Задачи върху (не)безконтекстни езици
2023/2024

1 Безконтекстни езици

Задача 1.1. *Да се докаже, че за всеки безконтекстен език L и за всяко $n \in \mathbb{N}$ е безконтекстен езикът:*

$$\mathrm{Diff}_{\leq n}(L) = \{\alpha_0 \overline{x_1} \alpha_1 \overline{x_2} \alpha_2 \dots \overline{x_k} \alpha_k \mid k \leq n \;\&\; \alpha_i \in \Sigma^* \;\&\; x_i \in \Sigma \\ \&\; \alpha_0 x_1 \alpha_1 x_2 \alpha_2 \dots x_k \alpha_k \in L\},$$

където $\overline{a} = b$ и $\overline{b} = a$.

Упътване. *Могат да се направят следните неща:*

1. *Да се съобрази, че:*

$$\mathrm{Diff}_{\leq 0}(L) = L \text{ и } \mathrm{Diff}_{\leq n+1}(L) = \mathrm{Diff}_{\leq n}(L) \cup \mathrm{Diff}_1(\mathrm{Diff}_{\leq n}(L)).$$

2. *Да се вземе граматика $G = \langle \Sigma, V, S, R \rangle$ в НФЧ за L и да се направи следната граматика G_{diff} за $\mathrm{Diff}_1(L)$:*
   - *променливите са $V \dot\cup \{\dot{A} \mid A \in V\}$;*
   - *началната променлива е $\dot{S}$;*
   - *за всяко правило в G от вида $A \to BC$ имаме същото правило в G_{diff} заедно с правилата $\dot{A} \to \dot{B}C \mid B\dot{C}$;*
   - *за всяко правило в G от вида $A \to x$ имаме същото правило в G_{diff} заедно с правилото $\dot{A} \to \overline{x}$.*
3. *Да се докаже, че $\mathcal{L}_{G_{diff}}(\dot{A}) = \mathrm{Diff}_1(\mathcal{L}_G(A))$.*

Задача 1.2. *Да се докаже, че за всеки безконтекстен език L и за всяко $n \in \mathbb{N}$ е безконтекстен езикът:*

$$\mathrm{Rem}_n(L) = \{\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_n \mid \alpha_i \in \Sigma^* \text{ и има } x_1, \dots, x_n \in \Sigma, \\ \text{за които } \alpha_0 x_1 \alpha_1 x_2 \alpha_2 \dots x_n \alpha_n \in L\}.$$

Упътване. *Да се адаптира конструкцията от Задача 1.1.*

Задача 1.3. *Да се докаже, че за всеки $x, y \in \Sigma$ и за всеки безконтекстен език L е безконтекстен езикът:*

$$\mathrm{SwapNeighbours}_{x,y}(L) = \{\alpha x y \beta \in \Sigma^* \mid \alpha, \beta \in \Sigma^* \ \& \ \alpha y x \beta \in L\}.$$

Упътване. *Да се вземе граматика $G = \langle \Sigma, V, S, R \rangle$ в НФЧ за L и да се направи следната граматика $G_{swap(x,y)}$ за $\mathrm{SwapNeighbours}_{x,y}(L)$:*

- *променливите са $V \dot\cup \{\dot{A} \mid A \in V\} \dot\cup \{\overrightarrow{A}_{x\to y} \mid A \in V\} \dot\cup \{\overleftarrow{A}_{y\to x} \mid A \in V\}$;*
- *началната променлива е $\dot{S}$;*
- *за всяко правило в G от вида $A \to BC$ имаме същото правило в $G_{swap(x,y)}$ заедно с правилата:*
  - $\dot{A} \to \dot{B}C \mid B\dot{C} \mid \overrightarrow{B}_{x\to y}\overleftarrow{C}_{y\to x}$,
  - $\overrightarrow{A}_{x\to y} \to B\overrightarrow{C}_{x\to y}$,
  - $\overleftarrow{A}_{x\to y} \to \overleftarrow{B}_{y\to x}C$;
- *за всяко правило в G от вида $A \to x$ имаме същото правило в $G_{swap(x,y)}$ заедно с правилото $\overrightarrow{A}_{x\to y} \to y$;*
- *за всяко правило в G от вида $A \to y$ имаме същото правило в $G_{swap(x,y)}$ заедно с правилото $\overleftarrow{A}_{x\to y} \to x$.*

След това да се докаже, че:

- $\mathcal{L}_{G_{swap(x,y)}}(\dot{A}) = \mathrm{SwapNeighbours}(\mathcal{L}_G(A))$;
- $\mathcal{L}_{G_{swap(x,y)}}(\overrightarrow{A}_{x\to y}) = \{\alpha y \in \Sigma^* \mid \alpha x \in \mathcal{L}_G(A)\}$;
- $\mathcal{L}_{G_{swap(x,y)}}(\overleftarrow{A}_{y\to x}) = \{x\alpha \in \Sigma^* \mid y\alpha \in \mathcal{L}_G(A)\}$.

Задача 1.4. *Да се докаже, че за всеки безконтекстен език L и регулярен език M е безконтекстен езикът:*

$$L/M = \{\alpha \in \Sigma^* \mid (\exists \beta \in M)(\alpha\beta \in L)\}.$$

Упътване. *Да се адаптира конструкциятата за сечение на безконтекстен език с регулярен, като в листата вместо да генерираме съответните букви генерираме ε.*

Задача 1.5. *Нека с* $\|\alpha\|_L$ *бележим броят префикси на думата* α *от езика* L. *Да се докаже, че за всеки регулярен език* L *е безконтекстен езикът:*

$$\mathrm{EqualPref}(L) = \{\alpha\#\beta \mid \alpha, \beta \in \Sigma^* \;\&\; \|\alpha\|_L = \|\beta^{rev}\|_L\}.$$

Упътване. *Да се вземе детерминиран краен автомат* $\mathcal{A} = \langle \Sigma,\, Q,\, s,\, \delta,\, F \rangle$ *за езика* L *и да се построи следната безконтекстна граматика* G *за* $\mathrm{EqualPref}(L)$*:*

- *променливите са* $\{[p,q] \mid p, q \in Q\}$*;*
- *началната променлива е* $[s,s]$*;*
- *за всяко* $\langle p,\, q \rangle \in (F \times F) \cup ((Q \setminus F) \times (Q \setminus F))$ *и* $x, y \in \Sigma$ *имаме правилата* $[p,q] \to \# \mid x\,[\delta(p,x), \delta(q,y)]\,y$*;*
- *за всяко* $\langle f,\, p \rangle \in F \times (Q \setminus F)$ *и* $x \in \Sigma$ *имаме правилото* $[f,p] \to [f, \delta(p,x)]\,x$*;*
- *за всяко* $\langle p,\, f \rangle \in (Q \setminus F) \times F$ *и* $x \in \Sigma$ *имаме правилото* $[p,f] \to x\,[\delta(p,x), f]$.

Нека дефинираме:

$$\mathcal{L}_{\mathcal{A}}(p) = \{\alpha \in \Sigma^* \mid \delta^*(p,\alpha) \in F\}.$$

Да се докаже, че:

$$\mathcal{L}_G([p,q]) = \{\alpha\#\beta \mid \alpha, \beta \in \Sigma^* \;\&\; \|\alpha\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{A}}(p)} = \|\beta^{rev}\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{A}}(q)}\}.$$

2 Небезконтекстни езици

Задача 2.1. *Да се докаже, че не е безконтекстен езикът:*

$$L_{suff} = \{\alpha\#\beta \in \Sigma^* \mid \alpha, \beta \in \Sigma^* \text{ и } \alpha \text{ е суфикс на } \beta\}.$$

Упътване. *Да се разгледат думите от вида* $a^p b^p \# a^p b^p$*, където* $p \geq 1$.

Задача 2.2. *Да се докаже, че съществува безконтекстен език* L*, за който не е безконтекстен езикът:*

$$\mathrm{GraphCount}_a(L) = \{\alpha\#a^{|\alpha|_a} \mid \alpha \in L\}.$$

Упътване. *Да се разгледа езика* $L = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Задача 2.3. *Да се докаже, че съществува безконтекстен език* L*, за който не е безконтекстен езикът:*

$$\mathrm{HalfRev}(L) = \{\alpha\beta^{rev} \in \Sigma^* \mid \alpha\beta \in L \,\&\, |\alpha| = |\beta|\}.$$

Упътване. *Да се разгледа езика* $L = \{a^n b^m c^m a^n \mid n, m \in \mathbb{N}\}$.

Задача 2.4. *Да се докаже, че съществува безконтекстен език* L*, за който не е безконтекстен езикът:*

$$\mathrm{Both}(L) = \{\alpha\beta\gamma \in \Sigma^* \mid \alpha\beta \in L \,\&\, \beta\gamma \in L \,\&\, |\alpha| = |\beta| = |\gamma|\}.$$

Упътване. *Да се разгледа езика* $L = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{b^n a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Задача 2.5. *За две думи* $\alpha, \beta \in \Sigma^*$ *казваме, че* α *се* (L_1, L_2)*-разширява до* β *от ляво и пишем* $\alpha \overset{(L_1,L_2)}{\underset{left}{\longmapsto}} \beta$*, ако* $\alpha = \alpha_1\gamma\alpha_2$ *за някои* $\alpha_1, \alpha_2 \in \Sigma^*, \gamma \in L_1$ *и* $\beta = \delta\alpha$ *за някое* $\delta \in L_2$ *със* $|\delta| = |\gamma|$*. Да се докаже, че съществува безконтекстен език* L *и регулярни езици* L_1, L_2*, за които не е безконтекстен езикът:*

$$\mathrm{ExpandLeft}_{L_1,L_2}(L) = \{\beta \in \Sigma^* \mid (\exists \alpha \in L)(\alpha \overset{(L_1,L_2)}{\underset{left}{\longmapsto}} \beta)\}.$$

Упътване. *Да се разгледат езиците* $L_1 = \{b\}^*, L_2 = \{a\}^*$ *и* $L = \{b^n a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.