Решения на задачите от контролно 2 по ЕАИ на специалност "Информатика", проведено на 13 януари 2024 г.

Задача 1. *Да се построи безконтекстна граматика за езика $L = (\mathcal{L}(\mathcal{N}) \cup \{ab, b, \varepsilon\}) \cdot \mathcal{L}(G)^*$ като се използват изучавани конструкции или се докаже коректността на граматиката, където:*

$$G = \langle \{a,\, b\},\, \{S,\, X\},\, S,\, \{S \to aSb \mid XX,\ X \to a \mid SS\}\rangle$$

$$\mathcal{N} = \langle \{a, b\}, \{s, f_1, f_2\}, s, \Delta, \{f_1, f_2\}\rangle$$

$$\Delta(s, a) = \{f_1, f_2\},\ \Delta(s, b) = \{f_2\},\ \Delta(f_1, a) = \{f_1\},\ \Delta(f_1, b) = \{s\}$$

Решение. Получаваме граматика за L, като използваме изучавани конструкции по следния начин:

1. $G_1 = \langle \{a,\, b\},\, \underbrace{\{S_1, F_1, F_2\}}_{V_1},\, S1,\, \underbrace{\{S_1 \to aF_1 \mid aF_2 \mid bF_2,\ F_1 \to aF_1 \mid bS_1 \mid \varepsilon,\ F_2 \to \varepsilon\}}_{R_1}\rangle$ за $\mathcal{L}(\mathcal{N})$
2. $G_2 = \langle \{a,\, b\},\, \underbrace{\{S_2\}}_{V_2},\, S_2,\, \underbrace{\{S_2 \to ab \mid b \mid \varepsilon\}}_{R_2}\rangle$ за $\{ab, b, \varepsilon\}$
3. $G_3 = \langle \{a,\, b\},\, \underbrace{\{S_3\} \cup V_1 \cup V_2}_{V_3},\, S_3,\, \underbrace{\{S_3 \to S_1 \mid S_2\} \cup R_1 \cup R_2}_{R_3}\rangle$ за $\mathcal{L}(\mathcal{N}) \cup \{ab, b, \varepsilon\}$
4. $G_4 = \langle \{a,\, b\},\, \underbrace{\{S_4, S, X\}}_{V_4},\, S_4,\, \underbrace{\{S \to aSb \mid XX,\ X \to a \mid SS\} \cup \{S_4 \to S_4S \mid \varepsilon\}}_{R_4}\rangle$ за $\mathcal{L}(G)^*$
5. $G_5 = \langle \{a,\, b\},\, \{S_5\} \cup V_3 \cup V_4,\, S_5,\, \{S_5 \to S_3S_4\} \cup R_3 \cup R_4\rangle$ за L

Задача 2. *Да се построи безконтекстна граматика G за езика $L = \{\alpha\#\beta \mid \alpha, \beta \in \{a, b\}^*$ и $|\beta|_b = 2|\alpha|_a\}$ и да се докаже, че построената граматика разпознава дадения език.*

Решение. Можем да построим следната граматика за L:

$$S \to bS \mid Sa \mid aSbAb \mid \#$$

$$A \to aA \mid \varepsilon$$

Ясно е, че $\mathcal{L}_G(A) = \{a\}^*$. Направо ще покажем, че:

$$S \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} \alpha \;\&\; \alpha \in \{a, b, \#\}^* \iff \alpha \in L$$

($\Rightarrow$) Доказваме с индукция по дължината на извода:

- ако $S \overset{0}{\underset{G}{\Rightarrow}} \alpha$, то $\alpha = S \notin \{a, b, \#\}^*$ ✓
- ако $S \overset{n+1}{\underset{G}{\Rightarrow}} \alpha \in \{a, b\}^*$, то има $\beta \in \{S, A, a, b\}^*$, за което $S \underset{G}{\Rightarrow} \beta$ и $\beta \overset{n}{\underset{G}{\Rightarrow}} \alpha$

1 сл. $\beta = \#$ - тогава $\alpha = \# \in L$.

2 сл. $\beta = bS$ - тогава има $\gamma \in \{a, b\}^*$, за което $S \overset{n}{\underset{G}{\Rightarrow}} \gamma$ и $\alpha = b\gamma$. По (ИП) $\gamma \in L$, откъдето $\gamma = \gamma_1\#\gamma_2$, където $\gamma_1, \gamma_2 \in \{a, b\}^*$ и $|\gamma_2|_b = 2|\gamma_1|_a$. Тогава $|\gamma_2|_b = 2|b\gamma_1|_a$, откъдето $\alpha = b\gamma = b\gamma_1\#\gamma_2 \in L$.

3 сл. $\beta = Sa$ - аналогичен на 2 сл.

4 сл. $\beta = aSbAb$ - тогава има $\gamma \in \{a, b\}^*$ и $n_1, n_2, k \in \mathbb{N}$, за които $S \overset{n_1}{\underset{G}{\Rightarrow}} \gamma$, $A \overset{n_2}{\underset{G}{\Rightarrow}} a^k$, $\alpha = a\gamma ba^kb$ и $n = n_1 + n_2$. По (ИП) $\gamma \in L$, откъдето $\gamma = \gamma_1\#\gamma_2$, където $\gamma_1, \gamma_2 \in \{a, b\}^*$ и $|\gamma_2|_b = 2|\gamma_1|_a$. Тогава понеже имаме $|\gamma_2 ba^kb|_b = 2 + |\gamma_2|_b = 2 + 2|\gamma_1|_a \overset{\gamma \in L}{=} 2|a\gamma_1|_a$, думата $\alpha = a\gamma ba^kb = a\gamma_1\#\gamma_2 ba^kb \in L$.

($\Leftarrow$) Доказваме с индукция по $|\alpha|$:

- ако $|\alpha| = 0$, то $\alpha = \varepsilon \notin L$ ✓
- ако $|\alpha| = n + 1$ и $\alpha \in L$, то $\alpha = \beta\#\gamma$ и $|\gamma|_b = 2|\beta|_a$ и имаме следните възможности:

1 сл. $\beta = \gamma = \varepsilon$ - тогава $\alpha = \#$, и тъй като $S \to_G \#$, имаме $S \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} \#$ е извод за α.

2 сл. $\beta = b\beta_1$ - тогава $|\gamma|_b = 2|\beta|_a = 2|b\beta_1|_a = 2|\beta_1|_a$, откъдето $\beta_1\#\gamma \in L$ по (ИП) $S \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} \beta_1\#\gamma$. Извода за α е $S \underset{G}{\Rightarrow} bS \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} b\beta_1\#\gamma$.

3 сл. $\gamma = \gamma_1 a$ - аналогичен на 2 сл.

4 сл. $\beta = a\beta_1$ и $\gamma = \gamma_1 ba^k b$ за някое $k \in \mathbb{N}$ - докато 2 сл. и 3 сл. не се изключват взаимно, за да попаднем в него, трябва да не сме в нито един от останалите. Имайки поне едно a в β изисква поне две b в γ за да компенсират. Тъй като $|\gamma|_b = |\gamma_1 ba^k b|_b = 2 + |\gamma_1|_b$ и $2|\beta|_a = 2|a\beta_1|_a = 2 + |\beta_1|_a$, имаме $|\gamma_1|_b = 2|\beta_1|_a$, откъдето $\beta_1\#\gamma_1 \in L$. Тогава по (ИП), имаме $S \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} \beta_1\#\gamma_1$. Извода за α е $S \underset{G}{\Rightarrow} aSbAb \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} aSba^k b \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} a\beta_1\#\gamma_1 ba^k b$.

Задача 3. *Да се докаже, че езикът* $L = \{\alpha\#a^{|\beta|_a}b^{|\alpha|_b}\#\beta \mid \alpha, \beta \in \{a, b\}^*\}$ *не е безконтекстен.*

Решение. Нека $p \geq 1$. Тогава $\alpha = b^p\#a^p b^p\#a^p \in L$ и $|\alpha| \geq p$. Нека $xyuvw = \alpha$, като $|yuv| \leq p$ и $|yv| \geq 1$. Понеже $|yuv| \leq p$, думата yv не може да обхваща букви от два несъседни сектора от еднакви букви (без да броим $\#$). Тогава на лице са следните възможности:

1 сл. yv съдържа $\#$ - тогава $xy^0uv^0w \notin L$, защото няма да има две срещания на $\#$.

2 сл. $yv = a^{t_1}b^{t_2}$ за някои $t_1, t_2 \in \mathbb{N}$, където $1 \leq t_1 + t_2 \leq p$ - тогава $xy^0uv^0w = b^p\#a^{p-t_1}b^{p-t_2}\#a^p \notin L$, защото $t_1 > 0$ или $t_2 > 0$ т.е. $p \neq p - t_1$ или $p \neq p - t_2$.

3 сл. $yv = b^{t_1}a^{t_2}$ за някои $t_1, t_2 \in \mathbb{N}$, където $1 \leq t_1 + t_2 \leq p$ - тогава в зависимост от местоположението на yv в $xyuvw$, имаме $xy^0uv^0w = b^{p-t_1}\#a^{p-t_2}b^p\#a^p$ или $xy^0uv^0w = b^p\#a^p b^{p-t_1}\#a^{p-t_2}$, но и в двата случая $xuw \notin L$, защото $t_1 > 0$ или $t_2 > 0$ т.е. $p \neq p - t_1$ или $p \neq p - t_2$.

Тъй като L не удовлетворява условията от лемата за покачване, той не е безконтекстен.