

9^η Δραστηριότητα

Η λασπωμένη πόλη - Minimal Spanning Trees*

(*είδος γραφημάτων)

Περίληψη

Η κοινωνία μας συνδέεται με πολλά δίκτυα: το τηλεφωνικό δίκτυο, το ενεργειακό δίκτυο, το οδικό δίκτυο. Για ένα ιδιαίτερο δίκτυο, υπάρχουν συνήθως κάποιες επιλογές για το πως να σχεδιασθούν οι δρόμοι, οι καλωδιώσεις ή οι ασύρματες συνδέσεις. Θα πρέπει, λοιπόν, να βρούμε τους πιο αποτελεσματικούς τρόπους για να συνδέσουμε τα διάφορα αντικείμενα σε ένα δίκτυο.

Αντιστοιχία με το σχολικό πρόγραμμα *

(*Σημ. μτφ.: αναφέρεται στη Νέα Ζηλανδία)

- ✓ Μαθηματικά: Γεωμετρία, επιπέδου 2/3 και άνω. Εξερευνώντας τα σχήματα και τον χώρο: Βρίσκοντας τις βραχύτερες διαδρομές σε έναν χάρτη

Ηλικία:

- ✓ Άνω των 9 ετών

Ικανότητες:

- ✓ Επίλυση προβλημάτων

Υλικά:

Το κάθε παιδί θα χρειασθεί:

- ✓ Πρακτική δραστηριότητα: Το πρόβλημα της λασπωμένης πόλης (σελ. 80)
- ✓ Πλακάκια ή τετράγωνα κομματάκια από χαρτόνι (περίπου 40 για κάθε παιδί)

Η λασπωμένη πόλη

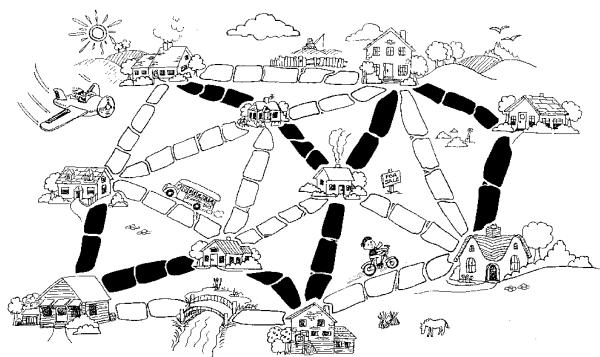
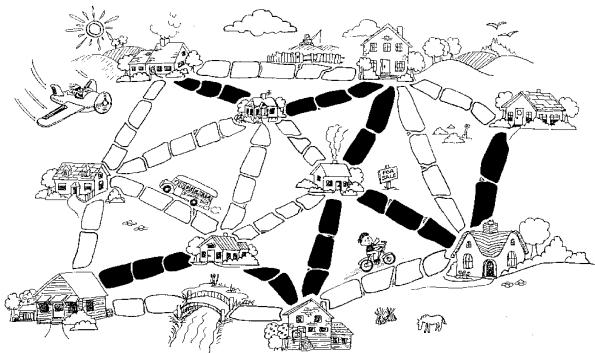
Εισαγωγή

Αυτή η δραστηριότητα θα σας δείξει πως χρησιμοποιούνται οι υπολογιστές για να βρίσκουμε την καλύτερη λύση σε καθημερινά προβλήματα, όπως π.χ. το να συνδέσουμε τις γραμμές ηλεκτρικού ρεύματος ανάμεσα στα σπίτια. Τα παιδιά πρέπει να χρησιμοποιήσουν το φύλλο εργασίας της σελ. 94, που εξηγεί το πρόβλημα της “Λασπωμένης Πόλης”.

Η συζήτηση που ακολουθεί

Μοιραστείτε τη λύση που βρήκαν τα παιδιά. Τι στρατηγικές ακολούθησαν;

Μία καλή στρατηγική για να βρείτε την καλύτερη λύση, είναι να αρχίσετε με ένα άδειο χάρτη και βαθμιαία να τοποθετείτε τα πλακάκια (ή κομμάτια από χαρτόνι), μέχρι που όλα τα σπίτια να είναι συνδεδεμένα μεταξύ τους, προσθέτοντας διαδρομές με σταδιακά αυξανόμενο μήκος, και προσέχοντας να μη συνδέσουμε τα ήδη συνδεδεμένα σπίτια. Μπορεί να βρούμε διαφορετικές λύσεις αν αλλάξουμε τη σειρά με την οποία προσθέτουμε διαδρομές σύνδεσης του ίδιου μήκους. Δύο πιθανές λύσεις αναδεικνύονται πιο κάτω.



Μία άλλη στρατηγική είναι να αρχίσουμε με όλα τα ήδη πλακοστρωμένα μονοπάτια, απομακρύνοντάς τα σταδιακά, αν δεν είναι απαραίτητα. Αυτό, πάντως, απαιτεί πολύ μεγαλύτερη προσπάθεια από την προηγούμενη στρατηγική.

Πού μπορείτε να βρείτε τέτοιου τύπου δίκτυα στην καθημερινή μας ζωή;

Οι πληροφορικάριοι ονομάζουν την αναπαράσταση αυτών των δικτύων “γράφους” ή “γραφήματα”. Τα πραγματικά δίκτυα μπορούν να αναπαρίστανται με γράφους, ούτως ώστε να μπορέσουμε να επιλύσουμε διάφορα προβλήματα, όπως π.χ. τον σχεδιασμό για την βέλτιστη τοποθέτηση ενός οδικού δικτύου σε μία πόλη, είτε την ανεύρεση του καλύτερου τρόπου για τη σύνδεση διαφόρων πόλεων με αεροπορικά δρομολόγια.

Υπάρχουν επίσης πολλοί αλγόριθμοι που μπορούν να βρουν εφαρμογή στους γράφους (ή και “γραφήματα”), όπως το να βρούμε την ελάχιστη απόσταση μεταξύ 2 σημείων, ή τη συντομότερη διαδρομή που να περνάει αγγίζοντας όλα τα σημεία.

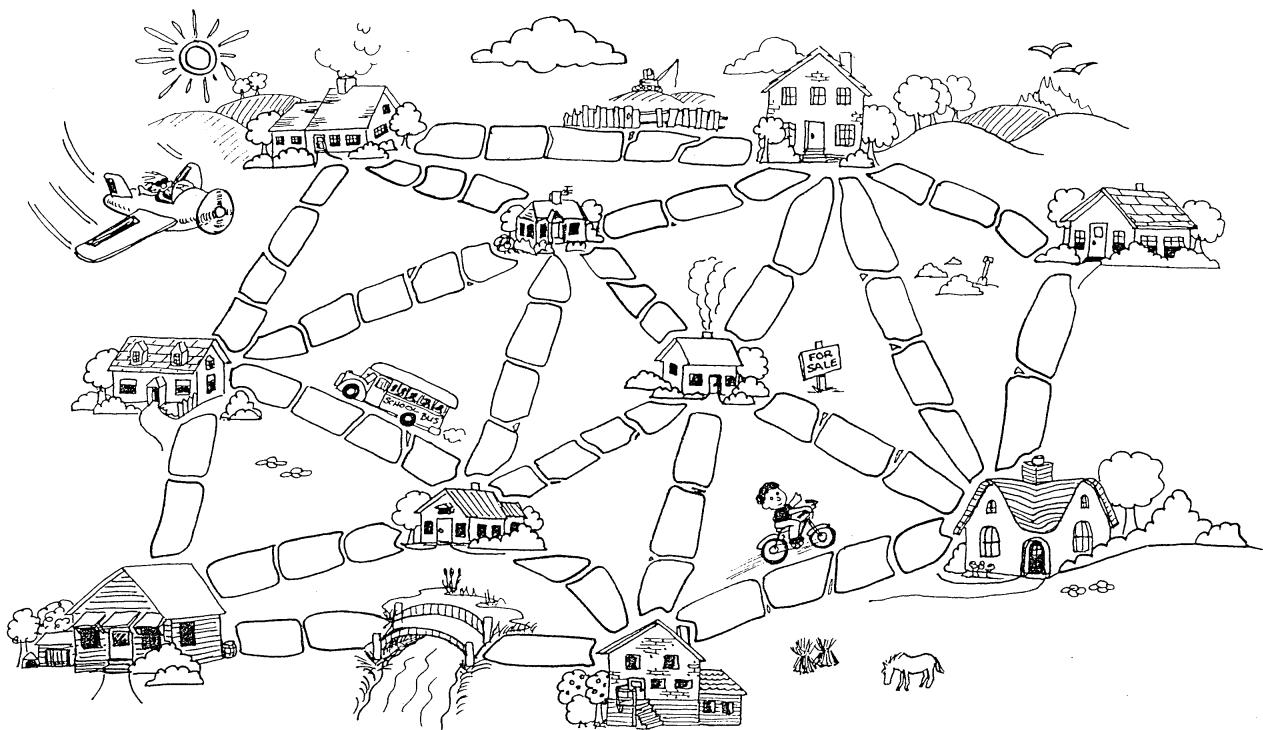
Φύλλο εργασίας: Το πρόβλημα της Λασπωμένης Πόλης

Πριν πολύ-πολύ καιρό, ήταν μία πόλη που δεν είχε δρόμους. Ήταν πολύ δύσκολο να τριγυρνάς σ' αυτή την πόλη μετά από μία μπόρα, γιατί μόνο λάσπη έβρισκες παντού. Τα αυτοκίνητα παγιδεύονταν στη λάσπη και ο κόσμος λέρωνε συνεχώς τα παπούτσια τους. Ο Δήμαρχος της πόλης αποφάσισε ότι ήταν καιρός να αρχίσει να πλακοστρώνει μερικούς δρόμους, αλλά δεν ήθελε να ξοδέψει και πιο πολλά από το στενά απαραίτητο, διότι ο Δήμος ήθελε να φτιάξει και ένα κολυμβητήριο. Τότε, λοιπόν, ο Δήμαρχος έθεσε δύο όρους:

1. Θα πρέπει να πλακοστρωθούν αρκετοί δρόμοι για να μπορεί ο καθένας να πάει από το σπίτι του μέχρι ένα άλλο οποιοδήποτε σπίτι. Και επίσης,
2. Η πλακόστρωση θα πρέπει να κοστίσει το ελάχιστο δυνατό.

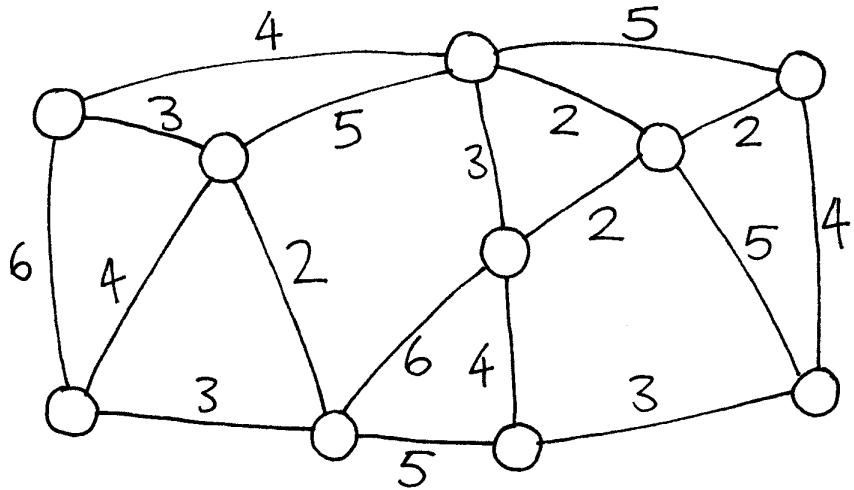
Αυτό που ακολουθεί είναι ο χάρτης της πόλης. Ο αριθμός των πλακιδίων (πέτρες) ανάμεσα στα σπίτια, αντιπροσωπεύει το κόστος για την πλακόστρωση εκείνου του τμήματος. Να βρείτε την καλύτερη διαδρομή που να συνδέει όλα τα σπίτια, αλλά με τη χρήση του μικρότερου δυνατού αριθμού πλακών (πετρών). (Η γέφυρα δεν μετράει, διότι δεν χρειάζεται πλακόστρωση).

Τι στρατηγική θα χρησιμοποιούσατε για να λύσετε το πρόβλημα;



Ποικιλίες και επεκτάσεις

Αυτό που ακολουθεί είναι ένας εναλλακτικός τρόπος για την αναπαράσταση πόλεων και δρόμων:



Τα σπίτια συμβολίζονται με τους κύκλους, οι λασπωμένοι δρόμοι με γραμμές, και το μήκος των δρόμων διευκρινίζεται από έναν αριθμό πάνω στη γραμμή.

Οι Πληροφορικάριοι και οι Μαθηματικοί χρησιμοποιούν συχνά αυτό το διάγραμμα, για να απεικονίζουν αυτά τα προβλήματα. Το ονομάζουν “γράφο” ή “γράφημα”. Αυτό μπορεί και να δημιουργήσει λίγη σύγχυση, διότι η λέξη αυτή καθ' εαυτή, μοιάζει με εκείνη που χρησιμοποιείται στη Στατιστική, για την αναπαράσταση αριθμητικών δεδομένων, δηλ. τη “γραφική παράσταση”, αλλά πρόκειται για δύο διαφορετικά πράγματα, ακόμη κι' αν το όνομα μοιάζει. Σε έναν γράφο στην Πληροφορική, τα μήκη των γραμμών μπορεί να μην σχεδιασθούν στην σωστή κλίμακα.

Φτιάξτε ένα δικό σας παράδειγμα μιας λασπωμένης πόλης και βρείτε τη λύση με τους φίλους σας.

Μπορείτε να βρείτε έναν κανόνα που να περιγράφει πόσοι δρόμοι ή συνδέσεις απαιτούνται για την καλύτερη λύση; Εξαρτάται από το πόσα σπίτια υπάρχουν στην πόλη;

Τι σχέση έχουν όλα αυτά;

Υποθέστε ότι πρέπει να σχεδιάσετε πως να μεταφέρετε ένα κοινό αγαθό, όπως το ρεύμα ή την ενέργεια, ή το αέριο, ή το νερό, σε μία νέα κοινότητα. Ένα δίκτυο καλωδίων ή σωλήνων, πρέπει να συνδέσει όλα τα σπίτια με το εργοστάσιο παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας ή την κεντρική εταιρεία διανομής νερού. Κάθε σπίτι πρέπει να συνδεθεί στο δίκτυο σε κάποιο σημείο, αλλά ακριβής διαδρομή σύνδεσης ανάμεσα στο σπίτι και το εργοστάσιο δεν ενδιαφέρει και πολύ, αρκεί να είναι συνδεδεμένο το σπίτι.

Το πρόβλημα της σχεδίασης ενός δικτύου με μία ελάχιστη συνολική διαδρομή λέγεται το πρόβλημα του διακλαδούμενου δένδρου (“*Minimal spanning tree*”, *MST*).

Τα MST δεν είναι χρήσιμα μόνο για το αέριο ή το ηλεκτρικό ρεύμα. Μας βοηθούν επίσης να λύνουμε προβλήματα στα δίκτυα υπολογιστών, στα τηλεφονικά δίκτυα, στους πετρελαιαγωγούς, στον καθορισμό των εναέριων διαδρομών. Σε κάθε περίπτωση, όταν αποφασίζουμε ποια ρότα ταξιδιού είναι η καλύτερη για ένα άτομο, θα πρέπει πάντα να λαμβάνουμε υπ' οψή μας τόσο το πόσο βολική θα είναι για τον ταξιδιώτη, αλλά και το πόσο θα κοστίσει. Κανείς δε θα ήθελε να περάσει ώρες ολόκληρες στο αεροπλάνο, παίρνοντας την πιο μακρινή ρότα, διότι είναι η πιο οικονομική. Ο αλγόριθμος της λασπωμένης πόλης θα μπορούσε και να μην είναι τόσο χρήσιμος γι' αυτά τα δίκτυα, διότι απλά ελαχιστοποιεί την ελάχιστη συνολική διαδρομή των οδών ή των εναέριων πτήσεων.

Τα Minimal spanning trees είναι χρήσιμα και σαν ένα στάδιο προς την επίλυση άλλων προβλημάτων με γράφους, όπως το “πρόβλημα του περιοδεύοντος πωλητή” που προσπαθεί να βρει την πιο σύντομη διαδρομή για να μπορέσει να επισκεφθεί κάθε σημείο του δικτύου του.

Υπάρχουν αποτελεσματικοί αλγόριθμοι (μέθοδοι) για την επίλυση των minimal spanning trees προβλημάτων. Μία απλή μέθοδος που οδηγεί σε μία άριστη λύση, είναι να ξεκινήσουμε χωρίς καμία σύνδεση, προσθέτοντάς τες κατ' αύξουσα τάξη μεγέθους, και συνδέοντας μόνο τμήματα του δικτύου που δεν είχαν ακόμη συνδεθεί. Αυτός λέγεται αλγόριθμος του Kruskal (Ο J.B. Kruskal τον δημοσίευσε το 1995).

Για πολλά προβλήματα με τους γράφους, συμπεριλαμβανομένου του “προβλήματος του περιοδεύοντος πωλητή”, οι Πληροφορικάριοι πρέπει ακόμη να εφεύρουν μεθόδους επαρκώς γρήγορες για την βέλτιστη δυνατή λύση.

Λύσεις και υποδείξεις

Ποικιλίες και επεκτάσεις

(σελ. 81)

Πόσοι δρόμοι ή συνδέσεις είναι απαραίτητες, αν υπάρχει **n** αριθμός σπιτιών στην πόλη; Προκύπτει ότι μία βέλτιστη λύση θα έχει, πάντα, ακριβώς $n-1$ συνδέσεις, διότι αυτές είναι αρκετές για να να συνδέσουν τα **n** σπίτια, ενώ μία επιπλέον σύνδεση θα δημιουργούσε αχρείαστες εναλλακτικές διαδρομές ανάμεσά τους.