Mathe Hausaufgaben zum 10. und 11. November 2016

Matz Radloff(6946325)

7. November 2016

Inhaltsverzeichnis

1

Für $n \in \mathbb{N}$ soll gelten:

$$A(n) : 1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + ... + n \cdot 2^n = (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$$

(a)

Formulierung der Gleichung $A(n)$ mit Hilfe des Summenzeichens:

$$\sum_{i=1}^{n} i \cdot 2^i$$

(b)

Prüfung, ob $A(n)$ für $n = 1, 2, 3$ richtig ist:

$$\begin{aligned} &A(1) : 1 \cdot 2^1 = (1-1) \cdot 2^{1+1} + 2 \Rightarrow 2 = 2 && \checkmark \\ &A(2) : 1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 = (2-1) \cdot 2^{2+1} + 2 \Rightarrow 10 = 10 && \checkmark \\ &A(3) : 1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 = (3-1) \cdot 2^{3+1} + 2 \Rightarrow 34 = 34 && \checkmark \end{aligned}$$

(c)

Beweis durch vollständige Induktion:

Induktionsanfang: Dass $A(1)$ gilt, wurde in (b) gezeigt.

Induktionsschritt: Es soll bewiesen werden, dass $A(n+1)$ unter Annahme, dass A(n) stimmt, gilt.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1} i \cdot 2^i &= (n+1-1) \cdot 2^{n+1+1} + 2 \\ \sum_{i=1}^{n} i \cdot 2^i + (n+1) \cdot 2^{n+1} &= n \cdot 2^{n+2} + 2 \\ (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2 + (n+1) \cdot 2^{n+1} &= n \cdot 2^{n+2} + 2 \\ 2n \cdot 2^{n+1} + 2 &= n \cdot 2^{n+2} + 2 \\ n \cdot 2^{n+2} + 2 &= n \cdot 2^{n+2} + 2 && \checkmark \end{aligned}$$

2

Für $n \in \mathbb{N}$ soll folgende Aussage gelten:

$$B(n) : \sum_{i=1}^{n} (2i - 1) = n^2$$

(a)

Prüfung, ob $B(n)$ für $n = 1, 2, 3$ gilt:

$$B(1) : (2 \cdot 1 - 1) = 1^2 \Rightarrow 1 = 1 B(2) \quad : (2 \cdot 1 - 1) + (2 \cdot 2 - 1) = 2^2 \Rightarrow 4 = 4 B(3) : (2 \cdot 1 - 1) + (2 \cdot 2 -$$
$$\checkmark$$

(b)

Formulierung ohne das Summenzeichen:

$1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$

Die Summe der ersten n ungeraden Zahlen lässt sich auch durch n^2 berechnen.

(c)

Beweis durch vollständige Induktion:

Induktionsanfang: Dass $B(1)$ gilt, wurde in (a) gezeigt.

Induktionsschritt: Es soll bewiesen werden, dass $B(n+1)$ unter Annahme, dass B(n) stimmt, gilt.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} (2i - 1) &= (n + 1)^2 \\
\sum_{i=1}^{n} (2i - 1) + (2 \cdot (n + 1) - 1) &= (n + 1)^2 \\
n^2 + 2n + 1 &= (n + 1)^2 \\
(n + 1)^2 &= (n + 1)^2 \qquad \checkmark
\end{aligned}$$

3