Относно едната задача от допълнителното упражнение, проведено на 24.04.2024 г.

Задача. Нека $L = \mathcal{L}[\![0^{10}1^* + 0^*1^{10}]\!]$. Да се докаже, че не може да се построи недетерминиран краен автомат $\mathcal{N} = \langle \Sigma, Q, s, \Delta, F\rangle$ с $\mathcal{L}(\mathcal{N}) = L$ и $|Q| \leq 20$.

Решение. Да допуснем, че такъв автомат $\mathcal{N} = \langle \Sigma, Q, s, \Delta, F\rangle$ съществува.

1. За $x \in \{0, 1\}$ знаем, че $x^{10} \in L$, следователно има път от s до някое финално състояние с етикет x^{10}. Нека $p^x_0, p^x_1, \ldots, p^x_{10}$ са състоянията, които се срещат (точно в тази последователност) в този път. Тук отбелязваме, че $p^x_0 = s$ и $p^x_{10} \in F$.

2. Нека за $x \in \{0, 1\}$ дефинираме $P_x = \{p^x_i \mid 0 \leq i \leq 10\}$. Ясно е, че $|P_x| \leq 11$. Тъй като $|P_0 \cup P_1| \leq |Q| \leq 20$, имаме следните възможности:

   1 сл. $|P_x| < 11$ за някое $x \in \{0, 1\}$. Нека б.о.о. $|P_0| < 11$. Тогава има $0 \leq i < j \leq 11$, за които $p^0_i = p^0_j$. Но в такъв случай редицата $p^0_0, \ldots, p^0_{i-1}, p^0_i, p^0_{j+1}, \ldots, p^0_{10}$ ще бъде път от $p^0_0 = s$ до $p^0_{10} \in F$ с етикет $0^{10-(j-i)}$. Това ще означава, че $0^{10-(j-i)} \in \mathcal{L}(\mathcal{N}) = L$, което е абсурд.

   2 сл. $|P_x| = 11$ за $x \in \{0, 1\}$. Тогава $(P_0 \cap P_1) \setminus \{s\} \neq \varnothing$, защото иначе $|Q| \geq |P_0 \cup P_1| = 21 > 20$, което е противоречие. Ще покажем, че единственият елемент на $(P_0 \cap P_1) \setminus \{s\}$ е $p^0_{10} = p^1_{10}$. Тъй като $\mathcal{N}$ не разпознава думи от вида $1^n 0^k$ за $n + k \geq 10$ и $n, k \neq 0$, нямаме преходи със никоя буква от p^1_i до p^0_j за никои $1 \leq i, j \leq 10$. Тогава $p^1_i \notin \{p^0_0, \ldots, p^0_9\}$ за $1 \leq i \leq 10$. Също така понеже $1^t \notin L$ за $t < 10$, за всяко $1 \leq i < 10$ е изпълнено, че $p^1_i \notin F$. Така $p^1_i \notin P_0$ за $1 \leq i < 10$ и $p^1_{10} \notin P_0 \setminus \{p^0_{10}\}$. Тогава остава само възможността p^1_{10} да бъде p^0_{10}. Следователно $P_0 \cup P_1 = Q$, понеже $P_0 \cap P_1 = \{s, p^0_{10}\}$ и $|P_0| = |P_1| = 11$. Така в автомата $\mathcal{N}$ ще има единствено финално състояние $f = p^0_{10} = p^1_{10}$. Тъй като $\mathcal{N}$ разпознава $0^{10}1$, то f има примка с буквата 1, но тогава $1^{11} \in \mathcal{L}(\mathcal{N})$, абсурд.

Във всички случаи получихме противоречие, следователно няма как да има такъв автомат.