

# 活動 1

## 計算點點 – 二進位數字

### 活動摘要

在電腦上的資料是以一連串的 0 和 1 的形式儲存與傳送的。我們要如何只使用這兩個符號來表示文字和數字呢？

### 課程銜接

- 數學：數字 — 研究如何將數字用其他基底表示。學習用 2 做基底表示數字，也就是二進位數。
- 數學：代數 — 接續一序列的排列，並描述這個排列的規則，還有此排列與 2 的次方之間的關係。

### 習得技能

- 計數
- 比對
- 序列

### 適合年齡

- 6 歲以上

### 所需素材

- 你需要使用一組五張卡片（見第 7 頁）來展示。
- 你可以做成 A4 大小，上面貼笑臉貼紙點點的卡片。效果不錯。

每個學生需要：

- 一套卡片。您可以複印第 9 頁：「素材：二進位數字」的內容，貼在卡片上，然後割下來。
- 活動學習單：二進位數字（第 8 頁）

另外有一些選擇性的延伸活動。這些延伸活動中每個學生需要：

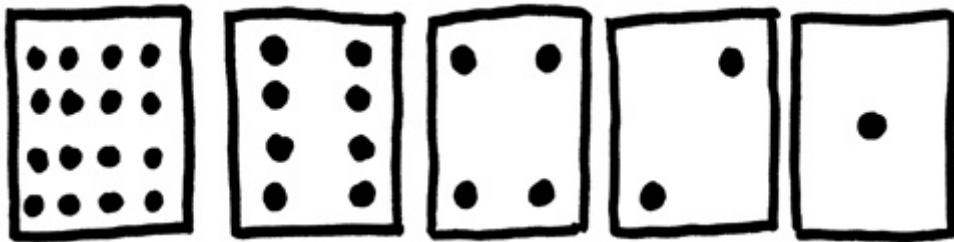
- 活動學習單：使用二進位表示數字（第 10 頁）
- 活動學習單：發送秘密訊息（第 11 頁）
- 活動學習單：電子郵件與數據機（第 12 頁）
- 活動學習單：數到 31 以上（第 13 頁）
- 活動學習單：更多關於二進位數字的知識（第 14 頁）

# 二進位數字

## 活動介紹

在發出第 7 頁的活動單之前，可以先展示一次給全班看。

在此活動中，您將需要一套五張卡片，如下圖所示。卡片其中一面有點點，而另一面沒有。選擇 5 個學生拿起示範卡片，站在全班面前。卡片應該要照下面的順序排列：



## 活動討論

當您發卡片時（從右到左），看看學生們能不能猜出下一張卡片上有多少個點。請大家注意一下，卡片上的點點數量有什麼特性？（每張卡上的點點數量都是右邊卡片的兩倍。）

如果再加一張牌放在左邊，那麼那張卡片應該要有多少點點？（32）再下一張呢？（64）

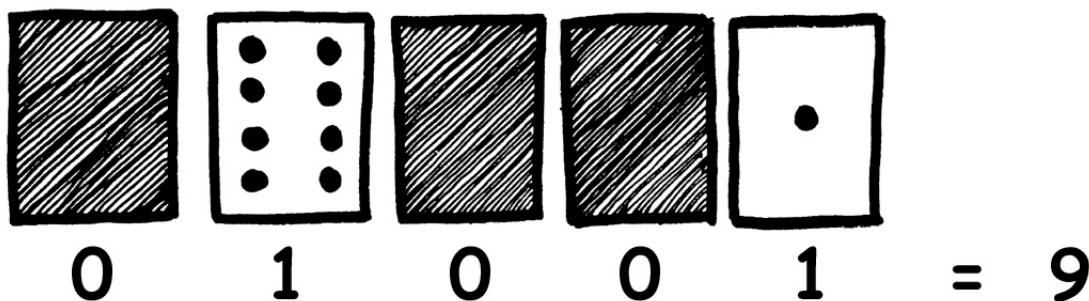
我們可以用這些卡片表示許多不同的數字，只要把一些卡片翻面蓋起來，並把所有沒蓋住的點數加起來。請學生試著展示 6 點（翻開 4 點的和 2 點的卡片），再來試試怎麼表示 15 點（翻開 8 點、4 點，2 點和 1 點的卡片），然後再試試怎麼表示 21 點（翻開 16，4 跟 1 點的卡片）……等等。唯一要注意的規則是，卡片要嘛就要全部秀出來，不然就要全部蓋起來，不能只蓋一半。

這五張卡片能表示最小的數目是多少？（學生們可能會回答 1，但正確答案是 0）。

現在試著從零開始往上數。

這堂課中剩下的部份，就是要請學生們密切注意卡片變化的情形，並確認學生們是否在翻牌與蓋牌的過程中可以發現特定的規則（每張卡片被翻轉的次數，是右邊那張牌的一半）。您可以在不同的班級中嘗試看看。

當某一張卡片被蓋起來時，用 0 來表示。當卡片被秀出來時，用 1 來表示。這就是二進位數。



讓學生們試試 01001。01001 的十進位是什麼數字？ (9) 17 的二進位數是什麼？ (10001)

多試幾次，直到學生們能理解這個概念為止。

另外有五個選擇性的延伸活動，可以用於加強學生的觀念。在時間允許的範圍內盡量讓學生去進行。

# 活動學習單：二進位數字

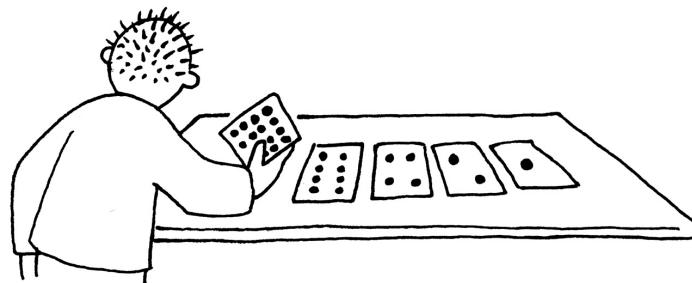
## 學會數數字

你認為你會數數字嗎？讓我們試試新的方法吧！

你知道電腦中只用了 0 跟 1 嗎？其實任何你從電腦中看到或聽到的東西—包括文字、圖片、數字、影片甚至聲音都是由 0 跟 1 組合而成的！接下來的活動內容將教你如何使用跟電腦一樣的方法傳送一段秘密訊息給你的朋友。

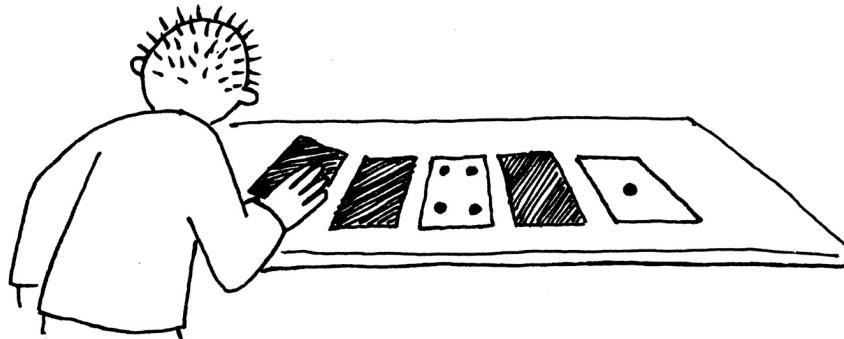
## 步驟說明

從你的活動單上剪下卡片，然後把它們照順序放在桌上。點數為 16 的卡片必須放在最左邊，如圖所示：



確認一下你排放的順序要跟圖片中的一樣

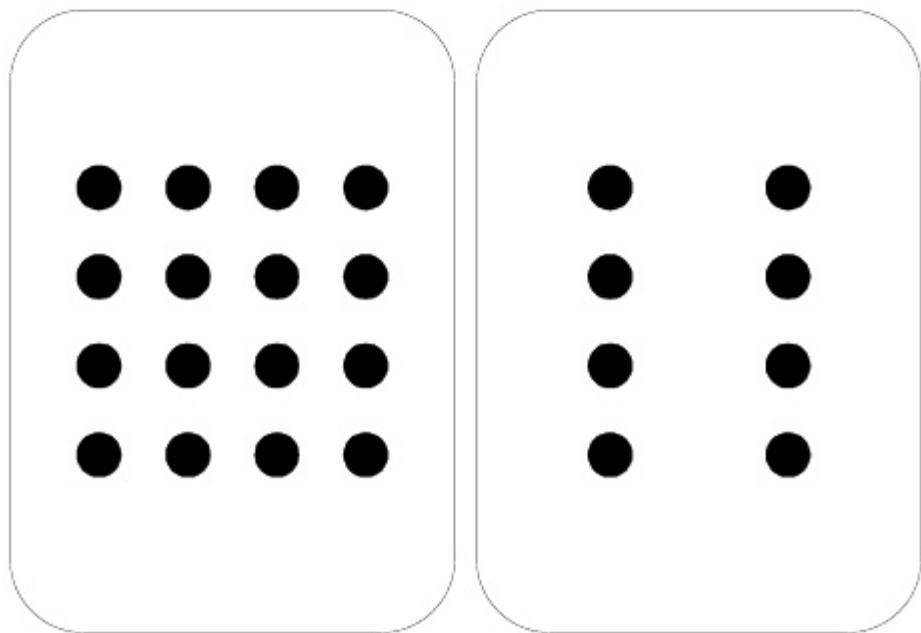
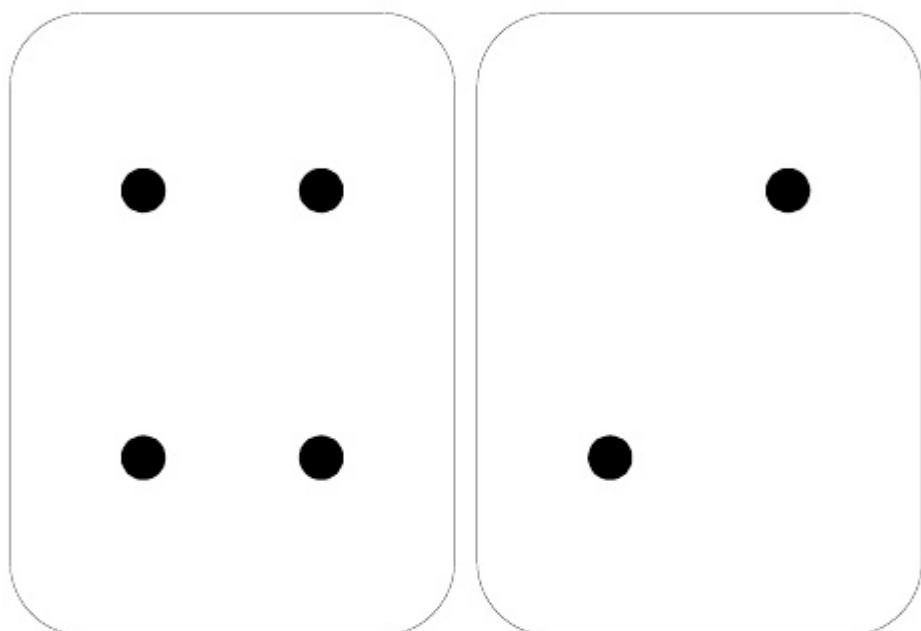
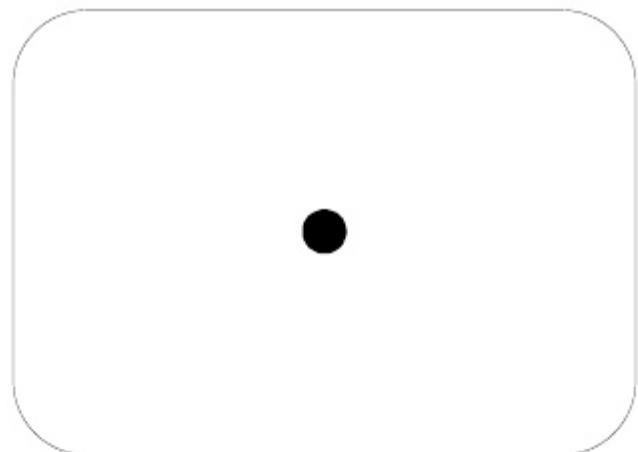
現在把一些卡片翻過去背面使得剩下的點數總和為 5—注意不可以讓卡片的順序改變哦！



接著去試試看怎麼樣讓剩下的點數總和為 3、12、19。是不是有其他的方法可以表達相同的數字呢？你所能看到，最大的點數總和為多少呢？最小的點數總和又是多少呢？在最大和最小的點數之中，有沒有任何的數字是你無法用這些點數的總和表達的呢？

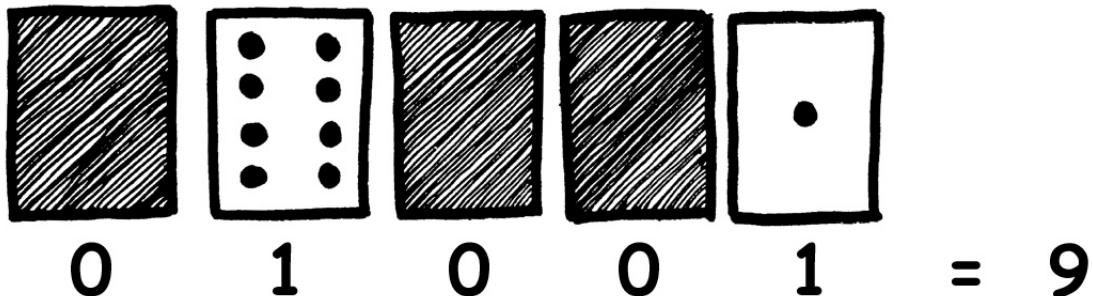
**高手挑戰：試著按照順序用卡片表達 1、2、3、4。  
你能不能找出一個有規律的方法可以讓數字一直加 1 呢？**

## 素材：二進位數字



## 活動學習單：使用二進位表示數字

二進位數字就是用 0 或 1 來表示點數卡片是點數面朝上或朝下。0 代表點數面朝下，1 代表點數面朝上。例如：



你可以算出 10101 是多少個點嗎？11111 呢？

你的出生日期是幾號呢？試著用二進位數字表達。然後試著使用二進位數字來表達你的朋友的生日。

**試著用二進位數字表達這些數字：**

$$\boxed{\times} \boxed{\checkmark} \boxed{\times} \boxed{\times} \boxed{\checkmark} = \\ (\checkmark=1, \times=0)$$

$$\uparrow \downarrow \uparrow = \\ (\uparrow=1, \downarrow=0)$$

$$\uparrow \downarrow \uparrow = \\ (\uparrow=1, \downarrow=0)$$

$$+ + \times + = \\ (+=1, \times=0)$$

$$\odot \odot \odot \odot \odot = \\ (\odot=1, \odot=0)$$

$$\cup \cup \cup \cup \cup = \\ (\cup=1, \cup=0)$$

$$\square \square = \\ (\square=1, \square=0)$$

$$\blacktriangle \blacktriangledown \blacktriangle \blacktriangledown = \\ (\blacktriangle=1, \blacktriangledown=0)$$

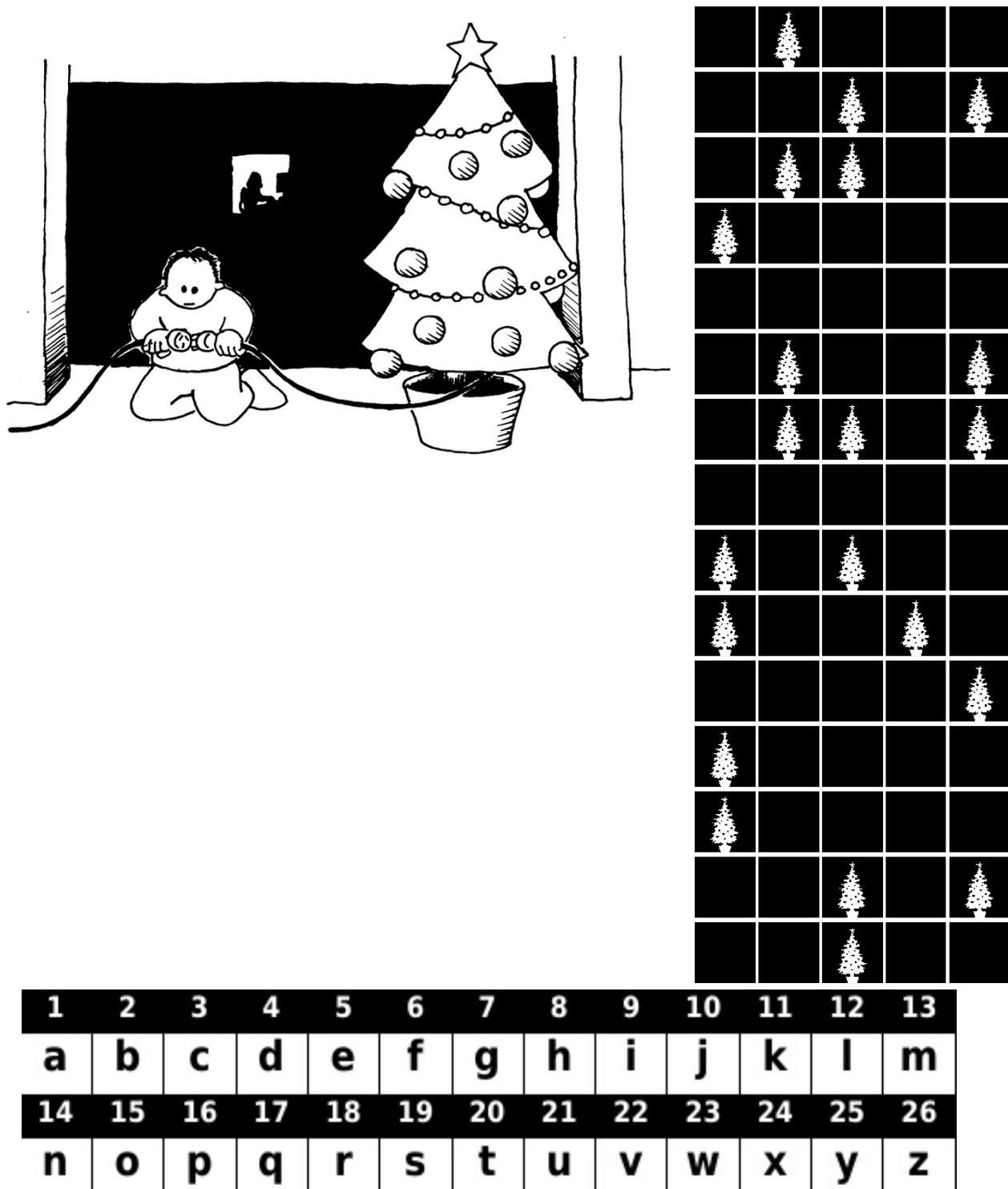
$$\odot \odot = \\ (\odot=1, \odot=0)$$

$$\spadesuit \spadesuit \spadesuit \spadesuit \spadesuit = \\ (\spadesuit=1, \clubsuit=0)$$

**高手挑戰：**使用長度分別為 1、2、4、8、16 的棍子來組合出長度為 0 到 31 的棍子。你也可以利用一個天平搭配少量的砝碼來秤出很重的東西（例如箱子或行李箱）。回去試試看，讓大人們驚訝一下！

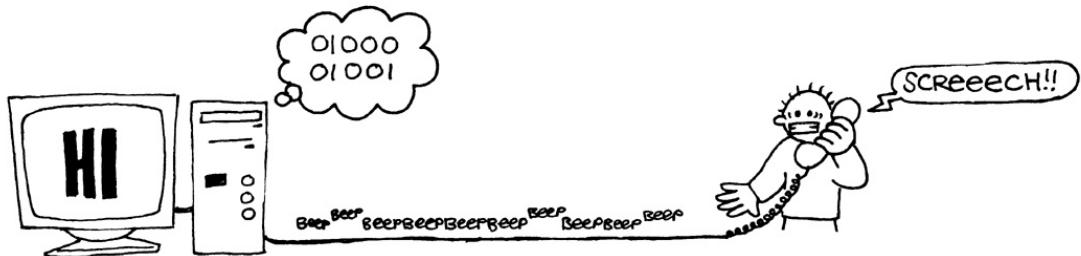
## 活動學習單：傳送秘密訊息

湯姆被困在百貨公司的最上層了！聖誕節就快要到了，他想帶著他的禮物回家。他該怎麼辦？湯姆試過大聲求救，但是附近根本沒有人。不過他可以看到對街有一些電腦工程師深夜裡還在工作。他該怎麼引起他們的注意呢？湯姆看了一下他的四周，然後靈光一現 -- 他可以用聖誕樹上面的燈傳送訊息給對街正在工作的女士！他找到了所有的燈泡，然後插上電源，這樣他就可以開啟這些燈泡。他擬了一則簡單的二進位代碼，確定對街的女士可以懂他的意思。你能幫助他嗎？



## 活動學習單：電子郵件與數據機

電腦也是使用二進位系統跟網路連線與傳送訊息。唯一的不同是，電腦用的是嗶聲來表示。高頻率的嗶聲代表 1，低頻率的嗶聲代表 0。這些聲音的傳遞非常快速—事實上，我們所能聽到的只有連續又惱人的噪音而已。如果你從來都沒有聽過，下次可以試著聽看看數據機跟網路連線的聲音。或者，試試看打個電話到一支傳真機—傳真機也是透過數據機來傳遞訊息。



利用跟湯姆在百貨公司使用的一樣的代碼，試著傳一封電子郵件給你的朋友。記得要用簡單一點的訊息，因為你跟你的朋友可沒辦法像數據機那樣處理得那麼快！



## 活動學習單：數到 31 以上

看看你做的二進位數卡片。如果你要再做下一張卡片，那麼上面應該要有幾個點呢？再下一張呢？他們之間的規則是什麼？如你所看到的，即使是很大的數字，也只需要少少的幾張卡片而已。

如果你細心的觀察這些規則，你可發現非常有趣的規律：

**1, 2, 4, 8, 16, .....**

試試  $1 + 2 + 4 = ?$  答案是什麼？

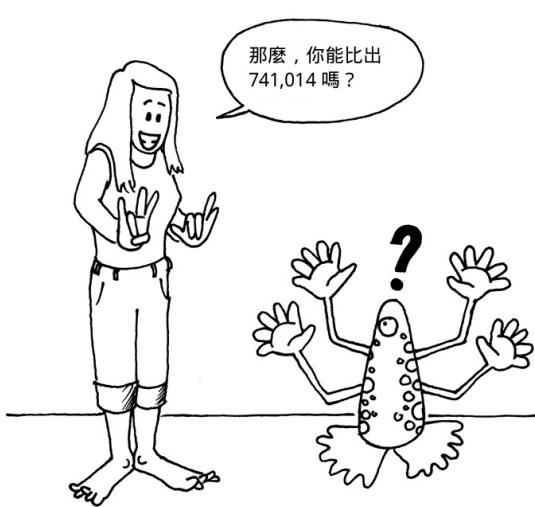
再試試  $1 + 2 + 4 + 8 = ?$

當你從第一個數字開始，把所有的數字加起來，你發現了什麼？

學會了二進位數字，你現在可以用你的手指來數數字，而且你會發現，你能數的數字遠遠的超過  $10 -$  等等，你說你只有十根手指頭？沒錯！你可以使用二進位來表示數字，用手指頭來代替每一張卡片。你不用變成跟外星人一樣，只要用你的五根手指頭就可以從 0 數到 31，總共 32 個數字了（別忘了，0 也是一個數字喔！）

試著動動你的手指頭，手指頭向上表示 1，向下表示 0。

實際上，若你用兩隻手，可以表示從  $0 \sim 1023$  的每一個數字，這樣總共就有 1024 個數字了！如果你跟有可以彎曲成很多段的手指頭（ㄟ，這樣你就真的得變成外星人了！），你就可以數更多的數字。如果一隻手可以表示 32 個數字，兩隻手能就有  $32 \times 32 = 1024$  個數字。那麼請問圖上的外星人可以數的最大數字是多少呢？



## 活動學習單：更多關於二進位數字的知識

- 另一個關於二進位有趣的性質，是當我們把一個 0 放到一個二進位數字的右邊的時候。想一下，過去我們在學十進位數字時，當我們把一個 0 放到一個數字右邊，就等於把那個數字乘上 10。舉例來說，9 會變成 90，而 30 會變成 300.

但在二進位數字的世界中，當我們把 0 放到一個二進位數字的右邊會發生什麼事呢？試試看：

$$\begin{array}{c} \mathbf{1001} \\ (\mathbf{9}) \end{array} \quad \begin{array}{c} \mathbf{10010} \\ (?) \end{array}$$

多試幾個其他數字來證明你的猜想。規則是什麼？你認為發生了什麼事？

- 我們目前用的每一張卡片都可以代表電腦裡面的一個「位元」（「位元」的英文 bit 就是「二進位數字」英文 binary digit 的簡稱）。所以目前我們用的字母可以用 5 張卡片來表示，或是說 5 個「位元」。然而電腦必須知道這個字母是大寫還是小寫，還是數字、標點符號或是像 \$ 或 ~ 這種特殊符號。

看看你的鍵盤，數數看電腦總共有幾個字元要表示。算算看電腦總共需要幾個位元來儲存所有的字元呢？

現代的電腦都使用「美國資訊交換標準代碼」（American Standard Code for Information Interchange，又稱為 ASCII 碼）來表示每一個字元。但在一些不說英文的國家則必須使用更長的編碼。

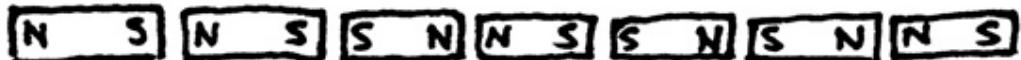


## 這個活動在說什麼？

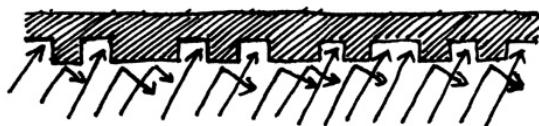
現在的電腦使用二進位系統來表示資訊。之所以被稱為二進位是因為它只用兩個數字。這種二進位數又稱為「以 2 為基底」的數字系統（我們一般使用的是「以 10 為基底」的數字系統）。每個 0 或 1 被稱為一個「位元」。一個位元在電腦的主記憶體中通常用一個電晶體的開或關，或是用一個電容充電或沒充電來表示。



當我們要利用電話線或是無線電來傳輸資料時，會利用高頻或低頻的聲音來表示 1 和 0。在磁碟（軟碟和硬碟）還有磁帶上，則是會利用表面的磁場方向來表示 0 和 1，像是北往南或南往北。



音樂 CD、光碟片和 DVD 則是利用光學方式來儲存位元 -- 利用表面是否反射光線來表示。



電腦之所以只用兩個不同的數值，是因為這樣一來，要做一個裝置就簡單多了。我們當然可以做一個擁有 10 種不同反射光的 CD 來表示 0 到 9 的數字，但是這樣必須使用很昂貴以及精確的裝置才行。

除此之外你也許也注意到另外一件事情：雖然我們說電腦只存 0 和 1，但其實並不是真的有 0 和 1 在電腦裡面 -- 只有像是高電位和低電位、南極和北極等等。但比起說是「閃」還是「不閃」，寫 0 和 1 還是快多了。所有在電腦裡的東西都是用位元表示 -- 文件、圖片、歌曲、影片、數字或甚至程式或手機上的 app，全部都只是一大堆的位元。

一個位元自己不能表達出太多的東西。但當八個位元聚集在一起，就可以表達從 0 到 255 的數字。而我們通常會把 8 個位元稱作一個「位元組」(byte)。

電腦的速度取決於一次可以處理幾個位元。舉例來說，一個 32 位元的電腦在一次操作中可以處理 32 個位元；但 16 位元電腦則必須將 32 位元的數字分成兩個 16 位元，因此速度慢多了（但比較便宜！）

在接下來的活動之中，我們將會看到電腦怎麼用位元來表達其他種類的資訊。

# 解答和提示

## 二進位數字（第 8 頁）

3 需要卡片 2 和 1

12 需要卡片 8 和 4

19 需要卡片 16、2 和 1

任何一個數字都只有一種方式來表達。

你可以表示出最大的數字是 31，最小則是 0。你可以將 0-31 間的所有數字都表達出來，而且每個數字只有一種表達方式。

高手挑戰：要把任何一個數字加 1，只要從右到左翻卡片，直到有一張卡片從點數向下翻成向上。

## 使用二進位表示數字（第 10 頁）

$10101 = 21, 11111 = 31$

## 傳送秘密訊息（第 11 頁）

訊息內容：HELP IM TRAPPED

## 數到 31 以上（第 13 頁）

如果你從頭開始累加，累加的和必定是數列裡下一個數字減一。

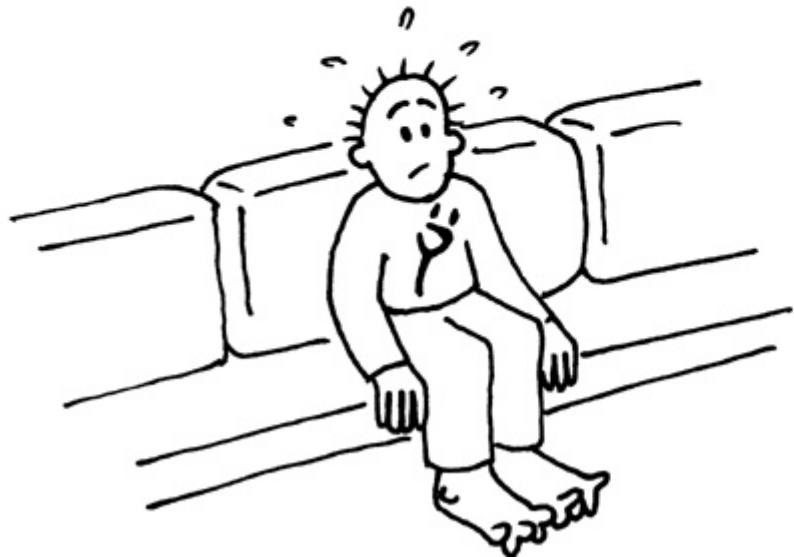
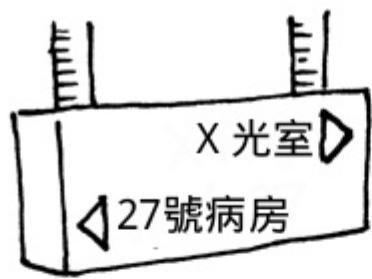
外星人可以數  $1024 * 1024 = 1048576$  個數字 — 也就是從 0 到 1048575。

## 更多關於二進位數字的知識（第 14 頁）

當你把一個 0 放到一個二進位數字右邊，會使得那個數字變成兩倍。

所有是 1 的地方現在變成了原來的兩倍，使得總和的數字變成了兩倍（在十進位數中，我們把一個 0 放到某一個數字的右邊，就會讓那個數字變成 10 倍。）

一台電腦需要 7 個位元來存所有的字元。7 個位元總共可以表示 128 個字元。而通常電腦會以 8 個位元組成一個位元組，而其中浪費掉 1 個位元。



危險動作，請勿模仿！  
薯叔有練過的，不是  
每個人腳趾都能這樣  
彎的喔！