Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Übungen zur Mathematik I für Studierende Informatik und Wirtschaftsinformatik (Diskrete Mathematik) im Wintersemester 2016/2017
Fachbereich Mathematik, Stefan Geschke, Mathias Schacht

A: Präsenzaufgaben am 3. und 4. Oktober 2016

1. Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:
$$3 \mid (n^3 + 2n)$$
2. Die Fibonacci-Zahlen $f_0, f_1, f_2, \ldots$ werden durch die Rekursion $f_0 := 0$, $f_1 := 1$, $f_{n+1} := f_{n-1} + f_n$ $(n \geq 1)$ definiert. Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:
$$\sum_{i=0}^{n} f_i = f_{n+2} - 1$$
3. Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für alle $n \geq 5$ die folgende Ungleichung gilt:
$$9n < 2^{n+1}$$

B: Hausaufgaben zum 10. und 11. November 2016

1. Für $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir die Gleichung
$$A(n) : 1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + n \cdot 2^n = (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2.$$
   (a) Schreiben Sie die Gleichung $A(n)$ mit Hilfe des Summenzeichens auf.
   (b) Prüfen Sie, ob $A(n)$ für $n = 1, 2, 3$ richtig ist.
   (c) Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.
2. Für alle $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir die Gleichung
$$B(n) : \sum_{i=1}^{n} (2i - 1) = n^2.$$
   (a) Prüfen Sie, ob $B(n)$ für $n = 1, 2, 3$ gilt.
   (b) Schreiben Sie $B(n)$ ohne das Summenzeichen auf. Formulieren Sie $B(n)$ auch in Worten.
   (c) Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass $B(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.
3. Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für alle $\mathbb{N}_0$ gilt:
$$6 \mid (7^n - 1)$$
4. Mit $n!$ (gelesen „n Fakultät") bezeichnen wir das Produkt $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ der ersten n natürlichen Zahlen. Finden Sie heraus, für welche natürlichen Zahlen die Ungleichung $2^n < n!$ gilt und beweisen Sie Ihre Vermutung mittels vollständiger Induktion.
5. Wir definieren auf der Menge $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ aller Teilmengen von $\mathbb{N}$ eine Relation $\sim$ wie folgt: für $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ sei $A \sim B$ genau dann, wenn es zwischen A und B eine Bijektion gibt. Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf der Menge $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ist.