Решения на задачите от контролно 1 по ЕАИ на специалност "Информатика", проведено на 2 декември 2023 г.

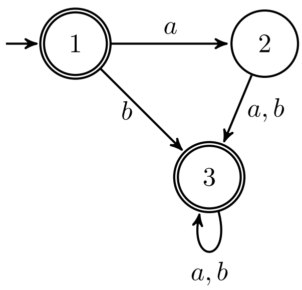
Задача 1. *Да се построи минимален детерминиран автомат за езика* $L = ((\Sigma^* \setminus \{a\}) \cup \{ba\})^* \cdot \{b\}$ *като използвате наготово изучавани конструкции или докажете, че построеният автомат разпознава точно езикът* L *и е минимален.*

Решение. Преди да се прави какъвто и да е било автомат, могат да се направят няколко опростявания:

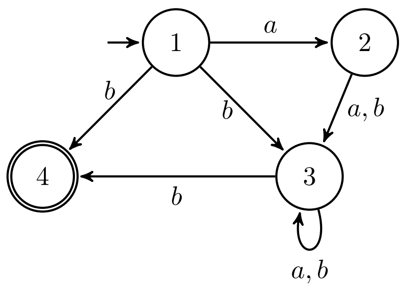
- $(\Sigma^* \setminus \{a\}) \cup \{ba\} = \Sigma^* \setminus \{a\}$, понеже $ba \neq a$ т.е. $ba \in \Sigma^* \setminus \{a\}$
- $(\Sigma^* \setminus \{a\})^* = \Sigma^* \setminus \{a\}$, понеже $\Sigma^* \setminus \{a\} \subseteq (\Sigma^* \setminus \{a\})^*$ и $a \notin (\Sigma^* \setminus \{a\})^*$

Така получаваме, че $L = (\Sigma^* \setminus \{a\}) \cdot \{b\}$.

1. Строене на недетерминиран автомат



автомат $\mathcal{N}_1$ за $\Sigma^* \setminus \{a\}$



автомат $\mathcal{N}_2$ за $(\Sigma^* \setminus \{a\}) \cdot \{b\}$

2. Детерминизация

$\mathcal{A}_1$	a	b
$\to 1$	2	$3, 4$
2	3	3
3	3	$3, 4$
$*3, 4$	3	$3, 4$

след детерминизация

$\mathcal{A}_2$	a	b
$\to 1$	2	4
2	3	3
3	3	4
$*4$	3	4

след преименуване

3. Минимизация

A_1	a	b
1	A_1	A_2
2	A_1	A_1
3	A_1	A_2

$A_1 = \{1, 2, 3\}$ и $A_2 = \{4\}$

2 се разделя от 1 и 3

B_1	a	b
1	B_2	B_3
3	B_1	B_3

$B_1 = \{1, 3\}, B_2 = \{2\}$ и $B_3 = \{4\}$

1 и 3 се разделят

Така заключаваме, че автоматът $\mathcal{A}_2$ е минимален.

Дефиниция. Казваме, че β е **префикс** на α и бележим $\beta \preceq \alpha$, ако има дума ω, такава че $\beta \cdot \omega = \alpha$. Ако знаем още, че $\alpha \neq \beta$, β наричаме **строг префикс** на α и бележим $\beta \prec \alpha$. Отбелязваме, че префикс на префикс на α е префикс на α и за всеки два префикса на α, един от тях е префикс на другия. При $\alpha = \beta \cdot \omega$ въвеждаме означението $\mathrm{diff}(\beta, \alpha) = \omega$.

Дефиниция. Нека L е език и α е произволна дума. Казваме, че $\langle \beta, \gamma \rangle$ е **L-двойка** в α, ако $\beta, \gamma \in L$, $\beta \prec \gamma \preceq \alpha$, и няма дума $\omega \in L$, такава че $\beta \prec \omega \prec \gamma$. ($\beta$ и γ са различни префикси на α от езикът L и няма друг префикс на α от L, завършващ между техните краища)

Задача 2. *Да се докаже, че е регулярен следният език:*

$$L = \{\alpha \in \Sigma^* \mid \textit{броят } (\Sigma^* \cdot \{b\})\textit{-двойки в } \alpha \textit{ е четен}\}$$

Решение. Ако се разпишат няколко примера, лесно може да се види, че броят на $(\Sigma^* \cdot \{b\})$-двойките в една дума $\alpha \in \Sigma^*$ зависи само от $|\alpha|_b$. За да има поне една $(\Sigma^* \cdot \{b\})$-двойка, трябва да има поне две на брой букви b. След първата $(\Sigma^* \cdot \{b\})$-двойка, за всяко срещане на b се добавя по една $(\Sigma^* \cdot \{b\})$-двойка.
Така можем да заключим, че броят на $(\Sigma^* \cdot \{b\})$-двойките е четен, тогава и само тогава, когато броят на срещанията на b е нечетен, или е нула (защото тогава нямаме $(\Sigma^* \cdot \{b\})$-двойки). Следователно

$$L = \{\alpha \in \Sigma^* \mid |\alpha|_b \text{ е нечетно или } |\alpha|_b = 0\} = \underbrace{\{a\}^*}_{L_1} \cup \underbrace{\{\alpha \in \Sigma^* \mid |\alpha|_b \text{ е нечетно}\}}_{L_2}.$$

L_1 е очевидно регулярен, а автомат за L_2 или подобен на него е правен на упражнения. Тогава и L е регулерен.

Задача 3. *Да се докаже, че не е регулярен следният език:*

$$L = \{\alpha \in \Sigma^* \mid |\gamma| = 2|\beta| \textit{ за всички } (\Sigma^* \cdot \{b\})\textit{-двойки } \langle \beta, \gamma \rangle \textit{ в } \alpha\}$$

Решение. Нека $n, k \in \mathbb{N}$ и $k < n$. Тогава:

- $a^n b a^n b \in L$, защото $\langle a^n b, a^n b a^n b \rangle$ е единствентата $(\Sigma^* \cdot \{b\})$-двойка в тази дума и $|a^n b a^n b| = 2|a^n b|$
- $a^k b a^n b \notin L$, защото $\langle a^k b, a^k b a^n b \rangle$ е единствентата $(\Sigma^* \cdot \{b\})$-двойка в тази дума и $|a^k b a^n b| > 2|a^k b|$

От тук можем да заключим, че $a^n b \not\approx_L a^k b$ за $n \neq k$. Така $\{[a^n b]_{\approx_L} \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \{[\alpha]_{\approx_L} \mid \alpha \in \Sigma^*\}$ е безкрайно, откъдето L не е регулярен.

Задача 4. *Да се докаже, че винаги когато L_1 и L_2 са регулярни, регулярен е и следният език:*

$$L = \{\alpha \in \Sigma^* \mid \mathrm{diff}(\beta, \gamma) \in L_2 \text{ за всяка } L_1\text{-двойка } \langle \beta,\, \gamma \rangle \text{ в } \alpha\}$$

Решение. Нека $\mathcal{A} = \langle \Sigma,\, Q,\, s,\, \delta,\, F \rangle$ е автомат за L_1.
Да помислим какво се случва в една дума $\alpha \notin L$. Знаем за нея, че има L_1-двойка $\langle \beta,\, \beta\omega \rangle$, за която и $\omega \notin L_2$. Цялата дума α е от вида $\beta\omega\gamma$ за някое $\gamma \in \Sigma^*$. Нека $L(p, q) = \{\alpha \in \Sigma^* \mid \delta^*(p, \alpha) = q\}$. Този език очевидно е регулярен за произволни $p, q \in Q$. Понеже $\langle \beta,\, \beta\omega \rangle$ е L_1-двойка, то няма $\varepsilon \prec \omega' \prec \omega$, за което $\beta\omega' \in L_1$. Това означава, че като четем в $\mathcal{A}$, между β и $\beta\omega$ не срещаме никакви финални състояния. Знаем, че $\delta^*(s, \beta) = f_1$ и $\delta^*(f_1, \omega) = f_2$ за някои $f_1, f_2 \in F$. Тогава

$$\omega \in (L(f_1, f_2) \setminus \{\varepsilon\}) \cap \overline{L_2} \cap \overline{\left(\bigcup_{f \in F} [(L(f_1, f) \setminus \{\varepsilon\}) \cdot (L(f, f_2) \setminus \{\varepsilon\})] \right)},$$

защото нито може $\omega \in L_2$, нито може да има междинно състояние $f \in F$ докато четем ω. Освен ω, можем и лесно да изразим β, то ще принадлежи на $L(s, f_1)$. Накрая получаваме, че

$$\alpha \in \underbrace{L(s, f_1)}_{\beta \in} \cdot \underbrace{\left((L(f_1, f_2) \setminus \{\varepsilon\}) \cap \overline{L_2} \cap \overline{\left(\bigcup_{f \in F} [(L(f_1, f) \setminus \{\varepsilon\}) \cdot (L(f, f_2) \setminus \{\varepsilon\}))] \right)} \right)}_{\omega \in} \cdot \underbrace{\Sigma^*}_{\gamma \in}.$$

Следователно ако $\alpha \in \overline{L}$, то

$$\alpha \in \underbrace{\bigcup_{f_1, f_2 \in F} \left(L(s, f_1) \cdot \left((L(f_1, f_2) \setminus \{\varepsilon\}) \cap \overline{L_2} \cap \overline{\left(\bigcup_{f \in F} [(L(f_1, f) \setminus \{\varepsilon\}) \cdot (L(f, f_2) \setminus \{\varepsilon\}))] \right)} \right) \cdot \Sigma^* \right)}_{L'}.$$

Обратно, ако $\alpha \in L'$, то има $f_1, f_2 \in F$, за които

$$\alpha \in L(s, f_1) \cdot \left((L(f_1, f_2) \setminus \{\varepsilon\}) \cap \overline{L_2} \cap \overline{\left(\bigcup_{f \in F} [(L(f_1, f) \setminus \{\varepsilon\}) \cdot (L(f, f_2) \setminus \{\varepsilon\}))] \right)} \right) \cdot \Sigma^*.$$

Тогава има $\beta, \omega, \gamma \in \Sigma^*$, за които $\alpha = \beta\omega\gamma$ и

$$\beta \in L(s, f_1) \text{ и } \omega \in (L(f_1, f_2) \setminus \{\varepsilon\}) \cap \overline{L_2} \cap \overline{\left(\bigcup_{f \in F} [(L(f_1, f) \setminus \{\varepsilon\}) \cdot (L(f, f_2) \setminus \{\varepsilon\}))] \right)}.$$

Лесно може да се види, че $\langle \beta,\, \beta\omega \rangle$ е L_1-двойка в $\beta\omega\gamma = \alpha$ и $\omega \notin L_2$. Така $\alpha \notin L$.
Получихме, че $\alpha \notin L \iff \alpha \in L'$, откъдето $L' = \overline{L}$. Ние използвахме само операции, запазващи регулярност, и ги прилагахме крайно много пъти, откъдето L' е регулярен. Така и $\overline{L'} = L$ също е регулярен.