

7^η Δραστηριότητα

Ελαφρύτερος και βαρύτερος – Αλγόριθμοι ταξινόμησης

Περίληψη

Οι υπολογιστές χρησιμοποιούνται συχνά για την ταξινόμηση καταλόγων, όπως για παράδειγμα, ονόματα σε αλφαριθμητική σειρά, ραντεβού ή e-mail κατά ημερομηνία, αντικείμενα κατ' αριθμητική σειρά. Έχει διαπιστωθεί πως οι κατάλογοι ταξινόμησης μας επιτρέπουν να βρίσκουμε γρήγορα το αντικείμενο που ψάχνουμε, καθιστώντας επίσης τις ακραίες τιμές ενός οποιουδήποτε καταλόγου πιο εύκολα αντιληπτές. Για παράδειγμα, αν ταξινομηθούν τα αποτελέσματα ενός διαγωνίσματος στην τάξη, τότε, τόσο ο χειρότερος βαθμός όσο κι' ο καλύτερος, καθίστανται εμφανείς.

Αν χρησιμοποιηθεί μία λανθασμένη μέθοδος, μπορεί να απαιτηθεί πολύ παραπάνω χρόνος για την ταξινόμηση ενός μεγάλου καταλόγου, ακόμη και με έναν γρήγορο υπολογιστή. Εντυχώς, όμως, υπάρχουν πολλές γνωστές μέθοδοι για την ταξινόμηση. Σ' αυτή τη δραστηριότητα, τα παιδιά θα ανακαλύψουν διαφορετικούς τρόπους για να ταξινομούν και θα διαπιστώσουν πως μία καλή μέθοδος μπορεί να πετύχει το στόχο πολύ πιο αποτελεσματικά και γρήγορα από μία απλή μέθοδο.

Αντιστοιχία με το σχολικό πρόγραμμα *

(*Σημ. μτφ.: αναφέρεται στη Νέα Ζηλανδία)

- ✓ Μαθηματικά: Μέτρηση, επίπεδο 2 και άνω. Εκτελώντας εντολές πρακτικής ζύγισης.

Δεξιότητες

- ✓ Χρήση ζυγαριάς
- ✓ Τακτοποίηση
- ✓ Σύγκριση

Ηλικία

- ✓ Από 8 ετών και άνω

Υλικά

Κάθε ομάδα παιδιών θα έχει:

- ✓ ομάδες των 8 δοχείων των ιδίων διαστάσεων αλλά διαφορετικού βάρους (π.χ. κουτιά γάλακτος ή κουτιά με ρολά μεμβράνης ή αλουμινίου γεμάτα με άμμο)
- ✓ Ζυγαριές
- ✓ Φύλλο εργασίας: Ταξινόμηση βαρών (σελ. 68)
- ✓ Φύλλο εργασίας: Διαιρεί και βασίλευε (σελ. 69)

O ελαφρύτερος και o βαρύτερος

Συζήτηση

Οι υπολογιστές πρέπει συχνά να βάλουν καταλόγους σε τάξη. Ας σκεφτούμε όλα τα μέρη όπου το να βάζουμε σε τάξη τα αντικείμενα, είναι σημαντικό. Τι θα συνέβαινε αν αυτά τα αντικείμενα δεν ήταν τακτοποιημένα;

Οι υπολογιστές, συνήθως, συγκρίνουν μόνο 2 τιμές συγχρόνως. Η δραστηριότητα στην επόμενη σελίδα, χρησιμοποιεί αυτό τον περιορισμό για να δώσει στα παιδιά μια ιδέα για το πώς είναι να ταξινομείς και να τακτοποιείς.

Δραστηριότητα

1. Χωρίστε τα παιδιά σε διάφορες ομάδούλες.
2. Η κάθε ομάδα θα χρειαστεί ένα αντίτυπο της δραστηρ. στη σελ. 68, αλλά και δικά της αντίβαρα και ζυγαριές.
3. Αφήστε τα παιδιά να διασκεδάσουν με την δραστηριότητα αυτή και μετά συζητείστε μαζί τους το αποτέλεσμα.

Δραστηριότητα του φύλλου εργασίας: Κατατάσσοντας βάρη

Σκοπός: Να βρούμε τον καλύτερο τρόπο για να βάλουμε μία ομάδα αγγώστων βαρών στη σειρά.

Θα χρειαστείς: Άμμο ή Νερό, 8 ίδια δοχεία και ζυγαριές

Τι να κάνεις:

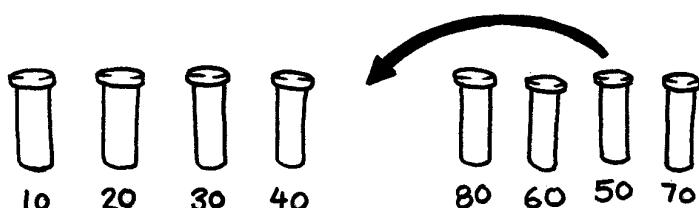
1. Γέμισε το κάθε δοχείο με μία διαφορετική ποσότητα άμμου ή νερού. Κλείσε καλά.
2. Μπερδέψτε τα δοχεία, για να μη μπορείτε να ξεχωρίζετε το βάρος τους.
3. Εντοπίστε το πιο ελαφρύ δοχείο. Ποιος είναι ο πιο εύκολος τρόπος για να το πετύχουμε;

Σημείωση: Μπορείτε να χρησιμοποιείτε τη ζυγαριά μόνο για να ξεγίζετε το κάθε δοχείο. Μπορείτε να συγκρίνετε μόνο 2 δοχεία κάθε φορά.

4. Επιλέξτε στη τύχη 3 δοχεία και βάλτε τα κατά σειρά, από το πιο ελαφρύ προς το πιο βαρύ, χρησιμοποιώντας μόνο τη ζυγαριά. Πώς τα καταφέρατε; Ποιός είναι ο μικρότερος αριθμός συγκρίσεων που είναι απαραίτητος; Γιατί;
5. Τώρα βάλτε όλα τα αντικείμενα κατά σειρά βάρους, από το πιο ελαφρύ προς το πιο βαρύ. Όταν νομίζετε ότι τελειώσατε, ελέγχετε το αποτέλεσμα, συγκρίνοντας μεταξύ τους με τη βοήθεια της ζυγαριάς, τα ζεύγη 2 πλαϊνών αντικειμένων.

Κατάταξη με επιλογή (Selection Sort)

Μία μέθοδος που μπορεί να χρησιμοποιεί ένας υπολογιστής, λέγεται κατάταξη με επιλογή (selection sort).



Λειτουργεί με τον εξής τρόπο: Βρείτε πρώτα το πιο ελαφρύ αντικείμενο και βάλτε το κατά μέρος. Στη συνέχεια, βρείτε το πιο ελαφρύ απ' αυτά που μένουν και αφαιρέστε το. Επαναλάβατε αυτή τη διαδικασία, μέχρι να τελειώσετε τα προς ζύγιση αντικείμενα.

Μετρήστε πόσες συγκρίσεις κάνατε.

Extra για ειδικούς: δείξτε πώς μπορείτε να υπολογίσετε με μαθηματικό τρόπο πόσα βήματα είναι απαραίτητα για να κατατάξετε 8 αντικείμενα; Και αν είναι 9 αντικείμενα; Αν είναι 20;

Δραστηριότητα του φύλλου εργασίας: “Διαιρεί και βασίλενε”

Quicksort (Γρήγορη κατάταξη)

Το Quicksort είναι πολύ πιο γρήγορο από την κατάταξη με επιλογή, ειδικά για πολύ μεγάλους καταλόγους. Πράγματι, πρόκειται για μία από τις καλύτερες μεθόδους κατάταξης που γνωρίζουμε. Λειτουργεί ως εξής:

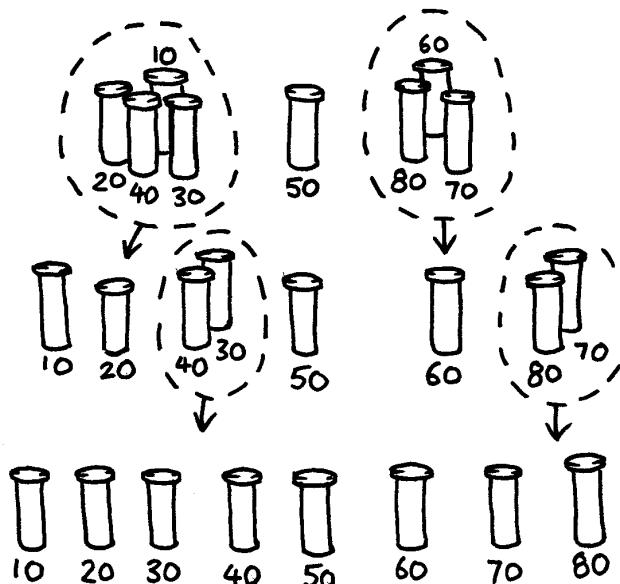
Διαλέξτε στη τύχη ένα αντικείμενο και τοποθετείστε το στο ένα πιάτο της ζυγαριάς.

Τώρα συγκρίνετε εκείνο που επιλέξατε, με κάθε αντικείμενο από εκείνα που μένουν. Βάλτε τα πιο ελαφριά στα αριστερά, το αντικείμενο που επιλέξατε πρώτο στο κέντρο, και τα πιο βαριά στα δεξιά.
(Μπορεί, τυχαία, να έχετε πολύ περισσότερα αντικείμενα από τη μία μεριά, απ' ότι στην άλλη).

Επιλέξτε ένα από τα σύνολα στα δεξιά και επαναλάβατε την προηγούμενη διαδικασία. Κάντε το ίδιο και για το άλλο σύνολο. Να θυμάστε να κρατάτε πάντα στο κέντρο το αντικείμενο που επιλέξατε ως πρώτο.

Συνεχίστε να εφαρμόζετε αυτή τη διαδικασία με όλα τα σύνολα, μέχρι που κάθε ομάδα να μην έχει πάνω από ένα αντικείμενο. Όταν όλα σύνολα θα έχουν υποδιαιρεθεί σε μεμονωμένα αντικείμενα, τότε τα αντικείμενα θα έχουν καταταγεί κατά σειρά από το πιο ελαφρύ προς το πιο βαρύ.

Πόσες συγκρίσεις απαιτούνται σε αυτή τη διαδικασία;

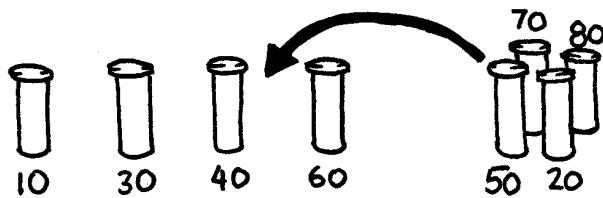


Το Quicksort είναι πιο αποτελεσματικό από το selection sort, εκτός κι αν αρχίσατε με το απολύτως πιο βαρύ ή το πιο ελαφρύ αντικείμενο. Αν είστε τυχεροί και επιλέξατε το αντικείμενο με το ενδιάμεσο βάρος, θα πρέπει να κάνατε μόνο 14 συγκρίσεις, δηλ. τις μισές από τις 28 που θα χρειαζόσασταν με το selection sort. Σε κάθε περίπτωση, το quicksort δεν θα είναι χειρότερο από το selection sort και, μάλιστα, μπορεί να είναι πολύ-πολύ πιο αποτελεσματικό!

Extra για ειδικούς: Αν το quicksort, παρεμπιπτόντως, διάλεγε πάντα το πιο ελαφρύ αντικείμενο, πόσες συγκρίσεις θα έπρεπε να κάνει;

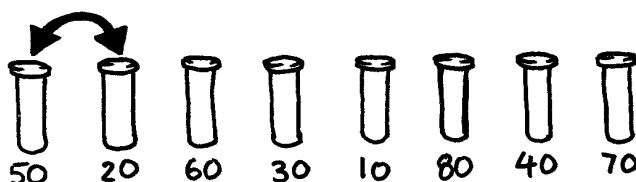
Παραλλαγές και επεκτάσεις

Έχουν επινοηθεί πολλά διαφορετικά συστήματα κατάταξης. Για να κατατάξετε τα βάρη σας, μπορείτε να χρησιμοποιήσετε και τα εξής:



Insertion sort (κατάταξη με εισαγωγή): λειτουργεί αποβάλλοντας κάθε αντικείμενο από ένα μη καταταγμένο σύνολο, και βάζοντάς το στη σωστή θέση, μέσα σε έναν αυξανόμενο κατάλογο (βλέπε παρακάτω εικόνα). Για κάθε εισαγωγή, το σύνολο των μη καταταγμένων αντικειμένων μειώνεται, ενώ ο αυξανόμενος κατάλογος με τα καταταγμένα αυξάνεται, μέχρι που να τακτοποιηθούν όλα τα αρχικά αντικείμενα. Οι χαρτοπαίχτες χρησιμοποιούν πολύ συχνά αυτό το σύστημα για να τακτοποιήσουν μία μοιρασιά με χαρτιά.

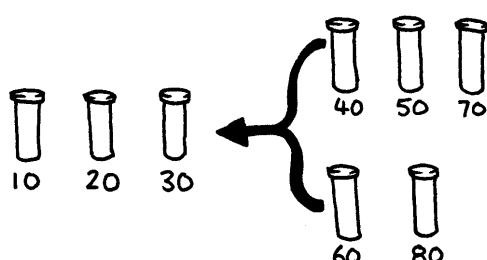
Bubble sort (κατάταξη με φούσκες) λειτουργεί ανατρέχοντας τον κατάλογο ξανά και ξανά, αλλάζοντας θέση σε όλα τα αντικείμενα που είναι δίπλα-δίπλα και σε λάθος θέση, όταν συναντάμε στα δεξιά ένα αντικείμενο πιο ελαφρύ απ' εκείνο στ' αριστερά. Ο κατάλογος θα είναι ταξινομημένος όταν δεν απαιτούνται πια περαιτέρω αλλαγές θέσεως. Αυτή η μέθοδος δεν είναι πολύ αποτελεσματική, αλλά πολλοί θεωρούν ότι είναι πολύ πιο εύκολα κατανοητή από άλλες.



Mergesort (κατάταξη με σύμπτυξη) είναι μία άλλη μέθοδος που χρησιμοποιεί το “διαιρεί και βασίλευε” για να ταξινομήσει ένα κατάλογο πραγμάτων. Κατ' αρχάς, ο κατάλογος υποδιαιρέται στη τύχη σε δύο υποκαταλόγους με ίσο αριθμό αντικειμένων (αν υπάρχει μονός αριθμός αντικειμένων, τότε ένας από τους δύο νέους υποκαταλόγους θα περιέχει ένα επιπλέον αντικείμενο). Ταξινομείται καθένας από τους δύο υποκαταλόγους και, στο τέλος, οι 2 κατάλογοι συμπτύσονται μαζί. Η σύμπτυξη των δύο καταλόγων είναι μία απλή διαδικασία:

Αρκεί να απομακρύνουμε κατ' επανάληψη, το πιο μικρό από τα 2 πράγματα που είναι στην κορυφή των 2 καταλόγων. Στην παρακάτω εικόνα, τα βάρη ανάμεσα στα 40 και τα 60 gr, βρίσκονται στην αρχή των 2 καταλόγων, άρα, το επόμενο πράγμα προς απομάκρυνση και προς εισαγωγή στον τελικό κατάλογο που φτιάχνουμε (στ' αριστερά) είναι το αντικείμενο των 40 gr.

Πώς ταξινομούνται οι υποκατάλογοι; Απλό, αρκεί να χρησιμοποιήσουμε ... το Mergesort! Έτσι, στο τέλος, όλοι οι κατάλογοι θα έχουν συρρικνωθεί και θα αποτελούνται από ένα και μοναδικό στοιχείο, γι' αυτό και δεν θα πρέπει να ανησυχούμε αν θα ξέρουμε πότε να σταματήσουμε....



Τι σχέση έχουν όλα αυτά;

Είναι πολύ πιο εύκολο να βρει κανείς μια πληροφορία μέσα σε έναν ταξινομημένο κατάλογο. Οι τηλεφωνικοί κατάλογοι, τα λεξικά και οι πίνακες περιεχομένων των βιβλίων, χρησιμοποιούν πάντα την αλφαριθμητική σειρά και η ζωή μας θα ήταν πολύ πιο δύσκολη εάν δεν το έκαναν...! Εάν ένας κατάλογος αριθμών είναι ταξινομημένος, οι ακραίες περιπτώσεις είναι πιο εύκολα εντοπίσιμες, διότι βρίσκονται στην αρχή και στο τέλος του καταλόγου. Οι περιπτώσεις σε διπλό αντίτυπο είναι κι' αυτές πιο εύκολα διακριτές, διότι καταλήγουν στην ίδια θέση.

Οι υπολογιστές καταναλώνουν πολύ από το χρόνο λειτουργίας τους βάζοντας σε τάξη τα πράγματα, και γι' αυτό οι πληροφορικάριοι επινόησαν γρήγορες και αποτελεσματικές μεθόδους για να το πετύχουν. Μερικές από τις πιο αργές μεθόδους, όπως το insertion sort, το selection sort ή το bubble sort, μπορεί να αποδειχθούν χρήσιμες σε ειδικές συνθήκες, αλλά γενικά χρησιμοποιούνται οι πιο γρήγορες, όπως το quicksort.

Το Quicksort εκμεταλλεύεται ένα concept που λέγεται αναδρομή (recursion). Αυτό σημαίνει ότι συνεχίζουμε να διαιρούμε έναν κατάλογο σε μικρότερα μέρη, εφαρμόζοντας το ίδιο είδος κατάταξης και στα μικρά αυτά κομμάτια. Αυτή η συγκεκριμένη προσέγγιση λέγεται “**διαιρεί και βασίλενε**”. Ο κατάλογος κατακερματίζεται (“διαιρεί”) επαναλαμβανόμενα, μέχρι να γίνει επαρκώς μικρός για να κατακτηθεί (“βασίλενε”).

Στη περίπτωση του quicksort, οι κατάλογοι υποδιαιρούνται μέχρι να περιέχουν μόνο ένα στοιχείο. Είναι εύκολο να βάλεις σε τάξη ένα μόνο στοιχείο! Αν και μπορεί να φαίνεται πολύ περίπλοκο, αυτή η μέθοδος είναι απίστευτα πιο γρήγορη από άλλες.

Λύσεις και υπόδειξεις

1. Ο καλύτερος τρόπος για να βρούμε το πιο ελαφρύ αντικείμενο, είναι να πάρουμε υπ' όψη μας, ένα προς ένα, όλα τα αντικείμενα, σημειώνοντας το μέχρι εκείνη τη στιγμή ελαφρύτερο. Δηλαδή, να συγκρίνουμε 2 αντικείμενα και να κρατάμε το πιο ελαφρύ, επαναλαμβάνοντας την μέθοδο, μέχρι να έχουν εξετασθεί όλα τα αντικείμενα.

2. Θέστε σε σύγκριση τα βάρη πάνω στη ζυγαριά. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί εύκολα με 3 ζυγίσματα και μερικές φορές 2– αν τα παιδιά καταλάβουν πως ο συντελεστής σύγκρισης είναι μεταβατικός (*transitive operator*), δηλαδή, αν το A είναι ελαφρύτερο από το B και το B είναι ελαφρύτερο από το C, τότε το A πρέπει να είναι πιο ελαφρύ από το C).

Ειδικοί:

Να μία υπόδειξη για να υπολογίσουμε τον συνολικό αριθμό συγκρίσεων που πραγματοποιούνται από το selection sort .

Για να βρούμε ένα ελάχιστο 2 αντικειμένων, θα κάνετε μία μόνο σύγκριση, για 3 αντικείμενα θα κάνετε 2, για 4 αντικείμενα θα κάνετε 3 και πάει λέγοντας. Για να ταξινομήσουμε 8 αντικείμενα χρησιμοποιώντας το selection sort, θα χρειαστείτε 7 συγκρίσεις για να βρείτε τον πρώτο, 6 για να βρείτε τον επόμενο, 5 για τον μεθεπόμενο, και πάει λέγοντας. Αυτό μας κάνει συνολικά:

$$7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 28 \text{ συγκρίσεις}$$

n αντικείμενα θα απαιτήσουν $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n - 1$ συγκρίσεις για να ταξινομηθούν.

Το άθροισμα αυτών των αριθμών γίνεται πιο εύκολο, εάν ομαδοποιηθούν διαφορετικά.

Για παράδειγμα, για να αθροίσετε τους αριθμούς $1 + 2 + 3 + \dots + 20$, ομαδοποιήστε τους ως εξής:

$$(1 + 20) + (2 + 19) + (3 + 18) + (4 + 17) + (5 + 16) +$$

$$(6 + 15) + (7 + 14) + (8 + 13) + (9 + 12) + (10 + 11)$$

$$= 21 \times 10$$

$$= 210$$

Γενικά, το άθροισμα $1 + 2 + 3 + 4 \dots + n - 1 = n(n - 1)/2$.