

Применение разрывного метода Галеркина к решению уравнений газовой динамики: идея, проблемы, подходы

Лукин В.В., Марчевский И.К.

Семинар Web-лаборатории механики сплошных сред ИСП РАН

Москва — 2017

Постановка задачи

Система уравнений газовой динамики

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0, \\ \frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} + p \hat{\mathbf{I}}) = \mathbf{0}, \\ \frac{\partial e}{\partial t} + \operatorname{div}[(e + p) \mathbf{v}] = 0 \end{array} \right\} \quad \begin{aligned} \rho &— \text{плотность}; \mathbf{v} — \text{вектор} \\ &\text{скорости}; p — \text{давление}; e = \\ &\rho \varepsilon + \frac{1}{2} \rho \|\mathbf{v}\|^2 — \text{полная энер-} \\ &\text{гия единицы объема}. \end{aligned}$$

Система в дивергентной форме для одномерного случая

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{U} = (\rho, \rho u, \rho v, \rho w, e)^T,$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{U}) = (\rho u, \rho u^2 + p, \rho vu, \rho wu, (e + p)u)^T$$

Уравнение состояния

$$p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon.$$

Разрывный метод Галеркина

Система уравнений в дивергентной форме, в индексном виде:

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + \frac{\partial F_{j,i}}{\partial x_j} = 0.$$

После домножения на пробную функцию и интегрирования по частям

$$\int_V \frac{\partial u_i}{\partial t} \omega dV + \int_{\partial V} F_{j,i} n_j \omega dS - \int_V F_{j,i} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} dV = 0.$$

Ищем решение в виде разложения по ортогональному базису:

$$\mathbf{U}_h = \sum_{\alpha=1}^{N_c} \sum_{\beta=1}^{N_b} \mathbf{U}_{\alpha}^{(\beta)}(t) \varphi_{\alpha,\beta}(\mathbf{x}).$$

Система ОДУ разрывного метода Галеркина

$$\frac{dU_{\alpha}^{(\beta),i}}{dt} + \sum_{\psi=1}^{N_{nei}} \int_{S_{\psi}^{\alpha}} F_i^*(\mathbf{U}_{\alpha}, \mathbf{U}_{\eta(\alpha,\psi)}) \varphi_{\alpha}^{(\beta)} dS + \int_{V^{\alpha}} F_{j,i} \frac{\partial \varphi_{\alpha}^{(\beta)}}{\partial x_j} dV = 0,$$

$$\alpha = \overline{1, N_c}, \beta = \overline{1, N_b}, i = \overline{1, 5}.$$



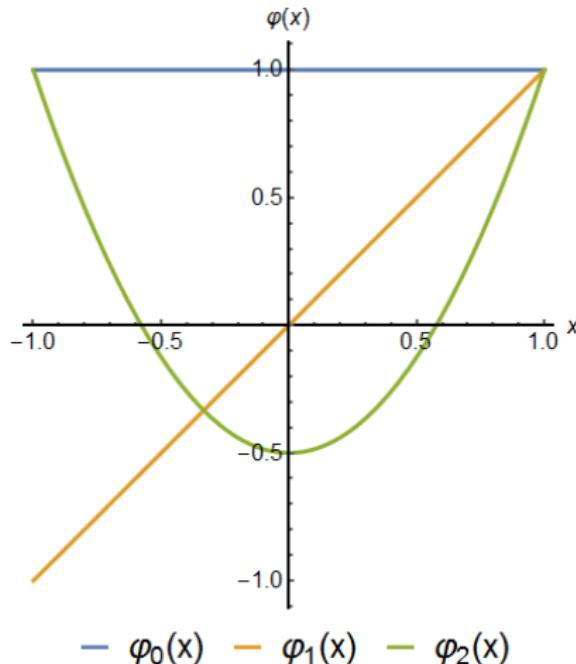
Выбор базисных функций в 1D случае

Приближенное решение

Приближенное решение \mathbf{U}_h на каждой ячейке будем искать в виде разложения по некоторому базису:

$$\mathbf{U}_j^k(x) = \sum_{s=0}^m \mathbf{U}_j^{(s),k} \varphi_j^{(s)}(x)$$

$\varphi_j^{(s)}(x)$ — полиномы Лежандра



Галанин М. П., Савенков Е. Б., Токарева С. А. Применение разрывного метода Галеркина для численного решения квазилинейного уравнения переноса.

М., 2005. 34 с. (Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, № 105).

Схема в одномерном случае

Система ОДУ в одномерном случае

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{U}_j^{(r)}(t)}{dt} \int_{I_j} \varphi_j^{(r)}(x) \varphi_j^{(r)} dx - \int_{I_j} \mathbf{F}_j(x, t) \frac{d\varphi_j^{(r)}}{dx} dx + \\ + (\mathbf{F}_j(x_{j+1/2}, t) - (-1)^r \mathbf{F}_j(x_{j-1/2}, t)) = 0. \end{aligned}$$

Интегрирование по времени (TVD метод Рунге — Кутты 3 порядка):

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^* &= \mathbf{U}^n + \tau \mathbf{L}_h(\mathbf{U}^n), \\ \mathbf{U}^{**} &= \frac{3}{4}\mathbf{U}^n + \frac{1}{4}\mathbf{U}^* + \frac{1}{4}\tau \mathbf{L}_h(\mathbf{U}^*), \\ \mathbf{U}^{n+1} &= \frac{1}{3}\mathbf{U}^n + \frac{2}{3}\mathbf{U}^{**} + \frac{2}{3}\tau \mathbf{L}_h(\mathbf{U}^{**}). \end{aligned}$$

Задача Римана

Задача Римана для одномерной гиперболической системы уравнений в неограниченной области:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + A \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = \mathbf{0},$$

$$A = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}} = \Omega_R \Lambda \Omega_L, \quad \Lambda = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}.$$

Начальные условия:

$$\mathbf{U}_0(x) = \begin{cases} \mathbf{U}_1 & \text{при } x < 0, \\ \mathbf{U}_2 & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

Способы вычисления потоков

Локальный поток Лакса — Фридрихса

$$\mathbf{F}^{LF} = \frac{\mathbf{F}_L + \mathbf{F}_R}{2} - \frac{1}{2} \max_{L,R}\{|\lambda_1|, |\lambda_5|\}(\mathbf{U}_L - \mathbf{U}_R);$$

HLLC-метод

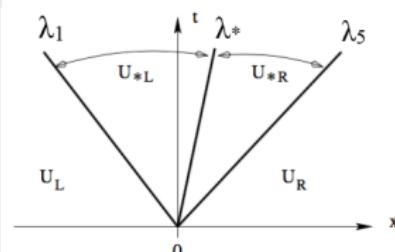
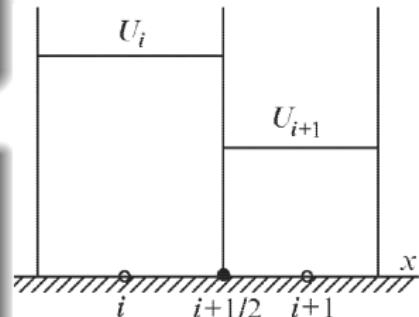
$$\mathbf{F}_{i+1/2}^{hllc} = \begin{cases} \mathbf{F}_L & \text{при } 0 \leq \lambda_1, \\ \mathbf{F}_L + \lambda_1(\mathbf{U}_{L*} - \mathbf{U}_L) & \text{при } \lambda_1 \leq 0 \leq \lambda_*, \\ \mathbf{F}_R + \lambda_5(\mathbf{U}_{R*} - \mathbf{U}_R) & \text{при } \lambda_* \leq 0 \leq \lambda_5, \\ \mathbf{F}_R & \text{при } 0 \geq \lambda_5. \end{cases}$$

$$\lambda_1 = \min\{v_\perp^L - v_s^L, v_\perp^R - v_s^R\},$$

$$\lambda_5 = \max\{v_\perp^L + v_s^L, v_\perp^R + v_s^R\}$$

$$v_s = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}},$$

$$\lambda_* = \frac{\rho^L v_\perp^L (\lambda_1 - v_\perp^L) - \rho^R v_\perp^R (\lambda_5 - v_\perp^R) + p^R - p^L}{\rho^L (\lambda_1 - v_\perp^L) - \rho^R (\lambda_5 - v_\perp^R)}$$



Монотонизация решения

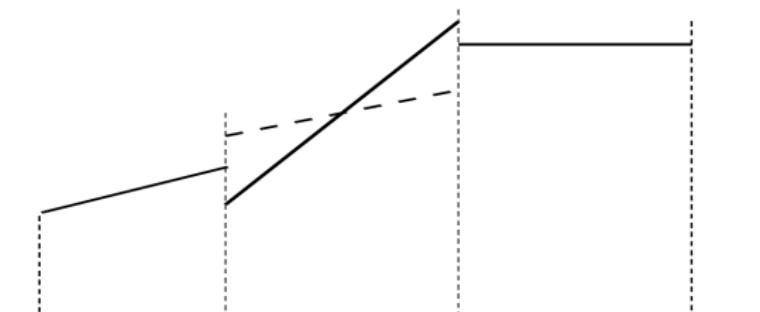
Применение ограничителей (лимитеров)

Решение на каждой ячейке представляется в виде

$$U_j^k(x) = U_j^{(0),k} \varphi_j^{(0)}(x) + U_j^{(1),k} \varphi_j^{(1)}(x) + U_j^{(2),k} \varphi_j^{(2)}(x).$$

Для подавления нефизичных осцилляций решения были использованы ограничители:

$$U_j^k(x) = U_j^{(0),k} \varphi_j^{(0)}(x) + \Lambda \Pi_h(U_j^{(1),k}) \varphi_j^{(1)}(x) + \Lambda \Pi_h(U_j^{(2),k}) \varphi_j^{(2)}(x).$$



Индикаторы немонотонности

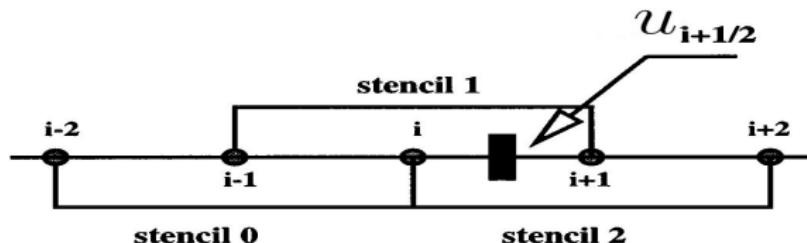
Индикатор Хартена

$$\begin{aligned}H_j &= 2(Q_{j-1} + Q_j + Q_{j+1}), \\Q_j &= C_j^1 \wedge (C_j^2 \vee C_{j+1}^2) ? 1 : 0, \\C_j^1 &= \left(\tilde{U}_{j-1}^k|_j - \tilde{U}_j^{(0),k} \right) \cdot \left(\tilde{U}_{j+1}^k|_j - \tilde{U}_j^{(0),k} \right) < -\varepsilon; \\C_j^2 &= \left(|\tilde{U}_j^{(1),k}| > \varkappa |\tilde{U}_{j-1}^{(1),k}| \right) \vee \left(\varkappa |\tilde{U}_j^{(1),k}| < |\tilde{U}_{j-1}^{(1),k}| \right).\end{aligned}$$

Индикатор KXRCF

$$\mathcal{I}_j = \frac{\left| \tilde{U}_j^k \Big|_{I_j^-} - \tilde{U}_j^k \Big|_{I_{n_j}} \right|}{(h/2)^{(m+1)/2} |\tilde{U}_j^k|_{I_j}}.$$

Классическая процедура WENO–реконструкции



Построение лимитера наклона решения

$$U_{i,corr}^{(1)} = \frac{1}{2} \left(U_{i+\frac{1}{2}}^{(0)} - U_{i-\frac{1}{2}}^{(0)} \right), \quad U_{i+\frac{1}{2}}^{(0)} = \sum_{k=0}^2 w_k U_{i+\frac{1}{2}}^{(0),k}$$

$$w_k = \frac{\tilde{w}_k}{\tilde{w}_0 + \tilde{w}_1 + \tilde{w}_2}, \quad \tilde{w}_k = \frac{\gamma_k}{(\varepsilon + \beta_k)^2},$$

$$\beta_k = \sum_{j=1}^r h^{2r-1} \int_{I_k} \left(\frac{d^j}{dx^j} u^{(k)}(x) \right)^2 dx.$$

Настроочные параметры

β_k — индикаторы гладкости решения на k —й ячейке, γ_k — линейные веса, w_k — нелинейные веса, а $\varepsilon = 10^{-6}$ — техническая величина, не позволяющая обнулиться знаменателю.

Формулы для интерполяции без учёта наклонов

$$\begin{cases} \mathbf{U}_{i+\frac{1}{2}}^{(0),0} = \frac{3}{8}\mathbf{U}_{i-2}^{(0)} - \frac{5}{4}\mathbf{U}_{i-1}^{(0)} + \frac{15}{8}\mathbf{U}_i^{(0)}; \\ \mathbf{U}_{i+\frac{1}{2}}^{(0),1} = -\frac{1}{8}\mathbf{U}_{i-1}^{(0)} + \frac{3}{4}\mathbf{U}_i^{(0)} + \frac{3}{8}\mathbf{U}_{i+1}^{(0)}; \\ \mathbf{U}_{i+\frac{1}{2}}^{(0),2} = \frac{3}{8}\mathbf{U}_i^{(0)} + \frac{3}{4}\mathbf{U}_{i+1}^{(0)} - \frac{1}{8}\mathbf{U}_{i+2}^{(0)}. \end{cases}$$

Процедура Hermite – WENO интерполяции

HWENO

Классическая WENO-схема требует широкого шаблона интерполяции. Однако для схем RKDG характерна компактность по пространству. Для сужения шаблона интерполяции в HWENO методике используются не только средние значения решений, но и наклоны решений с соседних ячеек.

Формулы для интерполяции с учётом наклонов

$$\begin{cases} \mathbf{U}_{i+\frac{1}{2}}^{(0),0} = -\frac{3}{4}\mathbf{U}_{i-1}^{(1)} h - \frac{5}{4}\mathbf{U}_{i-1}^{(0)} + \frac{9}{4}\mathbf{U}_i^{(0)}; \\ \mathbf{U}_{i+\frac{1}{2}}^{(0),1} = -\frac{1}{8}\mathbf{U}_{i-1}^{(0)} + \frac{6}{8}\mathbf{U}_i^{(0)} + \frac{3}{8}\mathbf{U}_{i+1}^{(0)}; \\ \mathbf{U}_{i+\frac{1}{2}}^{(0),2} = -\frac{1}{4}\mathbf{U}_{i+1}^{(1)} h + \frac{3}{4}\mathbf{U}_{i+1}^{(0)} + \frac{1}{4}\mathbf{U}_i^{(0)}. \end{cases}$$

"Simple" WENO-лимитер

WENO_S

Данный лимитер также использует компактный шаблон, однако от оригинальной WENO-идеи оставляет выпуклую линейную комбинацию с определением нелинейных весов. При таком подходе используются полные полиномы решения на ячейках. Т.к. условий на линейные веса при таком подходе нет, они полагаются равными γ , $1 - 2\gamma$ и γ соответственно, где γ представляет собой калибровочный параметр. Вопреки практике C.-W. Shu et al., в данной работе выбрано значение $\gamma = 0.01$.

$$\mathbf{U}_i = \sum_{k=0}^2 w_k \tilde{\mathbf{U}}_{i-1+k}, \quad \tilde{\mathbf{U}}_{i-1+k} = \mathbf{U}_{i-1+k} - \mathbf{U}_{i-1+k}^{(0)} + \mathbf{U}_i^{(0)}$$

HWENO_SC

Этот лимитер является модификацией предыдущего посредством изменения процедуры обеспечения консервативности: вместо арифметической коррекции используется метод наименьших квадратов: $\tilde{\mathbf{U}}_{i-1+k}$ есть решение задачи минимизации

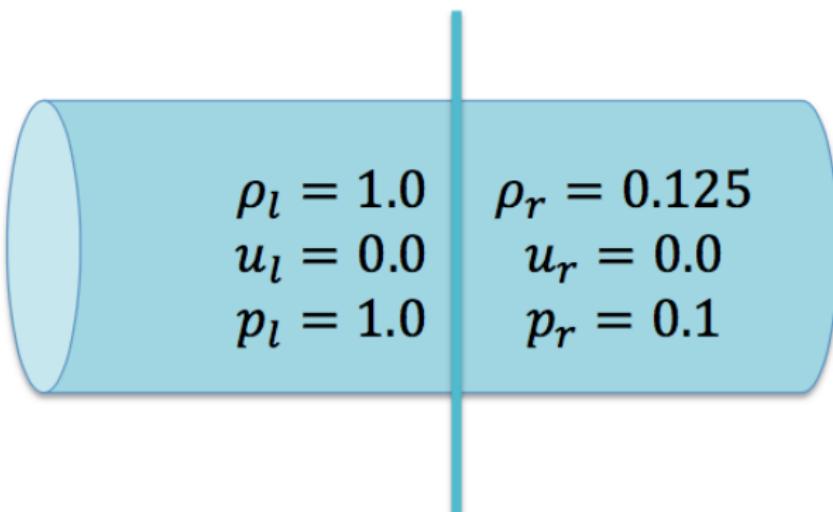
$$\min_{\phi(x) \in \mathbb{P}^1(I_{i-1+k})} \left\{ \int_{I_{i-1+k}} [\phi(x) - \mathbf{U}_{i-1+k}(x)]^2 dx \right\}$$

при условии

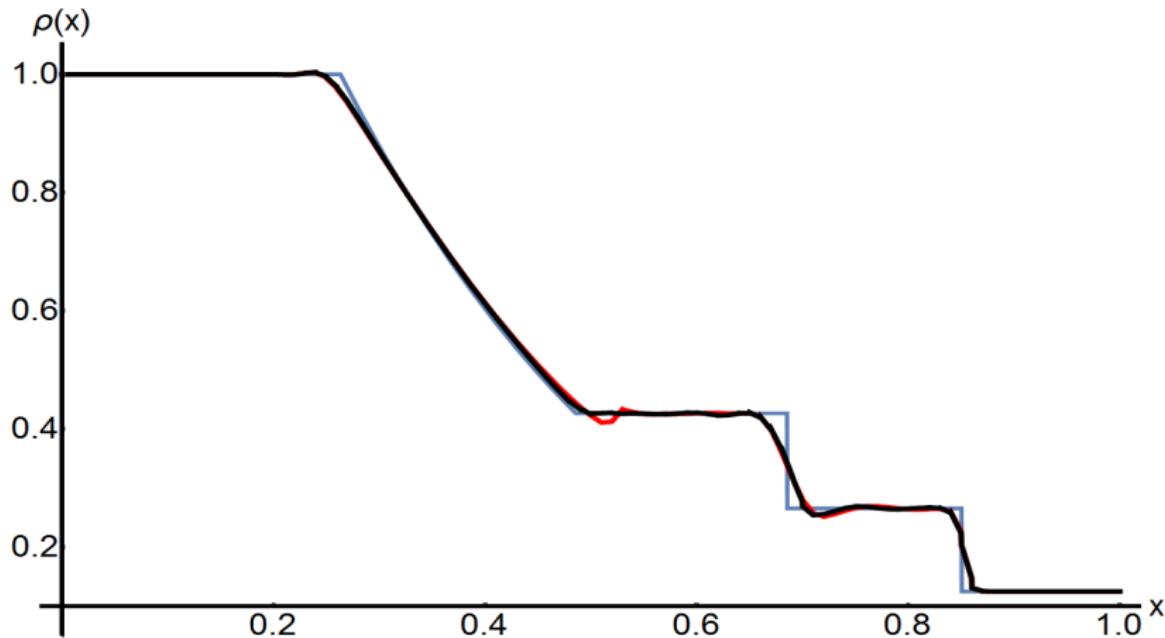
$$\frac{1}{h} \int_{I_i} \phi(x) dx = \frac{1}{h} \int_{I_i} \mathbf{U}_i(x) dx = \mathbf{U}_i^{(0)}.$$

Тестовые расчеты: задача Сода

Результаты приведены для $L = 1.0$, $T = 0.2$, $\frac{\tau}{h} = 0.1$;
использовалась кусочно-линейная аппроксимация решения
на ячейках. Начальные параметры для левого и правого
состояния идеального газа следующие:


$$\begin{array}{ll} \rho_l = 1.0 & \rho_r = 0.125 \\ u_l = 0.0 & u_r = 0.0 \\ p_l = 1.0 & p_r = 0.1 \end{array}$$

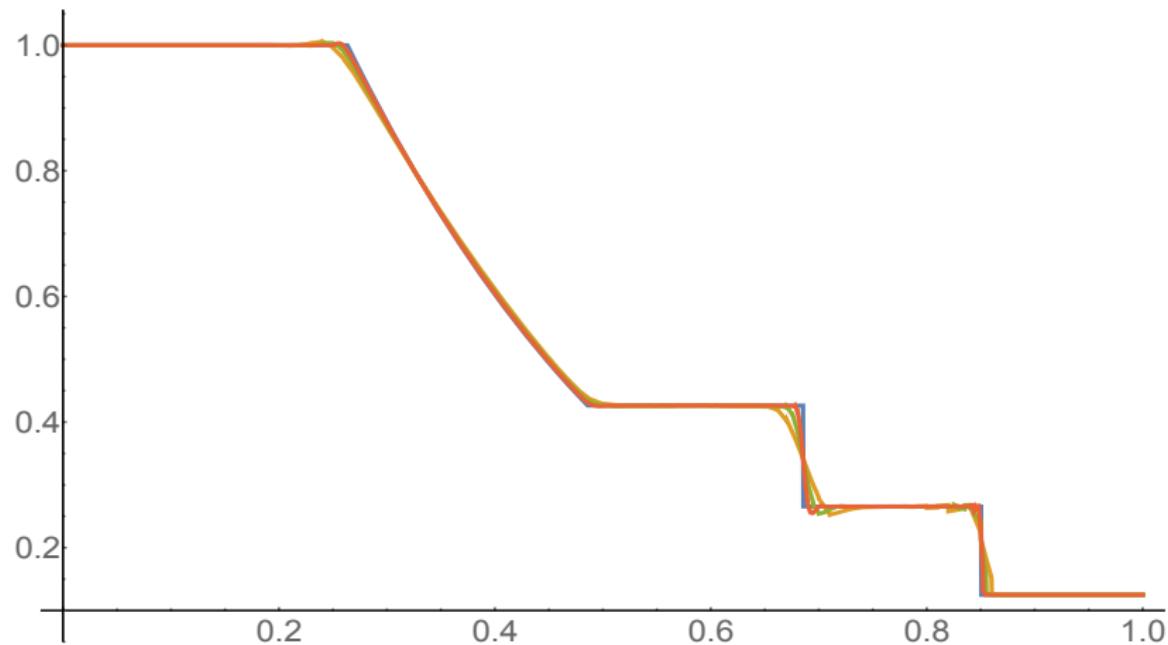
Результаты с лимитером WENO



Расчёт задачи Сода с потоками LF и HLLC на 100 ячейках.

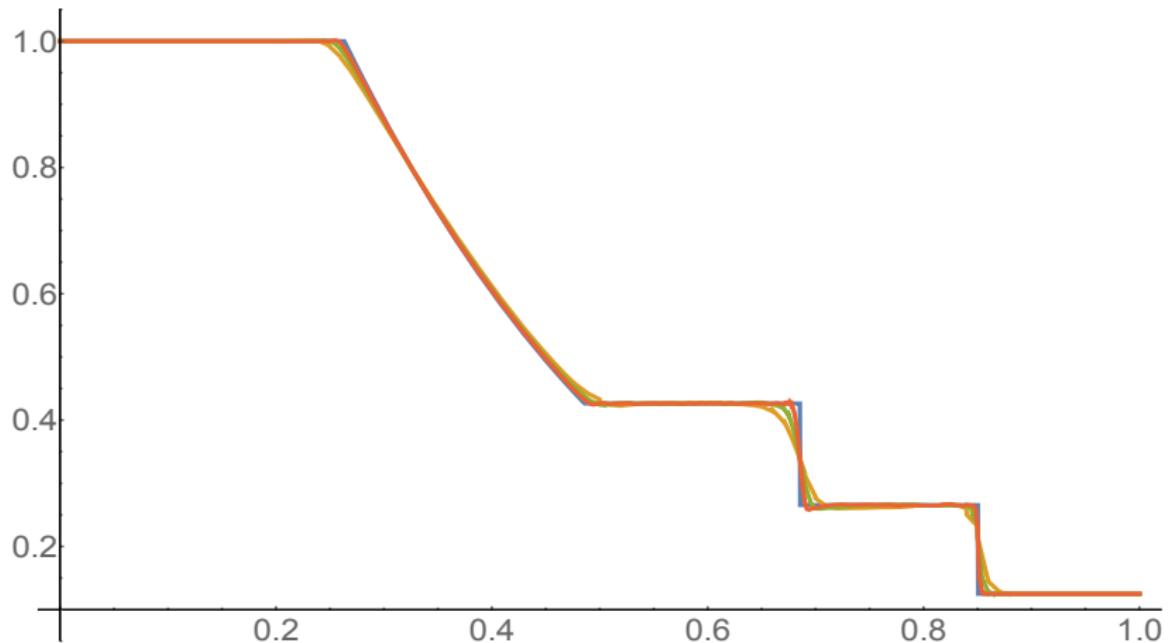
Синим цветом обозначено точное решение.

Результаты с лимитером HWENO



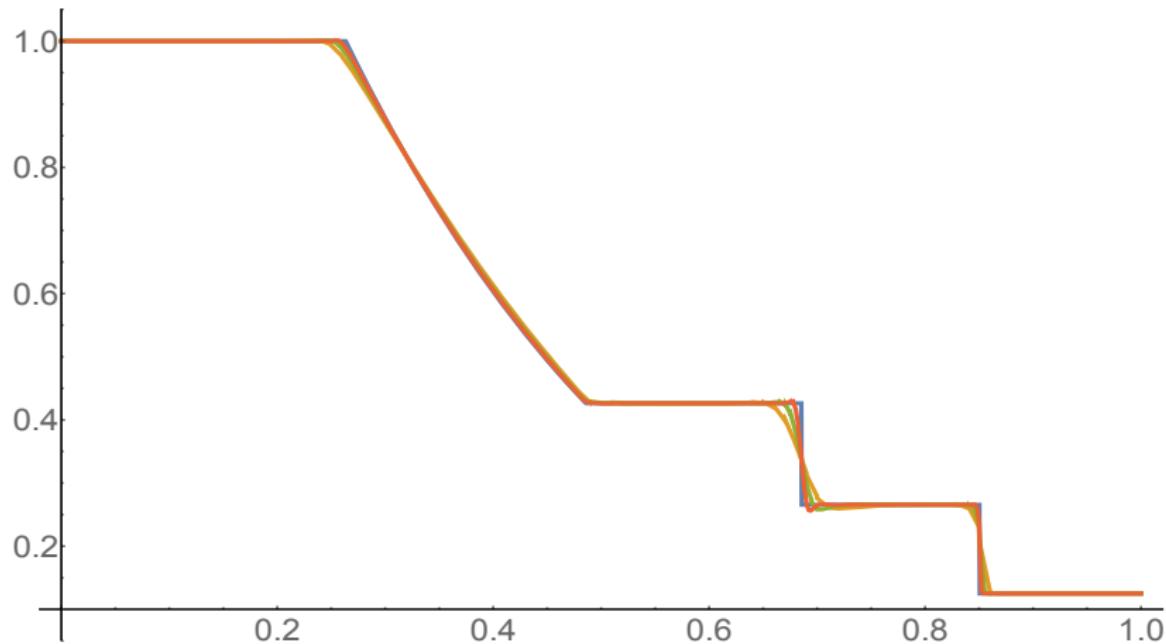
Расчёт задачи Сода с потоком HLLC на 100, 200 и 500 ячеек. Синим цветом обозначено точное решение.

Результаты с лимитером WENO_S



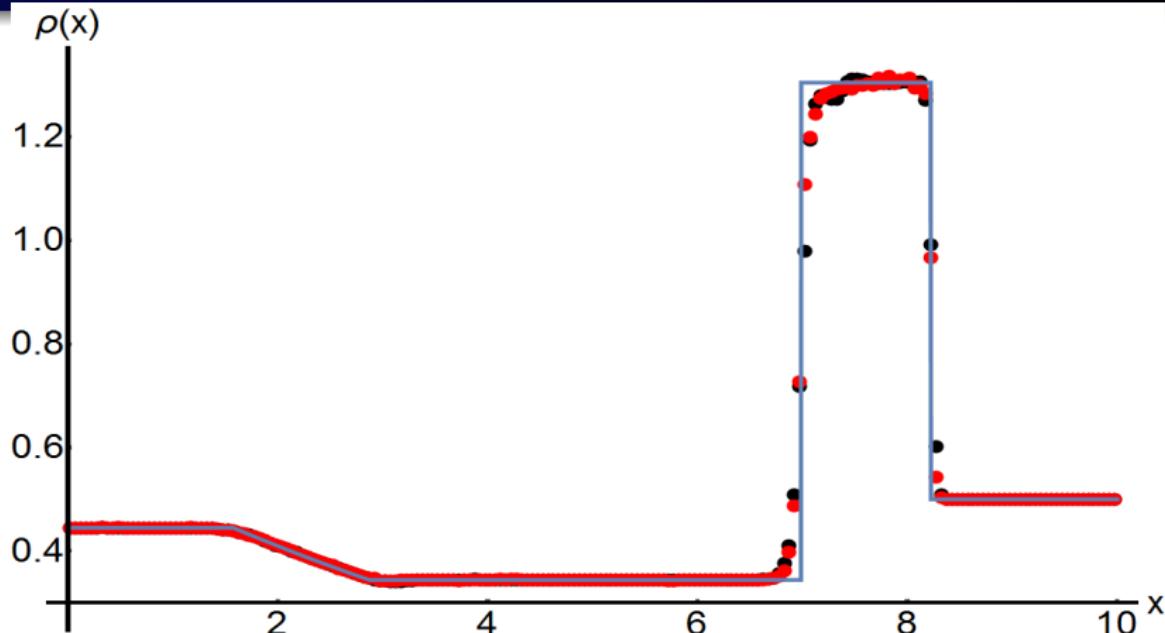
Расчёт задачи Сода с потоком HLLC на 100, 200 и 500 ячеек. Синим цветом обозначено точное решение.

Результаты с лимитером HWENO_SC



Расчёт задачи Сода с потоком HLLC на 100, 200 и 500 ячеек. Синим цветом обозначено точное решение.

Задача Лакса с квадратичными базисными функциями



Расчёт задачи Лакса с потоком HLLC с лимитерами HWENO_SC и WENO. Синим цветом обозначено точное решение.

Ideal MHD equations system

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \rho \mathbf{v} = 0,$$

$$\frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v} + p \hat{I}) = \frac{1}{4\pi} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} - \rho \nabla \Phi,$$

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v} (e + p)) = \frac{1}{4\pi} [(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}] \cdot \mathbf{v} - \rho \nabla \Phi \cdot \mathbf{v},$$

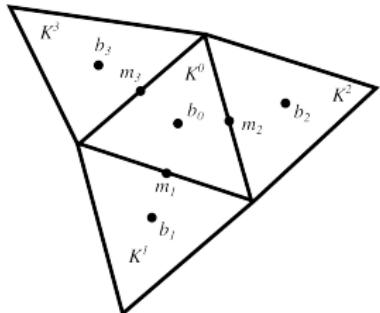
$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \Leftrightarrow \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \cdot (\mathbf{v} \mathbf{B}^T - \mathbf{B} \mathbf{v}^T).$$

Equation of state for perfect gas

$$p = (\gamma - 1) \rho \varepsilon, \quad e = \rho \varepsilon + \rho \frac{\mathbf{v}^2}{2}.$$

Solution monotonization

The second order method needs the solution monotonization procedure.



- Limiting of variables slope during flux computation.
- “TVB minmod” slope limiter.
- Limiting of slope in characteristic variables.

Conservative variables jump on the cell edge is

$$\vec{\Delta}_i = R\bar{m}(L(\vec{u}_{K^0}(\mathbf{m}_i) - \vec{u}_{K^0}(\mathbf{b}_0)), \nu L\vec{u}_{K^0}^*(\mathbf{m}_i)), i = \overline{1, 3},$$

R, L are the left and right eigenvectors matrices for linearized MHD system,

$$\bar{m}_j(\vec{a}, \vec{b}) = \begin{cases} a_j, & \text{if } |a_j| \leq M_j(h_{\min}), \\ 0.5(\text{sign } a_j + \text{sign } b_j) \min(|a_j|, |b_j|), & \text{otherwise.} \end{cases} \quad j =$$

Test problem: Multimodal Rayleigh-Taylor instability

Initial conditions:

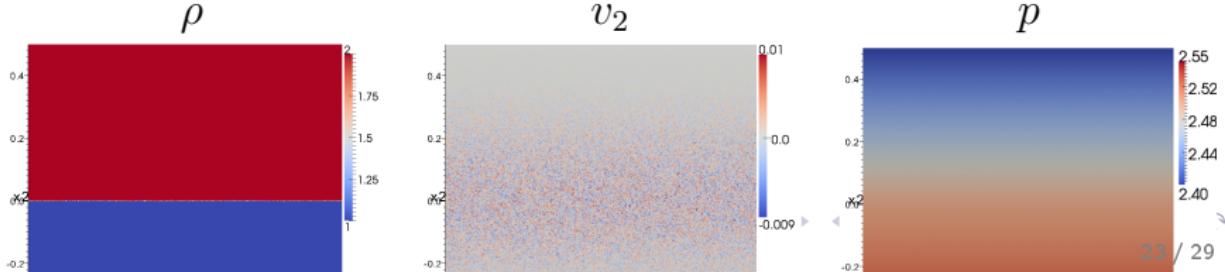
$$\mathbf{v} = (0, 0.01(A - 0.5)(1.0 + \cos 2\pi(x_2 - 0.5)), 0)^T, A \sim R[0, 1]$$

$$\mathbf{B} = (0.0125, 0, 0)^T$$

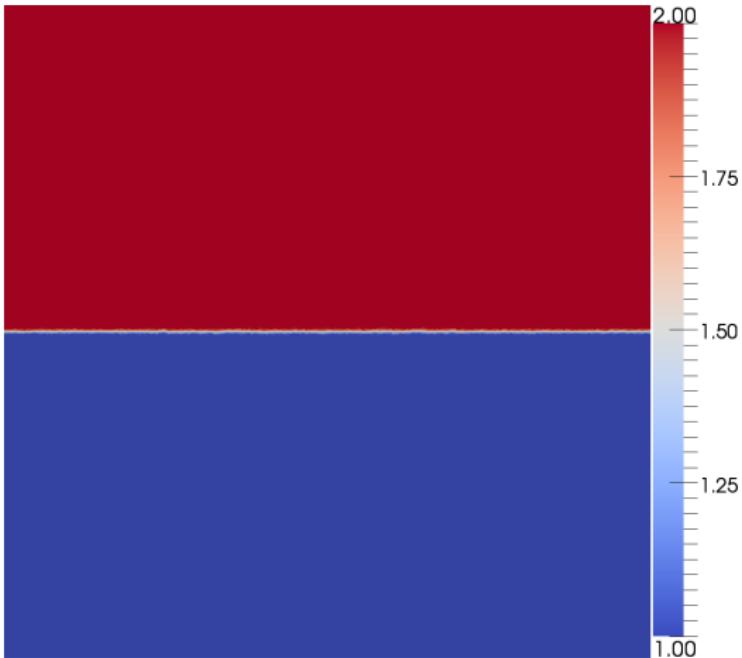
$$\begin{array}{ll} x_2 > 0 \\ \rho = 2, \quad p = 2.5 - 0.2x_2 \end{array} \qquad \qquad \begin{array}{ll} x_2 < 0 \\ \rho = 1, \quad p = 2.5 - 0.1x_2 \end{array}$$

Boundary conditions: x_1 — periodical, x_2 — reflecting

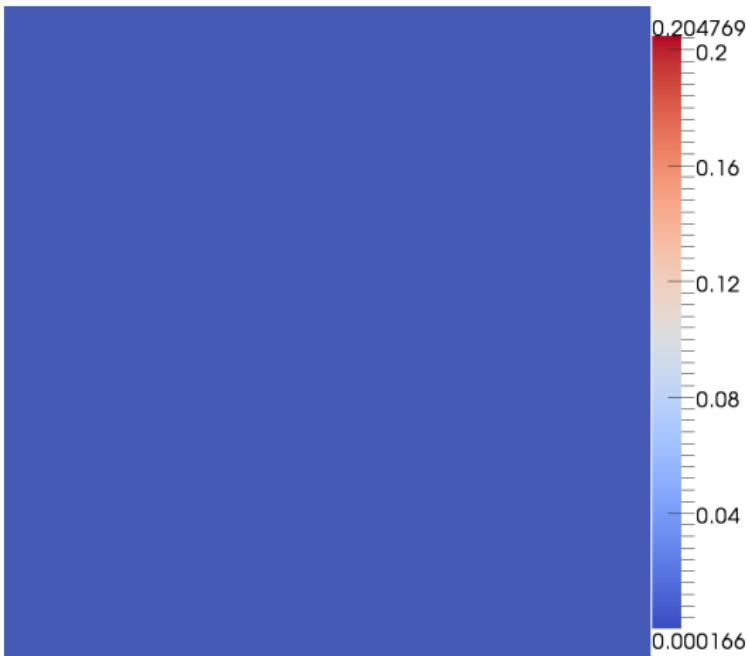
Gravitation: acceleration of gravity is $\mathbf{g} = (0, -0.1, 0)^T$.



Multimodal Rayleigh-Taylor instability: density evolution



Multimodal Rayleigh-Taylor instability: $\|\mathbf{B}\|$ evolution

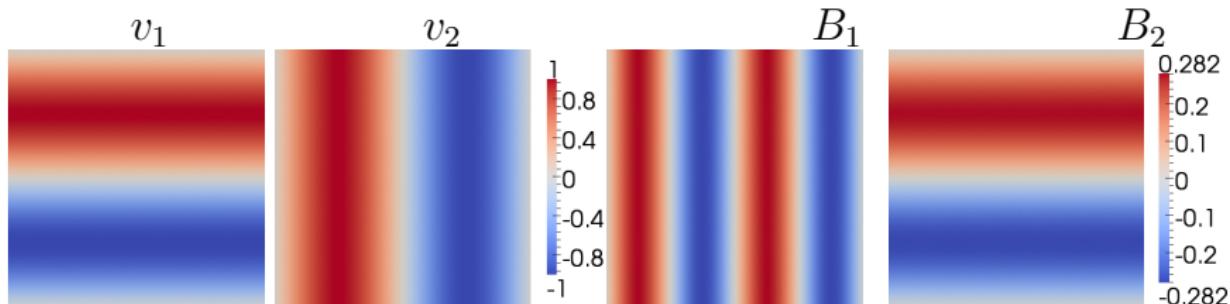


Test problem: Orszag — Tang vortex

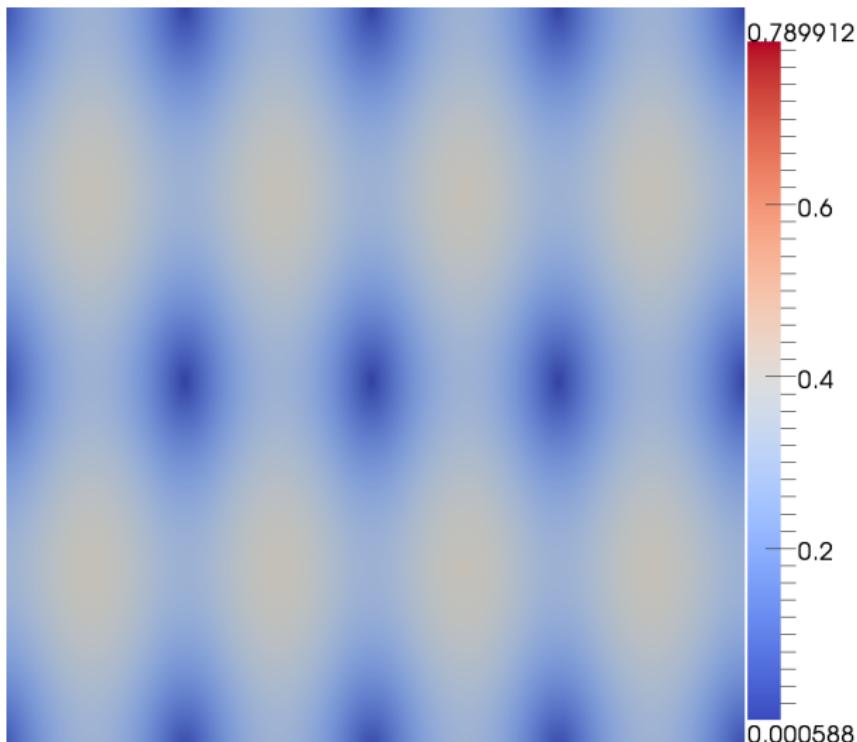
Initial conditions

$$\rho_0 = \frac{25}{36\pi}, \quad \mathbf{v}_0 = \begin{pmatrix} -\sin 2\pi x_2 \\ \sin 2\pi x_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p_0 = \frac{5}{12\pi}, \quad \mathbf{B}_0 = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \begin{pmatrix} -\sin 2\pi x_2 \\ \sin 4\pi x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Boundary conditions are periodical



Orszag – Tang vortex: magnetic field modulus dynamics



Orszag — Tang vortex: testing of parallel algorythm effectiveness

Keldysh Institute of applied mathematics hybrid computational cluster K-100:

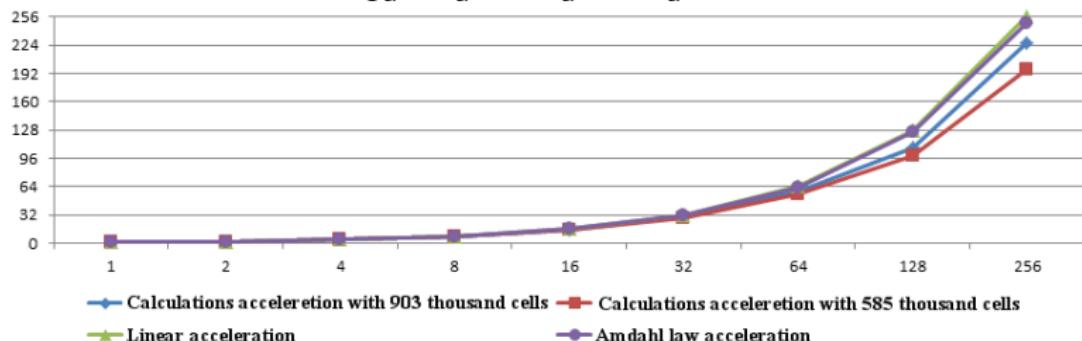
- Contains 64 computational nodes.
- One computational node has 2 Intel Xeon X5670 (6 processor cores)

Acceleration test for two meshes in Orszag — Tang problem with 256 cores

Cells number	Parallel code deal	Acceleration accord. to Amdahl law	Real acceleration
585 508	99.98%	243	197
903 222	99.99%	249	226

Orszag – Tang vortex: Acceleration using MPI

Calculations acceleration



Parallel algorythm effectiveness

