

Mathe Hausaufgaben zum 17. und 18. November 2016

Elaha Khaleqi(6947801), Matz Radloff(6946325)

17. November 2016

1

(a)

Behauptung: Ein Produkt $a \cdot b$ ganzer Zahlen ist nur dann durch 3 teilbar, wenn mindestens einer der Faktoren durch 3 teilbar ist.

Widerspruchsbeweis: Wir zeigen, dass das Produkt zweier, nicht durch 3 teilbare Zahlen auch nicht durch 3 teilbar sein kann.

$$3k = a \cdot b; a, b \in \{3n + 1, 3n + 2\}; k, n \in \mathbb{Z}$$

Es ergeben sich die folgenden drei Fälle ($n, o, k \in \mathbb{Z}$):

$$a = 3n + 1, b = 3o + 1$$

$$3k = (3n + 1) \cdot (3o + 1)$$

$$3k = 9no + 3n + 3o + 1$$

$$3k = 3(3no + n + o) + 1 \not\equiv$$

$$a = 3n + 1, b = 3o + 2$$

$$3k = (3n + 1) \cdot (3o + 2)$$

$$3k = 9no + 6n + 3o + 2$$

$$3k = 3(3no + 2n + o) + 2 \not\equiv$$

$$a = 3n + 2, b = 3o + 2$$

$$3k = (3n + 2) \cdot (3o + 2)$$

$$3k = 9no + 6n + 6o + 4$$

$$3k = 3(3no + 2n + 2o) + 4 \not\equiv$$

Folglich gibt es keine Kombination von nicht durch 3 teilbaren Zahlen, deren Produkt durch 3 teilbar ist. ✓

(b)

Wir zeigen, dass $\sqrt{3}$ eine irrationale Zahl ist.

Widerspruchsbeweis: Wir nehmen an, $\sqrt{3}$ ließe sich als Bruch $\frac{n}{m}$; $n, m \in \mathbb{Z}, m \neq 0$ darstellen, der maximal gekürzt sei.

Für den Beweis müssen wir vorher feststellen, ob die Wurzel einer durch 3 teilbaren Zahl auch durch 3 teilbar ist:

$$\begin{aligned} a, k &\in \mathbb{Z} \\ a &= 3k \\ a^2 &= 9k^2 = 3(3k^2) \end{aligned} \quad \checkmark (*)$$

$$\begin{aligned} \sqrt{3} = \frac{n}{m} &\Rightarrow n^2 = 3m^2 \\ 3 \mid 3n^2 &\stackrel{(*)}{\Rightarrow} 3 \mid n \\ \Rightarrow 9 \mid n^2 &\Rightarrow 9k = n^2, k \in \mathbb{Z} \\ 9k &= 3m^2 \Rightarrow 3k = m^2 \\ \Rightarrow 3 \mid m^2 &\stackrel{(*)}{\Rightarrow} 3 \mid m \\ &\Rightarrow 3 \mid m, 3 \mid n \end{aligned}$$

2

Für zwei Äquivalenzklassen $[(a, b)], [(c, d)] \in \mathbb{Z}$ wurde die Summe $[(a, b)] + [(c, d)]$ als die Äquivalenzklasse $[(a + c, b + d)]$ definiert. Wir zeigen, dass die Addition wohldefiniert ist. Unter Annahme der Definition aus der Vorlesung, die die Menge \mathbb{Z} als die Faktormenge $(\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0) / \sim$ definiert, kann man die Summe wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned} (a + c) + (b + d)' &= (a + c)' + (b + d) \\ (a + c) - (b + d) &= (a + c)' + (b + d)' \\ (a - b) + (c - d) &= (a - b)' + (c - d)' \end{aligned}$$

Laut Definition ist $(a - b) \Leftrightarrow a + b' = a' + b \Leftrightarrow [(a, b)]$ eine Darstellung für eine Zahl aus \mathbb{Z} . Somit hängt die Addition $[(a + c, b + d)]$ nur von den Äquivalenzklassen $[(a, b)]$ und $[(c, d)]$ ab.

3

Wir zeigen, dass $\sqrt{6}$ eine irrationale Zahl ist.

Widerspruchsbeweis: Wir nehmen an, $\sqrt{6}$ ließe sich als Bruch $\frac{n}{m}$; $n, m \in \mathbb{Z}, m \neq 0$ darstellen, der maximal gekürzt sei.

Für den Beweis müssen wir vorher feststellen, ob die Wurzel einer durch 6 teilbaren Zahl auch durch 6 teilbar ist:

$$\begin{aligned} a, k &\in \mathbb{Z} \\ a &= 6k \\ a^2 &= 36k^2 \end{aligned}$$

Hierbei ist durch den Faktor 36 nicht eindeutig, dass a^2 auch durch 6 teilbar ist. Durch Primfaktorzerlegung ergeben sich z.B. auch die Faktoren $9 \cdot 4$ (Ausgehend von $2^2 \cdot 3^2$). Damit die notwendige Behauptung $6 \mid a^2$ trotzdem gilt, teilen wir das Problem auf, indem wir benutzen, dass gilt: $2 \mid a \wedge 3 \mid a \Rightarrow 6 \mid a$ Nun benutzen wir unsere Feststellung aus 1. (b) und Lemma 3.XX aus der Vorlesung, sodass folgt:

$$\begin{aligned} 3 \mid a^2 \wedge 2 \mid a^2 \\ 3 \mid a \wedge 2 \mid a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{6} = \frac{n}{m} &\Rightarrow n^2 = 6m^2 \\ 2 \mid 3n^2 \wedge 3 \mid 3n^2 &\Rightarrow 2 \mid n \wedge 3 \mid n \\ &\Rightarrow 6 \mid n \Rightarrow 36 \mid n^2 \\ &\Rightarrow 9k = n^2, k \in \mathbb{Z} \\ 36k &= 6m^2 \Rightarrow 6k = m^2 \\ \Rightarrow 6 \mid m^2 &\Rightarrow 6 \mid m \\ &\Rightarrow 6 \mid m, 6 \mid n \end{aligned}$$

4 ggT(3213,234):

$$\begin{aligned}3213 &= 324 \cdot 13 + 171 \\234 &= 171 \cdot 1 + 63 \\171 &= 63 \cdot 2 + 45 \\63 &= 45 \cdot 1 + 18 \\45 &= 18 \cdot 2 + 9 \\18 &= 9 \cdot 2 + 0 \\ \Rightarrow \text{ggT}(3213, 234) &= 9\end{aligned}$$

5

(a) Feststellung, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind:

i. $a_1 \mid b_1 \wedge a_2 \mid b_2 \Rightarrow a_1 + a_2 \mid b_1 + b_2$

Damit die Teilbarkeit von b_1 und b_2 gegeben ist, müssen jeweils $c_1, c_2 \in \mathbb{Z}$ existieren, sodass gilt:

$$b_1 = c_1 \cdot a_1 \wedge b_2 = c_2 \cdot a_2$$

Außerdem muss für die Teilbarkeit von $b_1 + b_2$ gelten:

$$b_1 + b_2 = (a_1 + a_2) \cdot d, d \in \mathbb{Z}$$

Durch Umstellen erhält man:

$$b_1 + b_2 = a_1 c_1 + a_2 c_2$$

Folglich müssten, damit die Aussage gilt, c_1 und c_2 gleich sein.
 \rightarrow Aussage stimmt nicht.

ii. $a \mid b_1 \wedge a \mid b_2 \Rightarrow a \mid b_1 + b_2$

$$\begin{aligned}b_1 &= c_1 a \\b_2 &= c_2 a \\b_1 + b_2 &= c_1 a + c_2 a = a \cdot (c_1 + c_2) \quad \checkmark\end{aligned}$$

iii. $a \mid b_1 \wedge a \mid b_2 \Rightarrow a \mid b_1 - b_2$

$$\begin{aligned}b_1 &= c_1 a \\b_2 &= c_2 a \\b_1 - b_2 &= c_1 a - c_2 a = a \cdot (c_1 - c_2) \quad \checkmark\end{aligned}$$