Съждителни тавтологии над крайно много променливи

Дефиниции. *Нека* $\mathrm{Vars} = \{x_1, \ldots, x_n\}$. *Дефинираме множеството* $\mathrm{Form(Vars)}$ *индуктивно:*

- *за всяко* $1 \leq i \leq n : x_i \in \mathrm{Form(Vars)}$
- *ако* $\varphi \in \mathrm{Form(Vars)}$, *то* $\neg\varphi \in \mathrm{Form(Vars)}$
- *ако* $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathrm{Form(Vars)}$, *то* $(\varphi_1 \vee \varphi_2) \in \mathrm{Form(Vars)}$

Нека $\mathcal{A}_n = \{\mathcal{V} \mid \mathcal{V} : \mathrm{Vars} \to \{\top, \bot\}\}$. *За* $\mathcal{V} \in \mathcal{A}_n$, $\overline{\mathcal{V}} : \mathrm{Form(Vars)} \to \{\top, \bot\}$ *ще бъде единствената функция със:*

- $\overline{\mathcal{V}}(x_i) = \mathcal{V}(x_i)$ *за* $1 \leq i \leq n$
- $\overline{\mathcal{V}}(\neg\varphi) = \top \iff \overline{\mathcal{V}}(\varphi) = \bot$
- $\overline{\mathcal{V}}((\varphi_1 \vee \varphi_2)) = \top \iff \overline{\mathcal{V}}(\varphi_1) = \top$ *или* $\overline{\mathcal{V}}(\varphi_2) = \top$

За $A \subseteq \mathcal{A}_n$ *казваме, че* $A \models \varphi$, *ако за всяко* $\mathcal{V} \in \mathcal{A}$, $\overline{\mathcal{V}}(\varphi) = \top$. *Накрая нека* $\mathrm{Taut(Vars)} = \{\varphi \in \mathrm{Form(Vars)} \mid \mathcal{A}_n \models \varphi\}$.

Твърдение. *Езикът* $\mathrm{Taut(Vars)}$ *е безконтекстен.*

Доказателство. Нека $V = \{V_{A,B} \mid A, B \in \mathcal{P}(\mathcal{A}_n) \,\&\, A \cap B = \varnothing\}$, нека $S = V_{\mathcal{A}_n,\varnothing}$ и нека $\Sigma = \mathrm{Vars} \cup \{(,), \neg, \vee\}$. Правилата са следните:

- Нека $A, B \subseteq \mathcal{A}_n$ са такива, че за $A \models x_i$ и $B \models \neg x_i$. Тогава имаме правилото $V_{A,B} \to_G x_i$.
- Нека $A, B \subseteq \mathcal{A}_n$ и $A \cap B = \varnothing$. Тогава имаме правилото $V_{A,B} \to_G \neg V_{B,A}$.
- Нека $A_1, A_2, A, B \subseteq \mathcal{A}_n$ са такива, че $A_1 \cup A_2 = A$ и $A \cap B = \varnothing$. Тогава имаме правилото $V_{A,B} \to_G (V_{A_1,B} \vee V_{A_2,B})$.

За да докажем, че $\mathcal{L}(G) = \mathrm{Taut(Vars)}$, ще покажем, че за всяко A и B такива, че $A \cap B = \varnothing$:

$$V_{A,B} \overset{*}{\Rightarrow}_G \ \& \, \varphi \in \Sigma^* \iff \varphi \in \mathrm{Form(Vars)} \,\&\, A \models \varphi \,\&\, B \models \neg\varphi$$

($\Rightarrow$) Правим индукция по дължината на извода:

- $V_{A,B} \overset{0}{\Rightarrow}_G \varphi$: тогава $\varphi = V_{A,B} \notin \Sigma^*$
- $V_{A,B} \overset{n+1}{\Rightarrow}_G \varphi$: тогава имаме три възможности за прилагане на първото правило:

1 сл. $V_{A,B} \to_G x_i$: тогава $\varphi \equiv x_i$ и $A \models x_i$ и $B \models \neg x_i$ по дефиниция на граматиката

2 сл. $V_{A,B} \to_G \neg V_{B,A}$: тогава $\varphi \equiv \neg\psi$ и $V_{B,A} \overset{n}{\Rightarrow}_G \psi$, и по (ИП) $B \models \psi$ (откъдето $B \models \neg\neg\psi \equiv \neg\varphi$) и $A \models \neg\psi \equiv \varphi$

3 сл. $V_{A,B} \to_G (V_{A_1,B} \vee V_{A_2,B})$: тогава $\varphi \equiv (\varphi_1 \vee \varphi_2)$ и $V_{A_i,B} \overset{n_i}{\Rightarrow}_G \varphi_i$ за $i = 1, 2$, като $A_1 \cup A_2 = A$ и $n = n_1 + n_2$. Тогава по (ИП) $A_i \models \varphi_i$ и $B \models \neg\varphi_i$ за $i = 1, 2$. Така $A_1 \cup A_2 \models (\varphi_1 \vee \varphi_2)$ и $B \models \neg(\varphi_1 \vee \varphi_2)$

($\Leftarrow$) Правим индукция по строенето на формулите:

- $\varphi \equiv x_i$: ако A и B са такива, че $A \models \varphi$ и $B \models \neg\varphi$, то по дефиниция на граматиката, имаме правилото $V_{A,B} \to_G x_i$, откъдето $V_{A,B} \overset{*}{\Rightarrow}_G x_i$
- $\varphi \equiv \neg\psi$: ако A и B са такива, че $A \models \varphi$ и $B \models \neg\varphi \equiv \neg\neg\psi$, то $B \models \psi$ и по (ИП) $V_{B,A} \overset{*}{\Rightarrow}_G \psi$. Строим следния извод за φ : $V_{A,B} \overset{*}{\Rightarrow}_G \neg V_{B,A} \overset{*}{\Rightarrow}_G \neg\psi$
- $\varphi \equiv (\varphi_1 \vee \varphi_2)$: ако A и B са такива, че $A \models \varphi$ и $B \models \neg\varphi$, то за $i = 1, 2$ и $A_i = \{\mathcal{V} \in A \mid \overline{\mathcal{V}}(\varphi_i) = \top\}$, по (ИП) имаме, че $V_{A_i,B} \overset{*}{\Rightarrow}_G \varphi_i$. Очевидно $A_1 \cup A_2 = A$. Също така по дефиниция на граматиката, имаме правилото $V_{A,B} \to_G (V_{A_1,B} \vee V_{A_2,B})$. Строим следния извод за φ : $V_{A,B} \overset{*}{\Rightarrow}_G (V_{A_1,B} \vee V_{A_2,B}) \overset{*}{\Rightarrow}_G (\varphi_1 \vee V_{A_2,B}) \overset{*}{\Rightarrow}_G (\varphi_1 \vee \varphi_2)$

Накрая имаме следната еквивалентност:

$$\varphi \in \mathcal{L}(G) \iff S \overset{*}{\Rightarrow}_G \varphi \,\&\, \varphi \in \Sigma^* \iff \varphi \in \mathrm{Form(Vars)} \,\&\, \mathcal{A}_n \models \varphi \,\&\, \varnothing \models \neg\varphi \iff \varphi \in \mathrm{Taut(Vars)}$$

$\square$