Mathe Hausaufgaben zum 10. und 11. November 2016

Matz Radloff(6946325)

10. November 2016

1

Für $n \in \mathbb{N}$ soll gelten:

$$A(n) : 1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + ... + n \cdot 2^n = (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$$

(a)

Formulierung der Gleichung $A(n)$ mit Hilfe des Summenzeichens:

$$\sum_{i=1}^{n} i \cdot 2^i$$

(b)

Prüfung, ob $A(n)$ für $n = 1, 2, 3$ richtig ist:

$$\begin{aligned}
&A(1) : 1 \cdot 2^1 = (1-1) \cdot 2^{1+1} + 2 \Rightarrow 2 = 2 && \checkmark \\
&A(2) : 1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 = (2-1) \cdot 2^{2+1} + 2 \Rightarrow 10 = 10 && \checkmark \\
&A(3) : 1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 = (3-1) \cdot 2^{3+1} + 2 \Rightarrow 34 = 34 && \checkmark
\end{aligned}$$

(c)

Beweis durch vollständige Induktion:

Induktionsanfang: Dass $A(1)$ gilt, wurde in (b) gezeigt.

Induktionsschritt: Es soll bewiesen werden, dass $A(n+1)$ unter Annahme, dass A(n) stimmt, gilt.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} i \cdot 2^i &= (n+1-1) \cdot 2^{n+1+1} + 2 \\
\sum_{i=1}^{n} i \cdot 2^i + (n+1) \cdot 2^{n+1} &= n \cdot 2^{n+2} + 2 \\
(n-1) \cdot 2^{n+1} + 2 + (n+1) \cdot 2^{n+1} &= n \cdot 2^{n+2} + 2 \\
2n \cdot 2^{n+1} + 2 &= n \cdot 2^{n+2} + 2 \\
n \cdot 2^{n+2} + 2 &= n \cdot 2^{n+2} + 2 \qquad \checkmark
\end{aligned}$$

2

Für $n \in \mathbb{N}$ soll folgende Aussage gelten:

$$B(n) : \sum_{i=1}^{n} (2i-1) = n^2$$

(a)

Prüfung, ob $B(n)$ für $n = 1, 2, 3$ gilt:

$$\begin{aligned}
&B(1) : (2 \cdot 1 - 1) = 1^2 \Rightarrow 1 = 1 && \checkmark \\
&B(2) : (2 \cdot 1 - 1) + (2 \cdot 2 - 1) = 2^2 \Rightarrow 4 = 4 && \checkmark \\
&B(3) : (2 \cdot 1 - 1) + (2 \cdot 2 - 1) + (2 \cdot 3 - 1) = 3^2 \Rightarrow 9 = 9 && \checkmark
\end{aligned}$$

(b)

Formulierung ohne das Summenzeichen:

$$1 + 3 + 5 + ... + (2n-1) = n^2$$

Die Summe der ersten n ungeraden Zahlen lässt sich auch durch n^2 berechnen.

(c)

Beweis durch vollständige Induktion:

Induktionsanfang: Dass $B(1)$ gilt, wurde in (a) gezeigt.

Induktionsschritt: Es soll bewiesen werden, dass $B(n+1)$ unter Annahme, dass B(n) stimmt, gilt.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1}(2i-1) &= (n+1)^2 \\ \sum_{i=1}^{n}(2i-1) + (2\cdot(n+1)-1) &= (n+1)^2 \\ n^2+2n+1 &= (n+1)^2 \\ (n+1)^2 &= (n+1)^2 \qquad \checkmark \end{aligned}$$

3

Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ soll gelten:

$$A(n) : 7^n - 1 = 6k; k \in \mathbb{N}_0$$

Beweis durch vollständige Induktion:

Induktionsanfang: A(1)

$$\begin{aligned} 7^1 - 1 &= 6k \\ k &= 1 \qquad \checkmark \end{aligned}$$

Induktionsschritt: A(n+1)

$$\begin{aligned} 7^{n+1} - 1 &= 6p; p \in \mathbb{N}_0 \\ 7^n \cdot 7 - 1 &= 6p \\ 7^n \cdot 6 + 7^n - 1 &= 6p \\ 7^n \cdot 6 + 6k &= 6p \qquad \checkmark \end{aligned}$$

Da alle Elemente der letzten Gleichung durch 6 teilbar ist, stimmt die Aussage.

4

Es ist herauszufinden, für welche natürlichen Zahlen die Ungleichung $A(n)$: $2^n < n!$ gilt.

Vermutung:

$$
\begin{aligned}
A(1) &: 2 < 1 \lightning \\
A(2) &: 4 < 2 \lightning \\
A(3) &: 8 < 6 \lightning \\
A(4) &: 16 < 24 && \checkmark
\end{aligned}
$$

Vermutung: $A(n)$ gilt für alle $n > 3$.

Beweis durch vollständige Induktion: Für den Induktionsanfang wurde gezeigt, dass $A(4)$ wahr ist.

Induktionsschritt: A(n+1)

$$
\begin{aligned}
2^{n+1} &< (n+1)! \\
2^n \cdot 2 &< n! \cdot n + 1 \\
\text{nach I.A.:} 2^n \cdot 2 &< n! \cdot 2 \\
\Rightarrow n! \cdot 2 &< n! \cdot n + 1 \\
\Rightarrow 2^n \cdot 2 &< n! \cdot n + 1 && \checkmark
\end{aligned}
$$

5

Damit $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf der Menge $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ sein kann, muss sie reflexiv, symmetrisch und transitiv sein.

Reflexivität: $A \rightarrow A$ ist eine bijektive Funktion. ✓

Symmetrie: Jede bijektive Funktion besitzt eine Umkehrfunktion, die auch bijektiv ist. Wenn $A \rightarrow B$ bijektiv ist, gibt es also auch eine bijektive Funktion $B \rightarrow A$.

Transitivität: Um die Bedingungen einer bijektiven Funktion zu erfüllen müssen Definitions- und Bildmenge gleichgroß sein. Da z.B. die Funktionen $A \rightarrow B$ und $B \rightarrow C$ beide B enthalten, müssen sowohl A als auch C genauso groß sein wie B. Folglich sind auch A und C gleichgroß und es gibt eine Bijektion $A \rightarrow B$.