

Geração uniforme de k -trees para aprendizado de redes bayesianas

Tiago Madeira
<madeira@ime.usp.br>

Supervisor: Prof. Dr. Denis Deratani Mauá

Bacharelado em Ciência da Computação
Instituto de Matemática e Estatística
Universidade de São Paulo

Novembro de 2016

No que consiste o trabalho?

Estudo sobre amostragem uniforme de k -trees e seu uso no aprendizado da estrutura de redes bayesianas com *treewidth* limitado.

Por que estudar k -trees?

Há interesse considerável em desenvolver ferramentas eficientes para manipular k -trees, porque **problemas NP-difíceis são resolvidos em tempo polinomial** em k -trees e subgrafos de k -trees.

Alguns exemplos¹:

- Encontrar tamanho máximo dos conjuntos independentes;
- Computar tamanho mínimo dos conjuntos dominantes;
- Calcular número cromático;
- Determinar se tem um ciclo hamiltoniano.

¹ARNBORG S., PROSKUROWSKI A. Linear time algorithms for NP-Hard problems restricted to partial k -trees. *Discrete Applied Mathematics*, 23:11–24, 1989.

Por que gerar k -trees?





Há muitas razões, como por exemplo para testar a eficácia de algoritmos aproximados.

O problema que desperta nosso interesse é o **aprendizado de redes bayesianas**.

O que foi feito?

- Implementação do algoritmo de Caminiti *et al.* (2010)² para **codificar k -trees de forma bijetiva em tempo linear**.
- Implementação de algoritmo para **amostrar k -trees uniformemente** e testes para comprovar seu funcionamento.
- Estudo sobre **aprendizado de redes bayesianas com treewidth limitado** por meio da amostragem uniforme de k -trees conforme artigo de Nie *et al.* (2014)³.
- **Comparação entre métodos** para aprender redes bayesianas.

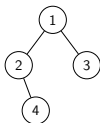
²CAMINITI S., FUSCO E. G., PETRESCHI R. Bijective linear time coding and decoding for k -trees. *Theory of Computing Systems*, 46:284–300, 2010.

³NIE S., MAUÁ D. D., CAMPOS C. P., JI Q. Advances in learning bayesian networks of bounded treewidth. *CoRR*, abs/1406.1411, 2014.    

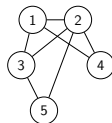
Primeiramente, o que são k -trees?

Uma k -tree é definida da seguinte forma recursiva⁴:

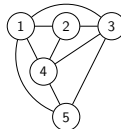
- Um grafo completo com k vértices é uma k -tree.
- Se $T'_k = (V, E)$ é uma k -tree, $K \subseteq V$ é um k -clique e $v \notin V$, então $T_k = (V \cup \{v\}, E \cup \{(v, x) \mid x \in K\})$ é uma k -tree.



(a)



(b)



(c)

Figura: (a) Uma 1-tree (ou seja, uma árvore comum) com 4 vértices. (b) Uma 2-tree com 5 vértices. (c) Uma 3-tree com 5 vértices.

⁴HARARY F., PALMER E. M. On acyclic simplicial complexes. *Mathematika*, 15:115–122, 1968.

k -trees enraizadas

Uma k -tree **enraizada** é uma k -tree com um k -clique destacado $R = \{r_1, r_2, \dots, r_k\}$ que é chamado de **raiz** da k -tree enraizada.

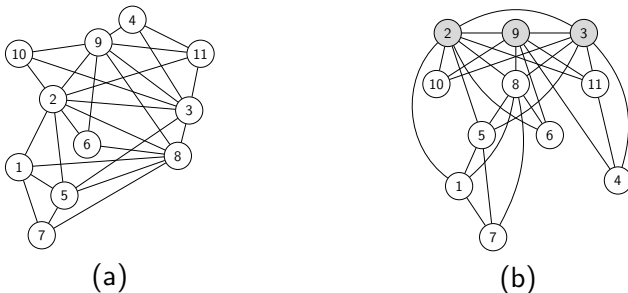


Figura: (a) Uma 3-tree T_3 com 11 vértices. (b) A mesma 3-tree (T_3) enraizada no 3-clique $\{2, 3, 9\}$.

k -tree e $treewidth$

Dado um grafo $G = (V, E)$, seu **$treewidth$** é um inteiro definido da seguinte forma:

- Se G é um **grafo cordal**, então seu $treewidth$ é o tamanho do seu maior clique menos 1.
- Se G é um **grafo não-dirigido arbitrário**, então seu $treewidth$ é o mínimo entre os $treewidth$ de todas as suas cordalizações.
- Se G é um **DAG**, então seu $treewidth$ é o $treewidth$ do seu grafo moral.

Um subgrafo de uma k -tree é chamado de **partial k -tree**. Um grafo é uma *partial k -tree* se e só se ele tem $treewidth$ menor ou igual a k^5 .

⁵BODLAENDER, H. L. $Treewidth$: Structure and algorithms. *Structural Information and Communication Complexity*, 4474:11–25, 2007.

Ilustração de *treewidth*

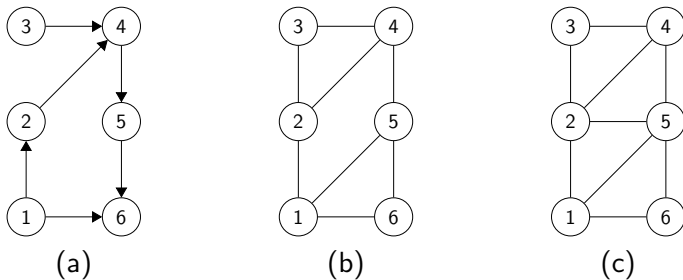


Figura: **(a)** Um grafo acíclico dirigido G . **(b)** Grafo moral G' de G , obtido conectando-se todo par de vértices com um filho em comum e retirando-se a direção das arestas. **(c)** Um dos grafos cordais obtidos por meio da cordalização de G' . O *treewidth* dos três grafos mostrados na figura é 2.

A relação entre geração e codificação

O problema de **gerar** k -trees está intimamente relacionado ao problema de **codificá-las e decodificá-las**.

Se há uma codificação bijetiva que associa k -trees a *strings*, basta gerar *strings* uniformemente aleatórias para gerar k -trees uniformemente aleatórias.

Codificação de k -trees

- Em 1889, Cayley⁶ demonstrou que para um conjunto de n vértices existem n^{n-2} árvores possíveis. Desde lá, foram criados vários códigos para árvores, como o de Prüfer⁷.
- Em 1970, Rényi e Rényi apresentaram uma codificação redundante (ou seja, não bijetiva) para um subconjunto de k -trees rotuladas que chamamos de k -trees de Rényi⁸.
Definição: Uma **k -tree de Rényi** R_k é uma k -tree enraizada com n vértices rotulados em $[1, n]$ e raiz $\{n - k + 1, \dots, n\}$.

⁶CAYLEY, A. A theorem on trees. *Quart J. Math*, 23:376–378, 1889.

⁷PRÜFER, H. Neuer beweis eines satzes über permutationen. *Archiv der Mat. und Physik*, 27:142–144, 1918.

⁸RÉNYI, C., RÉNYI, A. The prüfer code for k -trees. *Combinatorial Theory and its Applications*, 945–971, 1970.

A solução de Caminiti *et al.*

- Apenas em 2008 surgiu um código bijetivo para k -trees com algoritmos lineares de codificação e decodificação. Esses algoritmos, propostos por Caminiti *et al.*, foram implementados neste trabalho.
- O código é formado por uma permutação de tamanho k e uma generalização do *Dandelion Code*⁹. A codificação das k -trees associa elementos em \mathcal{T}_k^n (conjunto das k -trees com n vértices) com elementos em:

$$\mathcal{A}_k^n = \binom{[1, n]}{k} \times (\{(0, \varepsilon)\} \cup ([1, n - k] \times [1, k]))^{n-k-2}$$

⁹EĞECIOĞLU Ö., REMMEL J. B. Bijections for cayley trees, spanning trees, and their q -analogues. *Journal of Combinatorial Theory*, 42:15–30, 1986.

Transformações de Caminiti *et al.* (1/3)

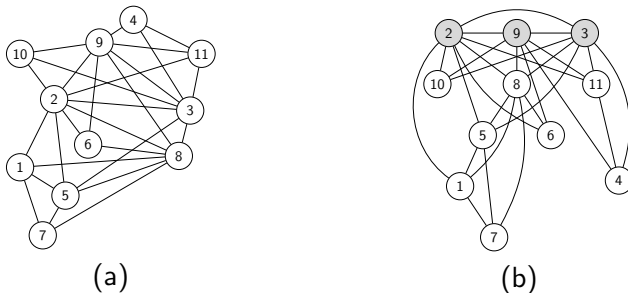


Figura: (a) Uma 3-tree T_3 com 11 vértices. (b) A mesma 3-tree (T_3) enraizada no 3-clique $\{2, 3, 9\}$.

Transformações de Caminiti *et al.* (2/3)

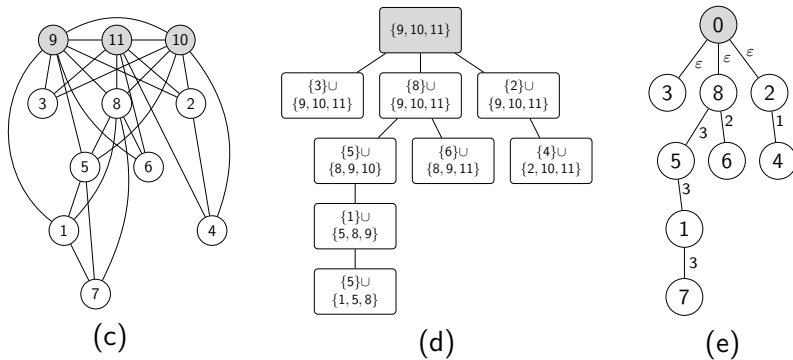


Figura: (c) R_3 , 3-tree de Rényi gerada por meio da re-rotulação de T_3 .
 (d) O esqueleto de R_3 . (e) A árvore característica de R_3 .

Transformações de Caminiti *et al.* (3/3)

Dandelion Code generalizado correspondente a T_3 :

$$\{2, 3, 9\}, [(0, \varepsilon), (2, 0), (8, 2), (8, 1), (1, 2), (5, 2)]$$

Geração uniforme de k -trees

Geramos k -trees uniformemente por meio da geração uniforme de *strings* em:

$$\mathcal{A}_k^n = \binom{[1, n]}{k} \times (\{(0, \varepsilon)\} \cup ([1, n - k] \times [1, k]))^{n-k-2}$$

A biblioteca que desenvolvemos¹⁰ tem três utilitários que rodam na linha de comando:

- `code_ktree` (para codificar k -trees)
- `decode_ktree` (para decodificar *Dandelion Codes*)
- `generate_ktree` (para gerar uma k -tree uniformemente)

¹⁰Implementada em Go e disponível em <https://github.com/tmadeira/tcc>

Testes

- Todos os pacotes desenvolvidos neste trabalho possuem testes unitários que podem ser executados usando o utilitário `go test`. 96% das linhas do código são cobertas por testes¹¹.
- Para mostrar que nossa implementação gera k -trees aleatórias corretamente e uniformemente, realizamos dezenas de milhares de testes com n e k pequenos.

¹¹O relatório de cobertura da ferramenta *Coveralls* pode ser visto em:
<https://coveralls.io/github/tmadeira/tcc?branch=master>

Testes

Exemplo: Com $n = 3$, $k = 1$ existem 3 k -trees rotuladas distintas.

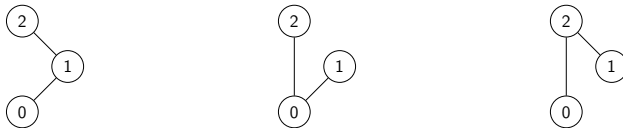


Figura: Representação das três 1-trees rotuladas distintas com $n = 3$ vértices.

Ao executar 10 mil gerações com $n = 3$ e $k = 1$ esperamos que as três 1-trees (árvores) apareçam com frequência similar (aprox. 3333). As frequências que obtivemos:

- 3320
- 3335
- 3345

O que são redes bayesianas?

Redes bayesianas são modelos probabilísticos gráficos¹² que representam distribuições de probabilidade conjunta e são usados para raciocinar em situações com incerteza.

Formalmente: Seja $N = \{1, \dots, n\}$ e seja $X = \{X_i : i \in N\}$ um conjunto de variáveis aleatórias X_i tomando valores em conjuntos finitos \mathcal{X}_i . Uma **rede bayesiana** é uma tripla (X, G, θ) , onde $G = (V, E)$ é um DAG (grafo acíclico dirigido, que chamamos de **estrutura** da rede bayesiana) cujos vértices correspondem a variáveis em X e $\theta = \{\theta_i(x_i, x_{\pi_i})\}$ é um conjunto de parâmetros numéricos especificando valores de probabilidade condicional $\theta_i(x_i, x_{\pi_i}) = P(x_i | x_{\pi_i})$ para todo vértice $i \in V$, valor $x_i \in \mathcal{X}_i$ e atribuição x_{π_i} para os pais π_i de X_i (em G).

¹²KOLLER D., FRIEDMAN N. *Probabilistic Graphical Models: Principles and Techniques*. The MIT Press, 2009.

Exemplo de rede bayesiana

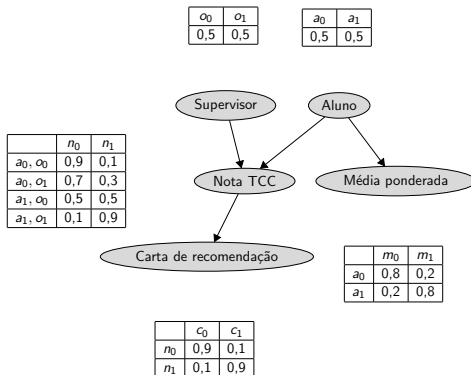


Figura: Exemplo de rede bayesiana com distribuições de probabilidade condicional.

Aprendizado de redes bayesianas

- Aprender uma rede bayesiana se refere ao processo de inferir a sua estrutura (i.e., seu DAG) a partir de dados.
- Inferência em rede bayesiana é NP-difícil até mesmo aproximadamente e todos os algoritmos conhecidos (exatos e comprovadamente bons) têm complexidade no pior caso exponencial no *treewidth*.
- Resultados empíricos sugerem que limitar o *treewidth* pode melhorar a performance dos modelos e não causa perdas significativas na sua expressividade.
- Por isso estamos interessados em fixar k e aprender redes bayesianas cujo DAG tem *treewidth* limitado a k .

Aprendizado de redes bayesianas

Função de *score* $s(G)$ atribui pontuação para cada DAG G e pode ser escrita como soma de funções de *score* locais:

$$s(G) = \sum_{i \in N} s_i(X_{\pi_i}).$$

Para cada variável, sua pontuação só depende do seu conjunto de pais. Portanto, nosso problema é encontrar G^* tal que

$$G^* = \arg \max_{G \in \mathcal{G}_{n,k}} \sum_{i \in N} s_i(\pi_i),$$

onde $\mathcal{G}_{n,k}$ é o conjunto de todos os DAGs de *treewidth* não maior que k . Esse problema é NP-difícil¹³.

¹³KORHONEN J. H., PARVIAINEN P. Exact learning of bounded tree-width bayesian networks. *Proceedings of the 16th International Conference on AISTATS*, 2013.

Aprendizado por amostragem de k -trees

A ideia para aprender um DAG por meio da amostragem de k -trees baseia-se em, para cada k -tree T_k amostrada, construir uma ordem parcial σ dos vértices e fazer com que o DAG G seja consistente com ela e com T_k .

Construímos a ordem parcial σ a partir do enraizamento da k -tree num k -clique qualquer. Em particular, podemos escolher usar a raiz da k -tree de Rényi que aparece durante a decodificação de um *Dandelion Code* em uma k -tree.

Algoritmo para aprender estrutura

Entrada: n , k e função de *score* s_i para cada $i \in [0, n]$

Saída: um DAG G^{melhor}

- 1 Inicializar G^{melhor} como um grafo com $s(G^{\text{melhor}}) = -\infty$.
- 2 Repetir até atingir um determinado número de iterações:
 - 1 Gerar $(Q, S) \in \mathcal{A}_k^n$ e decodificar na árvore característica T ;
 - 2 Sortear ordem pros vértices do k -clique raiz e usar função de *score* para calcular os melhores pais para cada um deles;
 - 3 Percorrer T a partir dos vértices ligados ao k -clique raiz: para cada v , é sorteado um lugar para ele em σ e selecionado seu melhor conjunto de pais dentre os vértices predecessores adjacentes, assim como são atualizados os melhores pais dos vértices sucessores adjacentes;
 - 4 Se $\left(\sum_{i \in [0, n]} s_i(\pi_i^G)\right) = s(G) > s(G^{\text{melhor}})$, atualiza $G^{\text{melhor}} = G$.

Experimentos

Considerações finais (1/2)

- **Principal produto do trabalho:** biblioteca para codificação e geração uniforme de k -trees em tempo linear. Experimentos no aprendizado de redes bayesianas mostram como pode ser usada na prática. O método é eficiente e funciona com grandes domínios e limite alto de *treewidth*.
- Muitos dos **conceitos estudados são recentes e pouco explorados**. Os dois principais artigos (Caminiti *et al.* e Nie *et al.*) foram publicados respec. em 2010 e 2014. O segundo ressalta que simultaneamente ao seu desenvolvimento foram publicados independentemente outros trabalhos intimamente relacionados.

Considerações finais (2/2)

- Extensão interessante deste trabalho seria estudar a **geração de DAGs de treewidth limitado de maneira uniforme**. A geração uniforme de k -trees não resolve esse problema.
- Há **outras amostragens (não uniformes)** que podem ser testadas e comparadas em trabalhos futuros. Outro artigo de Nie *et al.* (2015)¹⁴ sugere um *Distance Preferable Sampling*.
- Embora nova, a linguagem Go se mostrou satisfatória. Acreditamos que suas convenções facilitem o **reaproveitamento futuro do código desenvolvido**.

¹⁴NIE S., CAMPOS C. P., JI Q. *Learning Bounded Treewidth Bayesian Networks via Sampling*, 387–396. Springer International Publishing, Cham, 2015.

Obrigado.

Esta apresentação, a monografia e os códigos desenvolvidos estão disponíveis em <https://github.com/tmadeira/tcc/>

Perguntas?