Vorlesung Algorithmen und Datenstrukturen (AD)

WS 2019/2020

Prof. Dr. Chris Biemann

Fachbereich Informatik, Universität Hamburg
Vogt-Kölln-Str. 30, 22527 Hamburg
biemann@informatik.uni-hamburg.de

lt.informatik.uni-hamburg.de

Folien:

Prof. Dr. Matthias Rarey
www.zbh.uni-hamburg.de

Lecture2Go

- **Link: über L2Go/wird in Moodle verteilt**
- **Passwort: AuD1920**

- Ziel: Nachbereitung, Vorbereitung auf die Klausur, Nachteilsausgleich wegen Krankheit
- Tipp: Binge Watching vor der Klausur führt i.A. nicht zum Erreichen der Lernziele!
- Falls die Präsenzteilnehmerzahl die Zahl von 80 Teilnehmern unterschreitet, werden die dort gemachten Aufnahmen nicht veröffentlicht!

Organisatorisches: Vorlesung

- **Module:**
  - Pflicht: BSc Informatik — Modul InfB-AD
  - Pflicht: BSc Computing in Science
  - Wahlpflicht: BSc Software-System-Entwicklung, BSc Wirtschaftsinformatik, MSc Lehramt Informatik
  - Wahlbereich: Mensch-Computer-Interaktion
  - MSc Bioinformatik: Modul MBI-04 (AD)
  - Nebenfach Informatik
- **Vorlesung**
  - Di 10:00-11:30h Chemie A zweiwöchentlich
  - Mi 10:00-11:30h Chemie A wöchentlich
- **Sprechstunden**
  - nach Vereinbarung (oder nach der Vorlesung)
  - FB Informatik, Vogt-Kölln-Str. 30, Raum F429
  - Terminvereinbarung: biemann@informatik.uni-hamburg.de
  - Bitte zunächst Fragen mit Übungsleitenden und Tutoren klären

Anforderungen zum Bestehen des Moduls

Drei Teilleistungen müssen erbracht werden, um die beiden Teile des Moduls zu bestehen.

Vorlesung:

- Bestehen der Klausur
  - Mo, 10. Feb. 2020 09:30-11:30, ESA A/ESA B
  - Mi, 18. Mär. 2020 09:30-11:30, Audimax 2

Übung:

- Übungsaufgaben
  - 6 Übungsblätter mit Teilaufgaben
  - mindestens 50% bearbeitet
  - mindestens 3 Aufgaben vorgetragen
- Programmieraufgaben *NEU*
  - 6 Blätter mit Programmieraufgaben
  - mindestens 50% korrekt
  - Korrektur automatisch

Organisatorisches: Übungen

- **Übungen (14tägig, erstmalig am 17. Okt.)**
  1. Mi, 16. 10. 2019 [12:15] F-534 Christopher Hahn
  2. Mi, 16. 10. 2019 [12:15] F-635 Christoph Damerius
  3. Mi, 16. 10. 2019 [14:15] F-334 Timo Baumann
  4. Mi, 16. 10. 2019 [14:15] F-534 Christopher Hahn
  5. Mi, 16. 10. 2019 [14:15] C-221 Christoph Damerius
  6. Mi, 16. 10. 2019 [16:15] F-334 Timo Baumann **[in English]**
  7. Mi, 16. 10. 2019 [16:15] F-534 Eugen Ruppert
  8. Do, 17. 10. 2019 [08:15] F-534 Felix Biermeier
  9. Do, 17. 10. 2019 [08:15] F-635 Fynn Schröder (Melf Johannsen bis Ende Oktober)
  10. Do, 17. 10. 2019 [10:15] F-334 Fynn Schröder (Melf Johannsen bis Ende Oktober)
  11. Do, 17. 10. 2019 [10:15] F-534 Felix Biermeier
  12. Fr, 18. 10. 2019 [10:15] F-334 Florian Schneider
  13. Fr, 18. 10. 2019 [10:15] G-102 Christopher Hahn
  14. Fr, 18. 10. 2019 [12:15] F-334 Florian Schneider
  15. Fr, 18. 10. 2019 [12:15] G-102 Christopher Hahn
- **Die Übungsgruppen sind frei wählbar, unabhängig von der Zuweisung in Stine. Bei Wechsel NICHT im Studienbüro ummelden!**
- **Bitte Wechseln vermeiden, um Kontinuität bei der Organisation zu wahren**

Organisatorisches: Tutorials zur Übung

- **Tutorials zur Übung (14tägig, erstmalig am 28. Okt.)**
  1. Mo, 28. Okt. 2019 [16:00] D017 Lukas Hintze
  2. Mi, 30. Okt. 2019 [16:00] D017 Lukas Hintze
  3. Fr, 1. Nov. 2019 [14:00] D017 Melf Johannsen
- **Regeln und Anregungen**
  - Anmeldung und Anwesenheit nicht erforderlich
  - Ziel: Wiederholung und Vertiefung des Stoffes aus VL und Übung
  - Zur optimalen Vorbereitung: Fragen und Themenwünsche bitte direkt an die Tutoren vorab und rechtzeitig per Email senden, im Betreff „AD Tutorium“ verwenden.
  - Hilfestellung bei den aktuellen Übungsaufgaben wird NICHT gegeben
  - Fragen zu älteren Themen der VL und Übung sind möglich und erwünscht
  - i.d.R.: (interaktives) Bearbeiten vergleichbarer Aufgaben, z.B. Aufgaben aus dem letzten Jahr oder aus dem Cormen

Emails der Tutoren:

- Melf Johannsen: <melf@melf.de>
- Lukas Hintze: <6hintze@informatik.uni-hamburg.de>

Organisatorisches: Tutorials zu Programmieraufgaben

- **Tutorials (14tägig, erstmalig am 21. Okt.)**
  1. Mo, 21. Okt. 2019 [16:00] D017 Louis Kobras
  2. Mi, 23. Okt. 2019 [16:00] D017 Louis Kobras
  3. Fr, 25. Nov. 2019 [14:00] D017 Melf Johannsen
- **Regeln und Anregungen**
  - Anmeldung und Anwesenheit nicht erforderlich
  - Ziel: Klärung von Fragen und Problemen zu Programmieraufgaben
  - Hilfestellung bei den aktuellen Programmieraufgaben wird NICHT gegeben
  - Fragen zu älteren Programmieraufgaben sind möglich und erwünscht
  - i.d.R.: schrittweises Verstehen der Umsetzung von Theorie in Praxis
  - Besser eigenen Laptop mitbringen; es stehen begrenzt Computerarbeitsplätze zur Verfügung

Emails der Tutoren:

- Melf Johannsen: <melf@melf.de>
- Louis Kobras: <4kobras@informatik.uni-hamburg.de>

Ende 2019 re-evaluieren wir die Aufteilung der Tutorien je nach den Bedarfen.

Moodle-Plattform: Materialien

- **MIN-Moodle Link: https://lernen.min.uni-hamburg.de/moodle/**
- **Login: Stine-Kennung**
- **Moodle-Kurs:**
  - Algorithmen und Datenstrukturen WS 2019/20 (AD1920)
  - Zugangsschlüssel / Enrolment Key: **AlgoDat1920**

- **Inhalt:**
  - Vorlesungsfolien als PDF, verfügbar VOR der Vorlesung
  - Übungsblätter und Programmieraufgabenblätter
  - Lösungen der Aufgaben nach der letzten jeweiligen Übung dazu
  - Punktestand der Übungs- und Programmierleistung
  - Teilnehmerforum: Für Fragen an das AuD Team und zur Diskussion
  - Ggf. Zusatzinformationen

Feiertag: Do, 31. Oktober 2019

- **Übungsgruppen am Donnerstag, 31. Oktober werden auf Montag 30.10. bzw. Freitag 2. November verlegt.**

- **Alternative Übungen:**
  - Mi. 30.10. [14:15] F-635 Melf Johannsen
  - Fr. 1.11. [8:15] F-635 Felix Biermeier/Melf Johannsen
  - Fr. 1.11. [10:15] F-635 Felix Biermeier/Melf Johannsen
  - alle anderen regulären Übungen am Mittwoch oder Freitag

- **Bitte bleiben Sie nach Möglichkeit bei demselben Übungsleiter**

Organisatorisches: Übungszettel

- **Insgesamt 6 Übungsblätter**
  - Ausgabe: Nach Mittwochsvorlesung in Wochen mit Übung, erstmalig heute am 16.10.2018
  - Termin: zur Übung (i.d.R. 2 Wochen Zeit)
  - Vorrechnen in der Übung
- **Regeln**
  - Am Anfang der Übung kreuzen alle Studierende an, welche Übungen sie bearbeitet haben
  - Pro Aufgabe wählt Übungsleiter eine/n Studierende/n mit Kreuzchen zum Vortragen aus
    - Falls Aufgabe bearbeitet wurde (muss nicht korrekt sein!), bekommt Studierende/r einen **Vortragspunkt**
    - Falls Aufgabe eindeutig nicht bearbeitet wurde (falsch angekreuzt), werden **alle Kreuze für das Übungsblatt ungültig**.
- **Teilleistung ist erbracht, wenn Studierende**
  - mind. 3 Vortragspunkte erreichen **UND**
  - insgesamt 50% gültige Kreuzchen haben.

Anwesenheit wird nicht kontrolliert. Bei Abwesenheit können handschriftliche (!) Lösungen per Scan/Email oder via Moodle beim Übungsleiter vor der Mittwochsvorlesung in Übungswoche abgegeben werden. Bearbeitete Aufgaben zählen als gültige Kreuzchen. Eindeutig abgeschriebene Lösungen gelten nicht.

Organisatorisches: Programmieraufgaben

- **Insgesamt 6 Übungsblätter**
  - Ausgabe: Nach Mittwochsvorlesung in Wochen mit Übung, erstmalig heute am 16.10.2018
  - Abgabetermin: Bis Sonntag Abend in der Übungswoche (i.d.R. 2,5 Wochen Zeit)

- **Regeln**
  - Moodle-Plugin für das Programmieren online oder das Pasten von Lösungen
  - Erlaubte Programmiersprachen: Python und Java
  - Vortests: Syntaktischer Check und einfache Unit Tests
  - Abgabe: andere Unit Tests, 9x wiederholbar
  - Keine Hacks! Wir machen Stichproben!

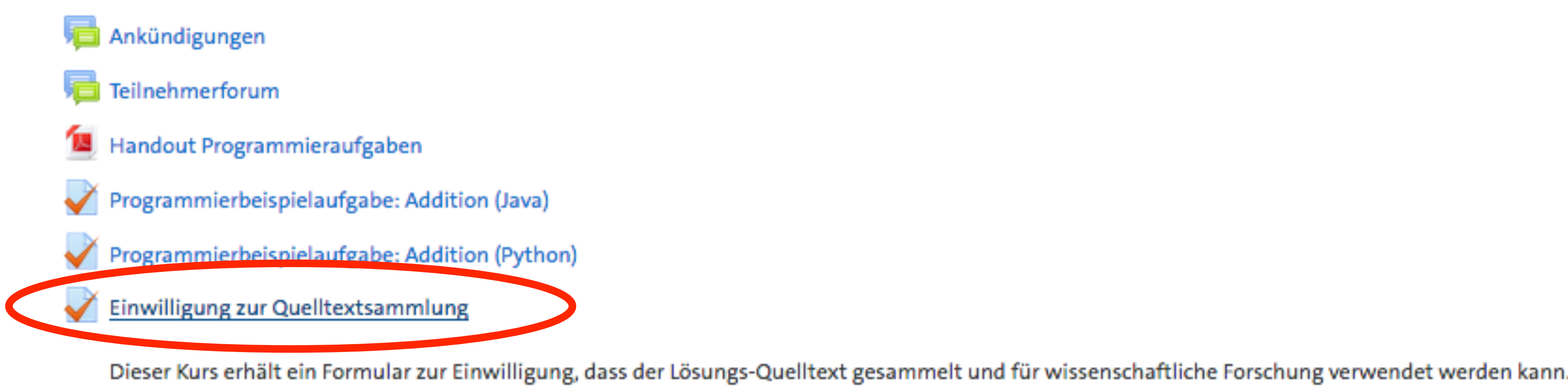
- **Teilleistung ist erbracht, wenn Studierende**
  - insgesamt 50% Punkte erreichen.

Wir behalten uns vor, die Regeln anzupassen. Dies ist ein erster Testlauf von automatisch korrigierten Programmieraufgaben am Fachbereich Informatik.

Umfrage: Wer kann welche Programmiersprachen?

Datensammlung Programmieraufgaben

- Wir würden gern die jeweils letzte Lösung für Forschungszwecke pseudonymisiert sammeln und verfügbar machen.
- Einwilligung kann gegeben und widerrufen werden, Stichtag ist 31.1.2020
- Bitte entsprechende Umfrage im Moodle beantworten



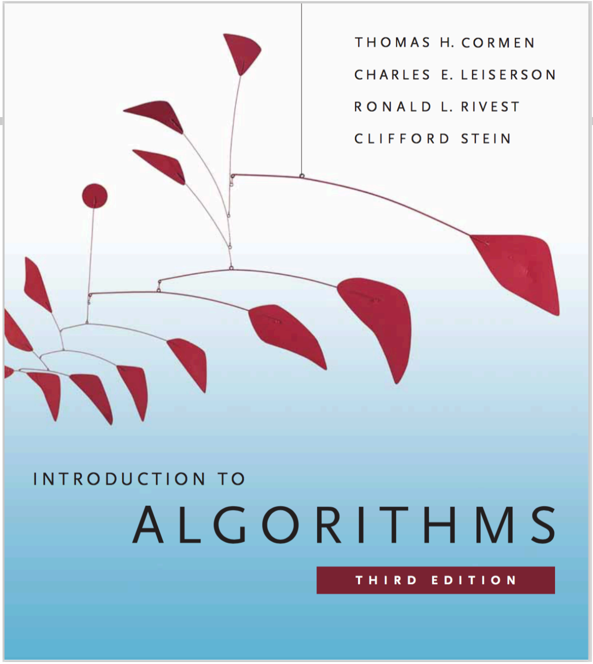
- Genaueres zur Verwendung der Daten ist dort hinterlegt

Klausur

- **Termine**
  - Mo, 10. Feb. 2020 09:30-11:30, ESA A/ESA B
  - Mi, 18. Mar. 2020 09:30-11:30, Audimax 2

- **Regeln**
  - Bearbeitungszeit: 2 Stunden
  - keine elektronischen Hilfsmittel (Taschenrechner, Handy, Laptop, Tablet usw.) erlaubt
  - Ungefähre Wichtung:
    - 50% Reproduktion
    - 30% Transfer
    - 20% Formale Beweise
  - Ein vorbereitetes handbeschriebenes Blatt erlaubt, genaueres TBA

Organisatorisches: Literatur



- **T.H. Cormen, C.E. Leiserson, R.L. Rivest, C. Stein**

  engl. Originalausgabe:

  Introduction to Algorithms, MIT Press, 2009, (3. Aufl.)

  deutsche Übersetzung:

  Algorithmen – Eine Einführung, Oldenbourg Wissenschaftsverlag, überarbeitete Auflage 2010

- **Foliensammlung:**
  - Verfügbar auf Moodle

    [nur für den eigenen Gebrauch!]

Themenschwerpunkte

- **Themen:**
  - Entwurf von Algorithmen und Datenstrukturen
  - Beschreibung von Algorithmen
  - Analyse der Platz- und Zeitkomplexität
  - Algorithmen für häufig auftretende Probleme

- **Kapitel**
  1. Algorithmen und deren Komplexität
  2. Grundlegende Datenstrukturen
  3. Sortieren
  4. Suchen
  5. Graphen
  6. Dynamische Programmierung
  7. Komplexitätsklassen und NP-Vollständigkeit
  8. (Lösen schwerer Probleme)

Kapitel 1: Algorithmen und deren Komplexität

Beschreibung von Algorithmen
Analyse von Algorithmen
O-Notation
Das Maxsum-Subarray-Problem

1.1 Beschreibung von Algorithmen

- **Informatik = <u>Information</u> + Mathe<u>matik</u>**
  - entstand mit der Entwicklung der ersten Rechenanlagen (40‘er J.)
  - anglo-amerikanisch: Computer Science
  - Wissenschaft vom ‚mechanischen Rechnen‘

- **Algorithmus (von Al-Chowarizmi, persischer Math., ca. 780)**

  = mechanisch ausführbares Rechenverfahren

BSP [Algorithmus]: GGT (Euklid, 300 v.Chr.)

ggt(a,b):
1. *a = b*q + r mit r < b (ganzzahlige Division)*
2. *falls r=0: output b*
3. *a ← b; b ← r;*
4. *gehe zu Schritt 1.*

Der Algorithmenbegriff

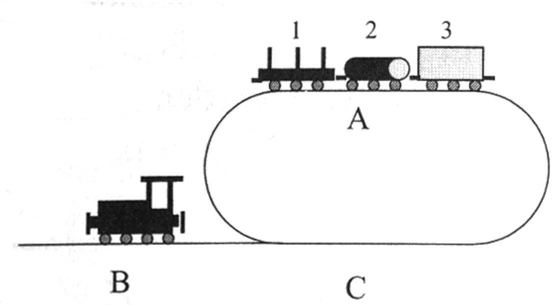
Begriffe

- **„Problem“:** definiert eine Eingabe-Ausgabe-Beziehung
- **„Instanz“:** eine mögliche Eingabe für das Problem
- **„Algorithmus“:** definiert eine Folge elementarer Anweisungen zur Lösung eines Problems
- **„Korrektheit“:** Ein Algorithmus **stoppt** für **jede** mögliche Eingabe mit der korrekten Ausgabe

- **Eigenschaften von Algorithmen:**
  - mechanische Verfahren
  - bestehen aus mehreren elementaren Schritten
  - Schritte werden ggf. wiederholt durchlaufen [Iteration]
  - Schritte werden ggf. bedingt durchlaufen [Selektion]
  - Das Verfahren führt sich ggf. selbst mit veränderten Parametern aus [Rekursion]

Beschreibung von Algorithmen

- Spezifikation: **Beschreibung des Problems**
  - vollständig: alle Anforderungen und Rahmenbedingungen
  - detailliert: welche Hilfsmittel / Basisoperation sind erlaubt
  - unzweideutig: klare Kriterien für akzeptable Lösungen
- **Bsp: Eine Lokomotive soll die auf Gleis A stehenden Wagen 1,2,3 in Reihenfolge 3,1,2 auf Gleis C abstellen.**
  - Vollständigkeit:
    - Wie viele Wagen kann die Lok auf einmal ziehen?
  - Detailliertheit:
    - Welche Aktionen kann die Lok ausführen?
  - Unzweideutigkeit:
    - Darf die Lok am Ende zwischen den Wagen stehen?
- **Beschreibung durch Vorbedingung / Nachbedingung**



Beschreibung von Algorithmen

- **Beschreibungsformen:**
  1. Natürliche Sprache
  2. Computerprogramme
  3. Hardwareentwurf
  4. Mischung aus 1. und 2. → <u>Pseudo-Code</u>

  Regel: Wie die Spezifikation muss der Algorithmus vollständig, detailliert und unzweideutig beschrieben sein.
- **Pseudo-Code:**
  - Angelehnt an imperative Programmiersprachen (Pascal, C, …)
  - Kontroll- und Datenstrukturen werden aus P-Sprachen übernommen
  - Bedingungen, Funktionen werden ggf. natürlich-sprachlich formuliert

Beschreibung von Algorithmen

- **Pseudo-Code Konventionen (aus Cormen et al, ab 3. Aufl.)**
  1. Einrücken kennzeichnet die Blockstruktur
  2. **if – [elseif] – else** Anweisungen für die bedingte Ausführung
  3. **while, for – to/downto, repeat – until** Anweisungen für die iterative Ausführung
     - **while** <Bedingung ist wahr>
     - **for** <variable> = <Wert/Ausdruck> **to** <Wert/Ausdruck>
       Anw1
       Anw2 …
     - **repeat** Anw1
       Anw2 …
       until <Bedingung ist wahr>
     - *Achtung: Variable der for-Schleife ist auch noch nach Schleifenende definiert (C-Konvention)*
  4. // leiten Kommentare ein
  5. == steht für den Vergleich von Ausdrücken, = für die Zuweisung

Beschreibung von Algorithmen

Pseudo-Code Konventionen

6. Feldelemente werden durch eckige Klammern indiziert, Teilfelder durch Indexbereiche, *A[i], A[i..j]*
7. Zusammenhängende Daten werden als Objekte mit Attributen dargestellt, das Objektattribut wird durch den .-Operator spezifiziert, A.*length* bezeichnet die Anzahl der Elemente von Array A
8. Funktionsparameter werden als Wert übergeben (call-by-value), Objekt- und Array-Bezeichner repräsentieren die Adresse des Objektes
9. Boole'sche Operatoren werden träge ausgewertet (lazy evaluation), d.h. von links nach rechts bis der Ausdruck garantiert falsch oder wahr ist.

   Bsp: *x* und *y* : y wird nur ausgewertet, wenn x wahr ist.

   x oder *y*: y wird nur ausgewertet, wenn x falsch ist.

Beispiel: Euklids GGT-Algorithmus

- **Algorithmus zur Berechnung des GGT:**

BSP [Algorithmus]: GGT (Euklid, 300 v.Chr.)

ggt(a,b): *1. a = b*q + r mit r < b (ganzzahlige Division)*
2. falls r=0: output b
3. a ← b; b ← r;
4. gehe zu Schritt 1.

Iterative Variante:

```
GGT(a, b)                // Annahme: a > b
  while  a mod b > 0
      r = a mod b
      a = b; b = r
  return b
```

Rekursive Variante:

```
GGT(a, b)                // Annahme: a > b
  r = a mod b
  if r > 0    return GGT(b, r)
  else        return b
```

GGT: Rekursive Implementierung in Java und Python

JAVA

```java
int gcd(int a, int b) {
    if (a < b) {
        int tmp = a;
        a = b;
        b = tmp;
    }
    int r = a % b;
    if (r == 0) {
        return b;
    } else {
        return gcd(r, b);
    }
}
```

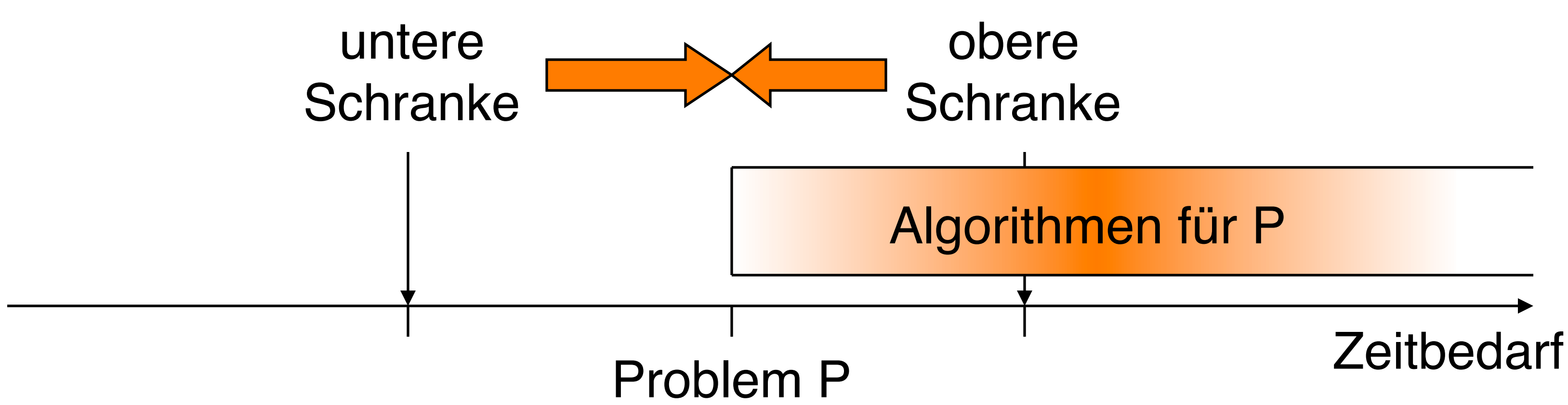
PYTHON

```python
def GGT(a, b):
    if a < b:
        a, b = b, a
    r = a % b
    if r > 0:
        return GGT(b, r)
    else:
        return b
```

- **Java ist getypt, Python nicht**
- **Java benötigt Klammerung, Python benötigt Einrückungen**
- **Java Statements sind durch ; getrennt, Python trennt durch neue Zeile**
- **Beide Implementierungen sind Umsetzungen des Pseudocodes ohne die Annahme a>b.**

1.2 Analyse von Algorithmen

- **Ziel:** theoretische (d.h. ohne ein Computerprogramm zu schreiben) Analyse von Problemen und Algorithmen
  - Welche Probleme sind lösbar?
  - Welche Unterschiede gibt es in der Mächtigkeit von Computermodellen?
  - Welche Ressourcen (Zeit, Speicherplatz) werden mindestens benötigt?
  - **Ist der Algorithmus für das Problem korrekt?**
  - **Welche Ressourcen benötigt ein gegebener Algorithmus?**



Korrektheit von Algorithmen

- **Formale Korrektheit**
  - Angabe von Vor- und Nachbedingung für jede Anweisung
  - Schleifeninvariante: Bedingung, die vor, während (d.h. nach jeder Iteration) und nach Ausführung einer Schleife gültig ist

- **Bsp: Berechnung von a^k für $k > 0$**

```
POTENZ(a, k)      // Annahme: k > 0 und ganzzahlig
  b = 1; i = 0;
  for i = 1 to k
    b = b * a
  return b
```

Invariante: $\{ b == a^i \}$

- **Beweistechniken sind analog zur Mathematik**
  - Insbesondere: vollständige Induktion, Beweis durch Widerspruch

Asymptotische Laufzeit

- **physikalische Laufzeit**
  - hängt stark vom Computer ab
  - hängt von vielen Details der Eingabedaten ab
- **Modellannahmen Laufzeit**
  - **Uniformes Kostenmaß**: Math. Operationen kosten unabhängig von der Größe der Operanden eine Zeiteinheit
  - **RAM-Modell** (Random-Access-Maschine):
    - Zugriff auf Daten kostet eine konstante Zeiteinheit
    - Algorithmen werden sequentiell ausgeführt (nur ein Prozessor)
  - Statt der genauen Laufzeit wird eine Schranke angegeben
  - Konstante Faktoren werden vernachlässigt.
- **Modellannahmen Speicherplatz**
  - **RAM-Modell:** Speicherung eines elementaren Datenobjekts kostet unabhängig vom Wert konstanten Speicherplatz

Asymptotische Laufzeit

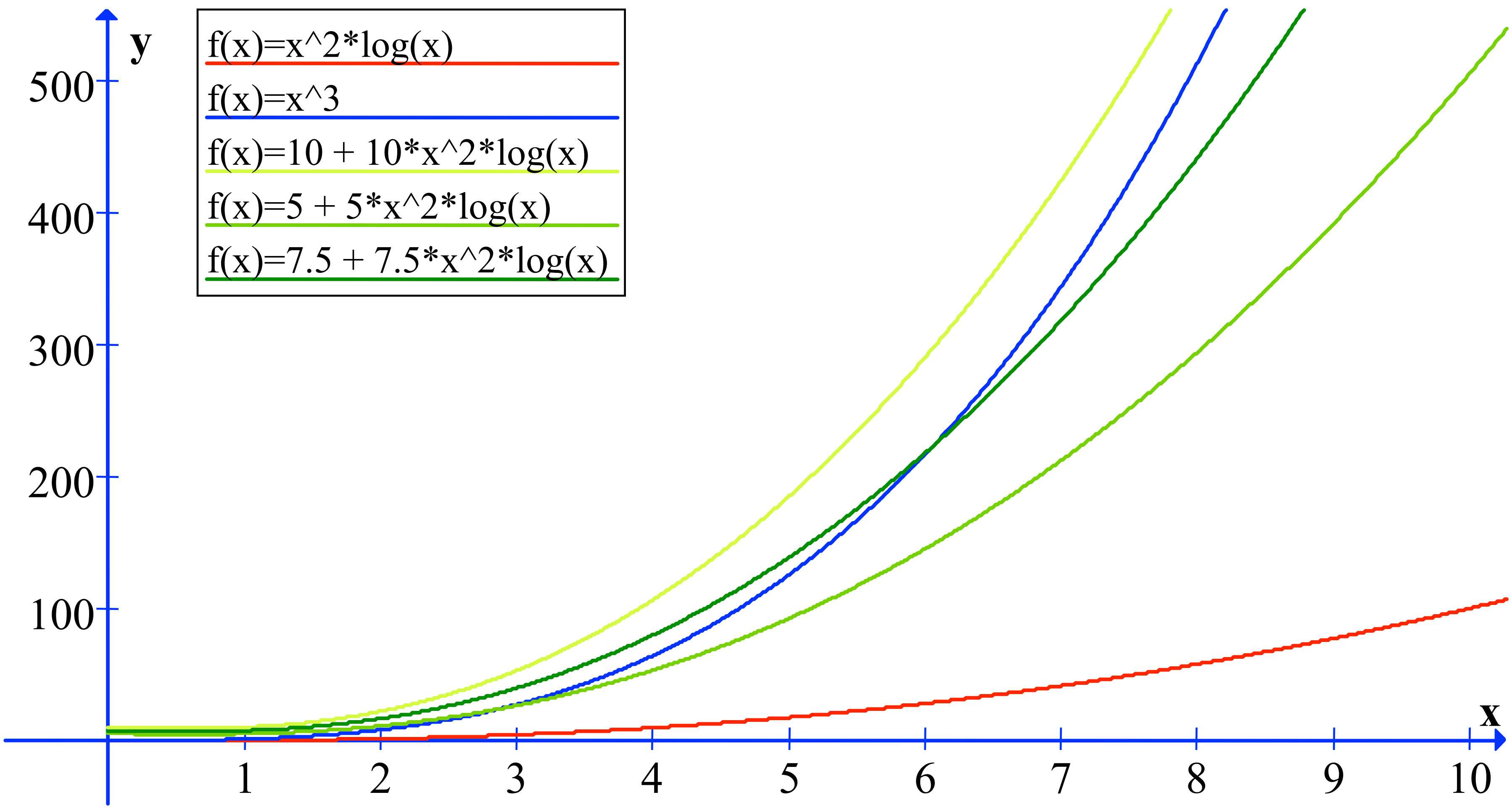
- **Wie können wir die Effizienz eines Algorithmus unabhängig von Details der Eingabe bewerten?**
  - Instanzen (Eingaben) verursachen aufgrund
    1. der Größe
    2. der individuellen Werte

    unterschiedliche physikalische Laufzeiten.

  Bsp: Sortieren einer Zahlenfolge
    1. Wie viele Zahlen sollen sortiert werden?
    2. In welcher initialen Reihenfolge liegen die Zahlen vor?
- **Asymptotische Laufzeit:**
  - Wie verhält sich der Algorithmus bei immer größeren Instanzen?
    - im **worst case**: im ungünstigsten Fall
    - im average case: im statistischen Mittel
    - im best case: im besten Fall

    (bzgl. der Menge aller Instanzen gleicher Länge)
  - Falls nichts weiter angegeben ist, bezieht sich eine Laufzeitanalyse immer auf den Worst Case.

Einfluss konstanter Faktoren auf das Funktionswachstum



https://www.desmos.com/calculator

Größenordnungen von Funktionen

f(N)	Bezeichnung	10	1.000	1.000.000
1	konstant	1	1	1
log(N)	logarithmisch	3	10	20
$\log^2(N)$	log-quadrat	2	3	4
$\sqrt{N}$		3	30	1000
N	linear	10	1.000	1.000.000
N log(N)		30	10.000	20.000.000
N^2	quadratisch	100	1.000.000	10^{12}
N^3	kubisch	1000	10^9	10^{18}
2^N	exponentiell	1000	10^{300}	10^{300000}

Hinweis: zur Berechnung der Beispielzahlen wurde $\log_2()$ verwendet.

$$\log_a P = \frac{\log_b P}{\log_b a}$$

O-Kalkül / O-Notation

- O-Kalkül: **Eine Funktion *f* ist *höchstens von der Ordnung g,* falls Konstanten c und n_0 existieren mit $0 \leq f(n) \leq c\, g(n)$ für alle $n > n_0$, d.h.**
  $\exists\, c > 0\ \exists\, n_0 > 0\ \forall\, n > n_0 : 0 \leq f(n) \leq c\, g(n)$
- **Man schreibt f(n) = O(g(n)).**
  - O(g(n)) ist die **Menge** der Funktionen, die nicht stärker wachsen als g (= hat die Bedeutung von $\in$, mit O ist manchmal eine Menge, manchmal ein Repräsentant gemeint)

O	**$\exists c$ ... mit $f(n) \leq c\, g(n)$**	**... f ist höchstens von Ordnung g**
o	**$\forall c$ ... mit $f(n) < c\, g(n)$ ...**	**... f ist von echt kleinerer Ordnung als g**
Ω	**$\exists c$ ... mit $f(n) \geq c\, g(n)$ ...**	**... f ist mindestens von Ordnung g ...**
ω	**$\forall c$ ... mit $f(n) > c\, g(n)$ ...**	**... f ist von echt größerer Ordnung als g**
Θ	**$\exists\, c_1, c_2$ mit $c_1\, g(n) \leq f(n) \leq c_2\, g(n)$**	**... f ist von Ordnung g ...**

O-Notation (O-Kalkül)

- **Rechenregeln für O**
  1. $f = O(f)$
  2. $f,g = O(F)$ => $f + g = O(F)$
  3. $f= O(F)$ und c konstant => $c * f = O(F)$
  4. $f= O(F)$ und $g= O(f)$ => $g = O(F)$
  5. $f= O(F)$ und $g= O(G)$ => $f * g = O(F * G)$
  6. $f= O(F * G)$ => $f = |F| * O(G)$
  7. $f= O(F)$ und $|F| \leq |G|$ => $f = O(G)$

- Beweis zu 5. (andere Beweise erfolgen analog):
  - $f(n)= O(F(n))$, d.h. $\exists\, n_0, c_0\ \forall\, n \geq n_0 : f(n) \leq c_0 F(n)$
  - $g(n)= O(G(n))$, d.h. $\exists\, n_1, c_1\ \forall\, n \geq n_1 : g(n) \leq c_1 G(n)$
  - Sei $h(n) = f(n) * g(n)$. Dann gilt $\forall\, n \geq n_2 = \max(n_0,n_1)$:

    $f(n) * g(n) \leq c_0 F(n)\, c_1 G(n) = c_2 F(n)G(n)$, also $f * g = O(F * G)$

O-Notation

- **Polynome:**
  - Ist p ein Polynom von Grad m, gilt: $p = O(n^m)$
    - $n^k = O(n^l)$ für alle $l \geq k$, Anwendung von Regel 2

- **Weitere Beispiele:**
  - $f(n)=3n^2 + 17\sqrt{n} = O(n^2)$
    - $\sqrt{n} = O(n)$, Anwendung von Regel 4 und 2
  - $f(n)= 10^{300}n + 2n \log(n) = O(n \log n)$
  - $f(n)= 2^{2*n} = (2^2)^n = 4^n = O(4^n)$
  - $f(n) = \log_{10} n = O(\log n)$
    - $\log_{10} n = \log_2 n / \log_2(10) = 1/\log_2(10) * \log_2 n = O(\log_2 n) = O(\log n)$
    - Eine Änderung der Basis führt zu einem konstanten Faktor, die Basis muss im O-Kalkül nicht berücksichtigt werden.

O-Notationen in Gleichungen und Ungleichungen

1. Was bedeutet $2n^2 + 3n + 1 = 2n^2 + \Theta(n)$?
   - $\Theta(n)$ bezeichnet eine Menge, gemeint ist:
     $2n^2 + 3n + 1 = 2n^2 + f(n)$ mit $f(n) = \Theta(n)$
   - $\Theta(n)$ repräsentiert eine *anonyme Funktion,* d.h. der genaue Funktionsverlauf ist nicht bekannt, lediglich das Wachstumsverhalten.
2. Achtung: O-Notationen in parametrisierten Summen vermeiden!
   $$\sum_{i=1}^{n} O(i) \neq O(1) + O(2) + \ldots + O(n)$$
3. Was bedeutet $2n^2 + \Theta(n) = \Theta(n^2)$?
   - $\Theta(n)$ repräsentiert eine anonyme Funktion mit linearem Wachstum f(n)
   - Für jede Funktion $f(n) = \Theta(n)$ gibt es eine Funktion $g(n) = \Theta(n^2)$ und Konstanten $c_1>0$, $c_2>0$, $n_0>0$ mit
     $c_1\, g(n) \le 2n^2 + f(n) \le c_2\, g(n)$ für alle $n > n_0$

1.4 Laufzeitanalysen

- **Gegeben ist ein Algorithmus A mit Eingabe der Länge N**
  Gesucht wird die Laufzeit des Algorithmus: $T_A(N)$ oder $T(N)$

- **Welche Operation dauert wie lang?**
  - math. Operationen; Zuweisungen — $O(1)$
    uniformes Kostenmaß: — $O(1)$
    [logarithmisches Kostenmaß: — $O(\log x)$
    x ist der Wert des größten Operanden]
  - Klammerung von Anweisungen — $O(1)$
  - Bedingte Ausführungen — $O(1)$
  - Schleifen — O(#Schleifendurchläufe)
  - Funktionsaufrufe — $O(1)$
  - Rekursion: Aufruf der eigenen Funktion mit
    Eingabe der Länge N‘ — $T(N')$

Laufzeitanalysen

- **Bsp: Berechnung von a^k für k > 0**

```
EXPONENT (a, k)
  b = 1                                c0
  for i = 1 to k                       c,  k+1 Vergl., k Durchläufe
    b = b * a                          c1
  return b                             c2
```

$T(a,k) = c_0 + (k+1) * c + k*c_1 + c_2 = O(k)$

- **Bsp: Berechnung von a^k für k > 0**

```
EXPONENT2(a, k)                  // Invariante: a^k = p * q^l
  p = 1; q = a; l = k                  c0
  while l ≥ 1                          c,  (log2 k+1) Durchläufe
    if( l MOD 2 == 1) p = p * q        c1
    l = l DIV 2                        c2
    q = q * q                          c3
  return p                             c4
```

$T(a,k) = c_0 + (\log_2 k+1) (c + c_1 + c_2 + c_3) + c_4 = O(\log k)$

Korrektheit von `EXPONENT2()`

- Schleifeninvariante: $\mathbf{a^k = p * q^l}$
- **Beweis der Korrektheit:**
  - Vor Schleifenbeginn (Zeile 2) gilt:

    p=1, q=a, l=k => $a^k = p * q^l$
  - Nach jedem Schleifendurchlauf (nach Zeile 6) gilt:

    vor Zeile 3 gilt $a^k = p * q^l$ (Schleifeninvariante)

    Fall 1: l ist gerade, d.h. l mod 2 = 0

    Seien l' und q' die Werte von l und q vor Zeile 4. Dann gilt nach Zeile 6: $a^k = pq'^{l'} = p(q'^2)^{l'/2} = pq^l$

    Fall 2: l ist ungerade, d.h. l mod 2 = 1

    Seien p', l', q' die Werte von p, l, und q vor Zeile 4, Dann gilt nach Zeile 6: $a^k = p'q'^{l'} = p'q'(q'^2)^{(l'-1)/2} = p'q'q^l = pq^l$
  - Nach Schleifenende (Zeile 7) gilt:

    $a^k = p * q^l$ und l=0 (Schleifenterminierung), also $a^k = p$

1.5 Asymptotische Laufzeit rekursiver Funktionen

- **Rekurrenz: Gleichung/Ungleichung, die durch sich selbst mit kleinerem Eingabewert beschrieben wird:**
- **Bsp:**

$$T(n) = \begin{cases} c_0 & : n = 1 \\ T(n-1) + c_1 & : n > 1 \end{cases}$$

$$T(n) = \begin{cases} c & : n = 1 \\ 2T(n/2) + c & : n > 1 \end{cases}$$

- **Eigenschaften:**
  - T(n) ist typischerweise nur für n $\in$ IN definiert
  - T(n) = c für kleine n
  - Auf- und Abrundungen für n können i.d.R. vernachlässigt werden.
- **Ziel:**
  1. bestimme die asymptotische Laufzeit
  2. finde eine geschlossene Formel für T(n)

Substitutionsmethode

- **Schritt 1: Setze T(n) wiederholt ein:**

$$T(n) = \begin{cases} c_0 & : n = 1 \\ T(n-1) + c_1 & : n > 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} T(n) &= T(n-1) + c_1 \\ &= T(n-2) + c_1 + c_1 \\ &= T(n-(n-1)) + \underbrace{c_1 + c_1 \cdots + c_1}_{n-1 \text{ mal}} \\ &= T(1) + (n-1)c_1 = (n-1)c_1 + c_0 = O(n) \end{aligned}$$

$$T(n) = \begin{cases} c & : n = 1 \\ 2T(n/2) + c & : n > 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} T(n) &= 2T(n/2) + c \\ &= 2(2T(n/4) + c) + c \\ &= 4T(n/4) + 2c + c \\ &= 8T(n/8) + 4c + 2c + c \\ &= 2^i T(n/2^i) + 2^{i-1}c + 2^{i-2}c + \cdots + c \end{aligned}$$

Substitutionsmethode

$$T(n) = \begin{cases} c & : n = 1 \\ 2T(n/2) + c & : n > 1 \end{cases}$$

Schritt 2: Intuition

$$T(n) = 2^i T(n/2^i) + 2^{i-1}c + 2^{i-2}c + \cdots + c$$

$$= 2^i T(n/2^i) + \sum_{k=0}^{i-1} 2^k c$$

- Wie viele Substitutionsschritte sind notwendig?

$$n/2^i \leq 1 \Leftrightarrow n \leq 2^i \Leftrightarrow \log_2 n \leq i$$

$$T(n) = 2^i T(n/2^i) + c\sum_{k=0}^{i-1} 2^k \qquad \text{mit } i = \log_2 n$$

$$\leq 2^{\log_2 n} T(1) + c \sum_{k=0}^{\log_2 n - 1} 2^k$$

Geometrische / Exponentielle Reihe:

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} \qquad \text{für } x \neq 1,\ x \in \mathrm{IR}$$

$$= nc + c(2^{\log_2 n} - 1) = nc + c(n-1) = 2cn - c = O(n)$$

- Beweis erfolgt durch vollständige Induktion

- **Schritt 3: Beweis der Hypothese** (durch vollständige Induktion)
  - Annahme: T(n) ≤ kn
  - Induktionsanfang: T(1) = c ≤ k*1 für k ≥ c
  - Induktionsschritt:

$$T(n) = 2T(n/2) + c \leq 2kn/2 + c \leq kn + c$$

  - Neue Annahme: T(n) ≤ kn – c
  - Induktionsanfang: T(1) = c ≤ k*1 – c für k ≥ 2c
  - Induktionsschritt:

$$T(n) = 2T(n/2) + c \leq 2(kn/2 - c) + c \leq kn - c$$

  - In der Regel werden wir unserer Intuition vertrauen, formal ist der Beweis aber notwendig.

Hilfsmittel: Variablentransformation

- Transformation der Variablen hilft häufig, einfachere, intuitiv leichter lösbare Gleichungen zu erhalten:
- Bsp:

$$T(n) = 2T\left(\left\lfloor \sqrt{n} \right\rfloor\right) + \log n$$

- Ersetze m = log n

$$T(n) = 2T\left(\sqrt{2^{\log n}}\right) + \log n$$

$$T(2^m) = 2T\left(2^{m/2}\right) + m$$

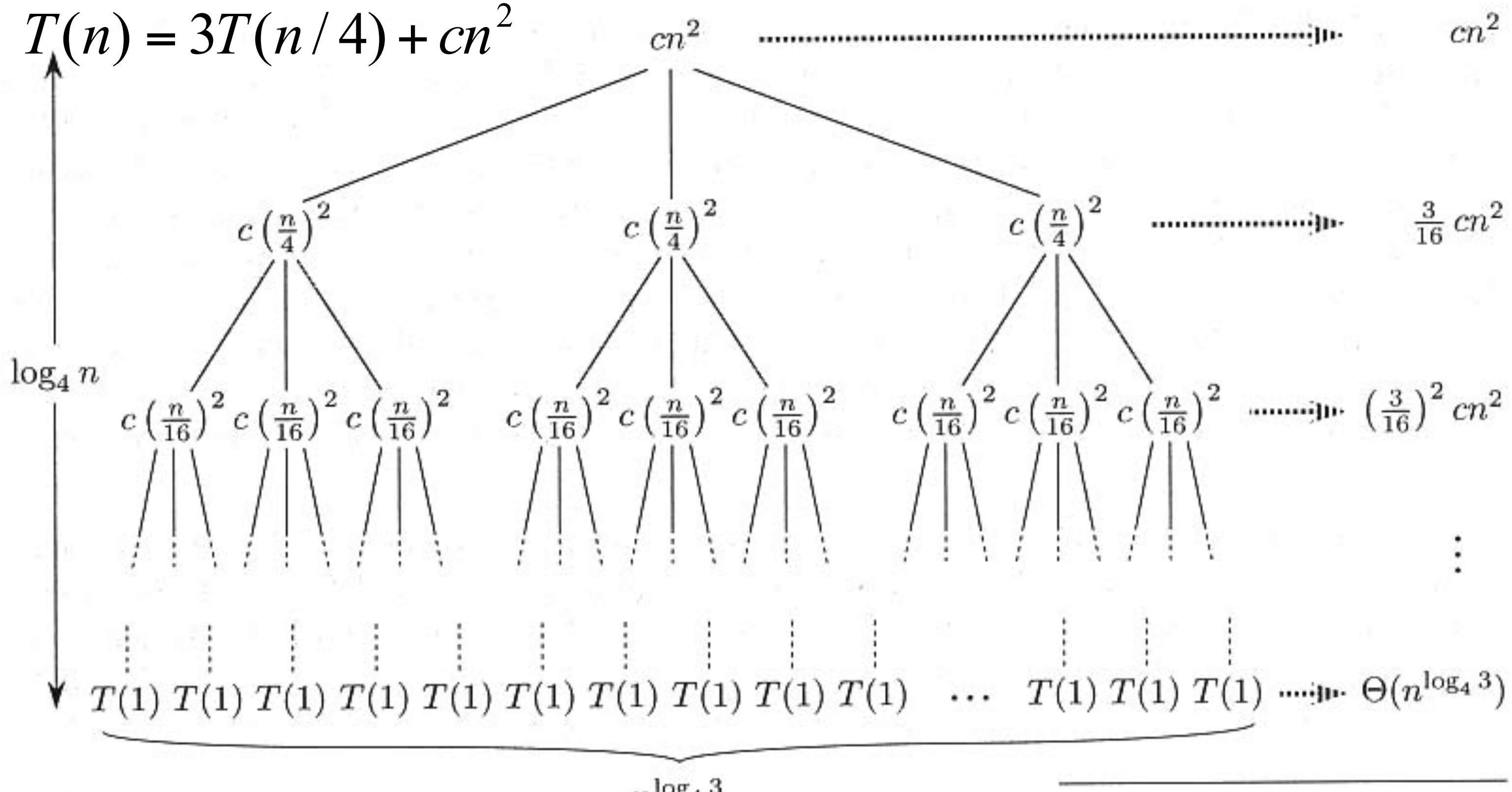
- Setze S(m) = T(2^m)

$$S(m) = 2S(m/2) + m = O(m \log m)$$

$$T(n) = O(\log n \log \log n)$$

Hilfsmittel: Rekursionsbaum

- **Was tun, wenn die Intuition fehlt?**
  - Aufbau des Rekursionsbaums
  - Abschätzung der Höhe, der Knoten pro Ebene, der Kosten pro Knoten
- **Bsp:** $T(n) = 3T(n/4) + cn^2$



Hinweis: $3^{\log_4 n} = 3^{\frac{\log_3 n}{\log_3 4}} = \left(3^{\log_3 n}\right)^{\frac{1}{\log_3 4}} = n^{\frac{1}{\log_3 4}} = n^{\frac{1}{\left(\frac{\log_4 4}{\log_4 3}\right)}} = n^{\log_4 3}$

Hilfsmittel: Rekursionsbaum

- **Was tun, wenn die Intuition fehlt?**
  - Aufbau des Rekursionsbaums
  - Abschätzung der Höhe, der Knoten pro Ebene, der Kosten pro Knoten
- **Bsp:** $T(n) = 3T(n/4) + cn^2$

$$= cn^2 + \frac{3}{16}cn^2 + \left(\frac{3}{16}\right)^2 cn^2 + \cdots + \left(\frac{3}{16}\right)^{\log_4 n - 1} cn^2 + \Theta(n^{\log_4 3})$$

$$= \sum_{i=0}^{\log_4 n - 1} \left(\frac{3}{16}\right)^i cn^2 + \Theta(n^{\log_4 3})$$

$$\leq \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{3}{16}\right)^i cn^2 + \Theta(n^{\log_4 3})$$

$$= \frac{1}{1-(3/16)} cn^2 + \Theta(n^{\log_4 3})$$

$$= O(n^2)$$

Unendl. Geom. / Exp. Reihe:

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \quad \text{für } x \in \mathrm{IR}, |x| < 1$$

Das Master-Theorem

- **Auflösung von Rekurrenzen der Form**

$$T(n) = \begin{cases} c & : n = 1 \\ aT(n/b) + f(n) & : n > 1 \end{cases}$$

mit a ≥ 1 und b > 1, a und b konstant

- **Algorithmische Bedeutung:**
  - Ein Problem wird in a Teilprobleme zerlegt
  - Jedes Teilproblem hat die Größe n/b (genauer ⌈n/b⌉)
  - Zum Aufteilen des Problems und zum Zusammenfügen benötigt man f(n) Zeit.

Fall 1.	$f(n) = O(n^{\log_b a - \varepsilon}), \varepsilon > 0$	:	$T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$
Fall 2.	$f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$	:	$T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log_2 n)$
Fall 3.	$f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon}), \varepsilon > 0$ und $af(n/b) \le cf(n), c < 1$	:	$T(n) = \Theta(f(n))$

Das Master-Theorem

$$T(n)=\begin{cases} c & : n=1 \\ aT(n/b)+f(n) & : n>1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{lcl} f(n)=O(n^{\log_b a-\varepsilon}),\varepsilon>0 & : & T(n)=\Theta(n^{\log_b a}) \\ f(n)=\Theta(n^{\log_b a}) & : & T(n)=\Theta(n^{\log_b a}\log_2 n) \\ f(n)=\Omega(n^{\log_b a+\varepsilon}),\varepsilon>0 \text{ und } af(n/b)\le cf(n), c<1 & : & T(n)=\Theta(f(n)) \end{array}$$

- **Bsp:**

$$T(n)=\begin{cases} c & : n=1 \\ 2T(n/2)+c & : n>1 \end{cases}$$

$$a=2, b=2, f(n)=c$$

- **Welcher Fall des Master Theorems?**

$$\log_b a=1 \text{ für } a=b=2 \text{ und } f(n)=c=O(n^{1-\varepsilon})$$

- **Die Bedingungen für Fall 1 sind erfüllt, also folgt**

$$T(n)=\Theta(n^{\log_b a})=\Theta(n)$$

1.6 Ein Beispiel: Das Maximum-Subarray-Problem

[aus Ottmann, Widmeyer, Algorithmen und Datenstrukturen, Spektrum Verlag, 2002]

- **Problem (maximum-subarray):**
  - geg.: eine Folge X von N ganzen Zahlen
  - ges.: Teilfolge, deren Summe maximal ist (max. Teilsumme)
- **Bsp.:**
  - N=10, X: 3, -4, 5, 2, -5, 6, 9, -9, -2, 8 (d.h. X[1]=3, X[2]=-4, …)
  - Teilsumme von X[1..4] : 3-4+5+2 = 6
  - max. Teilsumme X[3..7] : 5+2-5+6+9 = 17
- **Algorithmus 1: Probiere alle Möglichkeiten**
  - u: untere Grenze der Teilsumme
  - o: obere Grenze der Teilsumme
  - tsum: aktuelle Teilsumme
  - maxtsum: maximale Teilsumme

Das Maximum-Subarray-Problem

- **Algorithmus 1: Probiere**

```
TEILSUMME(X)                                 Zeitbedarf
  maxtsum = 0                                c
  for u = 1 to X.length                      N
    for o = u to X.length                    N-u+1  ≤ N
      tsum = 0                               c
      for i = u to o                         o-u+1  ≤ N
        tsum = tsum+X[i]                     c
      maxtsum = max(maxtsum, tsum)           c
  return maxtsum                             c
```

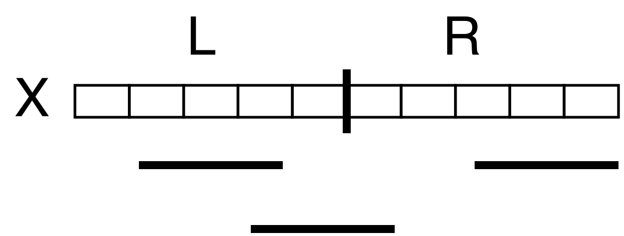
- Laufzeit: Sei N = X.length die Anzahl der Array-Elemente.

  Offensichtlich gilt $T_p(N) = O(N^3)$.

  Es gilt sogar $T_p(N) = \Theta(N^3)$ (ohne Beweis).

Das Maximum-Subarray-Problem

- **Verbesserung 1:** *Divide & Conquer Verfahren* (Teile und Herrsche)
- **Idee:**
  - Teile die Folge in linke und rechte Hälfte L, R an der Stelle $\lfloor N/2 \rfloor$
  - Fall 1: max. Teilsumme ist in L
  - Fall 2: max. Teilsumme ist in R
  - Fall 3: max. Teilsumme enthält $X[\lfloor N/2 \rfloor]$ und $X[\lfloor N/2 \rfloor+1]$



- **Teilproblem: maximale Randteilsumme**

```
RTS_links(X,l,r)
  // finde max. Randteilsumme am linken Rand in X[l,...,r]
  lmax = 0; sum = 0;
  for i = l to r
    sum = sum + X[i]
    lmax = max(lmax, sum)
  return lmax

RTS_rechts(X,l,r) //analog
```

Laufzeit: $T_{RTS}(N) = O(N)$

Das Maximum-Subarray-Problem

- **Algorithmus 2:** Divide&Conquer (Aufruf Teilsumme(X,1,X.length))

```
Teilsumme(X,l,r)                                        Laufzeit T_DC(N)
   if l == r
     return max(X[l],0)                                      c
   else // DIVIDE: Teile die Daten
     m = ⌊(l+r)/2⌋                                           c
        // CONQUER: Löse Teilprobleme
Fall 1: maxtsum_Links = Teilsumme(X,l,m)                 T_DC(N/2)
Fall 2: maxtsum_Rechts = Teilsumme(X,m+1,r)              T_DC(N/2)
Fall 3: maxtsum_LRand = RTS_rechts(X,l,m)                    c N
     maxtsum_RRand = RTS_links(X,m+1,r)                      c N
     maxtsum_Mitte = maxtsum_LRand + maxtsum_RRand           c
        // MERGE: Füge Ergebnis zusammen
     maxtsum = max( maxtsum_Links, maxtsum_Rechts,           c
              maxtsum_Mitte)
   return maxtsum
```

Das Maximum-Subarray-Problem

- **Rekurrenz für Divide&Conquer:**

$$T_{DC}(N) = \begin{cases} c & : N = 1 \\ 2T_{DC}(N/2) + cN & : N > 1 \end{cases}$$

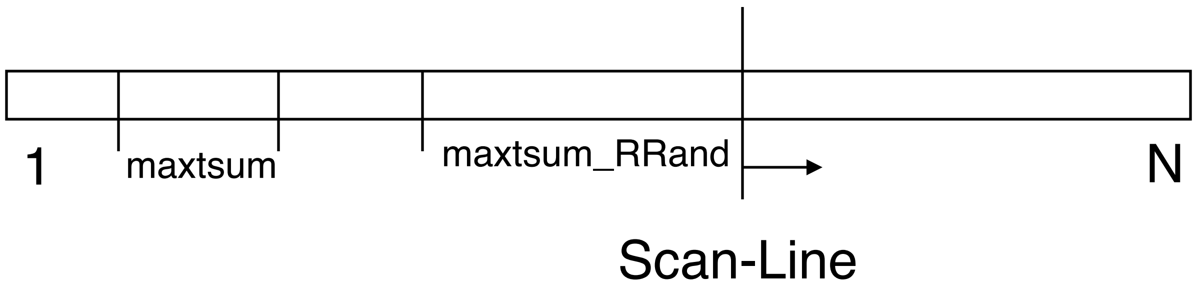
- **Master-Theorem:** a = b = 2; $f(N) = c\,N = O(N)$, Fall 2:

  $T_{DC}(N) = \Theta(N \log N)$

- **Wie viel Zeit benötigt man mindestens zur Lösung des Problems?**
  - Man muss jedes X[i] mindestens einmal betrachten
  - $T_{opt}(N) = \Omega(N)$

Das Maximum-Subarray-Problem

- **Verbesserung 2: *Scan-Line Verfahren***
- **Idee:**
  - durchlaufe X von links nach rechts
  - merke dir das bisherige Maximum maxtsum
  - merke dir die rechte Randteilsumme maxtsum_RRand



  - Scan-Line am linken Rand: maxtsum = maxtsum_RRand= 0
  - Scan-Line geht von i nach i+1:
    - maxtsum_RRand: addiere X[i+1]; setze auf 0 falls negativ
    - maxtsum: Maximum von maxtsum oder maxtsum_RRand
  - Scan-Line ist rechts angekommen: maxtsum ist das Ergebnis

Das Maximum-Subarray-Problem

- **Algorithmus 3:** Scan-Line-Verfahren

```
TEILSUMME(X)                                        Laufzeit TSL(N)
  maxtsum = 0                                                c
  maxtsum_RRand = 0                                          c
  for i=1 to X.length                                        N
    maxtsum_RRand = max(maxtsum_RRand + X[i],0)              c
    maxtsum = max(maxtsum, maxtsum_RRand)                    c
  return maxtsum
```

$$T_{SL}(N) = c\,N = \Theta(N)$$

- Das Scan-Line Verfahren löst das Maximum-Subarray-Problem in optimaler asymptotischer Laufzeit.

Instant Feedback

- **Bitte gern die Vorlesung heute bewerten:**
- **https://feedback.informatik.uni-hamburg.de/AD/wise2019-2020**