

活動 4

卡片翻轉魔術 — 錯誤的發現與修正

活動摘要

當資料儲存在磁碟或是要從一台電腦傳送到另一台時，我們會希望在傳送過程中，資料不會因為任何原因而被改變。然而，有時候還是會發生一些意外性錯誤，使資料毀損或改變。在這個活動中，我們會使用一個魔術般的手法，在資料受損而被改變時能發現並修正它。

課程銜接

- 數學：數字 — 探索如何計算以及估計
- 數學：代數 — 探索資料樣式及其關係，並找出遺失的資料
- 數學：列與行、座標系統
- 科技：資料驗證

習得技能

- 計數
- 辨識奇數和偶數

適合年齡

- 7 歲以上

所需素材

- 36 張有磁鐵可吸在冰箱上的卡片，單面著色
- 一個金屬板（白板也可以）供展示用

每組學生需要：

- 36 張相同的卡片，單面著色

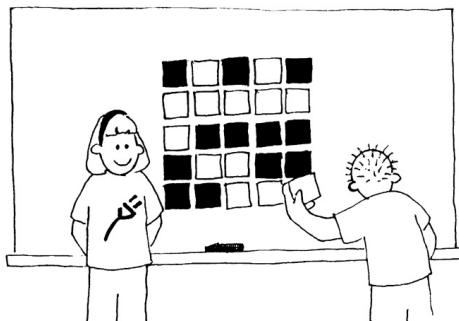
魔術般的技巧

展示方式

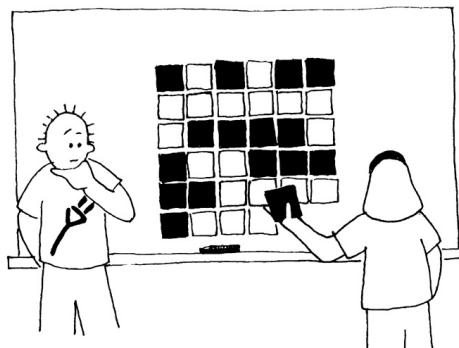
這是個讓你變成魔術師的機會！

你需要一副完全相同，雙面的卡片（想自製的話，可以從大張的卡片剪小，單面著色），為了更方便展示，可以使用雙面不同色的磁卡，冰箱的磁卡效果佳（大部分的磁卡都是單面的，可以將它們的正面黏起來，將其中一面做上白色記號。）

1. 讓一名學生將雙面磁卡片以 5×5 的方式排好，並隨意翻至不同面。



故意增加一列或一行，「讓它更難一些」。



這些卡片是這個技巧中的關鍵。你可以再多用幾張卡片，但要確定每一行或列，都有偶數張有色卡片。

2. 讓一個學生，眼睛蒙上並翻一張卡。現在包含這張卡的那一列跟那一行，其有色卡的張數會變成奇數，這樣就可以找出哪一張卡片被變更了。各位同學能知道是怎麼做到的嗎？

教學生們這個技巧：

1. 將學生分成兩兩一組進行，讓學生將它們的卡片排成 5×5 。
2. 每列每行有幾張有色卡呢？是奇數還是偶數？記住，0 是算偶數喔。
3. 在每一列增加第六張卡片，確保每一列的色卡數是偶數，增加的那張稱為「同位」卡（Parity card）。
4. 在底部增加第六列卡片，確保每一行的有色卡數是偶數。
5. 現在翻其中一張卡片。觀察一下，卡片所在的一列與那一行有什麼變化？（那一列與那一行的色卡數變成奇數了。）剛剛加上去的那一張同位卡就是用來告訴你某一列某一行的資料出問題了。
6. 輪流向大家表演這個「魔術」。

延伸活動

1. 嘗試使用不同的東西取代色卡，擁有正反兩面性質的都可以。舉例：撲克牌、硬幣、正反兩面寫著 0 和 1 的卡（可以與前面介紹的二進位數系統做連結）。
2. 如果兩張或兩張以上的卡片被翻過來了呢？（這樣就沒辦法知道是哪兩張卡片被翻過來了，只能知道有些東西被改變了。仔細分析一下，是可以限縮到知道兩對卡片中的某一張有問題。但如果發生四次翻轉時，就很有可能行列的奇偶性檢查會找不出任何錯誤）。
3. 嘗試更大的排法，例如： 9×9 張卡，檢查用的同位卡要使之擴張成 10×10 。（這個方法適用於任何排法，甚至可以不用是正方型。）
4. 另一個有趣的練習是看看右下方的卡片。如果你用它檢查它所在的一行的資料是正確的，那它所在的一列是否也會是正確的？（答案是：是。如果用的是偶數的同位檢查法，那一定會是正確的。）
5. 在這個卡片練習中，我們用的是偶數的同位檢查 — 也就是讓色卡的數量保持為偶數。反過來想，我們能不能用奇數的同位檢查呢？（可以，但是在右下角卡片的那個檢查，只有在列數與行數同時是奇數或同時是偶數才有作用。例如， 5×9 或 4×6 可以檢查出問題，但 3×4 就不行。）

一個現實生活範例：書碼與條碼

這種檢查技術也同時被用在書碼和條碼。發行的書本會有一組 10 或 13 位的數字數字，通常會印在書背上。最後一位的數字就是檢查碼，就像活動練習中的同位卡片一樣。

這表示如果你訂購了一本有使用 ISBN (International Standard Book Number, 國際標準書號) 的書，網站能幫你檢查書號有沒有錯誤。只要很簡單地看同位檢查碼就好了。這樣你就不會等了老半天，結果還拿到錯誤的書了。

這裡是一組 10 碼的書號的檢查方式：第一位數字乘上十，第二位數字乘上九，第三位數字乘上八，依此類推，直到第九位數字乘上二。最後把所有的值相加。

例如：ISBN 為 0-13-911991-4 的書，它算出來的值是：

$$(0 \times 10) + (1 \times 9) + (3 \times 8) + (9 \times 7) + (1 \times 6) + (1 \times 5) + (9 \times 4) + (9 \times 3) + (1 \times 2) = 172$$

然後把算出來的值除以 11。餘數是多少？

$$172 \div 11 = 15 \text{ 餘 } 7$$

如果餘數為 0，檢查碼就是 0；如果不是的話，就用 11 減掉餘數，得到的值就是檢查碼。

$$11 - 7 = 4$$

看看，ISBN 的最後一碼是不是 4？賓果！

如果 ISBN 的最後一碼不是 4，那我們就知道發生了錯誤。

如果檢查碼是 10 的話呢？變成兩位數了。這種狀況下，就會改用 X 來表示。

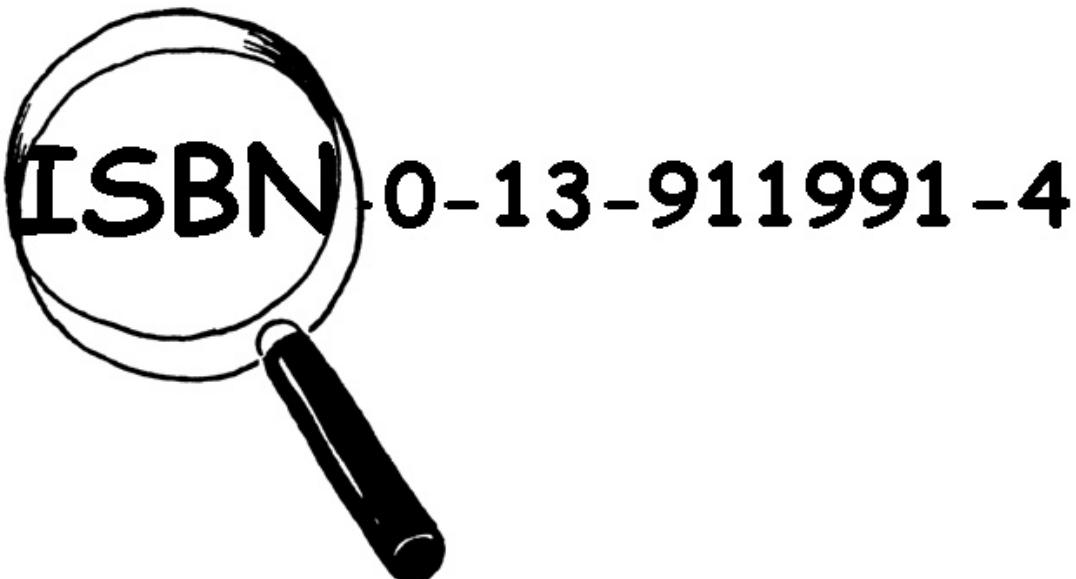


▲ 這是 Weet-Bix™ 的一個盒子的條碼

另外一個使用檢查碼的例子，就是食品雜貨的條碼。它用的是不同的公式（前面說的公式可以用在 13 位的書碼）。如果條碼讀錯了，它最後一位數應該會和計算的值不相同。當這樣的情況發生時，掃描器會發出嗶嗶的聲音，櫃台結帳人員則會重新掃描條碼。此外，檢查碼也使用在銀行帳號、身份證字號、稅號、火車、運輸工具等等，以及在許多人們需要複製一些數字但要確認是否正確的時候。

檢查那本書！

偵探暢銷著作
書本追蹤服務公司



我們擅長尋找和檢查 ISBN 檢查碼，而且只需要一點小額費用。
加入我們的行列 -- 找找你的教室或圖書館中有沒有真正的 ISBN 碼。

他們的檢查碼是對的嗎？

有時候會發生一些錯誤。

常見的錯誤有：

- 某一位數的值被改變
- 兩個相鄰的數字被互換
- 數字中被多插入一位數
- 某一位數字不見了

你能找到一本檢查碼為 X，也就是檢查碼為 10 的書嗎？應該不會太難找 -- 平均每十一本書中就應該有一本。

哪一種錯誤會發生但不會被檢查到？你能改變某一位數字且仍然維持正確的檢查碼嗎？如果兩位數字被互換呢？（這種錯誤很常在打字時發生）

這個活動在說什麼？

想像你將 10 塊錢現金存入銀行的帳戶。出納員整理出所有存款的量，並傳送到中央電腦。假設在傳送的過程中，線路發生了一些干擾，結果數字從 10 塊錢變成 1000 塊。當然啦，你會很開心地接受這種錯誤，但對銀行來說可是會哭哭的！

在傳送資料時檢查錯誤是非常重要的。所以接收端的電腦需要檢查傳過來的資料沒有因為某些干擾造成損毀。有時候發生傳送錯誤時，原始資料可以再傳送一次，但有些情況則是不行，比方說磁碟因為曝露在磁力或電力輻射，或是高溫下，或是任何其它的物理性破壞而造成資料損毀。如果資料是從深遠的太空偵測器傳送過來，那麼當錯誤發生時，等待重新傳送會需要非常長的時間！（比方說，在木星最靠近地球的時候，從木星傳過來的無線訊號，大概需要超過半小時才能收到）。

因此，當資料損毀時，我們需要有辦法發現（錯誤檢查），並且能重建原始的資料（錯誤修正）。

在翻卡片遊戲的活動中所使用到的技巧，也被用在電腦上。藉由加入同位檢查位元到每一列和每一行，我們不只能檢查出有錯誤，還能找出錯誤發生的位置。這個出問題的位元會被改回去，這就是錯誤修正。

當然，電腦使用的錯誤控制系統通常會複雜很多，以檢查和修正多重錯誤。電腦中的硬碟裡，有很大量的空間是被用來做錯誤修正的。這樣即使部分的硬碟壞了，也還是可以工作。這些錯誤偵測與修正的系統，與這個活動中所講的同位檢查機制是密切相關的。

解答與提示

ISBN-10 檢查碼無法偵測出的錯誤會發生在某一位數字增加而同時另一位數字減少，剛好把檢查碼的差彌補過來。這種狀況下計算出來的總和會一樣。然而這種計算方式之下，這種錯誤發生的機率很小。在別的系統（例如 ISBN-13），也有可能有其他種類的錯誤是無法被檢查出來的，例如三個連續的數字的顛倒；但最常見的錯誤（例如打錯一個數字，或兩相鄰的數字交換）是會被檢查出來的。