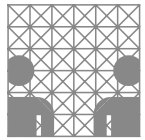


64-040 Modul InfB-RS: Rechnerstrukturen

https://tams.informatik.uni-hamburg.de/lectures/2016ws/vorlesung/rs

– Kapitel 5 –

Andreas Mäder

Universität Hamburg
Fakultät für Mathematik, Informatik und Naturwissenschaften
Fachbereich Informatik

Technische Aspekte Multimodaler Systeme

Wintersemester 2016/2017

Kapitel 5

Ziffern und Zahlen

Konzept der Zahl

- Das Messen ist der Ursprung der Zahl
- als Abstraktion der Anzahl von Objekten
- die man abzählen kann

- Anwendung des Distributivgesetzes

$$
\begin{aligned}
&2 \text{ Äpfel} + 5 \text{ Äpfel} = 7 \text{ Äpfel} \\
&2 \text{ Birnen} + 5 \text{ Birnen} = 7 \text{ Birnen} \\
&\ldots \\
\Rightarrow\ &2 + 5 = 7
\end{aligned}
$$

Eigenschaften eines Zahlensystems

- Zahlenbereich: kleinste und größte darstellbare Zahl?
- Darstellung negativer Werte?
- –"– gebrochener Werte?
- –"– sehr großer Werte?

- Unterstützung von Rechenoperationen?
  Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division, etc.
- Abgeschlossenheit unter diesen Operationen?

- Methode zur dauerhaften Speicherung/Archivierung?
- Sicherheit gegen Manipulation gespeicherter Werte?

Literaturtipp zur Historie der Zahlen

Georges Ifrah

Universal-geschichte der Zahlen

[Ifr10]

Klassifikation verschiedener Zahlensysteme

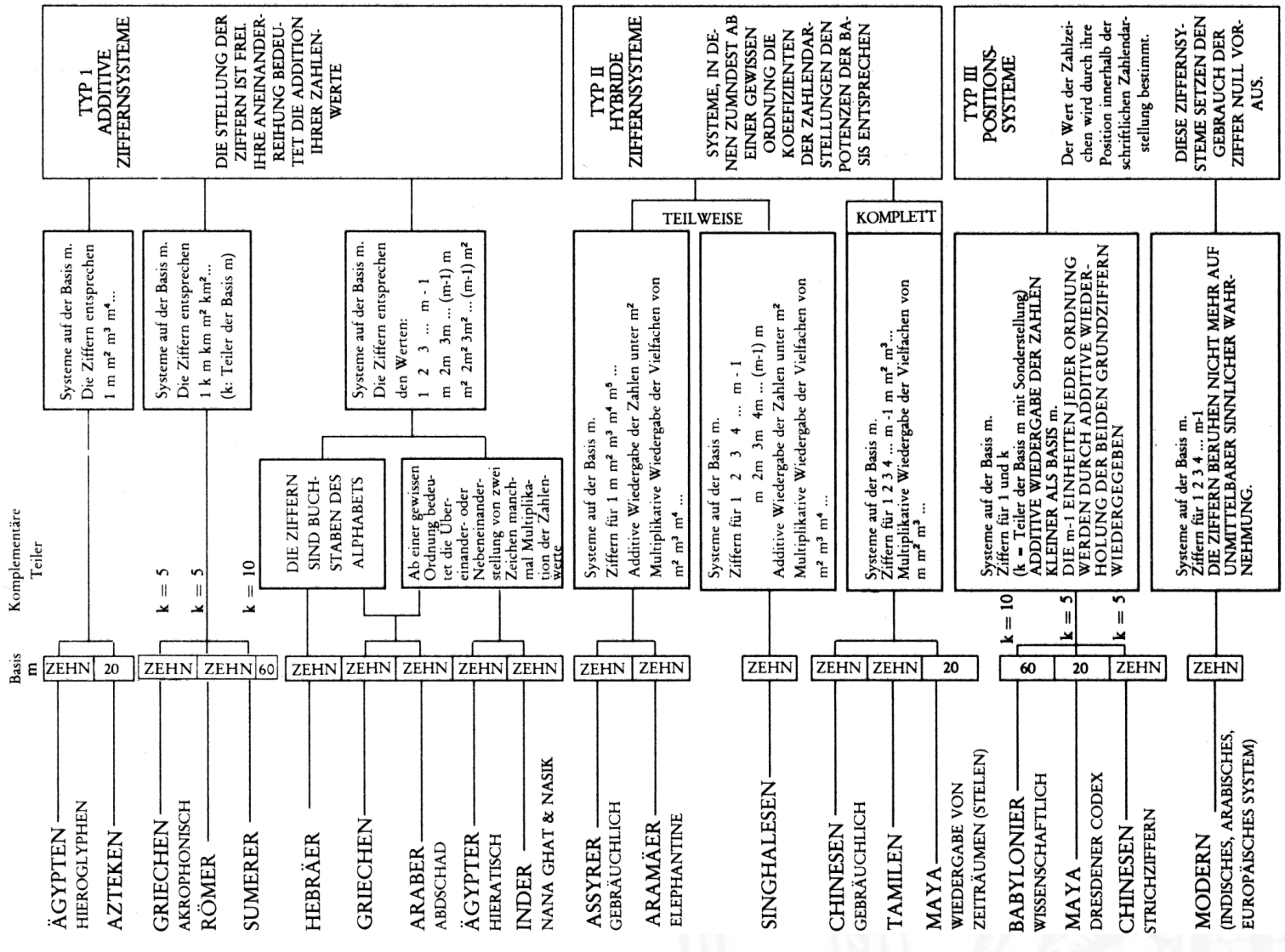


Abb. 334: Hierarchisierte Klassifizierung der Zahlschriften nach Guitel. (1975, 36, Tab. 2; überarbeitet durch d. Verf.)

[Ifr10]

Direkte Wahrnehmung vs. Zählen

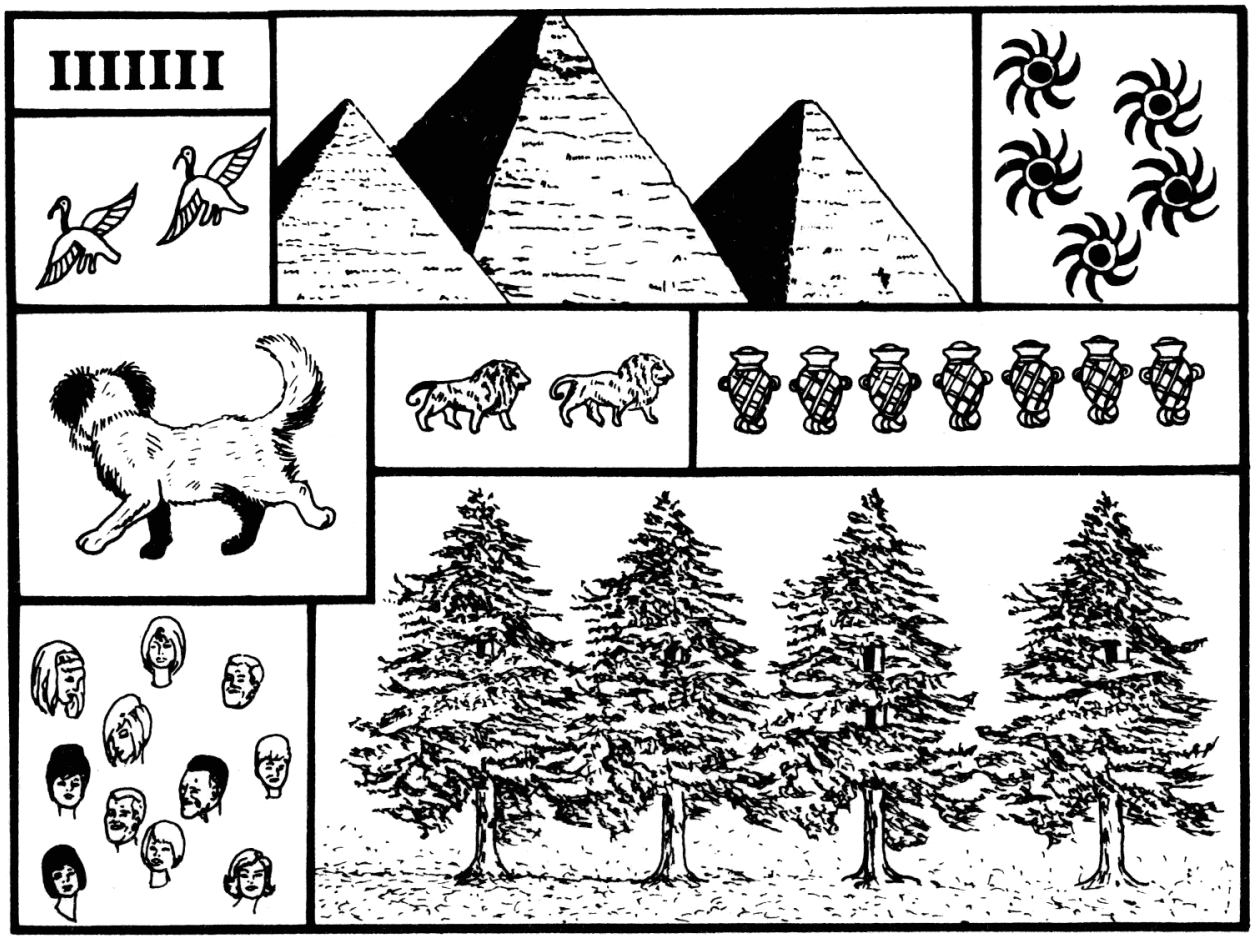


Abb. 1: Auf einen Blick können wir mit unserer direkten Zahlenwahrnehmung feststellen, ob eine Gesamtheit ein, zwei, drei oder vier Elemente umfaßt; Mengen, die größer sind, müssen wir meistens »zählen« – oder mit Hilfe des Vergleichs oder der gedanklichen Aufteilung in Teilmengen erfassen –, da unsere direkte Wahrnehmung nicht mehr ausreicht, exakte Angaben zu machen.

[Ifr10]

Abstraktion: Verschiedene Symbole für eine Zahl

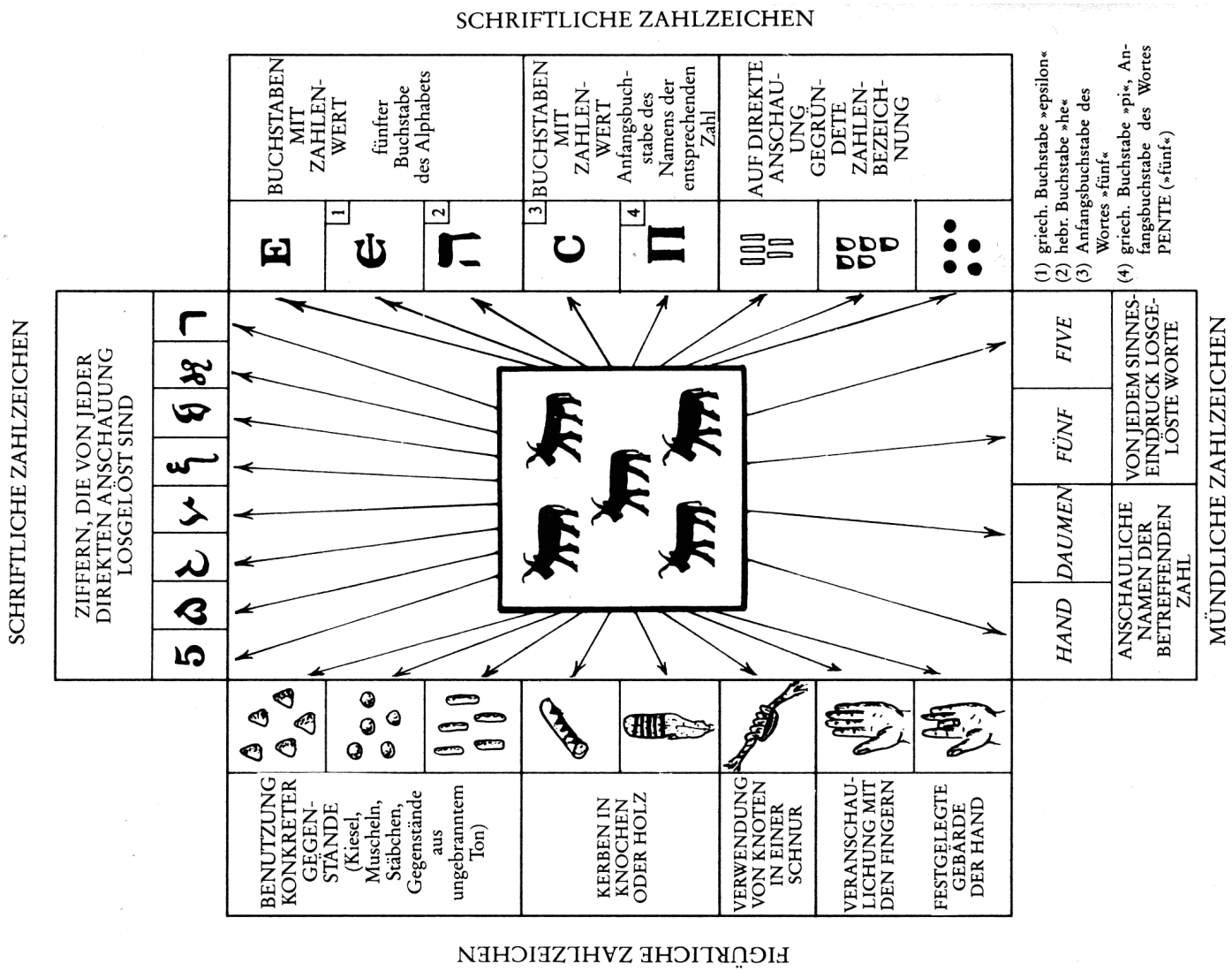


Abb. 11: Verschiedene, einer ganzen Zahl (hier der Zahl 5) zugeordnete Symbole.

[Ifr10]

Zählen mit den Fingern („digits“)

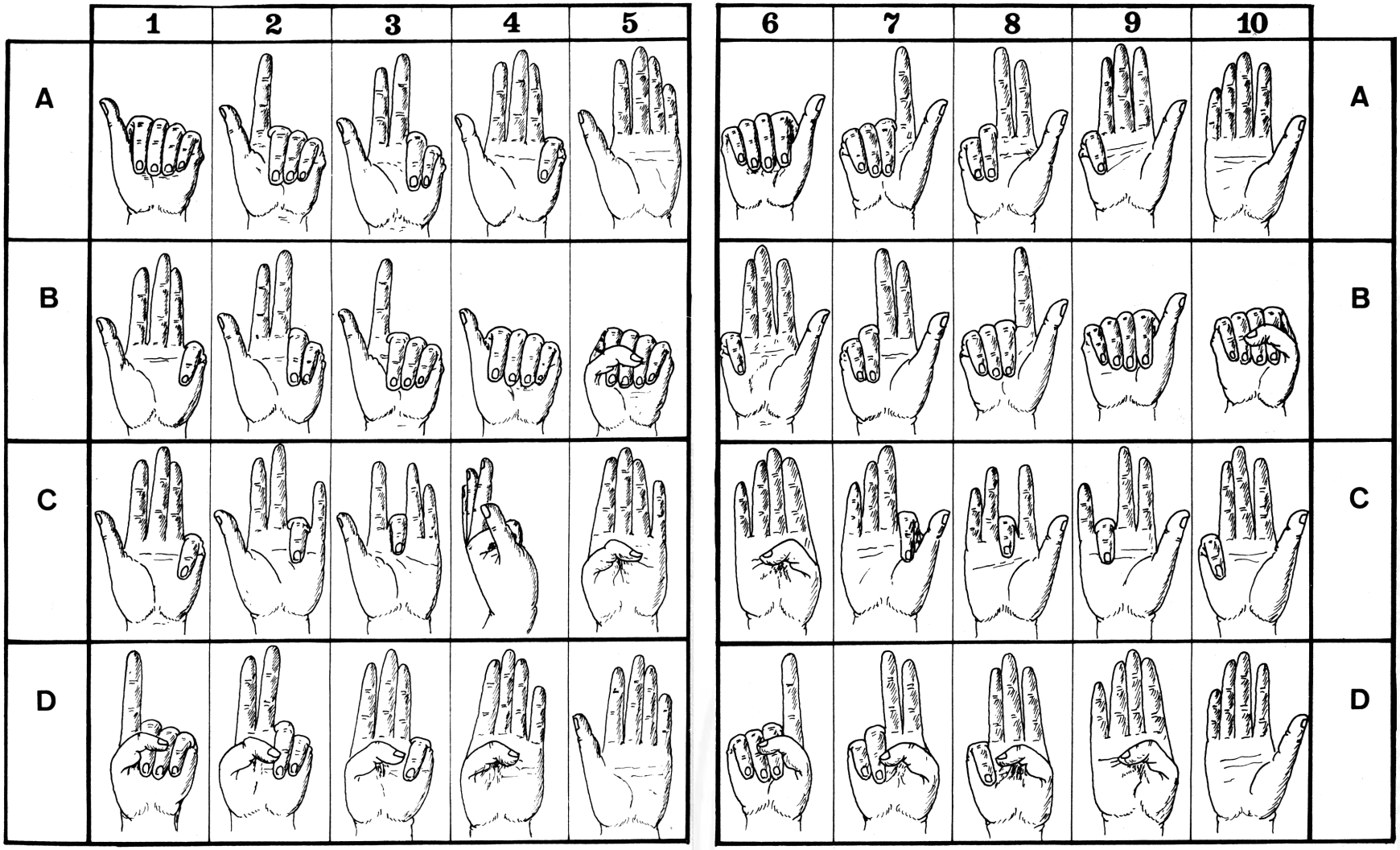


Abb. 12: Verschiedene Möglichkeiten des Zählens mit den Fingern.

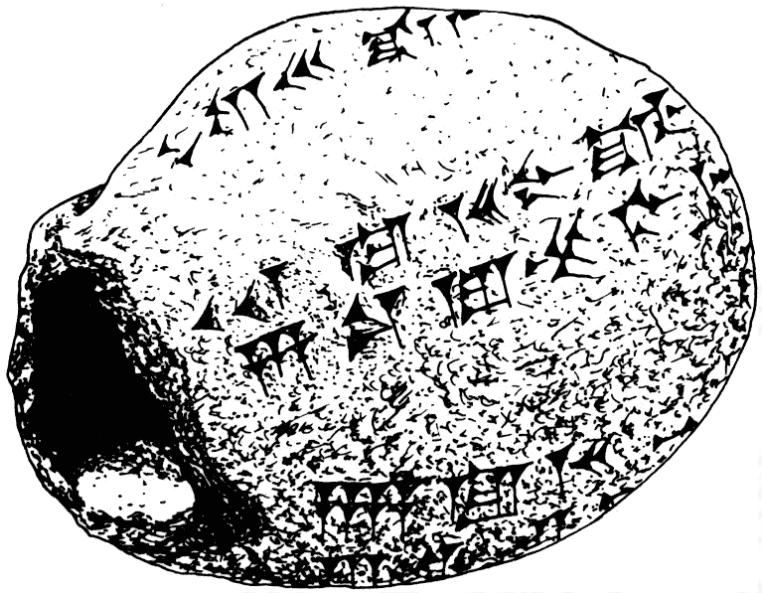
[Ifr10]

Speicherung: Tonbörse: 15. Jh. v. Chr.

Gegenstände, Hammel und Ziegen betreffend

21 Mutterschafe
6 weibliche Lämmer
8 erwachsene Hammel
4 männliche Lämmer
6 Mutterziegen
1 Bock
(2) Jungziegen

Abb. 3: Eiförmige Tonbörse (46 mm × 62 mm × 50 mm), entdeckt in den Ruinen des Palastes von Nuzi (mesopotamische Stadt; ca. 15. Jh. v. Chr.).
(Harvard Semitic Museum, Cambridge. Katalognummer SMN 1854)



48 Tonkügelchen im Inneren: tamper-proof [Ifr10]

Speicherung: Kerbhölzer

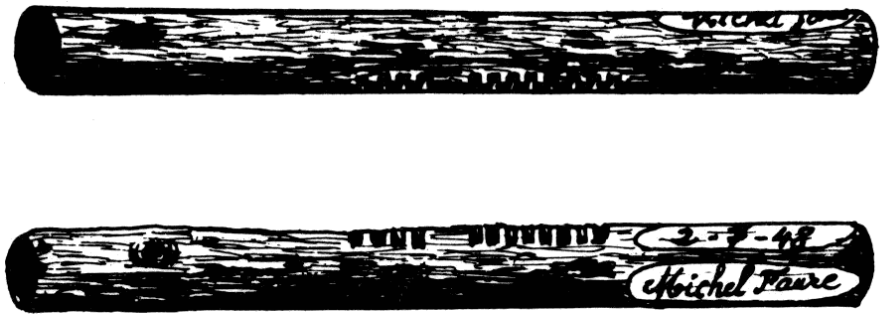


Abb. 58: Kerbhölzer aus Bäckereien in Frankreich, wie sie in kleinen Ortschaften auf dem Lande üblich waren.

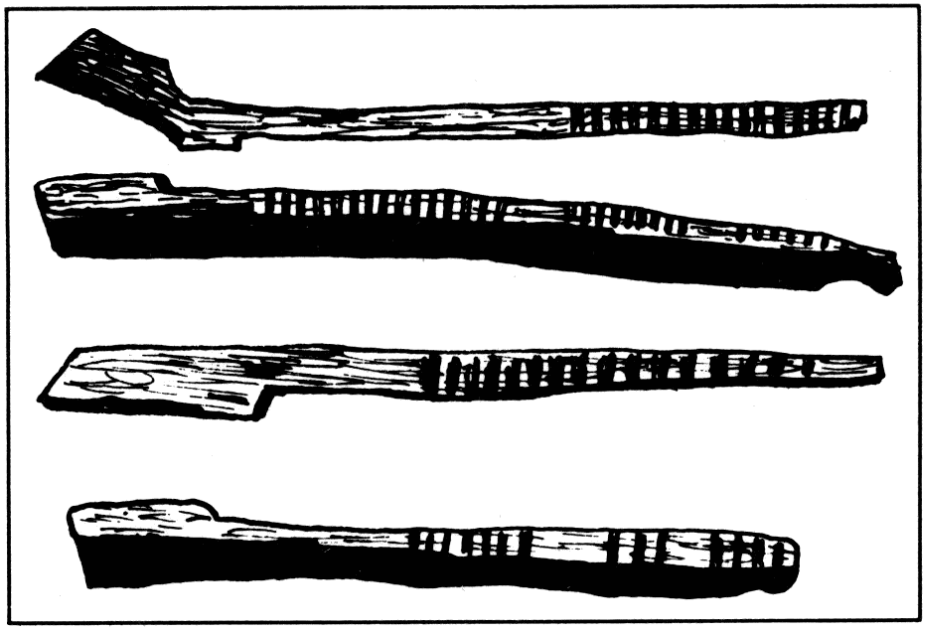


Abb. 59: Englische Kerbhölzer aus dem 13. Jahrhundert. (Sammlung Society of Antiquaries, London; Zeichnung nach Menninger 1957/58, II, 42)

[lfr10]

Speicherung: Knotenschnüre

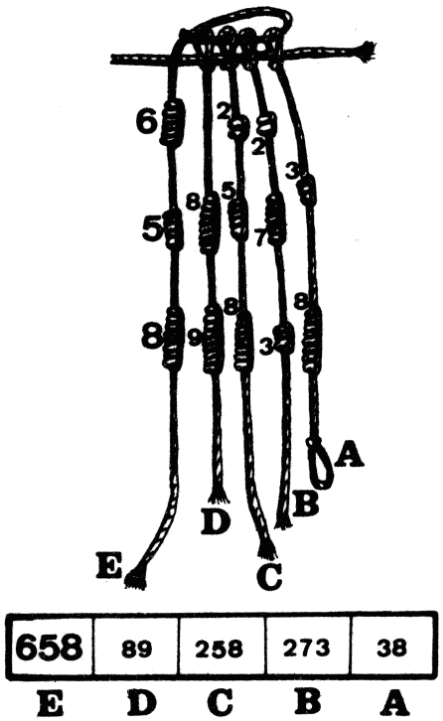


Abb. 66: Interpretation eines quipu: Die Zahl 658 auf der Schnur E ist gleich der Summe der Zahlen auf den Schnüren A, B, C und D. Dieses Bündel ist das erste an einem peruanischen quipu. (American Museum of Natural History, New York, B 8713; vgl. Leland Locke 1923)

[Ifr10]

Rechnen: Römische Ziffern

- Ziffern: I=1, V=5, X=10, L=50, C=100, D=500, M=1000
- Werte eins bis zehn: I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX, X
- Position der Ziffern ist signifikant:
  - nach Größe der Ziffernsymbole sortiert, größere stehen links
  - andernfalls Abziehen der kleineren von der größeren Ziffer
  - IV=4, VI=6, XL=40, LXX=70, CM=900

- heute noch in Gebrauch: Jahreszahlen, Seitennummern, usw.
  Beispiele: MDCCCXIII=1813, MMIX=2009

– keine Symbole zur Darstellung großer Zahlen

– Rechenoperationen so gut wie unmöglich

Römischer Abakus

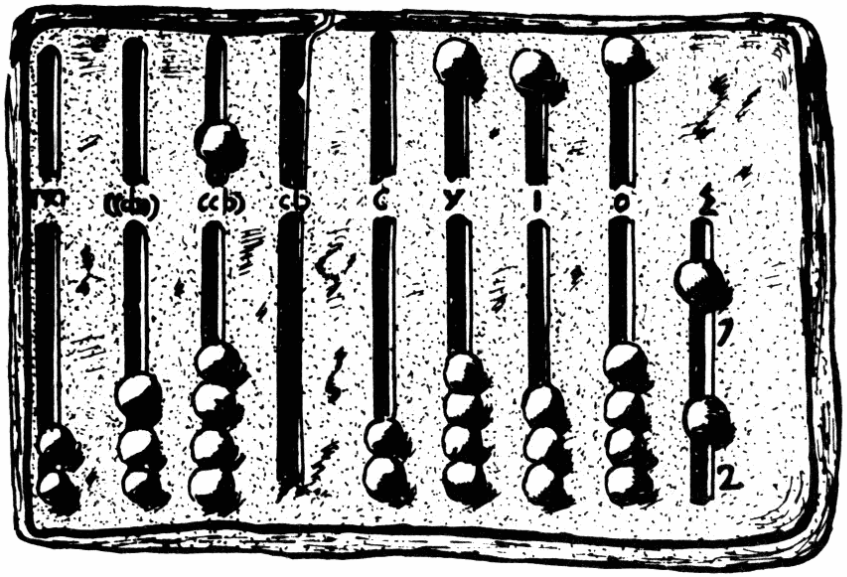


Abb. 87: Römischer Handabakus. (Cabinet des Médailles, Bibliothèque Nationale Paris, br. 1925)

[Ifr10]

Römischer Abakus (cont.)

Dagegen können im Rahmen einer entwickelten Stellenwertschrift nicht nur alle beliebigen Zahlen jeder Größenordnung mit einer beschränkten Anzahl von Ziffern dargestellt werden, sondern mit ihr kann auch sehr einfach gerechnet werden. Und eben deshalb ist unser Ziffernsystem eine der Grundlagen der geistigen Fähigkeiten der modernen Menschen.

Als Beweis dafür führen wir mit römischen Ziffern eine einfache Addition durch:

CCLXVI	266
MDCCCVII	1 807
DCL	650
MLXXX	1 080
MMMDCCCIII	3 803

Ohne Übertragung auf unsere Zahlschrift wäre das sehr schwierig, wenn nicht unmöglich – und dabei handelt es sich doch bloß um eine Addition! Wie verhielte sich das erst bei einer Multiplikation oder gar bei einer Division? Mit diesen Ziffernsystemen kann nicht gerechnet werden, da ihre Grundziffern einen festgelegten Zahlenwert haben. Diese Ziffern sind keine Recheneinheiten, sondern Abkürzungen, mit denen Ergebnisse von Rechnungen festgehalten werden können, die mit Gegenständen auf der Rechentafel, dem Abakus oder dem Kugelbrett bereits gelöst worden waren.

Stellenwertsystem („Radixdarstellung“)

- Wahl einer geeigneten Zahlenbasis b („Radix“)
  - 10: Dezimalsystem
  - 16: Hexadezimalsystem (Sedezimalsystem)
  - 2: Dualsystem
- Menge der entsprechenden Ziffern $\{0, 1, \ldots, b-1\}$
- inklusive einer besonderen Ziffer für den Wert Null
- Auswahl der benötigten Anzahl n von Stellen

$$|z| = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \cdot b^i$$

b Basis a_i Koeffizient an Stelle i

- universell verwendbar, für beliebig große Zahlen

Babylon: Einführung der Null, 3 Jh. v. Chr.

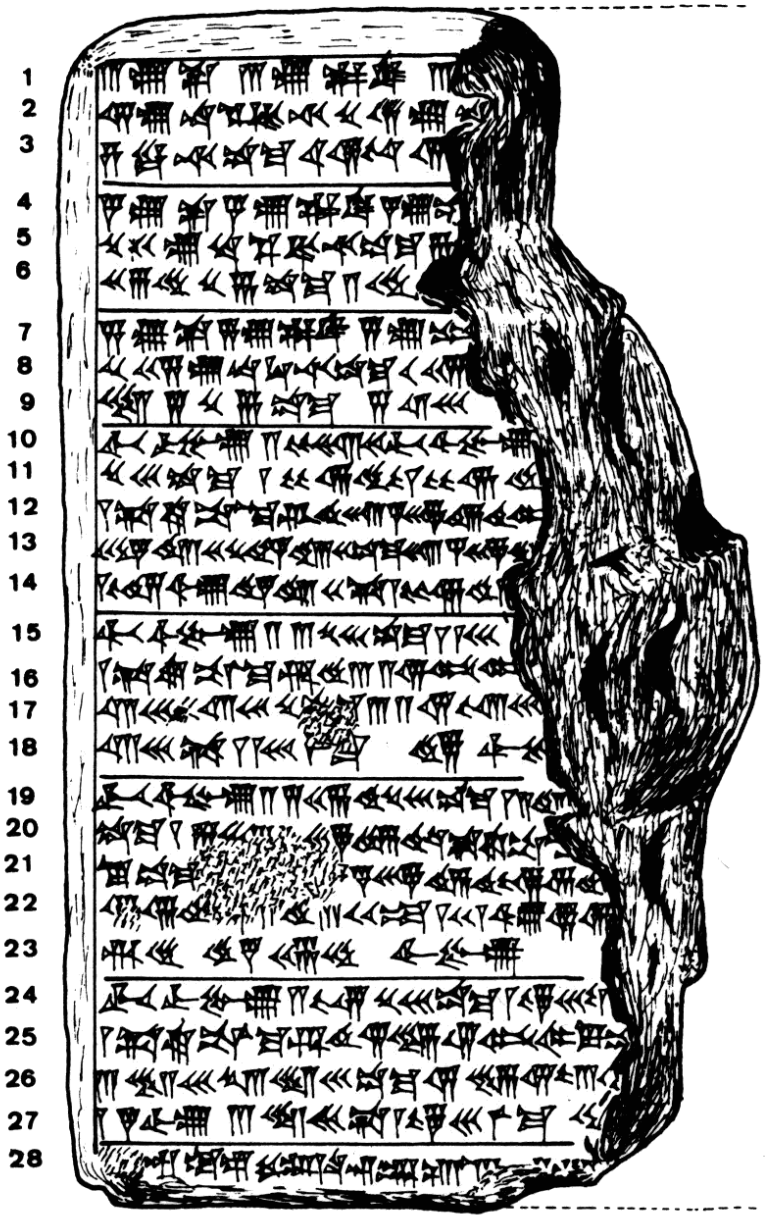
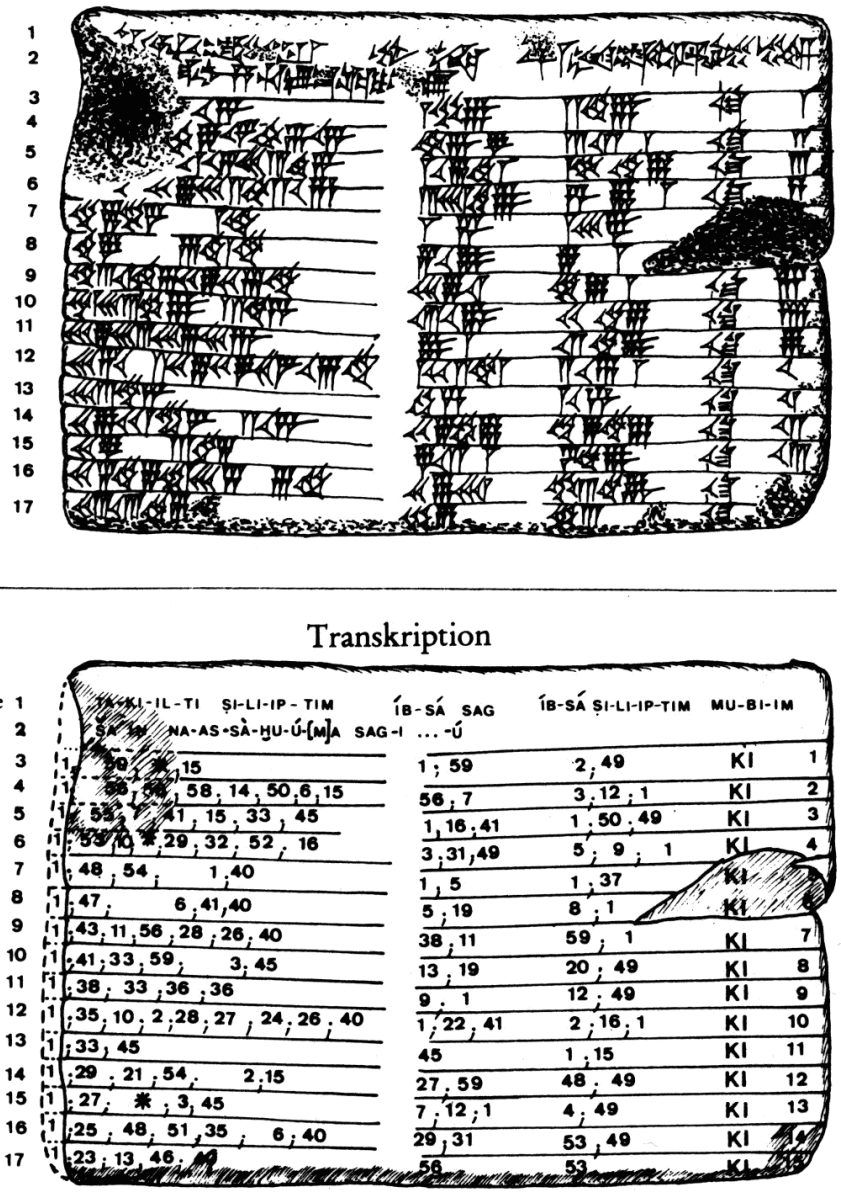


Abb. 289: Mathematische Tafel aus Uruk; sie wurde bei Schwarzgrabungen gefunden und stammt aus dem 2. oder 3. Jh. v. Chr. Es handelt sich um eines der ältesten bekannten Zeugnisse für die Verwendung der babylonischen Null.
(Musée du Louvre, Taf. AO 6484, Rückseite; Thureau-Dangin 1922, Nr. 33, Taf. 62; 1938, 76-81. Unveröffentl. Kopie d. Verf.)

[Ifr10]

Babylon: Beispiel mit Satz des Pythagoras



Transkription

Zeile				
	KI-IL-TI ŞI-LI-IP-TIM	ÍB-SÁ SAG	ÍB-SÁ ŞI-LI-IP-TIM	MU-BI-IM
2	ŠA-AM NA-AS-SÀ-ḪU-Ú-[M]A SAG-I ...-Ú			
3	1 ; 59	2 , 49	KI	1
4	56 ; 7	3 , 12 , 1	KI	2
5	1 , 16 , 41	1 , 50 , 49	KI	3
6	3 , 31 , 49	5 ; 9 ; 1	KI	4
7	1 ; 5	1 , 37	KI	
8	5 , 19	8 ; 1	KI	
9	38 , 11	59 ; 1	KI	7
10	13 , 19	20 ; 49	KI	8
11	9 ; 1	12 , 49	KI	9
12	1 , 22 , 41	2 , 16 , 1	KI	10
13	45	1 , 15	KI	11
14	27 , 59	48 ; 49	KI	12
15	7 , 12 , 1	4 ; 49	KI	13
16	29 , 31	53 , 49	KI	
17	56	53	KI	

*Leerstelle, die das Fehlen von Einheiten einer bestimmten Größenordnung bezeichnet.

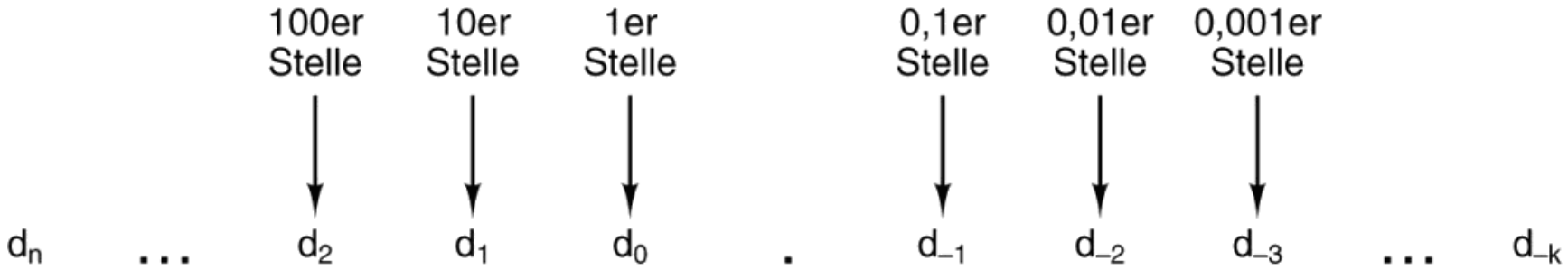
Abb. 288: Rechentafel aus der Zeit um 1800–1700 v. Chr.; ihr Inhalt belegt, daß die babylonischen Mathematiker zur Zeit der 1. Dynastie bereits den »Satz des Pythagoras« kannten. (Columbia University of New York, Tafel Plimpton 322; unveröffentl. Kopie d. Verf.; vgl. Neugebauer/ Sachs 1945, 38–41, Taf. 25)*

[Ifr10]

Babylon: Sexagesimalsystem

- Einführung vor ungefähr 4000 Jahren, erstes Stellenwertsystem
- Basis 60
- zwei Symbole: | $= 1$ und < $= 10$
- Einritzen gerader und gewinkelter Striche auf Tontafeln
- Null bekannt, aber nicht mitgeschrieben
  Leerzeichen zwischen zwei Stellen
- Beispiele
  - | | | | | 5
  - <<| | | 23
  - | <<< $90 = 1 \cdot 60 + 3 \cdot 10$
  - | <<| $3\,621 = 1 \cdot 3\,600 + 0 \cdot 60 + 2 \cdot 10 + 1$
- für Zeitangaben und Winkeleinteilung heute noch in Gebrauch

Dezimalsystem



$$\text{Zahl} = \sum_{i=-k}^{n} d_i \times 10^i$$

[TA14]

- das im Alltag gebräuchliche Zahlensystem
- Einer, Zehner, Hunderter, Tausender, usw.
- Zehntel, Hundertstel, Tausendstel, usw.

Dualsystem

- Stellenwertsystem zur Basis 2
- braucht für gegebene Zahl ca. dreimal mehr Stellen als Basis 10
- für Menschen daher unbequem
  besser Oktal- oder Hexadezimalschreibweise, s.u.

- technisch besonders leicht zu implementieren weil nur zwei Zustände unterschieden werden müssen

  z.B. zwei Spannungen, Ströme, Beleuchtungsstärken
  siehe *Kapitel 4: Information – Binärzeichen*

+ robust gegen Rauschen und Störungen
+ einfache und effiziente Realisierung von Arithmetik

Dualsystem: Potenztabelle

Stelle	Wert im Dualsystem	Wert im Dezimalsystem
2^0	1	1
2^1	10	2
2^2	100	4
2^3	1000	8
2^4	1 0000	16
2^5	10 0000	32
2^6	100 0000	64
2^7	1000 0000	128
2^8	1 0000 0000	256
2^9	10 0000 0000	512
2^{10}	100 0000 0000	1024
2^{11}	1000 0000 0000	2048
2^{12}	1 0000 0000 0000	4096
...	...	...

Dualsystem: Beispiele

- Basis 2
- Zeichensatz ist $\{0, 1\}$
- Beispiele:

$$
\begin{aligned}
0_2 &= 0_{10} \\
1_2 &= 1_{10} \\
11_2 &= 3_{10} && 2^1 + 2^0 \\
11\,0100_2 &= 52_{10} && 2^5 + 2^4 + 2^2 \\
1111\,1110_2 &= 254_{10} && 2^8 + 2^7 + \cdots + 2^2 + 2^1
\end{aligned}
$$

Addition im Dualsystem

- funktioniert genau wie im Dezimalsystem
- Addition mehrstelliger Zahlen erfolgt stellenweise
- Additionsmatrix:

+	0	1
0	0	1
1	1	10

- Beispiel

	1011	0011	= 179
+	0011	1001	= 57
Ü	11	11	11
	1110	1100	= 236

Multiplikation im Dualsystem

- funktioniert genau wie im Dezimalsystem
- $p = a \cdot b$ mit Multiplikator a und Multiplikand b
- Multiplikation von a mit je einer Stelle des Multiplikanten b
- Addition der Teilterme

- Multiplikationsmatrix ist sehr einfach:

$\times$	0	1
0	0	0
1	0	1

Multiplikation im Dualsystem (cont.)

- Beispiel

$$
\begin{array}{rrl}
10110011 & \times\ 1101 & = 179 \cdot 13 \quad = 2327 \\
\hline
10110011 & 1 & \quad = 1001\,0001\,0111 \\
10110011 & 1 & \quad = 0x917 \\
00000000 & 0 & \\
10110011 & 1 & \\
\hline
\text{Ü}\ 11101111 & & \\
\hline\hline
100100010111 & &
\end{array}
$$

Oktalsystem

- Basis 8
- Zeichensatz ist $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
- C-Schreibweise mit führender Null als Präfix:
  - $0001 = \quad 1_{10}$
    $0013 = \quad 11_{10} = \quad 1 \cdot 8 + 3$
    $0375 = 253_{10} = 3 \cdot 64 + 7 \cdot 8 + 5$
    usw.

  $\Rightarrow$ Hinweis: also führende Null in C für Dezimalzahlen unmöglich
- für Menschen leichter lesbar als Dualzahlen
- Umwandlung aus/vom Dualsystem durch Zusammenfassen bzw. Ausschreiben von je drei Bits:

  $00 = 000, 01 = 001, 02 = 010, 03 = 011,$
  $04 = 100, 05 = 101, 06 = 110, 07 = 111$

Hexadezimalsystem

- Basis 16
- Zeichensatz ist $\{0, 1, 2, \ldots, 9, A, B, C, D, E, F\}$
- C-Schreibweise mit Präfix $0x$ – Klein- oder Großbuchstaben
  - $0x00000001 = 1_{10}$
    $0x000000fe = 254_{10} = 15 \cdot 16 + 14$
    $0x0000ffff = 65\,535_{10} = 15 \cdot 4\,096 + 15 \cdot 256 + 15 \cdot 16 + 15$
    $0xcafebabe = \ldots$ erstes Wort in Java Class-Dateien
    usw.
- viel leichter lesbar als entsprechende Dualzahl
- Umwandlung aus/vom Dualsystem durch Zusammenfassen bzw. Ausschreiben von je vier Bits:

  $0x0 = 0000, 0x1 = 0001, 0x2 = 0010, \ldots, 0x9 = 1001,$
  $0xA = 1010, 0xB = 1011, 0xC = 1100,$
  $0xD = 1101, 0xE = 1110, 0xF = 1111$

Beispiel: Darstellungen der Zahl 2017

Binär

$$\begin{array}{cccccccccccc} 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 1 \\ 1\times2^{10} & + & 1\times2^{9} & + & 1\times2^{8} & + & 1\times2^{7} & + & 1\times2^{6} & + & 1\times2^{5} & + & 0\times2^{4} & + & 0\times2^{3} & + & 0\times2^{2} & + & 0\times2^{1} & + & 1\times2^{0} \\ 1\,024 & + & 512 & + & 256 & + & 128 & + & 64 & + & 32 & + & 0 & + & 0 & + & 0 & + & 0 & + & 1 \end{array}$$

Oktal

$$\begin{array}{cccccccc} 3 & & 7 & & 4 & & 1 \\ 3\times8^{3} & + & 7\times8^{2} & + & 4\times8^{1} & + & 1\times8^{0} \\ 1\,536 & + & 448 & + & 32 & + & 1 \end{array}$$

Dezimal

$$\begin{array}{cccccccc} 2 & & 0 & & 1 & & 7 \\ 2\times10^{3} & + & 0\times10^{2} & + & 1\times10^{1} & + & 7\times10^{0} \\ 2\,000 & + & 0 & + & 10 & + & 7 \end{array}$$

Hexadezimal

$$\begin{array}{cccccccc} 7 & & E & & 1 \\ 7\times16^{2} & + & E\times16^{1} & + & 1\times16^{0} \\ 1\,792 & + & 224 & + & 1 \end{array}$$

Umrechnung Dual-/Oktal-/Hexadezimalsystem

- Beispiele

Hexadezimal		1		9		4		8	.	B		6			
Binär	0	0	0	1	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	.	1	0	1	1	0	1	1	0	0
Oktal				1		4		5		1		0	.	5		5		4								

Hexadezimal		7		B		A		3	.	B		C		4	
Binär	0	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	0	0	0	1	1	.	1	0	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0
Oktal				7		5		6		4		3	.	5		7		0									

- Gruppieren von jeweils 3 bzw. 4 Bits
- bei Festkomma vom Dezimalpunkt aus nach außen

Umrechnung zwischen verschiedenen Basen

- Menschen rechnen im Dezimalsystem
- Winkel- und Zeitangaben auch im Sexagesimalsystem Basis: 60
- Digitalrechner nutzen (meistens) Dualsystem

- Algorithmen zur Umrechnung notwendig
- Exemplarisch Vorstellung von drei Varianten:

1. vorberechnete Potenztabellen
2. Divisionsrestverfahren
3. Horner-Schema

Umwandlung über Potenztabellen

Vorgehensweise für Integerzahlen

1.a Subtraktion des größten Vielfachen einer Potenz des Zielsystems von der umzuwandelnden Zahl
– gemäß der vorberechneten Potenztabelle

1.b Notation dieses größten Vielfachen (im Zielsystem)

2.a Subtraktion wiederum des größten Vielfachen vom verbliebenen Rest

2.b Addition dieses Vielfachen (im Zielsystem)

- Wiederholen der Schritte 2.x, bis Rest $= 0$

Potenztabellen Dual/Dezimal

Stelle	Wert	Stelle	Wert im Dualsystem
2^0	1	10^0	1
2^1	2	10^1	1010
2^2	4	10^2	110 0100
2^3	8	10^3	11 1110 1000
2^4	16	10^4	10 0111 0001 0000
2^5	32	10^5	0x1 86 A0
2^6	64	10^6	0xF 42 40
2^7	128	10^7	0x98 96 80
2^8	256	10^8	0x5 F5 E1 00
2^9	512	10^9	0x3B 9A CA 00
2^{10}	1 024	10^{10}	0x2 54 0B E4 00
2^{11}	2 048	10^{11}	0x17 48 76 E8 00
2^{12}	4 096	10^{12}	0xE8 D4 A5 10 00
...			

Potenztabellen: Beispiel

- Umwandlung Dezimal- in Dualzahl

$Z = (163)_{10}$

163			
$-\ 128$	2^7		$1000\,0000$
35			
$-\ 32$	2^5	$+$	$10\,0000$
3			
$-\ 2$	2^1	$+$	10
1			
$-\ 1$	2^0	$+$	1
0			$1010\,0011$

$Z = (163)_{10} \leftrightarrow (1010\,0011)_2$

Potenztabellen: Beispiel (cont.)

- Umwandlung Dual- in Dezimalzahl

$Z = (1010\,0011)_2$

1010 0011		
− 110 0100	1×10^2	100
0011 1111		
− 11 1100	6×10^1	+ 60
11		
− 11	3×10^0	+ 3
0		163

$Z = (1010\,0011)_2 \leftrightarrow (163)_{10}$

Divisionsrestverfahren

- Division der umzuwandelnden Zahl im Ausgangssystem durch die Basis des Zielsystems
- Erneute Division des ganzzahligen Ergebnisses (ohne Rest) durch die Basis des Zielsystems, bis kein ganzzahliger Divisionsrest mehr bleibt
- Beispiel

$$
\begin{array}{rrll}
163 : 2 = & 81 & \text{Rest } 1 & 2^0 \\
81 : 2 = & 40 & \text{Rest } 1 & \vdots \\
40 : 2 = & 20 & \text{Rest } 0 & \\
20 : 2 = & 10 & \text{Rest } 0 & \\
10 : 2 = & 5 & \text{Rest } 0 & \\
5 : 2 = & 2 & \text{Rest } 1 & \uparrow \text{ Leserichtung} \\
2 : 2 = & 1 & \text{Rest } 0 & \vdots \\
1 : 2 = & 0 & \text{Rest } 1 & 2^7
\end{array}
$$

$$(163)_{10} \leftrightarrow (1010\,0011)_2$$

Divisionsrestverfahren: Beispiel

- Umwandlung Dual- in Dezimalzahl

$Z = (1010\,0011)_2$

$$
\begin{aligned}
(1010\,0011)_2 : (1010)_2 &= 1\,0000 \quad \text{Rest} \quad (11)_2 \mathrel{\widehat{=}} 3 \quad 10^0 \\
(1\,0000)_2 : (1010)_2 &= 1 \quad \text{Rest} \quad (110)_2 \mathrel{\widehat{=}} 6 \quad 10^1 \\
(1)_2 : (1010)_2 &= 0 \quad \text{Rest} \quad (1)_2 \mathrel{\widehat{=}} 1 \quad 10^2
\end{aligned}
$$

$Z = (1010\,0011)_2 \leftrightarrow (163)_{10}$

Hinweis: Division in Basis b folgt

Divisionsrestverfahren: Beispiel (cont.)

- Umwandlung Dezimal- in Dualzahl

$Z = (1492)_{10}$

$1492 : 2 =$	746	Rest 0	2^0
$746 : 2 =$	373	Rest 0	$\vdots$
$373 : 2 =$	186	Rest 1	
$186 : 2 =$	93	Rest 0	
$93 : 2 =$	46	Rest 1	
$46 : 2 =$	23	Rest 0	
$23 : 2 =$	11	Rest 1	
$11 : 2 =$	5	Rest 1	
$5 : 2 =$	2	Rest 1	$\uparrow$ Leserichtung
$2 : 2 =$	1	Rest 0	$\vdots$
$1 : 2 =$	0	Rest 1	2^{10}

$Z = (1492)_{10} \leftrightarrow (101\,1101\,0100)_2$

Divisionsrestverfahren: Algorithmus

Algorithmus

rechentechnisch

darzustellende Zahl x: 123

Basis q: 2

```
a := x
while  a > 0
   y_n := a mod q
   a  := a div q
end
```

n = 1

a = 123

(a > 0) = 1

a mod 2 = 1

a div 2 = 61

Takt

0000000000000001

Resultat

K. von der Heide [Hei05] Interaktives Skript T1 stellen2stellen

Horner-Schema

- Darstellung einer Potenzsumme durch ineinander verschachtelte Faktoren

$$|z| = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \cdot b^i = (\ldots((a_{n-1} \cdot b + a_{n-2}) \cdot b + a_{n-3}) \cdot b + \cdots + a_1) \cdot b + a_0$$

Vorgehensweise:

- Darstellung der umzuwandelnden Zahl im Horner-Schema
- Durchführung der auftretenden Multiplikationen und Additionen im Zielsystem

Horner-Schema: Beispiel

- Umwandlung Dezimal- in Dualzahl
  1. Darstellung als Potenzsumme
     $Z = (163)_{10} = (1 \times 10 + 6) \times 10 + 3$
  2. Faktoren und Summanden im Zielzahlensystem
     $(10)_{10} \leftrightarrow (1010)_2$
     $(6)_{10} \leftrightarrow (110)_2$
     $(3)_{10} \leftrightarrow (11)_2$
     $(1)_{10} \leftrightarrow (1)_2$
  3. Arithmetische Operationen

$$\begin{array}{rl} 1 \times 1010 = & 1010 \\ + & 110 \\ \hline 1\,0000 & \end{array} \qquad \times 1010 = \begin{array}{r} 1010\,0000 \\ + \quad 11 \\ \hline 1010\,0011 \end{array}$$

Horner-Schema: Beispiel (cont.)

- Umwandlung Dual- in Dezimalzahl
  1. Darstellung als Potenzsumme
     $Z = (1010\,0011)_2 =$
     $((((((1\times 10_2+0)\times 10_2+1)\times 10_2+0)\times 10_2+0)\times 10_2+0)\times 10_2+1)\times 10_2+1$
  2. Faktoren und Summanden im Zielzahlensystem
     $(10)_2 \leftrightarrow (2)_{10}$
     $(1)_2 \leftrightarrow (1)_{10}$
     $(0)_2 \leftrightarrow (0)_{10}$

Horner-Schema: Beispiel (cont.)

3. Arithmetische Operationen

$$
\begin{array}{r}
1 \times 2 = 2 \\
+\,0 \\
\hline
2 \times 2 = 4 \\
+\,1 \\
\hline
5 \times 2 = 10 \\
+\;\;0 \\
\hline
10 \times 2 = 20 \\
+\;\;0 \\
\hline
20 \times 2 = 40 \\
+\;\;0 \\
\hline
40 \times 2 = 80 \\
+\;\;1 \\
\hline
81 \times 2 = 162 \\
+\;\;\;1 \\
\hline
163
\end{array}
$$

Horner-Schema: Beispiel (cont.)

- Umwandlung Dual- in Dezimalzahl
  $Z = (1011\,1011\,0111)_2 = (2\,999)_{10}$

Horner-Schema: Beispiel (cont.)

- Umwandlung Dual- in Dezimalzahl

$Z = (1011\,1011\,0111)_2 = (2\,999)_{10}$

$1\,0\,1\,1\,1\,0\,1\,1\,0\,1\,1\,1$

$1 + 2 \times 0 = 1$

$0 + 2 \times 1 = 2$

$1 + 2 \times 2 = 5$

$1 + 2 \times 5 = 11$

$1 + 2 \times 11 = 23$

$0 + 2 \times 23 = 46$

$1 + 2 \times 46 = 93$

$1 + 2 \times 93 = 187$

$0 + 2 \times 187 = 374$

$1 + 2 \times 374 = 749$

$1 + 2 \times 749 = 1\,499$

$1 + 2 \times 1\,499 = 2\,999$

Horner-Schema: Beispiel (cont.)

- Umwandlung Dual- in Dezimalzahl

$Z = (1011\,1011\,0111)_2 = (2\,999)_{10}$

$1\,0\,1\,1\,1\,0\,1\,1\,0\,1\,1\,1$

$1 + 2 \times 0 = 1$

$0 + 2 \times 1 = 2$

$1 + 2 \times 2 = 5$

$1 + 2 \times 5 = 11$

$1 + 2 \times 11 = 23$

$0 + 2 \times 23 = 46$

$1 + 2 \times 46 = 93$

$1 + 2 \times 93 = 187$

$0 + 2 \times 187 = 374$

$1 + 2 \times 374 = 749$

$1 + 2 \times 749 = 1\,499$

$1 + 2 \times 1\,499 = 2\,999$

Horner-Schema: Beispiel (cont.)

- Umwandlung Dual- in Dezimalzahl

$Z = (1011\,1011\,0111)_2 = (2\,999)_{10}$

$1\,0\,1\,1\,1\,0\,1\,1\,0\,1\,1\,1$

$1 + 2 \times 0 = 1$

$0 + 2 \times 1 = 2$

$1 + 2 \times 2 = 5$

$1 + 2 \times 5 = 11$

$1 + 2 \times 11 = 23$

$0 + 2 \times 23 = 46$

$1 + 2 \times 46 = 93$

$1 + 2 \times 93 = 187$

$0 + 2 \times 187 = 374$

$1 + 2 \times 374 = 749$

$1 + 2 \times 749 = 1\,499$

$1 + 2 \times 1\,499 = 2\,999$

Horner-Schema: Beispiel (cont.)

- Umwandlung Dual- in Dezimalzahl

$Z = (1011\,1011\,0111)_2 = (2\,999)_{10}$

$1\,0\,1\,1\,1\,0\,1\,1\,0\,1\,1\,1$

$1 + 2 \times 0 = 1$

$0 + 2 \times 1 = 2$

$1 + 2 \times 2 = 5$

$1 + 2 \times 5 = 11$

$1 + 2 \times 11 = 23$

$0 + 2 \times 23 = 46$

$1 + 2 \times 46 = 93$

$1 + 2 \times 93 = 187$

$0 + 2 \times 187 = 374$

$1 + 2 \times 374 = 749$

$1 + 2 \times 749 = 1\,499$

$1 + 2 \times 1\,499 = 2\,999$

Horner-Schema: Beispiel (cont.)

- Umwandlung Dual- in Dezimalzahl

$Z = (1011\,1011\,0111)_2 = (2\,999)_{10}$

$1\,0\,1\,1\,1\,0\,1\,1\,0\,1\,1\,1$

$1 + 2 \times 0 = 1$

$0 + 2 \times 1 = 2$

$1 + 2 \times 2 = 5$

$1 + 2 \times 5 = 11$

$1 + 2 \times 11 = 23$

$0 + 2 \times 23 = 46$

$1 + 2 \times 46 = 93$

$1 + 2 \times 93 = 187$

$0 + 2 \times 187 = 374$

$1 + 2 \times 374 = 749$

$1 + 2 \times 749 = 1\,499$

$1 + 2 \times 1\,499 = 2\,999$

Horner-Schema: Beispiel (cont.)

- Umwandlung Dual- in Dezimalzahl

$Z = (1011\,1011\,0111)_2 = (2\,999)_{10}$

$1\,0\,1\,1\,1\,0\,1\,1\,0\,1\,1\,1$

$1 + 2 \times 0 = 1$

$0 + 2 \times 1 = 2$

$1 + 2 \times 2 = 5$

$1 + 2 \times 5 = 11$

$1 + 2 \times 11 = 23$

$0 + 2 \times 23 = 46$

$1 + 2 \times 46 = 93$

$1 + 2 \times 93 = 187$

$0 + 2 \times 187 = 374$

$1 + 2 \times 374 = 749$

$1 + 2 \times 749 = 1\,499$

$1 + 2 \times 1\,499 = 2\,999$

Horner-Schema: Beispiel (cont.)

- Umwandlung Dual- in Dezimalzahl

$Z = (1011\,1011\,0111)_2 = (2\,999)_{10}$

$1\,0\,1\,1\,1\,0\,1\,1\,0\,1\,1\,1$

$1 + 2 \times 0 = 1$

$0 + 2 \times 1 = 2$

$1 + 2 \times 2 = 5$

$1 + 2 \times 5 = 11$

$1 + 2 \times 11 = 23$

$0 + 2 \times 23 = 46$

$1 + 2 \times 46 = 93$

$1 + 2 \times 93 = 187$

$0 + 2 \times 187 = 374$

$1 + 2 \times 374 = 749$

$1 + 2 \times 749 = 1\,499$

$1 + 2 \times 1\,499 = 2\,999$

Horner-Schema: Beispiel (cont.)

- Umwandlung Dual- in Dezimalzahl

$Z = (1011\,1011\,0111)_2 = (2\,999)_{10}$

$1\,0\,1\,1\,1\,0\,1\,1\,0\,1\,1\,1$

$1 + 2 \times 0 = 1$

$0 + 2 \times 1 = 2$

$1 + 2 \times 2 = 5$

$1 + 2 \times 5 = 11$

$1 + 2 \times 11 = 23$

$0 + 2 \times 23 = 46$

$1 + 2 \times 46 = 93$

$1 + 2 \times 93 = 187$

$0 + 2 \times 187 = 374$

$1 + 2 \times 374 = 749$

$1 + 2 \times 749 = 1\,499$

$1 + 2 \times 1\,499 = 2\,999$

Horner-Schema: Beispiel (cont.)

- Umwandlung Dual- in Dezimalzahl

$Z = (1011\,1011\,0111)_2 = (2\,999)_{10}$

$1\,0\,1\,1\,1\,0\,1\,1\,0\,1\,1\,1$

$1 + 2 \times 0 = 1$

$0 + 2 \times 1 = 2$

$1 + 2 \times 2 = 5$

$1 + 2 \times 5 = 11$

$1 + 2 \times 11 = 23$

$0 + 2 \times 23 = 46$

$1 + 2 \times 46 = 93$

$1 + 2 \times 93 = 187$

$0 + 2 \times 187 = 374$

$1 + 2 \times 374 = 749$

$1 + 2 \times 749 = 1\,499$

$1 + 2 \times 1\,499 = 2\,999$

Horner-Schema: Beispiel (cont.)

- Umwandlung Dual- in Dezimalzahl

$Z = (1011\,1011\,0111)_2 = (2\,999)_{10}$

$1\,0\,1\,1\,1\,0\,1\,1\,0\,1\,1\,1$

$1 + 2 \times 0 = 1$

$0 + 2 \times 1 = 2$

$1 + 2 \times 2 = 5$

$1 + 2 \times 5 = 11$

$1 + 2 \times 11 = 23$

$0 + 2 \times 23 = 46$

$1 + 2 \times 46 = 93$

$1 + 2 \times 93 = 187$

$0 + 2 \times 187 = 374$

$1 + 2 \times 374 = 749$

$1 + 2 \times 749 = 1\,499$

$1 + 2 \times 1\,499 = 2\,999$

Horner-Schema: Beispiel (cont.)

- Umwandlung Dual- in Dezimalzahl

$Z = (1011\,1011\,0111)_2 = (2\,999)_{10}$

$1\,0\,1\,1\,1\,0\,1\,1\,0\,1\,1\,1$

$1 + 2 \times 0 = 1$

$0 + 2 \times 1 = 2$

$1 + 2 \times 2 = 5$

$1 + 2 \times 5 = 11$

$1 + 2 \times 11 = 23$

$0 + 2 \times 23 = 46$

$1 + 2 \times 46 = 93$

$1 + 2 \times 93 = 187$

$0 + 2 \times 187 = 374$

$1 + 2 \times 374 = 749$

$1 + 2 \times 749 = 1\,499$

$1 + 2 \times 1\,499 = 2\,999$

Horner-Schema: Beispiel (cont.)

- Umwandlung Dual- in Dezimalzahl

$Z = (1011\,1011\,0111)_2 = (2\,999)_{10}$

$1\,0\,1\,1\,1\,0\,1\,1\,0\,1\,1\,1$

$1 + 2 \times 0 = 1$

$0 + 2 \times 1 = 2$

$1 + 2 \times 2 = 5$

$1 + 2 \times 5 = 11$

$1 + 2 \times 11 = 23$

$0 + 2 \times 23 = 46$

$1 + 2 \times 46 = 93$

$1 + 2 \times 93 = 187$

$0 + 2 \times 187 = 374$

$1 + 2 \times 374 = 749$

$1 + 2 \times 749 = 1\,499$

$1 + 2 \times 1\,499 = 2\,999$

Zahlenbereich bei fester Wortlänge

Anzahl der Bits	Zahlenbereich jeweils von 0 bis $(2^n - 1)$		
4-bit	2^4	=	16
8-bit	2^8	=	256
10-bit	2^{10}	=	1 024
12-bit	2^{12}	=	4 096
16-bit	2^{16}	=	65 536
20-bit	2^{20}	=	1 048 576
24-bit	2^{24}	=	16 777 216
32-bit	2^{32}	=	4 294 967 296
48-bit	2^{48}	=	281 474 976 710 656
64-bit	2^{64}	=	18 446 744 073 709 551 616

Präfixe

Für die vereinfachte Schreibweise von großen bzw. sehr kleinen Werten ist die Präfixangabe als Abkürzung von Zehnerpotenzen üblich. Beispiele:

- Lichtgeschwindigkeit: $300\,000\,\mathrm{Km/s} = 30\,\mathrm{cm/ns}$
- Ruheenergie des Elektrons: $0{,}51\,\mathrm{MeV}$
- Strukturbreite heutiger Mikrochips: $14\,\mathrm{nm}$
- usw.

Es gibt entsprechende Präfixe auch für das Dualsystem.
Dazu werden Vielfache von $2^{10} = 1024 \approx 1000$ verwendet.

Präfixe für Einheiten im Dezimalsystem

Faktor	Name	Symbol	Faktor	Name	Symbol
10^{24}	yotta	Y	10^{-24}	yocto	y
10^{21}	zetta	Z	10^{-21}	zepto	z
10^{18}	exa	E	10^{-18}	atto	a
10^{15}	peta	P	10^{-15}	femto	f
10^{12}	tera	T	10^{-12}	pico	p
10^{9}	giga	G	10^{-9}	nano	n
10^{6}	mega	M	10^{-6}	micro	μ
10^{3}	kilo	K	10^{-3}	milli	m
10^{2}	hecto	h	10^{-2}	centi	c
10^{1}	deka	da	10^{-1}	dezi	d

Präfixe für Einheiten im Dualsystem

Faktor	Name	Symbol	Langname
2^{60}	exbi	Ei	exabinary
2^{50}	pebi	Pi	petabinary
2^{40}	tebi	Ti	terabinary
2^{30}	gibi	Gi	gigabinary
2^{20}	mebi	Mi	megabinary
2^{10}	kibi	Ki	kilobinary

Beispiele:

1 kibibit	=	1 024 bit
1 kilobit	=	1 000 bit
1 megibit	=	1 048 576 bit
1 gibibit	=	1 073 741 824 bit

IEC-60027-2, Letter symbols to be used in electrical technology

Präfixe für Einheiten im Dualsystem

In der Praxis werden die offiziellen Präfixe nicht immer sauber verwendet. Meistens ergibt sich die Bedeutung aber aus dem Kontext. Bei Speicherbausteinen sind Zweierpotenzen üblich, bei Festplatten dagegen die dezimale Angabe.

- DRAM-Modul mit 1 GB Kapazität: gemeint sind 2^{30} Bytes
- Flash-Speicherkarte 4 GB Kapazität: gemeint sind 2^{32} Bytes

- Festplatte mit Angabe 1 TB Kapazität: typisch 10^{12} Bytes
- die tatsächliche angezeigte verfügbare Kapazität ist oft geringer, weil das jeweilige Dateisystem Platz für seine eigenen Verwaltungsinformationen belegt.

Festkommadarstellung

Darstellung von **gebrochenen Zahlen** als Erweiterung des Stellenwertsystems durch Erweiterung des Laufindex zu negativen Werten:

$$|z| = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \cdot b^i + \sum_{i=-\infty}^{i=-1} a_i \cdot b^i$$

$$= \sum_{i=-\infty}^{n-1} a_i \cdot b^i$$

mit $a_i \in N$ und $0 \leq a_i < b$.

- Der erste Summand bezeichnet den ganzzahligen Anteil, während der zweite Summand für den gebrochenen Anteil steht.

Nachkommastellen im Dualsystem

- $2^{-1} = 0{,}5$
  $2^{-2} = 0{,}25$
  $2^{-3} = 0{,}125$
  $2^{-4} = 0{,}0625$
  $2^{-5} = 0{,}03125$
  $2^{-6} = 0{,}015625$
  $2^{-7} = 0{,}0078125$
  $2^{-8} = 0{,}00390625$
  ...
- alle Dualbrüche sind im Dezimalsystem exakt darstellbar (d.h. mit endlicher Wortlänge)
- dies gilt umgekehrt nicht

Nachkommastellen im Dualsystem (cont.)

- gebrochene Zahlen können je nach Wahl der Basis evtl. nur als unendliche periodische Brüche dargestellt werden
- insbesondere erfordern viele endliche Dezimalbrüche im Dualsystem unendliche periodische Brüche
- Beispiel: Dezimalbrüche, eine Nachkommastelle

B=10	B=2	B=2	B=10
0,1	$0,0\overline{0011}$	0,001	0,125
0,2	$0,\overline{0011}$	0,010	0,25
0,3	$0,0\overline{1001}$	0,011	0,375
0,4	$0,\overline{0110}$	0,100	0,5
0,5	$0,1$	0,101	0,625
0,6	$0,\overline{1001}$	0,110	0,75
0,7	$0,1\overline{0110}$	0,111	0,875
0,8	$0,\overline{1100}$		
0,9	$0,1\overline{1100}$		

Umrechnung: Dezimalbruch nach Dual

Potenztabelle zur Umrechnung

- Potenztabelle

$2^{-1} = 0{,}5$	$2^{-7} = 0{,}0078125$
$2^{-2} = 0{,}25$	$2^{-8} = 0{,}00390625$
$2^{-3} = 0{,}125$	$2^{-9} = 0{,}001953125$
$2^{-4} = 0{,}0625$	$2^{-10} = 0{,}0009765625$
$2^{-5} = 0{,}03125$	$2^{-11} = 0{,}00048828125$
$2^{-6} = 0{,}015625$	$2^{-12} = 0{,}000244140625$

- Beispiel: Dezimal 0,3

  Berechnung durch Subtraktion der Werte

$$
\begin{aligned}
(0,3)_{10} &= 0 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} + 0 \cdot 2^{-3} + 0 \cdot 2^{-4} + 1 \cdot 2^{-5} + 1 \cdot 2^{-6} + \ldots \\
&= 2^{-2} + 2^{-5} + 2^{-6} + 2^{-9} + \ldots \\
&= (0, 0\overline{1001})_2
\end{aligned}
$$

Umrechnung: Dezimalbruch nach Dual (cont.)

Divisionsrestverfahren

- statt Division: bei Nachkommastellen Multiplikation $\times 2$
  - man nimmt den Dezimalbruch immer mit 2 mal
  - Resultat < 1: eine 0 an den Dualbruch anfügen
    –"– ≥ 1: eine 1 –"–
    und den ganzzahligen Anteil streichen: $-1{,}0$
  - Ende, wenn Ergebnis 1,0 (wird zu 0)
    –"– wenn Rest sich wiederholt $\Rightarrow$ Periode
- Beispiel: Dezimal 0,59375

$$
\begin{array}{lll}
2 \times 0,59375 = 1,1875 & \rightarrow 1 & 2^{-1} \\
2 \times 0,1875 = 0,375 & \rightarrow 0 & \vdots \\
2 \times 0,375 = 0,75 & \rightarrow 0 & \downarrow \text{ Leserichtung} \\
2 \times 0,75 = 1,5 & \rightarrow 1 & \vdots \\
2 \times 0,5 = 1,0 & \rightarrow 1 & 2^{-5}
\end{array}
$$

$$(0,59375)_{10} \leftrightarrow (0,10011)_2$$

Darstellung negativer Zahlen

Drei gängige Varianten zur Darstellung negativer Zahlen

1. Betrag und Vorzeichen
2. Exzess-Codierung (Offset-basiert)
3. **Komplementdarstellung**

- Integerrechnung häufig im Zweierkomplement
- Gleitkommadarstellung mit Betrag und Vorzeichen
- –"– Exponent als Exzess-Codierung

Betrag und Vorzeichen

- Auswahl eines Bits als Vorzeichenbit
- meistens das MSB (engl. *most significant bit*)
- restliche Bits als Dualzahl interpretiert
- Beispiel für 4-bit Wortbreite:

0000	$+0$	1000	-0
0001	$+1$	1001	-1
0010	$+2$	1010	-2
0011	$+3$	1011	-3
0100	$+4$	1100	-4
0101	$+5$	1101	-5
0110	$+6$	1110	-6
0111	$+7$	1111	-7

– doppelte Codierung der Null: $+0$, -0

– Rechenwerke für Addition/Subtraktion aufwändig

Exzess-Codierung (Offset-basiert)

- einfache Um-Interpretation der Binärcodierung

$$z = Z - offset$$

- mit z vorzeichenbehafteter Wert, Z binäre Ganzzahl,
- beliebig gewählter Offset

– Null wird also nicht mehr durch 000...0 dargestellt

\+ Größenvergleich zweier Zahlen bleibt einfach

- Anwendung: Exponenten im IEEE 754 Gleitkommaformat
- und für einige Audioformate

Exzess-Codierung: Beispiele

Bitmuster	Binärcode	Exzess-8	Exzess-6	$(z = Z - \text{offset})$
0000	0	-8	-6	
0001	1	-7	-5	
0010	2	-6	-4	
0011	3	-5	-3	
0100	4	-4	-2	
0101	5	-3	-1	
0110	6	-2	0	
0111	7	-1	1	
1000	8	0	2	
1001	9	1	3	
1010	10	2	4	
1011	11	3	5	
1100	12	4	6	
1101	13	5	7	
1110	14	6	8	
1111	15	7	9	

b-Komplement

Definition: das b-**Komplement** einer Zahl z ist

$$\begin{aligned} K_b(z) &= b^n - z, \quad \text{für} \quad z \neq 0 \\ &= 0, \quad \text{für} \quad z = 0 \end{aligned}$$

- b: die Basis (des Stellenwertsystems)
- n: Anzahl der zu berücksichtigenden Vorkommastellen
- mit anderen Worten: $K_b(z) + z = b^n$

- Stellenwertschreibweise

$$z = -a_{n-1} \cdot b^{n-1} + \sum_{i=-m}^{n-2} a_i \cdot b^i$$

- Dualsystem: 2-Komplement
- Dezimalsystem: 10-Komplement

b-Komplement: Beispiele

$$
\begin{array}{llll}
b = 10 & n = 4 & K_{10}(3\,763)_{10} & = 10^4 - 3\,763 = 6\,237_{10} \\
 & n = 2 & K_{10}(0,3763)_{10} & = 10^2 - 0,3763 = 99,6237_{10} \\
 & n = 0 & K_{10}(0,3763)_{10} & = 10^0 - 0,3763 = 0,6237_{10} \\
 & & & \\
b = 2 & n = 2 & K_2(10,01)_2 & = 2^2 - 10,01_2 = 01,11_2 \\
 & n = 8 & K_2(10,01)_2 & = 2^8 - 10,01_2 = 1111\,1101,11_2
\end{array}
$$

$(b-1)$-Komplement

Definition: das $(b-1)$-**Komplement** einer Zahl z ist

$$\begin{aligned} K_{b-1}(z) &= b^n - b^{-m} - z, && \text{für} \quad z \neq 0 \\ &= 0, && \text{für} \quad z = 0 \end{aligned}$$

- b: die Basis des Stellenwertsystems
- n: Anzahl der zu berücksichtigenden Vorkommastellen
- m: Anzahl der Nachkommastellen

- Dualsystem: 1-Komplement
- Dezimalsystem: 9-Komplement

$(b-1)$-Komplement / b-Komplement: Trick

$$K_{b-1}(z) = b^n - b^{-m} - z, \quad \text{für} \quad z \neq 0$$

- im Fall $m = 0$ gilt offenbar $K_b(z) = K_{b-1}(z) + 1$

$\Rightarrow$ das $(b-1)$-Komplement kann sehr einfach berechnet werden:
es werden einfach die einzelnen Bits/Ziffern invertiert.

- Dualsystem:
  - 1-Komplement: 1100 1001
  - alle Bits invertieren: 0011 0110
- Dezimalsystem:
  - 9-Komplement: 24 453
  - alle Ziffern invertieren: 75 546
  - $0 \leftrightarrow 9$ $1 \leftrightarrow 8$ $2 \leftrightarrow 7$ $3 \leftrightarrow 6$ $4 \leftrightarrow 5$
  - Summe: $99\,999 = 100\,000 - 1$

$\Rightarrow$ das b-Komplement kann sehr einfach berechnet werden:
es werden einfach die einzelnen Bits/Ziffern invertiert
und 1 an der niedrigsten Stelle aufaddiert.

$(b-1)$-Komplement / b-Komplement: Trick (cont.)

- Dualsystem:

2-Komplement	1100 1001
Bits invertieren $+1$	0011 0111
Summe:	1 0000 0000

- Dezimalsystem:

10-Komplement	24 453
Ziffern invertieren $+1$	75 547
$0\leftrightarrow9$ $1\leftrightarrow8$ $2\leftrightarrow7$ $3\leftrightarrow6$ $4\leftrightarrow5$	
Summe:	100 000

Subtraktion mit b-Komplement

- bei Rechnung mit fester Stellenzahl n gilt:

$$K_b(z) + z = b^n \quad = 0$$

  weil b^n gerade nicht mehr in n Stellen hineinpasst
- also gilt für die Subtraktion auch:

$$x - y = x + K_b(y)$$

$\Rightarrow$ Subtraktion kann also durch Addition des b-Komplements ersetzt werden

- und für Integerzahlen gilt außerdem

$$x - y = x + K_{b-1}(y) + 1$$

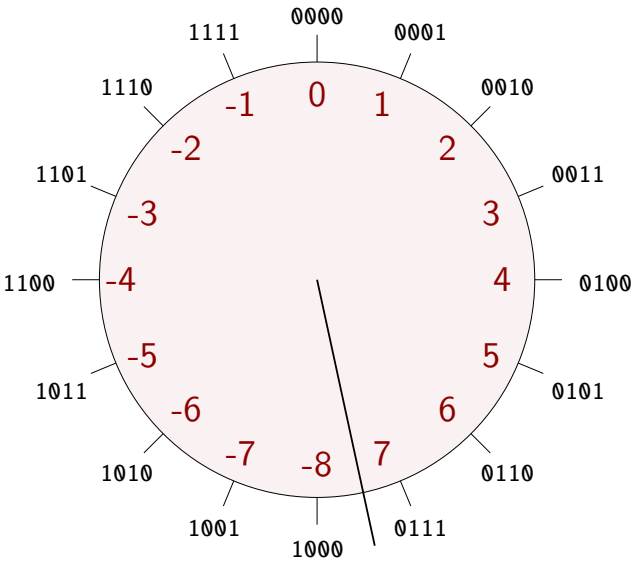
Subtraktion mit Einer- und Zweierkomplement

- Subtraktion ersetzt durch Addition des Komplements

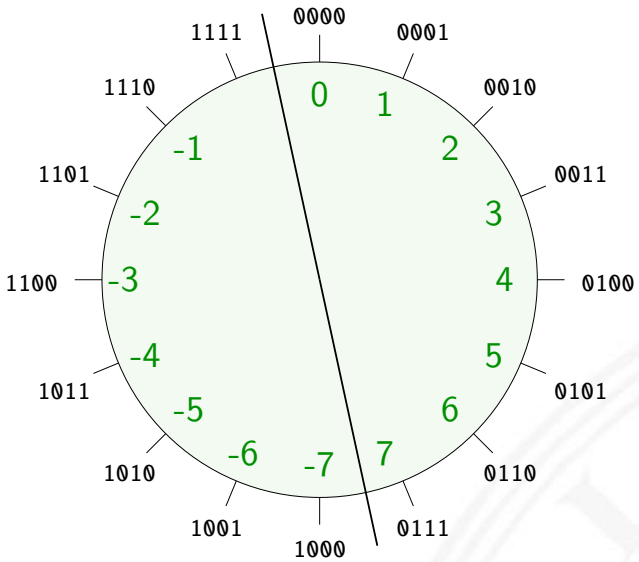
Dezimal	1-Komplement	2-Komplement
10	0000 1010	0000 1010
+(-3)	1111 1100	1111 1101
+7	1 0000 0110	1 0000 0111
Übertrag:	addieren +1	verwerfen
	0000 0111	0000 0111

Veranschaulichung: Zahlenkreis

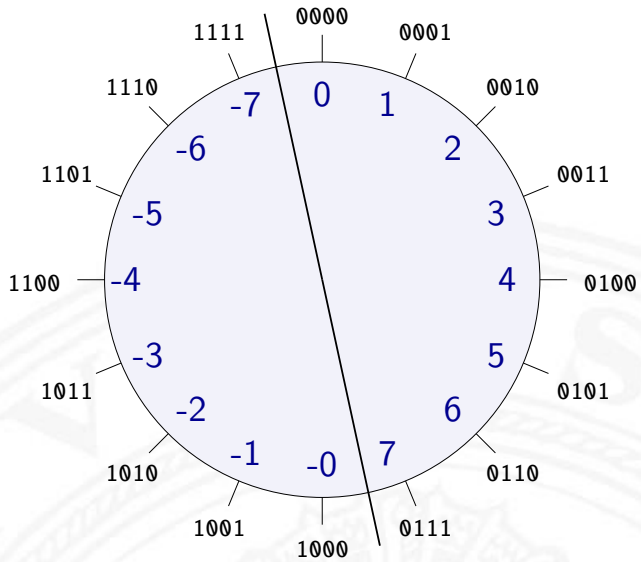
Beispiel für 4-bit Zahlen



2-Komplement



1-Komplement



Betrag+Vorzeichen

- Komplement-Arithmetik als Winkeladdition (siehe *Kapitel 6*)
- Web-Anwendung: *Visualisierung im Zahlenkreis* (JavaScript, see: [Kor16])

Darstellung negativer Zahlen: Beispiele

N Dezimal	N Binär	-N VZ+Betrag	-N 1-Komplement	-N 2-Komplement	-N Exzess 128
1	0000 0001	1000 0001	1111 1110	1111 1111	0111 1111
2	0000 0010	1000 0010	1111 1101	1111 1110	0111 1110
3	0000 0011	1000 0011	1111 1100	1111 1101	0111 1101
4	0000 0100	1000 0100	1111 1011	1111 1100	0111 1100
5	0000 0101	1000 0101	1111 1010	1111 1011	0111 1011
6	0000 0110	1000 0110	1111 1001	1111 1010	0111 1010
7	0000 0111	1000 0111	1111 1000	1111 1001	0111 1001
8	0000 1000	1000 1000	1111 0111	1111 1000	0111 1000
9	0000 1001	1000 1001	1111 0110	1111 0111	0111 0111
10	0000 1010	1000 1010	1111 0101	1111 0110	0111 0110
20	0001 0100	1001 0100	1110 1011	1110 1100	0110 1100
30	0001 1110	1001 1110	1110 0001	1110 0010	0110 0010
40	0010 1000	1010 1000	1101 0111	1101 1000	0101 1000
50	0011 0010	1011 0010	1100 1101	1100 1110	0100 1110
60	0011 1100	1011 1100	1100 0011	1100 0100	0100 0100
70	0100 0110	1100 0110	1011 1001	1011 1010	0011 1010
80	0101 0000	1101 0000	1010 1111	1011 0000	0011 0000
90	0101 1010	1101 1010	1010 0101	1010 0110	0010 0110
100	0110 0100	1110 0100	1001 1011	1001 1100	0001 1100
127	0111 1111	1111 1111	1000 0000	1000 0001	0000 0001
128	—	—	—	1000 0000	0000 0000

Gleitkommaformat

Wie kann man „wissenschaftliche“ Zahlen darstellen?

- Masse der Sonne $1,989 \cdot 10^{30}$ Kg
- Ladung eines Elektrons 0,000 000 000 000 000 000 16 C
- Anzahl der Atome pro Mol 602 300 000 000 000 000 000 000

...

Darstellung im Stellenwertsystem?

- gleichzeitig sehr große und sehr kleine Zahlen notwendig
- entsprechend hohe Zahl der Vorkomma- und Nachkommastellen
- durchaus möglich (Java3D: 256-bit Koordinaten)
- aber normalerweise sehr unpraktisch
- typische Messwerte haben nur ein paar Stellen Genauigkeit

Gleitkomma: Motivation

Grundidee: **halblogarithmische Darstellung einer Zahl**:

- Vorzeichen ($+1$ oder -1)
- *Mantisse* als normale Zahl im Stellenwertsystem
- *Exponent* zur Angabe der Größenordnung

$$z = sign \cdot mantisse \cdot basis^{exponent}$$

- handliche Wertebereiche für Mantisse und Exponent
- arithmetische Operationen sind effizient umsetzbar
- Wertebereiche für ausreichende Genauigkeit wählen

Hinweis: rein logarithmische Darstellung wäre auch möglich, aber Addition/Subtraktion sind dann sehr aufwändig.

Gleitkomma: Dezimalsystem

$$z = (-1)^s \cdot m \cdot 10^e$$

- s Vorzeichenbit
- m Mantisse als Festkomma-Dezimalzahl
- e Exponent als ganze Dezimalzahl

- Schreibweise in C/Java: ⟨*Vorzeichen*⟩ ⟨*Mantisse*⟩ `E` ⟨*Exponent*⟩

`6.023E23`	$6,023 \cdot 10^{23}$	Avogadro-Zahl
`1.6E-19`	$1,6 \cdot 10^{-19}$	Elementarladung des Elektrons

Gleitkomma: Beispiel für Zahlenbereiche

Stellen		Zahlenbereich	
Mantisse	Exponent	$0 \leftarrow$	$\rightarrow \infty$
3	1	10^{-12}	10^{9}
3	2	10^{-102}	10^{99}
3	3	10^{-1002}	10^{999}
3	4	10^{-10002}	10^{9999}
4	1	10^{-13}	10^{9}
4	2	10^{-103}	10^{99}
4	3	10^{-1003}	10^{999}
4	4	10^{-10003}	10^{9999}
5	1	10^{-14}	10^{9}
5	2	10^{-104}	10^{99}
5	3	10^{-1004}	10^{999}
5	4	10^{-10004}	10^{9999}
10	3	10^{-1009}	10^{999}
20	3	10^{-1019}	10^{999}

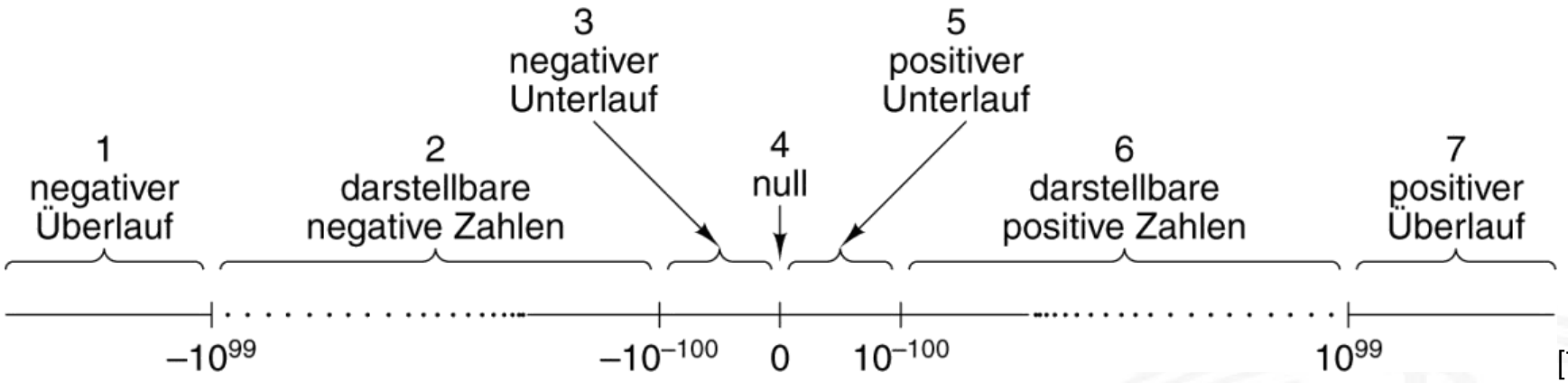
Gleitkomma: Historie

- 1937 Zuse: Z1 mit 22-bit Gleitkomma-Datenformat
- 195x Verbreitung von Gleitkomma-Darstellung für numerische Berechnungen
- 1980 Intel 8087: erster Koprozessor-Chip, ca. 45 000 Transistoren, ca. 50K FLOPS/s
- 1985 IEEE 754 Standard für Gleitkomma
- 1989 Intel 486 mit integriertem Koprozessor
- 1995 Java-Spezifikation fordert IEEE 754
- 1996 ASCI-RED: 1 TFLOPS (9 152 PentiumPro)
- 2008 Roadrunner: 1 PFLOPS (12 960 Cell)

...

FLOPS := Floating-Point Operations Per Second

Gleitkomma: Zahlenbereiche



[TA14]

- Darstellung üblicherweise als Betrag+Vorzeichen
- negative und positive Zahlen gleichberechtigt (symmetrisch)
- separate Darstellung für den Wert Null
- sieben Zahlenbereiche: siehe Bild
- relativer Abstand benachbarter Zahlen bleibt ähnlich
  (vgl. dagegen Integer: 0/1, 1/2, 2/3, . . . , 65 535/65 536, . . .)

Gleitkomma: Normalisierte Darstellung

$$z = (-1)^s \cdot m \cdot 10^e$$

- diese Darstellung ist bisher nicht eindeutig:

  $123 \cdot 10^0 = 12,3 \cdot 10^1 = 1,23 \cdot 10^2 = 0,123 \cdot 10^3 = \quad \ldots$

normalisierte Darstellung

- Exponent anpassen, bis Mantisse im Bereich $1 \leq m < b$ liegt

$\Rightarrow$ Darstellung ist dann eindeutig

$\Rightarrow$ im Dualsystem: erstes Vorkommabit ist dann 1
und muss nicht explizit gespeichert werden

- evtl. zusätzlich sehr kleine Zahlen nicht-normalisiert

IEEE 754 Standard

bis 1985 ein Wildwuchs von Gleitkomma-Formaten:

- unterschiedliche Anzahl Bits in Mantisse und Exponent
- Exponent mit Basis 2, 10, oder 16
- diverse Algorithmen zur Rundung
- jeder Hersteller mit eigener Variante
- Numerische Algorithmen nicht portabel

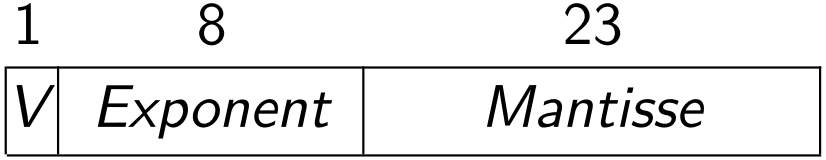
1985: Publikation des Standards IEEE 754 zur Vereinheitlichung

- klare Regeln, auch für Rundungsoperationen
- große Akzeptanz, mittlerweile der universale Standard
- 2008: IEEE 754-2008 mit 16- und 128-bit Formaten

Details: unter anderem in `en.wikipedia.org/wiki/IEEE_754` oder in Goldberg [Gol91]

IEEE 754: *float* und *double*

- 32-bit Format: einfache Genauigkeit (*single precision*, *float*)



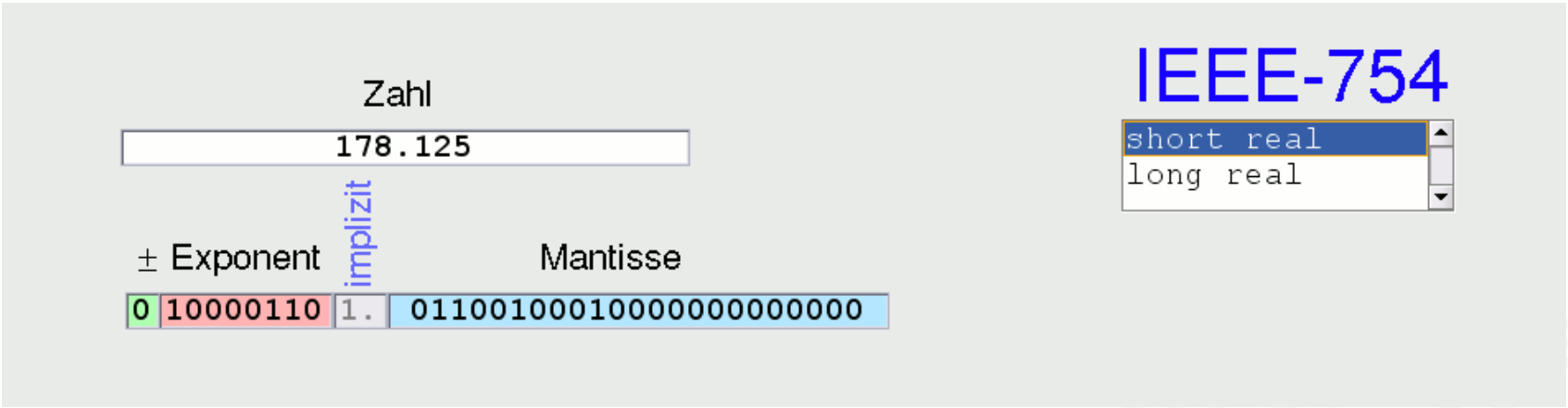
- 64-bit Format: doppelte Genauigkeit (*double precision*, *double*)

- Mantisse als normalisierte Dualzahl: $1 \leq m < 2$
- Exponent in Exzess-127 bzw. Exzess-1023 Codierung
- einige Sonderwerte: Null ($+0$, -0), NaN, Infinity

IEEE 754: Zahlenbereiche

Eigenschaft	einfache	doppelte Genauigkeit
Bits im Vorzeichen	1	1
Bits im Exponenten	8	11
Bits in der Mantisse	23	52
Bits insgesamt	32	64
Exponentensystem	Exzess 127	Exzess 1023
Exponentenbereich	$-126 \ldots +127$	$-1022 \ldots +1023$
kleinste normalisierte Zahl	2^{-126}	2^{-1022}
größte –"–	$\approx 2^{128}$	$\approx 2^{1024}$
$\widehat{=}$ Dezimalbereich	$\approx 10^{-38} \ldots 10^{38}$	$\approx 10^{-308} \ldots 10^{308}$
kleinste nicht normalisierte Zahl	$\approx 10^{-45}$	$\approx 10^{-324}$

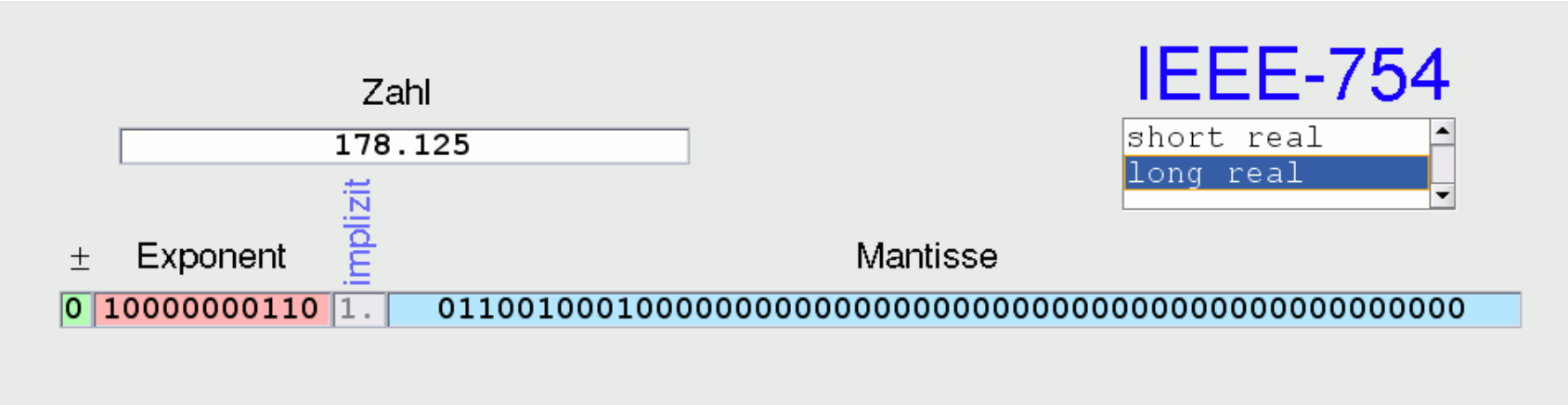
Matlab-Demo: demoieee754



- Zahlenformat wählen (float=short real, double=long real)
- Dezimalzahl in oberes Textfeld eingeben
- Mantisse/Exponent/Vorzeichen in unteres Textfeld eingeben
- andere Werte werden jeweils aktualisiert

K. von der Heide [Hei05], Interaktives Skript T1, demoieee754

Matlab-Demo: demoieee754 (cont.)



- Genauigkeit bei float: 23+1 bits, ca. 6...7 Dezimalstellen
- Genauigkeit bei double: 52+1 bits, ca. 16 Dezimalstellen

  Erinnerung: $\log_2(10) = \ln(10)/\ln(2) \approx 3,322$

Beispiele: float

- 1-bit Vorzeichen 8-bit Exponent (Exzess-127), 23-bit Mantisse

  $z = (-1)^s \cdot 2^{(eeee\,eeee - 127)} \cdot 1, mmmm\,mmmm\,mmmm \ldots mmm$

- 1 1000 0000 1110 0000 0000 0000 0000 000

  $z = -1 \cdot 2^{(128-127)} \cdot (1 + 0,5 + 0,25 + 0,125 + 0)$

  $= -1 \cdot 2 \cdot 1,875 = -3,750$

- 0 1111 1110 0001 0011 0000 0000 0000 000

  $z = +1 \cdot 2^{(254-127)} \cdot (1 + 2^{-4} + 2^{-7} + 2^{-8})$

  $= 2^{127} \cdot 1,07421875 = 1,953965 \cdot 10^{38}$

Beispiele: float (cont.)

$$z = (-1)^s \cdot 2^{(eeee\,eeee - 127)} \cdot 1, mmmm\,mmmm\,mmmm\ldots mmm$$

- 1 0000 0001 0000 0000 0000 0000 0000 000

$$z = -1 \cdot 2^{(1-127)} \cdot (1 + 0 + 0 + \cdots + 0)$$

$$= -1 \cdot 2^{-126} \cdot 1,0 = -1,1755 \cdot 10^{-38}$$

- 0 0111 1111 0000 0000 0000 0000 0000 001

$$z = +1 \cdot 2^{(127-127)} \cdot (1 + 2^{-23})$$

$$= 1 \cdot (1 + 0,0000001) = 1,0000001$$

BitsToFloat.java


```
public static void main( String[] args ) {
  p( "1", "01111111", "00000000000000000000000" );
}
public void p( String s, String e, String m ) {
  int      sign = (Integer.parseInt( s, 2 ) & 0x1) << 31;
  int exponent = (Integer.parseInt( e, 2 ) & 0xFF) << 23;
  int mantisse = (Integer.parseInt( m, 2 ) & 0x007FFFFF);
  int bits = sign | exponent | mantisse;
  float  f = Float.intBitsToFloat( bits );
  System.out.println( dumpIntBits(bits) + " " + f );
}
public String dumpIntBits( int i ) {
  StringBuffer sb = new StringBuffer();
  for( int mask=0x80000000; mask != 0; mask = mask >>> 1 ) {
    sb.append( ((i & mask) != 0) ? "1" : "0" );
  }
  return sb.toString();
}
```

Beispiele: BitsToFloat

```
10111111100000000000000000000000 -1.0
00111111100000000000000000000000 1.0
00111111100000000000000000000001 1.0000001
01000000010000000000000000000000 3.0
01000000011000000000000000000000 3.5
01000000011100000000000000000000 3.75
01000000011111111111111111111111 3.9999998
01000000110000000000000000000000 6.0
01000011100000000000000000000000 256.0
00000000100000000000000000000000 1.17549435E-38
11000000011100000000000000000000 -3.75
01111111010000000000000000000000 2.5521178E38
01111111000010011000000000000000 1.8276885E38
01111111011111111111111111111111 3.4028235E38
01111111100000000000000000000000 Infinity
11111111100000000000000000000000 -Infinity
01111111110000000000000000000000 NaN
01111111100001111000000000000000 NaN
```

Gleitkomma: Addition, Subtraktion

Addition von Gleitkommazahlen $y = a_1 + a_2$

- Skalierung des betragsmäßig kleineren Summanden
- Erhöhen des Exponenten, bis $e_1 = e_2$ gilt
- gleichzeitig entsprechendes Skalieren der Mantisse $\Rightarrow$ schieben
- Achtung: dabei verringert sich die effektive Genauigkeit des kleineren Summanden

- anschließend Addition/Subtraktion der Mantissen
- ggf. Normalisierung des Resultats

- Beispiele in den Übungen

Gleitkomma-Addition: Beispiel

$a = 9,725 \cdot 10^7 \quad b = 3,016 \cdot 10^6$

$$
\begin{aligned}
y &= (a + b) \\
&= (9,725 \cdot 10^7 + 0,3016 \cdot 10^7) && \text{Angleichung der Exponenten} \\
&= (9,725 + 0,3016) \cdot 10^7 && \text{Distributivgesetz} \\
&= (10,0266) \cdot 10^7 && \text{Addition der Mantissen} \\
&= 1,00266 \cdot 10^8 && \text{Normalisierung} \\
\\
&= 1,003 \cdot 10^8 && \text{Runden bei fester Stellenzahl}
\end{aligned}
$$

- normalerweise nicht informationstreu !

Achtung: Auslöschung

Probleme bei Subtraktion zweier Gleitkommazahlen

Fall 1 Exponenten stark unterschiedlich

- kleinere Zahl wird soweit skaliert, dass von der Mantisse (fast) keine gültigen Bits übrigbleiben
- kleinere Zahl geht verloren, bzw. Ergebnis ist stark ungenau
- Beispiel: `1.0E20` + `3.14159` = `1.0E20`

Fall 2 Exponenten gleich, Mantissen fast gleich

- fast alle Bits der Mantisse löschen sich aus
- Resultat hat nur noch wenige Bits effektiver Genauigkeit

Gleitkomma: Multiplikation, Division

Multiplikation von Gleitkommazahlen $y = a_1 \cdot a_2$

- Multiplikation der Mantissen und Vorzeichen

  Anmerkung: Vorzeichen s_i ist hier -1^{sBit}
  Berechnung als $sBit = sBit_1$ XOR $sBit_2$

- Addition der Exponenten
- ggf. Normalisierung des Resultats

$$y = (s_1 \cdot s_2) \cdot (m_1 \cdot m_2) \cdot b^{e_1+e_2}$$

Division entsprechend:

- Division der Mantissen und Vorzeichen
- Subtraktion der Exponenten
- ggf. Normalisierung des Resultats

$$y = (s_1/s_2) \cdot (m_1/m_2) \cdot b^{e_1-e_2}$$

IEEE 754: Infinity *Inf*, Not-a-Number *NaN*, ±0

- schnelle Verarbeitung großer Datenmengen
- Statusabfrage nach jeder einzelnen Operation unbequem
- trotzdem Hinweis auf aufgetretene Probleme wichtig

⇒ *Inf* (*infinity*): spezieller Wert für plus/minus Unendlich

Beispiele: $2/0, -3/0, arctan(\pi)$, usw.

⇒ *NaN* (*not-a-number*): spezieller Wert für ungültige Operation

Beispiele: $\sqrt{-1}, arcsin(2,0), Inf/Inf$, usw.

IEEE 754: Infinity *Inf*, Not-a-Number *NaN*, ±0 (cont.)

normalisiert	V	$0 < Exp < Max$	jedes Bitmuster
denormalisiert	V	00...0	jedes Bitmuster $\neq$ 00...0
0	V	00...0	00...0
Inf	V	11...1	00...0
NaN	V	11...1	jedes Bitmuster $\neq$ 00...0

- Rechnen mit *Inf* funktioniert normal: $0/Inf = 0$
- NaN für undefinierte Werte: sqrt(-1), arcsin(2.0), ...
- jede Operation mit *NaN* liefert wieder *NaN*

IEEE 754: FloatInfNaNDemo.java


```
java FloatInfNaNDemo
```

```
 0 / 0 =  NaN
 1 / 0 =  Infinity
-1 / 0 = -Infinity
 1 / Infinity = 0.0
Infinity +  Infinity = Infinity
Infinity + -Infinity = NaN
Infinity * -Infinity = -Infinity
Infinity + NaN = NaN
sqrt(2)  = 1.414213562373095 1
sqrt(-1) = NaN
0 + NaN  = NaN
NaN == NaN?     = false                    Achtung
Infinity > NaN? = false                    Achtung
```

ULP: Unit in the last place

- die Differenz zwischen den beiden Gleitkommazahlen, die einer gegebenen Zahl am nächsten liegen
- diese beiden Werte unterscheiden sich im niederwertigsten Bit der Mantisse $\Rightarrow$ Wertigkeit des LSB
- daher ein Maß für die erreichbare Genauigkeit

- IEEE 754 fordert eine Genauigkeit von 0,5 ULP für die elementaren Operationen: Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division, Quadratwurzel
  $=$ der bestmögliche Wert
- gute Mathematik-Software garantiert ≤ 1 ULP auch für höhere Funktionen: Logarithmus, Sinus, Cosinus usw.
- Progr.sprachenunterstützung, z.B. `java.lang.Math.ulp( double d )`

Rundungsfehler

- sorgfältige Behandlung von Rundungsfehlern essentiell
- teilweise Berechnung mit zusätzlichen Schutzstellen
- dadurch Genauigkeit ± 1 ULP für alle Funktionen
- ziemlich komplexe Sache

- in dieser Vorlesung nicht weiter vertieft
- beim Einsatz von numerischen Algorithmen essenziell

Datentypen in der Praxis: Maschinenworte

- die meisten Rechner sind für eine Wortlänge optimiert
- 8-bit, 16-bit, 32-bit, 64-bit, ... Maschinen
- die jeweils typische Länge eines Integerwertes
- und meistens auch von Speicheradressen
- zusätzlich Teile oder Vielfache der Wortlänge unterstützt

- 32-bit Rechner
  - Wortlänge für Integerwerte ist 32-bit
  - adressierbarer Speicher ist 2^{32} Bytes (4 GiB)
  - bereits zu knapp für speicherhungrige Applikationen
- derzeit Übergang zu 64-bit Rechnern (PCs)
- kleinere Wortbreiten: *embedded*-Systeme (Steuerungsrechner), Mobilgeräte etc.

Datentypen auf Maschinenebene

- gängige Prozessoren unterstützen mehrere Datentypen
- entsprechend der elementaren Datentypen in C, Java, ...
- `void*` ist ein **Pointer** (Referenz, Speicheradresse)
- Beispiel für die Anzahl der Bytes:

C Datentyp	DEC Alpha	typ. 32-bit	Intel IA-32 (x86)
int	4	4	4
long int	8	4	4
char	1	1	1
short	2	2	2
float	4	4	4
double	8	8	8
long double	8	8	10/12
void *	8	4	4

Datentypen auf Maschinenebene (cont.)

Abhängigkeiten (!)

- Prozessor
- Betriebssystem
- Compiler

www.agner.org/optimize/calling_conventions.pdf

segment word size	16 bit			32 bit						64 bit			
compiler	Microsoft	Borland	Watcom	Microsoft	Intel Windows	Borland	Watcom	Gnu v.3.x	Intel Linux	Microsoft	Intel Windows	Gnu	Intel Linux
bool	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
char	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
wchar_t		2		2	2	2	2	2	2	2	2	4	4
short int	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
int	2	2	2	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
long int	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	8	8
__int64				8	8			8	8	8	8	8	8
enum	2	2	1	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
float	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
double	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8
long double	10	10	8	8	16	10	8	12	12	8	16	16	16
__m64				8	8				8		8	8	8
__m128				16	16				16	16	16	16	16
__m256					32				32		32		32
pointer	2	2	2	4	4	4	4	4	4	8	8	8	8
far pointer	4	4	4										
function pointer	2	2	2	4	4	4	4	4	4	8	8	8	8
data member pointer (min)	2	4	6	4	4	8	4	4	4	4	4	8	8
data member pointer (max)		4	6	12	12	8	12	4	4	12	12	8	8
member function pointer (min)	2	12	6	4	4	12	4	8	8	8	8	16	16
member function pointer (max)		12	6	16	16	12	16	8	8	24	24	16	16

Table 1 shows how many bytes of storage various objects use for different compilers.

Literatur

[BO15] R.E. Bryant, D.R. O'Hallaron:
Computer systems – A programmers perspective.
3rd global ed., Pearson Education Ltd., 2015.
ISBN 978–1–292–10176–7. `csapp.cs.cmu.edu`

[TA14] A.S. Tanenbaum, T. Austin: *Rechnerarchitektur – Von der digitalen Logik zum Parallelrechner*.
6. Auflage, Pearson Deutschland GmbH, 2014.
ISBN 978–3–86894–238–5

[Ifr10] G. Ifrah: *Universalgeschichte der Zahlen*.
Tolkemitt bei Zweitausendeins, 2010.
ISBN 978–3–942048–31–6

[Kor16] Laszlo Korte: *TAMS Tools for eLearning*.
Uni Hamburg, FB Informatik, 2016, BSc Thesis. `tams.informatik.uni-hamburg.de/research/software/tams-tools`

Literatur (cont.)

[Gol91] D. Goldberg: *What every computer scientist should know about floating-point*. in: *ACM Computing Surveys* 23 (1991), March, Nr. 1, S. 5–48.
`www.validlab.com/goldberg/paper.pdf`

[Knu08] D.E. Knuth: *The Art of Computer Programming, Volume 4, Fascicle 0, Introduction to Combinatorial Algorithms and Boolean Functions*.
Addison-Wesley Professional, 2008. ISBN 978–0–321–53496–5

[Knu09] D.E. Knuth: *The Art of Computer Programming, Volume 4, Fascicle 1, Bitwise Tricks & Techniques; Binary Decision Diagrams*.
Addison-Wesley Professional, 2009. ISBN 978–0–321–58050–4

Literatur (cont.)

[Hei05] K. von der Heide: *Vorlesung: Technische Informatik 1 — interaktives Skript*. Universität Hamburg, FB Informatik, 2005.
`tams.informatik.uni-hamburg.de/lectures/2004ws/vorlesung/t1`
Float/Double-Demonstration: `demoieee754`

[Omo94] A.R. Omondi: *Computer Arithmetic Systems – Algorithms, Architecture and Implementations*. Prentice-Hall International, 1994. ISBN 0–13–334301–4

[Kor01] I. Koren: *Computer Arithmetic Algorithms*. 2nd edition, CRC Press, 2001. ISBN 978–1–568–81160–4.
`www.ecs.umass.edu/ece/koren/arith`

[Spa76] O. Spaniol: *Arithmetik in Rechenanlagen*. B. G. Teubner, 1976. ISBN 3–519–02332–6