Mathe Hausaufgaben zum 03. und 04. November 2016

Matz Radloff(6946325)

3. November 2016

Inhaltsverzeichnis

1

1.1 (a)

$A = \{1, 2, 3\}, B = \{a, b\}$

1.1.1 i.

Es gibt keine injektive Funktion $f : A \to B$, da B weniger Elemente als A enthält.

1.1.2 ii.

Ja, es gibt mehrere surjektive Funktionen $g : A \to B$, die nicht injektiv sind, z.B.:

x	$g(x)$
1	a
2	a
3	b

Tabelle 1: Wertetabelle für g

1.1.3 iii.

Da es keine injektive Funktion gibt, die A auf B abbildet, existiert folglich auch keine Bijektion.

1.2 (b)

$A = \{1, 2, 3\}, B = \{a, b, c\}$

1.2.1 i.

Es gibt zwar eine injektive Funktion $f : A \to B$, welche allerdings auch surjektiv ist, da B genauso viele Elemente wie A enthält.

1.2.2 ii.

Es gibt keine surjektive Funktion $g : A \to B$, die nicht auch gleichzeitig injektiv ist, da sonst nicht allen Elementen aus A ein Bildwert zugeordnet würde.

1.2.3 iii.

Ja, es gibt folgende Bijektion:

x	$h(x)$
1	a
2	b
3	c

Tabelle 2: Wertetabelle für g

1.3 (c)

$A = \{1, 2, 3\}, B = \{a, b, c, d\}$

1.3.1 i.

Ja, es gibt folgende injektive Funktion, welche nicht surjektiv ist:

x	$f(x)$
1	a
2	b
3	c

1.3.2 ii.

Es gibt keine surjektive Funktion $g : A \to B$, weil B mehr Elemente als A enthält und bei Abbildung auf alle Elemente aus B, g keine Funktion mehr wäre, da ein Elemente aus A auf zwei aus B abbilden müsste.

1.3.3 iii.

Da es keine surjektive Funktion gibt, existiert auch keine Bijektion.

2

2.1 (a)

$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}; n \to -3n$

Injektivität $f(x_1) = f(x_2) \to -3x_1 = -3x_2 \to x_1 = x_2 \checkmark$

Surjektivität $x \in \mathbb{Z}; f(x) = y \to y = -3x \to x = -\frac{y}{3} \lightning$ Es liegt keine Surjektivität vor, da z.B. für $y = 2$ kein Urbild in $\mathbb{Z}$ existiert.

Die Funktion f ist nicht bijektiv, da keine Surjektivität vorliegt.

2.2 (b)

$g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}; n \to -2n + 3$

Injektivität $g(x_1) = g(x_2) \to -2x_1 + 3 = -2x_2 + 3\checkmark$

Surjektivität $g(x) = y \to y = -2x + 3 \to x = \frac{3}{2}y\lightning$ Es liegt keine Surjektivität vor, da z.B. für $y = 2$ kein Urbild in $\mathbb{Z}$ existiert.

Folglich ist g auch nicht bijektiv.

2.3 (c)

$h : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}; n \to n^2 - 3$

Injektivität $h(x_1) = h(x_2) \to x_1^2 - 3 = x_2^2 - 3 \to \pm x_1 = \pm_x 2\lightning$ h ist nicht injektiv, da z.B. $f(x_1) = f(-x_2) gilt.$

Surjektivität $h(x) = y \to y = x^2 - 3 \to x = \sqrt{y + 3}\lightning$ h ist auch nicht surjektiv, da z.B. für $y = 2$ kein Urbild existiert ($\sqrt{5} \notin \mathbb{Z}$).

h ist also auch nicht bijektiv.

3

3.1 (a)

$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}; m \to (m^2 - 3, (m - 2)^2)$

Injektivität

$$f(x_1) = f(x_2)$$
$$x_1^2 - 3 = x_2^2 - 3 \to \pm x_1 = \pm x_2\lightning$$

Da schon für das erste Element die Injektivität nicht gilt, ist f auch insgesamt nicht injektiv.

Surjektivität

$$f(x) = (y_1, y_2)$$
$$y_1 = x_1^2 - 3 \to x_1 = \sqrt{y_1 - 3}\lightning$$

f ist nicht surjektiv und damit insgesamt auch nicht bijektiv.

3.2 (b)

$g : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}; (n, m) \to -m - n^2$

Injektivität

$$\begin{aligned} g(x_1, z_1) &= g(x_2, z_2) \\ -x_1 - z_1^2 &= -x_2 - z_2^2 \end{aligned}$$

Annahme: $x_1 = x_2$

$$\pm z_1 = \pm z_2 \lightning$$

$\to$ Nicht injektiv.

Surjektivität

$$\begin{aligned} g(x, z) &= y \\ -x - z^2 &= y \end{aligned}$$

$$x = z^2 - y \tag{1}$$
$$z = \sqrt{x - y} \tag{2}$$
$$\tag{3}$$

(1) in (2) einsetzen:

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{z^2 - 2y} \\ z^2 &= x^2 - 2y \lightning \end{aligned}$$

g ist nicht surjektiv und folglich auch nicht bijektiv.

3.3 (c)

$h : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}; (m, n) \to (m - n, m + n)$

Injektivität

$$h(m_1, n_1) = h(m_2, n_2)$$
$$m_1 - n_1 = m_2 - n_2 \wedge m_1 + n_1 = m_2 + n_2$$

Für $m_2 = m_1$ erhält man:

$$m_1 - n_1 = m_1 - n_2 \to n_1 = n_2$$
$$m_1 + n_1 = m_1 + n_2 \to n_1 = n_2$$

Für $n_2 = n_1$ erhält man:

$$m_1 - n_1 = m_2 - n_1 \to m_1 = m_2$$
$$m_1 + n_1 = m_2 + n_1 \to m_1 = m_2 \checkmark$$

4

Für alle $n \in \mathbb{N}$ soll gelten:

$$\sum_{i=1}^{n} (2i - 1) = n^2$$

Induktionsanfang: $n = 1$

$$(2 - 1) = 1^2 \to 1 = 1 \checkmark$$

Induktionsschritt:

$$\sum_{i=1}^{n+1} (2i - 1) = (n + 1)^2$$
$$\sum_{i=1}^{n} (2i - 1) + (2(n + 1) - 1) = (n + 1)^2$$

Nach der Induktionsannahme und Anwendung der 1. binomischen Formel erhält man:

$$n^2 + 2n + 1 = n^2 + 2n + 1 \checkmark$$

5

$A(n) : 3n^2 < 3^n, n \in \mathbb{N}$

Vermutung: $A(n)$ gilt für alle $n > 3$

Induktionsanfang: $A(4)$

$$A(4) : 3 * 4^2 < 3^4 \rightarrow 48 < 81\checkmark$$

Induktionsschritt: $A(n+1)$

$$\begin{aligned} 3(n+1)^2 &< 3^{n+1} \\ 3^n \cdot 3 &> 3n^2 + 6n + 6 \end{aligned}$$

Nach der Induktionsannahme $3^n > 3n^2$ erhält man:

$$\begin{aligned} 3n^2 * 3 &> 3n^2 + 6n + 3 \\ 3n^2 + 6n^2 &> 3n^2 + 6n + 3 \\ 6n^2 &> 6n + 3 \end{aligned}$$

Da $n > 3$ ist, gilt die obige Aussage. ✓