

Няколко задачи за (не)регулярност

2023/2024

1 Конструкции с автомати

Задача 1.1. Да се докаже, че за всеки два регулярни езика L_1, L_2 , е регулярен и езикът:

$$L = \{a_1 b_1 \dots a_n b_n \mid n \in \mathbb{N} \ \& \ a_i, b_i \in \Sigma \ \& \ a_1 \dots a_n \in L_1 \ \& \ b_1 \dots b_n \in L_2\}$$

Решение. Нека вземем ДКА $\mathcal{A}_i = \langle \Sigma, Q_i, s_i, \delta_i, F_i \rangle$ за L_i , където $i = 1, 2$.

Строим автомат $\mathcal{A} = \langle \Sigma, Q, s, \delta, F \rangle$ за L :

- $Q = Q_1 \times Q_2 \times \{0, 1\}$
- $s = \langle s_1, s_2, 0 \rangle$
- $\delta(\langle p_1, p_2, 0 \rangle, x) = \langle \delta_1(p_1, x), p_2, 1 \rangle$
- $\delta(\langle p_1, p_2, 1 \rangle, x) = \langle p_1, \delta_2(p_2, x), 0 \rangle$
- $F = F_1 \times F_2 \times \{0\}$

Сега ще покажем с индукция по $|\alpha|$, че:

$$(\star) \begin{cases} 1. \text{ ако } \alpha = \alpha_1 \dots \alpha_{2n} \text{ за някои } n \in \mathbb{N}, \alpha_1, \dots, \alpha_{2n} \in \Sigma \text{ то:} \\ \delta^*(\langle s_1, s_2, 0 \rangle, \alpha) = \langle \delta_1^*(s_1, \alpha_1 \alpha_3 \dots \alpha_{2n-1}), \delta_2^*(s_2, \alpha_2 \alpha_4 \dots \alpha_{2n}), 0 \rangle \\ 2. \text{ ако } \alpha = \alpha_1 \dots \alpha_{2n+1} \text{ за някои } n \in \mathbb{N}, \alpha_1, \dots, \alpha_{2n+1} \in \Sigma, \text{ то:} \\ \delta^*(\langle s_1, s_2, 0 \rangle, \alpha) = \langle \delta_1^*(s_1, \alpha_1 \alpha_3 \dots \alpha_{2n+1}), \delta_2^*(s_2, \alpha_2 \alpha_4 \dots \alpha_{2n}), 1 \rangle \end{cases}$$

- в базата имаме $\delta^*(\langle s_1, s_2, 0 \rangle, \varepsilon) = \langle s_1, s_2, \varepsilon \rangle = \langle \delta_1^*(s_1, \varepsilon), \delta_2^*(s_2, \varepsilon), 0 \rangle$
- индукционната стъпка е следната:

$$\begin{aligned} \delta^*(\langle s_1, s_2, 0 \rangle, \alpha_1 \dots \alpha_{2n}) &\stackrel{\text{деф}}{=} \delta(\delta^*(\langle s_1, s_2, 0 \rangle, \alpha_1 \dots \alpha_{2n-1}), \alpha_{2n}) \\ &\stackrel{(\text{ИП})}{=} \delta(\langle \delta_1^*(s_1, \alpha_1 \alpha_3 \dots \alpha_{2n-1}), \delta_2^*(s_2, \alpha_2 \alpha_4 \dots \alpha_{2n-2}), 1 \rangle, \alpha_{2n}) \\ &\stackrel{\text{деф}}{=} \delta \langle \delta_1^*(s_1, \alpha_1 \alpha_3 \dots \alpha_{2n-1}), \delta_2(\delta_2^*(s_2, \alpha_2 \alpha_4 \dots \alpha_{2n-2}), \alpha_{2n}), 0 \rangle \\ &\stackrel{\text{деф}}{=} \delta_2^* \langle \delta_1^*(s_1, \alpha_1 \alpha_3 \dots \alpha_{2n-1}), \delta_2^*(s_2, \alpha_2 \alpha_4 \dots \alpha_{2n}), 0 \rangle \\ \\ \delta^*(\langle s_1, s_2, 0 \rangle, \alpha_1 \dots \alpha_{2n+1}) &\stackrel{\text{деф}}{=} \delta(\delta^*(\langle s_1, s_2, 0 \rangle, \alpha_1 \dots \alpha_{2n}), \alpha_{2n+1}) \\ &\stackrel{(\text{ИП})}{=} \delta(\langle \delta_1^*(s_1, \alpha_1 \alpha_3 \dots \alpha_{2n-1}), \delta_2^*(s_2, \alpha_2 \alpha_4 \dots \alpha_{2n}), 0 \rangle, \alpha_{2n+1}) \\ &\stackrel{\text{деф}}{=} \delta \langle \delta_1(\delta_1^*(s_1, \alpha_1 \alpha_3 \dots \alpha_{2n-1}), \alpha_{2n+1}), \delta_2^*(s_2, \alpha_2 \alpha_4 \dots \alpha_{2n}), 1 \rangle \\ &\stackrel{\text{деф}}{=} \delta_1^* \langle \delta_1^*(s_1, \alpha_1 \alpha_3 \dots \alpha_{2n+1}), \delta_2^*(s_2, \alpha_2 \alpha_4 \dots \alpha_{2n}), 1 \rangle \end{aligned}$$

Имайки (\star) , получаваме следните еквивалентности:

$$\begin{aligned} \alpha \in \mathcal{L}(\mathcal{A}) &\stackrel{\text{деф}}{\iff} \delta^*(\underbrace{\langle s_1, s_2 \rangle}_s, \alpha) \in F_1 \times F_2 \times \{0\} \text{ // тук } 0 \text{ казва, че думата е с четна дължина} \\ &\stackrel{(\star)}{\iff} \text{ има } n \in \mathbb{N} \text{ и } \alpha_1, \dots, \alpha_{2n} \in \Sigma \text{ такива, че } \underbrace{\delta_1^*(s_1, \alpha_1 \alpha_3 \dots \alpha_{2n-1}) \in F_1}_{\alpha_1 \alpha_3 \dots \alpha_{2n-1} \in L_1} \text{ и } \underbrace{\delta_2^*(s_2, \alpha_2 \alpha_4 \dots \alpha_{2n}) \in F_2}_{\alpha_2 \alpha_4 \dots \alpha_{2n} \in L_2} \\ &\stackrel{\text{деф}}{\iff} \alpha_1 \dots \alpha_{2n} \in L \end{aligned}$$

Задача 1.2. Да се докаже, че за всеки регулярен език L , езикът $L' = \{\alpha \in \Sigma^* \mid \alpha\alpha \in L\}$ също е регулярен.

Решение. Нека вземем ДКА $\mathcal{A} = \langle \Sigma, Q, s, \delta, F \rangle$ за L . Нека $Q = \{q_1, \dots, q_n\}$ като Б.О.О. $q_1 = s$. Строим автомат $\mathcal{A}' = \langle \Sigma, Q', s', \delta', F' \rangle$ за L' :

- $Q' = Q^n$
- $s' = \langle q_1, \dots, q_n \rangle$
- $\delta'(\langle p_1, \dots, p_n \rangle, x) = \langle \delta(p_1, x), \dots, \delta(p_n, x) \rangle$
- $F' = \{\langle p_1, \dots, p_n \rangle \in Q' \mid (\exists i \in \{1, \dots, n\})(p_i = q_i \ \& \ p_i \in F)\}$

Сега ще докажем, че $\underbrace{\delta'^*(\langle p_1, \dots, p_n \rangle, \alpha) = \langle \delta^*(p_1, \alpha), \dots, \delta^*(p_n, \alpha) \rangle}_{(*)}$ с индукция по $|\alpha|$:

- в базата имаме $\delta'^*(\langle p_1, \dots, p_n \rangle, \varepsilon) = \langle p_1, \dots, p_n \rangle = \langle \delta^*(p_1, \varepsilon), \dots, \delta^*(p_n, \varepsilon) \rangle$
- индукционната стъпка е следната:

$$\begin{aligned} \delta'^*(\langle p_1, \dots, p_n \rangle, \beta x) &\stackrel{\text{деф}}{=} \delta'^*(\delta'^*(\langle p_1, \dots, p_n \rangle, \beta), x) \stackrel{(\text{ИП})}{=} \delta'(\langle \delta^*(p_1, \beta), \dots, \delta^*(p_n, \beta) \rangle, x) \\ &\stackrel{\text{деф}}{=} \delta'(\langle \delta^*(p_1, \beta), x \rangle, \dots, \langle \delta^*(p_n, \beta), x \rangle) \stackrel{\text{деф}}{=} \langle \delta^*(p_1, \beta x), \dots, \delta^*(p_n, \beta x) \rangle \end{aligned}$$

Имайки $(*)$, получаваме следните еквивалентности:

$$\begin{aligned} \alpha \in \mathcal{L}(\mathcal{A}') &\stackrel{\text{деф}}{\iff} \underbrace{\delta'^*(\langle q_1, \dots, q_n \rangle, \alpha)}_{s'} \in F' \stackrel{(*)}{\iff} \langle \delta^*(q_1, \alpha), \dots, \delta^*(q_n, \alpha) \rangle \in F' \\ &\stackrel{\text{деф}}{\iff} (\exists i \in \{1, \dots, n\})(\underbrace{\delta^*(s, \alpha)}_{q_1} = q_i \ \& \ \delta^*(q_i, \alpha) \in F) \iff \delta^*(s, \alpha\alpha) \in F \stackrel{\text{деф}}{\iff} \alpha\alpha \in \mathcal{L}(\mathcal{A}) = L \end{aligned}$$

Задача 1.3. Да се докаже, че за всеки регулярен език L , езикът $L' = \{\alpha \in \Sigma^* \mid \alpha\alpha^{rev} \in L\}$ също е регулярен.

Решение. Нека вземем ДКА $\mathcal{A} = \langle \Sigma, Q, s, \delta, F \rangle$ за L . Строим автомат $\mathcal{A}' = \langle \Sigma, Q', s', \delta', F' \rangle$ за L' :

- $Q' = Q \times \mathcal{P}(Q)$
- $s' = \langle s, F \rangle$
- $\delta'(\langle p, P \rangle, x) = \langle \delta(p, x), \{q \in Q \mid \delta(q, x) \in P\} \rangle$
- $F' = \{\langle p, P \rangle \in Q' \mid p \in P\}$

Сега ще докажем, че $\underbrace{\delta'^*(\langle p, P \rangle, \alpha) = \langle \delta^*(p, \alpha), \{q \in Q \mid \delta^*(q, \alpha) \in P\} \rangle}_{(*)}$ с индукция по $|\alpha|$:

- в базата имаме $\delta'^*(\langle p, P \rangle, \varepsilon) = \langle p, P \rangle = \langle \delta^*(p, \varepsilon), \{q \in Q \mid \delta^*(q, \varepsilon^{rev}) \in P\} \rangle$
- индукционната стъпка е следната:

$$\begin{aligned} \delta'^*(\langle p, P \rangle, \beta x) &= \langle p, P \rangle \stackrel{\text{деф}}{=} \delta'^*(\delta'^*(\langle p, P \rangle, \beta), x) \stackrel{(\text{ИП})}{=} \delta'(\langle \delta^*(p, \beta), \{q \in Q \mid \delta^*(q, \beta^{rev}) \in P\} \rangle, x) \\ &\stackrel{\text{деф}}{=} \langle \delta(\delta^*(p, \beta), x), \{q \in Q \mid \delta^*(\delta(q, x), \beta^{rev}) \in P\} \rangle \\ &\stackrel{\text{св}}{=} \langle \delta^*(p, \beta x), \{q \in Q \mid \delta^*(q, (\beta x)^{rev}) \in P\} \rangle \end{aligned}$$

Имайки $(*)$, получаваме следните еквивалентности:

$$\begin{aligned} \alpha \in \mathcal{L}(\mathcal{A}') &\stackrel{\text{деф}}{\iff} \underbrace{\delta'^*(\langle s, F \rangle, \alpha)}_{s'} \in F' \stackrel{(*)}{\iff} \langle \delta^*(s, \alpha), \{q \in Q \mid \delta^*(q, \alpha^{rev}) \in F\} \rangle \in F' \\ &\stackrel{\text{деф}}{\iff} \delta^*(\delta^*(s, \alpha), \alpha^{rev}) \in F \stackrel{\text{св}}{\iff} \delta^*(s, \alpha\alpha^{rev}) \in F \stackrel{\text{деф}}{\iff} \alpha\alpha^{rev} \in \mathcal{L}(\mathcal{A}) = L \end{aligned}$$

Задача 1.4. Нека $c, \# \notin \Sigma$ и $c \neq \#$. Да се докаже, че за всеки регулярен език L е регулярен езикът

$$L' = \{\alpha \# c^n \mid n \in \mathbb{N} \ \& \ \alpha^n \in L\}$$

Упътване: да се използва техниката от Задача 1.2

Задача 1.5. Нека за всяко $\alpha, \beta \in \Sigma^*$ с $s(\alpha, \beta)$ да бележим броят на срещания на β на α . Да се докаже, че е регулярен езикът:

$$L = \{\alpha \in \Sigma^* \mid s(\alpha, aa) \text{ е четно} \}$$

Решение. Нека дефинираме функцията $last : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^{\leq 2}$ по следния начин:

- $last(\varepsilon) = \varepsilon$
- $last(x) = x$ за всяко $x \in \Sigma$
- $last(\beta xy) = xy$ за всяко $x, y \in \Sigma$

Можем да забележим, че за всяко $\alpha, \beta \in \Sigma^*$ имаме $last(\alpha\beta) = last(last(\alpha)\beta)$.

Строим $\mathcal{A} = \langle \Sigma, Q, s, \delta, F \rangle$ за L :

- $Q = \Sigma^{\leq 2} \times \{0, 1\}$
- $s = \langle \varepsilon, 0 \rangle$
- $\delta(\langle \beta, c \rangle, x) = \langle last(\beta x), c' \rangle$, където $c' = \begin{cases} 1 - c & \text{ако } last(\beta x) = aa \\ c & \text{иначе} \end{cases}$
- $F = \Sigma^{\leq 2} \times \{0\}$

Сега ще покажем, че $\underbrace{\delta^*(s, \alpha) = \langle last(\alpha), s(\alpha, aa) \pmod{2} \rangle}_{(*)}$ с индукция по $|\alpha|$:

- в базата имаме $\delta^*(s, \alpha) = s = \langle \varepsilon, 0 \rangle = \langle last(\alpha), s(\alpha, 2) \rangle$
- индукционната стъпка е следната:

$$\delta^*(s, \beta x) \stackrel{\text{деф}}{=} \delta^*(\delta^*(s, \beta), x) \stackrel{(\text{ИП})}{=} \delta(\langle last(\beta), s(\beta, aa) \pmod{2} \rangle, x) \stackrel{\text{деф}}{=} \delta(\langle last(last(\beta)x), c \rangle \stackrel{\text{заб}}{=} \langle last(\beta x), c \rangle, \text{ където}$$

$$c = \begin{cases} 1 - s(\beta, aa) & \text{ако } last(\beta x) = aa \\ s(\beta, aa) & \text{ако } last(\beta x) \neq aa \end{cases}$$

Когато $last(\beta x) = aa$, то тогава ние сме имали ново срещане на aa и наистина трябва да сменим четността. В противен случай ще бъде коректно да не сменяме нищо. Значи нашата конструкция наистина прави това, което искаме.

Имайки $(*)$, получаваме следните еквивалентности:

$$\alpha \in \mathcal{L}(\mathcal{A}) \stackrel{\text{деф}}{\iff} \delta^*(s, \alpha) \in F \stackrel{(*)}{\iff} \langle last(\alpha), s(\alpha, aa) \pmod{2} \rangle \in \Sigma^{\leq 2} \times \{0\} \iff s(\alpha) \text{ е четно} \stackrel{\text{деф}}{\iff} \alpha \in L$$

Задача 1.6. Нека фиксираме $\beta_1, \beta_2 \in \Sigma^*$. Да се докаже, че е регулярен езикът

$$L_{\text{odd}}(\beta_1, \beta_2) = \{\alpha \in \Sigma^* \mid s(\alpha, \beta_1) + s(\alpha, \beta_2) \text{ е нечетно} \}$$

Упътване: да се използва техниката от Задача 1.5

Задача 1.7. Да се докаже, че езикът $L = \{\alpha \in \{1, 2\}^* \mid \text{сумата на всички инфикси е четна}\}$ е регулярен.

2 Индукции по строенето на регулярните езици

Задача 2.1. Да се докаже, че за всеки регулярен език L , езикът $\text{Prefix}(L)$ също е регулярен.

Решение. Доказваме с индукция по строенето на регулярните езици:

- $\text{Prefix}(\emptyset) = \emptyset$ - регулярен, $\text{Prefix}(\{\varepsilon\}) = \{\varepsilon\}$ - регулярен, $\text{Prefix}(\{a\}) = \{\varepsilon, a\}$ - регулярен
- $\text{Prefix}(L_1 \cup L_2) = \underbrace{\text{Prefix}(L_1)}_{\text{рег по (ИП)}} \cup \underbrace{\text{Prefix}(L_2)}_{\text{рег по (ИП)}}$ - регулярен
- $\text{Prefix}(L_1 \cdot L_2) = \underbrace{\text{Prefix}(L_1)}_{\text{рег по (ИП)}} \cup (L_1 \cdot \underbrace{\text{Prefix}(L_2)}_{\text{рег по (ИП)}})$ - регулярен

Нека се опитаме да си представим защо това равенство наистина е такова. Нека $\alpha_1 \in L_1$ и $\alpha_2 \in L_2$.

Тогава имаме две възможности за β да бъде префикс на $\alpha_1\alpha_2$:

1 сл. β е префикс само на α_1 :

β	...
α_1	α_2

2 сл. β напълно съдържа α_1 заедно с част от α_2 :

β	...
α_1	α_2

- $\text{Prefix}(L^*) = L^* \cdot \underbrace{\text{Prefix}(L)}_{\text{рег по (ИП)}}$ - регулярен

Тук имаме обобщение на обединението и конкатенацията.

Задача 2.2. Да се докаже, че за всеки регулярен език L , езикът $\text{Suffix}(L)$ също е регулярен.

Упътване: могат да се направят подобни разсъждения на Задача 2.1

Задача 2.3. Да се докаже, че за всеки регулярен език L , езикът $\text{Infix}(L)$ също е регулярен.

Упътване: да се помисли какво общо има операцията Infix със операциите Prefix и Suffix

Задача 2.4. Да се докаже, че за всеки регулярен език L , езикът L^{rev} също е регулярен.

Решение. Доказваме с индукция по строенето на регулярните езици:

- $\emptyset^{\text{rev}} = \emptyset$ - регулярен, $\{\varepsilon\}^{\text{rev}} = \{\varepsilon\}$ - регулярен, $\{a\}^{\text{rev}} = \{a\}$ - регулярен
- $(L_1 \cup L_2)^{\text{rev}} = \underbrace{L_1^{\text{rev}}}_{\text{рег по (ИП)}} \cup \underbrace{L_2^{\text{rev}}}_{\text{рег по (ИП)}}$ - регулярен
- $(L_1 \cdot L_2)^{\text{rev}} = \underbrace{L_2^{\text{rev}}}_{\text{рег по (ИП)}} \cdot \underbrace{L_1^{\text{rev}}}_{\text{рег по (ИП)}}$ - регулярен

За да се убеди човек в това равенство може да мисли на ниво думи т.е. за $(\alpha \cdot \beta)^{\text{rev}} = \beta^{\text{rev}} \cdot \alpha^{\text{rev}}$.

- $(L^*)^{\text{rev}} = (\underbrace{L^{\text{rev}}}_{\text{рег по (ИП)}})^*$ - регулярен

Тук имаме обобщение на обединението и конкатенацията.

Задача 2.5. Да се докаже, че за всеки регулярен език L , езикът $\text{Subseq}(L)$, съставен от всички подредици на думи от L , също е регулярен.

Задача 2.6. Да се докаже, че за всеки регулярен език $L \subseteq \Sigma_1^*$ и хомоморфизъм $h : \Sigma_1^* \rightarrow \Sigma_2^*$, езикът $h[L]$ също е регулярен.

Задача 2.7. Да се докаже, че за всеки регулярен език $L \subseteq \Sigma_1^*$ и регулярен хомоморфизъм $h : \Sigma_1^* \rightarrow \mathcal{P}(\Sigma_2^*)$, е регулярен езикът:

$$\bigcup_{\alpha \in L} h(\alpha)$$

3 Нерегулярни езици

Задача 3.1. Да се докаже, че езикът $L = \{a^{1+2+\dots+n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ не е регулярен.

Решение. Нека $n, k \in \mathbb{N}$ и $n > k$. Тогава $a^{n+1}a^{1+\dots+n} = a^{1+\dots+n+(n+1)} \in L$, но понеже $k < n$, имаме неравенствата $1 + \dots + n < 1 + \dots + n + (k+1) < 1 + \dots + n + (n+1)$, откъдето заключаваме, че $a^{k+1}a^{1+\dots+n} \notin L$. Така получаваме, че $a^{1+\dots+n} \in (a^{n+1})^{-1}(L)$ и $a^{1+\dots+n} \notin (a^{k+1})^{-1}(L)$, откъдето $(a^{n+1})^{-1}(L) \neq (a^{k+1})^{-1}(L)$. Намерихме безкрайно подмножество $\{(a^{n+1})^{-1}(L) \mid n \in \mathbb{N}\}$ на $\{\alpha^{-1}(L) \mid \alpha \in \Sigma^*\}$, откъдето L не е регулярен.

Задача 3.2. Да се докаже, че езикът $L = \{a^{n!} \mid n \in \mathbb{N}\}$ не е регулярен.

Решение. Нека $n, k \in \mathbb{N}$ и $n > k$. Тогава $a^{n!}a^{n!n} = a^{n!+n!n} = a^{n!(n+1)} = a^{(n+1)!} \in L$. Обаче понеже $k < n$, имаме неравенствата $n! < k! + n!n < n! + n!n = (n+1)!$, откъдето $a^{k!}a^{n!n} \notin L$. Така получаваме, че $a^{n!n} \in (a^{n!})^{-1}(L)$ и $a^{n!n} \notin (a^{k!})^{-1}(L)$, откъдето $(a^{n!})^{-1}(L) \neq (a^{k!})^{-1}(L)$. Намерихме безкрайно подмножество $\{(a^{n!})^{-1}(L) \mid n \in \mathbb{N}\}$ на $\{\alpha^{-1}(L) \mid \alpha \in \Sigma^*\}$, откъдето L не е регулярен.

Задача 3.3. Да се докаже, че езикът $L = \{a^{F_n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ не е регулярен, където F_n е n -тото число на Фибоначи.

Решение. Нека $n, k \in \mathbb{N}$ са такива, че $2 \leq k < n$. Имаме, че $a^{F_n}a^{F_{n+1}} = a^{F_n+F_{n+1}} = a^{F_{n+2}} \in L$. Понеже $2 \leq k < n$, имаме неравенството $F_k < F_n$, откъдето $F_{n+1} < F_{n+1} + F_k < F_{n+1} + F_n = F_{n+2}$. Така получаваме, че $a^{F_k}a^{F_{n+1}} \notin L$. Следователно $a^{F_{n+1}} \in (a^{F_n})^{-1}(L)$ и $a^{F_{n+1}} \notin (a^{F_k})^{-1}(L)$, откъдето $(a^{F_n})^{-1}(L) \neq (a^{F_k})^{-1}(L)$. Намерихме безкрайно подмножество $\{(a^{F_n})^{-1}(L) \mid n \in \mathbb{N} \text{ \& } n \geq 2\}$ на $\{\alpha^{-1}(L) \mid \alpha \in \Sigma^*\}$, откъдето L не е регулярен.

Задача 3.4. Да се докаже, че езикът $L = \{a^n b^m \mid n, m \in \mathbb{N} \text{ \& } \text{GCD}(n, m) = 1\}$ не е регулярен.

Решение. Нека с p_n бележим n -тото просто число ($p_0 = 2, p_1 = 3, p_2 = 5$ и така нататък). Нека $n, k \in \mathbb{N}$. Очевидно $\text{GCD}(p_n, p_k) = 1$, откъдето $a^{p_n}b^{p_k} \in L$. Също така понеже $\text{GCD}(p_k, p_k) = p_k \neq 1$, имаме $a^{p_k}b^{p_k} \notin L$. Така получаваме, че $b^{p_k} \in (a^{p_n})^{-1}(L)$ и $b^{p_k} \notin (a^{p_k})^{-1}(L)$, откъдето $(a^{p_n})^{-1}(L) \neq (a^{p_k})^{-1}(L)$. Намерихме безкрайно (понеже простите числа са безброй много) подмножество $\{(a^{p_n})^{-1}(L) \mid n \in \mathbb{N}\}$ на $\{\alpha^{-1}(L) \mid \alpha \in \Sigma^*\}$, откъдето L не е регулярен.

Задача 3.5. Да се докаже, че езикът $L = \{\alpha\alpha \mid \alpha \in \Sigma^*\}$ не е регулярен.

Решение. Нека $n, k \in \mathbb{N}$. Нека $a^n b a^k b = \alpha\alpha$ за някое $\alpha \in \Sigma^*$. Тъй като $|a^n b a^k b|_b = 2$, то $|\alpha|_b = 1$. Също така понеже $a^n b a^k b$ завършва на b , то α завършва на b . Тогава остава само $\alpha = a^n b = a^k b$, откъдето $n = k$. Следователно ако $n \neq k$, имаме $a^n b a^n b \in L$ и $a^k b a^n b \notin L$. Така $a^n b \in (a^n b)^{-1}(L)$ и $a^n b \notin (a^k b)^{-1}(L)$, откъдето $(a^n b)^{-1}(L) \neq (a^k b)^{-1}(L)$. Намерихме безкрайно подмножество $\{(a^n b)^{-1}(L) \mid n \in \mathbb{N}\}$ на $\{\alpha^{-1}(L) \mid \alpha \in \Sigma^*\}$, откъдето L не е регулярен.

Задача 3.6. Да се докаже, че езикът $L = \{\alpha\alpha^{rev} \mid \alpha \in \Sigma^*\}$ не е регулярен.

Решение. Нека $n, k \in \mathbb{N}$. Нека $a^n b a^k b = \alpha\alpha^{rev}$ за някое $\alpha \in \Sigma^*$. Тъй като $|a^n b a^k b|_b = 2$, то $|\alpha|_b = 1$. Също така понеже двете срещания на b във $a^n b b a^k$ са съседни, остава само $\alpha = a^n b$ и $\alpha^{rev} = b a^k$, откъдето $n = k$. Следователно ако $n \neq k$, имаме $a^n b b a^n \in L$ и $a^k b b a^n \notin L$. Така $b a^n \in (a^n b)^{-1}(L)$ и $b a^n \notin (a^k b)^{-1}(L)$, откъдето $(a^n b)^{-1}(L) \neq (a^k b)^{-1}(L)$. Намерихме безкрайно подмножество $\{(a^n b)^{-1}(L) \mid n \in \mathbb{N}\}$ на $\{\alpha^{-1}(L) \mid \alpha \in \Sigma^*\}$, откъдето L не е регулярен.

Задача 3.7. Да се покаже език L , за който $\text{Sort}(L) = \{a^{|\alpha|_a} b^{|\alpha|_b} \mid \alpha \in L\}$ не е регулярен.

Задача 3.8. Да се покаже език L , за който $\text{Ord}(L) = \{a_1 \dots a_n b_1 \dots b_n \mid n \in \mathbb{N} \text{ \& } a_i, b_i \in \Sigma \text{ \& } a_1 b_1 \dots a_n b_n \in L\}$ не е регулярен.