Решения на задачите от писмения изпит по ЕАИ на специалност "Компютърни науки", проведен на 18 юни 2024 г.

Задача 1 (10 точки). За една дума $\omega = a_0 a_1 \cdots a_{n-1}$ над азбуката $\{a, b\}$ да означим за $i < n$, $\omega\texttt{[i:]} = a_i \cdots a_{n-1}$ и $\omega\texttt{[i:]} = \$$ за $i \geq n$, където $\$ \notin \{a, b\}$. Нека L и M са регулярни езици над азбуката $\{a, b\}$. Докажете, че езикът

$$K = \{\omega \in \{a, b\}^\star \mid (\exists i)[\omega\texttt{[2i:]} \in L \;\&\; \omega\texttt{[2i+1:]} \in M]\}$$

е регулярен.

Забележка. Няма как $\omega\texttt{[i:]} = \varepsilon$. Доста хора бяха изпуснали това в решенията си, но не сме им отнемали точки.

Решение. Ще покажем, че:

$$K = \underbrace{(\{a, b\}^2)^* \cdot \Big[L \cap \Big(\{a, b\} \cdot (M \setminus \{\varepsilon\})\Big)\Big]}_{K'}$$

- ($\subseteq$) Нека $\omega \in K$. Тогава има i, за което $\omega\texttt{[2i:]} \in L$ и $\omega\texttt{[2i+1:]} \in M$. Нека $\omega = a_0 \cdots a_{n-1}$. Ако положим $\alpha = a_0 \cdots a_{2i-1}, x = a_{2i}$ и $\beta = a_{2i+1} \dots a_{n-1}$, то тогава:
  - $\alpha \in (\{a, b\}^2)^*$, понеже $|\alpha| = 2i$ е четно;
  - $x\beta = \omega\texttt{[2i:]} \in L$;
  - $\beta = \omega\texttt{[2i+1:]} \in M \setminus \{\varepsilon\}$.

  Така $\omega \in K'$.

- ($\supseteq$) Обратно, нека $\omega \in K'$. Тогава има $\alpha \in (\{a, b\}^2)^*, \gamma \in L \cap \Big(\{a, b\} \cdot (M \setminus \{\varepsilon\})\Big)$, за които $\omega = \alpha\gamma$, откъдето $\gamma \in L$ и $\gamma = x\beta$ за някои $x \in \{a, b\}$ и $\beta \in M \setminus \{\varepsilon\}$. Ако положим $i = \frac{|\alpha|}{2}$ (това е добре дефинирано, защото $|\alpha|$ е четно по допускане), то тогава $\omega\texttt{[2i:]} = \omega\texttt{[}|\alpha|\texttt{:]} = \gamma$ и $\omega\texttt{[2i+1:]} = \omega\texttt{[}|\alpha|\texttt{+1:]} = \beta$ (понеже $\omega = \alpha\gamma = \alpha x \beta$). Следователно:
  - $\omega\texttt{[2i:]} \in L$;
  - $\omega\texttt{[2i+1:]} \in M \setminus \{\varepsilon\} \subseteq M$.

  Така $\omega \in K$.

Тъй като изразихме K, използвайки само регулярни езици и операции, които запазват регулярност, получаваме, че K е регулярен.

Задача 2 (25 точки). За произволна дума ω, да означим с $|\omega|_a$ броя на срещанията на буквата a в думата ω. За произволен език L над азбуката $\{a, b\}$ дефинираме:

$$\mathrm{Count}(L) = \{\omega \sharp a^{|\omega|_a} \mid \omega \in L\}.$$

Вярно ли следното:

а) Ако L е регулярен, то $\mathrm{Count}(L)$ е регулярен? **(7 т.)**

б) Ако L е регулярен, то $\mathrm{Count}(L)$ е безконтекстен? **(10 т.)**

в) Ако L е безконтекстен, то $\mathrm{Count}(L)$ е безконтекстен? **(8 т.)**

Обосновете отговорите си като приложите доказателства!

Решение.

а) Ако $L = \{a\}^*$, то тогава:

$$\mathrm{Count}(L) = \{\omega \sharp a^{|\omega|_a} \mid \omega \in L\} = \{a^n \sharp a^{|a^n|_a} \mid n \in \mathbb{N}\} = \{a^n \sharp a^n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

От тук нататък трябва да се докаже, че $\mathrm{Count}(L)$ не е регулярен, но тук ще бъде спестено, понеже подобни на $\mathrm{Count}(L)$ езици сме доказвали на упражнения, че не са регулярни.

б) Нека $\overline{a} = a$ и $\overline{b} = \varepsilon$. Можем да забележим, че за всяко $\omega \in \{a, b\}^*$ и $x \in \{a, b\}$:

$$a^{|\omega|_a}\overline{x} = a^{|x\omega|_a}.$$

Нека $\mathcal{A} = \langle \{a,\, b\},\, Q,\, s,\, \delta,\, F \rangle$ е ДКА за езика L. Строим граматика $G = \langle \{a,\, b\},\, V,\, S,\, R \rangle$ за $\mathrm{Count}(L)$:

- на всяко $q \in Q$ съответства променлива $X_q \in V$;
- началната променлива е X_s;
- на всеки преход $\delta(p, x) = q$ съответства правилото $X_p \to xX_q\overline{x}$;
- на всяко $f \in F$ съответства прехода $X_f \to \sharp$.

Ще покажем, че за всяко $q \in Q$ е изпълнено, че $\mathcal{L}_G(X_q) = \underbrace{\{\omega \# a^{|\omega|_a} \mid \delta^*(q, \omega) \in F\}}_{L_q}$. След това ако приложим твърдението за $q = s$, сме готови.

(⊆) Ще покажем с индукция по $n \in \mathbb{N}$, че ако $\alpha \in \mathcal{L}_G(X_q)$, тоест $X_q \overset{n}{\lhd}_G \alpha$ и $\alpha \in \{a, b, \sharp\}^*$, то тогава $\alpha = \omega \sharp a^{|\omega|_a}$ за някое $\omega \in \{a, b\}^*$, където $\delta^*(q, \omega) \in F$, тоест $\alpha \in L_q$.
В базата $n = 0$, следователно $\alpha \notin \{a, b, \sharp\}^*$, с което базата е тривиално изпълнена.
Нека сега $n > 0$. Тогава в този извод прилагаме някое правило. Разглеждаме двата възможни случая за първото приложено правило:

1 сл. правило от вида $X_q \to \sharp$ – тогава по конструкция $q \in F$, откъдето $\delta^*(q, \varepsilon) \in F$. Тъй като това е първото приложено правило в извода, то $\alpha = \sharp = \varepsilon\sharp\varepsilon = \varepsilon\sharp a^0 = \varepsilon\sharp a^{|\varepsilon|_a} \in L_q$.

2 сл. правило от вида $X_q \to xX_{q'}\overline{x}$ – тогава по конструкция $\delta(q, x) = q'$. Тъй като това е първото приложено правило в извода, то $\alpha = x\alpha'\overline{x}$, където $X_{q'} \overset{n-1}{\lhd} \alpha'$. Тогава от индуктивното предположение за $n - 1$ и q' получаваме, че $\alpha' = \omega\sharp a^{|\omega|_a}$ за някое $\omega \in \{a, b\}^*$, където $\delta^*(q', \omega) \in F$. Тъй като $\delta(q, x) = q'$ и $\delta^*(q', \omega) \in F$, то тогава $\delta^*(q, x\omega) \in F$, откъдето $\alpha = x\omega\sharp a^{|\omega|_a}\overline{x} = x\omega\sharp a^{|x\omega|_a} \in L_q$.

(⊇) Ще покажем с индукция по $|\omega|$, че ако $\delta^*(q, \omega) \in F$, то $X_q \overset{*}{\lhd}_G \omega\sharp a^{|\omega|_a}$.
В базата ако $\omega = \varepsilon$ и $\delta^*(q, \omega) \in F$, то $q \in F$, откъдето имаме правилото $X_q \to \sharp$, следователно:

$$X_q \overset{*}{\lhd}_G \sharp = \varepsilon\sharp\varepsilon = \varepsilon\sharp a^0 = \varepsilon\sharp a^{|\varepsilon|_a}.$$

Нека сега $\omega = x\omega'$, където $\delta^*(q, x\omega') \in F$ и $x \in \{a, b\}$. Тогава за $q' = \delta(q, x)$ е изпълнено, че $\delta^*(q', \omega') \in F$. Тогава от индуктивното предположение за ω' и q' получаваме, че $X_{q'} \overset{*}{\lhd} \omega'\sharp a^{|\omega'|_a}$. Тъй като $\delta(q, x) = q'$, то по конструкция имаме правилото $X_q \to xX'_q\overline{x}$, откъдето

$$X_q \overset{*}{\lhd}_G x\omega'\sharp a^{|\omega|_a}\overline{x} = x\omega'\sharp a^{|x\omega'|_a} = \omega\sharp a^{|\omega|_a}.$$

Ако $\alpha \in L_q$, то $\alpha = \omega\sharp a^{|\omega|_a}$ за някое $\omega \in \{a, b\}^*$, където $\delta^*(q, \omega) \in F$. Прилагайки сегашното твърдение получаваме, че $X_q \overset{*}{\lhd}_G \alpha$, откъдето $\alpha \in \mathcal{L}_G(X_q)$.

в) Ако $L = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$, то тогава:

$$\text{Count}(L) = \{\omega \sharp a^{|\omega|_a} \mid \omega \in L\} = \{a^n b^n \sharp a^{|a^n b^n|_a} \mid n \in \mathbb{N}\} = \{a^n b^n \sharp a^n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

От тук нататък трябва да се докаже, че $\text{Count}(L)$ не е безконтекстен, но тук ще бъде спестено, понеже подобни на $\text{Count}(L)$ езици сме доказвали на упражнения, че не са безконтекстни.