

活動 9

泥濘城市 — 最小生成樹

活動摘要

我們的社會被許多的網路所連結著，包括電話線路、需求供應鍊、網際網路、公路網等等。針對一個特定的網路，我們常常有許多的選擇來讓我們決定走哪條路、管線、或是無線電聯絡站。我們需要找到有效率的方式來連結這些網路中的物件。

課程銜接

- 數學：幾何學 — 探索形狀與空間：尋找地圖中的最短路徑

適合年齡

- 9 歲以上

習得技能

- 解決問題的能力

所需素材

- 活動學習單：泥濘城市問題（第 100 頁）
- 筹碼或紙板做成的方格子（每個學生約需 40 個）

泥濘城市

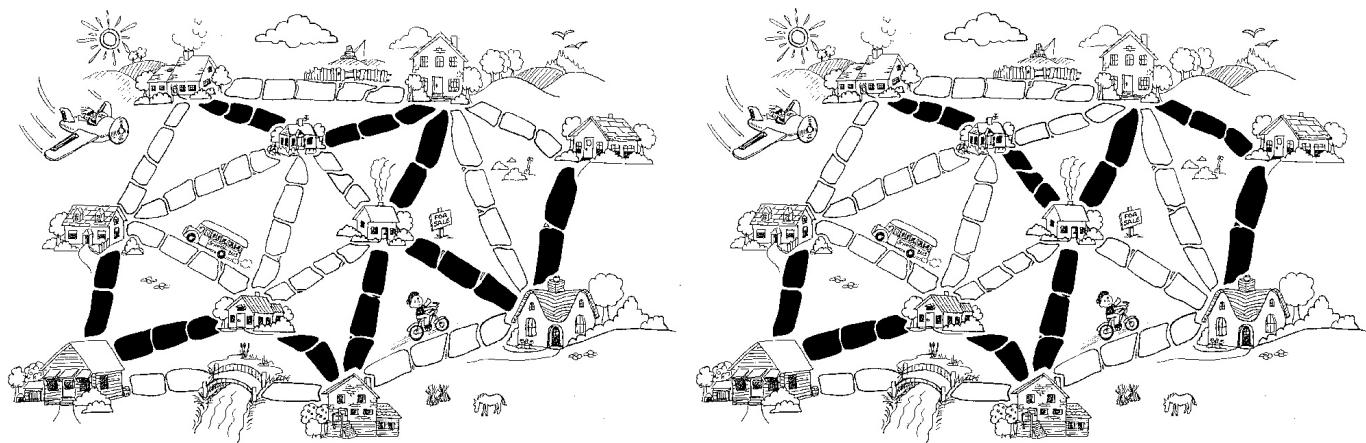
活動介紹

這個活動會告訴你電腦是如何針對現實生活的問題找出最好的解決辦法，像是房子之間的電力線是如何連結的。讓同學們用第 100 頁的活動學習單，裡面會說明何謂「泥濘城市問題」。

活動討論

跟同學分享彼此的解決方式，他們到底用了哪些方法呢？

要找到最佳解的一個不錯的策略如下：從一張空的地圖開始，逐一放置籌碼。籌碼的數量取決於路的長度，路越長放越多，已連接的房子就不做重複的連接，直到所有的房子都連接上了。若改變選擇而選另一條有相同長度的路，則會找到不同的答案。兩個可能的答案如下圖。



另一種策略是先把路都填滿，然後移去不要的道路，但這樣比較費力點。

你會在現實生活中的哪裡找到這些網路呢？

電腦科學家稱這些網路的表示形式為「圖形」(graphs)。真正的網路可以用這些「圖形」來表示，以用來解決像是城市間的最佳路徑規劃，或是跨國的飛機航班規劃等等的問題。

也有許多的演算法能運用在圖形上，像是尋找兩點之間的最短距離，或是尋找能走過所有地點的最短路徑。

活動學習單：泥濘城市問題

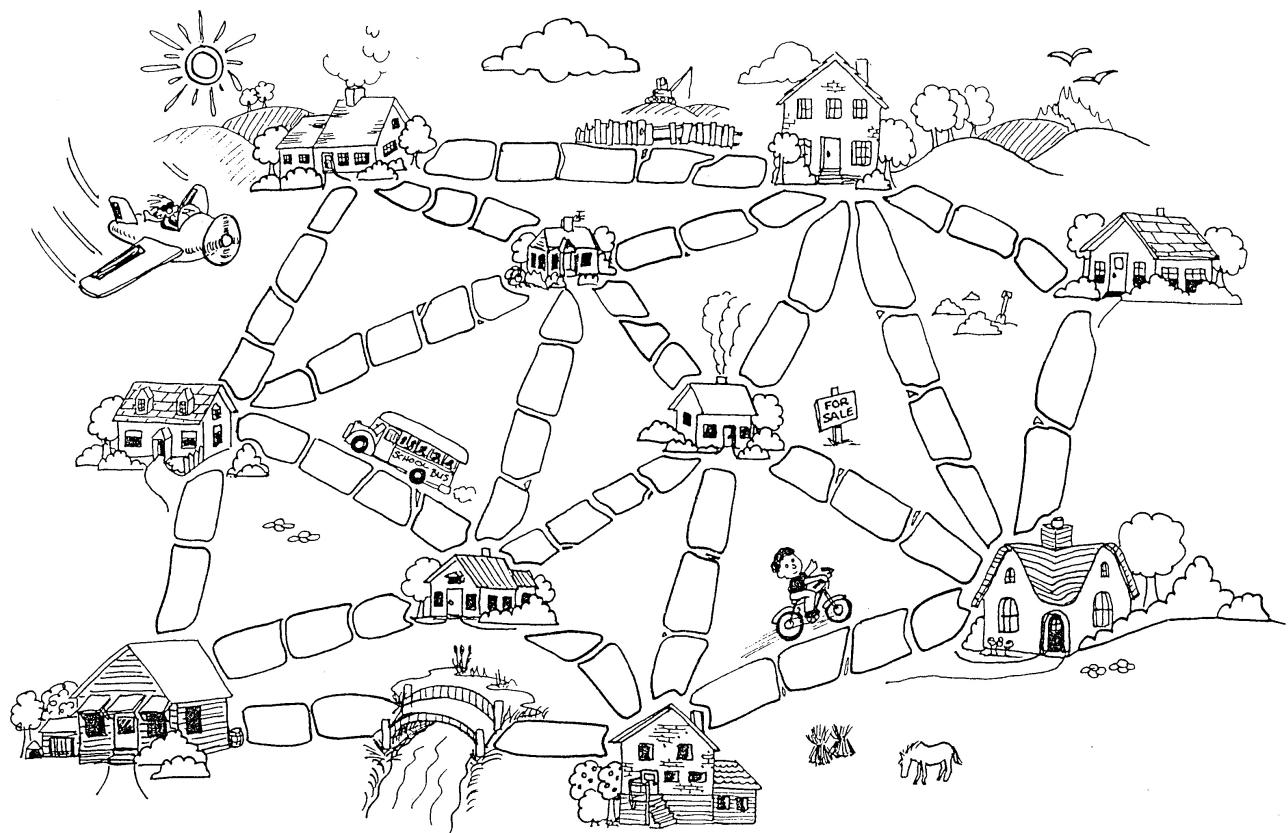
很久以前有一個沒有鋪道路的城市。每次在暴雨過後，這個城市會變得特別難行走，因為地板會變的非常泥濘—車子會卡在泥中，人們的鞋子會髒掉。市長決定某些街道一定要鋪路，可是卻不想多花不必要的錢，因為這城市還想要蓋一座游泳池。因此市長指定了兩個條件：

1.鋪足夠的路讓人們可以從自己的家裡，經過鋪好的路到任何人的家裡。

2.鋪路的花費越少越好。

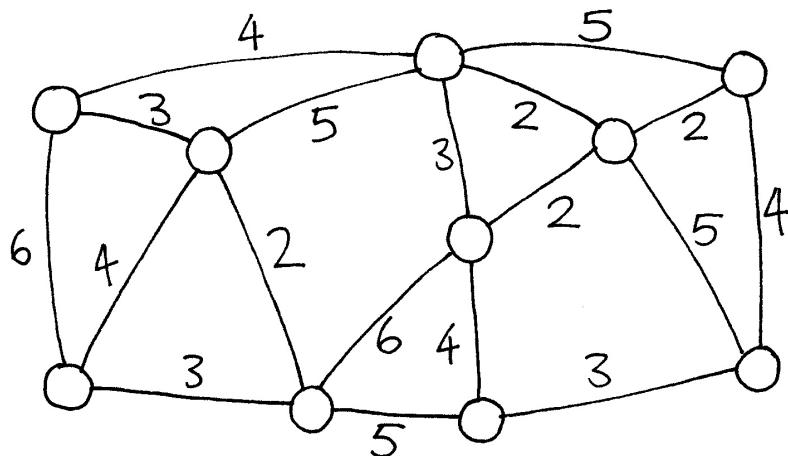
以下是城市的平面圖。每棟房子之間鋪的石頭的數量代表鋪那條路線的花費，請試著找到能夠連接每個房子，並且花費最少的路線。

你會用什麼方法來解決這個問題？



活動變化與延伸

這裡有另一個表示城市和道路的方式：房子用圓表示、泥濘的道路則用線表示、而道路的長度則用數字寫在線旁邊。



電腦科學家和數學家常用這種圖來表示這類問題，他們稱之為「圖形」(graph)。一開始可能會覺得有點混淆，因為在統計學裡也會用「圖形」來表示資料，例如柱狀圖等。但是統計學中的「圖形」跟資訊科學中的「圖形」是沒有關係的。資訊科學中的「圖形」的「長度」不是用來代表資料的統計數字，也不必照比例尺來畫。

試著自己設計一個泥濘城市問題並給你的朋友解答看看。

你能找到一個規則來描述需要多少路或是連結的最佳解嗎？它跟這個城市有多少房子有關嗎？

這個活動在說什麼？

假設你在設計公共事務，像是電力、瓦斯、水要怎麼傳遞到新的社區。電線或是水管的網路需要從所有房子連接到提供的公司，每個房子都必須要連接到這個網路，但是從房子連接到公司的路線不是那麼重要，只要路線存在就好。

設計一個網路總長度最小的任務又叫做最小生成樹（minimal spanning tree）問題。

最小生成樹不只對瓦斯或電力網路有用，也能幫助我們解決電腦網路、電話網路、輸油管、航線等等的問題。然而，當決定人們旅行的最佳路線時，你需要同時把這個旅程的方便性和花費考慮進去。沒有人想要因為比較便宜而浪費很多時間搭飛機繞遠路。泥濘城市演算法對這些網路可能沒那麼有效，因為它只是把路和飛行路徑的總長度最小化而已。

最小生成樹作為一個解決其他圖形問題方式也是很有用的，像是「旅行商人問題」（Travelling Salesperson Problem, TSP）。TSP 的目的是要找到可以拜訪到每個點的最短路徑。

解決最小生成樹問題，有一些很有效率的演算法可以用。一個找最佳解的方法就是從沒有任何連結的空白開始，然後依他們大小的升冪順序加入，但注意只把那些先前還沒連結的節點加入聯結即可。這種方法叫做 Kruskal 演算法，由 J.B. Kruskal 在 1956 所發表。

不過對於圖形的許多問題，包含「旅行商人問題」，電腦科學家還沒找到可以夠快得到最佳解的方式。

解答與提示

活動變化與延伸（第 101 頁）

城市裡有 n 個房子需要多少路或是連結呢？結果發現最佳答案是剛好有 $n-1$ 個連結，因為這永遠是足夠將 n 個房子連在一起，而多加任何一條連結則會在房子間出現不需要的路。