

活動 7

最重與最輕 — 排序演算法

活動摘要

電腦時常被使用來把資料依序排序。舉例來說，把名字依字母順序排列，依日期排序電子郵件或約會，或是依數量多寡排列物品等等。排序除了可使得我們在找東西時更快速之外，還有許多顯著的好處。例如把全班的成績依高低排序，最低分與最高分就很明顯了。

但若使用錯誤的方法，即使有設備很好、很快速的電腦，將大量的資料正確排序可能還是會花很多時間。還好，有幾種快速的演算法非常適合使用於排序。在本活動中，學生會學習不同的排序演算法，並明白適當的排序法比起簡單的排序法可以更快速的解決問題。

課程銜接

- 數學：測量 — 實際測量重量
- 計概：演算法

習得技能

- 使用天平
- 排序
- 比較

適合年齡

- 8 歲以上

所需素材

每一組學生需要：

- 8 個大小相同但重量不同的容器（例如：牛奶盒或裝滿沙的底片筒）
- 天平
- 活動學習單：重量排序 (第 86 頁)
- 活動學習單：分治法 (第 87 頁)

最重與最輕

活動討論

電腦時常要把資料依序排序。大家來腦力激盪一下，什麼樣的資料會需要排序？為什麼排序很重要？如果資料沒有排序會怎麼樣？

電腦常常一次只比較兩個值的大小。下一頁的活動會以此條件限制讓學生明白這個概念。

活動進行

1. 把學生分為兩組。
2. 每一組需要一張第 86 頁的學習單、一組容器和天平。
3. 讓學生進行此活動，並討論結果。

學習活動單：重量的排序

目標：

以最佳的方法把未知重量的容器排序。

你會需要：

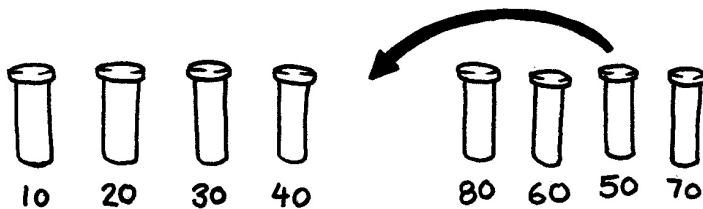
水或沙子、8 個已知容積的容器、天平

步驟：

1. 將不同量的沙子或水倒入容器中，並將其密封。
2. 弄亂它們的順序，讓大家無法得知重量大小的順序。
3. 找出最輕的那一個。什麼是最好的方法呢？
注意：天平一次只可以比較兩個容器的重量。
4. 隨機挑選 3 個容器，並依輕到重排序，只能使用天平。你怎麼做到的呢？最少要比較幾次？為什麼？
5. 把所有的容器依輕到重排序。當你覺得完成時，重新稱重以檢查排列的順序。

選擇排序法

選擇排序法為電腦排序的方法之一。下列是選擇排序法的運作方式。首先，找到最輕的容器並擺在一邊。接下來，再從剩下的容器中挑出最輕的，並也擺到一邊。重複此動作直到所有的容器都被擺到同一邊。



計算你比較的次數。

高手挑戰：找出數學的規律。有 8 個容器時需要比較幾次？9 個呢？20 個呢？

學習活動單：分治法（Divide and Conquer）

快速排序法（Quicksort）

快速排序法比選擇排序法還要迅速，對於大型的表單則更加明顯。事實上，這是目前最好的方法之一。以下是快速排序法執行的方法。

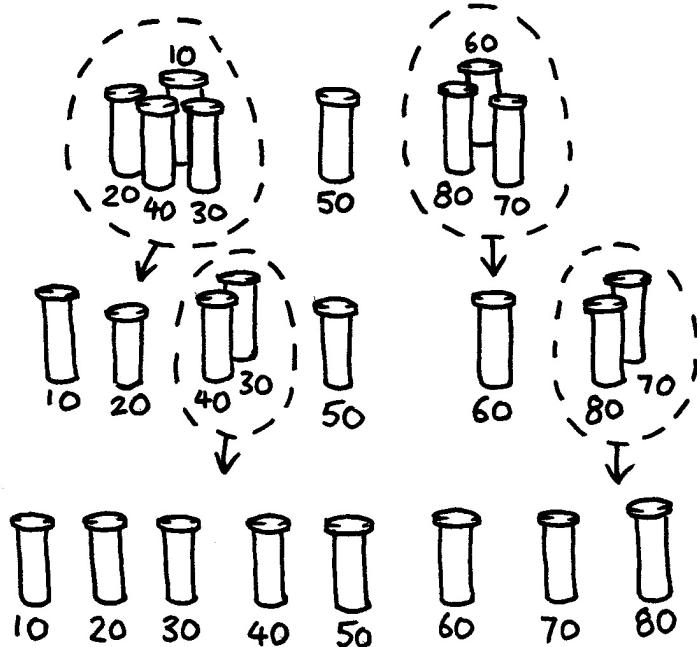
從全部的物件中隨機挑出一個物件，然後把他放在天平的一端。

然後將它與其他剩餘的物件一一比較，將較輕的放在左側，隨機選出的物件放在中間，較重的則放在右側。（有可能在結束比較時，兩邊物件的數量不一樣）

選擇其中一側，將該側所有物件重複上面的步驟。再將另一側的物件也做一樣的處理。

記得記住一開始選擇的物件要保持在中間。

剩餘的物件群一直重複這些步驟，直到每一群都只剩一個物件。一旦所有物件群都被分到只剩一個物件，所有物件便會被分成由最輕到最重。



整個過程要比較幾次？

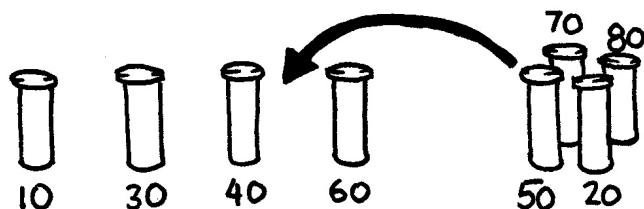
我們可以發現，快速排序法比選擇排序法更有效率，除非你一開始就選擇到最輕或最重的那個物件。如果你夠幸運，一開始就選到中間的重量，相較於需要 28 次的選擇排序法，快速排序法能以 14 次比較來完成排序。在任何情況下，快速排序法都不會比選擇排序法差，甚至可能好的多！

高手挑戰：假如快速排序法意外地一直選到最輕的物件，則需要幾次比較來獲得結果？

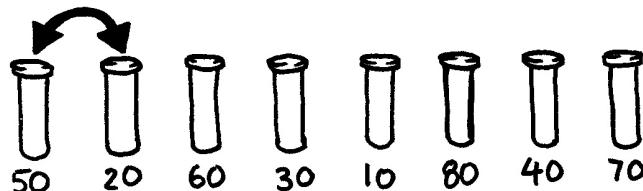
活動變化與延伸

排序還有很多種不同的方法。你可以用以下這些方法來試著把重量排序：

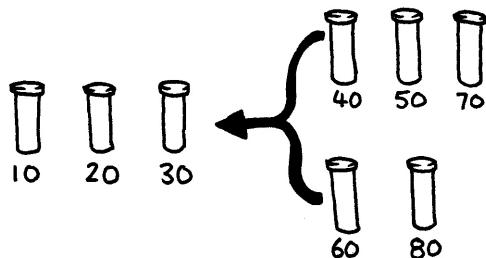
插入排序法是從尚未排序的物件群中挑出一個物件，把它插入已排序物件群中正確的位置（見下圖）。隨著一次次的插入，未排序物件群的規模會越來越小，而已排序物件群的規模則會越來越大，直到所有物件都排序完成。我們玩撲克牌時就常常利用這種方法來理牌。



氣泡排序法的做法是一次又一次從頭到尾檢查整個物件群，如果兩個相鄰的物件順序不對就把它們交換，整個物件群檢查完之後，再重頭開始檢查一次。如果沒有任何物件在檢查名單時被交換，就表示排序完成了。這個方法並不是很有效率，但是對某些人來說這種方法較容易理解。



合併排序法是另一種利用「分治法」來排序物件的方法。首先，將名單隨機分成大小相同的兩個群組（奇數個時則分成大小相近的兩份）。兩個群組都要分別做排序，最後再將兩個群組合併。合併兩個群組的做法相當容易—比較兩個群組最前面的物件，把較小的那個挑出來放入排序群組中。在下圖中，兩組的最前面的物件分別是 40 和 60 公克，所以下一個就把 40 公克的物件挑出來放入已排序群組中。那麼，最開始分成兩個群組以後，要怎麼分別排序？簡單—用合併排序法！最後，所有的群組會被分成只剩下一個物件，所以你不需要擔心做不完。



這個活動在說什麼？

在已排序的清單中尋找資訊會容易很多。電話簿、字典和書籍索引等都是用字母來排序。試想如果它們沒有經過這樣的排序，我們要找相關資訊時會有多不方便。若是將一串數字（例如一些支出）由小到大進行排列，就可以輕易的在排序的兩端找到最大和最小的數字，如果有數字重複的話那也是一目了然，因為它們一定會被排在一起。

實際上電腦在執行時花了很多的時間在把資料排序。所以，找到快速又有效率的排序方法一直是資訊科學家的重要工作之一。一些比較慢的方法如插入排序法、選擇排序法和泡沫排序法在特定的情形下還是很有用，但是在待排序的物件群規模很大的情況下，通常會選用快速排序法、合併排序法這些速度較快的排序法。舉例來說：如果有十萬筆資料要排序，快速排序法大概比選擇排序法要快上 2000 倍。若資料總數上升至一百萬筆，那麼兩種排序法所花的時間會差上 20000 倍。電腦常常要同時處理上百萬筆資料（很多網站擁有上百萬的訪客量，甚至連一張從便宜的照相機所拍的照片也有超過百萬的像素要處理）；選擇不同的演算法的差異可能是要花費一秒鐘還是五小時來完成一個完全相同的任務。不僅僅是時間上的延遲令人無法忍受，還有其他的成本，比方說要耗上 20000 倍的電力（如此浪費電力不僅有違環保理念，而且也會減少可攜式裝置的電池壽命）。所以，選擇合適的演算法才能有好的效果。

快速排序法使用到一種方法叫做分治法。在快速排序法中，我們不斷的把物件群組分成較小的兩個群組，然後再對這些較小的部分執行快速排序法。最後，整個物件群被反覆的分割，直到它們小到可以被簡易的排序。在快速排序法中，物件群被分割到只剩下一個物件 — 只有一個物件，那還需要排序嗎？儘管這些步驟看似十分複雜，但是在實際運行中，快速排序法卻戲劇性地比其他方法快速。分治法所使用的這種觀念稱為遞迴（Recursion），就是演算法裡會反覆呼叫自己來解決問題。這聽起來很奇怪，但實作起來卻意外的管用。

解答與提示

- 找出最輕物件的最佳方法為：按順序把每個物件都檢查一遍，並記住到目前為止最輕的物件就可以了。也就是說，比較兩個物件，並保留較輕的那個，再把被保留下來的物件和另一個物件比較，再次保留較輕的那個。一直重覆上述動作，直到所有物件都被比較過了。
- 在天平上比較重量。這樣可以簡單地用三次比較，有時候甚至兩次比較就可以 — 如果學生瞭解什麼是比較的遞移律（也就是 A 比 B 輕，而且 B 比 C 輕的話，那 A 就一定比 C 輕。）

高手挑戰：

有一條捷徑可以把選擇排序法執行的次數加總。

要找到兩個物件中較小的物件需要比較一次，三個需要兩次，四個需要三次，以此類推。要排序八個物件，首先需要比較七次以找出最小物件，再來是花六次找出剩餘七個物件中的最小物件，以此類推。

最後我們就會得到排序總次數：

$7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 28$ 次比較。

n 個物件將需要 $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n - 1$ 次比較才能排序。

如果我們重新編組這些數字可以比較簡單的得出相加結果。

例如，要運算 $1 + 2 + 3 + \dots + 20$ ，就把它們重新編組成

$$\begin{aligned}(1 + 20) + (2 + 19) + (3 + 18) + (4 + 17) + (5 + 16) + (6 + 15) + (7 + 14) + (8 + 13) + (9 + 12) + (10 + \\ 11) \\ = 21 \times 10 \\ = 210\end{aligned}$$

一般來說， $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n - 1 = n(n - 1)/2$ 。