Решения на задачите от семестриалното контролно по ЕАИ на специалност "Компютърни науки", проведено на 28 април 2024 г.

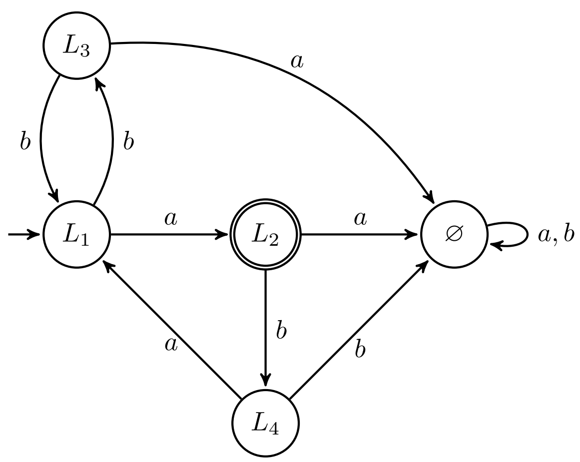
Задача 1. (5 точки) *Намерете минималния детерминиран краен автомат, който разпознава регулярния език*

$$\mathcal{L}[\![(aba+bb)^*a]\!].$$

Решение.

1. $\mathcal{L}[\![(aba+bb)^*a]\!] = \mathcal{L}[\![(aba+bb)(aba+bb)^*a+a]\!] = \mathcal{L}[\![aba(aba+bb)^*a+bb(aba+bb)^*a+a]\!] := L_1$.
2. $a^{-1}(L_1) = \mathcal{L}[\![ba(aba+bb)^*a+\varepsilon]\!] := L_2$ – нов език, понеже $\varepsilon \in L_2$ и $\varepsilon \notin L_1$.
3. $b^{-1}(L_1) = \mathcal{L}[\![b(aba+bb)^*a]\!] := L_3$ – нов език, понеже $ba \in L_3$ и $ba \notin L_1, L_2$.
4. $a^{-1}(L_2) = \varnothing$ – очевидно нов език.
5. $b^{-1}(L_2) = \mathcal{L}[\![a(aba+bb)^*a]\!] := L_4$ – нов език, понеже $aa \in L_4$ и $aa \notin L_1, L_2, L_3$.
6. $a^{-1}(L_3) = \varnothing$.
7. $b^{-1}(L_3) = L_1$
8. $a^{-1}(L_4) = L_1$.
9. $b^{-1}(L_4) = \varnothing$.
10. $a^{-1}(\varnothing) = \varnothing$
11. $b^{-1}(\varnothing) = \varnothing$.

Минималният автомат е следният:



Задача 2. (10 точки) *За една дума α и език L, да означим с $\|\alpha\|_L$ броя на префиксите β на α, за които $\beta \in L$.*

а) Докажете, че ако L е регулярен език, то $L_1 = \{\alpha \in \Sigma^* \mid \|\alpha\|_L$ е четно$\}$ е регулярен език. **(5 точки)**

б) Посочете регулярен език L, за който езикът $L_2 = \{\alpha \cdot \beta \in \Sigma^* \mid \|\alpha\|_L = \|\beta\|_L\}$ не е регулярен. **(5 точки)**

Решение.

а) Нека $\mathcal{A} = \langle \Sigma,\, Q,\, s,\, \delta,\, F \rangle$ е детерминиран краен автомат за L. Тогава за всяко $\alpha \in \Sigma^*$ имаме, че $\|\alpha\|_L$ ще бъде броят на срещания на финални състояния в $\mathcal{A}$, при прочитане на α. Това означава, че за да намерим четността на $\|\alpha\|_L$ е достатъчно да знаем четността на срещнатите финални състояния при четене на α. Строим автомат $\mathcal{A}_1 = \langle \Sigma,\, Q_1,\, s_1,\, \delta_1,\, F_1 \rangle$ за L_1:

- $Q_1 = Q \times \{0, 1\}$ – пазим къде се намираме в $\mathcal{A}$ и каква е четността на срещанията на финални състояния при прочитане на входната дума;
- $s_1 = \langle s,\, b \rangle$, където $b = 0$ при $\varepsilon \notin L$ и $b = 1$ иначе;
- $F_1 = Q \times \{0\}$ – не се интересуваме къде конкретно се намираме в $\mathcal{A}$, искаме само четен брой срещания на финални състояния при прочитане на входната дума;
- $\delta_1(\langle p,\, b \rangle, x) = \begin{cases} \langle \delta(p, x),\, b \rangle & \text{, ако } \delta(p, x) \notin F \\ \langle \delta(p, x),\, 1 - b \rangle & \text{, иначе} \end{cases}$ за всяко $x \in \Sigma,\; p \in Q,\; b \in \{0, 1\}$ – при всяко ново срещане на финално състояние модифицираме брояча.

Сега с индукция по $|\alpha|$ ще покажем, че $\delta_1^*(s_1, \alpha) = \langle \delta^*(s,\, \alpha),\, \|\alpha\| \pmod 2 \rangle$:

- В базата имаме $\delta_1^*(s_1, \varepsilon) = s_1$. Единственият префикс на ε е думата ε. Ако $\varepsilon \notin L$, то $\|\varepsilon\|_L = 0$, иначе $\|\varepsilon\|_L = 1$. Така наистина $s_1 = \langle \delta^*(s,\, \varepsilon),\, \|\varepsilon\|_L \rangle$.
- За индуктивната стъпка, $\delta_1^*(s_1, \beta x) = \delta_1(\delta_1^*(s_1, \beta), x) \overset{(\text{ИП})}{=} \delta_1(\langle \delta^*(s,\, \beta),\, \|\beta\|_L \pmod 2 \rangle, x)$. Тогава имаме, че $\delta_1(\langle \delta^*(s,\, \beta),\, \|\beta\|_L \pmod 2 \rangle, x) = \langle \delta(\delta^*(s,\, \beta),\, x),\, b \rangle = \langle \delta^*(s,\, \beta x),\, b \rangle$, където

$$b = \begin{cases} \|\beta\|_L \pmod 2 & \text{, ако } \delta^*(s, \beta x) \notin F \\ 1 - \|\beta\|_L \pmod 2 & \text{, иначе} \end{cases}$$

  Всички префикси на βx са или думата βx или са префикси на β. Тогава $\|\beta x\|_L = \|\beta\|_L$, ако $\beta x \notin L$, и $\|\beta x\|_L = \|\beta\|_L + 1$ иначе. Ако $\delta^*(s, \beta x) \notin F$, то тогава накрая не сме срещнали финално състояние т.е. $\beta x \notin L$, откъдето и $\|\beta x\|_L = \|\beta\|_L$. Така получаваме, че $\|\beta x\|_L \pmod 2 = \|\beta\|_L \pmod 2$. Ако пък $\delta^*(s, \beta x) \in F$, то тогава накрая ще сме срещнали финално състояние т.е. $\beta x \in L$, откъдето имаме, че $\|\beta x\|_L = \|\beta\|_L + 1$. Следователно $\|\beta x\|_L \pmod 2 = 1 - \|\beta\|_L \pmod 2$. Така наистина $b = \|\beta x\|_L \pmod 2$, с което сме готови.

Накрая имаме следните еквивалентности:

$$\alpha \in \mathcal{L}(\mathcal{A}_1) \iff \delta_1^*(s_1, \alpha) \in F_1 \iff \langle \delta^*(s,\, \alpha),\, \|\alpha\|_L \pmod 2 \rangle \in Q \times \{0\} \iff \|\alpha\|_L \text{ е четно} \iff \alpha \in L_1.$$

б) Ще покажем, че за $L = \{b\} \cdot \{a\}^*$ езикът L_2 не е регулярен. Разглеждаме езиците от вида $(ba^n)^{-1}(L)$ за $n \in \mathbb{N}$. Нека $n, k \in \mathbb{N}$ и $n \neq k$.

- Да разгледаме думата $ba^n \cdot ba^n$. Ако положим $\alpha = \beta = ba^n$, тогава $\|\alpha\|_L = \|\beta\|_L = n + 1$, откъдето е изпълнено, че $\alpha \cdot \beta = ba^n \cdot ba^n \in L_2$. Така $ba^n \in (ba^n)^{-1}(L_2)$.
- Да разгледаме думата $ba^k \cdot ba^n$. Нека $ba^k \cdot ba^n = \alpha \cdot \beta$.

  1 сл. Ако $\alpha = \varepsilon$ и $\beta = ba^k \cdot ba^n$, то тогава $\|\alpha\|_L = 0 < \|\beta\|_L = k + 1$.

  2 сл. Ако $\alpha = ba^k$ и $\beta = ba^n$, то тогава $\|\alpha\|_L = k + 1 \neq n + 1 = \|\beta\|_L$.

  3 сл. Ако β не започва с b, то тогава $\|\beta\|_L = 0$, но $\|\alpha\|_L > 0$, тъй като α със сигурност започва с b.

  Така $ba^k \cdot ba^n \notin L_2$, откъдето $ba^n \notin (ba^k)^{-1}(L_2)$.

Следователно $(ba^n)^{-1}(L_2) \neq (ba^k)^{-1}(L_2)$ за $n \neq k$. Накрая получаваме, че $\{(ba^n)^{-1}(L_2) \mid n \in \mathbb{N}\}$ е безкрайно подмножество на $\{\alpha^{-1}(L_2) \mid \alpha \in \Sigma^*\}$, откъдето L_2 не е регулярен.

Алтернативно можем да покажем, че за $L = \{a\}^*$ езикът L_2 не е регулярен. Разглеждаме езиците от вида $(a^{2n+1})^{-1}(L)$ за $n \in \mathbb{N}$. Нека $n, k \in \mathbb{N}$ като $n < k$.

- Да разгледаме думата $a^{2n+1} \cdot b \cdot a^{2n+1}$. Ако положим $\alpha = a^{2n+1}b$ и $\beta = a^{2n+1}$, то $\|\alpha\|_L = 2n + 2 = \|\beta\|_L$. Така $a^{2n+1} \cdot b \cdot a^{2n+1} \in L_2$, откъдето $b \cdot a^{2n+1} \in (a^{2n+1})^{-1}(L_2)$.
- Да разгледаме думата $a^{2k+1} \cdot b \cdot a^{2n+1}$. Нека $a^{2k+1} \cdot b \cdot a^{2n+1} = \alpha \cdot \beta$.

1 сл. Ако β не съдържа b, то тогава $\|\beta\|_L = |\beta| + 1 \leq 2n + 2 < 2k + 2 = \|\alpha\|_L$.

2 сл. Ако $\beta = a^t \cdot b \cdot a^{2n+1}$, то тогава $\alpha = a^{2k+1-t}$ и $\|\beta\|_L = t + 1$, откъдето $\|\alpha\|_L = 2k + 1 - t + 1$. Тъй като числото $2k + 1$ е нечетно, то не може да се представи като сума на две нечетни или две четни числа. Тогава t и $2k + 1 - t$ имат различна четност, значи и $t + 1 = \|\beta\|_L$ и $2k + 1 - t + 1 = \|\alpha\|_L$ имат различна четност. Така $\|\alpha\|_L \neq \|\beta\|_L$.

Така $a^{2k+1} \cdot b \cdot a^{2n+1} \notin L_2$, откъдето $b \cdot a^{2n+1} \notin (a^{2k+1})^{-1}(L_2)$.

Следователно $(a^{2n+1})^{-1}(L_2) \neq (a^{2k+1})^{-1}(L_2)$ за $n \neq k$. Накрая получаваме, че $\{(a^{2n+1})^{-1}(L_2) \mid n \in \mathbb{N}\}$ е безкрайно подмножество на $\{\alpha^{-1}(L_2) \mid \alpha \in \Sigma^*\}$, откъдето L_2 не е регулярен.