Mathe Hausaufgaben zum 17. und 18. November 2016

Elaha Khaleqi(6947801), Matz Radloff(6946325)

17. November 2016

1

(a)

Behauptung: Ein Produkt $a \cdot b$ ganzer Zahlen ist nur dann durch 3 teilbar, wenn mindestens einer der Faktoren durch 3 teilbar ist.

Widerspruchsbeweis: Wir zeigen, dass das Produkt zweier, nicht durch 3 teilbare Zahlen auch nicht durch 3 teilbar sein kann.

$$3k = a \cdot b; a, b \in \{3n+1, 3n+2\}; k, n \in \mathbb{Z}$$

Es ergeben sich die folgenden drei Fälle ($n, o, k \in \mathbb{Z}$):

$a = 3n+1, b = 3o+1$

$$\begin{aligned} 3k &= (3n+1) \cdot (3o+1) \\ 3k &= 9no + 3n + 3o + 1 \\ 3k &= 3(3no + n + o) + 1 \lightning \end{aligned}$$

$a = 3n+1, b = 3o+2$

$$\begin{aligned} 3k &= (3n+1) \cdot (3o+2) \\ 3k &= 9no + 6n + 3o + 2 \\ 3k &= 3(3no + 2n + o) + 2 \lightning \end{aligned}$$

$a = 3n+2, b = 3o+2$

$$\begin{aligned} 3k &= (3n+2) \cdot (3o+2) \\ 3k &= 9no + 6n + 6o + 4 \\ 3k &= 3(3no + 2n + 2o) + 4 \lightning \end{aligned}$$

Folglich gibt es keine Kombination von nicht durch 3 teilbaren Zahlen, deren Produkt durch 3 teilbar ist. ✓

(b)

Wir zeigen, dass $\sqrt{3}$ eine irrationale Zahl ist.

Widerspruchsbeweis: Wir nehmen an, $\sqrt{3}$ ließe sich als Bruch $\frac{n}{m}; n, m \in \mathbb{Z}, m \neq 0$ darstellen, der maximal gekürzt sei.

Für den Beweis müssen wir vorher feststellen, ob die Wurzel einer durch 3 teilbaren Zahl auch durch 3 teilbar ist:

$$\begin{aligned} a, k &\in \mathbb{Z} \\ a &= 3k \\ a^2 &= 9k^2 = 3(3k^2) \end{aligned} \qquad \checkmark(*)$$

$$\begin{aligned} \sqrt{3} = \frac{n}{m} &\Rightarrow n^2 = 3m^2 \\ 3 \mid 3n^2 &\overset{(*)}{\Rightarrow} 3 \mid n \\ \Rightarrow 9 \mid n^2 &\Rightarrow 9k = n^2, k \in \mathbb{Z} \\ 9k = 3m^2 &\Rightarrow 3k = m^2 \\ \Rightarrow 3 \mid m^2 &\overset{(*)}{\Rightarrow} 3 \mid m \\ &\Rightarrow 3 \mid m, 3 \mid n \lightning \end{aligned}$$

2

Für zwei Äquivalenzklassen $[(a,b)], [(c,d)] \in \mathbb{Z}$ wurde die Summe $[(a,b)] + [(c,d)]$ als die Äquivalenzklasse $[(a+c, b+d)]$ definiert. Wir zeigen, dass die Addition wohldefiniert ist. Unter Annahme der Definition aus der Vorlesung, die die Menge $\mathbb{Z}$ als die Faktormenge $(\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0)/\sim$ definiert, kann man die Summe wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned} (a+c) + (b+d)' &= (a+c)' + (b+d) \\ (a+c) - (b+d) &= (a+c)' + (b+d)' \\ (a-b) + (c-d) &= (a-b)' + (c-d)' \end{aligned}$$

Laut Definition ist $(a-b) \Leftrightarrow a + b' = a' + b \Leftrightarrow [(a,b)]$ eine Darstellung für eine Zahl aus $\mathbb{Z}$. Somit hängt die Addition $[(a+c, b+d)]$ nur von den Äquivalenzklassen $[(a,b)]$ und $[(c,d)]$ ab.

3

Wir zeigen, dass $\sqrt{6}$ eine irrationale Zahl ist.

Widerspruchsbeweis: Wir nehmen an, $\sqrt{6}$ ließe sich als Bruch $\frac{n}{m}; n, m \in \mathbb{Z}, m \neq 0$ darstellen, der maximal gekürzt sei.
Für den Beweis müssen wir vorher feststellen, ob die Wurzel einer durch 6 teilbaren Zahl auch durch 6 teilbar ist:

$$a, k \in \mathbb{Z}$$
$$a = 6k$$
$$a^2 = 36k^2$$

Hierbei ist durch den Faktor 36 nicht eindeutig, dass a^2 auch durch 6 teilbar ist. Durch Primfaktorzerlegung ergeben sich z.B. auch die Faktoren $9 \cdot 4$ (Ausgehend von $2^2 \cdot 3^2$). Damit die notwendige Behauptung $6 \mid a^2$ trotzdem gilt, teilen wir das Problem auf, indem wir benutzen, dass gilt: $2 \mid a \wedge 3 \mid a \Rightarrow 6 \mid a$ Nun benutzen wir unsere Feststellung aus 1. (b) und Lemma 3.XX aus der Vorlesung, sodass folgt:

$$3 \mid a^2 \wedge 2 \mid a^2$$
$$3 \mid a \wedge 2 \mid a$$

$$\sqrt{6} = \frac{n}{m} \Rightarrow n^2 = 6m^2$$
$$2 \mid 3n^2 \wedge 3 \mid 3n^2 \Rightarrow 2 \mid n \wedge 3 \mid n$$
$$\Rightarrow 6 \mid n \Rightarrow 36 \mid n^2$$
$$\Rightarrow 9k = n^2, k \in \mathbb{Z}$$
$$36k = 6m^2 \Rightarrow 6k = m^2$$
$$\Rightarrow 6 \mid m^2 \Rightarrow 6 \mid m$$
$$\Rightarrow 6 \mid m, 6 \mid n \lightning$$

4 ggT(3213,234):

$$\begin{aligned}
3213 &= 324 * 13 + 171 \\
234 &= 171 * 1 + 63 \\
171 &= 63 * 2 + 45 \\
63 &= 45 * 1 + 18 \\
45 &= 18 * 2 + 9 \\
18 &= 9 * 2 + 0 \\
\Rightarrow ggt(3213, 234) &= 9
\end{aligned}$$

5

(a) Festellung, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind:

i. $a_1 \mid b_1 \wedge a_2 \mid b_2 \Rightarrow a_1 + a_2 \mid b_1 + b_2$

Damit die Teilbarkeit von b_1 und b_2 gegeben ist, müssen jeweils $c_1, c_2 \in \mathbb{Z}$ existieren, sodass gilt:

$$b_1 = c_1 \cdot a_1 \wedge b_2 = c_2 \cdot a_2$$

Außerdem muss für die Teilbarkeit von $b_1 + b_2$ gelten:

$$b_1 + b_2 = (a_1 + a_2) \cdot d, d \in \mathbb{Z}$$

Durch Umstellen erhält man:

$$b_1 + b_2 = a_1 e + a_2 e$$

Folglich müssten, damit die Aussage gilt, c_1 und c_2 gleich sein.
$\rightarrow$ Aussage stimmt nicht.

ii. $a \mid b_1 \wedge a \mid b_2 \Rightarrow a \mid b_1 + b_2$

$$\begin{aligned}
b_1 &= c_1 a \\
b_2 &= c_2 a \\
b_1 + b_2 &= c_1 a + c_2 a = a \cdot (c_1 + c_2) \qquad \checkmark
\end{aligned}$$

iii. $a \mid b_1 \wedge a \mid b_2 \Rightarrow a \mid b_1 - b_2$

$$\begin{aligned}
b_1 &= c_1 a \\
b_2 &= c_2 a \\
b_1 - b_2 &= c_1 a - c_2 a = a \cdot (c_1 - c_2) \qquad \checkmark
\end{aligned}$$

(b)

$$
\begin{aligned}
a|b \wedge b|a; a, b \in \mathbb{N}_0 \\
\Rightarrow b = a * n, n \in \mathbb{N} \\
\Rightarrow a = b * m, m \in \mathbb{N} \\
\Rightarrow b = (b * m) * n = b = b * (m * n) \\
\Rightarrow m * n = 1 \\
\Rightarrow m = 1; n = 1 \\
\Rightarrow b = a * n = a * 1 = a
\end{aligned}
$$

Da es für m und n nur eine mögliche Lösung gibt, ist die Teilbarkeitsrelation auf $\mathbb{N}_0$ antisymmetrisch. Da $1, -1 \in \mathbb{Z}$ und sowohl $1| - 1$ als auch $-1|1$, kann die Teilbarkeitsrelation auf $\mathbb{Z}$ nicht antisymmetrisch sein.