

# 活動 5

## 二十個問題 — 資訊理論

### 活動摘要

在一本 1000 頁的書中有多少的資訊？一本 1000 頁的電話簿中，或者是一疊 1000 張的空白紙中，甚至是在「魔戒」這本書中，哪個有更多的資訊？如果我們有方法可以「測量」，我們就可以估計需要多少的空間去存放這些資訊。例如，你還有辦法讀這段話嗎？

Ths sntnc hs th vwls mssng.

懂一點英文的話，應該可以知道這句話在說什麼吧，因為在母音當中並沒有太多的「資訊」。這個活動將會介紹一個方法來測量資訊內容。

### 課程銜接

- 數學：數字 — 探索數字：大於、小於、範圍
- 數學：代數 — 樣式和順序
- 英文：拼字、辨識文字中的元素

### 習得技能

- 比較數字並且利用數字的範圍
- 推導演繹
- 提問題

### 適合年齡

10 歲以上

### 所需素材

- 在第一個活動中沒有需要的材料。

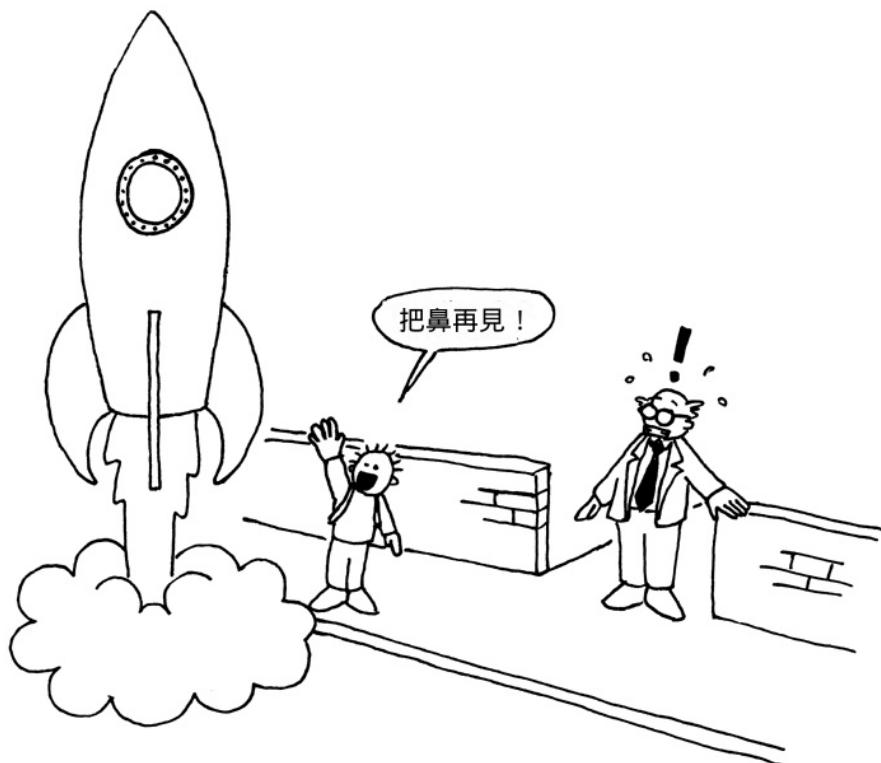
在額外的活動中，每一位同學將會需要：

- 活動學習單：決策樹（第 54 頁）



## 二十個問題

1. 和同學討論有關於他們所認為的資訊是什麼。
2. 我們如何能得知在一本書中有多少的資訊？書中的頁數和字數是重要的因素嗎？一本書會比另外一本有更多的資訊嗎？一本非常無聊或是特別有趣的書，哪個包含的資訊量較多？一本 400 頁但都是廢話的書，會比一本電話簿含有更多的資訊嗎？
3. 解釋電腦科學家是如何藉由某段訊息（或者某本書）「讓人驚訝的程度」的來測量資訊。告訴你一些你已經知道的東西 — 比方說，一個總是走路到學校的朋友告訴你：「我今天走路到學校。」你就一點都不會感到驚訝，因為你早就知道了。但是如果你的朋友告訴你：「我今天坐著直升機到學校。」這樣的訊息會讓你下巴掉下來，也因此會告訴我們非常多的資訊。
4. 要如何測量得知某段訊息的「驚訝值」呢？
5. 一個方式是看看要猜到那個資訊會有多困難。如果你的朋友告訴你：「猜猜我今天是如何到學校的？」而答案是他走路到學校，這個時候你會有比較高的機會在第一次就猜到正確答案。但如果答案是坐直升機，甚至太空船，那麼有可能得猜好幾次才能猜到答案。
6. 某段訊息所包含的資訊量，是藉由是否容易被猜到來衡量。下面的遊戲會帶給我們一些這方面的想法。



## 活動：二十個問題

這是改編自傳統的「二十個問題」的遊戲。選擇一個學生出來當關主，心裡想定一個答案以後，由其他的學生來猜關主心裡想的是什麼。其他學生可以問關主問題，但關主只能回答「是」或「不是」。任何問題都可以問，但回答只有「是」或「不是」，不能有其他任何回答。

比方說，題目可以是：

- 1 到 100 間的數字
- 1 到 1000 間的數字
- 1 到 100 萬間的數字
- 任何一個整數
- 有特定樣式（學生們可以瞭解）的一串六個數字。回答時必須從第一個到最後一個依序回答。  
(例如，2, 4, 6, 8, 10, 12)

選擇一種，然後讓關主在範圍內選擇一個答案，最後看看大家問了幾個問題才猜到關主的答案。這個值就是「資訊」的測量值。

### 活動討論

你用的是哪一種策略？哪一種策略最好？

引導學生發現，當數字範圍在 1 到 100 之間，那麼最多只需要 7 次的猜測就可以得到正確答案。例如：

是否比 50 小 — 是  
是否比 25 小 — 否  
是否比 37 小 — 否  
是否比 43 小 — 是  
是否比 40 小 — 否  
是否比 41 小 — 否  
答案就是 42 — 是！

有趣的是當範圍拉大到 1 到 1000 的數字時，上述的方法並不需要多十倍的問題量 — 反而只需要多三個問題就可以了。實際上把範圍每次都加倍，每次最多只需要多問一個問題就可以得到答案。

後續可以讓同學們玩玩看珠璣妙算（MasterMind，請參考維基百科中「珠璣妙算」條目。）

## 活動延伸：在某段訊息中有多少資訊？

電腦科學家並不只猜數字而已 — 他們也可以猜到在一個字或一個句子中，可能接著出現哪一個字母。

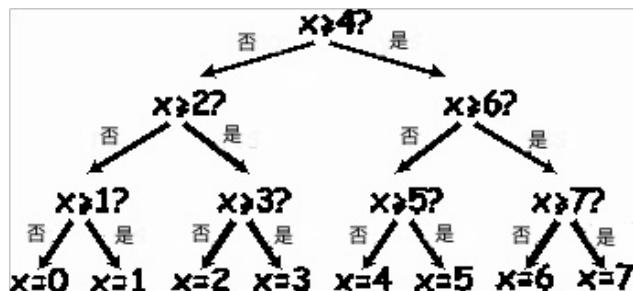
嘗試用四到六個單字組成的句子來進行這個遊戲。同學們必須要依照正確的順序（從第一個到最後一個）猜到字母。指定一位同學，寫下大家發現的字母，並且記錄下每個字母猜了幾次才猜中。任何一個可以藉由「是」或「否」回答的問題都可以被提出。

舉例來說：「這個字母是 t 嗎？」、「這個字母是母音嗎？」或者「這個字母的順序是在 m 之前嗎？」注意，在文字之間的空白也被視為一個「字母」，並且必須要猜出來。輪流並看看你能不能發現，在訊息中的哪一部分是最容易被找出來的。

## 活動學習單：決策樹

如果你已經能掌握問問題的策略，那你不需要詢問任何事情便能傳達訊息。

這裡有一張叫做「決策樹」的圖，用來猜測 0 到 7 之間的某個數字：



要猜到數字 5 需要做哪些決定（是 / 不是）？

你需要多少決定（是 / 不是）才能猜測出任何數字？

現在我們來觀察一件非常迷人的事。在樹最下方的數字 0,1,2,3… 的下面寫下那些數字的二進位表示法（參考活動 1）。

仔細觀察決策樹的圖。如果「不是」 = 0，而「是」 = 1，你發現了什麼？

其實在遊戲中，我們選擇提問的方式，就是讓答案序列可以用這種方式表達數字。

現在來試試看。如果要猜 0 到 15 間的數字，決策樹要怎麼畫？

高手挑戰：你會使用哪一種決策樹來猜測一個人的年齡？  
如果是猜測一個句子裡的下個字母呢？

## 這個活動在說什麼？

Claude Shannon，著名的美國數學家（同時也是雜耍者及獨輪車車手），做了許多關於這個遊戲的實驗。他用「位元數」來測量「資訊」的量 -- 每個「是」與「不是」分別都用一個位元（1或 0）來代表。他發現每個訊息所包含的「資訊」量的多寡與你已知的事情是有關的。有時候我們能藉由問一個問題來免去問許多其他問題的必要。在這種情況下，這則訊息的資訊量是低的。舉例來說，投擲一枚硬幣的資訊通常用一個位元即可：正面或反面。但如果擲一枚不公正的硬幣，十次中有九次是正面，那此資訊就不再是用一個位元可以表示了 — 信不信由你，它的資訊量更少。你要如何知道投擲一枚硬幣的資訊少於一個是非題呢？這很簡單 — 問像這樣的問題，「下兩次擲硬幣的結果都是正面嗎？」對於不公正的硬幣，有 80% 的機率答案為「是」。而在剩下 20% 答案為「不是」的情況下，你必須再多問兩個問題。但平均起來，每次擲硬幣所問的問題會少於一題！



Shannon 將一個訊息的資訊量稱為「熵」(entropy)。熵不僅相依於可能的結果數 — 以擲硬幣為例，有兩種結果 — 也相依於這些結果發生的機率。我們需要更多的問題，來獲得關於一些不可思議或令人訝異的事件的資訊，因為這些事件透露更多我們不知道的事情 — 像是搭直升機去學校。

一個訊息的熵對資訊科學家來說是非常重要的。你無法將一則訊息壓縮到比它的熵所佔據的空間還小；而一個最佳的壓縮系統就相當於一個剛剛所進行的猜數字遊戲。因為電腦程式在進行「猜測」，所猜測的問題清單可以事後重複使用，所以只要將答案（位元）紀錄下來，我們就能重現原來的資訊！最佳的壓縮系統可以將文字檔案壓縮到大約原先大小的四分之一 — 大大的節省儲存空間！

猜測的方法也能被用來建造一個預測使用者輸入的電腦介面！這對於打字有困難的身心障礙人士來說非常有幫助。電腦建議他們接下來可能要輸入什麼，而他們只要選擇他們想要的字即可。一個好的系統對於每個字母平均只需要兩個是非題的答案，如此便能成為對於控制滑鼠及鍵盤有困難的人們很棒的助手。這樣的系統也以不同的形式被用在手機上「打字」的時候。

## 解答與提示

一個是非題答案與一個位元的資訊有關 -- 無論是單純的問題，像是「比 50 大嗎？」，或是更複雜的問題，像是「是否在 20 和 60 之間？」

在猜數字遊戲中，如果題目是用特定的方法選出來的，則答案的序列就是該數字的二進位表示法。

3 以二進位表示裡就是 011，這代表在選擇樹裡，答案為「不是」、「是」、「是」，就跟我們把「不是」寫成 0 並把「是」寫成 1 的結果相同。

在猜測年齡時，所使用的決策樹可能會偏向使用較小的數字。

猜測一個句子裡的字母時，應該要依據前一個字母來做決策。