Mathe Hausaufgaben zum 17. und 18. November 2016

Matz Radloff(6946325), Elaha

13. November 2016

1

(a)

Behauptung: Ein Produkt $a \cdot b$ ganzer Zahlen ist nur dann durch 3 teilbar, wenn mindestens einer der Faktoren durch 3 teilbar ist.

Widerspruchsbeweis: Wir zeigen, dass das Produkt zweier, nicht durch 3 teilbare Zahlen auch nicht durch 3 teilbar sein kann.

$$3k = a \cdot b; a, b \in \{3n+1, 3n+2\}; k, n \in \mathbb{Z}$$

Es ergeben sich die folgenden drei Fälle ($n, o, k \in \mathbb{Z}$):

$a = 3n + 1, b = 3o + 1$

$$\begin{aligned} 3k &= (3n+1) \cdot (3o+1) \\ 3k &= 9no + 3n + 3o + 1 \\ 3k &= 3(3no + n + o) + 1 \lightning \end{aligned}$$

$a = 3n + 1, b = 3o + 2$

$$\begin{aligned} 3k &= (3n+1) \cdot (3o+2) \\ 3k &= 9no + 6n + 3o + 2 \\ 3k &= 3(3no + 2n + o) + 2 \lightning \end{aligned}$$

$a = 3n + 2, b = 3o + 2$

$$\begin{aligned} 3k &= (3n+2) \cdot (3o+2) \\ 3k &= 9no + 6n + 6o + 4 \\ 3k &= 3(3no + 2n + 2o) + 4 \lightning \end{aligned}$$

Folglich gibt es keine Kombination von nicht durch 3 teilbaren Zahlen, deren Produkt durch 3 teilbar ist. ✓

(b)

Wir zeigen, dass $\sqrt{3}$ eine irrationale Zahl ist.

Widerspruchsbeweis: Wir nehmen an, $\sqrt{3}$ ließe sich als Bruch $\frac{n}{m}; n, m \in \mathbb{Z}, m \neq 0$ darstellen, der maximal gekürzt sei.

Für den Beweis müssen wir vorher feststellen, ob die Wurzel einer durch 3 teilbaren Zahl auch durch 3 teilbar ist:

$$\begin{aligned} a, k &\in \mathbb{Z} \\ a &= 3k \\ a^2 &= 9k^2 = 3(3k^2) \end{aligned} \qquad \checkmark(*)$$

$$\begin{aligned} \sqrt{3} = \frac{n}{m} &\Rightarrow n^2 = 3m^2 \\ 3 \mid 3n^2 &\overset{(*)}{\Rightarrow} 3 \mid n \\ \Rightarrow 9 \mid n^2 &\Rightarrow 9k = n^2, k \in \mathbb{Z} \\ 9k = 3m^2 &\Rightarrow 3k = m^2 \\ \Rightarrow 3 \mid m^2 &\overset{(*)}{\Rightarrow} 3 \mid m \\ &\Rightarrow 3 \mid m, 3 \mid n ↯ \end{aligned}$$

2

3

4 ggT(3213,234):

$$\begin{aligned} 3213 &= 324 * 13 + 171 \\ 234 &= 171 * 1 + 63 \\ 171 &= 63 * 2 + 45 \\ 63 &= 45 * 1 + 18 \\ 45 &= 18 * 2 + 9 \\ 18 &= 9 * 2 + 0 \\ \Rightarrow ggt(3213, 234) &= 9 \end{aligned}$$