# Решения на задачите от писмен изпит по ЕАИ на специалност "Информатика", проведено на 23 януари 2024 г.

**Задача 1. (1 т)** *Нека $G$ е граматиката с начална променлива $S$, зададена чрез следните правила:*

$$S \to aT \mid aM \mid aX$$
$$T \to bS \mid \varepsilon$$
$$M \to bM \mid bX \mid \varepsilon$$
$$X \to aS$$

*Да се построи краен детерминиран автомат $\mathcal{A}$, за който е изпълнено $\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \mathcal{L}(G)$, като се използват изучавани конструкции или се докаже коректността на автомата.*

**Решение.** Първо строим недетерминиран автомат $\mathcal{N}$ и после го детерминизираме, за да получим $\mathcal{A}$:

| $\mathcal{N}$ | $a$ | $b$ |
|---|---|---|
| $\to s$ | $t, m, x$ | |
| $*t$ | | $s$ |
| $*m$ | | $m, x$ |
| $x$ | $s$ | |

НКА $\mathcal{N}$ за $\mathcal{L}(G)$

| $\mathcal{A}$ | $a$ | $b$ |
|---|---|---|
| $\to s$ | $t, m, x$ | $\varnothing$ |
| $*t, m, x$ | $s$ | $s, m, x$ |
| $*s, m, x$ | $s, t, m, x$ | $m, x$ |
| $*s, t, m, x$ | $s, t, m, x$ | $s, m, x$ |
| $*m, x$ | $s$ | $m, x$ |
| $\varnothing$ | $\varnothing$ | $\varnothing$ |

ДКА $\mathcal{A}$ за $\mathcal{L}(\mathcal{N}) = \mathcal{L}(G)$

През цялото време сме използвали изучавани конструкции, така че няма какво да доказваме.

**Задача 2. (2 т)**

- **(1 т)** *Докажете, че следният език е регулярен:*

$$L_1 = \{a^n \# a^{m \cdot (n \ mod\ 2)} b^{m \cdot ((n+1) \ mod\ 2)} \mid n, m \in \mathbb{N}\}$$

- **(1 т)** *Докажете, че следният език не е регулярен:*

$$L_2 = \{a^n \# a^{m \cdot (n \ mod\ 2)} b^{m \cdot ((n+1) \ mod\ 3)} \mid n, m \in \mathbb{N}\}$$

**Решение.** За $L_1$ получаваме следното изразяване:

$$L_1 = \{a^n \# a^{m\cdot(n \ mod\ 2))} \underbrace{b^{m\cdot(n+1 \ mod\ 2)}}_{\substack{\varepsilon,\text{ понеже} \\ (n+1 \ mod\ 2)=0}} \mid n, m \in \mathbb{N} \,\&\, n \text{ е нечетно}\} \cup \{a^n \# \underbrace{a^{m\cdot(n \ mod\ 2))}}_{\substack{\varepsilon,\text{ понеже} \\ (n \ mod\ 2)=0}} b^{m\cdot(n+1 \ mod\ 2)} \mid n, m \in \mathbb{N} \,\&\, n \text{ е четно}\}$$
$$= \{a^n \# a^m \mid n, m \in \mathbb{N} \,\&\, n \text{ е нечетно}\} \cup \{a^n \# b^m \mid n, m \in \mathbb{N} \,\&\, n \text{ е четно}\}$$
$$= (\{a^n \mid n \in \mathbb{N} \,\&\, n \text{ е нечетно}\} \cdot \{\#\} \cdot \{a\}^*) \cup (\{a^n \mid n \in \mathbb{N} \,\&\, n \text{ е четно}\} \cdot \{\#\} \cdot \{b\}^*)$$
$$= (\{a^{2n+1} \mid n \in \mathbb{N}\} \cdot \{\#\} \cdot \{a\}^*) \cup (\{a^{2n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cdot \{\#\} \cdot \{b\}^*)$$
$$= (\{a\} \cdot \{a^{2n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cdot \{\#\} \cdot \{a\}^*) \cup (\{a^{2n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cdot \{\#\} \cdot \{b\}^*)$$
$$= (\{a\} \cdot \{(aa)^n \mid n \in \mathbb{N}\} \cdot \{\#\} \cdot \{a\}^*) \cup (\{(aa)^n \mid n \in \mathbb{N}\} \cdot \{\#\} \cdot \{b\}^*)$$
$$= (\{a\} \cdot \{aa\}^* \cdot \{\#\} \cdot \{a\}^*) \cup (\{aa\}^* \cdot \{\#\} \cdot \{b\}^*)$$

Получихме $L_1$ чрез прилагане на регулярните операции, започвайки от регулярни езици. Така $L_1$ е регулярен.

За $L_2$ нека разгледаме класовете от вида $[a\#a^n]_{\approx_{L_2}}$. Нека $n, k \in \mathbb{N}$ и $n \neq k$. Тогава:

- $a\#a^{n(1 \; mod \; 2)}b^{n(1+1 \; mod \; 3)} = a\#a^n b^{2n} \in L$
- $a\#a^{k(1 \; mod \; 2)}b^{n(1+1 \; mod \; 3)} = a\#a^k b^{2n} \notin L$, понеже $n \neq k$

От тук можем да заключим, че $a\#a^n \not\approx_{L_2} a\#a^k$ за $n \neq k$. Така намерихме безброй много елементи на множеството $\{[\alpha]_{\approx_{L_2}} \mid \alpha \in \Sigma^*\}$, откъдето $L_2$ не е регулярен.

**Задача 3. (1 т)** *Нека $L = \{\omega.\omega^{rev} \mid \omega \in \{a, b\}^*\}$. Докажете, че следният език е контекстно-свободен:*

$$L_3 = \{a^n b^n \# \beta \mid n \in \mathbb{N} \,\&\, \beta \in L^{(n \; mod \; 3)}\}$$

**Решение.** За $L_3$ получаваме следното изразяване:

$$\begin{aligned} L_3 &= \bigcup_{r \in \{0,1,2\}} (\{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N} \,\&\, (n \; mod \; 3) = r\} \cdot L^r) \\ &= \bigcup_{r \in \{0,1,2\}} (\{a^r\} \cdot \{a^{3n} b^{3n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cdot \{b^r\} \cdot L^r) \end{aligned}$$

Достатъчно е да направим граматики за $\{a^{3n} b^{3n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ и $L$:

$$S \to aaaSbbb \mid \varepsilon \text{ - граматика за } \{a^{3n} b^{3n} \mid n \in \mathbb{N}\}$$

$$S_L \to aS_L a \mid bS_L b \mid \varepsilon \text{ - граматика за } L$$

Коректността на тези или подобни граматики е доказвана на упражнение, но на изпита се очаква от студента да направи доказателство.