neq M \subseteq \mathbb{N}$ ohne ein kleinstes Element und betrachte das Komplement

$$\overline{M} = \mathbb{N} \setminus M\,.$$

Mit vollständiger Induktion werden wir $\overline{M} = \mathbb{N}$ zeigen, was zum Widerspruch $M = \varnothing$ führt. $\square$

$\overline{M} = \mathbb{N}$

Mit vollständiger Induktion (mit mehreren Vorgängern) zeigen wir $n \in \overline{M}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsanfang: Die 1 ist das kleinste Element von $\mathbb{N}$, da die Definitionen sofort $1 < N(1) < N(N(1)) < \dots$ nach sich ziehen. Da wir annehmen dass M kein (eigenes) kleinstes Element hat, gilt also $1 \notin M$ und somit

$$1 \in \overline{M}\,. \qquad (\checkmark)$$

Induktionsschritt: Für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$ gelte die Induktionsannahme für $1, \dots, n$, d.h. $\{1, \dots, n\} \subseteq \overline{M}$. Wir zeigen die Induktionsbehauptung $(n+1) \in \overline{M}$.

Falls $(n+1) \in M$, dann wäre $n+1$ das kleinste Element von M, wegen der Induktionsannahme, also gilt $(n+1) \notin M$ und somit

$$(n+1) \in \overline{M}\,. \qquad (\checkmark)$$

Somit erhalten wir tatsächlich den Widerspruch $\overline{M} = \mathbb{N}$.