Mathe Hausaufgaben zum 27. und 28. Oktober 2016

Matz Radloff

25. Oktober 2016

Inhaltsverzeichnis

1

$$A := \{n \in \mathbb{N} : n > 3\} \tag{1}$$
$$B := \{n \in \mathbb{N} : n \text{ ist durch 14 teilbar}\} \tag{2}$$
$$C := \{n \in \mathbb{N} : n > 5, \text{ist durch 7 teilbar und ist gerade}\} \tag{3}$$

1.1 (a) $A \subseteq B$

Bedingung: $\forall a \in A : a \in B$

$$a_1 = k + 3, k \in \mathbb{N} \tag{4}$$
$$b_1 = 14l, l \in \mathbb{N} \tag{5}$$

Beweis durch Kontraposition: $k = 1$ einsetzen, $a_1 = b_1$ setzen:

$$a_1 = 4 \tag{6}$$
$$l = \frac{2}{7} \tag{7}$$

$\rightarrow \exists a \in A : a \notin B$
Folglich ist die Aussage $A \subseteq B$ widerlegt, da l keine natürliche Zahl ist. Es gibt also ein Element in A, dass nicht in B liegt.

1.2 (b) $B \subseteq A$

Bedingung: $\forall b \in B : b \in A$

$$b_1 = 14l, l \in \mathbb{N} \tag{8}$$
$$a_1 = k + 3, k \in \mathbb{N} \tag{9}$$

Induktionsbeweis
kleinstes l einsetzen:

$$l = 1, b_1 = a_1 \tag{10}$$
$$k = 11\checkmark \tag{11}$$

generischen Fall prüfen:

$$l = n + 1 \tag{12}$$
$$14n + 1 = k + 3 \tag{13}$$
$$k = 14n - 2\checkmark \tag{14}$$

Alle Elemente in B sind auch in A enthalten, also größer als 3.

1.3 (c) $C \subseteq A$

Bedingung: $\forall c \in C : c \in A$

Direktbeweis Die kleinstmögliche Zahl $c \in C$ ist 14. Da $14 > 3$ und C außer 14 nur größere Zahlen enthält gilt $C \subseteq A$.

1.4 (c) $B = C$

Bedingung: $B \subseteq C \wedge C \subseteq B$

$\forall c \in C : c = 7o \wedge c = 2p : o, p \in \mathbb{N}$

Zusammengefasst ergibt sich, dass alle Elemente aus C - genau wie in B - durch 14 teilbar sein müssen. Wenn man nur das kleinstmögliche b (14) bildet und überprüft, dass es die verbleibende Bedingung $c > 5$ ($14 > 5\surd$) erfüllt, ist $B = C$ bewiesen.

2

(a) xor **(b)** $\vee$ **(c)** xor **(d)** xor

3

$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
Äquivalente Aussageform: $\neg(a \wedge b) = \neg a \vee \neg b$

a	b	$a \wedge b$	$\neg(a \wedge b)$	$\neg a$	$\neg b$	$\neg a \vee \neg b$
0	0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	0	0	1
1	0	0	1	1	1	1
1	1	1	0	1	0	0

Tabelle 1: Wahrheitstafel

Da die Spalten 4 und 7 die gleichen Werte enthalten, stimme die ursprüngliche Aussage.

4

$$M = \{a, b, c\} \tag{15}$$
$$\wp(M) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\} \tag{16}$$

5

5.1 (a)

Im ersten Diagramm müsste dem Element 2 ein Funktionswert zugeordnet werden, damit die dargestellte Zuordnung eine Funktion darstellt. Im zweiten Diagramm dürfte das Element 2 nur einem anstatt zwei Werten zugeordnet werden.

5.2 (b)

Um eine injektive Funktion darzustellen müsste zusätzlich zu den Bedingungen aus **(a)** jeweils folgende Zuordnungen geändert werden:

- Im ersten Diagramm müssten entweder 4 oder 5 einem anderen Element der Zielmenge zugeordnet werden, damit nicht beide auf e abgebildet werden.
- Im zweiten Diagramm müssten 3 oder 5 f zugeordnet werden.

5.3 (c)

Die Pfeile können nicht so abgeändert werden, dass surjektive Funktionen dargestellt werden, da B mehr Elemente als A enthält und somit die Bedingung, dass jedes Element der Zielmenge ein Urbild besitzt, nicht erfüllt werden kann.

5.4 (d)

$$f(4) = c \tag{17}$$

5.5 (e)

$$f(4) = a \tag{18}$$