

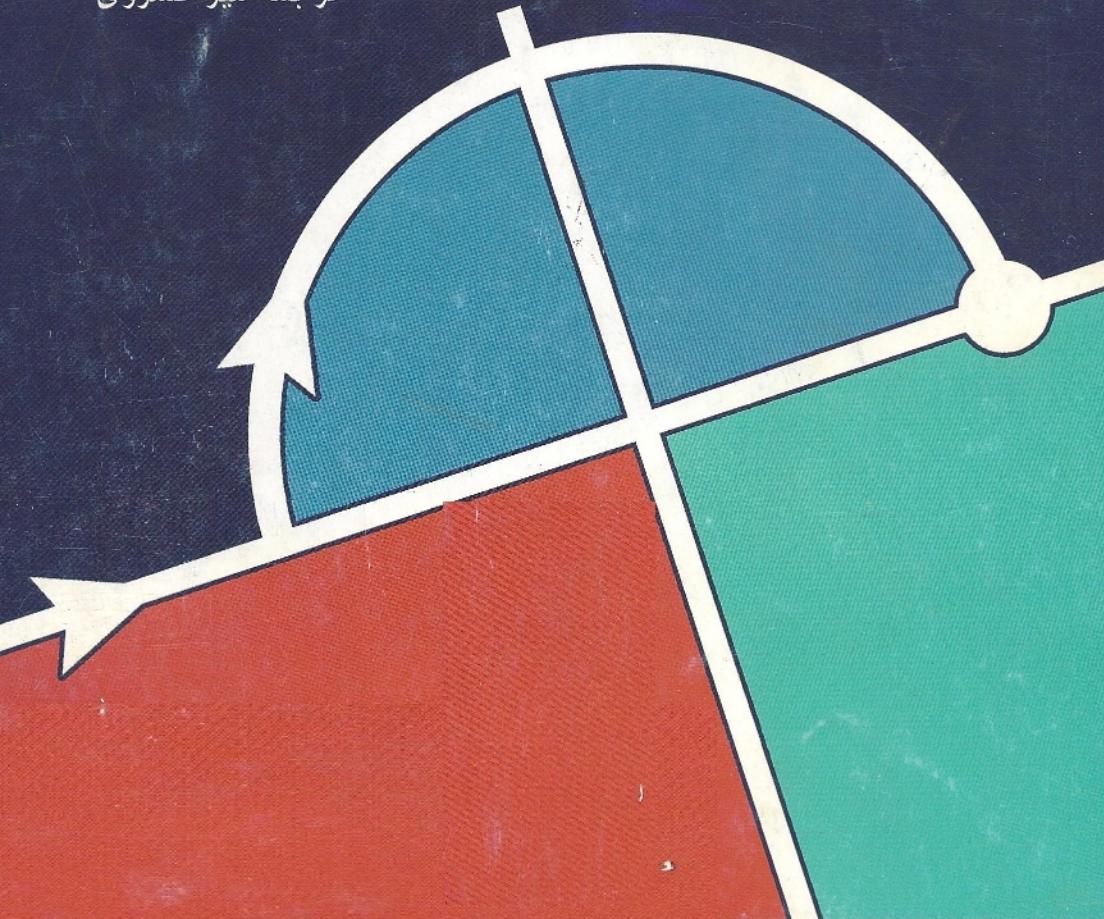


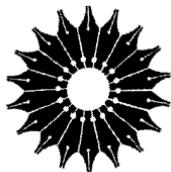
# متغیرهای مختلط و کاربردهای آن

ویراست هفتم

جیمز وارد براون، روئل ونس چرچیل

ترجمه امیر خسروی





# متغیرهای مختلط و کاربردهای آن

جیمز وارد براون، روئل ونس چرچیل

ترجمه امیر خسروی

*Complex Variables and Applications*

Seventh Edition

James Ward Brown, Ruel Vance Churchill  
McGraw-Hill, 2004

متغیرهای مختلط و کاربردهای آن

تألیف جیمز وارد براون، روئل ونس چرچیل

ترجمه

امیر خسروی

ویراسته محمد هادی شفیعیها

طراح جلد: حسین راست منش

نسخه پرداز: فاطمه پیوندی

حروفچین و صفحه‌آرا: مینا مهرابی فرد

ناظر چاپ: خشاپار نصیری منش

مرکز نشر دانشگاهی

چاپ اول ۱۳۸۸

چاپ دوم ۱۳۸۸

تعداد ۵۰۰۰

لیتوگرافی، چاپ و صحافی: وسمه

۷۸۰۰ تومان

حق چاپ برای مرکز نشر دانشگاهی محفوظ است

فهرست‌نویسی پیش از انتشار کتابخانه ملی جمهوری اسلامی ایران

Brown, James Ward

عنوان و نام بدیدآور: متغیرهای مختلط و کاربردهای آن / جیمز وارد براون، روئل ونس چرچیل؛ ترجمه امیر خسروی.

مشخصات نشر: تهران: مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۸۸.

مشخصات ظاهری: هشت، ۵۴۰ ص.

فروض: مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۳۷؛ ریاضی، آمار و ریاضیات، ۱۶۵؛

شابک: ۹۷۸-۹۶۴-۰۱-۱۳۳۷-۰

چاپ دوم: ۱۳۸۸

و ضعیفت فهرست‌نویسی؛ فیبا

یادداشت: عنوان اصلی: Complex variables and applications, 7th. ed, c2004.

موضوع: توابع متغیر مختلط

شناسه افزوده: چرچیل، روئل ونس، ۱۸۹۹ - ۱۹۷۳

شناسه افزوده: خسروی، امیر، ۱۲۲۷ - ، مترجم

شناسه افزوده: مرکز نشر دانشگاهی

ردیفندی کنگره: QA۳۳۱/.۷/۴۲۳۱۴/۷

ردیفندی دیوبی: ۵۱۵, ۹

شاره کتابشناسی ملی: ۱۸۱۱۴۱

بسم الله الرحمن الرحيم

## فهرست

صفحة

عنوان

### پیشگفتار

|    |   |                                   |
|----|---|-----------------------------------|
| ۱  | ۱ | ۱. اعداد مختلط                    |
| ۳  |   | ۱. مجموع و حاصلضرب                |
| ۵  |   | ۲. ویژگیهای جبری اساسی            |
| ۸  |   | ۳. ویژگیهای دیگر                  |
| ۱۱ |   | ۴. قدرمطلقها                      |
| ۱۶ |   | ۵. مزدوجهای مختلط                 |
| ۱۹ |   | ۶. صورت نمایی                     |
| ۲۳ |   | ۷. صورت نمایی حاصلضرب و خارج قسمت |
| ۲۹ |   | ۸. ریشه‌های اعداد مختلط           |
| ۳۲ |   | ۹. چند مثال                       |
| ۳۷ |   | ۱۰. نواحی در صفحه مختلط           |

|     |  |
|-----|--|
| ۴۱  | ۲. توابع تحلیلی                              |
| ۴۱  | ۱۱. توابع یک متغیره مختلط                    |
| ۴۴  | ۱۲. نگاشت                                    |
| ۴۹  | ۱۳. نگاشت با تابع نمایی                      |
| ۵۳  | ۱۴. حد                                       |
| ۵۶  | ۱۵. قضایایی درباره حد                        |
| ۶۰  | ۱۶. حد های مشتمل بر نقطه در بی نهایت         |
| ۶۲  | ۱۷. پیوستگی                                  |
| ۶۷  | ۱۸. مشتق                                     |
| ۷۰  | ۱۹. فرمولهای مشتقگیری                        |
| ۷۴  | ۲۰. معادلات کوشی-ریمان                       |
| ۷۸  | ۲۱. شرایط کافی برای مشتقپذیری                |
| ۸۰  | ۲۲. مختصات قطبی                              |
| ۸۵  | ۲۳. توابع تحلیلی                             |
| ۸۸  | ۲۴. چند مثال                                 |
| ۹۱  | ۲۵. توابع همساز                              |
| ۹۸  | ۲۶. توابع تحلیلی که به طور یکتا مشخص می شوند |
| ۱۰۰ | ۲۷. اصل بازتابی                              |
|     |  |
| ۱۰۵ | ۳. توابع مقدماتی                             |
| ۱۰۵ | ۲۸. تابع نمایی                               |
| ۱۰۹ | ۲۹. تابع لگاریتمی                            |
| ۱۱۲ | ۳۰. شاخه ها و مشتقات لگاریتم                 |
| ۱۱۵ | ۳۱. اتحادهایی شامل لگاریتم                   |
| ۱۱۸ | ۳۲. نمای مختلط                               |
| ۱۲۲ | ۳۳. توابع مثلثاتی                            |
| ۱۲۷ | ۳۴. توابع هذلولی                             |

## ۳۵. توابع مثلثاتی و هذلولوی معکوس

|     |   |
|-----|---|
| ۱۳۱ | ۴. انتگرال                                      |
| ۱۳۵ | ۳۶. مشتقات تابع $w(t)$                          |
| ۱۳۵ | ۳۷. انتگرالهای معین تابع $w(t)$                 |
| ۱۳۷ | ۳۸. مسیر  |
| ۱۴۱ | ۳۹. انتگرال روی مسیر                            |
| ۱۴۸ | ۴۰. چند مثال                                    |
| ۱۵۱ | ۴۱. کرانهای بالا برای قدر مطلق انتگرال روی مسیر |
| ۱۵۸ | ۴۲. تابع اولیه                                  |
| ۱۶۳ | ۴۳. چند مثال                                    |
| ۱۶۷ | ۴۴. قضیه کوشی-گورسا                             |
| ۱۷۲ | ۴۵. برهان قضیه                                  |
| ۱۷۵ | ۴۶. حوزه‌های همبند ساده و چندگانه               |
| ۱۸۰ | ۴۷. فرمول انتگرال کوشی                          |
| ۱۸۹ | ۴۸. مشتق تابع تحلیلی                            |
| ۱۹۱ | ۴۹. قضیه لیوویل و قضیه اساسی جبر                |
| ۱۹۸ | ۵۰. اصل ماکسیمم قدر مطلق                        |
| ۲۰۱ | ۵. سریها  |
| ۲۰۹ | ۵۱. همگرایی دنباله‌ها                           |
| ۲۰۹ | ۵۲. همگرایی سریها                               |
| ۲۱۲ | ۵۳. سری تیلر                                    |
| ۲۱۷ | ۵۴. چند مثال                                    |
| ۲۲۰ | ۵۵. سری لوران                                   |
| ۲۲۷ | ۵۶. چند مثال                                    |
| ۲۳۲ | ۵۷. همگرایی مطلق و یکنواخت سریهای توانی         |
| ۲۳۸ | ۵۸. پیوستگی مجموع سری توانی                     |
| ۲۴۲ |   |

|      |   |
|------|---|
| ۲۴۵  | ۵۹. انتگرالگیری و مشتقگیری از سریهای توانی  |
| ۲۴۸  | ۶۰. یکتایی نمایش سریها                      |
| ۲۵۴  | ۶۱. ضرب و تقسیم سریهای توانی                |
| <br> |   |
| ۲۶۱  | ۶. مانده‌ها و قطبها                         |
| ۲۶۱  | ۶۲. مانده‌ها                                |
| ۲۶۶  | ۶۳. قضیه مانده‌کوشی                         |
| ۲۶۸  | ۶۴. استفاده از فقط یک مانده                 |
| ۲۷۲  | ۶۵. سه نوع نقطه تکین تنها                   |
| ۲۷۶  | ۶۶. مانده در قطب                            |
| ۲۷۸  | ۶۷. چند مثال                                |
| ۲۸۱  | ۶۸. صفرهای توابع تحلیلی                     |
| ۲۸۵  | ۶۹. صفرها و قطبها                           |
| ۲۹۱  | ۷۰. رفتار تابع در نزدیکی نقاط تکین تنها     |
| <br> |   |
| ۲۹۵  | ۷. کاربردهای مانده‌ها                       |
| ۲۹۵  | ۷۱. محاسبه انتگرالهای ناسره                 |
| ۲۹۹  | ۷۲. مثال                                    |
| ۳۰۴  | ۷۳. انتگرالهای ناسره از آنالیز فوریه        |
| ۳۰۷  | ۷۴. لم ثوردان                               |
| ۳۱۲  | ۷۵. مسیرهای دندانه‌دار                      |
| ۳۱۶  | ۷۶. یک دندانه پیرامون نقطه شاخه‌بی          |
| ۳۱۹  | ۷۷. انتگرالگیری در امتداد یک بریدگی شاخه‌بی |
| ۳۲۵  | ۷۸. انتگرالهای معین مشتمل بر سینوس و کسینوس |
| ۳۲۷  | ۷۹. اصل آوند                                |
| ۳۳۱  | ۸۰. قضیه روشه                               |
| ۳۳۶  | ۸۱. تبدیلهای وارون لاپلاس                   |
| ۳۳۹  | ۸۲. چند مثال                                |

۸. نگاشت به وسیله توابع مقدماتی  
 ۳۴۹ تبدیلات خطی ۸۳  
 ۳۴۹ تبدیل  $z = 1/z$  ۸۴  
 ۳۵۲ نگاشت به وسیله  $z = 1/z$  ۸۵  
 ۳۵۳ تبدیل خطی کسری ۸۶  
 ۳۵۸ یک صورت ضمنی ۸۷  
 ۳۶۲ نگاشتهای نیم صفحه بالا ۸۸  
 ۳۶۵ تبدیل  $z = \sin z$  ۸۹  
 ۳۷۲ نگاشت به وسیله  $z^2$  و شاخه‌های  $z^{1/2}$  ۹۰  
 ۳۷۹ ریشه‌های دوم چندجمله‌یها ۹۱  
 ۳۸۶ سطوح ریمان ۹۲  
 ۳۹۳ سطوحی برای توابع مرکب ۹۳  
 ۳۹۷

۹. نگاشت همدیس  
 ۴۰۲ حفظ زوايا ۹۴  
 ۴۰۲ ضریب مقیاس ۹۵  
 ۴۰۶ وارونهای موضعی ۹۶  
 ۴۰۸ مزدوجهای همساز ۹۷  
 ۴۱۲ تبدیلهای تابع همساز ۹۸  
 ۴۱۵ تبدیل شرایط مرزی ۹۹  
 ۴۱۷

۱۰. کاربردهای نگاشت همدیس  
 ۴۲۴ دمای پایا ۱۰۰  
 ۴۲۴ ۱۰۱. دمای پایا در نیم صفحه  
 ۴۲۶ ۱۰۲. مسئله‌ای در این زمینه  
 ۴۲۹ ۱۰۳. دما در ربع صفحه  
 ۴۳۲ ۱۰۴. پتانسیل الکترواستاتیکی  
 ۴۳۸ ۱۰۵. پتانسیل در فضای استوانه‌یی

|     |  |
|-----|--|
| ۴۴۵ | ۱۰۶. جریان سیال دو بعدی                                |
| ۴۴۸ | ۱۰۷. تابع جریان  |
| ۴۵۱ | ۱۰۸. جریان حول یک گوشه و حول یک استوانه                |
| ۴۶۰ | ۱۱. تبدیل شوارتس-کریستوفل                              |
| ۴۶۰ | ۱۰۹. نگاشت محور حقیقی به روی یک چندضلعی                |
| ۴۶۲ | ۱۱۰. تبدیل شوارتس-کریستوفل                             |
| ۴۶۷ | ۱۱۱. مثلث و مستطیل                                     |
| ۴۷۲ | ۱۱۲. چندضلعیهای تباهیده                                |
| ۴۷۸ | ۱۱۳. جریان سیال از شکافی به درون یک کانال              |
| ۴۸۱ | ۱۱۴. جریان در کانالی با یک زانو                        |
| ۴۸۴ | ۱۱۵. پتانسیل الکترواستاتیکی حول لبه‌ای از یک ورقه هادی |
| ۴۹۰ | ۱۲. فرمولهای انتگرال از نوع انتگرال پواسون             |
| ۴۹۰ | ۱۱۶. فرمول انتگرال پواسون                              |
| ۴۹۳ | ۱۱۷. مسئله دیریکله برای قرص                            |
| ۴۹۷ | ۱۱۸. مسائل مقدار مرزی مربوطه                           |
| ۵۰۳ | ۱۱۹. فرمول انتگرال شوارتس                              |
| ۵۰۴ | ۱۲۰. مسئله دیریکله برای نیم صفحه                       |
| ۵۰۹ | ۱۲۱. مسائل نویمان                                      |
| ۵۱۴ | پیوست ۱ کتابنامه                                       |
| ۵۱۷ | پیوست ۲ جدول تبدیلهای نواحی                            |
| ۵۲۸ | واژه‌نامه  |
| ۵۳۱ | نمایه  |

## پیشگفتار

این کتاب تجدید نظری است از ویرایش ششم کتاب، که در ۱۹۹۶ منتشر شده است. ویرایش ششم مانند ویرایشهای قبلی به صورت کتاب درسی برای یک درس مقدماتی نیمساله در نظریه و کاربردهای توابع یک متغیره مختلط به کار رفته است. در این ویرایش محتوای اصلی و سبک ویرایشهای قبلی حفظ شده‌اند، سبکی که دو ویرایش اول آن به قلم خود روئل چرچیل فقید به تهایی انجام گرفته است.

در این ویرایش تغییرات اساسی در نه فصل اول صورت گرفته است، که قسمت اصلی یک درس نیمساله را تشکیل می‌دهند. سه فصل باقیمانده به کاربردهای فیزیکی اختصاص یافته‌اند و اساساً به منظور مطالعهٔ فردی یا مرجع آورده شده‌اند و می‌توان از بین آنها گرینه‌هایی انتخاب کرد. از جملهٔ اصلاحات عمده‌ای که انجام شده می‌توان از موارد زیر نام برد: سی شکل جدید اضافه شده و بسیاری از شکل‌ها دوباره رسم شده‌اند. به منظور تأکید بر برخی مباحث خاص بعضی از بخشها به بخش‌هایی تقسیم شده و تعدادی از بخش‌های جدید منحصراً به مثال اختصاص یافته‌اند. بخش‌هایی را که می‌توان بدون وارد آوردن خللی حذف کرد یا تدریس آنها را به تعویق انداخت به طور واضحتری مشخص کرده‌ایم تا برای مطالبی که کاملاً اساسی‌اند یا کاربردهایی که بعداً انتخاب می‌شوند وقت بیشتری بماند. در این ویرایش تعداد مجموعه‌های تمرینها از ویرایشهای قبلی بیشتر است که عموماً موجب کاهش تعداد تمرینات هر مجموعه شده و برای استاد در تعیین تکلیف مناسبتر است.

از بین دیگر اصلاحات می‌توان از موارد زیر نام برد: مطالب مقدماتی فصل ۲ در مورد نگاشتها ساده‌تر شده و حالا شامل خواص نگاشت تابع نمایی است. در فصل ۳، ترتیب ارائه مطالب توابع مقدماتی را تغییر داده‌ایم تا مباحث به طور طبیعتی پشت سرهم قرار گیرند. بهخصوص حالا بخش‌های لگاریتم مستقیماً بعد از تابع نمایی آمده‌اند و بخش‌های توابع مثلثاتی و هذلولوی به بخش‌های وارون آنها نزدیکتر شده‌اند. بنابر توصیهٔ افرادی که طی چند سال گذشته با این کتاب سروکار داشته‌اند

به منظور بهبود آن برخی از مطالب مهم را از تمرینات به داخل متن آورده‌ایم، مثلاً بررسی صفرهای تنهای توابع تحلیلی در فصل ۶ و بحث انتگرال روی مسیرهای دندانه‌دار در فصل ۷.

اولین هدف در ویرایش حاضر بسط قسمتهایی از نظریه است که اهمیت کاربردی دارد. دومین هدف ارائه مقدمه‌ای است برکاربرد مانده‌ها و نگاشت همدیس. برکاربرد نگاشت همدیس در حل مسائل مقدار مرزی که در مطالعه هدایت گرما، پتانسیل الکتروستاتیک و جریان سیال ظاهر می‌شوند، تأکید خاصی شده است. لذا این کتاب را می‌توان کتاب راهنمایی برای کتاب «سریهای فوریه و مسائل مقدار مرزی»، اثر همین مؤلفان و «ریاضیات عملی» اثر روئل چرچیل دانست که در آنها روش‌های کلاسیک دیگری برای حل مسائل مقدار مرزی در معادلات با مشتقات جزئی مطرح شده‌اند. کتاب اخیر شامل کاربردهای بیشتر مانده‌ها در ارتباط با تبدیلات لاپلاس است.

این کتاب چندین سال به عنوان یک درس سه واحدی در دانشگاه میشیگان تدریس شده است. دانشجویان کلاسها عمدها سالهای آخر دوره کارشناسی و دوره کارشناسی ارشد در رشته اصلی ریاضی، مهندسی، یا یکی از علوم فیزیک یا شیمی بوده‌اند. دانشجویان قبل از گرفتن این درس، حداقل یک دوره سه ترمی حسابان، ترم اول معادلات دیفرانسیل و گاهی یک نیمسال حساب دیفرانسیل و انتگرال پیش‌رفته را گذرانده بوده‌اند. به منظور آنکه کتاب برای طیف وسیع‌تری از خوانندگان قابل استفاده باشد، هر جا به مطالب مشکلی از حسابان برخورده‌ایم که اغلب مورد نیازند در پانوشت به کتابهایی ارجاع داده‌ایم که اثبات آنها و بحث‌هایی از قضایای دقیق‌تر را دربر دارند.

تدریس بعضی از مطالب کتاب ضروری نیست و می‌توان مطالعه آنها را به عهده خود دانشجویان گذاشت. در صورت تمایل به تدریس نگاشت بهوسیله توابع مقدماتی و کاربردهای نگاشت همدیس در اوایل درس، می‌توان بالافصله بعد از فصل ۳، که درباره توابع مقدماتی است، فصول ۸، ۹ و ۱۰ را تدریس کرد.

بیشتر نتایج بنیادی به عنوان قضیه و فرع بیان و با مثالها و تمرینهایی که بعد از آنها آمده‌اند روشن شده‌اند. در پیوست ۱ فهرستی از کتابهای دیگر که بیشتر آنها پیش‌رفته‌ترند تهیه شده است.

در پیوست ۲ جدولی از تبدیلهای همدیس که در کاربردها مفیدند آمده است.

راهنمایهای عده‌ای از علاقه‌مندانی که آشنایان، همکاران، و دانشجویان بوده‌اند در تهیه این ویرایش مؤثر بوده است. از این افراد و از همه آنانی که از تشویق و حمایتشان برخوردار بوده‌ام سپاسگزارم.

# ۱ اعداد مختلط

در این فصل ساختار جبری و هندسی دستگاه اعداد مختلط را بررسی می‌کنیم. بسیاری از ویژگیهای متاظر اعداد حقیقی را دانسته می‌گیریم.

## ۱. مجموع و حاصلضرب

اعداد مختلط را می‌توان به صورت زوجهای مرتب  $(x, y)$  از اعداد حقیقی  $x$  و  $y$  تعریف کرد که باید به صورت نقاط مختصات با مختصات قائم  $x$  و  $y$  تعبیر شوند، همان‌طور که اعداد حقیقی  $x$  را به صورت نقاط خط حقیقی می‌گیرند. در صورتی که اعداد حقیقی  $x$  را به صورت نقاط  $(x, 0)$  روی محور حقیقی نمایش دهیم، واضح است که اعداد حقیقی زیرمجموعه‌ای از مجموعه اعداد مختلط می‌شود. اعداد مختلط به شکل  $(y, 0)$  با نقاط روی محور  $y$  متاظرند و اعداد موهومی محض نامیده می‌شوند. در این صورت محور  $y$  را محور موهومی می‌نامند.

معولاً عدد مختلط  $(x, y)$  را با  $z$  نمایش می‌دهند، بنابراین

$$z = (x, y). \quad (1)$$

به علاوه اعداد حقیقی  $x$  و  $y$  را، به ترتیب، قسمتهای حقیقی و موهومی  $z$  می‌نامند و می‌نویسند

$$\operatorname{Re} z = x, \quad \operatorname{Im} z = y. \quad (2)$$

اعداد مختلط  $(x_1, y_1) = z_1$  و  $(x_2, y_2) = z_2$  مساوی‌اند هرگاه دارای قسمتهای حقیقی و موهومی برابر باشند. بنابراین  $z_1 = z_2$  یعنی اینکه  $z_1$  و  $z_2$  با یک نقطه در صفحهٔ مختلط، یا صفحهٔ  $z$ ، متناظر باشند.

مجموع  $z_1 + z_2$  و حاصلضرب  $z_1 z_2$  برای دو عدد مختلط  $(x_1, y_1) = z_1$  و  $(x_2, y_2) = z_2$  به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \quad (3)$$

$$(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, y_1 x_2 + x_1 y_2). \quad (4)$$

توجه کنید اعمالی که با روابط (3) و (4) تعریف شده‌اند وقتی به اعداد حقیقی محدود شوند همان اعمال جمع و ضرب معمولی‌اند:

$$(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0),$$

$$(x_1, 0)(x_2, 0) = (x_1 x_2, 0).$$

در نتیجه، دستگاه اعداد مختلط توسعی طبیعی از دستگاه اعداد حقیقی است. هر عدد مختلط  $(x, y) = z$  را می‌توان به صورت  $(x, 0) + (0, y) = (x, 0, y)$  نوشت و به سادگی دیده می‌شود که  $(0, y)(x, 0) = (0, y)(0, x) = (0, xy)$ . بنابراین

$$z = (x, 0) + (0, 1)(y, 0)$$

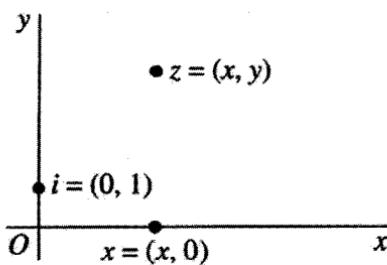
و اگر عدد حقیقی را به صورت  $x$  یا  $(x, 0)$  بگیریم و  $z$  نمایش عدد موهومی محسوس  $(0, 1)$  باشد\*، (شکل ۱ را ببینید)، واضح است که

$$z = x + iy. \quad (5)$$

همچنانی، با این قرارداد که  $zz^2 = z^3 = zz^2 = z^3$  و غیره، ملاحظه می‌کنیم که

$$i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0)$$

\* در مهندسی برق به جای حرف  $z$  از حرف  $j$  استفاده می‌شود.



شکل ۱

یا

$$i^2 = -1. \quad (6)$$

با توجه به عبارت (۵) تعاریف (۳) و (۴) به صورت زیر در می‌آیند

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2), \quad (7)$$

$$(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(y_1x_2 + x_1y_2). \quad (8)$$

ملاحظه کنید که اگر عملیات را به طور صوری و با این تصور که فقط شامل اعداد حقیقی است، روی عبارات سمت چپ انجام دهیم و هر کجا  $i^2$  ظاهر شد به جای آن  $-1$  بگذاریم همان عبارات سمت راست حاصل خواهد شد.

## ۲. ویژگیهای جبری اساسی

ویژگیهای مختلف جمع و ضرب اعداد مختلط، همان ویژگیهای جمع و ضرب اعداد حقیقی است. در اینجا فهرستی از این ویژگیها را که اساسی‌ترند ارائه می‌دهیم و درستی تعدادی از آنها را تحقیق می‌کنیم. درستی اکثر ویژگیهای دیگر را در تمرینها تحقیق خواهید کرد.

قوانين تعویضپذیری

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1, \quad z_1 z_2 = z_2 z_1 \quad (1)$$

وقوانین شرکتپذیری

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3), \quad (z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3) \quad (2)$$

به سادگی از تعاریف جمع و ضرب اعداد مختلط و اینکه اعداد حقیقی از این قوانین پیروی می‌کنند

نتیجه می‌شود. مثلاً اگر  $(x_1, y_1) = z_1$  و  $(x_2, y_2) = z_2$  باشند، آنگاه

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (x_2 + x_1, y_2 + y_1) = z_2 + z_1.$$

اثبات بقیه قوانین بالا و همچنین قانون توزیع پذیری

$$z(z_1 + z_2) = zz_1 + zz_2 \quad (3)$$

به صورتی مشابه است.

بنابر قانون توزیع پذیری ضرب،  $iy = y i$ . بنابراین به جای  $z = x + iy$  می‌توان نوشت  $z = x + yi$ . همین طور بنابر قوانین شرکت‌پذیری، مجموع  $z_1 + z_2 + z_3$  یا حاصل ضرب  $z_1 z_2 z_3$  درست مثل اعداد حقیقی، بدون پرانتر خوشنویسی است.

همانی جمعی  $= 0^\circ$  و همانی ضربی  $= 1^\circ$  برای اعداد حقیقی، همین ویژگی را در تمام دستگاه اعداد مختلط دارند. یعنی بهارای هر عدد مختلط  $z$

$$z + 0^\circ = z, \quad z \cdot 1^\circ = z. \quad (4)$$

بعلاوه،  $0^\circ$  و  $1^\circ$  تنها اعداد مختلط واجد این ویژگی‌هایند (تمرین ۹ را ببینید). به هر عدد مختلط  $(x, y) = z$  یک وارون جمعی

$$-z = (-x, -y) \quad (5)$$

وابسته می‌شود که در معادله  $z + (-z) = 0^\circ$  صدق می‌کند. بعلاوه برای هر  $z$  مفروض، فقط یک چنین وارون جمعی موجود است، زیرا از معادله  $(0^\circ, 0) + (u, v) = (x, y)$  (تمرین ۹) نتیجه می‌شود  $-z = -x - iy$  و  $u = -y$ . عبارت (5) را می‌توان بدون ابهام چنین نوشت  $-z = -x - iy$  (تمرین ۸). برای تعریف تفریق از وارونهای جمعی استفاده زیرا  $(-i)y = i(-y)$  می‌شود:

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2). \quad (6)$$

بنابراین اگر  $(x_1, y_1) = z_1$  و  $(x_2, y_2) = z_2$  باشند، آنگاه

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2, y_1 - y_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2). \quad (7)$$

برای هر عدد مختلط ناصرف  $z = (x, y)$  عدد  $z^{-1}$  موجود است به قسمی که  $zz^{-1} = 1$

این وارون ضربی نسبت به وارون جمعی کمتر آشکار است. برای پیدا کردن آن، اعداد حقیقی  $u$  و  $v$  را برحسب  $x$  و  $y$  به قسمی پیدا می‌کنیم که

$$(x, y)(u, v) = (1, \circ).$$

بنابر رابطه (۴) بخش ۱، که حاصلضرب دو عدد مختلط را تعریف می‌کند،  $u$  و  $v$  باید در دستگاه معادلات خطی

$$xu - yv = 1, \quad yu + xv = \circ.$$

صدق کنند؛ و با محاسبه‌ای ساده جواب یکتای زیر به دست می‌آید

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad v = \frac{-y}{x^2 + y^2}.$$

پس وارون ضربی  $(x, y)$  عبارت است از

$$z^{-1} = \left( \frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) \quad (z \neq \circ). \quad (8)$$

وقتی  $\circ = z$  وارون آن یعنی  $\circ^{-1} = z$  تعریف نمی‌شود. در واقع اگر  $\circ = z$ ، آنگاه  $\circ = x^2 + y^2$  و در عبارت (۸) این مقدار مجاز نیست.

## تمرینها

۱. تحقیق کنید که

$$\cdot (2, -3)(-2, 1) = (-1, 8) \quad (\text{ب}) \quad ; (\sqrt{2} - i) - i(1 - \sqrt{2}i) = -2i \quad (\text{الف})$$

$$\cdot (3, 1)(3, -1)\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{10}\right) = (2, 1) \quad (\text{ج})$$

۲. نشان دهید که

$$\text{Im}(iz) = \text{Re}z \quad (\text{ب}) ; \text{Re}(iz) = -\text{Im}z \quad (\text{الف})$$

$$\cdot (1+z)^2 = 1 + 2z + z^2 \quad . \quad (\text{c})$$

۳. تحقیق کنید که هر یک از دو عدد  $1 \pm \circ$  در معادله  $\circ = z^2 - 2z + 2$  صدق می‌کند.

۴. همان‌طور که در دومین رابطه از روابط (۱) بخش ۲ بیان شد، ثابت کنید که عمل ضرب تعویضپذیر است.

۶. درستی موارد زیر را تحقیق کنید

(الف) قانون شرکت‌پذیری جمع را که در اولین رابطه از روابط (۲) بخش ۲ بیان شد؛

(ب) قانون توزیع‌پذیری (۳) بخش ۲ را.

۷. با استفاده از شرکت‌پذیری جمع و توزیع‌پذیری نشان دهید که

$$z(z_1 + z_2 + z_3) = zz_1 + zz_2 + zz_3.$$

۸. با نوشتن  $(1, 0)$  و  $(0, i)$  نشان دهید که  $y = i(-y)$

۹. (الف) بنویسید  $(x, y) + (u, v) = (x, y) + (u, v)$  و خاطرنشان سازید چگونه نتیجه می‌شود که عدد مختلط  $(0, 0)$  به عنوان همانی جمعی، یکتاست.

(ب) همین طور بنویسید  $(x, y)(u, v) = (x, y)(u, v)$  و نشان دهید که عدد  $(1, 0)$  همانی ضربی یکتاست.

۱۰. معادله  $z^2 + z + 1 = 0$  بر حسب  $(x, y)$  را با نوشتن

$$(x, y)(x, y) + (x, y) + (1, 0) = (0, 0)$$

و حل یک دستگاه معادلات بر حسب  $x$  و  $y$ ، حل کنید.

راهنمایی: با استفاده از این واقعیت که هیچ عدد حقیقی  $x$  در معادله داده شده صدق نمی‌کند نشان دهید که  $y \neq 0$ .

$$z = \left( -\frac{1}{2}, \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

جواب:

### ۳. ویژگیهای دیگر

در این بخش، تعدادی از ویژگیهای جمع و ضرب اعداد مختلط را بیان می‌کنیم که ازویژگیهایی که قبلًا در بخش ۲ بیان شدند، نتیجه می‌شوند. از آنجایی که این ویژگیها برای اعداد حقیقی نیز به کار می‌روند، می‌توان آنها را بدون اثبات پذیرفت و خواننده می‌تواند بدون وارد آوردن خاللی از بخش ۴ شروع کند. از اینجا شروع می‌کنیم که با استفاده از وجود وارونهای ضربی می‌توان نشان داد که اگر حاصلضرب  $z_1 z_2$  صفر شود، حداقل یکی از عوامل  $z_1$  و  $z_2$  صفر است. برای این منظور فرض کنید  $z_1 z_2 = 0$  و  $z_1 \neq 0$ . وارون  $z_1^{-1}$  موجود است و لذا بنابر تعريف ضرب، هر عدد مختلط ضرب در صفر برابر با صفر می‌شود. بنابراین

$$z_2 = 1 \cdot z_2 = (z_1^{-1} z_1) z_2 = z_1^{-1} (z_1 z_2) = z_1^{-1} \cdot 0 = 0.$$

یعنی اگر  $z_1 z_2 = 0$ ، آنگاه  $z_1 = 0$  یا  $z_2 = 0$  یا ممکن است  $z_1 \neq 0$  و  $z_2 \neq 0$  هر دو مساوی صفر باشند. راه دیگری برای بیان این نتیجه آن است که اگر هر دو عدد مختلط  $z_1$  و  $z_2$  ناصلف باشند، حاصل ضرب آنها  $z_1 z_2$  ناصلف است.

تقسیم بر عدد مختلط ناصلف چنین تعریف می‌شود:

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 z_2^{-1} \quad (z_2 \neq 0). \quad (1)$$

اگر  $z = (x_1, y_1)$  و  $z_2 = (x_2, y_2)$  از رابطه (۱) فوق و رابطه (۸) بخش ۲ نتیجه می‌شود که

$$\frac{z_1}{z_2} = (x_1, y_1) \left( \frac{x_2}{x_2^2 + y_2^2}, \frac{-y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right) = \left( \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right)$$

یعنی

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \quad (z_2 \neq 0). \quad (2)$$

گرچه به خاطر سپردن عبارت (۲) ساده نیست، می‌توان آن را بدین طریق به دست آورد که بنویسیم  
(تمرین ۷ را ببینید)

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} \quad (3)$$

و اعمال ضرب در صورت و مخرج کسر سمت راست را انجام دهیم و از ویژگی زیر استفاده کنیم

$$\frac{z_1 + z_2}{z_2} = (z_1 + z_2) z_2^{-1} = z_1 z_2^{-1} + z_2 z_2^{-1} = \frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_2^2} \quad (z_2 \neq 0). \quad (4)$$

انگیزه شروع با رابطه (۳) در بخش ۵ ظاهر خواهد شد.

اتحادهای قابل انتظاری در مورد خارج قسمتها وجود دارند که از رابطه زیر، که همان رابطه (۱) بهارای  $1 = z_1$  است، به دست می‌آیند

$$\frac{1}{z_2} = z_2^{-1} \quad (z_2 \neq 0). \quad (5)$$

با استفاده از رابطه (۵)، مثلاً می‌توان رابطه (۱) را به شکل زیر نوشت

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \left( \frac{1}{z_2} \right), \quad (z_2 \neq 0). \quad (6)$$

همچنین، با توجه به اینکه (تمرین ۳) را ببینید)

$$(z_1 z_2)(z_3^{-1} z_4^{-1}) = (z_1 z_3^{-1})(z_2 z_4^{-1}) = 1 \quad (z_1 \neq 0, z_2 \neq 0),$$

و در نتیجه  $(z_1 z_2)^{-1} = z_1^{-1} z_2^{-1}$ ، می‌توان با استفاده از رابطه (۵) نشان داد که

$$\frac{1}{z_1 z_2} = (z_1 z_2)^{-1} = z_1^{-1} z_2^{-1} = \left(\frac{1}{z_1}\right) \left(\frac{1}{z_2}\right) \quad (z_1 \neq 0, z_2 \neq 0). \quad (7)$$

اتحاد مفید دیگری که در تمرینها به دست خواهد آمد به صورت زیر است

$$\frac{z_1 z_2}{z_3 z_4} = \left(\frac{z_1}{z_3}\right) \left(\frac{z_2}{z_4}\right) \quad (z_3 \neq 0, z_4 \neq 0). \quad (8)$$

مثال. محاسباتی نظری آنچه در زیر آمده است توجیه پذیرند:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2-3i}\right) \left(\frac{1}{1+i}\right) &= \frac{1}{(2-3i)(1+i)} = \frac{1}{5-i} \cdot \frac{5+i}{5+i} = \frac{5+i}{(5-i)(5+i)} \\ &= \frac{5+i}{26} = \frac{5}{26} + \frac{i}{26} = \frac{5}{26} + \frac{1}{26}i. \end{aligned}$$

بالاخره توجه می‌کنیم که دستور دوچممه‌ای برای اعداد حقیقی، برای اعداد مختلط نیز برقرار است. یعنی اگر  $z_1$  و  $z_2$  دو عدد مختلط باشند،

$$(z_1 + z_2)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z_1^{n-k} z_2^k. \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (9)$$

که در آن

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n)$$

و با این قرارداد که  $1 = 0^\circ$ . اثبات به استقرای ریاضی است و آن را به عنوان تمرین گذاشت‌ایم.

### تمرینها

۱. هر یک از کمیتهای زیر را به یک عدد حقیقی تبدیل کنید:

$$\cdot (1-i)^4 : \frac{5i}{(1-i)(2-i)(3-i)} ; \text{(ج)}^4 ; \text{(ب)} ; \frac{1+2i}{3-4i} + \frac{2-i}{5i} \quad (\text{الف})$$

جواب: (الف)  $\frac{1}{z} - \frac{1}{2}$ ; (ب)  $\frac{1}{2} - z$ ; (ج)  $-z$ .

۲. نشان دهید که

$$\frac{1}{1/z} = z \quad (z \neq 0); \quad (\text{ب})$$

۳. با استفاده از قوانین شرکتپذیری و تعویضپذیری ضرب نشان دهید که

$$(z_1 z_2)(z_3 z_4) = (z_1 z_3)(z_2 z_4).$$

۴. ثابت کنید که اگر  $z_1 z_2 z_3 = 0$ , حداقل یکی از سه عامل صفر است.

راهنمایی: بنویسید  $z_1 z_2 z_3 = 0$  و از نتیجه مشابه (بخش ۳) در مورد دو عامل استفاده کنید.

۵. رابطه (۲)، بخش ۳، برای خارج قسمت  $z_1/z_2$  را به رویی که درست بعد از آن بیان شده به دست آورید.

۶. به کمک روابط (۶) و (۷)، بخش ۳، اتحاد (۸) آن بخش را به دست آورید.

۷. با استفاده از اتحاد (۸) در بخش ۳، قانون حذف را به دست آورید:

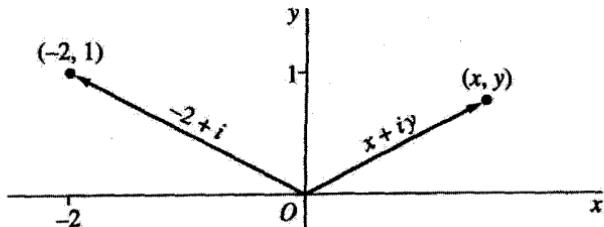
$$\frac{z_1 z}{z_2 z} = \frac{z_1}{z_2} \quad (z_2 \neq 0, z \neq 0).$$

۸. با استفاده از استقرای ریاضی درستی دستور دو جمله‌ای (۹) در بخش ۳ را تحقیق کنید. به عبارت دقیقتر، ابتدا توجه کنید که این دستور برای  $n = 1$  برقرار است. سپس با فرض اینکه برای  $n = m$  برقرار است، که در آن  $m$  عدد صحیح مثبتی است، نشان دهید که باید برای  $n = m + 1$  برقرار باشد.

#### ۴. قدرمطلقهای

طبیعی است که هر عدد مختلط نا صفر  $x + iy = z$  را با پاره خطی جهت دار، یا برداری، از مبدأ به نقطه  $(x, y)$  که نمایش  $z$  (بخش ۱) در صفحه مختلط است متناظر سازیم. در واقع اغلب به  $z$  نقطه  $z$ ، یا بردار  $z$  گفته می‌شود. در شکل ۲، اعداد  $iy$  و  $z = x + iy$  هم به صورت نقاط و هم به صورت بردارهای شعاعی نمایش داده شده‌اند.

بنابر تعریف مجموع دو عدد مختلط  $x_1 + iy_1$  و  $x_2 + iy_2$  را  $x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2) = z_1 + z_2$  می‌نامیم. بنابراین، همان‌طور که در شکل ۳ نشان داده شده است، می‌توان  $z_1 + z_2$  را همان مختصات نقطه‌اند. بنابراین، همان‌طور که در شکل ۳ نشان داده شده است، می‌توان  $z_1 + z_2$  را



شکل ۲

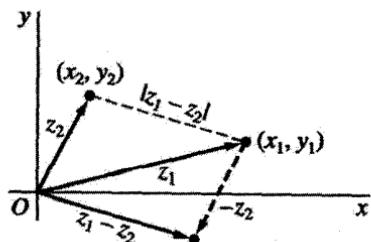
را به طریق برداری به دست آورد. تفاضل  $(z_1 - z_2) = z_1 + (-z_2)$  با مجموع بردارهای  $z_1$  و  $-z_2$  متناظر است (شکل ۳).

گرچه حاصلضرب دو عدد مختلط  $z_1$  و  $z_2$  خود عددی مختلط است که با یک بردار نمایش داده می‌شود، ولی آن بردار در همان صفحه بردارهای  $z_1$  و  $z_2$  واقع است. پس روش است که این حاصلضرب نه حاصلضرب عددی و نه حاصلضرب برداری است که در آنالیز برداری معمولی به کار می‌روند.

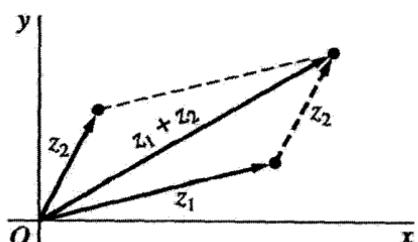
تعابیر برداری اعداد مختلط به خصوص در توسعی مفهوم قدرمطلق اعداد حقیقی برای صفحه مختلط مفید است. هنگ‌یا قدرمطلق عدد مختلط  $z = x + iy$  را به عنوان عدد حقیقی نامنفی  $\sqrt{x^2 + y^2}$  تعریف می‌کنیم و با  $|z|$  نمایش می‌دهیم یعنی

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (1)$$

از نظر هندسی، عدد  $|z|$  فاصله بین نقطه  $(x, y)$  و مبدأ، یا طول بردار معرف  $z$  است. وقتی  $y = 0$ ، این قدرمطلق به قدرمطلق معمولی در دستگاه اعداد حقیقی تبدیل می‌شود. توجه کنید که



شکل ۴



شکل ۳

گرچه نابرابری  $|z_1| < |z_2|$  جز در حالتی که  $z_1$  و  $z_2$  هر دو حقیقی اند بی معنی است،  $|z_1| < |z_2|$  بدین معنی است که نقطه متناظر با  $z_1$  به مبدأ نزدیکتر است تا نقطه متناظر با  $z_2$ .  
مثال ۱. چون  $|1 + 4i| = \sqrt{17}$  و  $|3 - 2i| = \sqrt{13}$ ، نقطه  $2i + 3 - 3 + 4i$  از نقطه  $1 + 4i$  به مبدأ نزدیکتر است.

فاصله بین دو نقطه  $z_1 = x_1 + iy_1$  و  $z_2 = x_2 + iy_2$  برابر است با  $|z_1 - z_2|$ . این مطلب از شکل ۴ واضح است، زیرا طول بردار نمایش دهنده  $z_2 - z_1$  است. به روش دیگر از تعریف (۱) و عبارت

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$

نتیجه می شود که

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

بنابراین اعداد مختلط متناظر با نقاط واقع بر دایره به مرکز  $z_0$  و شعاع  $R$  در معادله  $|z - z_0| = R$  صدق می کنند و برعکس. ما به سادگی از این مجموعه نقاط به عنوان دایره  $|z - z_0| = R$  نام می بیریم.  
مثال ۲. معادله  $|z - 1 + 3i| = 2$  نمایش دایره به مرکز  $(1, -3)$  و شعاع ۲ است.

همچنین از تعریف (۱) نتیجه می شود که اعداد حقیقی  $|z|$ ،  $\operatorname{Re} z = x$  و  $\operatorname{Im} z = y$  با رابطه زیر بهم مربوط اند

$$|z|^2 = (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2. \quad (2)$$

بنابراین

$$\operatorname{Re} z \leq |\operatorname{Re} z| \leq |z| \quad \text{و} \quad \operatorname{Im} z \leq |\operatorname{Im} z| \leq |z|. \quad (3)$$

حال به نابرابری مثلثی می پردازیم که کران بالایی برای قدر مطلق مجموع دو عدد مختلط  $z_1$  و  $z_2$  ارائه می دهد:

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \quad (4)$$

این نابرابری مهم در شکل ۳ از نظر هندسی بدینه است، زیرا صرفاً بیان می‌کند که طول هر ضلع مثلث مساوی یا کوچکتر از مجموع طولهای دو ضلع دیگر است. همچنین از شکل ۳ متوجه می‌شویم که وقتی  $z_1, z_2$  و  $z$  همخط و بردارهای  $z_1$  و  $z_2$  هم جهت‌اند، نابرابری (۴) عملاً یک برابری است. برهان کاملاً جبری در تمرین ۱۶ بخش ۵ ارائه شده است.

از نابرابری مثلثی بی‌درنگ نابرابری زیر به دست می‌آید

$$|z_1 + z_2| \geq ||z_1| - |z_2||. \quad (5)$$

برای به دست آوردن نابرابری (۵) می‌نویسیم

$$|z_1| = |(z_1 + z_2) + (-z_2)| \leq |z_1 + z_2| + |-z_2|,$$

که مستلزم رابطه زیر است

$$|z_1 + z_2| \geq |z_1| - |z_2|. \quad (6)$$

این نابرابری همان نابرابری (۵) است وقتی که  $|z_2| \geq |z_1|$ . اگر  $|z_2| < |z_1|$  فقط لازم است که در نابرابری (۶) جای  $z_1$  و  $z_2$  را عوض کنیم تا نابرابری

$$|z_1 + z_2| \geq -(|z_1| - |z_2|),$$

را که همان نتیجه مطلوب است به دست آوریم. البته نابرابری (۵) بیان می‌کند که طول هر ضلع مثلث مساوی یا بزرگتر از تفاضل طولهای دو ضلع دیگر است.

چون  $|z_2| = |z_2| - |z_1|$ ، می‌توان در نابرابریها (۴) و (۵) به جای  $z_2$  عدد  $-z_2$  را قرار داد تا این نتایج به شکل منیدی خلاصه شوند:

$$|z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|, \quad (7)$$

$$|z_1 \pm z_2| \geq ||z_1| - |z_2||. \quad (8)$$

مثال ۳. اگر نقطه  $z$  بر دایره واحد  $|z| = 1$  پیرامون مبدأ واقع باشد، آنگاه

$$|z - 2| \leq |z| + 2 = 3$$

$$|z - 2| \geq ||z| - 2| = 1.$$

نابرابری مثلثی را می‌توان با استقرای ریاضی، به مجموعهایی شامل هر تعداد متناهی جمله تعییم داد:

$$|z_1 + z_2 + \cdots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n| \quad (n = 2, 3, \dots). \quad (9)$$

برای ارائه جزئیات اثبات استقرایی، توجه می‌کنیم که اگر  $n = 2$ ، نابرابری (۹) همان نابرابری (۴) است. به علاوه اگر فرض کنیم که وقتی  $n = m$  نابرابری (۹) برقرار است، باید برای  $n = m + 1$  نیز برقرار باشد، زیرا بنابر نابرابری (۴)

$$\begin{aligned} |(z_1 + z_2 + \cdots + z_m) + z_{m+1}| &\leq |z_1 + z_2 + \cdots + z_m| + |z_{m+1}| \\ &\leq (|z_1| + |z_2| + \cdots + |z_m|) + |z_{m+1}|. \end{aligned}$$

## تمرینها

۱. اعداد  $z_1 + z_2$  و  $z_1 - z_2$  را به طریق برداری مشخص سازید درصورتی که

$$z_2 = (\sqrt{3}, 0), z_1 = (-\sqrt{3}, 1); \quad (ب) \quad (الف) \quad z_2 = \frac{2}{3} - i, z_1 = 2i$$

$$z_2 = x_1 - iy_1, z_1 = x_1 + iy_1; \quad (د) \quad (ج) \quad z_2 = (1, 4), z_1 = (-3, 1)$$

۲. درستی نابرابریهای (۳) بخش ۴ را که شامل  $\operatorname{Re} z$ ،  $\operatorname{Im} z$  و  $|z|$  هستند تحقیق کنید.

$$\text{۳. ثابت کنید که } |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z| \geq \sqrt{2}|z|.$$

راهنمایی: این نابرابری را به  $|(x) - |y)| \geq |x| - |y|$  تبدیل کنید.

۴. در هر حالت، مجموعه ناقاطی را که با شرط داده شده زیر معین می‌شود، با شکل نمایش دهید:

$$(الف) |z| = 1 + i; \quad (ب) |z| \leq 3; \quad (ج) |z + 4i| \geq 4.$$

۵. با استفاده از اینکه  $|z_1 - z_2|$  فاصله بین دو نقطه  $z_1$  و  $z_2$  است یک استدلال هندسی بیاورید که

$$(الف) \text{ معادله } |z - 4i| + |z + 4i| = 10 \text{ نمایش بیضی است که کانونهایش } (0, \pm 4).$$

هستند:

$$(ب) \text{ معادله } |z + 1| = |z - 1| \text{ نمایش خط راستی است که از مبدأ می‌گذرد و شیب آن } -1 \text{ است.}$$

## ۵. مزدوجهای مختلط

مزدوج مختلط، یا به اختصار مزدوج، عدد مختلط  $z = x + iy$  به صورت عدد مختلط  $x - iy$  تعریف و با  $\bar{z}$  نشان داده می‌شود یعنی

$$\bar{z} = x - iy. \quad (1)$$

عدد  $\bar{z}$  با نقطه  $(y, -x)$  نمایش داده می‌شود که بازتاب نقطه  $(x, y)$ ، نمایش  $z$ ، نسبت به محور حقیقی است (شکل ۵). توجه کنید که بازای هر  $z$  داریم

$$|\bar{z}| = |z| \quad \text{و} \quad \bar{\bar{z}} = z$$

اگر  $z_1 = x_1 + iy_1$  و  $z_2 = x_2 + iy_2$  آنگاه

$$\overline{z_1 + z_2} = (x_1 + x_2) - i(y_1 + y_2) = (x_1 - iy_1) + (x_2 - iy_2).$$

بنابراین، مزدوج مجموع برابر است با مجموع مزدوجها:

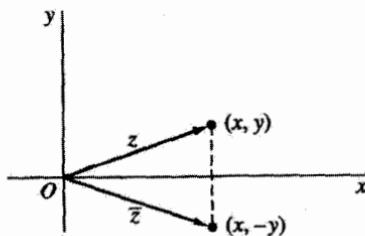
$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2. \quad (2)$$

به روشی مشابه به سادگی نشان داده می‌شود که

$$\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2, \quad (3)$$

$$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2, \quad (4)$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} \quad (z_2 \neq 0). \quad (5)$$



شکل ۵

مجموع عدد مختلط  $z = x + iy$  و مزدوج آن  $\bar{z} = x - iy$ , یعنی  $\bar{z} = x - iy$ , برابر عدد حقیقی  $2x$  و تفاضل آن,  $\bar{z} - z$ , برابر عدد موهومی محس  $2iy$  است. بنابراین

$$\operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad \operatorname{Im} z = -\frac{z - \bar{z}}{2i}. \quad (6)$$

اتحاد مهمی که مزدوج عدد مختلط آن  $z = x + iy$  را به قدرمطلق آن مربوط می‌سازد عبارت است از

$$z\bar{z} = |z|^2, \quad (7)$$

که در آن هر طرف برابر  $x^2 + y^2$  است. این فرمول روش دیگری برای معین کردن خارج قسمت  $z_1/z_2$  در رابطه (۳) بخش ۳ ارائه می‌دهد. طرز عمل عبارت است از ضرب صورت و مخرج  $z_1/z_2$  در  $\bar{z}_2$  به قسمی که مخرج عدد حقیقی  $|z_2|^2$  شود.

مثال ۱. به عنوان مثال،

$$\frac{-1+3i}{2-i} = \frac{(-1+3i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{-5+5i}{|2-i|^2} = \frac{-5+5i}{5} = -1+i.$$

مثال نزدیک به آخر بخش ۳ را نیز ببینید.

اتحاد (۷) به خصوص در به دست آوردن ویژگیهای قدرمطلق از روی ویژگیهای مزدوجها که در بالا بیان کردیم مفید است: از آن جمله

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|, \quad (8)$$

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad (z_2 \neq 0). \quad (9)$$

برای اثبات ویژگی (۸) می‌نویسیم

$$|z_1 z_2|^2 = (z_1 z_2)(\bar{z}_1 \bar{z}_2) = (z_1 z_2)(\bar{z}_1 \bar{z}_2) = (z_1 \bar{z}_1)(z_2 \bar{z}_2) = |z_1|^2 |z_2|^2 = (|z_1| |z_2|)^2$$

و به یاد می‌آوریم که قدرمطلق هیچگاه منفی نیست. درستی ویژگی (۹) را هم به همین روش می‌توان تحقیق کرد.

مثال ۲. ویژگی (۸) می‌بین این نکته است که  $|z|^2 = |z|^2 + |z|^3 = |z|^2 + |z|^3$ . بنابراین اگر نقطه  $z$  درون دایره به مرکز مبدأ و شعاع ۲ واقع باشد، آنگاه  $2 < |z|$ , در نتیجه بنابر صورت تعیین یافته نابرابری مثلثی (۹)، بخش ۴، داریم

$$|z^3 + 3z^2 - 2z + 1| \leq |z|^3 + 3|z|^2 + 2|z| + 1 < 25.$$

## تمرینها

۱. با استفاده از ویژگیهای مزدوجها و قدرمطلقها که در بخش ۵ ثابت شد نشان دهید که

$$\overline{iz} = -i\bar{z} \quad (\text{الف}) \quad \overline{z+3i} = z - 3i$$

$$|(2\bar{z} + 5)(\sqrt{2} - i)| = \sqrt{3}|2z + 5| \quad (\text{ج}) \quad \overline{(2+i)^2} = 3 - 4i$$

۲. در هر حالت مجموعه نقاطی را که با شرط داده شده معین می‌شود، با شکل نمایش دهید.  
 (الف)  $\operatorname{Re}(\bar{z} - i) = 2$  (ب)  $|z - 2| = 4$

۳. درستی ویژگیهای (۳) و (۴) مزدوجها در بخش ۵ را تحقیق کنید.

۴. با استفاده از ویژگی (۴) مزدوجها در بخش ۵ نشان دهید که  
 (الف)  $\overline{z_1 z_2 z_3} = \overline{z}_1 \overline{z}_2 \overline{z}_3$  (ب)  $(\overline{z})^4 = \overline{(z^4)}$

۵. درستی ویژگی (۹) قدرمطلقها در بخش ۵ را تحقیق کنید.

۶. با استفاده از نتایج بخش ۵ نشان دهید که وقتی  $z_2$  و  $z_3$  ناصفند،

$$\left| \frac{z_1}{z_2 z_3} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2||z_3|} ; \quad (\text{الف}) \quad \overline{\left( \frac{z_1}{z_2 z_3} \right)} = \frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2 \overline{z}_3}$$

۷. با استفاده از ویژگیهای قدرمطلقها که ثابت کردیم نشان دهید که وقتی  $|z_3| \neq |z_4|$ ،

$$\left| \frac{z_1 + z_2}{z_3 + z_4} \right| \leq \frac{|z_1| + |z_2|}{||z_3| - |z_4||}.$$

۸. نشان دهید که

$$\text{اگر } 1 \leq |z|, \text{ آنگاه } |\operatorname{Re}(2 + \bar{z} + z^3)| \leq 4$$

۹. در بخش ۳ نشان دادیم که اگر  $z_1 z_2 = 0$  آنگاه حداقل یکی از اعداد  $z_1$  و  $z_2$  باید صفر باشد. اثبات دیگری بر مبنای نتیجه متناقض برای اعداد حقیقی و استفاده از اتحاد (۸) بخش ۵ ارائه دهید.

۱۰. با تجزیه  $3 + 4z^2 - 4z^4$  به دو عامل درجه دوم و استفاده از نابرابری (۸) بخش ۴ نشان دهید که اگر  $z$  بر دایره  $|z| = 2$  واقع باشد، آنگاه

$$\left| \frac{1}{z^4 - 4z^2 + 3} \right| \leq \frac{1}{3}.$$

۱۱. ثابت کنید که

(الف)  $z$  حقیقی است اگر و فقط اگر  $z = \bar{z}$ ؛

(ب)  $z$  حقیقی یا موهومی محض است اگر و فقط اگر  $z^2 = (\bar{z})^2$ .

۱۲. با استفاده از استقرای ریاضی نشان دهید که هرگاه  $n = 2, 3, \dots$

$$\overline{z_1 + z_2 + \dots + z_n} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \dots + \bar{z}_n \quad (\text{الف})$$

$$\overline{z_1 z_2 \dots z_n} = \bar{z}_1 \bar{z}_2 \dots \bar{z}_n \quad (\text{ب})$$

۱۳. فرض می‌کنیم  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$  ( $n \geq 1$ ) نمایش اعدادی حقیقی و  $z$  عدد مختلط دلخواهی باشد. به کمک نتایج تمرین ۱۲ نشان دهید که

$$\overline{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n} = a_0 + a_1 \bar{z} + a_2 \bar{z}^2 + \dots + a_n \bar{z}^n.$$

۱۴. نشان دهید که معادله  $|z - z_0| = R$  برای دایره به مرکز  $z_0$  و شعاع  $R$  را می‌توان چنین نوشت

$$|z|^2 - 2\operatorname{Re}(z\bar{z}_0) + |z_0|^2 = R^2.$$

۱۵. با استفاده از عبارات (۶) در بخش ۵ برای  $z$   $\operatorname{Re} z$  و  $\operatorname{Im} z$  نشان دهید که هذلولی  $1 =$  را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$z^2 + \bar{z}^2 = 2.$$

۱۶. طی مراحل زیر اثبات جبری برای نابرابری مثلثی (بخش ۴) ارائه دهید

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

(الف) نشان دهید که

$$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) = z_1 \bar{z}_1 + (z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 \bar{z}_2) + z_2 \bar{z}_2.$$

(ب) بگویید چرا

$$z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 \bar{z}_2 = 2\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) \leq 2|z_1||z_2|.$$

(ج) با استفاده از نتایج قسمتهای (الف) و (ب) نابرابری زیر را به دست آورید

$$|z_1 + z_2|^2 \leq (|z_1| + |z_2|)^2.$$

و نشان دهید که چگونه نابرابری مثلثی نتیجه می‌شود.

## ۶. صورت نمایی

فرض می‌کنیم  $r$  و  $\theta$  مختصات قطبی نقطه  $(x, y)$ ، متاظر با عدد مختلط ناصرف  $z = x + iy$

باشند. چون  $x = r \cos \theta$  و  $y = r \sin \theta$  را می‌توان به صورت قطبی چنین نوشت

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta). \quad (1)$$

اگر  $z = z$ , مختص  $\theta$  تعریف نشده است؛ لذا وقتی،  $z$  مورد نظر باشد، همواره  $\arg z \neq z$ . در آنالیز مختلط، عدد حقیقی  $r$  نمی‌تواند منفی باشد و طول بردار شعاعی برای  $z$  است؛ یعنی  $|z| = r$ . عدد حقیقی  $\theta$  نمایش زاویه‌ای است بر حسب رادیان که  $z$  با محور حقیقی مثبت می‌سازد به شرطی که  $z$  را به صورت یک بردار شعاعی تعبیر کنیم (شکل ۶). مانند حسابان  $\theta$  دارای تعدادی نامتناهی مقدار ممکن از جمله مقادیر منفی است که تفاضل آنها مضارب صحیحی از  $2\pi$  است. این مقادیر را می‌توان از معادله  $\tan \theta = y/x$  معین کرد، که در آن ربع صفحه شامل نقطه متناظر با  $z$  باید مشخص شود. هر مقدار  $\theta$  را یک آوند  $z$  می‌نامند و مجموعه همه این مقادیر را به صورت  $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$  نمایش می‌دهند. مقدار اصلی  $z$ ,  $\arg z$ , که با  $z$  نشان داده می‌شود، مقدار یکتای  $\Theta$  است به قسمی که  $\pi \leq \Theta < -\pi$ . توجه کنید که

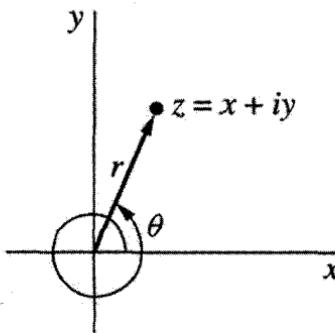
$$\arg z = \Theta + 2n\pi \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (2)$$

همچنین وقتی  $z$  یک عدد حقیقی منفی باشد  $\arg z = \pi$  برابر مقدار  $\pi$  است نه  $-\pi$ .  
مثال ۱. عدد مختلط  $-1 - i$ , که در ربع سوم واقع است، دارای آوند اصلی  $\arg(-1 - i) = 5\pi/4$  است.

يعنى،

$$\arg(-1 - i) = -\frac{3\pi}{4};$$

باید تأکید کرد که، به علت محدودیت  $\pi \leq \Theta < -\pi$  برای آوند اصلی  $\Theta$ , نتیجه‌گیری  $\arg(-1 - i) = 5\pi/4$  درست نیست.



شکل ۶

(۲) به موجب معادله

$$\arg(-1-i) = -\frac{3\pi}{4} + 2n\pi \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

توجه کنید که در سمت راست معادله (۲) می‌توان هر مقدار خاص  $z$  را به جای  $\arg z$  قرار داد و مثلاً می‌توان نوشت

$$\arg(-1-i) = \frac{5\pi}{4} + 2n\pi \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

نماد  $e^{i\theta}$  یا  $\exp(i\theta)$  با فرمول اویلر به صورت زیر تعریف می‌شود

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta, \quad (3)$$

که در آن  $\theta$  بر حسب رادیان اندازه‌گیری می‌شود. با استفاده از آن می‌توان صورت قطبی (۱) را به صورت نمایی

$$z = r e^{i\theta} \quad (4)$$

جمع و جورتر نوشت. انگیزه انتخاب نماد  $e^{i\theta}$  بعداً در بخش ۲۸ گفته خواهد شد. ولی، مورد استفاده آن در بخش ۷ توجیهی بر انتخاب طبیعی آن است.

مثال ۲. عدد  $i - 1$  در مثال ۱ دارای صورت نمایی زیر است

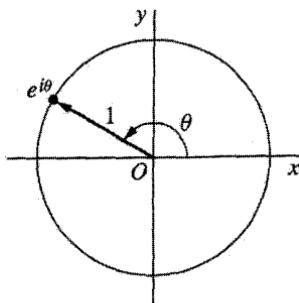
$$-1 - i = \sqrt{2} \exp \left[ i \left( -\frac{3\pi}{4} \right) \right]. \quad (5)$$

با این توافق که  $e^{i(-\theta)} = e^{i(-\theta)}$ , فرمول فوق را به صورت  $-1 - i = \sqrt{2} e^{-i3\pi/4}$  هم می‌توان نوشت. البته عبارت (۵) فقط یکی از بی‌نهایت صورت نمایی ممکن  $i - 1$  است:

$$-1 - i = \sqrt{2} \exp \left[ i \left( -\frac{3\pi}{4} + 2n\pi \right) \right] \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (6)$$

توجه کنید چگونه عبارت (۶) با  $r = 1$  بیان می‌کند که اعداد  $e^{i\theta}$ ، همان‌طور که در شکل ۷ نشان داده شده، بر دایره به مرکز مبدأ و شعاع ۱ واقع‌اند. پس مقادیر  $e^{i\theta}$  بدون مراجعه به فرمول اویلر، از روی شکل مستقیماً به دست می‌آیند. مثلاً از نظر هندسی واضح است که

$$e^{i\pi} = -1, \quad e^{-i\pi/2} = -i, \quad e^{-i\pi} = 1.$$



شکل ۷

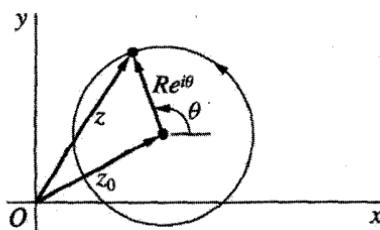
همچنین توجه کنید که معادله

$$z = Re^{i\theta} \quad (0^\circ \leq \theta \leq 2\pi) \quad (7)$$

یک نمایش پارامتری دایره  $R = |z|$  به مرکز مبدأ و شعاع  $R$  است. در صورتی که پارامتر  $\theta$  از  $0^\circ$  تا  $2\pi$  افزایش یابد، نقطه  $z$  با شروع از محور حقیقی مثبت یک دور دایره را در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت می‌پیماید. به طور کلیتر، دایره  $R = |z - z_0|$  که مرکز آن  $z_0$  و شعاع آن  $R$  است دارای نمایش پارامتری زیر است

$$z = z_0 + Re^{i\theta} \quad (0^\circ \leq \theta \leq 2\pi). \quad (8)$$

رابطه (8) از نظر بداری چنین توجیه می‌شود که نقطه  $z$  که دایره  $R = |z - z_0|$  را یک بار در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت می‌پیماید متناظر با مجموع بدار ثابت  $z_0$  و بداری به طول  $R$  است که  $\theta$ ، زاویه شیب آن، از  $0^\circ$  تا  $2\pi = \theta$  تغییر می‌کند (شکل ۸).



شکل ۸

## ۷. صورت نمایی حاصلضرب و خارج قسمت

با محاسبات مثلثاتی ساده نتیجه می‌شود که  $e^{i\theta}$  دارای ویژگی جمعی معمولی تابع نمایی در حسابان است:

$$\begin{aligned} e^{i\theta_1} e^{i\theta_2} &= (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \\ &= (\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) + i(\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2) \\ &= \cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2) = e^{i(\theta_1 + \theta_2)}. \end{aligned}$$

پس، اگر  $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$  و  $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ ، حاصلضرب  $z_1 z_2$  دارای صورت نمایی زیر است

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i\theta_1} e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}. \quad (1)$$

به علاوه

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{e^{i\theta_1} e^{-i\theta_2}}{e^{i\theta_2} e^{-i\theta_1}} = \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{e^{i(\theta_1 - \theta_2)}}{e^{i(-\theta_1 + \theta_2)}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}. \quad (2)$$

چون  $1e^{i\circ} = 1$ ، از عبارت (۲) نتیجه می‌شود که وارون هر عدد مختلط ناچفر  $z = re^{i\theta}$  برابر است با

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{r} e^{-i\theta}. \quad (3)$$

البته عبارات (۱)، (۲) و (۳) با بهکار بردن قواعد جبری معمولی برای اعداد حقیقی و  $e^x$  به آسانی به خاطر سپرده می‌شوند.

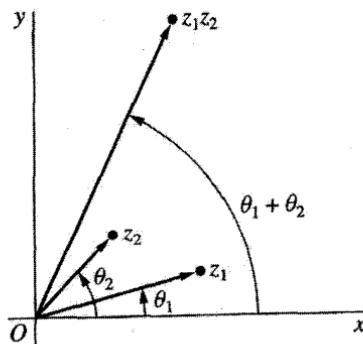
از عبارت (۱) اتحاد مهمی در مورد آوندها نتیجه می‌شود:

$$\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2. \quad (4)$$

این اتحاد را باید چنین تعبیر کرد که اگر مقادیر دو تا از این سه آوند (چندمقداری) مشخص باشد، آنگاه مقداری از سومی موجود است که برای آن رابطه بالا برقرار است.

تحقیق درستی حکم (۴) را با این فرض شروع می‌کنیم که  $\theta_1$  و  $\theta_2$ ، به ترتیب، نمایش مقادیری از  $z_1$  و  $z_2$  باشند. در این صورت فرمول (۱) بیان می‌کند که  $\theta_1 + \theta_2$  مقداری از  $(z_1 z_2)$  است (شکل ۹ را بینید). اگر از طرف دیگر مقادیر  $\arg z_1$  و  $\arg z_2$  مشخص شده باشند، آن مقادیر با انتخابهای خاصی از  $n_1$  و  $n_2$  در عبارتهای زیر متناظرند

$$\arg(z_1 z_2) = (\theta_1 + \theta_2) + 2n\pi \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$



شکل ۹

$$\arg z_1 = \theta_1 + 2n_1\pi \quad (n_1 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

چون

$$(\theta_1 + \theta_2) + 2n\pi = (\theta_1 + 2n_1\pi) + [\theta_2 + 2(n - n_1)\pi],$$

در صورتی که مقدار

$$\arg z_2 = \theta_2 + 2(n - n_1)\pi$$

انتخاب شود، رابطه (۴) بهوضوح برقرار است. تحقیق درستی آن وقتی مقادیر  $\arg(z_1z_2)$  و  $\arg z_2$  مشخص باشند، به قرینه بهدست می‌آید.

در صورتی که در حکم (۴) همه جا Arg را بهجای arg قرار دهیم، رابطه حاصل بعضی موقع برقرار می‌ماند (تمرین ۷ را ببینید). اما همان طور که مثال زیر نشان می‌دهد همیشه وضع بدین منوال نیست.

مثال ۱. در صورتی که  $z_2 = -1$  و  $z_1 = i$

$$\text{Arg } z_1 + \text{Arg } z_2 = \pi + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} \quad \text{اما} \quad \text{Arg}(z_1z_2) = \text{Arg}(-i) = -\frac{\pi}{2}$$

ولی اگر این مقادیر به کار برده شده  $\arg z_1$  و  $\arg z_2$  را انتخاب کنیم و مقدار

$$\text{Arg}(z_1z_2) + 2\pi = -\frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{3\pi}{2}$$

را برای  $\arg(z_1z_2)$  انتخاب کنیم، در می‌یابیم که رابطه (۴) برقرار است.

از حکم (۴) نتیجه می‌شود که

$$\arg \left( \frac{z_1}{z_2} \right) = \arg (z_1 z_2^{-1}) = \arg z_1 + \arg (z_2^{-1}).$$

و با استفاده از عبارت (۳) می‌توان ثابت کرد که

$$\arg (z_2^{-1}) = -\arg z_2. \quad (5)$$

بنابراین

$$\arg \left( \frac{z_1}{z_2} \right) = \arg z_1 - \arg z_2. \quad (6)$$

البته حکم (۵) را باید این طور تعبیر کرد که مجموعه همه مقادیر سمت چپ همان مجموعه همه مقادیر سمت راست است. پس حکم (۶) را باید به همان روش حکم (۴) تعبیر کرد.  
مثال ۲. برای یافتن آوند اصلی  $z$  وقتی

$$z = \frac{-2}{1+i\sqrt{3}},$$

ملاحظه می‌کنیم که

$$\arg z = \arg (-2) - \arg (1+i\sqrt{3}).$$

چون

$$\operatorname{Arg}(-2) = \pi \quad \text{و} \quad \operatorname{Arg}(1+i\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3},$$

یکی از مقادیر  $z$  برابر است با  $\pi/3$ ؛ و به دلیل اینکه  $2\pi/3$  بین  $-\pi$  و  $\pi$  است، در می‌یابیم  
 $\operatorname{Arg} z = 2\pi/3$ .

نتیجه مهم دیگری که می‌توان به طور صوری با استفاده از قواعد اعداد حقیقی برای به دست آورد عبارت است از

$$z^n = r^n e^{in\theta} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (7)$$

که درستی آن برای مقادیر مثبت  $n$  را می‌توان با استقرای ریاضی تحقیق کرد. به عبارت دقیتر، ابتدا توجه می‌کنیم که وقتی  $1 = n$  رابطه بالا به  $z = re^{i\theta}$  تبدیل می‌شود. سپس فرض می‌کنیم

که برای  $n = m$  برقرار باشد، که در آن  $m$  عدد صحیح مثبتی است. در این صورت با استناد به عبارت (۱) برای صورت نمایی حاصلضرب دو عدد مختلط ناصرف، این فرمول برای  $n = m + 1$  برقرار است:

$$z^{m+1} = zz^m = re^{i\theta} r^m e^{im\theta} = r^{m+1} e^{i(m+1)\theta}.$$

بدین ترتیب درستی عبارت (۷) وقتی  $n$  عدد صحیح مثبتی باشد تحقیق می‌شود. با این قرارداد که  $1 = z^0$ ، این فرمول برای  $n = -n = 1, -2, \dots$  نیز برقرار است. از طرف دیگر اگر  $z^n$  را برحسب وارون ضربی  $z$  با ضابطه زیر تعریف می‌کنیم

$$.m = -n = 1, 2, \dots \quad \text{که در آن} \quad z^n = (z^{-1})^m$$

سپس با توجه به برقراری عبارت (۷) برای توانهای مثبت، از صورت نمایی (۳) برای  $z^{-1}$  نتیجه می‌شود که

$$z^n = \left[ \frac{1}{r} e^{i(-\theta)} \right]^m = \left( \frac{1}{r} \right)^m e^{im(-\theta)} = \left( \frac{1}{r} \right)^{-n} e^{i(-n)(-\theta)} = r^n e^{in\theta} \quad (n = -1, -2, \dots)$$

بدین ترتیب عبارت (۷) برای همه توانهای صحیح ثابت می‌شود.  
مالحظه کنید که وقتی  $r = 1$  فرمول (۷) به صورت زیر در می‌آید

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (8)$$

که اگر آن را به صورت

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (9)$$

بنویسیم، به فرمول د موآور<sup>۱</sup> معروف است.

فرمول (۷) در پیدا کردن توانهای اعداد مختلط مفید است، حتی وقتی که اعداد به صورت  $(x + yi)$  باشند و نتیجه را به همان صورت خواسته باشند.

مثال ۳. برای نوشتن  $(\sqrt{3} + i)^7$  به صورت  $(x + yi)$  فقط باید بنویسیم

$$\begin{aligned} (\sqrt{3} + i)^7 &= (2e^{i\pi/6})^7 = 2^7 e^{i7\pi/6} = (2^6 e^{i\pi}) (2 e^{i\pi/6}) = -64 (\sqrt{3} + i). \\ 1. de Moivre \end{aligned}$$

## تمرینها

۱. آوند اصلی  $z$  را پیدا کنید هرگاه

$$\cdot z = (\sqrt{3} - i)^6 \quad \text{(الف)} \quad z = \frac{i}{-2 - 2i} \quad \text{(الف)}$$

. جواب: (الف)  $\pi/4 - 3\pi/4$ ; (ب)  $\pi$ .

۲. نشان دهید که (الف)  $|e^{i\theta}| = 1$ ; (ب)  $e^{-i\theta} = e^{-i\theta}$

۳. با استفاده از استقرای ریاضی نشان دهید که

$$e^{i\theta_1} e^{i\theta_2} \dots e^{i\theta_n} = e^{i(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n)} \quad (n = 2, 3, \dots).$$

۴. با استفاده از این امر که قدر مطلق  $|e^{i\theta}| = 1$  فاصله بین نقاط  $e^{i\theta}$  و ۱ است (بخش ۴ را ببینید)، برهانی هندسی برای یافتن مقداری از  $\theta$  در بازه  $2\pi > \theta \leq 0$  که در معادله  $|e^{i\theta} - 1| = 2$  صدق می‌کند ارائه دهید.

۵. با استفاده از فرمول د موآور (بخش ۷) اتحادهای مثلثاتی زیر را نتیجه بگیرید:

$$\sin 3\theta = 3 \cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta \quad \text{(الف)}$$

۶. با نوشتن هر یک از عوامل سمت چپ به صورت تمامی و انجام اعمال لازم وبالآخره با بازگشت به مختصات قائم نشان دهید که

$$i(1 - i\sqrt{3})(\sqrt{3} + i) = 2(1 + i\sqrt{3}) \quad \text{(الف)}$$

$$5i/(2 + i) = 1 + 2i \quad \text{(ب)}$$

$$(-1 + i)^4 = -8(1 + i) \quad \text{(ج)}$$

$$(1 + i\sqrt{3})^{-1} = 2^{-1/2}(-1 + i\sqrt{3}) \quad \text{(د)}$$

۷. نشان دهید اگر  $0 < \operatorname{Re} z_1 < \operatorname{Re} z_2$ ، آنگاه

$$\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2,$$

که در آن  $\operatorname{Arg}(z_1 z_2)$  نمایش مقدار اصلی  $\arg(z_1 z_2)$  است و غیره.

۸. فرض کنید  $z$  عدد مختلط ناصرف و  $n$  عدد صحیح منفی باشد ( $n = -1, -2, \dots$ ). همچنین قرار دهید  $z = re^{i\theta}$  و  $m = -n = 1, 2, \dots$ . با استفاده از عبارات

$$z^{-1} = (1/r)e^{i(-\theta)} \quad \text{و} \quad z^m = r^m e^{im\theta}$$

تحقیق کنید که  $(z^{-1})^m = (z^m)^{-1} = (z^{-1})^m$  و لذا تعریف  $z^n = (z^{-1})^m$  در بخش ۷ را می‌توان به صورت  $(z^m)^{-1} = z^n$  نیز نوشت.

۹. ثابت کنید دو عدد مختلط ناصرف  $z_1$  و  $z_2$  دارای یک قدر مطلق‌اند اگر و فقط اگر اعداد مختلطی مانند  $c_1$  و  $c_2$  باشند که  $z_2 = c_1 \bar{c}_2$  و  $z_1 = c_1 c_2$ . راهنمایی: توجه کنید که

$$\exp\left(i\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) \exp\left(i\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right) = \exp(i\theta_1)$$

و [تمرین ۲ (ب)] را ببینید.

$$\exp\left(i\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) \overline{\exp\left(i\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right)} = \exp(i\theta_2).$$

۱۰. اتحاد زیر را ثابت کنید

$$1 + z + z^2 + \cdots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} \quad (z \neq 1)$$

و سپس با استفاده از آن، اتحاد مثلثاتی لاگرانژ را نتیجه بگیرید:

$$1 + \cos \theta + \cos 2\theta + \cdots + \cos n\theta = \frac{1}{2} + \frac{\sin[(2n+1)\theta/2]}{2 \sin(\theta/2)} \quad (0^\circ < \theta < 2\pi).$$

راهنمایی: برای اتحاد اول قرار دهید  $S = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n$  و تقاضل  $S - zS$  را در نظر بگیرید. برای به دست آوردن اتحاد دوم، در اتحاد اول قرار دهید  $z = e^{i\theta}$ .

۱۱. با استفاده از فرمول دوچمله‌یی (بخش ۳) و فرمول د موآور (بخش ۷) بنویسید

$$\cos n\theta + i \sin n\theta = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos^{n-k} \theta (i \sin \theta)^k \quad (n = 1, 2, \dots).$$

سپس عدد صحیح  $m$  را با ضابطه‌های زیر تعریف کنید

$$m = \begin{cases} n/2 & \text{اگر } n \text{ زوج باشد} \\ (n-1)/2 & \text{اگر } n \text{ فرد باشد} \end{cases}$$

و با استفاده از مجموع بالا فرمول زیر را به دست آورید [با تمرین ۵ (الف) مقایسه کنید]

$$\cos n\theta = \sum_{k=0}^m \binom{n}{2k} (-1)^k \cos^{n-2k} \theta \sin^{2k} \theta \quad (n = 1, 2, \dots).$$

(ب) قرار دهید  $x = \cos \theta$  و فرض کنید  $\pi \leq \theta \leq 0$  در این حالت  $-1 \leq x \leq 1$ . خاطر نشان سازید که چگونه از نتیجه آخر قسمت (الف) نتیجه می‌شود که هر یک از توابع

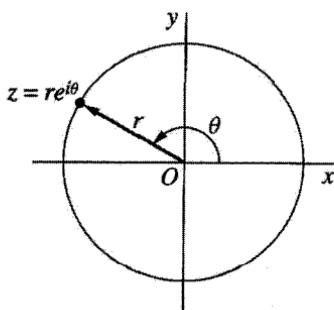
$$T_n(x) = \cos(n \cos^{-1} x) \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

یک چندجمله‌یی از درجه  $n$  بر حسب متغیر  $x$  است.\*

## ۸. ریشه‌های اعداد مختلط

نقطه  $z = re^{i\theta}$  را که بر دایره به مرکز مبدأ و شعاع  $r$  واقع است (شکل ۱۰) در نظر می‌گیریم. اگر  $\theta$  افزایش یابد،  $z$  در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت بر دایره حرکت می‌کند. به خصوص وقتی  $\theta$  به اندازه  $2\pi$  افزایش یابد،  $z$  به نقطه اولیه می‌رسد و اگر به اندازه  $2\pi$  کاهش یابد، همین وضع پیش می‌آید. بنابراین از شکل ۱۰ آشکار است که دو عدد مختلط ناصف

$$z_2 = r_2 e^{i\theta_2} \quad \text{و} \quad z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$$



شکل ۱۰

\* این چندجمله‌ییها را چندجمله‌ییهای چبیشف می‌نامند و در نظریه تقریب مهم‌اند.

برابرند اگر و فقط اگر

$$\theta_1 = \theta_2 + 2k\pi, \quad r_1 = r_2$$

که در آن  $k$  عددی صحیح است ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ).

در نظر داشتن این مطلب و عبارت  $r^n e^{in\theta} = z^n$  در بخش ۷ برای توانهای صحیح اعداد مختلط  $z = re^{i\theta}$ ,  $r = r_0 e^{i\theta_0}$  در پیدا کردن ریشه‌های  $n$ ام هر عدد مختلط ناصرف  $z_0 = r_0 e^{i\theta_0}$  مفید است، که در آن  $n$  دارای یکی از مقادیر  $2, 3, \dots$  است. روش کار را با ملاحظه این مطلب شروع می‌کنیم که ریشه  $n$ ام  $z$  عدد ناصرفی است مانند  $z = re^{i\theta}$  به طوری که  $z^n = r_0 e^{in\theta}$  یا

$$r^n e^{in\theta} = r_0 e^{i\theta_0}.$$

حال، بنابر حکمی که در بالا به صورت ایرانیک آمده است،

$$n\theta = \theta_0 + 2k\pi \quad \text{و} \quad r^n = r_0.$$

که در آن  $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ . بنابراین  $r = \sqrt[n]{r_0}$ , که در آن رادیکال معرف ریشه  $n$ ام مثبت یکتای عدد حقیقی و مثبت  $r_0$  است، و

$$\theta = \frac{\theta_0 + 2k\pi}{n} = \frac{\theta_0}{n} + \frac{2k\pi}{n} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

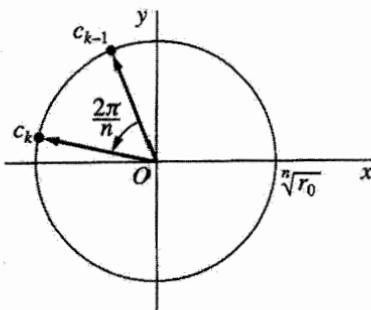
در نتیجه، اعداد مختلط

$$z = \sqrt[n]{r_0} \exp \left[ i \left( \frac{\theta_0}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right) \right] \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

ریشه‌های  $n$ ام  $z$  هستند. از این صورت نمایی ریشه‌ها بی‌درنگ می‌توان دید که همه آنها بر دایره  $|z| = \sqrt[n]{r_0}$  حول مبدأ و به فاصله‌های مساوی در هر  $2\pi/n$  رادیان با شروع از آوند  $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$  قرار دارند. پس بدیهی است که همه ریشه‌های متمایز وقتی  $1/c_k$  به دست می‌آیند و از مقادیر دیگر  $k$  هیچ ریشه دیگری حاصل نمی‌شود. فرض می‌کنیم  $c_k$ ها  $(k = 0, 1, 2, \dots, n-1)$  نمایش این ریشه‌های متمایز باشند و می‌نویسیم

$$c_k = \sqrt[n]{r_0} \exp \left[ i \left( \frac{\theta_0}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right) \right] \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1). \quad (1)$$

(شکل ۱۱ را ببینید).



شکل ۱۱

عدد  $\sqrt[n]{r_0}$  طول هر یک از بردارهای شعاعی معرف  $n$  ریشه است. اولین ریشه یعنی  $c_0$  دارای آوند  $n/\theta_0$  است؛ وقتی  $n = 2$  دو ریشه در دو انتهای قطری از دایره  $|z| = \sqrt[n]{r_0}$  واقع‌اند، که ریشه دوم  $c_0 = -c_1$  است. وقتی  $n \geq 3$  ریشه‌ها در رئوس یک  $n$  ضلعی منتظم محاط در آن دایره واقع‌اند.

فرض می‌کنیم  $z^{\frac{1}{n}}$  نمایش مجموعه ریشه‌های  $n\theta_0$  باشد. اگر به خصوص  $z$  عدد حقیقی مثبتی مانند  $r_0$  باشد، نماد  $r^{\frac{1}{n}}$  نمایش مجموعه همه ریشه‌های  $n\theta_0$  در عبارت (۱) برای ریشه مثبت یکتا نگهداری می‌شود. در صورتی که مقدار  $\theta_0$  به کار برد شده در عبارت (۱) مقدار اصلی  $\arg z$  باشد ( $\pi \leq \arg z < \theta_0$ )، عدد  $c_0$  را ریشه اصلی می‌نامند. بنابراین وقتی  $z$  عدد حقیقی مثبتی مانند  $r_0$  باشد، ریشه اصلی آن  $\sqrt[n]{r_0}$  است. بالاخره یک روش مناسب برای به خاطر سپردن عبارت (۱) این است که  $z$  را به کلیترین صورت نمایی آن (با مثال ۲ در بخش ۶ مقایسه کنید)

$$z_0 = r_0 e^{i(\theta_0 + 2k\pi)} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (2)$$

بنویسیم و با در نظر داشتن اینکه دقیقاً  $n$  ریشه متمایز موجود است، قوانین نماهای کسری برای اعداد حقیقی را به طور صوری به کار ببریم:

$$\begin{aligned} z_0^{\frac{1}{n}} &= \left[ r_0 e^{i(\theta_0 + 2k\pi)} \right]^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{r_0} \exp \left[ \frac{i(\theta_0 + 2k\pi)}{n} \right] \\ &= \sqrt[n]{r_0} \exp \left[ i \left( \frac{\theta_0}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right) \right] \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1). \end{aligned}$$

مثالهای بخش بعد در نشان دادن این روش برای یافتن ریشه‌های اعداد مختلط آورده شده‌اند.

## ۹. چند مثال

در هر یک از مثالهای زیر، با عبارت (۲)، بخش ۸، شروع و با روشی که در انتهای آن بخش ذکر شده عمل می‌کنیم.

مثال ۱. برای تعیین ریشه‌های  $n$ ام واحد، می‌نویسیم

$$\omega = \exp[i(\theta + 2k\pi)] \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

و در می‌باییم که

$$\omega^n = \sqrt[n]{1} \exp\left[i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right] = \exp\left(i\frac{2k\pi}{n}\right) \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1). \quad (1)$$

وقتی  $n = 2$ ، البته این ریشه‌ها  $\pm 1$  هستند. وقتی  $n \geq 3$ ، ریشه‌ها بر روی چندضلعی منتظم محاط در دایره واحد  $1 = |z|$ ، با یک رأس متناظر با ریشه اصلی  $\omega = e^{i\theta}$  قرار دارند.

اگر بنویسیم

$$\omega_n = \exp\left(i\frac{2\pi}{n}\right), \quad (2)$$

از ویژگی (۸) بخش ۷ درباره  $e^{i\theta}$  نتیجه می‌شود که

$$\omega_n^k = \exp\left(i\frac{2k\pi}{n}\right) \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1).$$

بنابراین ریشه‌های متمایز  $n$ ام واحد که پیدا کردیم عبارت‌اند از

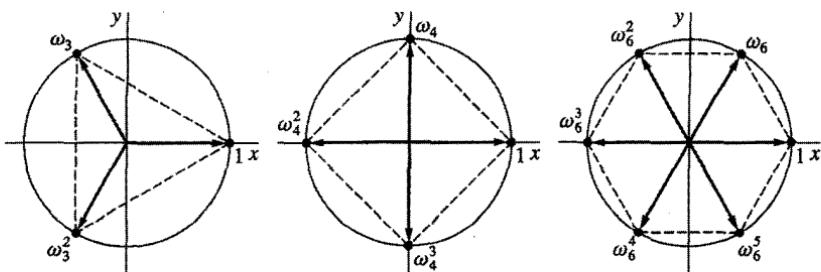
$$1, \omega_n, \omega_n^2, \dots, \omega_n^{n-1}.$$

شکل ۱۲ را ببینید، که در آن حالتهای  $n = 3, 4, 6$  نشان داده شده‌اند. توجه کنید که  $\omega_6^n = 1$  بالاخره توجه به این نکته بجاست که اگر یک ریشه  $n$ ام خاصی از عدد مختلط ناصفر  $z$  باشد، مجموعه همه ریشه‌های  $n$ ام را می‌توان چنین نوشت

$$c, c\omega_n, c\omega_n^2, \dots, c\omega_n^{n-1}.$$

زیرا ضرب هر عدد مختلط ناصفر در  $\omega_n$ ، آوند آن عدد را به اندازه  $2\pi/n$  افزایش می‌دهد، درحالی‌که قدر مطلق آن را تغییر نمی‌دهد.

چند مثال ۳۳



شکل ۱۲

مثال ۲. برای یافتن همه مقادیر  $\lambda^{1/3}(-\lambda i)$ ، یا سه ریشه سوم  $-\lambda i$ ، فقط کافی است بنویسیم

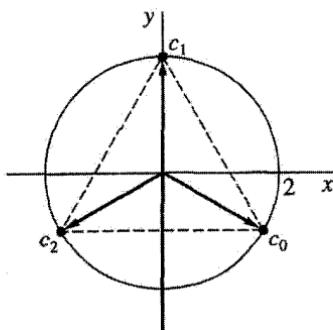
$$-\lambda i = \lambda \exp \left[ i \left( -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \right) \right] \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

تا مشاهده کنیم که ریشه‌های مطلوب عبارت‌اند از

$$c_k = \lambda \exp \left[ i \left( -\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} \right) \right] \quad (k = 0, 1, 2). \quad (3)$$

این ریشه‌ها در رئوس مثلث متساوی‌الاضلاعی واقع‌اند که در دایره  $|z| = 2$  محاط است و بر پیرامون آن دایره به فاصله‌های مساوی در هر  $2\pi/3$  رادیان، با شروع از ریشه اصلی، واقع‌اند  
(شکل ۱۳)

$$c_0 = \lambda \exp \left[ i \left( -\frac{\pi}{6} \right) \right] = \lambda \left( \cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6} \right) = \sqrt{3} - i.$$



شکل ۱۳

پس بدون هیچ محاسبه دیگر، بدینه است که  $c_1 = 2i$  و چون  $c_2$  قرینه  $c_1$  نسبت به محور موهومی است، می‌دانیم که  $i \cdot c_2 = -\sqrt{3} - i$ . البته این ریشه‌ها را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\omega_3 = \exp\left(i \frac{2\pi}{3}\right) \quad \text{که در آنها } c_0, \omega_3, c_0, \omega_3, c_0$$

(توضیحات آخر مثال ۱ را ببینید).

مثال ۳. دو مقدار  $c_k$  برای  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  که ریشه‌های دوم  $\sqrt{3} + i$  هستند با نوشت

$$\sqrt{3} + i = 2 \exp\left[i\left(\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right)\right] \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

بینداز شوند و (شکل ۱۴ را ببینید)

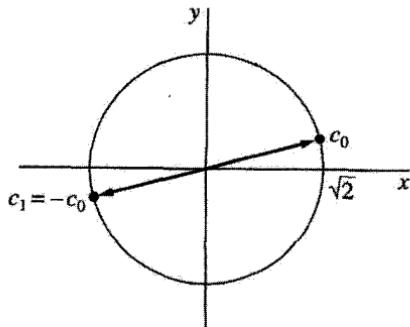
$$c_k = \sqrt{2} \exp\left[i\left(\frac{\pi}{12} + k\pi\right)\right] \quad (k = 0, 1). \quad (4)$$

از فرمول اویلر (بخش ۶) نتیجه می‌شود که

$$c_0 = \sqrt{2} \exp\left(i \frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12}\right),$$

و با استفاده از اتحادهای مثلثاتی

$$\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 + \cos \alpha}{2}, \quad \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 - \cos \alpha}{2} \quad (5)$$



شکل ۱۴

$$\cos^2 \frac{\pi}{12} = \frac{1}{2} \left( 1 + \cos \frac{\pi}{6} \right) = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{2 + \sqrt{3}}{4},$$

$$\sin^2 \frac{\pi}{12} = \frac{1}{2} \left( 1 - \cos \frac{\pi}{6} \right) = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}.$$

در نتیجه

$$c_0 = \sqrt{2} \left( \sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{4}} + i \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{4}} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \sqrt{2 + \sqrt{3}} + i \sqrt{2 - \sqrt{3}} \right).$$

چون  $c_1 = -c_0$ ، پس ریشه‌های دوم  $i\sqrt{3} + 2$  عبارت‌اند از

$$\pm \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \sqrt{2 + \sqrt{3}} + i \sqrt{2 - \sqrt{3}} \right).$$

## تمرینها

۱. ریشه‌های دوم (الف) ۲: (ب)  $i\sqrt{3} - 1$  را پیدا کنید و آنها را در مختصات قائم بیان کنید.

$$\pm \frac{\sqrt{3} - i}{\sqrt{2}}.$$

جواب: (الف)  $(i + 1)$ ; (ب)  $(i - 1)$

۲. در هر حالت، همه ریشه‌ها را در مختصات قائم پیدا کنید و آنها را به طور هندسی با رأسهای یک مربع نمایش دهید و مشخص کنید که کدام یک ریشه اصلی است:

$$(الف) (-8 - 8i\sqrt{3})^{1/4}; (ب) (-8 - 8i\sqrt{3})^{1/4}.$$

$$\text{جواب: (الف) } (\sqrt{3} - i), \pm (1 + i\sqrt{3}), \pm \sqrt{2}(1 + i), \pm \sqrt{2}(1 - i).$$

۳. در هر حالت، همه ریشه‌ها را در مختصات قائم پیدا کنید و آنها را به طور هندسی با رأسهای یک چندضلعی منتظم نمایش دهید و مشخص کنید که کدام یک ریشه اصلی است:

$$(الف) (-1)^{1/6}; (ب) (-1)^{1/6}.$$

$$\pm \frac{1 - i\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1 + i\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, \pm \sqrt{2}.$$

جواب: (ب)

۴. بنابر مثال ۱ بخش ۹، سه ریشه سوم عدد مختلط ناصلر  $z$  را می‌توان به صورت  $c_0 \omega_3 + c_1 \omega_3^2$  نوشت که در آنها  $c_0$  ریشه سوم اصلی  $z$  است و

$$\omega_3 = \exp\left(i \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}.$$

نشان دهید اگر  $a = \sqrt{2}(1+i)$ ، آنگاه  $c_0 = -4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i$  و دو ریشه سوم دیگر، در مختصات قائم، عبارت‌اند از اعداد

$$c_0 \omega_3 = \frac{-(\sqrt{3}+1) + (\sqrt{3}-1)i}{\sqrt{2}}, \quad c_0 \omega_3^2 = \frac{(\sqrt{3}-1) - (\sqrt{3}+1)i}{\sqrt{2}}.$$

۵. (الف) فرض کنید  $a$  عدد حقیقی ثابتی باشد. نشان دهید که دو ریشه دوم  $a + bi$  عبارت‌اند از

$$\pm \sqrt{A} \exp\left(i \frac{\alpha}{2}\right),$$

$$\text{که در آن } \alpha = \operatorname{Arg}(a+i) \text{ و } A = \sqrt{a^2 + 1}.$$

(ب) به کمک اتحادهای مثلثاتی رابطه (۵) از مثال ۳ بخش ۹ نشان دهید که ریشه‌های دوم حاصل در قسمت (الف) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\pm \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \sqrt{A+a} + i\sqrt{A-a} \right).$$

[توجه کنید که این نتیجه نهایی مثال ۳ بخش ۹ است وقتی  $a = \sqrt{3}$ ]

۶. چهار ریشه معادله  $z^4 + 4z^2 + 4 = 0$  را بیابید و با استفاده از آنها  $z^4 + 4z^2 + 4$  را به عوامل درجه دوم با ضرایب حقیقی تجزیه کنید.

.  $(z^2 + 2z + 2)(z^2 - 2z + 2)$  جواب:

۷. نشان دهید اگر  $c$  هر یک از ریشه‌های  $m$  واحد به غیر از خود یک باشد، آنگاه

$$1 + c + c^2 + \cdots + c^{n-1} = 0.$$

راهنمایی: از اولین اتحاد تمرین ۱۰، بخش ۷، استفاده کنید.

۸. (الف) ثابت کنید که معادله درجه دوم

$$az^2 + bz + c = 0 \quad (a \neq 0)$$

وقتی ضرایب  $a, b$  و  $c$  اعداد مختلط‌اند با همان فرمول معادلهٔ درجهٔ دوم معمولی حل می‌شود.  
به عبارت صریح‌تر، با مریع کامل کردن سمت چپ فرمول زیر را به دست آورید

$$z = \frac{-b + (b^2 - 4ac)^{1/2}}{2a},$$

که اگر  $b^2 - 4ac \neq 0$  باید هر دو ریشهٔ دوم را در نظر گرفت.

(ب) با استفاده از نتیجهٔ قسمت (الف) ریشه‌های معادلهٔ  $z^2 + 2z + 1 = 0$  را بایابی‌د.

$$\left(-1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \frac{i}{\sqrt{2}}, \quad \left(-1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{i}{\sqrt{2}} \quad \text{جواب: (ب)}$$

۹. فرض کنید  $z = re^{i\theta}$  عدد مختلط ناصلف و  $n$  عدد صحیح منفی باشد  
 $z^n = -1, -2, \dots$ ). سپس  $z^{1/n}$  را با ضابطهٔ  $(z^{-1})^{1/m} = z^{1/n}$  تعریف کنید، که در آن  
با نشان دادن اینکه  $m$  مقدار  $(z^{1/m})^{-1}$  و  $(z^{-1})^{1/m}$  یکی هستند، تحقیق کنید  
که  $(z^{1/m})^{-1} = z^{1/n}$ . (با تمرین ۸ بخش ۷ مقایسه کنید).

## ۱۰. نواحی در صفحهٔ مختلط

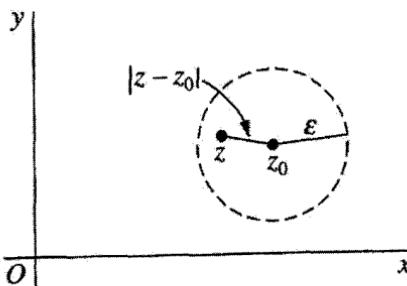
در این بخش با مجموعه‌هایی از اعداد مختلط، یا نقاط صفحهٔ  $\mathbb{C}$ ، و نزدیکی آنها به یکدیگر سروکار  
داریم. ابزار اصلی ما مفهوم  $\varepsilon$ -همسایگی

$$|z - z_0| < \varepsilon \quad (1)$$

از نقطهٔ مفروض  $z_0$  است که متشکل از همهٔ نقاط  $z$  واقع در داخل اما نه روی دایرهٔ به مرکز  $z_0$   
و با شعاع مثبت و مشخص  $\varepsilon$  می‌باشد (شکل ۱۵). اگر در بحث ما مقدار  $\varepsilon$  معلوم یا بی‌اهمیت  
باشد، اغلب به مجموعه (۱) همسایگی گفته می‌شود. گاهی مناسب است که از همسایگی محدود

$$|z - z_0| < \varepsilon \quad (2)$$

صحبت کنیم که متشکل از همهٔ نقاط یک  $\varepsilon$ -همسایگی  $\varepsilon$  بجز خود نقطهٔ  $z_0$  است.  
نقطهٔ  $z_0$  را نقطهٔ داخلی مجموعهٔ  $S$  می‌نامیم هرگاه همسایگی ای از  $\varepsilon$  موجود باشد که  
 فقط شامل نقاطی از  $S$  باشد؛  $z_0$  را نقطهٔ خارجی  $S$  می‌نامیم هرگاه همسایگی ای از آن موجود  
باشد که هیچ نقطهٔ  $S$  را در بر نداشته باشد. اگر  $z_0$  هیچ‌کدام از اینها نباشد، یک نقطهٔ مرزی  $S$   
است. بنابراین، نقطهٔ مرزی نقطه‌ای است که هر همسایگی اش شامل نقاطی در  $S$  و نیز نقاطی در



شکل ۱۵

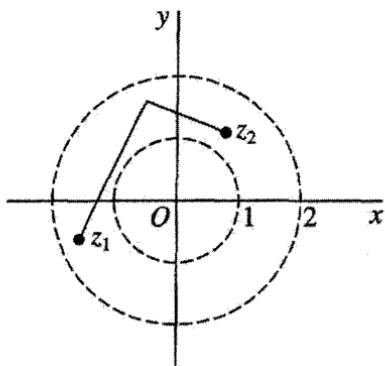
خارج  $S$  باشد. مجموعه همه نقاط مرزی را مرز  $S$  می‌نامند. مثلاً دایره  $|z| = |z_0|$  مرز هر یک از مجموعه‌های زیر است

$$|z| < 1 \quad \text{و} \quad |z| \leq 1 \quad (3)$$

یک مجموعه باز است اگر شامل هیچیک از نقاط مرزی خود نباشد. این را به عنوان تمرین گذاشته‌ایم تا نشان دهید که یک مجموعه باز است اگر و فقط اگر هر یک از نقاطش نقطه داخلی باشد. یک مجموعه بسته است اگر شامل همه نقاط مرزی خود باشد، و بستان مجموعه  $S$  مجموعه بسته‌ای است متتشکل از همه نقاط  $S$  و نقاط مرزی  $S$ . توجه کنید که از مجموعه‌های (۳) اولی باز و دومی بستان هر دوی آن مجموعه هاست.

البته بعضی مجموعه‌ها نه بازنده و نه بسته. برای اینکه مجموعه‌ای باز نباشد باید یک نقطه مرزی موجود باشد که متعلق به مجموعه است؛ و اگر یک مجموعه بسته نباشد نقطه‌ای مرزی هست که متعلق به مجموعه نیست. ملاحظه می‌کنید که قرص محذوف  $1 \leq |z| < 0$  فرسخ سوراخ‌دار نه باز است و نه بسته. از طرف دیگر چون مجموعه همه اعداد مختلط هیچ نقطه مرزی ندارد هم باز است و هم بسته. یک مجموعه باز  $S$  همیند است اگر هر زوج از نقاط آن را بتوان با یک خط شکسته، متتشکل از تعدادی متناهی پاره خط راست، که کاملاً در  $S$  واقع است به هم وصل کرد. مجموعه باز  $|z| < |z_0|$  همیند است. البته طبق  $2 < |z| < |z_1|$  باز و همچنین همیند است (شکل ۱۶). یک مجموعه باز را که همیند باشد، حوزه می‌نامند. توجه کنید که هر همسایگی یک حوزه است. به یک حوزه همراه با بعضی، هیچیک، یا همه نقاط مرزی آن، ناحیه اطلاق می‌شود.

مجموعه  $S$  کراندار است اگر دایره‌ای مانند  $R = |z|$  موجود باشد به قسمی که هر نقطه  $S$  درون این دایره واقع باشد؛ در غیر این صورت  $S$  بیکران است. هر دو مجموعه (۳) نواحی کراندارند. و نیم صفحه  $\operatorname{Re} z \geq 0$  بیکران است.



شکل ۱۶

بالاخره نقطه  $z$  را نقطه ابیاشتگی مجموعه  $S$  نامند اگر هر همسایگی محدود  $\mathbb{C}$  شامل حداقل یک نقطه  $S$  باشد. در نتیجه اگر مجموعه  $S$  بسته باشد، شامل هر یک از نقاط ابیاشتگی خود است. زیرا اگر نقطه ابیاشتگی  $z$  در  $S$  نباشد نقطه مرزی  $S$  خواهد بود؛ اما این مطلب با اینکه یک مجموعه بسته شامل همه نقاط مرزی خود است تناقض دارد. این را به عنوان تمرین گذاشتایم تا نشان دهید که عکس این مطلب نیز درست است. بنابراین یک مجموعه بسته است اگر و فقط اگر شامل هر یک از نقاط ابیاشتگی اش باشد.

بدیهی است که نقطه  $z$  نقطه ابیاشتگی مجموعه  $S$  نیست هرگاه همسایگی محدودی از  $z$  موجود باشد که شامل نقاطی از  $S$  نباشد. توجه کنید که مبدأ تنها نقطه ابیاشتگی مجموعه  $(n = 1, 2, \dots) z_n = i/n$  است.

### تمرینها

۱. مجموعه های زیر را با شکل نمایش دهید و تعیین کنید کدام یک از آنها حوزه اند:

$$|(z+3)(z+2)| > 4 \quad (ب) \quad |z| \leq 1 \quad (الف)$$

$$\operatorname{Im} z = 1 \quad (د) \quad \operatorname{Im} z > 1 \quad (ج)$$

$$|z-4| \geq |z| \quad (و) \quad 0^\circ \leq \arg z \leq \pi/4 \quad (z \neq 0) \quad (ه)$$

جواب: (ب) و (ج) حوزه اند.

۲. کدام یک از مجموعه های تمرین ۱ نه بازند و نه بسته؟

جواب: (ه).

۳. کدامیک از مجموعه‌های تمرین ۱ کراندارند؟

جواب: (الف).

۴. در هر یک از حالت‌های زیر، بستار مجموعه را با شکل نمایش دهید:

$$\text{(الف)} : |\operatorname{Re} z| < |z| \quad (z \neq 0) \quad \text{(ب)} : -\pi < \arg z < \pi$$

$$\text{(ج)} : \operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) \leq \frac{1}{2} \quad \text{(د)} : \operatorname{Re}(z^2) > 0$$

۵. فرض کنید  $S$  مجموعه باز مشکل از همه نقاط  $z$ ی باشد که  $1 < |z| < 2$  یا  $|z - 1| < 1$ . نشان دهید چرا  $S$  همبند نیست.

۶. نشان دهید که مجموعه  $S$  باز است اگر و فقط اگر هر نقطه  $S$  یک نقطه داخلی باشد.

۷. نقاط انباشتگی هر یک از مجموعه‌های زیر را معین کنید.

$$\text{(الف)} : z_n = i^n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

$$\text{(ب)} : z_n = i^n/n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

$$\text{(ج)} : {}^\circ \leq \arg z < \pi/2 \quad (z \neq 0)$$

$$\text{(د)} : z_n = (-1)^n(1+i)^{\frac{(n-1)}{n}} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

جواب: (الف) ندارد؛ (ب)  $\circ$ ؛ (د)  $(1+i)$ ؛ (آ)  $\pm$ .

۸. ثابت کنید که اگر مجموعه‌ای شامل هر یک از نقاط انباشتگی خود باشد باید مجموعه بسته‌ای باشد.

۹. نشان دهید که هر نقطه  $z$  از یک حوزه، یک نقطه انباشتگی آن حوزه است.

۱۰. نشان دهید که یک مجموعه متناهی از نقاط  $z_1, z_2, \dots, z_n$  نمی‌تواند هیچ نقطه انباشتگی داشته باشد.

# ۲

## توابع تحلیلی

حال توابع یک متغیره مختلط را در نظر می‌گیریم و یک نظریه مشتقگیری برای آنها ارائه می‌دهیم. در این فصل هدف اصلی ما معرفی توابع تحلیلی است که نقشی اساسی در آنالیز مختلط دارند.

### ۱۱. توابع یک متغیره مختلط

فرض کنیم  $S$  مجموعه‌ای از اعداد مختلط باشد. تابع  $f$  که بر  $S$  تعریف شده عبارت از قاعده‌ای است که به هر  $z$  در  $S$  عدد مختلطی مانند  $w$  را نسبت می‌دهد. عدد  $w$  را مقدار  $f$  در  $z$  می‌نامند و با  $f(z)$  نمایش می‌دهند؛ یعنی  $f(z) = w$ . مجموعه  $S$ ، حوزه تعریف  $f$  نامیده می‌شود.\*

باید تأکید کرد برای اینکه تابعی خوشنصریف باشد باید هم حوزه تعریف داشته باشد و هم ضابطه. قرار می‌گذاریم که وقتی حوزه تعریف ذکر نشده باشد آن را بزرگترین مجموعه ممکن بگیریم. همچنین استفاده از نمادی که بین تابع و مقادیرش فرق بگذارد هیچ مناسب نیست.

\* گرچه حوزه تعریف اغلب به صورتی که در بخش ۱۰ تعریف شد یک حوزه است ولی لازم نیست که حوزه باشد.

**مثال ۱.** اگر  $f$  روی مجموعه  $\{z \neq 0\}$  با معادله  $w = 1/z$  تعریف شده باشد، از آن به عنوان تابع  $1/z$  یا صرفاً تابع  $z$  نام می‌برند.

فرض کنید که  $w = u + iv$  مقدار تابع  $f$  در  $z = x + iy$  باشد، یعنی

$$u + iv = f(x + iy).$$

هر یک از اعداد حقیقی  $u$  و  $v$  به متغیرهای حقیقی  $x$  و  $y$  بستگی دارد و در نتیجه  $f(z)$  را می‌توان بر حسب یک زوج تابع حقیقی-مقدار از متغیرهای حقیقی  $x$  و  $y$  نوشت:

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y). \quad (1)$$

اگر به جای  $x$  و  $y$  از مختصات قطبی  $r$  و  $\theta$  استفاده شود، آنگاه

$$u + iv = f(re^{i\theta}),$$

که در آن  $iv = re^{i\theta}$  و  $w = u + iv = u + re^{i\theta}z$ . در این حالت می‌توان نوشت

$$f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta). \quad (2)$$

**مثال ۲.** اگر  $z^2$  آنگاه

$$f(x + iy) = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy.$$

بنابراین

$$u(x, y) = x^2 - y^2 \quad \text{و} \quad v(x, y) = 2xy.$$

در صورتی که از مختصات قطبی استفاده شود،

$$f(re^{i\theta}) = (re^{i\theta})^2 = r^2 e^{i2\theta} = r^2 \cos 2\theta + ir^2 \sin 2\theta.$$

در نتیجه

$$u(r, \theta) = r^2 \cos 2\theta \quad \text{و} \quad v(r, \theta) = r^2 \sin 2\theta.$$

اگر در معادله (۱) یا (۲) تابع  $v$  همیشه صفر باشد، مقدار  $f$  همیشه حقیقی است. یعنی  $f$  یک تابع حقیقی-مقدار از یک متغیر مختلط است.

مثال ۳. تابع حقیقی-مقداری که بعداً در این فصل برای نشان دادن برخی مفاهیم مهم از آن استفاده می‌شود تابع زیر است:

$$f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2 + i^0.$$

اگر  $n$ ، صفر یا عدد صحیح مثبتی باشد و اگر  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$  اعداد مختلط ثابتی باشند، که در آن  $a_n \neq 0$ ، تابع

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n$$

یک چندجمله‌یی از درجه  $n$  است. توجه کنید که این مجموع دارای تعدادی متناهی جمله است و حوزه تعریف آن تمام صفحه  $z$  است. خارج قسمتهای چندجمله‌ییها،  $(P(z)/Q(z))$ ، را تابع گویا می‌نامند و در هر نقطه  $z$  که  $Q(z) \neq 0$  تعریف شده‌اند. چندجمله‌ییها و تابع گویا رده‌هایی مقدماتی، ولی مهم، از توابع یک متغیره مختلط را تشکیل می‌دهند.

یک تعیین مفهوم تابع، قاعده‌ای است که به هر نقطه  $z$  از حوزه تعریف بیش از یک مقدار نسبت می‌دهد. در نظریه توابع یک متغیره مختلط درست مثل متغیرهای حقیقی، این تابع چندجمله‌داری وجود دارند. در مطالعه تابع چندجمله‌داری معمولاً به روشی نظاممند در هر نقطه یکی از مقادیر ممکنی را که به آن نسبت داده شده است انتخاب می‌کنند و از روی تابع چندجمله‌داری یک تابع (تک‌مقداری) می‌سازند.

مثال ۴. فرض می‌کنیم  $z$  نمایش عدد مختلط ناصفری باشد. با توجه به بخش ۸ می‌دانیم که  $z^{1/2}$  دارای دو مقدار

$$z^{1/2} = \pm \sqrt{r} \exp\left(i \frac{\Theta}{2}\right),$$

است که در آن  $|z| = r$  و  $\arg(z) = -\pi < \Theta \leq \pi$  مقدار اصلی  $z$  است. اما اگر فقط مقدار مثبت  $\sqrt{r}$  را بگیریم و بنویسیم

$$f(z) = \sqrt{r} \exp\left(i \frac{\Theta}{2}\right) \quad (r > 0, -\pi < \Theta \leq \pi), \quad (3)$$

تابع (تک‌مقداری) (۳) روی مجموعه اعداد ناصفر در صفحه مختلط خوشتعریف است. چون صفر تنها ریشه دوم صفر است، می‌نویسیم  $f(z) = f^0$ . در این صورت تابع  $f$  در تمام صفحه خوشتعریف است.

## تمرینها

۱. برای هر یک از توابع زیر، حوزه تعریفی را که از صورت مسأله درک می‌شود مشخص کنید.

$$\begin{array}{lll} \text{:} f(z) = \operatorname{Arg} \left( \frac{1}{z} \right) & \text{(ب)} & \text{:} f(z) = \frac{1}{z^2 + 1} \\ . f(z) = \frac{1}{1 - |z|^2} & \text{(د)} & \text{:} f(z) = \frac{z}{z + \bar{z}} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{(الف)} \\ \text{(ج)} \end{array}$$

.  $\operatorname{Re} z \neq 0$  و  $z \neq \pm i$  جواب: (الف) (ج)

۲. تابع  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  را به صورت  $f(z) = z^3 + z + 1$  بنویسید.

. جواب:  $(x^3 - 3xy^2 + x + 1) + i(3x^2y - y^3 + y)$

۳. فرض کنید  $f(z) = x^2 - y^2 - 2y + i(2x - 2xy)$ ، که در آن  $z = x + iy$  با استفاده از این واقعیت که (بخش ۵)

$$y = \frac{z - \bar{z}}{2i} \quad \text{و} \quad x = \frac{z + \bar{z}}{2}$$

$f(z)$  را بر حسب  $z$  بیان و نتیجه را خلاصه کنید.

.  $\bar{z}^3 + 2iz$  جواب:

۴. تابع

$$f(z) = z + \frac{1}{z} \quad (z \neq 0)$$

را به شکل  $f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$  بنویسید.

.  $\left( r + \frac{1}{r} \right) \cos \theta + i \left( r - \frac{1}{r} \right) \sin \theta$  جواب:

## ۱۲. نگاشت

ویژگیهای تابع حقیقی-مقدار از یک متغیر حقیقی اغلب به وسیله نمودار تابع نمایانده می‌شود. اما وقتی  $w = f(z)$ ، که در آن  $z$  و  $w$  مختلط‌اند، چنین نمایش نموداری مناسبی از  $f$  در دست نیست زیرا هر یک از اعداد  $z$  و  $w$  نه بر یک خط بلکه در یک صفحه واقع‌اند. با وجود این، می‌توانیم با نشان‌دادن زوج نقاط متناظر  $(x, y)$  و  $(u, v)$  از  $w = f(z)$  اطلاعاتی از تابع را آشکار سازیم. برای این کار عموماً ساده‌تر است که صفحات  $z$  و  $w$  را جداگانه رسم کنیم.

وقتی تابع  $f$  به این صورت در نظر گرفته می‌شود اغلب به آن نگاشت یا تبدیل می‌گویند. تصویر نقطه  $z$ ، از حوزه تعریف  $S$ ، نقطه  $w = f(z)$  است و مجموعه تصویرهای همه نقاط واقع

در مجموعه  $T$ ، که مشمول در  $S$  است، تصویر تمام حوزه تعریف  $S$  برد  $f$  نامیده می‌شود. تصویر وارون نقطه  $w$  مجموعه همه نقاط  $z$  در مجموعه  $S$  است که دارای تصویر  $w$  هستند. تصویر وارون یک نقطه ممکن است شامل یک نقطه یا چند نقطه باشد و یا اصلاً شامل هیچ نقطه‌ای نباشد. البته حالت اخیر وقتی پیش می‌آید که  $w$  در برد  $f$  نباشد.

اصطلاحاتی از قبیل انتقال، دوران و بازتابی برای رساندن مشخصه‌های عمدۀ هندسی برخی نگاشتها به کار می‌روند. در چنین حالاتی بعضی موقع مناسب است که صفحات  $z$  و  $w$  را یکی بگیریم. مثلًاً نگاشت

$$w = z + 1 = (x + 1) + iy,$$

را که در آن  $x + iy = z$ ، می‌توان به عنوان انتقال هر نقطه  $z$  به اندازه یک واحد به راست پنداشت. چون  $e^{i\pi/2} = i$ ، نگاشت

$$w = iz = r \exp \left[ i \left( \theta + \frac{\pi}{2} \right) \right],$$

که در آن  $re^{i\theta} = z$ ، بردار شعاعی هر نقطه ناصرف  $z$  را به اندازه یک زاویه قائم حول مبدأ در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت می‌چرخاند و نگاشت

$$w = \bar{z} = x - iy$$

هر نقطه  $z = x + iy$  را به قربینه آن نسبت به محور حقیقی تبدیل می‌کند. عموماً ترسیم تصاویر منحنیها و نواحی نسبت به تصاویر تک‌تک نقاط اطلاعات بیشتری را نشان می‌دهد. در مثال‌های زیر این موضوع را با تبدیل  $z^2 = w$  نشان می‌دهیم:

با پیداکردن تصاویر بعضی منحنیها در صفحه  $z$  شروع می‌کنیم.

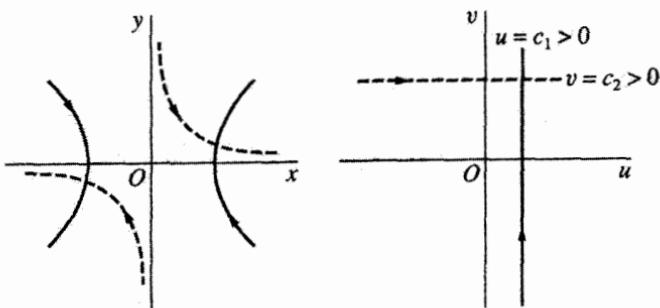
مثال ۱. بنابر مثال ۲ بخش ۱۱ نگاشت  $z^2 = w$  را می‌توان به عنوان تبدیل

$$u = x^2 - y^2, \quad v = 2xy \quad (1)$$

از صفحه  $xy$  به توی صفحه  $uv$  در نظر گرفت. این صورت نگاشت، به خصوص دریافت تصاویر برخی هذلولیها مفید است.

مثلًاً به آسانی می‌توان نشان داد که هر شاخه هذلولی

$$x^2 - y^2 = c_1 \quad (c_1 > 0) \quad (2)$$



شکل ۱۷

$$w = z^2$$

به روشی یک به یک به روی خط قائم  $u = c_1$  نگاشته می‌شود. از آنجا شروع می‌کنیم که اگر  $(x, y)$  نقطه‌ای واقع بر یکی از شاخه‌ها باشد، آن‌گاه بنابر اولین رابطه از روابط (۱) داریم  $u = c_1$  به خصوص وقتی که نقطه روی شاخه سمت راست باشد، بنابر دومین رابطه از روابط (۱) داریم  $v = 2y\sqrt{y^2 + c_1}$ . بنابراین تصویر شاخه سمت راست را می‌توان به صورت پارامتری زیر بیان کرد

$$u = c_1, \quad v = 2y\sqrt{y^2 + c_1} \quad (-\infty < y < \infty),$$

و بدیهی است که وقتی نقطه  $(x, y)$  آن شاخه را در جهت بالا پیماید تصویر  $(x, y)$  در امتداد خط رو به بالا می‌رود (شکل ۱۷). همین طور چون دو رابطه

$$u = c_1, \quad v = -2y\sqrt{y^2 + c_1} \quad (-\infty < y < \infty)$$

نمایش پارامتری برای تصویر شاخه سمت چپ هذلولی است، می‌توان دید که وقتی نقطه در امتداد شاخه سمت چپ پایین می‌آید تصویرش در امتداد خط  $u = c_1$  بالا می‌رود.  
از طرف دیگر هر شاخه هذلولی

$$2xy = c_2 \quad (c_2 > 0) \quad (3)$$

همان‌طور که در شکل ۱۷ نشان داده شده است به خط  $v = c_2$  تبدیل می‌شود. برای تحقیق درستی این مطلب از دومین رابطه از روابط (۱) نتیجه می‌شود که اگر  $(x, y)$  روی هر یک از شاخه‌ها باشد،  $v = c_2$ . فرض کنید  $(x, y)$  روی شاخه واقع در ربع اول باشد. پس از آنجا که

$y = c_2/(2x)$  اولین رابطه از روابط (۱) نشان می‌دهد که تصویر شاخه دارای نمایش پارامتری زیر است

$$u = x^{\frac{1}{2}} - \frac{c_2^{\frac{1}{2}}}{4x^{\frac{1}{2}}}, \quad v = c_2 \quad (0 < x < \infty)$$

ملاحظه می‌کنید که

$$\lim_{x \rightarrow \infty} u = \infty \quad \text{و} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} u = -\infty$$

چون  $u$  به طور پیوسته وابسته به  $x$  است، پس بهوضوح دیده می‌شود که وقتی  $(x, y)$  تمام شاخه بالایی هذلولی (۳) را به پایین بپیماید، تصویرش در امتداد تمام خط افقی  $v = c_2$  به طرف راست حرکت می‌کند. چون تصویر شاخه پایینی دارای نمایش پارامتری

$$u = \frac{c_2^{\frac{1}{2}}}{4y^{\frac{1}{2}}} - y^{\frac{1}{2}}, \quad v = c_2 \quad (-\infty < y < 0)$$

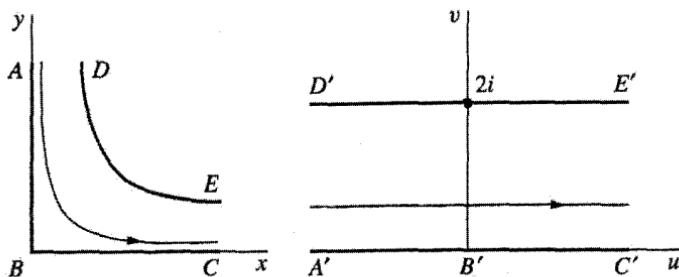
است و چون

$$\lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ y < 0}} u = \infty \quad \text{و} \quad \lim_{y \rightarrow -\infty} u = -\infty$$

در نتیجه تصویر نقطه‌ای که تمام شاخه پایینی را به طرف بالا بپیماید نیز تمام خط  $v = c_2$  را به طرف راست می‌پیماید (شکل ۱۷ را ببینید).

حال مثال ۱ را برای یافتن تصویر یک ناحیه بهکار می‌بریم.

مثال ۲. حوزه  $0 < x < 1, 0 < y < xy$  مركب از همه نقاط واقع بر شاخه‌های بالایی هذلولیهای  $c = 2xy$  است، که در آنها  $2 < c < 1$  (شکل ۱۸). با توجه به مثال ۱ می‌دانیم که اگر نقطه‌ای تمام یکی از این شاخه‌ها را به طرف پایین بپیماید، تصویرش تحت تبدیل  $z = w^2$  تمام خط  $c = v$  را به طرف راست می‌پیماید. چون به ازای همه مقادیر  $c$  بین  $0 < 2$  این شاخه‌ها حوزه  $0 < x, 0 < y < xy$  را پر می‌کنند این حوزه به روی نوار افقی  $2 < v < 0$  نگاشته می‌شود. بنابر روابط (۱) تصویر هر نقطه  $(x, y)$  در صفحه  $\mathbb{X}$  عبارت است از  $(-y^2, 0)$ . بنابراین وقتی  $(y, 0)$  در امتداد محور  $y$  را به پایین به مبدأ برسد تصویر آن در صفحه  $w$  در امتداد محور  $w$  های منفی به طرف راست حرکت می‌کند و به مبدأ می‌رسد. از آنجاکه تصویر نقطه  $(x, 0)$  نقطه  $(x^2, 0)$  است وقتی  $(x, 0)$  از مبدأ در امتداد محور  $x$  را به طرف راست حرکت می‌کند، تصویر آن از مبدأ در امتداد محور  $w$  به طرف راست حرکت می‌کند. تصویر شاخه بالایی هذلولی



شکل ۱۸

$$w = z^2$$

۱. البته خط افقی  $v = 1$  است. پس همان طور که در شکل ۱۸ نشان داده شده است ناحیه بسته  $x \geq 0, y \geq 0$  به روی نوار بسته  $v \leq 2 \leq w$  نگاشته می‌شود.

آخرین مثال نشان می‌دهد که چگونه مختصات قطبی می‌تواند در تجزیه و تحلیل برخی نگاشتها مفید باشد.

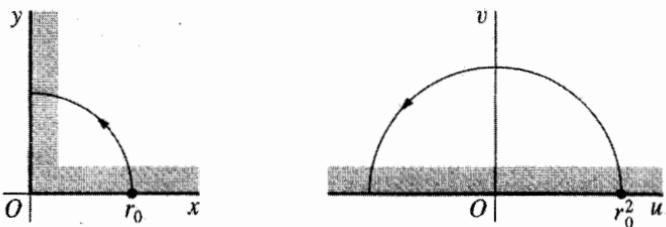
مثال ۳. نگاشت  $w = z^2$  به

$$w = r^2 e^{i2\theta}$$

تبديل می‌شود هرگاه  $z = re^{i\phi} = r^2 e^{i2\theta}$ . بنابراین اگر  $w = re^{i\theta}$  داریم که در اوایل بخش ۸ به حروف ایرانیک نوشته شده است

$$\phi = 2\theta + 2k\pi \quad \text{و} \quad r = r^2$$

که در آن  $k$  دارای یکی از مقادیر  $\dots, \pm 1, \pm 2, \dots$  است. پس روش است که تصویر هر نقطه ناصفر  $z$  با مجذور کردن قدر مطلق  $z$  و دو برابر کردن مقداری از آوند  $\phi$  به دست می‌آید. ملاحظه می‌کنید که نقاط  $z = r_0 e^{i\theta}$  بر دایره  $r = r_0$  به نقاط  $w = r^2 e^{i2\theta}$  بر دایره  $r = r^2$  نگاشته می‌شوند. وقتی نقطه روی دایره اول در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت از محور حقیقی مثبت به محور موهومی مثبت می‌رود، تصویر آن روی دایره دوم در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت از محور حقیقی مثبت به محور موهومی منفی می‌رود (شکل ۱۹ را ببینید). بنابراین در صورتی که همه مقادیر مثبت  $r$  انتخاب شوند، قوسهای نظیر در صفحات  $z$  و  $w$



شکل ۱۹

$$w = z^2$$

به ترتیب، ربع اول و نیم صفحه بالا را پر می کنند. پس همان طور که در شکل ۱۹ نشان داده شد، تبدیل  $w = z^2$  نگاشت یک به یکی از ربع اول  $\theta \leq \pi/2, r \geq 0$  صفحه  $z$  به روی نیم صفحه بالایی  $v \geq 0$  صفحه  $w$  است. البته نقطه  $z = 0$  به روی نقطه  $w = 0$  نگاشته می شود.  $\phi \leq \pi, \rho \geq 0$  صفحه  $w$  را به روی همه صفحه  $w$  نگارد. ولی در این حالت تبدیل یک به یک نیست زیرا هر دو محور حقیقی مثبت و منفی صفحه  $z$  به روی محور حقیقی مثبت صفحه  $w$  نگاشته می شوند.

در صورتی که  $n$  عدد صحیحی بزرگتر از ۲ باشد، بسیاری از ویژگیهای نگاشت تبدیل  $w = z^n$  یا  $re^{i\phi} = r^n e^{in\theta}$  شبیه ویژگیهای نگاشت  $w = z^n$  است. چنین نگاشتی همه صفحه  $z$  را به روی تمام صفحه  $w$  می نگارد، که در آن هر نقطه ناصرف صفحه  $w$  تصویر  $n$  نقطه متمایز از صفحه  $z$  است. دایره  $r = r_0$  به روی دایره  $r = r_0^n$  نگاشته می شود و قطاع  $0 \leq \theta \leq 2\pi/n, r \leq r_0$  به روی قرص  $r_0^n \leq r \leq r_0$  نگاشته می شود، اما نه به روشی یک به یک.

### ۱۳. نگاشت با تابع نمایی

در فصل ۳ برخی از توابع مقدماتی را که شامل چند جمله‌بیان نیستند معرفی و ویژگیهای آنها را بررسی می کیم. آن فصل با تابع نمایی

$$e^z = e^x e^{iy} \quad (z = x + iy), \quad (1)$$

آغاز می شود، دو عامل  $e^x$  و  $e^{iy}$  در این مرحله خوشنصریف‌اند (بخش ۶ را ببینید). توجه کنید که تعریف (۱) را می توان به صورت

$$e^{x+iy} = e^x e^{iy}$$

هم نوشت که با الهام از ویژگی آشنای

$$e^{x_1+x_2} = e^{x_1}e^{x_2}$$

تابع نمایی در حسابان بیان شده است.

هدف ما در این بخش استفاده از تابع  $e^z$  برای آشنایی بیشتر خواننده با مثالهایی از نگاشته است که نسبتاً ساده هستند. موضوع را با بررسی تصویرهای خطوط قائم و افقی آغاز می‌کنیم.  
مثال ۱. تبدیل

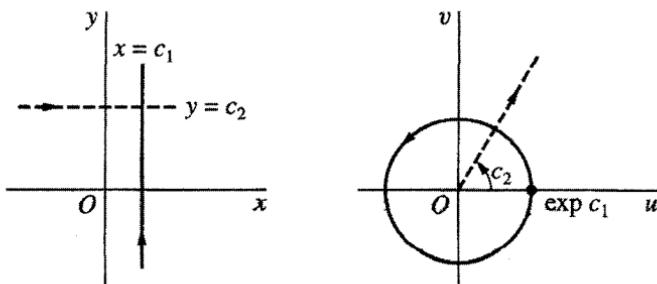
$$w = e^z \quad (2)$$

را می‌توان به صورت  $\rho e^{i\phi} = e^x e^{iy}$  نوشت، که در آن  $z = x + iy$  و  $w = \rho e^{i\phi}$ . بنابراین  $\rho = e^x$  و  $\phi = y + 2n\pi$  که در آن  $n$  عددی صحیح است (بخش ۸ را ببینید) و تبدیل (۲) را می‌توان به صورت زیر بیان کرد

$$\rho = e^x, \quad \phi = y. \quad (3)$$

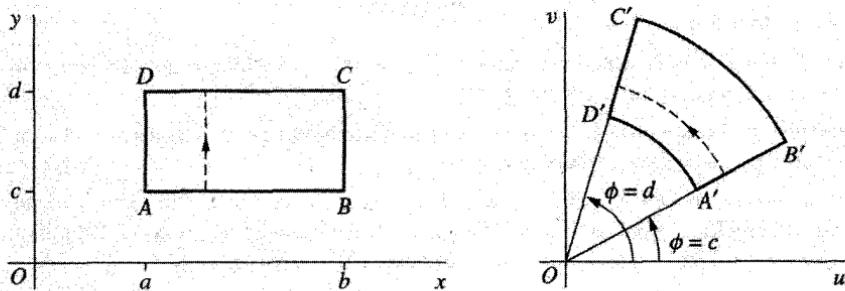
تصویر نقطه عادی  $(c_1, y) = z$  روی خط قائم  $x = c_1$  در صفحه  $w$  دارای مختصات قطبی  $\rho = \exp c_1$  و  $\phi = y$  است. در صورتی که  $z$  روی این خط به بالا حرکت کند این تصویر در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت بر پیرامون دایره‌یی که در شکل  $20^\circ$  نشان داده شده حرکت می‌کند. روشن است که تصویر خط همه دایره است و هر نقطه از این دایره تصویر بی‌نهایت نقطه، به فاصله  $2\pi$  واحد از یکدیگر، از این خط است.

هر خط افقی  $y = c_2$  به روشی یک‌به‌یک به روی بردار شعاعی  $\phi = c_2$  نگاشته می‌شود. برای اثبات این ادعا ملاحظه می‌کنیم که تصویر نقطه  $(x, c_2) = z$  دارای مختصات قطبی



شکل ۲۰

$$w = \exp z$$



شکل ۲۱

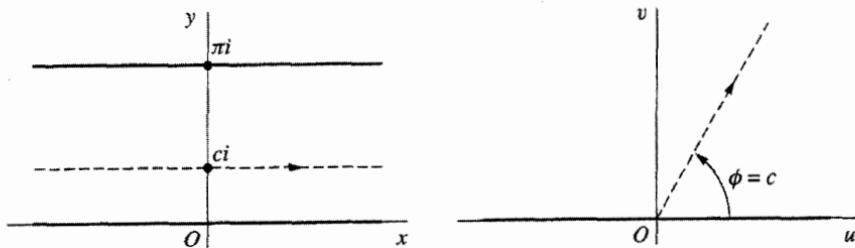
$$w = \exp z$$

$\phi = c_2$  و  $\rho = e^x$  است. پس روشن است که وقتی نقطه  $z$  در امتداد تمام این خط از چپ به راست حرکت می‌کند، تصویر آن همان‌طور که در شکل ۲۰ نشان داده شده است، تمام این بردار شعاعی  $c_2$  را می‌بیناید.

پاره‌خطهای قائم و افقی، به ترتیب، به روی قسمتهایی از دوازده بردارهای شعاعی نگاشته می‌شوند و از مشاهده مثال ۱ تصویرهای نواحی گوناگون به آسانی به دست می‌آیند. این مطلب را با مثال زیر روشن کرده‌ایم.

مثال ۲. حال نشان می‌دهیم که تبدیل  $w = e^z$  ناحیه مستطیلی  $c \leq y \leq d, a \leq x \leq b$  را به روی ناحیه  $e^a \leq \rho \leq e^b, c \leq \phi \leq d$  می‌نگارد. دو ناحیه و قسمتهای متاظر مرزهایشان در شکل ۲۱ نشان داده شده‌اند. پاره‌خط قائم  $AD$  به روی قوس  $A'D'$  می‌شود، که با  $A'D'$  علامت‌گذاری شده، نگاشته می‌شود. تصاویر پاره‌خطهای قائم واقع در سمت راست  $AD$  که قسمتهای افقی مرز را به هم وصل می‌کنند قوسهایی بزرگترند؛ بالاخره، تصویر پاره‌خط  $BC$  عبارت است از قوس  $B'C'$  که با  $B'C'$  علامت‌گذاری شده است. اگر  $d - c < 2\pi$  باشد، نگاشت یک‌به‌یک است. به خصوص اگر  $d = \pi$  و  $c = 0$  باشد، همان‌طور که در شکل ۸ پیوست ۲ نشان داده شده است، ناحیه مستطیلی به روی نصف یک حلقة مستدير نگاشته می‌شود.

در آخرین مثال با استفاده از تصاویر خطوط افقی تصویر یک نوار افقی را پیدا می‌کنیم. مثال ۳. در صورتی که  $w = e^z$ ، تصویر نوار نامتناهی  $y \leq u \leq v$  نیمه‌بالایی در صفحه  $w$  (شکل ۲۲) خواهد بود. این مطلب از مثال ۱ در بالا دیده می‌شود که چگونگی



شکل ۲۲

$$w = \exp z$$

نگاشته شدن خط افقی  $y = c$  به توی بردار شعاعی  $c = \phi$  از مبدأ را نشان می دهد. وقتی عدد حقیقی  $c$  از  $\pi$  تغییر می کند، عرض از مبدأ خطها از  $0^\circ$  تا  $\pi$  تغییر می کند و زاویه های میل بردارهای شعاعی از  $\phi = \pi$  تا  $\phi = 0^\circ$  افزایش می یابد. این نگاشت در شکل ۲ پیوست ۶ نشان داده شده است، که در آن نقاط متناظر روی مرزهای دو ناحیه مشخص شده اند.

### تمرینها

- با رجوع به مثال ۱، بخش ۱۲، حوزه ای را در صفحه  $z$  بیابید که تصویر آن تحت تبدیل  $w = z^2$  حوزه مربعی در صفحه  $w$  باشد که به خطوط  $u = 1, u = 2, v = 1, v = 2$  محدود شده است (شکل ۲ پیوست ۶ را ببینید).
- تصاویر هذلولیهای

$$xy = c_2 \quad (c_2 < 0) \quad \text{و} \quad x^2 - y^2 = c_1 \quad (c_1 < 0)$$

- را تحت تبدیل  $w = z^2$  بیابید و شکل آنها را رسم کنید و جهت های متناظر آنها را نشان دهید.
- ناحیه ای را که قطاع  $1 \leq r \leq \theta \leq \pi/4$  باشد که  $w = z^3$  (الف)؛  $w = z^2$  (ب)؛  $w = z^3$  (ج) باشد را در صفحه  $z$  ببینید.
- $w = z^2$  به روی آن نگاشته می شود با شکل نمایش دهید.
- نشان دهید که خطوط  $ay = x$  تحت تبدیل  $w = \exp z$  (که در آن  $a \neq 0^\circ$ ) به روی مارپیچهای  $\rho = \exp(a\phi)$  نگاشته می شوند.
- با در نظر گرفتن تصاویر پاره خط های افقی، تحقیق کنید، همان طور که در شکل ۲۱ (بخش ۱۳) نشان داده شده است، تصویر ناحیه مستطیلی  $c \leq y \leq d, a \leq x \leq b$  تحت تبدیل  $w = \exp z$  خواهد شد.

۶. درستی نگاشت ناحیه و مرزی را که در شکل ۷ پیوست ۲ نشان داده شده است تحقیق کنید، که در آن تبدیل عبارت است از  $w = \exp z$ .

۷. تصویر نوار نیمه نامتناهی  $x \geq 0$ ،  $y \leq \pi$  را تحت تبدیل  $w = \exp z$  پیدا کنید و قسمتهای متناظر مرزها را نمایش دهید.

۸. یک تعییر دیگر تابع  $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  عبارت از یک میدان برداری در حوزه تعریف  $f$  است. این تابع به هر نقطه  $z$  که در آن تعریف شده باشد برداری مانند  $w$  با مؤلفه‌های  $u(x, y)$  و  $v(x, y)$  را نسبت می‌دهد. میدانهای برداری زیر را با نمودار نشان دهید.  
 . $w = z/|z|$ ; (ب)  $w = iz$  (الف)

## ۱۴. حد

فرض می‌کنیم تابع  $f$  در همه نقاط  $z$  از یک همسایگی محدود  $z_0$  (بخش ۱۰) تعریف شده باشد. این عبارت که حد  $f$  وقتی  $z$  به  $z_0$  میل کند عدد  $w_0$  است، یا

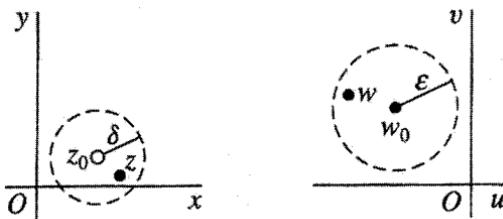
$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0, \quad (1)$$

بدین معنی است که نقطه  $f(z) = w$  را می‌توان به دلخواه نزدیک به  $w_0$  گرفت، اگر نقطه  $z$  را به قدر کافی نزدیک به  $z_0$  اما متمایز از آن انتخاب کنیم. حال تعریف حد را به صورتی دقیق و قابل استفاده بیان می‌کنیم.

عبارت (۱) بدین معنی است که به ازای هر عدد مثبت  $\varepsilon$  عددی مثبت مانند  $\delta$  هست که

$$|z - z_0| < \delta \quad \text{هرگاه} \quad |f(z) - w_0| < \varepsilon \quad (2)$$

از نظر هندسی، تعریف بالا گویای این است که به ازای هر  $\varepsilon$  همسایگی  $|w - w_0| < \varepsilon$  از  $w_0$ ،  $\delta$  همسایگی محدود  $\delta < |z - z_0| < \varepsilon$  از  $z_0$  وجود دارد که هر نقطه  $z$  از آن، یک تصویر  $w$  در این  $\varepsilon$  همسایگی دارد (شکل ۲۳). توجه کنید که گرچه باید همه نقاط همسایگی محدود  $\delta$  را در نظر گرفت، لزومی ندارد که تصاویر آنها همه همسایگی  $\varepsilon$  از  $w_0$  را تشکیل دهند. مثلاً اگر  $f$  دارای مقدار ثابت  $w_0$  باشد، تصویر  $z$  همیشه مرکز آن همسایگی خواهد بود. همچنین توجه کنید که وقتی یک  $\delta$  پیدا شد، می‌توان به جای آن هر عدد مثبت کوچکتری، مانند  $\delta/2$  را قرار داد.



شکل ۲۳

به آسانی می‌توان نشان داد که اگر حد تابع  $f(z)$  در یک نقطه  $z_0$  موجود باشد این حد یکتاست. برای انجام این کار، فرض می‌کنیم که

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0 \quad \text{و} \quad \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_1$$

در این صورت، به ازای هر عدد مثبت  $\varepsilon$ ، اعداد مثبتی مانند  $\delta_0$  و  $\delta_1$  موجودند به قسمی که

$$|z - z_0| < \delta_0 \quad \text{هرگاه} \quad |f(z) - w_0| < \varepsilon$$

$$|z - z_0| < \delta_1 \quad \text{هرگاه} \quad |f(z) - w_1| < \varepsilon$$

بنابراین اگر  $\delta < |z - z_0| < \delta_0$ ، که در آن  $\delta$  کوچکترین عدد از دو عدد  $\delta_0$  و  $\delta_1$  است، آنگاه

$$|w_1 - w_0| = |[f(z) - w_0] - [f(z) - w_1]| \leq |f(z) - w_0| + |f(z) - w_1| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

اما  $|w_1 - w_0|$  عددی ثابت و نامتفاوت است و  $\varepsilon$  را می‌توان به دلخواه کوچک گرفت. در نتیجه

$$w_1 - w_0 = 0 \quad \text{یا} \quad w_1 = w_0$$

در تعریف (۲) لازم است که  $f$  در همه نقاط یک همسایگی محدود از  $z_0$ ، تعریف شده باشد. البته وقتی  $z$  یک نقطه داخلی ناحیه‌ای باشد که  $f$  بر آن تعریف شده است، همیشه چنین همسایگی محدودی موجود است. می‌توان تعریف حد را به حالتی که  $z$  یک نقطه مرزی آن ناحیه باشد گسترش داد با این قرارداد که لازم است اولین نابرابری از نابرابریهای (۲) فقط برای نقاط  $z$  صادق باشد که هم به این همسایگی محدود و هم به ناحیه مزبور متعلق‌اند.

مثال ۱. تابع  $f(z) = iz/2$  را که بر قرص باز  $|z| < 1$  تعریف شده است، در نظر می‌گیریم و نشان می‌دهیم که

$$\lim_{z \rightarrow 1} f(z) = \frac{i}{2}, \quad (3)$$

نقطه  $1 = z$  بر مرز حوزه تعریف  $f$  واقع است. ملاحظه می‌کنید که وقتی  $z$  در ناحیه  $1 < |z|$  باشد،

$$\left| f(z) - \frac{i}{2} \right| = \left| \frac{iz}{2} - \frac{i}{2} \right| = \frac{|z - 1|}{2}.$$

بنابراین، به ازای هر چنین  $z$ ی و هر عدد مثبت  $\varepsilon$

$$\circ < |z - 1| < 2\varepsilon \quad \text{هرگاه} \quad \left| f(z) - \frac{i}{2} \right| < \varepsilon$$

بنابراین وقتی که  $\delta$  مساوی  $2\varepsilon$  (شکل ۲۴) یا هر عدد مثبتی کوچکتر از آن باشد شرط (۲) برای نقاط ناحیه  $1 < |z|$  برقرار است.

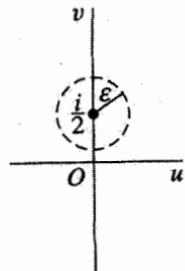
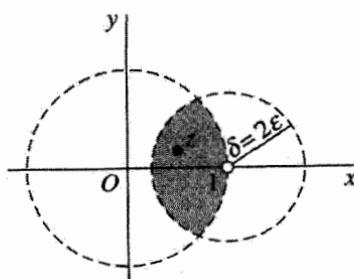
اگر  $z$  یک نقطه داخلی حوزه تعریف  $f$  بوده و حد (۱) موجود باشد در این صورت باید اولین نابرابری از نابرابریهای (۲) برای همه نقاط در همسایگی محذوف  $\delta < |z - z_0| < \varepsilon$  برقرار باشد. بنابراین نماد  $z \rightarrow z$  ایجاب می‌کند که  $z$  مجاز باشد به هر طریق دلخواه و نه فقط در امتدادی خاص به  $z$  میل کند. مثال بعد تأکیدی بر این موضوع است.

مثال ۲. اگر

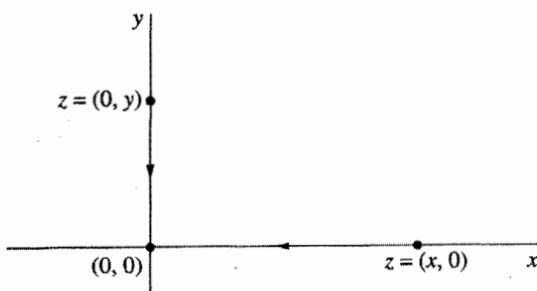
$$f(z) = z/\bar{z} \quad (4)$$

آنگاه

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(z) \quad (5)$$



شکل ۲۴



شکل ۲۵

وجود ندارد. زیرا اگر موجود باشد می‌توانیم آن را این‌گونه بیابیم که اجازه دهیم نقطه  $z = (x, y)$  از هر مسیری به مبدأ میل کند. اما وقتی  $(^{\circ}, 0) = z$  یک نقطه ناصفر روی محور حقیقی باشد شکل (۲۵)،

$$f(z) = \frac{x + i^{\circ}}{x - i^{\circ}} = 1$$

و وقتی  $(^{\circ}, y) = z$  یک نقطه ناصفر روی محور موهومی باشد،

$$f(z) = \frac{^{\circ} + iy}{^{\circ} - iy} = -1.$$

بنابراین، اگر  $z$  را در امتداد محور حقیقی به مبدأ میل دهیم، درمی‌باییم که حد مطلوب ۱ است. از طرف دیگر با میل دادن در امتداد محور موهومی حد  $-1$  می‌شود. چون حد یکتاست، باید نتیجه بگیریم که حد (۵) موجود نیست.

گرچه تعریف (۲) ابزاری برای آزمون حدبودن یک نقطه مفروض  $w$  ارائه می‌دهد ولی مستقیماً روشی برای تعیین حد ارائه نمی‌دهد. قضایایی درباره حد، که در بخش بعد ارائه شده‌اند، ما را قادر خواهند ساخت که عملآ حد های زیادی را پیدا کنیم.

## ۱۵. قضایایی درباره حد

با برقرار کردن رابطه‌ای بین حد تابع یک متغیره مختلط و حد توابع حقیقی مقدار از دو متغیر حقیقی می‌توانیم بررسی حد را سرعت بخشیم. چون حد های نوع دوم در حسابان بررسی شده‌اند، تعاریف و ویژگیهای آنها را آزادانه به کار خواهیم برد.

قضیه ۱. فرض کنید

$$w_{\circ} = u_{\circ} + iv_{\circ}, z_{\circ} = x_{\circ} + iy_{\circ}, f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

در این صورت

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0. \quad (1)$$

اگر و فقط اگر

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} v(x, y) = v_0 \quad \text{و} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} u(x, y) = u_0. \quad (2)$$

برای اثبات قضیه، ابتدا فرض می‌کنیم که حدود (۲) برقرار باشند و حد (۱) را به دست می‌آوریم.  
حدود (۲) به ما می‌گویند که برای هر عدد مثبت  $\varepsilon$ ، اعداد مثبت  $\delta_1$  و  $\delta_2$  بی موجودند به قسمی که

$$|v - v_0| < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta_1 \quad \text{هرگاه} \quad |u - u_0| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (3)$$

$$|v - v_0| < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta_2 \quad \text{هرگاه} \quad |v - v_0| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (4)$$

فرض کنیم  $\delta$  معروف کوچکترین عدد از دو عدد  $\delta_1$  و  $\delta_2$  باشد. چون

$$|(u + iv) - (u_0 + iv_0)| = |(u - u_0) + i(v - v_0)| \leq |u - u_0| + |v - v_0|$$

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = |(x - x_0) + i(y - y_0)| = |(x + iy) - (x_0 + iy_0)|$$

از عبارات (۳) و (۴) نتیجه می‌شود که

$$|(u + iv) - (u_0 + iv_0)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

هرگاه

$$|(x + iy) - (x_0 + iy_0)| < \delta.$$

یعنی حد (۱) برقرار است.

حال با این فرض شروع می‌کنیم که حد (۱) برقرار باشد. با این فرض، می‌دانیم که برای هر عدد مثبت  $\varepsilon$ ، عدد مثبت  $\delta$  بی وجود دارد به‌طوری که

$$|(u + iv) - (u_0 + iv_0)| < \varepsilon \quad (5)$$

هرگاه

$$\circ < |(x + iy) - (x_0 + iy_0)| < \delta. \quad (6)$$

اما

$$|u - u_0| \leq |(u - u_0) + i(v - v_0)| = |(u + iv) - (u_0 + iv_0)|,$$

$$|v - v_0| \leq |(u - u_0) + i(v - v_0)| = |(u + iv) - (u_0 + iv_0)|,$$

و

$$|(x + iy) - (x_0 + iy_0)| = |(x - x_0) + i(y - y_0)| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

بنابراین از نابرابریهای (۵) و (۶) نتیجه می‌شود که

$$|v - v_0| < \varepsilon \quad \text{و} \quad |u - u_0| < \varepsilon$$

هرگاه

$$\circ < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta.$$

این، حد (۲) را اثبات می‌کند و اثبات قضیه کامل می‌شود.

**قضیه ۲.** فرض کنید که

$$\lim_{z \rightarrow z_0} F(z) = W_0 \quad \text{و} \quad \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0. \quad (7)$$

در این صورت

$$\lim_{z \rightarrow z_0} [f(z) + F(z)] = w_0 + W_0, \quad (8)$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} [f(z)F(z)] = w_0 W_0, \quad (9)$$

و اگر  $W_0 \neq 0$ .

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{F(z)} = \frac{w_0}{W_0}. \quad (10)$$

این قضیه مهم را می‌توان مستقیماً از روی تعریف حد تابع یک متغیره مختلط ثابت کرد، اما به کمک قضیه ۱، قریباً بلافاصله، از قضایای حد توابع حقیقی مقدار دو متغیر حقیقی نتیجه می‌شود.

متلاً برای اثبات ویژگی (۹)، می‌نویسیم

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \quad F(z) = U(x, y) + iV(x, y), \\ z_0 = x_0 + iy_0, \quad w_0 = u_0 + iv_0, \quad W_0 = U_0 + iV_0.$$

پس، بنابر فرضهای (۷) و قضیه ۱، حد توابع  $u$ ،  $v$  و  $V$  وقتی  $(x, y)$  به  $(x_0, y_0)$  میل کند موجود و به ترتیب برابر با  $u_0$ ،  $v_0$  و  $V_0$  است. بنابراین وقتی  $(x, y)$  به  $(x_0, y_0)$  میل کند مؤلفه‌های حقیقی و موهومی حاصل ضرب

$$f(z)F(z) = (uU - vV) + i(vU + uV)$$

به ترتیب، دارای حد های  $v_0U_0 - u_0V_0$  و  $u_0U_0 - v_0V_0$  هستند. بنابراین، مجدداً بنابر قضیه ۱، وقتی  $z$  به  $z_0$  میل کند، حد  $f(z)F(z)$  عبارت است از

$$(u_0U_0 - v_0V_0) + i(v_0U_0 + u_0V_0)$$

که این خود مساوی  $w_0$  است. بدین ترتیب ویژگی (۹) ثابت می‌شود. تحقیق درستی ویژگیهای (۸) و (۱۰) را نیز می‌توان ارائه داد.

از تعریف (۲) بخش ۱۴، در مورد حد به سادگی می‌توان دید که

$$\lim_{z \rightarrow z_0} z = z_0 \quad \text{و} \quad \lim_{z \rightarrow z_0} c = c$$

که در آن  $z$  و  $c$  اعداد مختلط‌اند، و بنابر ویژگی (۹) و استقرای ریاضی نتیجه می‌شود که

$$\lim_{z \rightarrow z_0} z^n = z_0^n \quad (n = 1, 2, \dots).$$

پس، با توجه به ویژگیهای (۸) و (۹) نتیجه می‌شود که حد یک چندجمله‌یی

$$P(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \cdots + a_nz^n$$

وقتی  $z$  به نقطه  $z_0$  میل کند، مقدار چندجمله‌یی در آن نقطه است:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} P(z) = P(z_0). \quad (11)$$

## ۱۶. حدهای مشتمل بر نقطه در بی‌نهایت

بعضی موقع مناسب است که به صفحه مختلط نقطه در بی‌نهایت را، که با  $\infty$  نمایش داده می‌شود، ضمیمه کرده و از حدهای مشتمل بر آن استفاده کنیم. صفحه مختلط همراه با این نقطه را صفحه مختلط توسعه‌یافته می‌نامیم. برای تجسم نقطه در بی‌نهایت می‌توان پنداشت که صفحه مختلط از دایره عظیمه کره واحد به مرکز  $= z$  گذشته باشد (شکل ۲۶). متناظر با هر نقطه  $z$  از صفحه، درست یک نقطه  $P$  در رویه کره وجود دارد. نقطه  $P$  محل تقاطع خط گذرنده از نقطه  $z$  و قطب شمال  $N$  کره، با رویه کره است. به روی مشابه، به هر نقطه  $P$  بر رویه کره، غیر از قطب شمال  $N$ ، درست یک نقطه  $z$  در صفحه متناظر است. با فرض اینکه نقطه  $N$  از کره، متناظر با نقطه در بی‌نهایت باشد، متناظر یک‌به‌یکی بین نقاط کره و نقاط صفحه مختلط توسعه‌یافته به دست می‌آوریم، این کره به کره ریمان<sup>۱</sup> مشهور است و این متناظر را تصویر گنجنگاری می‌نامند.

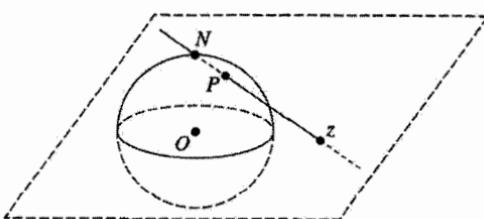
ملاحظه می‌کنید که خارج دایره واحد به مرکز مبدأ در صفحه مختلط، متناظر است با نیمکره بالایی که دایره عظیمه و نقطه  $N$  از آن حذف شده باشند. به علاوه، بهارای هر عدد مثبت و کوچک  $\epsilon$ ، نقاطی از صفحه مختلط که خارج دایره  $1/\epsilon = |z|$  واقع‌اند با نقاطی بر کره که نزدیک  $N$  اند متناظرند. بنابراین مجموعه  $1/\epsilon < |z| < \epsilon$  همسایگی (یا همسایگی)  $\infty$  می‌نامیم.

قرار بر این می‌گذاریم که وقتی از یک نقطه  $z$  نام می‌بریم منظورمان نقطه در صفحه متناهی است. اگر نقطه در بی‌نهایت مورد نظر باشد صریحاً ذکر خواهد شد.

حال وقتی  $z = w$  یا هر دوی آنها، نقطه در بی‌نهایت باشند، به سهولت می‌توان به عبارت

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w.$$

معنایی بخشید. در تعریف حد در بخش ۱۴ فقط به جای همسایگی‌های مناسب  $z = w$  و  $w$  همسایگی‌هایی از  $\infty$  قرار می‌دهیم. برهان قضیه زیر نحوه کار را نشان می‌دهد.



شکل ۲۶

قضیه. اگر  $z$  و  $w$  به ترتیب نقاطی در صفحات  $z$  و  $w$  باشند، آنگاه

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{f(z)} = \infty \quad \text{اگر و فقط اگر} \quad \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty \quad (1)$$

و

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{z}\right) = w. \quad \text{اگر و فقط اگر} \quad \lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = w. \quad (2)$$

به علاوه

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{f(1/z)} = \infty \quad \text{اگر و فقط اگر} \quad \lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty \quad (3)$$

برهان را با توجه به این نکته آغاز می‌کنیم که اولین حد (۱) بدین معنی است که به ازای هر عدد مثبت  $\varepsilon$  عدد مثبت  $\delta$  بی‌هست که

$$|z - z_0| < \delta \quad \text{هرگاه} \quad |f(z)| > \frac{1}{\varepsilon} \quad (4)$$

یعنی نقطه  $f(z) = w$  در همسایگی  $1/\varepsilon$  از نقطه  $\infty$  واقع است، هرگاه  $z$  در همسایگی محدود  $|z - z_0| < \delta$  واقع باشد. چون عبارت (۴) را می‌توان به صورت

$$|f(z) - w_0| < \varepsilon \quad \text{هرگاه} \quad \left| \frac{1}{f(z)} - \infty \right| < \varepsilon$$

نوشت، دومین حد (۱) به دست می‌آید.

اولین حد (۲) بدین معنی است که به ازای هر عدد مثبت  $\varepsilon$  عدد مثبتی مانند  $\delta$  بی‌هست که

$$|z| > \frac{1}{\delta} \quad \text{هرگاه} \quad |f(z) - w_0| < \varepsilon \quad (5)$$

اگر در عبارت (۵) به جای  $z$  قرار دهیم  $1/z$  و سپس نتیجه را به شکل زیر بنویسیم

$$|z - 0| < \delta \quad \text{هرگاه} \quad \left| f\left(\frac{1}{z}\right) - w_0 \right| < \varepsilon$$

دومین حد (۲) نتیجه می‌شود.

بالاخره، اولین حد (۳) را باید چنین تعبیر کرد که به ازای هر عدد مثبت  $\varepsilon$  عدد مثبتی مانند  $\delta$  بی‌هست که

$$|z| > \frac{1}{\delta} \quad \text{هرگاه} \quad |f(z)| > \frac{1}{\varepsilon}$$

اگر به جای  $z$  قرار دهیم  $z/\varepsilon$ ، این عبارت به شکل زیر در می‌آید

$$\therefore |z - z_0| < \delta \quad \text{هرگاه} \quad \left| \frac{1}{f(1/z)} - \frac{1}{z_0} \right| < \varepsilon$$

که دومین حد (۳) را ثابت می‌کند.  
مثالها. ملاحظه کنید که

$$\lim_{z \rightarrow -1} \frac{z+1}{iz+3} = 0 \quad \text{زیرا} \quad \lim_{z \rightarrow -1} \frac{iz+3}{z+1} = \infty$$

و

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{(2/z)+i}{(1/z)+1} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{2+iz}{1+z} = 2 \quad \text{زیرا} \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{2z+i}{z+1} = 2$$

به علاوه

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{(1/z^2)+1}{(2/z^3)-1} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z+z^3}{2-z^3} = 0 \quad \text{زیرا} \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{2z^3-1}{z^2+1} = \infty$$

## ۱۷. پیوستگی

تابع  $f$  در نقطه  $z_0$  پیوسته است اگر هر سه شرط زیر برقرار باشند:

$$(1) \quad \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \text{ موجود باشد،}$$

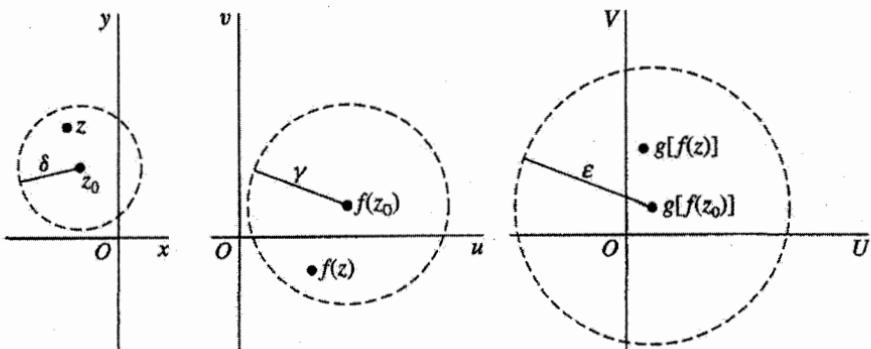
$$(2) \quad f(z_0) \text{ موجود باشد،}$$

$$(3) \quad \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$$

ملاحظه می‌کنید که حکم (۳) عملًا احکام (۱) و (۲) را در بردارد زیرا وجود کمیتهای دو طرف معادله به طور ضمنی فرض شده است. حکم (۳) مبین این است که به ازای هر عدد مثبت  $\varepsilon$ ، عدد مثبت  $\delta$  بیان شده است که

$$(4) \quad |z - z_0| < \delta \quad \text{هرگاه} \quad |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$$

یک تابع یک متغیره مختلط را در ناحیه  $R$  پیوسته گوییم اگر در هر نقطه  $R$  پیوسته باشد.



شکل ۲۷

اگر دو تابع در نقطه‌ای پیوسته باشند، مجموع و حاصلضرب آنها نیز در آن نقطه پیوسته‌اند؛ خارج قسمت آنها در هر چنین نقطه‌ای، که مخرج صفر باشد، پیوسته است. این ملاحظات نتیجه مستقیم قضیه ۲ بخش ۱۵ است. همچنین، توجه می‌کنید که بنابر رابطه حد (۱۱) بخش ۱۵، هر چند جمله‌ای در تمام صفحه پیوسته است.

حال به دو ویژگی قابل انتظار توابع پیوسته باز می‌گردیم که تحقیق درستی آنها خیلی ساده نیست. اثباتها به تعریف (۴) بستگی دارند و این نتایج را به صورت قضیه بیان می‌کنیم.

### قضیه ۱. ترکیب دو تابع پیوسته، تابعی است پیوسته.

بیان دقیق این قضیه در برخان زیر آورده می‌شود. فرض می‌کنیم  $w = f(z)$  تابعی باشد که به ازای هر  $z$  در یک همسایگی نقطه  $z_0$ ، مانند  $\delta < |z - z_0|$ ، تعریف شده است و  $W = g(w)$  تابعی باشد که حوزه تعریف آن شامل تصویر (بخش ۱۲) آن همسایگی تحت  $f$  است. پس به ازای هر  $z$  در همسایگی  $\delta < |z - z_0|$ ، ترکیب  $[w = g(f(z))]$  تعریف شده است. حال فرض کنید  $f$  در  $z_0$  و  $g$  در نقطه  $(z_0)$  از صفحه  $w$  پیوسته باشند. بنابر پیوستگی  $g$  در  $(z_0)$  می‌دانیم که به ازای هر عدد مثبت  $\gamma$ ، عدد مثبت  $\varepsilon$  هست که

$$|f(z) - f(z_0)| < \gamma \quad \text{هرگاه} \quad |g[f(z)] - g[f(z_0)]| < \varepsilon$$

(شکل ۲۷ را ببینید) اما پیوستگی  $f$  در  $z_0$  تضمین می‌کند که می‌توانیم همسایگی  $\delta < |z - z_0|$  را به قدر کافی کوچک بگیریم تا دومین نابرابری فوق برقرار باشد. بدین ترتیب پیوستگی تابع مرکب  $g[f(z)]$  ثابت شد.

قضیه ۲. اگر تابع  $f(z)$  در نقطه  $z_0$  پیوسته و ناصرف باشد، آنگاه در سراسر یک همسایگی آن نقطه  $f(z) \neq z_0$ .

با این فرض که  $f(z)$  در  $z_0$  پیوسته و ناصرف است، می‌توان قضیه ۲ را با تخصیص مقدار مثبت  $\delta/2$  به عدد  $\epsilon$  در عبارت  $(*)$  ثابت کرد. در این صورت عدد مثبتی مانند  $\delta$  هست که

$$|z - z_0| < \delta \quad \text{هرگاه} \quad |f(z) - f(z_0)| < \frac{|f(z_0)|}{2}$$

بنابراین اگر نقطه  $z$  در همسایگی  $\delta$  موجود باشد که  $|z - z_0| = \epsilon$ ، به تناظر

$$|f(z)| < \frac{|f(z_0)|}{2}$$

می‌رسیم؛ و قضیه ثابت می‌شود.  
پیوستگی تابع

$$(5) \quad f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

رابطه نزدیکی با پیوستگی تابع مؤلفه‌ی  $u(x, y)$  و  $v(x, y)$  دارد. مثلاً، توجه کنید که چگونه از قضیه ۱، بخش ۱۵ نتیجه می‌شود که تابع  $(5)$  در نقطه  $(x_0, y_0)$  در نقطه  $z_0$  پیوسته است اگر و فقط اگر تابع مؤلفه‌ی آن،  $u$  و  $v$ ، در آن نقطه پیوسته باشند. برای نشان دادن کاربرد این عبارت، فرض کنید تابع  $(5)$  در ناحیه  $R$  که هم بسته و هم کراندار است پیوسته باشد (بخش ۱۰ را ببینید).

پس تابع

$$\sqrt{[u(x, y)]^2 + [v(x, y)]^2}$$

در  $R$  پیوسته است و بنابراین در نقطه‌ای از آن ناحیه به یک مقدار ماکسیمم می‌رسد.\* یعنی،  $f$  در  $R$  کراندار است و  $|f(z)|$  در نقطه‌ای از آن ناحیه به یک مقدار ماکسیمم می‌رسد. به بیان دقیق‌تر، عدد مثبت  $M$  می‌شود که

$$(6) \quad \text{به ازای هر } z \text{ در } R, \quad |f(z)| \leq M$$

که در آن به ازای حداقل یک چنین  $z$  تساوی برقرار است.

\* برای ویرگولهایی که در اینجا نقل شد، مثلاً صفحات ۱۲۵-۱۲۶ و ۵۲۹ کتاب زیر را ببینید  
A. E. Taylor and W. R. Mann, "Advanced Calculus," 3d ed., 1983.

## تمرینها

۱. با استفاده از تعریف (۲) بخش ۱۴ برای حد ثابت کنید که

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\bar{z}}{z} = 0; \quad (\text{الف})$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \bar{z} = \bar{z}_0; \quad (\text{ب})$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \operatorname{Re} z = \operatorname{Re} z_0. \quad (\text{ج})$$

۲. فرض کنید  $a, b$  و  $c$  اعداد مختلط ثابتی باشند. با استفاده از تعریف (۲) بخش ۱۴ در مورد حد ثابت کنید که

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (az + b) = az_0 + b \quad (\text{الف})$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z^2 + c) = z_0^2 + c \quad (\text{ب})$$

$$\lim_{z \rightarrow 1-i} [x + i(2x + y)] = 1 + i \quad (z = x + iy) \quad (\text{ج})$$

۳. فرض کنید  $n$  یک عدد صحیح مثبت و  $P(z)$  و  $Q(z)$  چندجمله‌یهای باشند که  $\neq Q(z_0)$ . با استفاده از قضیه ۲، بخش ۱۵، و حد های ظاهر شده در آن بخش، حد های زیر را پیدا کنید.

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{P(z)}{Q(z)} \quad (\text{الف})$$

$$\lim_{z \rightarrow i} \frac{iz^3 - 1}{z + i} \quad (\text{ب})$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{z^n} \quad (z_0 \neq 0) \quad (\text{ج})$$

$P(z_0)/Q(z_0)$  جواب: (الف)  $1/z_0^n$ ; (ب)  $0$ ; (ج)  $0$

۴. با استفاده از ویژگی (۹)، بخش ۱۵، در مورد حدود و استقرای ریاضی، نشان دهید که وقتی  $n$  عدد صحیح مثبتی باشد ( $n = 1, 2, \dots$ ) داریم

$$\lim_{z \rightarrow z_0} z^n = z_0^n.$$

۵. نشان دهید که حد تابع

$$f(z) = \left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^2$$

وقتی  $z$  به صفر میل کند وجود ندارد. این کار را با میل دادن نقاط ناصر (۰)  $x$  و  $(x, x)$  به مبدأ انجام دهید. [توجه کنید که برخلاف مثال ۲ بخش ۱۴ کافی نیست که صرفاً نقاط  $(x, 0)$  و  $(0, y)$  را در نظر بگیرید].

۶. حکم (۸) در قضیه ۲ بخش ۱۵ را به یکی از روش‌های زیر ثابت کنید

(الف) با استفاده از قضیه ۱ بخش ۱۵ و ویژگیهای حد توابع حقیقی مقدار از دو متغیر حقیقی؛

(ب) با استفاده از تعریف (۲) بخش ۱۴ درباره حد.

۷. با استفاده از تعریف (۲) بخش ۱۴ در مورد حد ثابت کنید که

$$\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = |w_0| \quad \text{اگر و آنگاه} \quad \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$$

راهنمایی: ببینید چگونه از نابرابری (۸)، بخش ۴، می‌توانید استفاده کنید و بنویسید

$$||f(z)| - |w_0|| \leq |f(z) - w_0|.$$

۸. قرار دهید  $\Delta z = z - z_0$  و نشان دهید که

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} f(z_0 + \Delta z) = w_0 \quad \text{اگر و فقط اگر} \quad \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$$

۹. نشان دهید که

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty \quad \text{اگر} \quad \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)g(z) = \infty$$

و عدد مثبت  $M$  موجود باشد که به ازای هر  $z$  در یک همسایگی  $z_0$

۱۰. با استفاده از قضیه بخش ۱۶ نشان دهید که

$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{(z-1)^3} = \infty \quad (\text{ب}) \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{4z^2}{(z-1)^2} = 4 \quad (\text{الف})$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z^2+1}{z-1} = \infty \quad (\text{ج})$$

۱۱. با استفاده از قضیه بخش ۱۶ نشان دهید که وقتی

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad (ad - bc \neq 0),$$

(الف) اگر  $c = 0$  آنگاه  $\lim_{z \rightarrow \infty} T(z) = \infty$

(ب) اگر  $c \neq 0$  آنگاه  $\lim_{z \rightarrow \infty} T(z) = \frac{a}{c}$

۱۲. بیان کنید چرا حد های شامل نقطه در بی‌نهایت، یکتا هستند.

۱۳. نشان دهید مجموعه  $S$  بیکران است (بخش ۱۰) اگر و فقط اگر هر همسایگی نقطه در بی‌نهایت شامل حداقل یک نقطه  $S$  باشد.

## ۱۸. مشتق

فرض کنیم  $f$  تابعی باشد که حوزه تعریفش شامل همسایگی از  $z_0$  است. مشتق  $f$  در  $z_0$ , که به صورت  $f'(z_0)$  نوشته می‌شود, با رابطه

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \quad (1)$$

تعریف می‌کنیم، مشروط بر اینکه این حد موجود باشد. گوییم تابع  $f$  در  $z_0$  مشتقپذیر است در صورتی که مشتق آن در  $z_0$  موجود باشد.

تعریف (۱) را می‌توان با بیان  $z$  بر حسب متغیر مختلط جدید

$$\Delta z = z - z_0$$

به صورت زیر نوشت

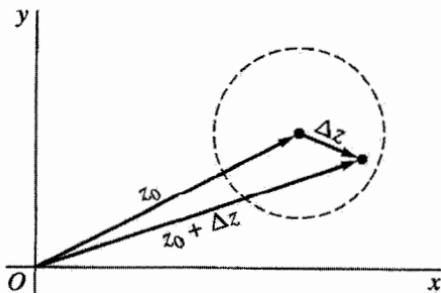
$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}. \quad (2)$$

توجه کنید که چون  $f$  در تمامی یک همسایگی  $z_0$  تعریف شده است، عدد

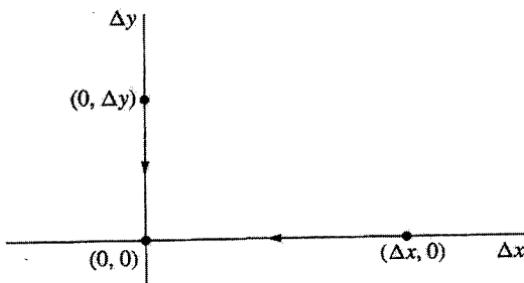
$$f(z_0 + \Delta z)$$

همیشه برای  $|\Delta z|$  به قدر کافی کوچک، تعریف می‌شود (شکل ۲۸). وقتی صورت (۲) تعریف مشتق را به کار می‌بریم اغلب زیرنویس  $z$  را حذف می‌کنیم و عدد

$$\Delta w = f(z + \Delta z) - f(z)$$



شکل ۲۸



شکل ۲۹

را معرفی می‌کنیم که نمایانگر تغییر در مقدار  $z$  متناظر با تغییر  $\Delta z$  در نقطه‌ای است که  $f$  محاسبه می‌شود. پس اگر به جای  $f'(z)$  قرار دهیم  $dw/dz$ , رابطه (۲) چنین خواهد شد

$$\frac{dw}{dz} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}. \quad (3)$$

مثال ۱. فرض کنید که  $f(z) = z^2$ . به ازای هر نقطه  $z$ ,

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(z + \Delta z)^2 - z^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} (2z + \Delta z) = 2z$$

. $f'(z) = 2z$  یک چندجمله‌ی برحسب  $\Delta z$  است. بنابراین  $dw/dz = 2z$ ، یا

مثال ۲. حال تابع  $|z|^2 = f(z)$  را در نظر می‌گیریم. در اینجا

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{|z + \Delta z|^2 - |z|^2}{\Delta z} = \frac{(z + \Delta z)(\bar{z} + \overline{\Delta z}) - z\bar{z}}{\Delta z} = \bar{z} + \overline{\Delta z} + z \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}.$$

اگر حد  $\Delta w/\Delta z$  موجود باشد، این حد را می‌توان با میل دادن نقطه  $(\Delta x, \Delta y)$  به هر طریقی به سمت مبدأ در صفحه  $z$ ها پیدا کرد. اگر به خصوص  $\Delta z$  به طور افقی از نقاط  $(\Delta x, 0)$  روی محور حقیقی به مبدأ میل کند (شکل ۲۹) می‌توانیم بنویسیم

$$\overline{\Delta z} = \overline{\Delta x + i\Delta y} = \Delta x - i\Delta y = \Delta x + i\Delta y = \Delta z$$

در این حالت

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \bar{z} + \overline{\Delta z} + z.$$

بنابراین، اگر حد  $\Delta w/\Delta z$  موجود باشد مقدار آن باید  $\bar{z} + \overline{\Delta z} + z$  باشد. ولی، اگر  $\Delta z$  به طور قائم از

طریق نقاط  $(y, \Delta y)$  روی محور موهومی به مبدأ میل کند، داریم

$$\overline{\Delta z} = \overline{z + i\Delta y} = -(\circ + i\Delta y) = -\Delta z,$$

و در می‌باییم که حد در صورت وجود باید  $z - \bar{z}$  باشد. چون حدود یکتا هستند (بخش ۱۴)، نتیجه می‌شود که اگر وجود داشته باشد، آنگاه

$$z = \circ \quad \text{یا} \quad \bar{z} + z = \bar{z} - z$$

در واقع برای آنکه نشان دهیم  $dw/dz$  در  $\circ = z$  موجود است فقط باید ملاحظه کنیم که وقتی  $\circ = z$ ، عبارت  $\overline{\Delta z} = \Delta w/\Delta z$  به تبدیل می‌شود. بدین ترتیب نتیجه می‌گیریم که  $dw/dz$  فقط در نقطه  $\circ = z$  موجود و مقدارش برابر  $\circ$  است.

مثال ۲ نشان می‌دهد که یک تابع می‌تواند در نقطه معینی مشتقپذیر باشد اما هیچ جای دیگری در هر همسایگی آن نقطه مشتقپذیر نباشد. چون قسمتهای حقیقی و موهومی  $f(z) = |z|^2$  به ترتیب عبارت‌اند از

$$v(x, y) = \circ \quad \text{و} \quad u(x, y) = x^2 + y^2 \quad (4)$$

این مثال همچنین نشان می‌دهد که مؤلفه‌های حقیقی و موهومی یک تابع یک متغیره مختلط می‌توانند در نقطه‌ای دارای مشتقات جزئی پیوسته از هر مرتبه باشند و با این حال تابع در آن نقطه مشتقپذیر نباشد.

تابع  $f(z) = |z|^2$  در هر نقطه صفحه پیوسته است زیرا مؤلفه‌های (۴) آن در هر نقطه پیوسته‌اند. بنابراین پیوستگی یک تابع در یک نقطه مستلزم وجود مشتق در آن نقطه نیست. مع‌هذا، وجود مشتق یک تابع در یک نقطه، پیوستگی تابع در آن نقطه را ایجاد می‌کند. برای اثبات این مطلب، فرض می‌کنیم  $f'(z_0)$  موجود باشد و می‌نویسیم

$$\lim_{z \rightarrow z_0} [f(z) - f(z_0)] = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) = f'(z_0) \cdot 0 = 0$$

از این رابطه نتیجه می‌شود که

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0).$$

این همان بیان پیوستگی  $f$  در  $\circ = z$  است (بخش ۱۷).

تعابیرهای هندسی مشتق تابع یک متغیره مختلط مانند تعابیرهای هندسی مشتق تابع یک متغیره حقیقی سراسرت نیستند. بررسی چنین تعابیرهایی را تا فصل ۹ به تأخیر می‌اندازیم.

## ۱۹. فرمولهای مشتقگیری

تعریف مشتق در بخش ۱۸ با تعریف مشتق تابع حقیقی مقدار با یک متغیر حقیقی، از لحاظ صورت یکی است. در واقع، فرمولهای مشتقگیری زیر را می‌توان از آن تعریف و قضایای متعدد حد، اصولاً با همان روش‌های اساسی موجود در حسابان استخراج کرد. در این فرمولها مشتق تابع  $f$  در نقطه  $z$  را، با

$$\frac{d}{dz}f(z) \quad \text{یا} \quad f'(z)$$

نشان می‌دهند، بسته به اینکه کدام علامت مناسبتر باشد.

فرض کنیم  $c$  یک عدد مختلط ثابت باشد و  $f$  تابعی که مشتقش در نقطه  $z$  موجود است. به آسانی نشان داده می‌شود که

$$\frac{d}{dz}c = 0, \quad \frac{d}{dz}z = 1, \quad \frac{d}{dz}[cf(z)] = cf'(z). \quad (1)$$

همچنین اگر  $n$  عدد صحیح مثبتی باشد،

$$\frac{d}{dz}z^n = nz^{n-1}. \quad (2)$$

این فرمول وقتی  $n$  یک عدد صحیح منفی باشد درست است، به شرطی که  $z \neq 0$ . اگر مشتقات دو تابع  $f$  و  $F$  در نقطه  $z$  موجود باشند آنگاه

$$\frac{d}{dz}[f(z) + F(z)] = f'(z) + F'(z), \quad (3)$$

$$\frac{d}{dz}[f(z)F(z)] = f(z)F'(z) + f'(z)F(z), \quad (4)$$

و وقتی  $F(z) \neq 0$

$$\frac{d}{dz}\left[\frac{f(z)}{F(z)}\right] = \frac{F(z)f'(z) - f(z)F'(z)}{[F(z)]^2}. \quad (5)$$

حال فرمول (۴) را به دست می‌آوریم. برای انجام این کار عبارت زیر را برای تغییر در حاصلضرب  $w = f(z)F(z)$  می‌نویسیم:

$$\begin{aligned}\Delta w &= f(z + \Delta z)F(z + \Delta z) - f(z)F(z) \\ &= f(z)[F(z + \Delta z) - F(z)] \\ &\quad + [f(z + \Delta z) - f(z)]F(z + \Delta z).\end{aligned}$$

بنابراین

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = f(z) \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} + \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} F(z + \Delta z)$$

و اگر  $\Delta z$  را به صفر میل دهیم به فرمول مطلوب برای مشتق  $f(z)F(z)$  می‌رسیم. در اینجا از پیوستگی  $F$  در نقطه  $z$  استفاده کرده‌ایم، زیرا  $F'(z)$  موجود است: در نتیجه وقتی  $\Delta z$  به  $0^\circ$  میل کند  $F(z + \Delta z)$  به  $F(z)$  میل می‌کند (تمرین ۸ بخش ۱۷ را ببینید).

یک قاعدة زنجیری برای مشتقگیری توابع مرکب نیز موجود است. فرض کنیم  $f$  در نقطه  $z_0$  و  $g$  در نقطه  $(z_0, f(z_0))$  مشتق داشته باشند. در این صورت تابع  $[g[f(z)]$  در نقطه  $z_0$  دارای مشتق است و

$$F'(z_0) = g'[f(z_0)]f'(z_0). \quad (6)$$

اگر قرار دهیم  $W = F(z)$  و  $w = f(z)$  و  $W = g(w)$  آنگاه  $W = g(f(z))$  و قاعدة زنجیری بدین صورت در می‌آید

$$\frac{dW}{dz} = \frac{dW}{dw} \frac{dw}{dz}.$$

مثال. برای محاسبه مشتق  $(2z^2 + i)^5$  می‌نویسیم  $i = w^5$  و  $w = 2z^2 + i$ . در این صورت

$$\frac{d}{dz}(2z^2 + i)^5 = 5w^4 \cdot 4z = 20z(2z^2 + i)^4.$$

برای اثبات فرمول (۶)، نقطه مشخص  $z$  را چنان انتخاب می‌کنیم که  $f'(z_0)$  موجود باشد. می‌نویسیم  $w = f(z_0)$  و همچنین فرض می‌کنیم  $g'(w)$  موجود باشد. حال یک  $\varepsilon$  همسایگی  $\varepsilon < |w - w_0|$  موجود است به قسمی که بهارای هر  $w$  در این همسایگی

## می‌توان تابع

$$\Phi(w) = \begin{cases} \frac{g(w) - g(w_0)}{w - w_0} - g'(w_0) & w \neq w_0, \\ 0 & w = w_0. \end{cases} \quad (7)$$

را تعریف کرد.

توجه کنید که نظر به تعریف مشتق، می‌توان نوشت

$$\lim_{w \rightarrow w_0} \Phi(w) = 0. \quad (8)$$

بنابراین  $\Phi$  در  $w_0$  پیوسته است.

حال عبارت (7) را می‌توان به صورت

$$g(w) - g(w_0) = [g'(w_0) + \Phi(w)](w - w_0) \quad (|w - w_0| < \varepsilon), \quad (9)$$

نوشت که حتی وقتی  $w = w_0$  برقرار است؛ و چون  $f'(z_0)$  موجود و در نتیجه  $f$  در  $z_0$  پیوسته است، می‌توان عدد مثبت  $\delta$  بی انتخاب کرد به قسمی که اگر  $z$  در  $\delta$  همسایگی  $z_0$  از  $z$  واقع باشد،  $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$  باشد، مجازیم که در عبارت (9) به جای  $w$ ،  $f(z)$  نقطه دلخواهی در همسایگی  $z_0$  باشد، معادله (9) به صورت زیر در می‌آید

$$\frac{g[f(z)] - g[f(z_0)]}{z - z_0} = \{g'[f(z_0)] + \Phi[f(z)]\} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \quad (|z - z_0| < \delta), \quad (10)$$

که در آن باید قید کنیم  $z \neq z_0$ ، تا حالت تقسیم بر صفر پیش نیاید. همان‌طور که قبل از ذکر دادیم،  $f$  در  $z_0$  و  $\Phi$  در نقطه  $f(z_0) = f_0$  پیوسته است. بنابراین تکیب  $\Phi[f(z)]$  در  $z_0$  پیوسته است؛ و چون  $\Phi(w_0) = 0$  داریم،

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \Phi[f(z)] = 0.$$

بنابراین، وقتی  $z$  به  $z_0$  میل کند رابطه (10) چنین می‌شود

$$F'(z_0) = g'[f(z_0)]f'(z_0).$$

## تمرینها

۱. با استفاده از نتایج بخش ۱۹،  $(z')'$  را بیابید، هرگاه

$$f(z) = (1 - 4z^2)^3 \quad (a) \quad f(z) = 3z^2 - 2z + 4 \quad (b)$$

$$f(z) = \frac{(1+z^2)^4}{z^2} \quad (z \neq 0) \quad (d) \quad f(z) = \frac{z-1}{2z+1} \quad (z \neq -\frac{1}{2}) \quad (c)$$

۲. با استفاده از نتایج بخش ۱۹ نشان دهید که

(الف) چندجمله‌ای درجه  $n$  ( $n \geq 1$ )

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n \quad (a_n \neq 0)$$

همه جا مشتق‌پذیر است، با مشتق

$$P'(z) = a_1 + 2a_2 z + \cdots + n a_n z^{n-1};$$

(ب) ضرایب چندجمله‌ای  $P(z)$  در قسمت (الف) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$a_0 = P(0), \quad a_1 = \frac{P'(0)}{1!}, \quad a_2 = \frac{P''(0)}{2!}, \quad \dots, \quad a_n = \frac{P^{(n)}(0)}{n!}.$$

۳. تعریف (۳) از بخش (۱۸) در مورد مشتق را به کار برد، تا برهان مستقیمی ارائه دهید برای اینکه اگر  $f'(z) = 1/z$  ( $z \neq 0$ )، آنگاه  $f(z) = -1/z^2$ .

۴. فرض کنید که  $f(z_0) = g(z_0) = 0$  و  $f'(z_0) \neq 0$ . فرمول (۴) موجود باشدند به طوری که

$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}$ . با استفاده از تعریف (۱)، بخش ۱۸ در مورد مشتق نشان دهید که

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.$$

۵. فرمول (۳)، بخش ۱۹، را برای مشتق مجموع دوتابع به دست آورید.

۶. عبارت (۲)، بخش ۱۹، برای مشتق  $z^n$  را وقتی  $n$  عدد صحیح مثبتی است، با استفاده از (الف) استقرای ریاضی و فرمول (۴)، بخش ۱۹، برای مشتق حاصلضرب دوتابع؛

(ب) تعریف (۳)، بخش ۱۸، مشتق و فرمول دوچمله‌ای (بخش ۳) به دست آورید.

۷. ثابت کنید عبارت (۲)، بخش ۱۹، برای مشتق  $z^n$  وقتی  $n$  عددی صحیح و منفی باشد

$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z^n}{z - z_0} = n z^{n-1}$  با شرط  $z \neq z_0$  است.

راهنمایی: قرار دهید  $-n = m$  و از فرمول مشتق خارج قسمت دو تابع استفاده کنید.  
۸. با استفاده از روش مثال ۲، بخش ۱۸، نشان دهید که  $(z')^f$  هیچ جا موجود نیست هرگاه

$$\cdot f(z) = \operatorname{Im} z \quad ; \quad f(z) = \operatorname{Re} z \quad ; \quad f(z) = \bar{z} \quad (\text{الف})$$

۹. فرض کنید  $f$  تابعی باشد که مقادیر آن عبارت اند از

$$f(z) = \begin{cases} \frac{\bar{z}^2}{z}, & z \neq 0 \\ 0, & z = 0 \end{cases}$$

نشان دهید اگر  $z = z_0$  در هر نقطه ناصفر روی محورهای حقیقی و موهومی صفحه  $\Delta z$  یا صفحه  $\Delta x \Delta y$  داریم  $\Delta w / \Delta z = 1$ . سپس نشان دهید که در هر نقطه ناصفر  $(\Delta x, \Delta y)$  روی خط  $\Delta y = \Delta x$  در آن صفحه داریم  $\Delta w / \Delta z = -1$ . با استفاده از این ملاحظات نتیجه بگیرید که  $(z')^f$  موجود نیست. (توجه کنید که برای به دست آوردن این نتیجه کافی نیست که فقط روش‌های میل‌دادن به صورت افقی و قائم به سمت مبدأ را در صفحه  $\Delta z$  در نظر بگیریم.)

## ۲۰. معادلات کوشی-ریمان

در این بخش یک زوج معادله به دست می‌آوریم که وقتی تابع

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \quad (1)$$

در نقطه  $(x_0, y_0) = z_0$  دارای مشتق باشد آنگاه مشتقات جزئی مرتبه اول تابع مؤلفه‌یی  $u$  و  $v$  تابع  $f$  باید در آن نقطه در این معادلات صدق کنند. همچنین چگونگی نوشتن  $(z_0)^f$  بر حسب این مشتقات جزئی را نشان می‌دهیم.

$$\Delta z = \Delta x + i\Delta y, \quad z_0 = x_0 + iy_0$$

$$\begin{aligned} \Delta w &= f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) \\ &= [u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)] \\ &\quad + i[v(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)] \end{aligned}$$

کار خود را شروع می‌کنیم. فرض کنید مشتق

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} \quad (2)$$

موجود باشد. بنابر قضیه ۱ بخش ۱۵ می‌دانیم که

$$f'(z_0) = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \operatorname{Re} \frac{\Delta w}{\Delta z} + i \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \operatorname{Im} \frac{\Delta w}{\Delta z}. \quad (3)$$

حال توجه به این نکته مهم است که به هر طریقی  $(\Delta x, \Delta y)$  به  $(0,0)$  میل کند، عبارت (۳) معتبر است. به خصوص فرض کنید  $(\Delta x, \Delta y)$  به طور افقی از طریق نقاط  $(0,0)$  به صورتی که در شکل ۲۹ (بخش ۱۸) نشان داده شده است به  $(0,0)$  میل کند. اگر  $\Delta y = 0$ ، خارج قسمت  $\Delta w / \Delta z$  به شکل زیر درمی‌آید

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)}{\Delta x} + i \frac{v(x_0 + \Delta x, y_0) - v(x_0, y_0)}{\Delta x}.$$

بنابراین

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \operatorname{Re} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)}{\Delta x} = u_x(x_0, y_0)$$

و

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \operatorname{Im} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x_0 + \Delta x, y_0) - v(x_0, y_0)}{\Delta x} = v_x(x_0, y_0)$$

که در آن  $u_x(x_0, y_0)$  و  $v_x(x_0, y_0)$  به ترتیب نمایش مشتق جزئی مرتبه اول توابع  $u$  و  $v$  نسبت به  $x$  در  $(x_0, y_0)$  هستند. با جایگذاری این حدها در عبارت (۳) نتیجه می‌شود که

$$f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0). \quad (4)$$

ممکن است  $\Delta z$  را به طور قائم از طریق نقاط  $(0, \Delta y)$  به صفر میل داد. در این حالت و  $\Delta x = 0$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta w}{\Delta z} &= \frac{u(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)}{i\Delta y} + i \frac{v(x_0, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)}{i\Delta y} \\ &= \frac{v(x_0, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)}{\Delta y} - i \frac{u(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)}{\Delta y}. \end{aligned}$$

پس روش است که

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)} \operatorname{Re} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{v(x_0, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)}{\Delta y} = v_y(x_0, y_0)$$

و

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)} \operatorname{Im} \frac{\Delta w}{\Delta z} = - \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{u(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)}{\Delta y} = -u_y(x_0, y_0)$$

بنابراین از عبارت (۳) نتیجه می‌شود که

$$f'(z_0) = v_y(x_0, y_0) - iu_y(x_0, y_0), \quad (5)$$

که این بار بر حسب مشتقات جزئی مرتبه اول  $u$  و  $v$  نسبت به  $y$  حساب شده است. توجه کنید که معادله (۵) را می‌توان به صورت زیر نیز نوشت

$$f'(z_0) = -i[u_y(x_0, y_0) + iv_y(x_0, y_0)].$$

روابط (۴) و (۵) نه تنها فرمولهایی برای یافتن  $(z_0) f'$  بر حسب مشتقات جزئی توابع مؤلفه‌یی  $u$  و  $v$  هستند، بلکه شرایطی لازم برای وجود  $(z_0) f'$  نیز فراهم می‌آورند. زیرا، با مساوی قراردادن قسمتهای حقیقی و موهومی سمت راست این روابط در می‌یابیم که وجود  $(z_0) f'$  مستلزم این است که

$$u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0) \quad \text{و} \quad u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) \quad (6)$$

روابط (۶) معادلات کوشی-ریمان‌اند؛ که به افتخار ریاضیدان فرانسوی کوشی (۱۸۵۷-۱۷۸۹) که آنها را کشف کرد و به کاربرد و ریاضیدان آلمانی ریمان (۱۸۲۶-۱۸۶۶) که آنها را پایه توسعه نظریه توابع یک متغیره مختلط قرار داد، چنین نامگذاری شده‌اند. نتایج فوق را چنین خلاصه می‌کنیم.

قضیه. فرض می‌کنیم که

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

و  $(z) f' = x_0 + iy_0$  در نقطه موجود باشد. در این صورت، مشتقات جزئی مرتبه اول  $u$  و  $v$  در  $(x_0, y_0)$  موجودند و در آن نقطه در معادلات کوشی-ریمان صدق می‌کنند یعنی

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x. \quad (7)$$

همچنین  $(z_0)$  را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$f'(z_0) = u_x + iv_x, \quad (8)$$

که در آن مشتقات جزئی در  $(x_0, y_0)$  محاسبه شده‌اند.

مثال ۱. در مثال ۱، بخش ۱۸، نشان دادیم که تابع

$$f(z) = z^2 = x^2 - y^2 + i2xy$$

همه جا مشتقپذیر است و  $f'(z) = 2z$ . برای اینکه تحقیق کنیم معادلات کوشی-ریمان همه جا برقرارند، توجه می‌کنیم که

$$u(x, y) = x^2 - y^2 \quad \text{و} \quad v(x, y) = 2xy$$

در نتیجه

$$u_x = 2x = v_y, \quad u_y = -2y = -v_x.$$

به علاوه بنابر رابطه (۸)،

$$f'(z) = 2x + i2y = 2(x + iy) = 2z.$$

چون معادلات کوشی-ریمان برای وجود مشتق تابع  $f$  در نقطه  $z_0$  شرایطی لازم‌اند، اغلب می‌توان از آنها برای تعیین نقاطی که در آن نقاط،  $f$  دارای مشتق نیست استفاده کرد.  
مثال ۲. وقتی  $f(z) = |z|^2$ ، داریم

$$u(x, y) = x^2 + y^2 \quad \text{و} \quad v(x, y) = 0.$$

اگر معادلات کوشی-ریمان در نقطه  $(x, y)$  برقرار باشند نتیجه می‌شود که  $x = 0$  و  $y = 0$  یا  $x = y = 0$ . در نتیجه در هیچ نقطه  $z$  مخالف صفر،  $f'(z)$  موجود نیست، همان‌طوری که قبلًا از مثال (۲) بخش (۱۸) به آن پی بردیم. توجه کنید که قضیه بالا وجود  $(z_0)$  را تضمین نمی‌کند. ولی قضیه‌ای که در بخش بعد خواهد آمد وجود  $(z_0)$  را تضمین می‌کند.

## ۲۱. شرایط کافی برای مشتقپذیری

برقراری معادلات کوشی-ریمان در نقطه  $(x_0, y_0)$  برای وجود مشتق  $f$  در آن نقطه کافی نیست. (تمرین ۶ بخش ۲۲ را ببینید). اما با برخی شرایط پیوستگی، قضیه مفید زیر را داریم.

قضیه. فرض کنید تابع

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

در سراسر یک همسایگی نقطه  $z_0 = x_0 + iy_0$  تعریف شده باشد. فرض کنید که مشتقات جزئی مرتبه اول تابع  $u$  و  $v$  نسبت به  $x$  و  $y$  در آن همسایگی موجود و در  $(x_0, y_0)$  پیوسته باشند. در این صورت اگر این مشتقات جزئی در  $(x_0, y_0)$  در معادلات کوشی-ریمان

$$u_y = -v_x, \quad u_x = v_y$$

صدق کنند، مشتق  $f'(z_0)$  موجود است.

برای شروع اثبات می‌نویسیم  $\Delta z = \Delta x + i\Delta y < 0$  و

$$\Delta w = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0).$$

بنابراین

$$\Delta w = \Delta u + i\Delta v, \tag{۱}$$

که در آن

$$\Delta u = u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)$$

و

$$\Delta v = v(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0).$$

اما با توجه به پیوستگی مشتقات جزئی مرتبه اول  $u$  و  $v$  در نقطه  $(x_0, y_0)$  می‌توان نوشت\*

$$\Delta u = u_x(x_0, y_0)\Delta x + u_y(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon_1 \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}, \tag{۲}$$

\* برای مثال صفحات ۱۵۰-۱۵۱ و ۱۹۷-۱۹۸ کتاب زیر را ببینید

$$\Delta v = v_x(x_0, y_0) \Delta x + v_y(x_0, y_0) \Delta y + \varepsilon_2 \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}, \quad (3)$$

که در آن  $\varepsilon_1$  و  $\varepsilon_2$  به  ${}^{\circ}$  میل می‌کنند وقتی که  $(\Delta x, \Delta y)$  در صفحه  $\Delta z$  به  $({}^{\circ}, {}^{\circ})$  میل کند.  
حال با جایگذاری عبارات (۲) و (۳) در رابطه (۱) نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned} \Delta w &= u_x(x_0, y_0) \Delta x + u_y(x_0, y_0) \Delta y + \varepsilon_1 \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \\ &\quad + i[v_x(x_0, y_0) \Delta x + v_y(x_0, y_0) \Delta y + \varepsilon_2 \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}]. \end{aligned} \quad (4)$$

با این فرض که معادلات کوشی-ریمان در  $(x_0, y_0)$  برقرارند، در رابطه (۴) می‌توانیم به جای  $u_y(x_0, y_0) - v_x(x_0, y_0)$  مقدار  $v_y(x_0, y_0)$  و به جای  $u_x(x_0, y_0)$  مقدار  $-v_y(x_0, y_0)$  را قرار دهیم  
و سپس بر  $\Delta z$  تقسیم کنیم تا بدست آوریم

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = u_x(x_0, y_0) + i v_x(x_0, y_0) + (\varepsilon_1 + i \varepsilon_2) \frac{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}{\Delta z} \quad (5)$$

اما،  $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = |\Delta z|$  و در نتیجه

$$\left| \frac{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}{\Delta z} \right| = 1.$$

همچنین وقتی  $(\Delta x, \Delta y)$  به  $({}^{\circ}, {}^{\circ})$  میل کند  $i\varepsilon_1 + \varepsilon_2$  به صفر میل می‌کند. بنابراین وقتی متغیر  $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$  به صفر میل کند، جمله آخر سمت راست رابطه (۵) به  ${}^{\circ}$  میل خواهد کرد.  
بنابراین حد سمت چپ رابطه (۵) موجود است و

$$f'(z_0) = u_x + i v_x. \quad (6)$$

### مثال ۱. تابع نمایی

$$f(z) = e^z = e^x e^{iy} \quad (z = x + iy),$$

را که برخی از ویژگیهای نگاشتش را در بخش ۱۳ مورد بحث قرار دادیم، در نظر می‌گیریم. به موجب فرمول اویلر، (بخش ۶)، این تابع را می‌توان به صورت زیر

$$f(z) = e^x (\cos y + i \sin y),$$

نوشت که در محاسبه  $\cos y$  و  $\sin y$  مقدار  $y$  را بحسب رادیان می‌گیریم. پس

$$u(x, y) = e^x \cos y \quad \text{و} \quad v(x, y) = e^x \sin y$$

چون همه جا  $v_y = u_x = -v_x$  و این مشتقات همه جا پیوسته‌اند، شرایط قضیه در همه نقاط صفحه مختلط برقرارند. بنابراین همه جا مشتق،  $(z)^f$ ، موجود است و

$$f'(z) = u_x + iv_x = e^x(\cos y + i \sin y)$$

توجه می‌کنید که  $f'(z) = f(z)$ .

مثال ۲. از قضیه این بخش تیجه می‌شود که تابع  $f(z) = |z|^2$  که مؤلفه‌های آن عبارت‌اند از

$$v(x, y) = 0 \quad \text{و} \quad u(x, y) = x^2 + y^2$$

در  $z = z$  دارای مشتق است، در واقع  $i = 0 + 0i = (0)^f$  (با مثال ۲، بخش ۱۸، مقایسه کنید). در مثال ۲، بخش ۲۰، دیدیم که این تابع نمی‌تواند در نقاط مخالف صفر مشتق داشته باشد زیرا در چنین نقاطی معادلات کوشی-رمان برقرار نیستند.

## ۲۲. مختصات قطبی

با فرض اینکه  $z \neq 0$ ، در این بخش از تبدیل مختصات

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \tag{1}$$

استفاده کرده قضیه بخش ۲۱ را در مختصات قطبی از نو بیان می‌کنیم.

وقتی  $w = f(z)$ ، بسته به اینکه  $z$  را به صورت

$$(z \neq 0) \quad z = re^{i\theta} \quad \text{یا} \quad z = x + iy$$

بنویسیم، قسمت‌های حقیقی و موهومی  $w = u + iv$  بحسب متغیرهای  $x$  و  $y$  یا  $r$  و  $\theta$  بیان می‌شوند. فرض کنید که مشتقات جزئی مرتبه اول  $u$  و  $v$  نسبت به  $x$  و  $y$  در هر نقطه از یک همسایگی نقطه ناصفر  $z$  موجود و در آن نقطه پیوسته باشند. مشتقات جزئی مرتبه اول نسبت به  $r$  و  $\theta$  نیز دارای این ویژگیها هستند و با استفاده از قاعده زنجیری برای مشتق‌گیری توابع حقیقی مقدار

از دو متغیر حقیقی می‌توان آنها را برحسب مشتقات نسبت به  $x$  و  $y$  بیان کرد. به عبارت دقیقتر،

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r}, \quad \frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta},$$

می‌توان نوشت

$$u_r = u_x \cos \theta + u_y \sin \theta, \quad u_\theta = -u_x r \sin \theta + u_y r \cos \theta. \quad (2)$$

همین‌طور

$$v_r = v_x \cos \theta + v_y \sin \theta, \quad v_\theta = -v_x r \sin \theta + v_y r \cos \theta. \quad (3)$$

اگر مشتقات جزئی نسبت به  $x$  و  $y$  در نقطه  $z$  در معادلات کوشی-ریمان

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x \quad (4)$$

نیز صدق کنند، معادلات (۳) در آن نقطه به معادلات زیر تبدیل می‌شوند

$$v_r = -u_y \cos \theta + u_x \sin \theta, \quad v_\theta = u_y r \sin \theta + u_x r \cos \theta \quad (5)$$

بنابراین از معادلات (۲) و (۵) واضح است که در نقطه  $z$

$$r u_r = v_\theta, \quad u_\theta = -r v_r. \quad (6)$$

اگر از طرف دیگر بدانیم که معادلات (۶) در  $z$  برقرارند، مستقیماً می‌توان نشان داد (تمرین ۷) که معادلات (۴) باید در آن نقطه برقرار باشند. بنابراین معادلات (۶) صورت دیگری از معادلات کوشی-ریمان (۴) هستند.

حال می‌توان قضیه بخش ۲۱ را با استفاده از مختصات قطبی از نو بیان کرد.

قضیه. فرض کنید تابع

$$f(z) = u(r, \theta) + i v(r, \theta)$$

در یک  $\varepsilon$  همسایگی نقطه ناصر  $z_0 = r_0 \exp(i\theta_0)$  تعریف شده باشد. فرض می‌کنیم که مشتقات جزئی مرتبه اول توابع  $u$  و  $v$  در آن همسایگی موجود باشند. اگر این مشتقات جزئی در  $(r_0, \theta_0)$  پیوسته باشند و در  $(r_0, \theta_0)$  در صورت قطبی

$$r u_r = v_\theta, \quad u_\theta = -r v_r$$

معادلات کوشی-ریمان صدق کنند، آنگاه  $(z_0, f'(z_0))$  موجود است.

در اینجا می‌توان مشتق  $(z_0, f')$  را به صورت زیر نوشت (تمرین ۸ را ببینید)

$$f'(z_0) = e^{-i\theta} (u_r + iv_r), \quad (7)$$

که سمت راست آن در  $(r_0, \theta_0)$  محاسبه می‌شود.

### مثال ۱. تابع

$$f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{r} e^{-i\theta} = \frac{1}{r} (\cos \theta - i \sin \theta) \quad (z \neq 0). \quad (8)$$

را در نظر می‌گیریم. چون

$$v(r, \theta) = -\frac{\sin \theta}{r} \quad \text{و} \quad u(r, \theta) = \frac{\cos \theta}{r}$$

شرط قضیه فوق در هر نقطه ناصفر صفحه، مانند  $z = re^{i\theta}$  برقرارند. به خصوص، معادلات کوشی-ریمان

$$u_\theta = -\frac{\sin \theta}{r} = -rv_r \quad \text{و} \quad ru_r = -\frac{\cos \theta}{r} = v_\theta$$

برقرارند. پس مشتق  $f$  وقتی  $z \neq 0$  موجود است و بنابر عبارت (7) داریم

$$f'(z) = e^{-i\theta} \left( -\frac{\cos \theta}{r^2} + i \frac{\sin \theta}{r^2} \right) = -e^{-i\theta} \frac{e^{-i\theta}}{r^2} = -\frac{1}{(re^{i\theta})^2} = -\frac{1}{z^2}.$$

مثال ۲. با استفاده از قضیه فوق می‌توان نشان داد که اگر  $\alpha$  عدد حقیقی ثابتی باشد، تابع

$$f(z) = \sqrt[3]{r} e^{i\theta/3} \quad (r > 0, \alpha < \theta < \alpha + 2\pi) \quad (9)$$

در هر نقطه از حوزه تعریف خود مشتق دارد. در اینجا

$$v(r, \theta) = \sqrt[3]{r} \sin \frac{\theta}{3} \quad \text{و} \quad u(r, \theta) = \sqrt[3]{r} \cos \frac{\theta}{3}$$

از آنجا که

$$u_\theta = -\frac{\sqrt[3]{r}}{3} \sin \frac{\theta}{3} = -rv_r \quad \text{و} \quad ru_r = \frac{\sqrt[3]{r}}{3} \cos \frac{\theta}{3} = v_\theta$$

و چون شرایط دیگر قضیه برقرارند، مشتق  $(z)f'(z)$  در هر نقطه‌ای که  $f(z)$  تعریف شده است موجود است. به علاوه بنابر عبارت (۷) داریم

$$f'(z) = e^{-i\theta} \left[ \frac{1}{3(\sqrt[3]{r})^2} \cos \frac{\theta}{3} + i \frac{1}{3(\sqrt[3]{r})^2} \sin \frac{\theta}{3} \right],$$

یا

$$f'(z) = \frac{e^{-i\theta}}{3(\sqrt[3]{r})^2} e^{i\theta/3} = \frac{1}{3(\sqrt[3]{r} e^{i\theta/3})^2} = \frac{1}{3[f(z)]^2}.$$

توجه کنید که وقتی  $z$  نقطه مشخصی در حوزه تعریف  $f$  گرفته شود، مقدار  $f(z)$  یکی از مقادیر  $z^{1/3}$  است (بخش ۱۱ را ببینید). در اینجا عبارت آخری برای  $(z)f'(z)$  را می‌توان به شکل زیر نوشت

$$\frac{d}{dz} z^{1/3} = \frac{1}{3(z^{1/3})^2}$$

هرگاه آن مقدار گرفته شده باشد. مشتقات چنین توابع توانی در فصل ۳ (بخش ۳۲) به طور کامل بررسی خواهد شد.

### تمرینها

۱. با استفاده از قضیه بخش ۲۰ نشان دهید که  $(z)f'(z)$  در هیچ نقطه‌ای موجود نیست اگر

$$f(z) = z - \bar{z} \quad (\text{ب}) \quad f(z) = \bar{z} \quad (\text{الف})$$

$$f(z) = e^x e^{-iy} \quad (\text{د}) \quad f(z) = 2x + ixy^2 \quad (\text{ج})$$

۲. با استفاده از قضیه بخش ۲۱ نشان دهید که  $(z)f'(z)$  و مشتق آن  $(z)f''(z)$  همه جا موجودند و  $f'''(z)$  را پیدا کنید، هرگاه

$$f(z) = e^{-x} e^{-iy} \quad (\text{الف}) \quad f(z) = iz + 2 \quad (\text{ب})$$

$$f(z) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y \quad (\text{د}) \quad f(z) = z^3 \quad (\text{ج})$$

$f''(z) = -f(z)$  (د)  $f''(z) = f(z)$  (ب) جواب:

۳. با استفاده از نتایج حاصل در بخش‌های ۲۰ و ۲۱ معین کنید کجا  $(z)f'(z)$  موجود است و مقدارش را پیدا کنید، در صورتی که

$$f(z) = z \operatorname{Im} z \quad (\text{ج}) \quad f(z) = x^2 + iy^2 \quad (\text{ب}) \quad f(z) = 1/z \quad (\text{الف})$$

$f'(\infty) = 0$  (ج)  $f'(x+ix) = 2x$  (ب)  $f'(z) = -1/z^2$  ( $z \neq 0$ ) (الف) جواب:

۴. با استفاده از قضیه بخش ۲۲ نشان دهید که هر یک از این توابع در حوزه تعریف مشخص شده، مشتقپذیر است و سپس با استفاده از عبارت (۷) آن بخش،  $(z^f)'$  را پیدا کنید:

$$(الف) f(z) = 1/z^4 \quad (z \neq 0)$$

$$(ب) f(z) = \sqrt{r} e^{i\theta/2} \quad (r > 0, \alpha < \theta < \alpha + 2\pi)$$

$$(ج) f(z) = e^{-\theta} \cos(\ln r) + i e^{-\theta} \sin(\ln r) \quad (r > 0, 0 < \theta < 2\pi)$$

$$f'(z) = i f(z)/z \quad (ج) \quad f'(z) = 1/[2f(z)] \quad (ب)$$

۵. نشان دهید اگر  $f(z) = x^3 + i(1-y)^3$  فقط برای  $i = z$  مجاز به نوشتند رابطه زیر هستیم

$$f'(z) = u_x + i v_x = 3x^2.$$

۶. فرض کنید  $u$  و  $v$  معرف مؤلفه‌های حقیقی و موهومی تابع  $f$  باشند که با ضابطه‌های زیر تعریف شده است

$$f(z) = \begin{cases} \frac{\bar{z}^4}{z}, & z \neq 0 \\ 0, & z = 0 \end{cases}$$

تحقیق کنید که معادلات کوشی-ریمان  $v_y = -u_x$  و  $u_y = -v_x$  در مبدأ  $(0, 0)$  برقرارند.

[با تمرین ۱۹، بخش ۹، که در آن نشان دادید با وجود این  $(0, 0)$  موجود نیست، مقایسه کنید].

۷. معادلات (۲)، بخش ۲۲، را برحسب  $u_x$  و  $u_y$  حل کرده نشان دهید که

$$u_y = u_r \sin \theta + u_\theta \frac{\cos \theta}{r} \quad \text{و} \quad u_x = u_r \cos \theta - u_\theta \frac{\sin \theta}{r}$$

سپس با استفاده از این روابط و روابط مشابه برای  $v_x$  و  $v_y$  نشان دهید که اگر در بخش ۲۲

معادلات (۶) در نقطه  $z$  برقرار باشند، آنگاه معادلات (۴) در آن نقطه برقرارند. بدین ترتیب این

تحقیق را کامل کنید که معادلات (۶)، بخش ۲۲، صورت قطبی معادلات کوشی-ریمان‌اند.

۸. فرض کنید تابع  $f(z) = u + iv$  در نقطه ناصرف  $(0, 0)$  مشتقپذیر باشد. با

استفاده از عباراتی که برای  $u_x$  و  $v_x$  در تمرین ۷ پیدا کردیم و صورت قطبی معادلات کوشی-ریمان،

روابط (۶) بخش ۲۲، نشان دهید که  $f'(z_0) = u_x + iv_x$  در بخش ۲۱ را می‌توان به صورت

زیرنوشت

$$f'(z_0) = e^{-i\theta}(u_r + iv_r),$$

که در آن  $u_r$  و  $v_r$  در  $(r_0, \theta_0)$  محاسبه شده‌اند.

۹. (الف) به کمک صورت قطبی معادلات کوشی-ریمان، روابط (۶)، بخش ۲۲، از روی عبارتی که در تمرین ۸ برای  $f'(z_0)$  بدست آمد، صورت دیگر زیر را بدست آورید

$$f'(z_0) = \frac{-i}{z_0} (u_\theta + iv_\theta).$$

(ب) با استفاده از عبارتی که در قسمت (الف) برای  $f'(z)$  بدست آمد نشان دهید که مشتق تابع  $f(z) = 1/z$  در مثال ۱ بخش ۲۲ عبارت است از  $-1/z^2$ .  
۱۰. (الف) یادآوری می‌کنیم که (بخش ۵) اگر  $z = x + iy$ ، آنگاه

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad \text{و} \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

با کاربرد صوری قاعده زنجیری در حسابان برای تابع  $F(x, y)$  از دو متغیر حقیقی، عبارت زیر را بدست آورید

$$\frac{\partial F}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial F}{\partial x} + i \frac{\partial F}{\partial y} \right).$$

(ب) با الهام گرفتن از قسمت (الف)، عملگر

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right),$$

را تعریف کرده نشان دهید که اگر مشتقات جزئی مرتبه اول قسمتهای حقیقی و موهومی تابع  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  در معادلات کوشی-ریمان صدق کنند، آنگاه

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} [(u_x - v_y) + i(v_x + u_y)] = 0.$$

بدین ترتیب صورت مختلط  $\partial f / \partial \bar{z} = 0$  برای معادلات کوشی-ریمان را بدست آورید.

## ۲۳. توابع تحلیلی

حال آماده‌ایم تا مفهوم تابع تحلیلی را معرفی کنیم. تابع  $f$  از متغیر مختلط  $z$  در یک مجموعه باز تحلیلی است اگر در هر نقطه آن مجموعه دارای مشتق باشد.\* اگر از تابع  $f$  ای سخن به میان می‌آوریم که در مجموعه  $S$  تحلیلی است و  $S$  باز نیست منظور این است که  $f$  در مجموعه بازی

\* در متونی که در این زمینه نوشته شده اصطلاحات منظم و هولومورف نیز به معنی تحلیلی بودن به کار رفته‌اند.

شامل  $S$  تحلیلی است. به خصوص  $f$  در نقطه  $z$  تحلیلی است اگر در یک همسایگی  $z$  تحلیلی باشد.

توجه می‌کنیم که مثلاً تابع  $z = 1/z$  در هر نقطه ناصرف صفحه متناهی تحلیلی است. اما تابع  $|z|^2 = f(z)$  در هیچ نقطه‌ای تحلیلی نیست زیرا مشتق آن فقط در  $z = 0$  موجود است نه در سراسر یک همسایگی. (مثال ۲، بخش ۱۸، را ببینید).

یک تابع تام، تابعی است که در تمام نقاط صفحه متناهی، تحلیلی باشد. چون مشتق یک چندجمله‌یی همه جا موجود است، نتیجه می‌شود که هر چندجمله‌یی یک تابع تام است. اگر تابع  $f$  در نقطه  $z$  تحلیلی نباشد اما در نقطه‌ای از هر همسایگی  $z$  تحلیلی باشد آنگاه  $z$  یک نقطه تکین، یا تکینی، تابع  $f$  نامیده می‌شود. روشن است که نقطه  $z = 0$  یک نقطه تکین تابع  $z = 1/z$  است. از طرف دیگر تابع  $|z|^2 = f(z)$  دارای نقطه تکین نیست، زیرا در هیچ جا تحلیلی نیست.

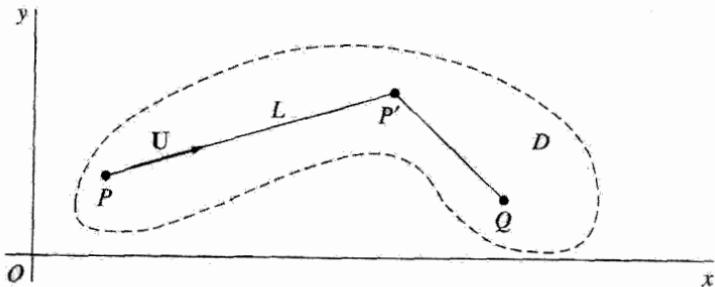
یک شرط لازم، اما نه به هیچ‌وجه کافی، برای اینکه تابع  $f$  در حوزه  $D$  تحلیلی باشد، بهوضوح پیوستگی  $f$  در سراسر  $D$  است. همچنین برقراری معادلات کوشی-ریمان لازم است ولی کافی نیست. شرایطی کافی برای تحلیلی بودن در  $D$  بهوسیله قضایای دو بخش ۲۱ و ۲۲ فراهم شده‌اند.

از فرمولهای مشتقگیری بخش ۱۹ شرایط کافی و مفید دیگری به دست می‌آیند. مشتق مجموع و حاصلضرب دو تابع موجودند هرگاه خود تابع دارای مشتق باشند. در نتیجه، اگر دو تابع در حوزه  $D$  تحلیلی باشند، مجموع و حاصلضرب آنها هر دو در  $D$  تحلیلی‌اند. به همین نحو، خارج قسمت آن دو تابع در  $D$  تحلیلی است، مشروط بر اینکه تابع مخرج در هیچ نقطه  $D$  صفر نباشد. به خصوص، خارج قسمت  $P(z)/Q(z)$  دو چندجمله‌یی در هر حوزه که در سراسر آن  $Q(z) \neq 0$  تحلیلی است.

از قاعدة زنجیری برای مشتق یک تابع مرکب، در می‌باییم که ترکیب دو تابع تحلیلی، تحلیلی است. به عبارت دقیق‌تر، فرض کنید تابع  $(z)^f$  در حوزه  $D$  تحلیلی و تصویر  $D$  تحت تبدیل  $g(z) = w$  در حوزه تعریف تابع تحلیلی  $(w)^g$  واقع باشد. در این صورت ترکیب  $[f(z)]^g$  در  $D$  تحلیلی و مشتق آن برابر است با

$$\frac{d}{dz} g[f(z)] = g'[f(z)]f'(z).$$

قضیه زیر علاوه بر قابل پیش‌بینی بودن فوق‌العاده مفید است.



شکل ۳۰

قضیه. اگر در هر نقطه از حوزه  $D$  داشته باشیم  $f'(z) = 0$ , آنگاه  $f$  در سراسر  $D$  ثابت است.

برای اثبات این قضیه، می‌نویسیم  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ . پس با فرض اینکه در  $D$   $f'(z) = 0$  توجه می‌کنیم که  $u_x + iv_x = 0$  و بنابر معادلات کوشی-ریمان  $v_y - iu_y = 0$  در نتیجه در هر نقطه  $D$  داریم

$$u_x = u_y = v_x = v_y = 0.$$

حال نشان می‌دهیم که  $u(x, y)$  در امتداد هر پاره خطی مانند  $L$  که از نقاطهای مانند  $P$  به نقطه‌ای مانند  $P'$  وصل شده و کاملاً در  $D$  واقع باشد ثابت است. فرض کنید  $s$  نمایش فاصله در امتداد  $L$  از نقطه  $P$  باشد و  $\mathbf{U}$  بردار یکه در امتداد  $L$  در جهت افزایش  $s$  باشد (شکل ۳۰) را بینید). در حسابان دیده‌ایم که مشتق جهتی  $du/ds$  را می‌توان به صورت حاصلضرب نقطه‌یی

$$\frac{du}{ds} = (\text{grad } u) \cdot \mathbf{U} \quad (1)$$

نوشت، که در آن  $\text{grad } u$  عبارت است از بردار گرادیان

$$\text{grad } u = u_x \mathbf{i} + u_y \mathbf{j} \quad (2)$$

چون  $u_x$  و  $u_y$  در هر نقطه  $D$  صفرند، پس  $\text{grad } u$  در هر نقطه روی  $L$  بردار صفر است. بنابراین از رابطه (۱) نتیجه می‌شود که مشتق  $du/ds$  در امتداد  $L$  صفر است و لذا  $u$  روی  $L$  ثابت است. سرانجام چون برای هر دو نقطه  $P$  و  $Q$  در  $D$  تعداد متناهی از این پاره خطها وجود دارد که انتهای هر یک ابتدای دیگری است و  $P$  را به  $Q$  وصل می‌کنند (بخش ۱۰)، مقادیر  $u$  در

$P$  و  $Q$  باید یکی باشند. بدین ترتیب می‌توان نتیجه گرفت که عدد حقیقی ثابتی مانند  $a$  وجود دارد که در سراسر  $D$  داریم  $v(x, y) = b$ . همین طور  $u(x, y) = a$  و لذا در هر نقطه  $D$  داریم  $f(z) = a + bi$ .

## ۲۴. چند مثال

همان طور که در بخش ۲۳ خاطر نشان ساختیم، اغلب می‌توان با استفاده از فرمولهای مشتقگیری بخش ۱۹ محلی را که یکتابع مفروض در آن تحلیلی است مشخص کرد.

### مثال ۱. خارج قسمت

$$f(z) = \frac{z^3 + 4}{(z^2 - 3)(z^2 + 1)}$$

بهوضوح در سراسر صفحه  $\mathbb{z}$  تحلیلی است جز در نقاط تکین  $z = \pm\sqrt[3]{3}$  و  $i\sqrt{2}$ . تحلیلی بودن به استناد وجود فرمولهای مشتقگیری است که با آن آشنا هستیم، و صرفاً زمانی از آنها استفاده می‌کنیم که عبارت  $(z')'$  خواسته شده باشد.

درصورتی که تابعی برحسب توابع مؤلفه‌یی  $u(x, y)$  و  $v(x, y)$  داده شده باشد، تحلیلی بودن آن را می‌توان با استفادهٔ مستقیم از معادلات کوشی-ریمان ثابت کرد.

### مثال ۲. درصورتی که

$$f(z) = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y,$$

توابع مؤلفه‌یی عبارت‌اند از

$$v(x, y) = \sinh x \sin y \quad \text{و} \quad u(x, y) = \cosh x \cos y$$

چون در هر نقطه

$$u_y = -\cosh x \sin y = -v_x \quad \text{و} \quad u_x = \sinh x \cos y = v_y$$

بنابر قضیه بخش ۲۱،  $f$  تابعی است تام.

بالاخره، چگونگی استفاده از قضایای چهار بخش آخر، بهخصوص قضیه بخش ۲۳، را برای به‌دست آوردن برخی ویژگیهای مهم توابع تحلیلی نشان می‌دهیم.

## مثال ۳. فرض کنید تابع

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

و مزدوج آن

$$\overline{f(z)} = u(x, y) - iv(x, y)$$

هر دو در حوزه مفروضی مانند  $D$  تحلیلی باشند. به سادگی می‌توان نشان داد که  $f(z)$  باید در سراسر  $D$  ثابت باشد.

برای انجام این کار  $\overline{f(z)}$  را به صورت زیر می‌نویسیم

$$\overline{f(z)} = U(x, y) + iV(x, y),$$

که در آن

$$U(x, y) = u(x, y) \quad \text{و} \quad V(x, y) = -v(x, y) \quad (1)$$

به دلیل تحلیلی بودن  $(z, f)$ ، بنابر قضیه بخش ۲۰، معادلات کوشی-ریمان

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x \quad (2)$$

در  $D$  برقرارند. همچنین بنابر تحلیلی بودن  $\overline{f(z)}$  در  $D$  داریم

$$U_x = V_y, \quad U_y = -V_x.$$

بنابر روابط (۱)، این دو معادله آخر را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$u_x = -v_y, \quad u_y = v_x. \quad (3)$$

با جمع کردن طرفین متناظر معادله‌های اول روابط (۲) و (۳) در می‌یابیم که در  $D$ ،  $u_x = v_x = 0$ . همین طور با تفریق طرفین متناظر معادله‌های دوم روابط (۲) و (۳) می‌یابیم که  $v_x = 0$ . پس بنابر عبارت (۸) بخش ۲۰،

$$f'(z) = u_x + iv_x = 0 + i0 = 0;$$

واز قضیه بخش ۲۳ نتیجه می‌شود که  $(z, f)$  در سراسر  $D$  ثابت است.

## تمرینها

۱. با استفاده از قضیه بخش ۲۱ تحقیق کنید که هر یک از توابع زیر تام است:

$$f(z) = 3x + y + i(3y - x) \quad (\text{الف})$$

$$f(z) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y \quad (\text{ب})$$

$$f(z) = e^{-y} \sin x - ie^{-y} \cos x \quad (\text{ج})$$

$$f(z) = (z^2 - 2)e^{-x}e^{-iy} \quad (\text{د})$$

۲. به کمک قضیه بخش ۲۰، نشان دهید که هیچ یک از توابع زیر در هیچ جا تحلیلی نیست:

$$f(z) = 2xy + i(x^2 - y^2) \quad (\text{ب}) \quad f(z) = xy + iy \quad (\text{الف})$$

$$f(z) = e^y e^{ix} \quad (\text{ج})$$

۳. بیان کنید چرا ترکیب دو تابع تام تابعی تام است. همچنین بیان کنید چرا هر ترکیب خطی  $c_1 f_1(z) + c_2 f_2(z)$  از دو تابع تام، که در آن  $c_1$  و  $c_2$  اعداد مختلط ثابتی هستند، تابعی تام است.

۴. در هر یک از حالتهای زیر نقاط تکین تابع را معین کرده بیان کنید چرا تابع همه جا جز در آن نقاط تحلیلی است:

$$f(z) = \frac{z^3 + i}{z^2 - 3z + 2} \quad (\text{ب}) \quad f(z) = \frac{2z + 1}{z(z^2 + 1)} \quad (\text{الف})$$

$$f(z) = \frac{z^2 + 1}{(z + 2)(z^2 + 2z + 2)} \quad (\text{ج})$$

.  $z = -2, -1 \pm i$ : (الف)  $z = 0, \pm i$ : (ب)  $z = 1, 2$ : (ج) جواب:

۵. بنابر تمرین ۴ قسمت (ب) بخش ۲۲، تابع

$$g(z) = \sqrt{r} e^{i\theta/2} \quad (r > 0, -\pi < \theta < \pi)$$

در حوزه تعریفی تحلیلی و مشتق آن

$$g'(z) = \frac{1}{2g(z)}$$

است. نشان دهید که تابع مرکب  $G(z) = g(2z - 2 + i)$  در نیم صفحه  $x > 1$  تحلیلی است، با مشتق

$$G'(z) = \frac{1}{g(2z - 2 + i)}.$$

راهنمایی: ملاحظه کنید که وقتی  $1 > x > 2z - 2 + i$  داریم

۶. با استفاده از نتایج بخش ۲۲ تحقیق کنید که تابع

$$g(z) = \ln r + i\theta \quad (r > 0, 0^\circ < \theta < 2\pi)$$

در حوزه تعریفی که نشان داده ایم تحلیلی و دارای مشتق  $g'(z) = 1/z$  است. سپس نشان دهید که تابع مركب  $G(z) = g(z^2 + 1)$  در ربع صفحه  $x > 0, y > 0$  تابعی است تحلیلی از  $z$  با مشتق

$$G'(z) = \frac{2z}{z^2 + 1}$$

راهنمایی: ملاحظه کنید که وقتی  $x > 0, y > 0$  داریم  $z^2 + 1$ .

۷. فرض کنید تابع  $f$  در حوزه  $D$  تحلیلی باشد. ثابت کنید که  $f(z)$  باید در  $D$  ثابت باشد هرگاه

(الف) بازای هر  $z$  در  $D$ ,  $f(z)$  حقیقی مقدار باشد؛

(ب)  $|f(z)|$  در سراسر  $D$  ثابت باشد.

راهنمایی: برای اثبات قسمت (الف) از معادلات کوشی-ریمان و قضیه بخش ۲۳ استفاده کنید. برای اثبات (ب) ملاحظه کنید که

$$(c \neq 0) \quad |f(z)| = c \quad \overline{f(z)} = \frac{c^2}{f(z)}$$

سپس از نتیجه اصلی مثال ۳ بخش ۲۴ استفاده کنید.

## ۲۵. توابع همساز

تابع حقیقی-مقدار  $H$  از دو متغیر حقیقی  $x$  و  $y$  را در یک حوزه مفروض از صفحه  $xy$  همساز گویند اگر در سراسر آن حوزه دارای مشتقات جزئی مرتبه اول و دوم پیوسته باشد و در معادله با مشتقات جزئی

$$(1) \quad H_{xx}(x, y) + H_{yy}(x, y) = 0$$

که به معادله لاپلاس<sup>۱</sup> معروف است، صدق کند.

تابع همساز نقش مهمی در ریاضی کاربردی ایفا می‌کنند. مثلاً دماهای  $T(x, y)$  در رقه‌های نازک واقع در صفحه  $xy$ , اغلب همسازند. اگر تابع  $V(x, y)$  معرف پتانسیل الکتروستاتیک در داخل ناحیه‌ای از فضای سه بعدی باشد که بدون بار الکتریکی است و پتانسیل الکتروستاتیک فقط با  $x$  و  $y$  تغییر کند، آنگاه  $V$  همساز است.

مثال ۱. به آسانی می‌توان تحقیق کرد که تابع  $T(x, y) = e^{-y} \sin x$  در هر حوزه از صفحه  $xy$ , به خصوص در نوار قائم نیمه نامتناهی  $x < \pi < 0$  و  $y > 0$  همساز است. فرض می‌کنیم که تابع در لبه‌های نوار، مقادیری را می‌گیرد که در شکل ۳۱ نمایش داده شده‌اند. به بیان دقیقتر، در همه شرایط زیر صدق می‌کند

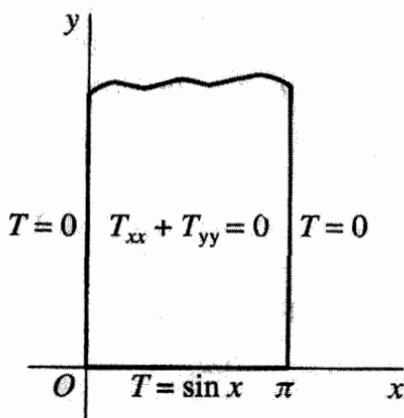
$$T_{xx}(x, y) + T_{yy}(x, y) = 0$$

$$T(0, y) = 0, \quad T(\pi, y) = 0,$$

$$T(x, 0) = \sin x, \quad \lim_{y \rightarrow \infty} T(x, y) = 0,$$

که دماهای مانای  $T(x, y)$  در یک ورقه همگن نازک در صفحه  $xy$  را که هیچ چشممه یا چاهک حرارتی ندارد و عایق‌بندی شده تشریح می‌کند، بجز برای شرایطی که در امتداد لبه‌ها بیان شده است.

نحوه استفاده از نظریه متغیرهای مختلط در یافتن جوابهایی، نظیر جواب مثال ۱، دماها و مسائل دیگر، بعداً در فصل ۱۰ و در قسمتهایی از فصول بعد از آن مفصل بررسی شده است.\* این نظریه مبتنی بر قضیه زیر است که زمینه‌ای برای توابع همساز به دست می‌دهد.



شکل ۳۱

\* روش مهم دیگری در کتاب زیر از همین مؤلفان مطرح شده است

"Fourier Series and Boundary Value Problems" 6th ed., 2001.

**قضیه ۱.** اگر تابع  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  در حوزه  $D$  تحلیلی باشد توابع مؤلفه‌یی آن،  $u$  و  $v$ ، در  $D$  همسازند.

برای اثبات آن احتیاج به قضیه‌ای داریم که بعداً در فصل ۴ (بخش ۴۸) ثابت خواهد شد. یعنی، اگر یک تابع یک متغیره مختلط در نقطه‌ای تحلیلی باشد، آنگاه قسمتهای حقیقی و موهومی اش در آن نقطه دارای مشتقات جزئی پیوسته از هر مرتبه هستند.

با این فرض که  $f$  در  $D$  تحلیلی است، مشتقات جزئی مرتبه اول توابع مؤلفه‌یی آن در سراسر  $D$  در معادلات کوشی-ریمان صدق می‌کنند، یعنی

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x. \quad (2)$$

با مشتقگیری از هر دو طرف این معادلات نسبت به  $x$  داریم

$$u_{xx} = v_{yx}, \quad u_{yy} = -v_{xx}. \quad (3)$$

همین طور مشتقگیری نسبت به  $y$  نتیجه می‌دهد

$$u_{xy} = v_{yy}, \quad u_{yy} = -v_{xy}. \quad (4)$$

حال بنابر قضیه‌ای در حسابان پیشرفته،<sup>\*</sup> پیوستگی مشتقات جزئی  $u$  و  $v$  متضمن این است که  $u_{xy} = v_{yx}$  و  $u_{yy} = u_{xy}$ . پس، از معادلات (۳) و (۴) نتیجه می‌شود که

$$v_{xx} + v_{yy} = 0 \quad \text{و} \quad u_{xx} + u_{yy} = 0$$

یعنی  $u$  و  $v$  در  $D$  همسازند.

**مثال ۲.** همان‌طور که در تمرین ۱ قسمت (ج) در بخش ۲۴ نشان داده شد تابع

$$f(z) = e^{-y} \sin x - ie^{-y} \cos x$$

تام است. بنابراین قسمت حقیقی آن که تابع دمای  $T(x, y) = e^{-y} \sin x$  در مثال ۱ است، باید در هر حوزه از صفحه  $xy$  همساز باشد.

---

\* برای مثال به صفحات ۱۹۹-۲۰۱ کتاب زیر رجوع کنید

مثال ۳. چون تابع  $f(z) = i/z^2$  در هر نقطه  $\neq z$  تحلیلی است و چون

$$\frac{i}{z^2} = \frac{i}{z^2} \cdot \frac{\bar{z}^2}{\bar{z}^2} = \frac{i\bar{z}^2}{(z\bar{z})^2} = \frac{i\bar{z}^2}{|z|^4} = \frac{2xy + i(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2},$$

دوتابع

$$v(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \quad \text{و} \quad u(x, y) = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

در سراسر هر حوزه‌ای در صفحه  $xy$  که شامل مبدأ نباشد تحلیلی‌اند.

اگر دوتابع مفروض  $u$  و  $v$  در حوزه  $D$  همساز باشند و مشتقات جزئی مرتبه اولشان در سراسر  $D$  در معادلات کوشی-ریمان (۲) صدق کنند، گوییم  $v$  یک مزدوج همساز  $u$  است. البته معنی کلمه مزدوج در اینجا با معنی آن در بخش ۵، که در آن  $\bar{z}$  تعریف شد، فرق دارد.

قضیه ۲. تابع  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  در حوزه  $D$  تحلیلی است اگر و فقط اگر  $v$  یک مزدوج همساز  $u$  در  $D$  باشد.

اثبات آسان است. اگر  $v$  یک مزدوج همساز  $u$  در  $D$  باشد، از قضیه بخش ۲۱ نتیجه می‌شود که  $f$  در  $D$  تحلیلی است. بر عکس اگر  $f$  در  $D$  تحلیلی باشد در قضیه ۱ دیده‌ایم که  $u$  و  $v$  در  $D$  همسازند و با توجه به قضیه بخش ۲۰، معادلات کوشی-ریمان برقرارند.

مثال زیر نشان می‌دهد که اگر  $v$  یک مزدوج همساز  $u$  در حوزه‌ای باشد در حالت کلی لازم نیست که  $v$  یک مزدوج همساز  $u$  در آن حوزه باشد. (تمرینهای ۳ و ۴ را نیز ببینید).

مثال ۴. فرض کنید که

$$v(x, y) = 2xy \quad \text{و} \quad u(x, y) = x^2 - y^2$$

چون این توابع به ترتیب قسمتهای حقیقی و موهومی تابع تام  $f(z) = z^2$  هستند،  $v$  یک مزدوج همساز  $u$  در سراسر صفحه است. اما  $u$  نمی‌تواند یک مزدوج همساز  $v$  باشد زیرا، همان‌طور که در تمرین ۲ قسمت (ب) در بخش ۲۴ بررسی شد، تابع  $2xy + i(x^2 - y^2)$  در هیچ‌جا تحلیلی نیست.

در فصل ۹ (بخش ۹۷) نشان خواهیم داد که اگر تابع  $u$  در حوزه‌ای از یک نوع معین همساز باشد، همیشه دارای یک مزدوج همساز است. پس، در چنین حوزه‌هایی هر تابع همساز قسمت

حقیقی یک تابع تحلیلی است. همچنین یک مزدوج همساز در صورت وجود، یکتاست مگر با اختلاف یک عدد ثابت جمعی.

مثال ۵. حال به شرح روشی برای بدست آوردن مزدوج همساز یک تابع همساز مفروض می‌پردازیم. به سهولت دیده می‌شود که تابع

$$u(x, y) = y^3 - 3x^2y \quad (5)$$

در تمام صفحه  $xy$  همساز است. چون هر مزدوج همساز  $u(x, y)$  مانند  $v(x, y)$  به وسیله معادلات کوشی-ریمان

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x \quad (6)$$

به آن وابسته است، بنابر اولین معادله از این معادلات

$$v_y(x, y) = -6xy.$$

با ثابت نگه داشتن  $x$  و انتگرالگیری از هر دو طرف این معادله نسبت به  $y$ ، نتیجه می‌شود

$$v(x, y) = -3xy^2 + \phi(x), \quad (7)$$

که در آن  $\phi$  فعلاً تابع دلخواهی از  $x$  است. با استفاده از معادله دوم معادلات (۶) داریم

$$3y^2 - 3x^2 = 3y^2 - \phi'(x),$$

یا  $x^2 = 3x^2 - \phi'(x)$ . بنابراین  $\phi'(x) = x^3 + C$ ، که در آن  $C$  عدد حقیقی دلخواهی است. پس بنابر رابطه (۷) تابع

$$v(x, y) = -3xy^2 + x^3 + C \quad (8)$$

یک مزدوج همساز  $u(x, y)$  است. تابع تحلیلی متناظر عبارت است از

$$f(z) = (y^3 - 3x^2y) + i(-3xy^2 + x^3 + C). \quad (9)$$

تحقیق درستی صورت  $f(z) = i(z^3 + C)$  این تابع به سهولت انجام می‌شود و این صورت از آنجا پیشنهاد می‌شود که وقتی  $y = 0$ ، عبارت (۹) به صورت  $f(x) = i(x^3 + C)$  در می‌آید.

## تمرینها

۱. نشان دهید که  $u(x, y)$  در حوزه‌ای همساز است و مزدوج همسازی مانند  $v(x, y)$  پیدا کنید وقتی که

$$\begin{array}{lll} u(x, y) = 2x - x^3 + 3xy^2 & \text{(ب)} & u(x, y) = 2x(1-y) \\ .u(x, y) = y/(x^2 + y^2) & \text{(د)} & u(x, y) = \sinh x \sin y \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{(الف)} \\ \text{(ج)} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} v(x, y) = 2y - 3x^2y + y^3 & \text{(ب)} & v(x, y) = x^2 - y^2 + 2y \\ v(x, y) = x/(x^2 + y^2) & \text{(د)} & v(x, y) = -\cosh x \cos y \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{(الف)} \\ \text{(ج)} \end{array}$$

۲. نشان دهید اگر  $v$  و  $V$  مزدوچهای همساز  $u$  در حوزه  $D$  باشند، آنگاه تفاضل  $v(x, y) - V(x, y)$  حداکثر می‌تواند یک عدد ثابت جمعی باشد.

۳. فرض کنید در حوزه  $D$ ،  $v$  یک مزدوج همساز  $u$  و  $u$  یک مزدوج همساز  $v$  باشد. نشان دهید چگونه نتیجه می‌شود که باید در سراسر  $D$  هر دوتابع  $u(x, y)$  و  $v(x, y)$  ثابت باشند.

۴. با استفاده از قضیه ۲۵ نشان دهید تابع  $v$  یک مزدوج همساز  $u$  در حوزه  $D$  است اگر و فقط اگر  $u - v$  یک مزدوج همساز  $v$  در حوزه  $D$  باشد. (با نتیجه تمرین ۳ مقایسه کنید). راهنمایی: ملاحظه کنید که تابع  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  در  $D$  تحلیلی است اگر و فقط اگر  $f'(z) = -if(z)$  در  $D$  تحلیلی باشد.

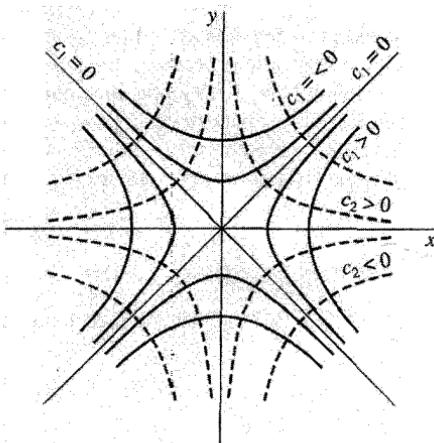
۵. فرض کنید تابع  $f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$  در حوزه  $D$  که شامل مبدأ نیست، تحلیلی باشد. با استفاده از معادلات کوشی-ریمان در مختصات قطبی (بخش ۲۲) و با فرض پیوستگی مشتقهای جزئی نشان دهید که در سراسر  $D$  تابع  $u(r, \theta)$  در معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی

$$r^2 u_{rr}(r, \theta) + ru_r(r, \theta) + u_{\theta\theta}(r, \theta) = 0$$

که صورت قطبی معادله لاپلاس است، صدق می‌کند. نشان دهید که همین مطلب در مورد تابع  $v(r, \theta)$  نیز برقرار است.

۶. تحقیق کنید که تابع  $u(r, \theta) = \ln r$  در حوزه  $r < \theta < 2\pi$  همساز است، بدین طریق نشان دهید در صورت قطبی معادله لاپلاس، که در تمرین ۵ به دست آمد، صدق می‌کند. سپس با استفاده از روش مثال ۵، بخش ۲۵ اما با صورت قطبی معادلات کوشی-ریمان (بخش ۲۲)، مزدوج همساز  $\theta = v(r, \theta)$  را به دست آورید. (با تمرین ۶ بخش ۲۴ مقایسه کنید).

۷. فرض کنید تابع  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  در حوزه  $D$  تحلیلی باشد و خانواده‌های منحنیهای تざار  $c_1$  و  $c_2$  اعداد ثابت دلخواهی  $v(x, y) = c_1$  و  $u(x, y) = c_2$  را که در آنها



شکل ۳۲

هستند در نظر بگیرید. ثابت کنید که این خانواده‌ها متعامدند. به بیان دقیق‌تر، نشان دهید که اگر  $(x_0, y_0)$  نقطه‌ای از  $D$ ، مشترک بین دو منحنی خاص  $v(x, y) = c_1$  و  $u(x, y) = c_2$  باشد و اگر  $f'(z_0) \neq 0$  آن‌گاه خطوط مماس بر این منحنیها در  $(x_0, y_0)$  برهم عمودند.

راهنمایی: توجه کنید که چگونه از معادلات  $v(x, y) = c_1$  و  $u(x, y) = c_2$  نتیجه می‌شود که

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{و} \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0.$$

۸. نشان دهید که وقتی  $f(z) = z^2$ ، منحنی‌های تراز  $v(x, y) = c_1$  و  $u(x, y) = c_2$  مربوط به توابع مؤلفه‌یی، هذلولی‌هایی هستند که در شکل ۳۲ نشان داده شده‌اند. به تعامل این دو خانواده، که در تمرین ۷ ثابت شد، توجه کنید. منحنی‌های  $u(x, y) = 0$  و  $v(x, y) = 0$  در مبدأ همیگر را قطع می‌کنند ولی با وجود این، بر یکدیگر عمود نیستند. چرا این امر با نتیجه تمرین ۷ تناقضی ندارد؟
۹. نمودار خانواده‌های منحنی‌های تراز توابع مؤلفه‌یی  $u$  و  $v$  را در صورتی که  $f(z) = 1/z$  رسم کنید و به تعاملی که در تمرین ۷ ثابت شد توجه کنید.

۱۰. تمرین ۹ را با استفاده از مختصات قطبی انجام دهید.

۱۱. نمودار خانواده‌های منحنی‌های تراز توابع مؤلفه‌یی  $u$  و  $v$  را وقتی

$$f(z) = \frac{z-1}{z+1},$$

رسم کنید و توجه کنید که چگونه نتایج تمرین ۷، در اینجا آشکار می‌شوند.

## ۲۶. توابع تحلیلی که به‌طور یکتا مشخص می‌شوند

در دو بخش آخر این فصل به بررسی این مسئله می‌پردازیم که اگر تابعی در حوزه‌ای مانند  $D$  تحلیلی باشد، مقادیرش در یک زیرحوزه یا بر پاره‌خطی مشمول در  $D$  چه اثری بر مقادیرش در  $D$  داردند. گرچه این بخشها فواید نظری قابل ملاحظه‌ای دارند نقش مهمی در ارائه توابع تحلیلی در فصلهای بعد ندارند. خواننده می‌تواند در این مرحله مستقیماً به فصل ۳ برود و هر وقت نیاز پیدا کرد به این بخش برگردد.

لم. فرض کنید که

(الف) تابع  $f$  در سراسر حوزه  $D$  تحلیلی باشد؛

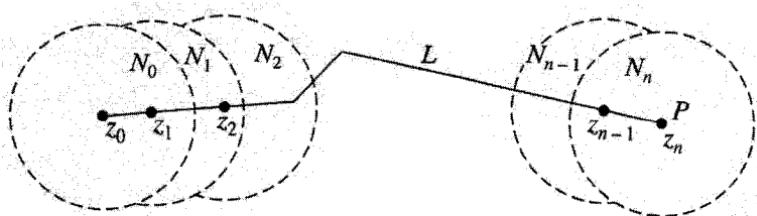
(ب) در هر نقطه  $z$  از حوزه یا پاره‌خطی واقع در  $D$  داشته باشیم  $f(z) = 0$ . در این صورت  $f(z) \equiv 0$  در سراسر  $D$  متحدد با صفر است.

برای اثبات این لم، فرض می‌کنیم  $f$  به صورتی باشد که در فرض آمده است و  $z$  نقطه دلخواهی در زیرحوزه یا پاره‌خطی باشد که در هر نقطه آن  $f(z) = 0$ . چون  $D$  یک مجموعه باز همبند است (بخش ۱۰) به ازای هر نقطه دیگر  $P$  از  $D$  خط شکسته‌ای مانند  $L$ ، مشکل از تعدادی متناهی پاره‌خط کاملاً واقع در  $D$  هست که انتهای هر یک ابتدای دیگری است و از  $z$  تا  $P$  ادامه دارد. فرض می‌کنیم  $d$  کوتاهترین فاصله نقاط روی  $L$  تا مرز  $D$  باشد، مگر اینکه  $D$  تمام صفحه باشد، که در این حالت  $d$  را می‌توان هر عدد مثبتی گرفت. سپس دنباله‌ای متناهی از نقاط روی  $L$  مانند

$$z_0, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, z_n$$

تشکیل می‌دهیم، که نقطه  $z_n$  منطبق بر  $P$  باشد (شکل ۳۳) و هر نقطه به قدر کافی نزدیک به نقاط مجاورش باشد به‌طوری که

$$|z_k - z_{k-1}| < d \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$



شکل ۳۳

بالاخره، دنباله‌ای متناهی از همسایگیها مانند

$$N_0, N_1, N_2, \dots, N_{n-1}, N_n$$

می‌سازیم که هر همسایگی  $N_k$  به مرکز  $z_k$  و شعاع  $d$  باشد. توجه کنید که این همسایگیها همه مشمول در  $D$ ‌اند و به‌ازای هر  $n = 1, 2, \dots, n$ ، نقطه  $z_k$  مرکز همسایگی  $N_k$  در همسایگی  $N_{k-1}$  قبلي یعنی  $N_{k-1}$  واقع است.

در این مرحله، لازم است از قضیه‌ای که بعداً در فصل ۶ ثابت خواهد شد استفاده کنیم. یعنی قضیه ۳ بخش ۶۸ با این مضامون که چون تابع  $f$  در حوزه  $N$  تحلیلی است و در حوزه یا پاره‌خطی شامل  $z$ ،  $f(z) \equiv f(z)$  در  $N$ . اما نقطه  $z$  در حوزه  $N$  و با ادامه است. بنابراین با استفاده مجدد از همان قضیه نتیجه می‌گیریم که  $f(z) \equiv f(z)$  در  $N_1$  و با ادامه این روش، به این نتیجه می‌رسیم که  $f(z) \equiv f(z)$  در  $N_n$ . چون  $N_n$  به مرکز  $P$  است و چون  $P$  در  $D$  به دلخواه انتخاب شده است، به این نتیجه می‌رسیم که  $f(z) \equiv f(z)$  در  $D$ . بدین‌ترتیب اثبات لم کامل می‌شود.

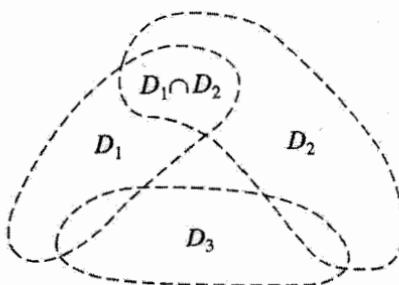
حال فرض کنید دو تابع  $f$  و  $g$  در حوزه‌ای مانند  $D$  تحلیلی باشند و در هر نقطه  $z$  از یک حوزه یا پاره‌خطی مشمول در  $D$ ،  $f(z) = g(z)$ . تفاضل

$$h(z) = f(z) - g(z)$$

نیز در  $D$  تحلیلی است و در سراسر زیرحوزه یا در امتداد پاره‌خط،  $h(z) = h(z)$ . پس بنابراین فوق در سراسر  $D$ ؛ یعنی در هر نقطه  $z$  از  $D$  داریم  $f(z) = g(z)$ . بدین‌ترتیب به قضیه مهم زیر رسیده‌ایم.

قضیه. تابعی که در حوزه  $D$  تحلیلی است با مقادیرش در حوزه‌ای یا در امتداد پاره‌خطی مشمول در  $D$  به‌طور یکتا روی  $D$  معین می‌شود.

این قضیه در مطالعه مسئله مربوط به توسعی حوزه تعریف یک تابع تحلیلی مفید است. به عبارت دقیق‌تر، دو حوزه  $D_1$  و  $D_2$  مفروض‌اند، اشتراک  $D_1 \cap D_2$  متشکل از همه نقاط مشترک بین هر دو حوزه  $D_1$  و  $D_2$  را در نظر می‌گیریم. اگر دو حوزه  $D_1$  و  $D_2$  دارای نقاط مشترکی باشند (شکل ۳۴ را ببینید) و تابع  $f_1$  در  $D_1$  تحلیلی باشد، آن‌گاه ممکن است تابعی مانند  $f_2$  موجود باشد که در  $D_2$  تحلیلی است به‌طوری که به‌ازای هر  $z$  در اشتراک  $D_1 \cap D_2$ ،  $f_1(z) = f_2(z)$ . در چنین صورتی  $f_2$  را ادامه تحلیلی  $f_1$  به حوزه دوم  $D_2$  می‌نامند.



شکل ۳۴

هرگاه این ادامه تحلیلی موجود باشد، بنابر قضیه‌ای که اخیراً ثابت شد یکتاست. یعنی، بیش از یک تابع نمی‌تواند در  $D_2$  تحلیلی باشد و در هر نقطه  $z$  از مجموعه  $z$  درون  $D_1 \cap D_2$  باز  $D_2$  مجموعه  $f_1(z)$  را بگیرد. با وجود این، اگر  $f_3$  یک ادامه تحلیلی  $f_2$  از  $D_2$  به حوزه  $D_3$ ، متقطع با  $D_1$  مانند شکل ۳۴، باشد، لازم نیست که به‌ازای هر  $z$  در  $D_3$ ،  $D_1 \cap D_3$  باشد،  $f_3(z) = f_1(z)$ . تعریف  $f_2$  بخش ۲۷ این مطلب را تشریح می‌نماید.

اگر  $f_2$  ادامه تحلیلی  $f_1$  از حوزه  $D_1$  به حوزه  $D_2$  باشد، آن‌گاه تابع  $F$  که با ضابطه زیر تعریف می‌شود در اجتماع  $D_1 \cup D_2$ ، که حوزه مشکل از همه نقاط واقع در  $D_1$  یا  $D_2$  می‌باشد، تحلیلی است

$$F(z) = \begin{cases} f_1(z), & z \in D_1 \\ f_2(z), & z \in D_2 \end{cases}$$

تابع  $F$  ادامه تحلیلی  $f_1$  یا  $f_2$  به  $D_1 \cup D_2$  است و  $f_1$  و  $f_2$  را عناصر  $F$  می‌نامند.

## ۲۷. اصل بازتابی

قضیه این بخش در مورد این واقعیت است که بعضی از توابع تحلیلی دارای این ویژگی‌اند که به‌ازای همه نقاط  $z$  در برخی حوزه‌ها  $\overline{f(z)} = f(\bar{z})$ ، در حالی که بعضی دیگر این ویژگی را ندارند. مثلاً توجه کنید وقتی  $D$  تمام صفحه متناهی باشد،  $z + z^2$  دارای این ویژگی‌اند اما  $z + z^2$  و  $z^2$  این ویژگی را ندارند. قضیه زیر، معروف به اصل بازتابی، روشی فراهم می‌آورد تا بتوانیم پیشگویی کنیم چه موقع  $\overline{f(z)} = f(\bar{z})$ .

قضیه. فرض می‌کنیم  $f$  تابعی باشد تحلیلی در حوزه  $D$  که حوزه  $D$  شامل قطعه‌ای از محور  $x$  هاست و نیمهٔ پایین آن قرینهٔ نیمهٔ بالایی آن نسبت به آن محور است. در این صورت برای هر

نقطه  $z$  در حوزه  $D$  داریم

$$\overline{f(z)} = f(\bar{z}) \quad (1)$$

اگر و فقط اگر بهازای هر نقطه  $x$  بر آن قطعه،  $f(x)$  حقیقی باشد.

برای شروع اثبات، فرض می‌کنیم بهازای هر نقطه  $x$  در آن قطعه،  $f(x)$  حقیقی باشد. بعد از آنکه نشان دادیم تابع

$$F(z) = \overline{f(\bar{z})} \quad (2)$$

در  $D$  تحلیلی است، با استفاده از آن، معادله (۱) را به دست می‌آوریم. برای اثبات تحلیلی بودن  $F(z)$ ، قرار می‌دهیم

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \quad F(z) = U(x, y) + iV(x, y)$$

و ملاحظه می‌کنیم که چون

$$\overline{f(\bar{z})} = u(x, -y) - iv(x, -y), \quad (3)$$

از رابطه (۲) نتیجه می‌شود که مؤلفه‌های  $F(z)$  و  $f(z)$  با روابط

$$V(x, y) = -v(x, t) \quad \text{و} \quad U(x, y) = u(x, t) \quad (4)$$

به هم وابسته‌اند، که در آن  $-y = t$ . حال چون  $f(x+it)$  تابعی تحلیلی از  $x+it$  است، مشتقات جزئی مرتبه اول توابع  $(4)$   $u(x, t)$  و  $v(x, t)$  در سراسر  $D$  پیوسته‌اند و در معادلات کوشی-ریمان\*

$$u_x = v_t, \quad u_t = -v_x \quad (5)$$

صدق می‌کنند.

به علاوه، با توجه به روابط (۴) داریم

$$U_x = u_x, \quad V_y = -v_t \frac{dt}{dy} = v_t;$$

از این روابط و اولین معادله از معادلات (۵) نتیجه می‌شود که  $U_x = V_y$ . همین طور

$$U_y = u_t \frac{dt}{dy} = -u_t, \quad V_x = -v_x;$$

---

\* پاراگرافی را که بالافصله بعد از قضیه ۱ در بخش ۲۵، آمده است ببینید.

که با دو مین معادله از معادلات (۵) نتیجه می‌دهد که  $U_y = -V_x$ . از آنجایی که نشان دادیم مشتقات جزئی مرتبه اول  $U(x, y)$  و  $V(x, y)$  در معادلات کوشی-ریمان صدق می‌کنند و چون این مشتقات پیوسته هستند در می‌بایس که تابع  $F(z)$  در  $D$  تحلیلی است. به علاوه چون  $f(x)$  در قطعه‌ای از محور حقیقی که در  $D$  واقع است، حقیقی است، در آن قطعه داریم  $v(x, 0) = 0$ ، که با توجه به روابط (۴) بدین معناست که

$$F(x) = U(x, 0) + iV(x, 0) = u(x, 0) - iv(x, 0) = u(x, 0).$$

یعنی در هر نقطه  $z = x$  بر آن قطعه داریم

$$F(z) = f(z). \quad (6)$$

حال به قضیه‌ای در بخش ۲۶ اشاره می‌کنیم که می‌گوید تابعی که در حوزه  $D$  تحلیلی است با مقادیرش در امتداد هر پاره خطی واقع در  $D$ ، به طور یکتا تعیین می‌شود. بنابراین معادله (۶) در سراسر  $D$  برقرار است. لذا بنابر تعریف (۲) برای تابع  $F(z)$  داریم

$$\overline{f(\bar{z})} = f(z); \quad (7)$$

و این همان معادله (۱) است.

برای اثبات عکس قضیه، فرض می‌کنیم که معادله (۱) برقرار باشد و توجه می‌کنیم که بنابر عبارت (۳)، صورت (۷) از معادله (۱) را می‌توان به شکل زیر نوشت

$$u(x, -y) - iv(x, -y) = u(x, y) + iv(x, y).$$

به خصوص اگر نقطه  $(x, 0)$  روی قطعه‌ای از محور حقیقی باشد که در  $D$  واقع است، آنگاه

$$u(x, 0) - iv(x, 0) = u(x, 0) + iv(x, 0)$$

و با مساوی قراردادن قسمتهای موهومی، می‌بینیم که  $u(x, 0) = v(x, 0)$ . بنابراین  $f(x)$  در قطعه محور حقیقی واقع در  $D$  حقیقی است.

چند مثال. درست قبل از بیان این قضیه، توجه کردیم که برای هر  $z$  در صفحه متناهی داریم

$$\overline{z^2} = \bar{z}^2 \quad \text{و} \quad \overline{z+1} = \bar{z} + 1$$

البته این قضیه نیز صحت مطلب بالا را بیان می‌کند، زیرا که برای  $x$  حقیقی،  $1 + ix$  و  $z^2$  حقیقی‌اند. همچنین توجه کردیم که  $i + z$  و  $iz$  در تمام صفحه، ویژگی بازتابی ندارند، و حال می‌دانیم دلیل این مطلب آن است که برای  $x$  حقیقی،  $i + x$  و  $ix$  حقیقی نیستند.

## تمرینها

۱. با استفاده از قضیه بخش ۲۶ نشان دهید که اگر  $f(z)$  در سراسر  $D$  تحلیلی و غیرثابت باشد، آنگاه نمی‌تواند در سراسر هیچ همسایگی واقع در  $D$  ثابت باشد.  
راهنمایی: فرض کنید  $f(z)$  در سراسر یک همسایگی واقع در  $D$  دارای مقدار ثابتی مانند  $w_0$  باشد.
۲. با شروع از تابع

$$f_1(z) = \sqrt{r} e^{i\theta/2} \quad (r > 0, 0^\circ < \theta < \pi)$$

و ارجاع به تمرین ۴ (ب) بخش ۲۲ بگویید چرا

$$f_2(z) = \sqrt{r} e^{i\theta/2} \quad (r > 0, \frac{\pi}{2} < \theta < 2\pi)$$

ادامه تحلیلی  $f_1$  از روی محور حقیقی منفی به نیم‌صفحه پایینی است. سپس نشان دهید که تابع

$$f_3(z) = \sqrt{r} e^{i\theta/2} \quad (r > 0, \pi < \theta < \frac{5\pi}{2})$$

ادامه تحلیلی  $f_2$  از روی محور حقیقی مثبت به ربع اول است اما در این ربع صفحه  $f_3(z) = -f_1(z)$ .  
۳. بیان کنید چرا تابع

$$f_4(z) = \sqrt{r} e^{i\theta/2} \quad (r > 0, -\pi < \theta < \pi)$$

ادامه تحلیلی تابع  $(z)f_1$  در تمرین ۲، از روی محور حقیقی مثبت به نیم‌صفحه پایین است.  
۴. در مثال ۱ بخش ۲۱ دیده‌ایم که تابع

$$f(z) = e^x e^{iy}$$

در هر نقطه صفحه متناهی مشتق دارد. نشان دهید چگونه از اصل بازتابی (بخش ۲۷) نتیجه می‌شود که برای هر  $z$ ,

$$\overline{f(z)} = f(\bar{z}).$$

سپس درستی این مطلب را مستقیماً بررسی کنید.

۵. نشان دهید اگر شرط حقیقی بودن  $f(x)$  در اصل بازتابی (بخش ۲۷) با شرط موهمی محض بودن  $f(x)$ , عوض شود در آن صورت معادله (۱) دریابان اصل بازتابی به شکل  $\overline{f(z)} = -f(\bar{z})$  تغییر می‌کند.

# ۳

## تابع مقدماتی

حال تابع مقدماتی گوناگونی را که در حسابان بررسی شده‌اند در نظر می‌گیریم و به تعریف تابع متناظر از یک متغیر مختلط می‌پردازیم. دقیقترا بگوییم، توابعی تحلیلی از متغیر  $z$  را تعریف می‌کنیم که وقتی  $i + x = z$ ، به تابع مقدماتی در حسابان تبدیل می‌شوند. ابتدا تابع نمایی مختلط را تعریف می‌کنیم و سپس آن را برای تعریف سایر تابع مقدماتی به کار می‌بریم.

### ۲۸. تابع نمایی

همان‌طور که قبلاً (در بخش ۱۳) انجام دادیم در اینجا تابع نمایی  $e^z$  را با نوشتن

$$(1) \quad e^z = e^x \cdot e^{iy} \quad (z = x + iy)$$

تعریف می‌کنیم، که در آن از فرمول اویلر (بخش ۶ را ببینید)

$$(2) \quad e^{iy} = \cos y + i \sin y$$

استفاده شده و  $y$  باید بر حسب رادیان گرفته شود. از این تعریف می‌بینیم که اگر  $z = y$ ، آنگاه  $e^z$  به تابع نمایی معمولی در حسابان تبدیل می‌شود؛ و به پیروی از قراردادی که در حسابان به کار می‌رود، اغلب به جای  $e^z$  می‌نویسیم  $\exp z$ .

توجه کنید که مقدار  $\sqrt[n]{e}$  را که ریشه  $n$ ام مثبت  $e$  است به  $e^x$  نسبت می‌دهند وقتی که  $x = 1/n$  ( $n = 2, 3, \dots$ ), لذا بنابر عبارت (۱) مقدار تابع نمایی مختلط  $e^z$  نیز برابر با  $e^{z/n}$  است وقتی که  $z = 1/n$  ( $n = 2, 3, \dots$ ). این یک استثنا برای قراردادی است (بخش ۸) که معمولاً می‌بایست  $e^{1/n}$  را به عنوان مجموعه همه ریشه‌های  $n$ ام  $e$  تعبیر کنیم. بنابر تعریف (۱)،  $e^{x_1+i y_1} = e^{x_1} \cdot e^{i y_1}$  و همان‌طور که قبل در بخش ۱۳ خاطر نشان ساختیم این تعریف با الهام از ویژگی جمعی

$$e^{x_1} \cdot e^{x_2} = e^{x_1+x_2}$$

تابع  $e^x$  در حسابان به دست آمده است. توسعی این ویژگی،

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}, \quad (3)$$

به آنالیز مختلط را به سادگی می‌توان ثابت کرد. برای اثبات این مطلب، می‌نویسیم

$$z_1 = x_1 + i y_1 \quad \text{و} \quad z_2 = x_2 + i y_2$$

پس

$$e^{z_1} e^{z_2} = (e^{x_1} e^{i y_1}) (e^{x_2} e^{i y_2}) = (e^{x_1} e^{x_2}) (e^{i y_1} e^{i y_2})$$

اما  $x_1$  و  $x_2$  هر دو حقیقی‌اند و در بخش ۷ دیدیم که

$$e^{i y_1} e^{i y_2} = e^{i(y_1+y_2)}.$$

در نتیجه

$$e^{z_1} e^{z_2} = e^{(x_1+x_2)} \cdot e^{i(y_1+y_2)},$$

و چون

$$(x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) = (x_1 + i y_1) + (x_2 + i y_2) = z_1 + z_2,$$

سمت راست رابطه آخر به  $e^{z_1+z_2}$  تبدیل و یدین ترتیب ویژگی (۳) ثابت می‌شود.

بنابر ویژگی (۳) می‌توان نوشت  $e^{z_1-z_2} = e^{z_1} \cdot e^{-z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_1-i(y_1+y_2)}$

$$\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1-z_2}. \quad (4)$$

از این رابطه و این واقعیت که  $1/e^z = e^{-z}$ ، نتیجه می‌شود که

ویژگیهای مهم دیگری دارد که انتظارش را داریم. مثلاً بنابر مثال ۱، بخش ۲۱، در هر نقطه از صفحه  $z$

$$\frac{d}{dz} e^z = e^z. \quad (5)$$

توجه کنید که مشتقپذیری  $e^z$  در هر نقطه  $z$  میان این نکته است که  $e^z$  تام است (بخش ۲۳). حکم زیر نیز درست است

$$\text{بهاری هر عدد مختلط } z, \quad e^z \neq 0. \quad (6)$$

این مطلب واضح است، زیرا کافی است تعریف (۱) را به شکل زیر بنویسیم

$$\phi = y \quad \rho = e^x \quad \text{که در آن} \quad e^z = \rho e^{i\phi}$$

که از آن نتیجه می‌شود

$$\arg(e^z) = y + 2n\pi \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad |e^z| = e^x \quad (7)$$

پس عبارت (۶) از آنجا نتیجه می‌شود که  $|e^z|$  همیشه مثبت است.

ولی، بعضی از ویژگیهای  $e^z$  قابل انتظار نیست. مثلاً، از آنجا که

$$e^{2\pi i} = 1 \quad \text{و} \quad e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i}$$

درمی‌یابیم که  $e^z$  تابعی است متناوب که دوره تناوب آن عدد موهومی محض  $2\pi i$  است:

$$e^{z+2\pi i} = e^z. \quad (8)$$

مثال زیر ویژگی دیگری از  $e^z$  را نشان می‌دهد که  $e^x$  فاقد آن است. یعنی در حالی که  $e^x$  هرگز متفاوت باشد مقادیری منفی برای  $e^z$  وجود دارند. مثلاً، مقادیری از  $z$  وجود دارند به طوری که مثلاً

$$e^z = -1. \quad (9)$$

برای یافتن آنها، معادله (۹) را به صورت  $e^x e^{iy} = 1 e^{i\pi}$  می‌نویسیم. سپس، با توجه به عبارت ایرانیک در آغاز بخش ۸، در مورد تساوی دو عدد مختلط ناصفری که به صورت نمایی باشند، داریم

$$y = \pi + 2n\pi \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad e^x = 1$$

بنابراین  $x = 0$  در می‌باییم که

$$z = (2n + 1)\pi i \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (10)$$

### تمرینها

۱. نشان دهید که

$$\exp\left(\frac{1 + \pi i}{4}\right) = \sqrt{\frac{e}{2}}(1 + i) \quad (\text{الف})$$

$$\exp(2 \pm 3\pi i) = -e^2 \quad (\text{ب})$$

$$\exp(z + \pi i) = -\exp z \quad (\text{ج})$$

۲. بیان کنید چرا تابع  $2z^3 - 3 - ze^z + e^{-z}$  تام است.

۳. با استفاده از معادلات کوشی-ریمان و قضیه بخش ۲۰ نشان دهید که تابع  $f(z) = \exp \bar{z}$  در هیچ جا تحلیلی نیست.

۴. به دو روش نشان دهید که تابع  $\exp(z^2)$  تام است. مشتق آن چیست؟

. $2z \exp(z^2)$  جواب:

۵. عبارات  $|iz + 2|$  و  $|\exp(iz^2)|$  را بحسب  $x$  و  $y$  بنویسید. سپس نشان دهید که

$$|\exp(2z + i) + \exp(iz^2)| \leq e^{2x} + e^{-2xy}.$$

۶. نشان دهید که  $|\exp(z^2)| \leq \exp(|z|^2)$ .

۷. ثابت کنید که  $|\exp(-2z)| < 1$  اگر و فقط اگر  $\operatorname{Re} z > 0$ .

۸. همه مقادیر  $z$  را باید به طوری که

$$\exp(2z - 1) = 1 \quad (\text{الف}) \quad e^z = 1 + \sqrt{3}i \quad (\text{ب}) \quad e^z = -2 \quad (\text{ج})$$

. $z = \ln 2 + (2n + 1)\pi i \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$  جواب: (الف)

. $z = \ln 2 + \left(2n + \frac{1}{3}\right)\pi i \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$  (ب)

. $z = \frac{1}{2} + n\pi i \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$  (ج)

۹. نشان دهید که  $z = n\pi$  که در آن  $\overline{\exp(iz)} = \exp(i\bar{z})$  اگر و فقط اگر  $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$  با تمرین ۲۷ مقایسه کنید).

۱۰. (الف) نشان دهید که اگر  $e^z$  حقیقی باشد، آنگاه  $\operatorname{Im} z = n\pi$  که در آن  $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$

## تابع لگاریتمی ۱۰۹

(ب) اگر  $e^z$  موهومی محض باشد چه محدودیتی برای  $z$  به وجود می‌آید؟  
 ۱۱. رفتار  $e^x e^{iy} = e^x e^{iy}$  را بررسی کنید وقتی

(الف)  $x$  به  $-\infty$  میل کند؛ (ب)  $y$  به  $\infty$  میل کند.

۱۲.  $Re(e^{1/z})$  را برحسب  $x$  و  $y$  بنویسید. چرا این تابع در هر حوزه که شامل مبدأ نباشد همساز است؟

۱۳. فرض کنید تابع  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  در یک حوزه  $D$  تحلیلی باشد. بیان کنید چرا توابع

$$U(x, y) = e^{u(x, y)} \cos v(x, y), \quad V(x, y) = e^{u(x, y)} \sin v(x, y)$$

در  $D$  همسازند و چرا  $V(x, y)$  در واقع یک مزدوج همساز  $U(x, y)$  است.

۱۴. اتحاد

$$(e^z)^n = e^{nz} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

را به روش زیر ثابت کنید:

(الف) با استفاده از استقرای ریاضی نشان دهید که رابطه بالا برای  $n = 0, 1, 2, \dots$  برقرار است.

(ب) درستی رابطه بالا را برای اعداد صحیح منفی بدین طریق تحقیق کنید که ابتدا از بخش ۷ به یاد آورید که وقتی  $z \neq 0$  داریم

$$z^n = (z^{-1})^m \quad (m = -n = 1, 2, \dots)$$

و قرار دهید  $1/e^z = e^{-z} = (1/e^z)^m$ . آنگاه از نتیجه قسمت (الف) و ویژگی (بخش ۲۸) از تابع نمایی استفاده کنید.

## ۲۹. تابع لگاریتمی

انگیزه تعریف تابع لگاریتمی بر مبنای حل معادله

$$e^w = z \quad (1)$$

نسبت به  $w$  است که در آن  $z$  عدد مختلط ناصفر و دلخواهی است. برای انجام این کار، توجه می‌کنیم که وقتی  $z$  و  $w$  را به صورت  $z = re^{i\Theta}$  ( $-\pi < \Theta \leq \pi$ ) و  $w = u + iv$  بنویسیم،

معادله (۱) به شکل زیر در می‌آید

$$e^u e^{iv} = r e^{i\Theta}.$$

سپس، با توجه به عبارت ایرانیک بخش ۸، در مورد تساوی دو عدد مختلط ناصفری که به صورت نمایی باشند، داریم

$$v = \Theta + 2n\pi \quad \text{و} \quad e^u = r$$

که در آن  $n$  عدد صحیح دلخواهی است. چون معادله  $e^u = r$  همان معادله  $u = \ln r$  است، تیجه می‌شود که معادله (۱) برقرار است اگر و فقط اگر  $w$  یکی از مقادیر زیر باشد

$$w = \ln r + i(\Theta + 2n\pi) \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

بنابراین اگر بنویسیم

$$\log z = \ln r + i(\Theta + 2n\pi) \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (2)$$

رابطه ساده

$$e^{\log z} = z \quad (z \neq 0), \quad (3)$$

را داریم که انگیزه‌ای است برای رابطه (۲) به عنوان تعریف تابع (چندمقداری) لگاریتمی از متغیر مختلط ناصلفر  $.z = re^{i\Theta}$

مثال ۱. اگر  $z = -1 - i\sqrt{3}$ ، آنگاه  $r = 2$  و  $\Theta = -2\pi/3$ . بنابراین

$$\begin{aligned} \log(-1 - i\sqrt{3}) &= \ln 2 + i \left( -\frac{2\pi}{3} + 2n\pi \right) \\ &= \ln 2 + 2 \left( n - \frac{1}{3} \right) \pi i \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \end{aligned}$$

باید تأکید کرد که اگر در سمت چپ رابطه (۳) ترتیب تابع نمایی و لگاریتمی را عوض کنیم، عدد حاصل ممکن است مساوی  $z$  نباشد. به عبارت دقیق‌تر چون رابطه (۲) را می‌توان به صورت

$$\log z = \ln |z| + i \arg z$$

نوشت و چون وقتی  $z = x + iy$  داریم (بخش ۲۸)

$$|e^z| = e^x \quad \text{و} \quad \arg(e^z) = y + 2n\pi \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} \log(e^z) &= \ln |e^z| + i \arg(e^z) = \ln(e^x) + i(y + 2n\pi) \\ &= (x + iy) + 2n\pi i \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \end{aligned}$$

يعنى

$$\log(e^z) = z + 2n\pi i \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (4)$$

مقدار اصلی  $\log z$  مقداری است که از رابطه (۲) به ازای  $z = n$  بدست می‌آید و آن را به  $\text{Log } z$  نمایش می‌دهند. پس،

$$\text{Log } z = \ln r + i\Theta. \quad (5)$$

توجه کنید که تابع  $\text{Log } z$  خوشنعیری و تک‌مقداری است هرگاه  $z \neq 0$  و

$$\log z = \text{Log } z + 2n\pi i \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (6)$$

در صورتی که  $z$  عدد حقیقی مثبتی مانند  $z = r$  باشد،  $\text{Log } z = r$  به لگاریتم طبیعی در حسابان تبدیل می‌شود. برای اثبات آن فقط باید بنویسیم  $z = re^{i\theta}$ ، در این حالت معادله (۵) به  $\text{Log } z = \ln r + i\Theta$  تبدیل می‌شود، یعنی  $r = \text{Log } z$ . مثال ۲. از عبارت (۲) در می‌بایس که

$$\log 1 = \ln 1 + i(0 + 2n\pi) = 2n\pi i \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

همان‌طور که انتظار داشتیم،  $\text{Log } 1 = 0$ .

آخرین مثال ما را به یاد این مسئله می‌اندازد که گرچه در حسابان نمی‌توانستیم لگاریتم اعداد حقیقی منفی را پیدا کنیم، حالا قادر به انجام این کار هستیم.

مثال ۳. ملاحظه کنید که

$$\log(-1) = \ln 1 + i(\pi + 2n\pi) = (2n + 1)\pi i \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

$$\text{Log } (-1) = \pi i$$

### ۳۰. شاخه‌ها و مشتقات لگاریتم

اگر  $z = re^{i\theta}$  عدد مختلط ناصفری باشد،  $\theta$  دارای یکی از مقادیر  $\Theta + 2n\pi$  است، که در آن  $\Theta = \operatorname{Arg} z$ . بنابراین تعریف

$$\log z = \ln r + i(\Theta + 2n\pi) \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

تابع لگاریتمی چندمقداری در بخش ۲۹ را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\log z = \ln r + i\theta. \quad (1)$$

اگر  $\alpha$  عدد حقیقی دلخواهی باشد و مقدار  $\theta$  در عبارت (1) را طوری مقید کنیم که در بازه  $\alpha < \theta < \alpha + 2\pi$  باشد، تابع

$$\log z = \ln r + i\theta \quad (r > 0, \alpha < \theta < \alpha + 2\pi), \quad (2)$$

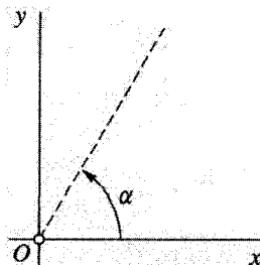
با توابع مؤلفه‌بی

$$v(r, \theta) = \theta \quad u(r, \theta) = \ln r \quad (3)$$

در حوزه مذبور تک‌مقداری و پیوسته است (شکل ۳۵). توجه کنید که اگر تابع (2) روی پرتو  $\theta = \alpha$  تعریف می‌شد، در آنجا پیوسته نبود. زیرا اگر  $z$  نقطه‌ای بر آن پرتو باشد، نقاطی به دلخواه نزدیک به  $z$  موجودند که مقدار  $v$  در آنها نزدیک به  $\alpha$  است و همچنین نقاطی به دلخواه نزدیک به  $z$  موجودند که مقدار  $v$  در آنها نزدیک به  $\alpha + 2\pi$  است.

تابع (2) نه تنها در حوزه  $r > 0, \alpha < \theta < \alpha + 2\pi$  پیوسته است بلکه در آن تحلیلی نیز هست، زیرا مشتقات جزئی مرتبه اول  $u$  و  $v$  در آنجا پیوسته‌اند و در صورت قطبی (بخش ۲۲)

$$ru_r = v_\theta, \quad u_\theta = -rv_r$$



شکل ۳۵

معادلات کوشی-ریمان صدق می‌کنند. به علاوه بنابر بخش ۲۲ داریم

$$\frac{d}{dz} \log z = e^{-i\theta} (u_r + iv_r) = e^{-i\theta} \left( \frac{1}{r} + i^{\circ} \right) = \frac{1}{re^{i\theta}};$$

یعنی

$$\frac{d}{dz} \log z = \frac{1}{z} \quad (|z| > 0, \alpha < \arg z < \alpha + 2\pi). \quad (4)$$

به خصوص

$$\frac{d}{dz} \text{Log } z = \frac{1}{z} \quad (|z| > 0, -\pi < \text{Arg } z < \pi). \quad (5)$$

یک شاخه از تابع چندمقداری  $f$ , هر تابع تک‌مقداری  $F$  است که در حوزه‌ای تحلیلی و در هر نقطه  $z$  از آن حوزه، مقدار  $F(z)$  یکی از مقادیر  $(z)f$  باشد. البته شرط تحلیلی بودن مانع از آن می‌شود که  $F$  مقادیرش را به تصادف از بین مقادیر  $f$  انتخاب کند. ملاحظه می‌کنید که به ازای هر عدد مشخص  $\alpha$  تابع تک‌مقداری (۲) شاخه‌یی از تابع چندمقداری (۱) است. تابع

$$\text{Log } z = \ln r + i\Theta \quad (r > 0, -\pi < \Theta < \pi) \quad (6)$$

شاخهٔ اصلی نامیده می‌شود.

بریدگی شاخه قسمتی از یک خط یا منحنی است که برای تعریف شاخهٔ  $F$  از تابع چندمقداری  $f$  معروف شده است. نقاط روی بریدگی شاخهٔ  $F$  نقاط تکین (بخش ۲۳)  $F$ ‌اند و هر نقطه که بین همه بریدگی‌های شاخه‌های  $f$  مشترک باشد یک نقطهٔ شاخه‌یی  $f$  نامیده می‌شود. مبدأ و پرتو  $\theta = \alpha$ , بریدگی شاخه برای شاخه (۲) از تابع لگاریتمی را تشکیل می‌دهند. بریدگی شاخه برای شاخهٔ اصلی (۶) مشتمل است از مبدأ و پرتو  $\pi = \Theta$ . روشن است که مبدأ یک نقطهٔ شاخه‌یی برای شاخه‌های تابع لگاریتمی چندمقداری است.

## تمرینها

۱. نشان دهید که

$$\text{Log}(1-i) = \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{\pi}{4}i \quad (\text{الف}) \quad \text{و} \quad \text{Log}(-ei) = 1 - \frac{\pi}{2}i \quad (\text{ب})$$

۲. تحقیق کنید که اگر  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$$\log i = \left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi i \quad (\text{ب}) \quad \log e = 1 + 2n\pi i \quad (\text{الف})$$

$$\cdot \log(-1 + \sqrt{3}i) = \ln 2 + 2 \left(n + \frac{1}{4}\right)\pi i \quad (\text{ج})$$

۳. نشان دهید که

$$\text{Log}(-1+i)^2 \neq 2\text{Log}(-1+i) \quad (\text{ب}) \quad \text{Log}(1+i)^2 = 2\text{Log}(1+i) \quad (\text{الف})$$

۴. نشان دهید که

$$\log(i^2) = 2\log i \quad \left(r > 0, \frac{\pi}{4} < \theta < \frac{9\pi}{4}\right) \quad \text{log } z = \ln r + i\theta \quad (\text{الف}) \text{ اگر آنگاه } i$$

$$\cdot \log(i^2) \neq 2\log i \quad \left(r > 0, \frac{3\pi}{4} < \theta < \frac{11\pi}{4}\right) \quad \text{log } z = \ln r + i\theta \quad (\text{ب}) \text{ اگر آنگاه } i$$

۵. نشان دهید که

(الف) مجموعه مقادیر  $\log(i^{1/2})$  همان مجموعه مقادیر  $i(\pi/4 + n\pi)$  است، و همین ادعا برای  $i^{1/2}$  درست است:

(ب) مجموعه مقادیر  $\log(i^2)$  همان مجموعه مقادیر  $i\log 2$  نیست.

۶. می‌دانیم که شاخه  $\log z = \ln r + i\theta$  از  $r > 0, \alpha < \theta < \alpha + 2\pi$  از تابع لگاریتمی، در هر نقطه حوزه مذبور تحلیلی است، مشتق آن را با مشتقگیری از طرفین اتحاد  $z = \exp(\log z) = z$  (بخش ۲۹) و استفاده از قاعده زنجیری به دست آورید.

۷. همه ریشه‌های معادله  $\log z = i\pi/2$  را پیدا کنید.

.  $z = i$  جواب:

۸. فرض کنید نقطه  $z = x + iy$  در نوار افقی  $y < \alpha + 2\pi$  واقع باشد. نشان دهید وقتی از شاخه  $\log z = \ln r + i\theta$  ( $r > 0, \alpha < \theta < \alpha + 2\pi$ ) استفاده شود

$$\log(e^z) = z \quad \text{داریم}$$

۹. نشان دهید که

(الف) تابع  $\text{Log}(z - i)$  همه جا تحلیلی است بجز روی نیم خط  $y = 0$  ( $x \leq 0$ )

(ب) تابع

$$\frac{\text{Log}(z + 4)}{z^2 + i}$$

همه جا تحلیلی است بجز در نقاط  $z = -1 \pm \sqrt{2}$  و روی قسمت  $-4 \leq x$  از محور حقیقی.

۱۰. به دو طریق نشان دهید که تابع  $\ln(x^2 + y^2)$  در هر حوزه‌ای که شامل مبدأ نباشد همساز است.

۱۱. نشان دهید که

$$\operatorname{Re}[\log(z - 1)] = \frac{1}{2} \ln[(x - 1)^2 + y^2] \quad (z \neq 1).$$

چرا وقتی  $1 \neq z$ , این تابع باید در معادله لaplas صدق کند؟

### ۳۱. اتحادهایی شامل لگاریتم

همان‌طور که از روابط (۳) و (۴) بخش ۲۹ و نیز تمرینهای ۳، ۴ و ۵ و بخش ۳۰ تداعی می‌شود برخی از اتحادهای شامل لگاریتم در حسابان به آنالیز مختلط منتقل می‌شوند و بقیه منتقل نمی‌شوند. در این بخش تعدادی از آنها را که منتقل می‌شوند به دست می‌آوریم و بعضی موقع نحوه تعبیر آنها را بیان می‌کنیم. اگر خواننده علاقه‌مند است به بخش ۳۲ برود می‌تواند از آن بخش شروع کند و هر وقت به نتایج این بخش نیاز داشت به آن مراجعه کند.

اگر  $z_1$  و  $z_2$  دو عدد مختلط ناصفر دلخواه باشند، مستقیماً ثابت می‌شود که

$$\log(z_1 z_2) = \log z_1 + \log z_2. \quad (1)$$

این تساوی که با تابع چندمقداری سروکار دارد باید به همان روشی تعبیر شود که تساوی

$$\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 \quad (2)$$

در بخش ۷ تعبیر شد. یعنی اگر مقادیر دو تا از این سه لگاریتم مشخص باشد، آنگاه مقداری از لگاریتم سوم موجود است که رابطه (۱) را برقرار می‌کند.

اثبات رابطه (۱) را می‌توان به روش زیر بر مبنای رابطه (۲) بنادرد. چون  $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$  و چون این قدر مطلقها اعداد حقیقی مثبتی هستند، از تجربه با لگاریتمهای چنین اعدادی در حسابان می‌دانیم که

$$\ln|z_1 z_2| = \ln|z_1| + \ln|z_2|.$$

پس از این رابطه و رابطه (۲) نتیجه می‌شود که

$$\ln|z_1 z_2| + i \arg(z_1 z_2) = (\ln|z_1| + i \arg z_1) + (\ln|z_2| + i \arg z_2). \quad (3)$$

بالاخره به دلیل نحوه تعبیر روابط (۱) و (۲)، معادله (۳) همان معادله (۱) می‌شود.

مثال. برای تشریح رابطه (۱) قرار می‌دهیم  $z_1 = z_2 = -z$  و توجه می‌کنیم که  $z_1 z_2 = 1$ . اگر مقادیر  $\log z_1 = \pi i$  و  $\log z_2 = -\pi i$  مشخص شده باشند، درصورتی که مقدار  $\log(z_1 z_2)$  انتخاب شود، بدیهی است که معادله (۱) برقرار خواهد بود.

ملاحظه کنید که برای همان اعداد  $z_1$  و  $z_2$  داریم

$$\text{Log } z_1 + \text{Log } z_2 = 2\pi i \quad \text{و} \quad \text{Log}(z_1 z_2) = 0.$$

بنابراین اگر در رابطه (۱) به جای  $\log$  نماد  $\text{Log}$  را قرار دهیم، این عبارت در حالت کلی برقرار نیست.

### تحقیق درستی حکم

$$\log\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \log z_1 - \log z_2 \quad (4)$$

را که باید به همان روش حکم (۱) تعبیر شود، به عهده متعلم می‌گذاریم. در اینجا دو ویژگی دیگر  $z$  را که در بخش ۳۲ مفیدند بیان می‌کنیم. اگر  $z$  عدد مختلط ناصفری باشد، آن‌گاه بازای هر مقدار  $z$  که انتخاب کنیم داریم

$$z^n = e^{n \log z} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (5)$$

البته برای  $n = 1$ ، این رابطه به رابطه (۳)، بخش ۲۹، تبدیل می‌شود. درستی رابطه (۵) را به سادگی می‌توان تحقیق کرد، برای این منظور می‌نویسیم  $re^{i\theta} = z$  و توجه می‌کنیم که هر دو طرف برابر  $r^n e^{in\theta}$  می‌شوند. رابطه زیر نیز وقتی  $z \neq 0$  درست است،

$$z^{1/n} = \exp\left(\frac{1}{n} \log z\right) \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (6)$$

یعنی در اینجا جمله سمت راست دارای  $n$  مقدار متمایز است که آن مقادیر ریشه‌های  $n$ ام  $z$ ‌اند. برای اثبات این مطلب می‌نویسیم  $z = r \exp(i\Theta)$  که در آن  $\Theta$  مقدار اصلی  $z$  است. پس، بنابر عبارت (۲)، بخش ۲۹، برای  $z$  داریم

$$\exp\left(\frac{1}{n} \log z\right) = \exp\left[\frac{1}{n} \ln r + \frac{i(\Theta + 2k\pi)}{n}\right],$$

که در آن  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . در نتیجه

$$\exp\left(\frac{1}{n} \log z\right) = \sqrt[n]{r} \exp\left[i\left(\frac{\Theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right] \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (7)$$

از آنجا که  $\exp(i2k\pi/n)$  فقط وقتی دارای مقادیر متمایز است که  $k = 0, 1, \dots, n-1$  سمت راست رابطه (7) فقط  $n$  مقدار دارد. در واقع این سمت راست، بیانی برای ریشه‌های  $n$ -ام (بخش ۸) است و لذا می‌توان آن را به صورت  $z^{1/n}$  نوشت. بدین ترتیب ویژگی (۶) ثابت می‌شود، که عملاً برای موقعی که  $n$  عددی صحیح و منفی باشد نیز برقرار است (تمرین ۵ را ببینید).

### تمرینها

۱. نشان دهید که اگر  $\operatorname{Re} z_1 > 0$  و  $\operatorname{Re} z_2 > 0$  آنگاه

$$\operatorname{Log}(z_1 z_2) = \operatorname{Log} z_1 + \operatorname{Log} z_2.$$

۲. نشان دهید که به ازای هر دو عدد مختلط ناصفر  $z_1$  و  $z_2$  داریم

$$\operatorname{Log}(z_1 z_2) = \operatorname{Log} z_1 + \operatorname{Log} z_2 + 2N\pi i$$

که در آن  $N$  یکی از مقادیر  $0, 1, \dots$  را داراست. (با تمرین ۱ مقایسه کنید).

۳. درستی عبارت (۴)، بخش ۳۱، برای  $\log(z_1/z_2)$  را تحقیق کنید

(الف) با استفاده از اینکه  $\arg(z_1/z_2) = \arg z_1 - \arg z_2$  (بخش ۷) .

(ب) ابتدا نشان دهید که  $z = \log(1/z) = -\log z$  (به معنی که  $z \neq 0$ ) بدین معنی که  $\log(1/z) = -\log z$  دارای یک مجموعه مقادیرند و سپس به رابطه (۱) بخش ۳۱ برای  $\log(z_1 z_2)$  استناد کنید.

۴. با انتخاب مقادیر مشخص ناصفری برای  $z_1$  و  $z_2$  نشان دهید که اگر در رابطه (۴) بخش ۳۱ برای  $\operatorname{Log} z_1 z_2$  به جای  $\log$  قرار گیرد این رابطه همیشه برقرار نیست.

۵. نشان دهید که  $\log(z_1/z_2)$  (بخش ۳۱ و قیمت  $n$  عددی صحیح و منفی باشد نیز برقرار است. این کار را با نوشتند  $(z^{1/m})^{-1} = z^{1/m} = z^{1/n} = (-n)^{1/m}$ ، که در آن  $n$  هر یک از مقادیر  $\dots, -2, -1$  دارد را داراست (تمرین ۹ بخش ۹ را ببینید)، و با استفاده از این واقعیت که این ویژگی برای اعداد صحیح مثبت برقرار است انجام دهید.

۶. فرض کنید  $z$  عدد مختلط ناصفری باشد که به شکل  $re^{i\Theta} z = r e^{i\Theta} (-\pi < \Theta \leq \pi)$  نوشته شده و  $n$  عدد صحیح مثبت و مشخصی باشد ( $n = 1, 2, \dots$ ). نشان دهید که همه مقادیر

$\log(z^{1/n})$  با رابطه زیر داده می‌شوند

$$\log(z^{1/n}) = \frac{1}{n} \ln r + i \frac{\Theta + 2(pn+k)\pi}{n},$$

که در آن  $\dots, \pm 2, \pm 1, 0, 1, 2, \dots, n-1$  و  $p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, q$ . سپس بعد از نوشت

$$\frac{1}{n} \log z = \frac{1}{n} \ln r + i \frac{\Theta + 2q\pi}{n},$$

که در آن  $\dots, \pm 2, \pm 1, 0, q$ ، نشان دهد که مجموعه مقادیر  $\log(z^{1/n})$  همان مجموعه مقادیر  $z \log(1/n)$  است. بدین ترتیب نشان دهد که  $z \log(z^{1/n}) = (1/n) \log z$ ، که در آن،  $\log z$  متناظر با هر مقدار  $(1/n) \log z$  که در سمت چپ قرار گرفته می‌شود، باید مقدار مناسی از  $\log z$  را در سمت راست انتخاب کرد و برعکس. [نتیجه تمرین ۵ (الف) بخش ۳۰ حالتی خاص از این مسئله است].

راهنمایی: از این ویژگی استفاده کنید که با قیمانده تقسیم هر عدد صحیح بر عدد صحیح مثبت  $n$  همیشه عدد صحیحی بین  $0$  و  $n-1$ ، به اضمام آنها، است، یعنی، اگر عدد صحیح مثبت  $p$  مشخص شده باشد، هر عدد صحیح  $q$  را می‌توان به صورت  $q = pn + k$  نوشت که در آن  $n$  عددی صحیح و  $k$  یکی از مقادیر  $0, 1, 2, \dots, n-1$  است.

## ۳۲. نمای مختلط

اگر  $z \neq 0$  و نمای  $c$  عدد مختلط دلخواهی باشد، تابع  $z^c$  را با رابطه زیر تعریف می‌کنیم

$$z^c = e^{c \log z}, \quad (1)$$

که در آن  $\log z$  نمایش تابع لگاریتمی چندمقداری است. رابطه (۱) تعریفی سازگار برای  $z^c$  به دست می‌دهد بدین معنی که از قبل می‌دانیم این رابطه (بخش ۳۱)، وقتی  $c = n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  و  $c = 1/n, \pm 1, \pm 2, \dots$  برقرار است. در واقع تعریف  $z^c$  با الهام از این انتخابهای خاص  $c$  صورت گرفته است.

مثال ۱. توانهای  $z$  در حالت کلی چندمقداری‌اند. این ادعا را به این صورت توضیح می‌دهیم که می‌نویسیم

$$i^{-2i} = \exp(-2i \log i)$$

$$\log i = \ln 1 + i \left( \frac{\pi}{4} + 2n\pi \right) = i \left( 2n + \frac{1}{4} \right) \pi \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

در نتیجه

$$i^{-2i} = \exp [(-4n - 1)\pi] \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (2)$$

توجه کنید که این مقادیر  $i^{-2i}$  همگی اعداد حقیقی‌اند.  
چون تابع نمایی دارای ویژگی  $1/e^z = e^{-z}$  است. می‌توان نوشت

$$\frac{1}{z^c} = \frac{1}{\exp(c \log z)} = \exp(-c \log z) = z^{-c}$$

و به خصوص  $i^{-2i} = 1/i^{2i}$ . پس بنابر عبارت (۲)، داریم

$$\frac{1}{i^{2i}} = \exp [(-4n - 1)\pi] \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (3)$$

اگر  $z = re^{i\theta}$  و  $\alpha$  عدد حقیقی دلخواهی باشد، شاخه

$$\log z = \ln r + i\theta \quad (r > 0, \alpha < \theta < \alpha + 2\pi)$$

از تابع لگاریتمی، در حوزه مزبور تک‌مقداری و تحلیلی است (بخش ۳). اگر از این شاخه استفاده کنیم، نتیجه می‌شود که تابع  $z^c = \exp(c \log z)$  در همان حوزه تک‌مقداری و تحلیلی است.  
برای یافتن مشتق چنین شاخه‌یی از  $z^c$  ابتدا با استفاده از قاعدة زنجیری می‌نویسیم

$$\frac{d}{dz} z^c = \frac{d}{dz} \exp(c \log z) = \frac{c}{z} \exp(c \log z)$$

و سپس به یاد مان آوریم که (بخش ۲۹)  $z = \exp(\log z)$ . بدین ترتیب نتیجه می‌شود که

$$\frac{d}{dz} z^c = c \frac{\exp(c \log z)}{\exp(\log z)} = c \exp[(c - 1) \log z],$$

یا

$$\frac{d}{dz} z^c = cz^{c-1} \quad (|z| > 0, \alpha < \arg z < \alpha + 2\pi). \quad (4)$$

مقدار اصلی  $z^c$  وقتی به دست می‌آید که در تعریف (۱) به جای  $\log z$  قرار دهیم  $\text{Log } z$ :

$$^*P.V. z^c = e^{c \text{Log } z}. \quad (5)$$

رابطه (۵) برای تعریف شاخه اصلی تابع  $z^c$  در حوزه  $-\pi < \arg z < \pi$  نیز به کار می‌رود.

مثال ۲. مقدار اصلی  $(-i)^i$  چنین است

$$\exp[i \text{Log}(-i)] = \exp\left[i\left(\ln 1 - \frac{\pi}{2}i\right)\right] = \exp\frac{\pi}{2}.$$

یعنی،

$$P.V. (-i)^i = \exp\frac{\pi}{2}. \quad (6)$$

مثال ۳. شاخه اصلی  $z^{2/3}$ , را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\exp\left(\frac{2}{3}\text{Log } z\right) = \exp\left(\frac{2}{3}\ln r + \frac{2}{3}i\Theta\right) = \sqrt[3]{r^2} \exp\left(i\frac{2\Theta}{3}\right).$$

بنابراین

$$P.V. z^{2/3} = \sqrt[3]{r^2} \cos \frac{2\Theta}{3} + i \sqrt[3]{r^2} \sin \frac{2\Theta}{3}. \quad (7)$$

این تابع در حوزه  $-\pi < \theta < \pi$ , همان طور که از قضیه بخش ۲۲ نیز مستقیماً دیده می‌شود، تحلیلی است.

بنابر تعریف (۱)، تابع نمایی با پایه  $e^c$ , که در آن  $c$  یک عدد مختلط ثابت و ناصرف است به صورت زیر نوشته می‌شود

$$c^z = e^{z \log c}. \quad (8)$$

توجه کنید که گرچه  $e^z$  در حالت کلی، بنابر تعریف (۸)، چند مقداری است، وقتی مقدار اصلی لگاریتم را بگیریم تعبیر معمولی  $e^z$  حاصل می‌شود. زیرا مقدار اصلی  $\log e$ , یک است. وقتی یک مقدار  $\log c$  مشخص شود،  $c^z$  تابعی تام از  $z$  خواهد بود. در واقع

$$\frac{d}{dz} c^z = \frac{d}{dz} e^{z \log c} = e^{z \log c} \log c$$

\* علامت اختصاری برای P.V. است.

و این نشان می‌دهد که

$$\frac{d}{dz} c^z = c^z \log c. \quad (9)$$

## تمرینها

۱. نشان دهید که وقتی ...

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (-1)^{1/\pi} = e^{(2n+1)i} = (1+i)^i = \exp\left(-\frac{\pi}{4} + 2n\pi\right) \exp\left(\frac{i}{2} \ln 2\right) \quad (\text{الف})$$

۲. مقدار اصلی عبارات زیر را پیدا کنید

$$(\text{الف}) i^i; \quad (\text{ب}) \left[\frac{e}{2}(-1 - \sqrt{3}i)\right]^{3\pi i}; \quad (\text{ج}) (1-i)^{4i}.$$

جواب: (الف)  $\exp(-\pi/2)$ ; (ب)  $\exp(2\pi)$ ; (ج)  $i^i$ .

۳. با استفاده از تعریف (۱) بخش ۳۲ برای  $z^c$  نشان دهید که  $(-1 + \sqrt{3}i)^{3/2} = \pm 2\sqrt{2}$ .

۴. نشان دهید که نتیجه تمرین ۳ را می‌توان به یکی از روش‌های زیر به دست آورد

(الف) بنویسیم  $(-1 + \sqrt{3}i)^{3/2} = (-1 + \sqrt{3}i)^{1/2}(-1 + \sqrt{3}i)^{1/2}$  و ابتدا جذرها  $i + \sqrt{3}i$  و  $-1 + \sqrt{3}i$  را پیدا کنیم؛

(ب) بنویسیم  $(-1 + \sqrt{3}i)^{3/2} = [(-1 + \sqrt{3}i)^3]^{1/2}$  و ابتدا مکعب  $-1 + \sqrt{3}i$  را پیدا کنیم.

۵. نشان دهید که ریشه  $n$  ام اصلی عدد مختلط ناصفر  $z$  که در بخش ۸ تعریف شد همان

مقدار اصلی  $z^{1/n}$  است که در بخش ۳۲ تعریف شد.

۶. نشان دهید که اگر  $z \neq 0$  و  $a$  عددی حقیقی باشد، آنگاه  $|z|^a = \exp(a \ln |z|) = |z|^a$  که در آن مقدار اصلی  $|z|^a$  گرفته شده است.

۷. فرض کنید  $c = a + bi$  عدد مختلط ثابت باشد، که  $a, b \in \mathbb{R}$  و  $b \neq 0$  و توجه کنید که  $i^c$

چندمقداری است. چه محدودیتی باید برای عدد ثابت  $c$  قائل شد تا همه مقدار  $i^c$  یکی باشند؟

جواب: باید  $c$  حقیقی باشد.

۸. فرض کنیم  $c, d$  و  $z$  معرف اعداد مختلطی باشند که  $z \neq 0$ . ثابت کنید که اگر همه توانها مقادیر اصلی باشند،

$$(n = 1, 2, \dots) (z^c)^n = z^{cn} \quad (\text{الف}) \quad 1/z^c = z^{-c} \quad (\text{ب})$$

$$z^c / z^d = z^{c-d} \quad (\text{د}) \quad z^c z^d = z^{c+d} \quad (\text{ج})$$

۹. با فرض اینکه  $(z)^f$  موجود باشد، فرمولی برای مشتق  $(z^f)^c$  را پیدا کنید.

### ۳۳. توابع مثلثاتی

فرمول اویلر (بخش ۶) گویای این است که به ازای هر عدد حقیقی  $x$  داریم،

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad \text{و} \quad e^{-ix} = \cos x - i \sin x$$

که از این فرمولها نتیجه می‌شود

$$e^{ix} + e^{-ix} = 2 \cos x \quad \text{و} \quad e^{ix} - e^{-ix} = 2i \sin x$$

یعنی،

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \text{و} \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

بنابراین طبیعی است که تابع سینوس و کسینوس متغیر مختلط  $z$  را با روابط زیر تعریف کنیم

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad \text{و} \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad (1)$$

این تابع تام‌اند زیرا ترکیب‌های خطی (تمرین ۳ بخش ۲۴) تابع تام  $e^{iz}$  و  $e^{-iz}$  هستند. با دانستن مشتقات تابع نمایی، از روابط (۱) در می‌یابیم که

$$\frac{d}{dz} \sin z = \cos z, \quad \frac{d}{dz} \cos z = -\sin z. \quad (2)$$

از تعاریف (۱) به سادگی می‌توان دریافت که

$$\cos(-z) = \cos z \quad \text{و} \quad \sin(-z) = -\sin z \quad (3)$$

و لذا تعداد زیادی از اتحادهای مثلثاتی برای متغیرهای مختلط نیز معتبرند. مثال. برای آنکه نشان دهیم

$$2 \sin z_1 \cos z_2 = \sin(z_1 + z_2) + \sin(z_1 - z_2) \quad (4)$$

از تعاریف (۱) و ویژگیهای تابع نمایی استفاده کرده، ابتدا می‌نویسیم

$$2 \sin z_1 \cos z_2 = 2 \left( \frac{e^{iz_1} - e^{-iz_1}}{2i} \right) \left( \frac{e^{iz_2} - e^{-iz_2}}{2} \right).$$

سپس با انجام عمل ضرب، سمت راست به

$$\frac{e^{i(z_1+z_2)} - e^{-i(z_1+z_2)}}{2i} + \frac{e^{i(z_1-z_2)} - e^{-i(z_1-z_2)}}{2i}$$

یا

$$\sin(z_1 + z_2) + \sin(z_1 - z_2)$$

تبديل و اتحاد (۴) ثابت می‌شود.

از اتحاد (۴) اتحادهای زیر نتیجه می‌شوند (تمرینهای ۳ و ۴ را ببینید)

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2, \quad (5)$$

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2, \quad (6)$$

از اینها نتایج زیر به دست می‌آیند

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1, \quad (7)$$

$$\sin 2z = 2 \sin z \cos z, \quad \cos 2z = \cos^2 z - \sin^2 z, \quad (8)$$

$$\sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = \cos z, \quad \sin\left(z - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos z. \quad (9)$$

وقتی  $y$  عددی حقیقی باشد، با استفاده از تعاریف (۱) و توابع هذلولوی

$$\cosh y = \frac{e^y + e^{-y}}{2} \quad \text{و} \quad \sinh y = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$$

که در حسابان دیده‌ایم، می‌توان نوشت

$$\cos(iy) = \cosh y \quad \text{و} \quad \sin(iy) = i \sinh y \quad (10)$$

با نوشتن  $x = \operatorname{Re} z$  و  $y = \operatorname{Im} z$  در اتحادهای (۵) و (۶)، قسمتهای حقیقی و موهومی  $z$  و  $\cos z$  نمایان می‌شوند:

$$\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y, \quad (11)$$

$$\cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y, \quad (12)$$

که در آنها

از عبارات (۱۱) و (۱۲) تعدادی از ویژگیهای مهم  $\sin z$  و  $\cos z$  بی‌درنگ نتیجه می‌شوند. مثلاً ویژگی تناوبی این توابع بدیهی است

$$\sin(z + 2\pi) = \sin z, \quad \sin(z + \pi) = -\sin z \quad (13)$$

$$\cos(z + 2\pi) = \cos z, \quad \cos(z + \pi) = -\cos z. \quad (14)$$

همچنین داریم (تمرین ۹ را ببینید)

$$|\sin z|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y, \quad (15)$$

$$|\cos z|^2 = \cos^2 x + \sinh^2 y. \quad (16)$$

چون  $\sinh y$  به بینهایت میل می‌کند وقتی  $y$  به بینهایت میل کند، از این دو رابطه واضح است که بر صفحه مختلط قدرمطلقهای  $\sin z$  و  $\cos z$  کراندار نیستند، در حالی که به ازای همه مقادیر  $x$  قدرمطلقهای  $\sin x$  و  $\cos x$  کوچکتر از یا مساوی با یک‌اند. (تعریف کراندار بودن را در انتهای بخش ۱۷، ببینید).

مقدار مشخصی مانند  $\sin z$  را که برای آن  $f(z_0) = f(z_0)$ ، یک صفر تابع مفروض  $(z)$  می‌نامند. چون وقتی  $z$  حقیقی است،  $\sin z$  همان تابع سینوس معمولی در حسابان می‌شود، در می‌باییم که تمام اعداد حقیقی به صورت  $(.., n\pi, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$  صفرهای  $\sin z$  هستند. برای آنکه نشان دهیم  $\sin z$  صفرهای دیگری ندارد، فرض می‌کنیم که  $\sin z = 0$  و توجه می‌کنیم که چگونه از رابطه (۱۵) نتیجه می‌شود که

$$\sin^2 x + \sinh^2 y = 0.$$

$$\sinh y = 0 \quad \text{و} \quad \sin x = 0.$$

در این صورت بهوضوح دیده می‌شود که  $(.., n\pi, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$   $y = 0$ ؛ یعنی

$$z = n\pi \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad \text{اگر و فقط اگر} \quad \sin z = 0 \quad (17)$$

چون بنابر دومین اتحاد (۹)، داریم

$$\cos z = -\sin\left(z - \frac{\pi}{2}\right),$$

$$z = \frac{\pi}{2} + n\pi \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad \text{اگر و فقط اگر} \quad \cos z = 0. \quad (18)$$

بنابراین همانند  $z$ , تمام صفرهای  $\sin z$ ,  $\cos z$ , حقیقی‌اند.

چهار تابع مثلثاتی دیگر با روابط معمولی برحسب توابع سینوس و کسینوس تعریف می‌شوند:

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}, \quad (19)$$

$$\sec z = \frac{1}{\cos z}, \quad \csc z = \frac{1}{\sin z}. \quad (20)$$

توجه کنید که  $z$  و  $\sec z$  همه جا تحلیلی‌اند جز در تکینیهای (بخش ۲۳)

$$z = \frac{\pi}{2} + n\pi \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

که صفرهای  $\cos z$  هستند. به طور مشابه،  $z$  و  $\cot z$  تکینیهای در صفرهای  $z$  دارند که عبارت‌اند از

$$z = n\pi \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

با مشتقگیری از عبارات سمت راست روابط (۱۹) و (۲۰)، فرمولهای مشتقگیری مورد انتظار زیر را به دست می‌آوریم

$$\frac{d}{dz} \tan z = \sec^2 z, \quad \frac{d}{dz} \cot z = -\csc^2 z, \quad (21)$$

$$\frac{d}{dz} \sec z = \sec z \tan z, \quad \frac{d}{dz} \csc z = -\csc z \cot z. \quad (22)$$

ویژگی تناوبی هریک از توابع مثلثاتی که با روابط (۱۹) و (۲۰) تعریف شده‌اند به سادگی از روابط (۱۳) و (۱۴) نتیجه می‌شود. مثلاً

$$\tan(z + \pi) = \tan z. \quad (23)$$

ویژگیهای نگاشتی تبدیل  $w = \sin z$  به خصوص در کاربردهای بعدی مهم‌اند. خواننده‌ای که حالا می‌خواهد بعضی از این ویژگیها را بداند برای خواندن بخش ۸۹ (فصل ۸)، که این ویژگیها در آنجا مورد بحث قرار گرفته است، آمادگی کافی دارد.

## تمرینها

۱. با ارائه جزئیات، درستی عبارات (۲) در بخش ۳۳ را برای مشتقهای  $\sin z$  و  $\cos z$  تحقیق کنید.

۲. نشان دهید فرمول اویلر (بخش ۶) وقتی به جای  $\theta$ ,  $z$  قرار دهیم برقرار است:

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z$$

راهنمایی: برای تحقیق درستی این تساوی، از سمت راست شروع کنید.

۳. در رابطه (۴)، بخش ۳۳، جای  $z_1$  و  $z_2$  را عوض کنید و طرفین نظیر در تساوی حاصل و تساوی (۴) را با هم جمع کرده عبارت (۵) را برای  $(z_1 + z_2) \sin$  به دست آورید.

۴. بنابر رابطه (۵) بخش ۳۳ داریم

$$\sin(z + z_2) = \sin z \cos z_2 + \cos z \sin z_2.$$

با مشتقگیری از هر طرف رابطه فوق نسبت به  $z$  و قرار دادن  $z_1 = z$ ، عبارت (۶) آن بخش را برای  $\cos(z_1 + z_2)$  به دست آورید.

۵. درستی اتحاد (۷) بخش ۳۳ را تحقیق کنید، با استفاده از

(الف) اتحاد (۶) و روابط (۳) آن بخش؛

(ب) لم بخش ۲۶ و این امر که تابع تام

$$f(z) = \sin^2 z + \cos^2 z - 1$$

همه مقادیرش در امتداد محور  $x$ ‌ها صفر است.

۶. نشان دهید چگونه اتحادهای مثلثاتی (۸) و (۹) بخش ۳۳ از یکی از اتحادهای (۵) و (۶) آن بخش به دست می‌آیند.

۷. با استفاده از اتحاد (۷)، بخش ۳۳، نشان دهید که

$$(الف) \sec^2 z = 1 + \tan^2 z \quad (ب) 1 + \cot^2 z = \csc^2 z$$

۸. فرمولهای مشتقگیری (۲۱) و (۲۲) بخش ۳۳ را ثابت کنید.

۹. عبارات (۱۵) و (۱۶) بخش ۳۳ برای  $|\sin z|^2$  و  $|\cos z|^2$  را با استفاده از عبارات (۱۱) و (۱۲) به دست آورید.

راهنمایی: اتحادهای  $1 = \cosh^2 y - \sinh^2 y = \sin^2 x + \cos^2 x$  و  $1 = \sinh^2 y - \cosh^2 y$  را به یاد آورید.

۱۰. نشان دهید چگونه از عبارات (۱۵) و (۱۶) در بخش ۳۳ برای  $|\sin z|^2$  و  $|\cos z|^2$  نتیجه می‌شود که

$$(الف) |\cos z| \geq |\cos x| \quad (ب) |\sin z| \geq |\sin x|$$

۱۱. به کمک عبارات (۱۵) و (۱۶) بخش ۳۳ برای  $|z|^2$  و  $|\sin z|^2$  و  $|\cos z|^2$  نشان دهید که

$$|\sinh y| \leq |\cos z| \leq \cosh y \quad (\text{ب}) \quad ; \quad |\sinh y| \leq |\sin z| \leq \cosh y \quad (\text{الف})$$

۱۲. (الف) با استفاده از تعاریف (۱)، بخش ۳۳، برای  $\sin z$  و  $\cos z$  نشان دهید که

$$2 \sin(z_1 + z_2) \sin(z_1 - z_2) = \cos 2z_2 - \cos 2z_1.$$

(ب) به کمک اتحاد حاصل در قسمت (الف) نشان دهید اگر  $\cos z_1 = \cos z_2$  آنگاه حداقل یکی از اعداد  $z_2 + z_1$  و  $z_2 - z_1$  مضرب صحیحی از  $2\pi$  است.

۱۳. با استفاده از معادلات کوشی-ریمان و قضیه بخش ۲۰ نشان دهید که نه  $\sin \bar{z}$  در جایی تابعی تحلیلی از  $z$  است و نه  $\cos \bar{z}$ .

۱۴. اصل بازتابی (بخش ۲۷) را به کار برده نشان دهید که برای هر  $z$  داریم

$$\overline{\cos z} = \cos \bar{z} \quad (\text{ب}) \quad ; \quad \overline{\sin z} = \sin \bar{z} \quad (\text{الف})$$

۱۵. با کمک عبارات (۱۱) و (۱۲) از بخش ۳۳، مستقیماً رابطه‌های حاصل در تمرین ۱۴ را اثبات کنید.

۱۶. نشان دهید که

$$\overline{\cos(iz)} = \cos(i\bar{z}) \quad (\text{الف})$$

$$\overline{\sin(iz)} = \sin(i\bar{z}) \quad (\text{ب})$$

۱۷. همه ریشه‌های معادله  $\sin z = \cosh 4$  را با مساوی قراردادن قسمتهای حقیقی و موهومی  $\sin z$  و  $\cosh 4$  پیدا کنید.

جواب:  $\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) \pm 4i$  ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ )

۱۸. همه ریشه‌های معادله  $\cos z = 2$  را پیدا کنید.  
جواب:  $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) 2n\pi \pm i \ln(2 + \sqrt{3})$  یا  $2n\pi + i \cosh^{-1} 2$

### ۳۴. توابع هذلولوی

سینوس هذلولوی و کسینوس هذلولوی یک متغیر مختلط به همان صورت سینوس و کسینوس هذلولوی یک متغیر حقیقی تعریف می‌شوند، یعنی

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}. \quad (1)$$

چون  $e^z$  و  $e^{-z}$  تام‌اند، از تعریف (۱) نتیجه می‌شود که  $\sinh z$  و  $\cosh z$  تام‌اند. به علاوه

$$\frac{d}{dz} \sinh z = \cosh z, \quad \frac{d}{dz} \cosh z = \sinh z. \quad (2)$$

با توجه به طریقه ظاهرشدن تابع نمایی در تعاریف (۱) و در تعاریف (بخش ۳۳)

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

برای  $\sin z$  و  $\cos z$ ، توابع سینوس و کسینوس هذلولوی ارتباطی نزدیک با این توابع مثلثاتی دارند:

$$-i \sinh(iz) = \sin z, \quad \cosh(iz) = \cos z, \quad (3)$$

$$-i \sin(iz) = \sinh z, \quad \cos(iz) = \cosh z. \quad (4)$$

برخی از اتحادهایی که شامل توابع سینوس و کسینوس هذلولوی بوده و زیاد به کار می‌روند عبارت اند از

$$\sinh(-z) = -\sinh z, \quad \cosh(-z) = \cosh z, \quad (5)$$

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1, \quad (6)$$

$$\sinh(z_1 + z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 + \cosh z_1 \sinh z_2, \quad (7)$$

$$\cosh(z_1 + z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 + \sinh z_1 \sinh z_2, \quad (8)$$

و

$$\sinh z = \sinh x \cos y + i \cosh x \sin y, \quad (9)$$

$$\cosh z = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y, \quad (10)$$

$$|\sinh z|^2 = \sinh^2 x + \sin^2 y, \quad (11)$$

$$|\cosh z|^2 = \cosh^2 x + \cos^2 y. \quad (12)$$

که در آنها  $z = x + iy$ . در حالی که این اتحادها مستقیماً از تعاریف (۱) نتیجه می‌شوند اغلب با کمک روابط (۳) و (۴) از اتحادهای مثلثاتی وابسته ساده‌تر به دست می‌آیند. مثال. به منظور شریح روش اثباتی که پیشنهاد شده است، درستی اتحاد (۱۱) را تحقیق می‌کنیم. بنابر اولین رابطه از روابط (۴)،  $|\sinh z|^2 = |\sin(iy)|^2 = |\sinh(iy)|^2$ . یعنی

$$|\sinh z|^2 = |\sin(-y + ix)|^2, \quad (13)$$

که در آن  $z = x + iy$ . اما بنابر رابطه (۱۵)، بخش ۳۳، می‌دانیم که

$$|\sin(x + iy)|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y;$$

با توجه به این رابطه، می‌توان رابطه (۱۳) را به صورت مطلوب (۱۱) نوشت.

بنابر متناظر بودن  $\cos z$  و  $\sin z$  بلافاصله از روابط (۴) نتیجه می‌شود که  $\cosh z$  و  $\sinh z$  متناظر و با دوره تناوب  $2\pi i$  هستند. همچنین از روابط (۴) معلوم می‌شود که

$$z = n\pi i \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad \text{اگر و فقط اگر} \quad \sinh z = 0. \quad (۱۴)$$

و

$$z = \left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)i \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad \text{اگر و فقط اگر} \quad \cosh z = 0. \quad (۱۵)$$

تائزانت هذلولوی  $z$  با رابطه

$$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z} \quad (۱۶)$$

تعريف می‌شود و در هر حوزه‌ای که در آن  $\cosh z \neq 0$  تحلیلی است. توابع  $\sech z$ ,  $\coth z$ ,  $\csch z$ , به ترتیب عکس  $\cosh z$ ,  $\sinh z$  و  $\tanh z$  هستند. مستقیماً می‌توان درستی فرمولهای مشتقگیری زیر را تحقیق کرد، که نظری همان فرمولهایی هستند که در حسابان برای توابع یک متغیره حقیقی ثابت شده است:

$$\frac{d}{dz} \tanh z = \operatorname{sech}^2 z, \quad \frac{d}{dz} \coth z = -\operatorname{csch}^2 z, \quad (۱۷)$$

$$\frac{d}{dz} \operatorname{sech} z = -\operatorname{sech} z \tanh z, \quad \frac{d}{dz} \operatorname{csch} z = -\operatorname{csch} z \coth z. \quad (۱۸)$$

### تمرینها

۱. تحقیق کنید که مشتقات  $\cosh z$  و  $\sinh z$  به گونه‌ای هستند که در روابط (۲)، بخش ۳۴، بیان شده‌اند.

۲. به یکی از دو روش زیر ثابت کنید که  $\sinh 2z = 2 \sinh z \cosh z$
- (الف) با استفاده از تعریفهای (۱)، بخش ۳۴، برای  $\sinh z$  و  $\cosh z$  (ب) با استفاده از اتحاد  $\sin 2z = 2 \sin z \cos z$  (بخش ۳۳) و روابط (۳) بخش ۳۴

۳. نشان دهید چگونه اتحادهای (۶) و (۸) بخش ۳۴، به ترتیب، از اتحادهای (۷) و (۶) بخش ۳۳ نتیجه می‌شوند.

۴. بنویسید (۹) و (۱۰) در بخش ۳۴ به ترتیب از اتحادهای (۷) و (۸) آن بخش نتیجه می‌شوند. عبارات (۹) و (۱۰) در بخش ۳۴ به ترتیب از اتحادهای (۷) و (۸) آن بخش نتیجه می‌شوند.

۵. درستی عبارت (۱۲)، بخش ۳۴، را برای  $|\cosh z|^2$  تحقیق کنید.

۶. نشان دهید که  $|\sinh x| \leq |\cosh z| \leq \cosh x$

(الف) با استفاده از اتحاد (۱۲) بخش ۳۴؛

(ب) با استفاده از نابرابریهای  $|\sinh y| \leq |\cos z| \leq \cosh y$  حاصل در تمرین ۱۱ (ب)

بخش ۳۳.

۷. نشان دهید که

$$\cosh(z + \pi i) = -\cosh z \quad (\text{الف}) \quad \sinh(z + \pi i) = -\sinh z$$

$$\tanh(z + \pi i) = \tanh z \quad (\text{ج})$$

۸. ثابت کنید صفرهای  $\sinh z$  و  $\cosh z$  به گونه‌ای هستند که در عبارات (۱۴) و (۱۵)، بخش ۳۴، بیان شد.

۹. با استفاده از نتایجی که در تمرین ۸ ثابت شد، همه صفرها و تکینیهای تابع تازئانت هذلولوی را پیدا کنید.

۱۰. فرمولهای مشتقگیری (۱۷)، بخش ۳۴، را به دست آورید.

۱۱. با استفاده از اصل بازتابی (بخش ۲۷) نشان دهید که برای هر  $z$  داریم

$$\overline{\cosh z} = \cosh \bar{z} \quad (\text{الف}) \quad \overline{\sinh z} = \sinh \bar{z}$$

۱۲. با استفاده از نتایج تمرین ۱۱ نشان دهید در نقاطی که  $z \neq 0$  داریم  $\tanh z = \tanh \bar{z}$

۱۳. با پذیرفتن این نکته که هر یک از اتحادهای زیر وقتی به جای  $z$  متغیر حقیقی  $x$  را قرار دهیم معتبر است و با استفاده از لم بخش ۲۶ تحقیق کنید که

$$\sinh z + \cosh z = e^z \quad (\text{الف}) \quad \cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$$

[با تمرین ۵ (ب) بخش ۳۳ مقایسه کنید.]

۱۴. چرا تابع  $(e^z) \sinh$  تام است؟ قسمت حقیقی این تابع را به صورت تابعی از  $x$  و  $y$  بنویسید و بیان کنید چرا این تابع باید همه جا همساز باشد.

۱۵. با استفاده از یکی از اتحادهای (۹) و (۱۰) بخش ۳۴ به همان روش تمرین ۱۷ بخش ۳۳ همه ریشه‌های معادلات زیر را پیدا کنید

## تابع مثلثاتی و هذلولوی معکوس ۱۳۱

$$\cosh z = \frac{1}{\cosh z} \quad (\text{الف}) \quad \sinh z = i \quad (\text{الف})$$

جواب:  $\left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi i \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (\text{الف})$

$\cdot \left(2n \pm \frac{1}{3}\right)\pi i \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (\text{ب})$

۱۶. همه ریشه‌های معادله  $\cosh z = -2$  را پیدا کنید (این تمرین را با تمرین ۱۸ بخش ۳۳ مقایسه کنید).

جواب:  $\pm \ln(2 + \sqrt{3}) + (2n + 1)\pi i \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$

## ۳۵. تابع مثلثاتی و هذلولوی معکوس

معکوس تابع مثلثاتی و هذلولوی را می‌توان بر حسب لگاریتم بیان کرد.  
برای تعریف تابع معکوس سینوس،  $\sin^{-1} z$ ، می‌نویسیم

$$z = \sin w \quad w = \sin^{-1} z$$

یعنی  $z = \sin^{-1} w$  در صورتی که

$$z = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i}.$$

اگر این معادله را به شکل

$$(e^{iw})^2 - 2iz(e^{iw}) - 1 = 0$$

بنویسیم که معادله درجه دومی نسبت به  $e^{iw}$  است. با حل آن نسبت به  $e^{iw}$  [تمرین ۸ (الف)، بخش ۹ را ببینید]، در می‌یابیم که

$$e^{iw} = iz + (1 - z^2)^{1/2}, \quad (1)$$

که در آن، همان‌طور که می‌دانیم  $(1 - z^2)^{1/2} = 1 - z^2$  یک تابع دومقداری از  $z$  است. اگر از هر طرف معادله (۱) لگاریتم بگیریم و به یاد آوریم که  $\sin^{-1} z = w$ ، به فرمول زیر می‌رسیم

$$\sin^{-1} z = -i \log[iz + (1 - z^2)^{1/2}]. \quad (2)$$

مثال زیر نشان می‌دهد که  $\sin^{-1} z$  تابعی چندمقداری، با تعدادی نامتناهی مقدار در هر نقطه  $z$  است.

مثال. عبارت (۲) گویای این نکته است که

$$\sin^{-1}(-i) = -i \log(1 \pm \sqrt{2}).$$

اما

$$\log(1 + \sqrt{2}) = \ln(1 + \sqrt{2}) + 2n\pi i \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

و

$$\log(1 - \sqrt{2}) = \ln(\sqrt{2} - 1) + (2n + 1)\pi i \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

چون

$$\ln(\sqrt{2} - 1) = \ln \frac{1}{1 + \sqrt{2}} = -\ln(1 + \sqrt{2}),$$

پس اعداد

$$(-1)^n \ln(1 + \sqrt{2}) + n\pi i \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

مجموعهٔ مقادیر  $(1 \pm \sqrt{2})$  را تشکیل می‌دهند. در نتیجه

$$\sin^{-1}(-i) = n\pi + i(-1)^{n+1} \ln(1 + \sqrt{2}) \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

می‌توان با استفاده از روش استنتاج فرمول (۲) برای  $\sin^{-1} z$  نشان داد که

$$\cos^{-1} z = -i \log[z + i(1 - z^2)^{1/2}] \quad (3)$$

و

$$\tan^{-1} z = \frac{i}{2} \log \frac{i+z}{i-z}. \quad (4)$$

تابع  $\cos^{-1} z$  و  $\tan^{-1} z$  نیز چندمقداری‌اند. در صورتی که شاخه‌های مشخص جذر و تابع لگاریتمی به کار روند، هر سه تابع معکوس تک‌مقداری و تحلیلی می‌شوند، زیرا در این صورت ترکیب‌هایی از توابع تحلیلی‌اند.

مشتقهای این سه تابع به سهولت از فرمولهای بالا به دست می‌آیند. مشتق دو تابع اول بستگی به مقادیر انتخاب شده برای جذرها دارد:

$$\frac{d}{dz} \sin^{-1} z = \frac{1}{(1-z^2)^{1/2}}, \quad (5)$$

$$\frac{d}{dz} \cos^{-1} z = \frac{-1}{(1-z^2)^{1/2}}. \quad (6)$$

ولی مشتق تابع آخری،

$$\frac{d}{dz} \tan^{-1} z = \frac{1}{1+z^2}, \quad (7)$$

به نحوه تک‌مقداری شدن تابع بستگی ندارد.

با روشی متناظر می‌توان توابع هذلولوی معکوس را بررسی کرد. نتیجه می‌شود که

$$\sinh^{-1} z = \log[z + (z^2 + 1)^{1/2}], \quad (8)$$

$$\cosh^{-1} z = \log[z + (z^2 - 1)^{1/2}], \quad (9)$$

و

$$\tanh^{-1} z = \frac{1}{2} \log \frac{1+z}{1-z}. \quad (10)$$

سرانجام یادآور می‌شویم که نماد متناول دیگر برای همه این توابع معکوس عبارت است از  $\arccos z$ ,  $\arcsin z$  و غیره.

## تمرینها

۱. همه مقادیر هر یک از عبارات زیر را پیدا کنید

$$\tan^{-1}(1+i) \quad (\text{الف}) \quad \tan^{-1}(2i) \quad (\text{ب})$$

$$\tanh^{-1} 0 \quad (\text{د}) \quad \cosh^{-1}(-1) \quad (\text{ج})$$

$$\begin{aligned} & : \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi + \frac{i}{\pi} \ln(3) \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (\text{الف}) \\ & . n\pi i \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (\text{د}) \end{aligned}$$

۲. معادله  $2 \sin z = \sin z$  را نسبت به  $z$  حل کنید

- (الف) با مساوی قراردادن قسمتهای حقیقی و قسمتهای موهومی در آن معادله؛  
 (ب) با استفاده از فرمول (۲)، بخش ۳۵، برای  $z^{-1} \cdot \sin(z)$ .

جواب:  $\left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi \pm i \ln(2 + \sqrt{3}) \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$

۳. معادله  $\cos z = \sqrt{2}$  را نسبت به  $z$  حل کنید.

۴. فرمول (۵)، بخش ۳۵، برای مشتق  $z^{-1} \sin(z)$  را به دست آورید.

۵. عبارت (۴)، بخش ۳۵، برای  $z^{-1} \tan(z)$  را به دست آورید.

۶. فرمول (۷)، بخش ۳۵، برای مشتق  $z^{-1} \tan(z)$  را به دست آورید.

۷. عبارت (۹)، بخش ۳۵، برای  $z^{-1} \cosh(z)$  را به دست آورید.

# ۴

## انتگرال

انتگرالها در مطالعه توابع یک متغیره مختلط فوق العاده مهم‌اند. نظریه انتگرالگیری، که در این فصل ارائه می‌شود، به دلیل دقت، زیبایی و سادگی ریاضی‌اش معروف است. قضایا عموماً فشرده و توانا و بیشتر اثبات‌ها ساده‌اند.

### ۳۶. مشتقات توابع $w(t)$

برای آشنایی با انتگرالهای  $(z)f$  به روشنی نسبتاً ساده، ابتدا مشتق تابع مختلط مقدار  $w$  از متغیر حقیقی  $t$  را تعریف می‌کنیم. می‌نویسیم

$$w(t) = u(t) + iv(t), \quad (1)$$

که در آن توابع  $u$  و  $v$  توابعی حقیقی مقدار از  $t$  هستند. مشتق  $(t)w'$ ، یا  $d[w(t)]/dt$  از تابع (۱) در نقطه  $t$  به صورت

$$w'(t) = u'(t) + iv'(t) \quad (2)$$

تعریف می‌شود، به شرط آنکه هر یک از مشتقات  $u'$  و  $v'$  در  $t$  موجود باشند.

از تعریف (۲) نتیجه می‌شود که به‌ازای هر عدد مختلط ثابت مانند  $z_0 = x_0 + iy_0$ ,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}[z_0 w(t)] &= [(x_0 + iy_0)(u + iv)]' = [(x_0 u - y_0 v) + i(y_0 u + x_0 v)]' \\ &= (x_0 u - y_0 v)' + i(y_0 u + x_0 v)' = (x_0 u' - y_0 v') + i(y_0 u' + x_0 v').\end{aligned}$$

اما

$$(x_0 u' - y_0 v') + i(y_0 u' + x_0 v') = (x_0 + iy_0)(u' + iv') = z_0 w'(t),$$

ولذا

$$\frac{d}{dt}[z_0 w(t)] = z_0 w'(t). \quad (3)$$

قاعده دیگر مورد انتظار که اغلب از آن استفاده می‌کنیم عبارت است از

$$\frac{d}{dt} e^{z_0 t} = z_0 e^{z_0 t} \quad (4)$$

که در آن  $z_0 = x_0 + iy_0$ . برای تحقیق درستی آن، می‌نویسیم

$$e^{z_0 t} = e^{x_0 t} e^{iy_0 t} = e^{x_0 t} \cos y_0 t + ie^{x_0 t} \sin y_0 t$$

و با استناد به تعریف (۲) می‌بینیم که

$$\frac{d}{dt} e^{z_0 t} = (e^{x_0 t} \cos y_0 t)' + i(e^{x_0 t} \sin y_0 t)'.$$

با توجه به قواعد آشنای حسابان و اندکی اعمال جبری ساده عبارت زیر را پیدا می‌کنیم

$$\frac{d}{dt} e^{z_0 t} = (x_0 + iy_0)(e^{x_0 t} \cos y_0 t + ie^{x_0 t} \sin y_0 t),$$

یا

$$\frac{d}{dt} e^{z_0 t} = (x_0 + iy_0) e^{x_0 t} e^{iy_0 t}.$$

البته این همان رابطه (۴) است.

تعداد دیگری از قواعد که در حسابان آموخته‌ایم، از قبیل قواعد مشتقگیری مجموع و حاصلضرب، همان‌طور به‌کار برده می‌شوند که برای توابع حقیقی مقدار از متغیر  $t$  به‌کار برده می‌شوند. همانند

ویژگی (۳) و دستور (۴) تحقیق درستی آنها را می‌توان بر منبای قواعد مشابه در حسابان انجام داد. ولی باید خاطر نشان کرد که همه قواعد مشتق در حسابان به توابع نوع (۱) منتقل نمی‌شوند. مثال زیر این مطلب را نشان می‌دهد.

مثال. فرض کنید  $w(t)$  در بازه  $b \leq t \leq a$  پیوسته باشد یعنی، توابع مؤلفه‌ی آن  $u(t)$  و  $v(t)$  هر دو در آن بازه پیوسته باشند، حتی اگر بهارای هر  $t$  از بازه  $a < t < b$  موجود باشد، دیگر از قضیه مقدار میانگین نمی‌توان استفاده کرد. به عبارت دقیقتر، لازم نیست عددی مانند  $c$  در بازه  $a < c < b$  موجود باشد به قسمی که

$$w'(c) = \frac{w(b) - w(a)}{b - a}.$$

برای اثبات آن، فقط لازم است تابع  $w(t) = e^{it}$  را در بازه  $2\pi \leq t \leq 0$  در نظر بگیریم. زیرا در صورتی که از این تابع استفاده شود،  $w'(t) = |ie^{it}| = 1$ ؛ و این بدان معناست که  $w(2\pi) - w(0) = 0$ . هیچ وقت صفر نمی‌شود، در حالی که

### ۳۷. انتگرالهای معین توابع $w(t)$

در صورتی که  $w(t)$  تابع مختلط‌مقداری از یک متغیر حقیقی  $t$  و به صورت زیر نوشته شده باشد

$$w(t) = u(t) + iv(t), \quad (1)$$

که در آن  $u$  و  $v$  حقیقی مقدارند، انتگرال معین  $w(t)$  بر بازه  $b \leq t \leq a$  چنین تعریف می‌شود

$$\int_a^b w(t) dt = \int_a^b u(t) dt + i \int_a^b v(t) dt \quad (2)$$

به شرطی که هر یک از انتگرالهای سمت راست موجود باشد. بنابراین

$$\operatorname{Im} \int_a^b w(t) dt = \int_a^b \operatorname{Im}[w(t)] dt \quad \text{و} \quad \operatorname{Re} \int_a^b w(t) dt = \int_a^b \operatorname{Re}[w(t)] dt. \quad (3)$$

مثال ۱. به عنوان یک مثال تشریحی تعریف (۲)،

$$\int_0^1 (1 + it)^2 dt = \int_0^1 (1 - t^2) dt + i \int_0^1 2t dt = \frac{2}{3} + i.$$

انتگرالهای ناسرة  $w(t)$  بر بازه‌های بیکران به روش مشابه تعریف می‌شوند.

اگر توابع  $u$  و  $v$  در بازه  $a \leq t \leq b$  تکه‌یی پیوسته باشند، وجود انتگرال‌هاشان در تعریف (۲) تضمین می‌شود. چنین تابعی همه جا در بازه مزبور پیوسته است بجز احتمالاً در تعدادی متناهی نقطه که تابع در آنها، با وجود ناپیوستگی، دارای حدود یک طرفه است. البته در  $a$  فقط حد راست و در  $b$  فقط حد چپ لازم است. در صورتی که  $u$  و  $v$  هر دو تکه‌یی پیوسته باشند، گویند تابع  $w$  دارای این ویژگی است. قواعد قبل انتظار برای انتگرال‌گیری از حاصلضرب یک عدد مختلط ثابت در تابعی مانند  $w(t)$ ، برای انتگرال‌گیری مجموعه‌ای چنین تابعی و برای تعویض حدود انتگرال‌گیری، همگی برقرارند. درستی این قواعد و نیز ویژگی

$$\int_a^b w(t)dt = \int_a^c w(t)dt + \int_c^b w(t)dt,$$

با یادآوری نتایج نظری از حسابان به آسانی تحقیق می‌شود.

به علاوه قضیه اساسی حسابان، شامل تابع اولیه، را می‌توان تعمیم داد تا برای انتگرال‌هایی از نوع (۲) هم به کار رود. به عبارت صریحت‌تر، فرض کنید که توابع

$$w(t) = u(t) + iv(t) \quad \text{و} \quad W(t) = U(t) + iV(t)$$

در بازه  $a \leq t \leq b$  پیوسته باشند. اگر وقتی آنگاه  $W'(t) = w(t)$ ،  $a \leq t \leq b$ ، داد تا برای انتگرال‌هایی از نوع (۲) هم به کار رود. بنابراین، طبق تعریف (۲)

$$\begin{aligned} \int_a^b w(t)dt &= U(t) \Big|_a^b + iV(t) \Big|_a^b \\ &= [U(b) + iV(b)] - [U(a) + iV(a)]. \end{aligned}$$

يعنى

$$\int_a^b w(t)dt = W(b) - W(a) = W(t) \Big|_a^b. \quad (4)$$

مثال ۲. چون  $e^{it}$  را بینید (بخش ۳۶)،

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/4} e^{it} dt &= -ie^{it} \Big|_0^{\pi/4} = -ie^{i\pi/4} + i \\ &= -i \left( \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} \right) + i = \frac{1}{\sqrt{2}} + i \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right). \end{aligned}$$

اين بخش را با ويزگی مهمی از قدرمطلق انتگرال، يعني

$$\left| \int_a^b w(t) dt \right| \leq \int_a^b |w(t)| dt \quad (a \leq b) \quad (5)$$

به پایان میبریم. واضح است که وقتی مقدار انتگرال سمت چپ صفر باشد، به خصوص وقتی  $a = b$ ، این نابرابری برقرار است. بنابراین در اثبات، فرض میکنیم این مقدار، عدد مختلط ناصفری باشد. اگر  $r^\circ$  قدرمطلق و  $\theta^\circ$  یک آوند این عدد ثابت باشد آنگاه

$$\int_a^b w dt = r^\circ e^{i\theta^\circ}.$$

اين معادله را نسبت به  $r^\circ$  حل کرده مینويسیم

$$r^\circ = \int_a^b e^{-i\theta^\circ} w dt. \quad (6)$$

حال سمت چپ اين رابطه، عددی حقيقي است و لذا سمت راست آن نیز عددی حقيقي است. پس با استفاده از اينکه قسمت حقيقي هر عدد حقيقي با خود آن برابر است و به استناد ويزگی اول از ويزگيهای (۳) میبینیم که سمت راست رابطه (۶) را میتوان به طریق زیر نوشت

$$\int_a^b e^{-i\theta^\circ} w dt = \operatorname{Re} \int_a^b e^{-i\theta^\circ} w dt = \int_a^b \operatorname{Re}(e^{-i\theta^\circ} w) dt.$$

در نتیجه رابطه (۶) به شکل زير در میآيد

$$r^\circ = \int_a^b \operatorname{Re}(e^{-i\theta^\circ} w) dt. \quad (7)$$

اما

$$\operatorname{Re}(e^{-i\theta^\circ} w) \leq |e^{-i\theta^\circ} w| = |e^{-i\theta^\circ}| |w| = |w|$$

ولذا بنابر رابطه (۷)

$$r^\circ \leq \int_a^b |w| dt.$$

در واقع چون وقتی مقدار انتگرال ناصفر باشد،  $r^\circ$  طرف چپ نابرابر (۵) است، اثبات کامل میشود.

فقط با تغییرات جزئی مناسب، نابرابریهایی مانند

$$\left| \int_a^\infty w(t)dt \right| \leq \int_a^\infty |w(t)|dt, \quad (8)$$

نیز از بحث فوق نتیجه می‌شوند، به شرطی که هر دو انتگرال ناسره موجود باشند.

### تمرینها

۱. با استفاده از قواعد نظری در حسابان قواعد زیر را ثابت کنید هرگاه

$$w(t) = u(t) + iv(t)$$

تابعی مختلط‌مقدار از متغیر حقیقی  $t$  و  $w'(t)$  موجود باشد.

(الف)  $\frac{d}{dt}w(-t) = -w'(-t)$ ، که در آن  $w'(-t)$  نمایش مشتق  $w(t)$  نسبت به  $t$  است

که در  $-t$  محاسبه شده است؛

$$(ب) \frac{d}{dt}[w(t)]^2 = 2w(t)w'(t)$$

۲. انتگرالهای زیر را محاسبه کنید:

$$(\text{الف}) \int_1^2 \left( \frac{1}{t} - i \right)^2 dt \quad (\text{ب}) \int_0^{\pi/8} e^{i\pi t} dt \quad (\text{ج}) \int_0^\infty e^{-zt} dt \quad (\text{د}) \text{ (Re } z > 0 \text{)}$$

$$\frac{1}{z} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{i}{4} + \frac{1}{2} - i \ln 4 \quad (\text{الف}) \quad (\text{ب}) \quad (\text{ج})$$

۳. نشان دهید که اگر  $m$  و  $n$  اعداد صحیحی باشند آنگاه

$$\int_0^{2\pi} e^{im\theta} e^{-in\theta} d\theta = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 2\pi, & m = n \end{cases}$$

۴. بنابر تعریف (۲) بخش ۳۷ از انتگرال توابع مختلط با یک متغیر حقیقی، داریم

$$\int_0^\pi e^{(1+i)x} dx = \int_0^\pi e^x \cos x dx + i \int_0^\pi e^x \sin x dx.$$

دو انتگرال سمت راست را بدین طریق محاسبه کنید که تنها انتگرال سمت چپ را محاسبه کنید و آنها را قسمتهای حقیقی و موهومی عدد حاصل بگیرید.

$$\text{جواب: } \frac{1+e^\pi}{2}, -\frac{1+e^\pi}{2}$$

۵. فرض کنید  $w(t)$  تابع مختلط پیوسته‌ای از  $t$  باشد که در بازه  $a \leq t \leq b$  تعریف شده است. با در نظر گرفتن حالت خاص  $w(t) = e^{it}$  در بازه  $2\pi \leq t \leq 0$  نشان دهید که این حکم همیشه برقرار نیست که عدد  $c$  بی‌در بازه  $a < t < b$  هست، به طوری که

$$\int_a^b w(t)dt = w(c)(b-a).$$

بدین ترتیب نشان دهید که قضیه مقدار میانگین برای انتگرالهای معین در حسابان برای این گونه توابع به کار نمی‌رود. (با مثال بخش ۳۶ مقایسه کنید).

۶. فرض کنید  $w(t) = u(t) + iv(t)$  معرف تابع مختلط پیوسته‌ای باشد که در بازه  $-a \leq t \leq a$  تعریف شده است.

(الف) فرض کنید  $w(t)$  زوج باشد، یعنی، به ازای هر  $t$  در بازه مفروض،  $w(-t) = w(t)$  نشان دهید که

$$\int_{-a}^a w(t)dt = 2 \int_0^a w(t)dt.$$

(ب) نشان دهید اگر  $w(t)$  تابعی فرد باشد، تابعی که به ازای هر  $t$  در آن بازه،  $w(-t) = -w(t)$  آن‌گاه

$$\int_{-a}^a w(t)dt = 0.$$

راهنمایی: در هر قسمت این تمرین از ویژگی نظیر برای انتگرالهای توابع حقیقی از  $t$  استفاده کنید، که از نظر نموداری بدینهی است.

۷. با استفاده از نابرابری (۵) بخش ۳۷، نشان دهید که به ازای همه مقادیر  $x$  در بازه  $1 \leq x \leq 1 - \text{تابع}^*$

$$P_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (x + i\sqrt{1-x^2} \cos \theta)^n d\theta \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

در نابرابری  $|P_n(x)| \leq 1$  صدق می‌کنند.

### ۳۸. مسیر

انتگرالهای تابع مختلط مقدار از یک متغیر مختلط به جای آنکه روی بازه‌های خط حقیقی تعریف شوند، روی منحنیها در صفحه مختلط تعریف می‌شوند. در این بخش به معرفی رده‌های منحنیهای می‌پردازیم که برای مطالعه چنین انتگرالهایی مناسب‌اند.

\* این تابع علاوه‌اً چندجمله‌یهایی بر حسب  $x$  هستند که به چندجمله‌یهای لیاندر مشهور و در ریاضیات کاربردی، مهم‌اند. برای مثال فصل ۴ کتاب لبدف (Lebedev) را که در پیوست ۱ آمده است ببینید.

مجموعه‌ای از نقاط  $(x, y) = z$  در صفحه مختلط را یک قوس می‌نامند هرگاه

$$x = x(t), \quad y = y(t) \quad (a \leq t \leq b) \quad (1)$$

که در آن  $x(t)$  و  $y(t)$  توابع پیوسته‌ای از پارامتر حقیقی  $t$  اند. این تعریف، نگاشت پیوسته‌ای از بازه  $a \leq t \leq b$  به تویی صفحه  $xy$  یا  $z$  برقرار می‌کند و نقاط تصویر برحسب مقادیر افزاینده  $t$  مرتب می‌شوند. مناسب است که نقاط  $C$  را با رابطه

$$z = z(t) \quad (a \leq t \leq b) \quad (2)$$

بیان کنیم که در آن

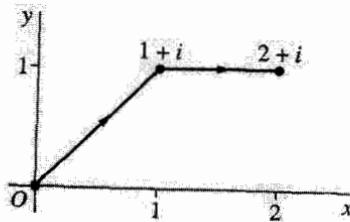
$$z(t) = x(t) + iy(t). \quad (3)$$

قوس  $C$  یک قوس ساده، یا یک قوس ثوردان<sup>۱</sup>، است اگر خودش را قطع نکند؛ یعنی، ساده است اگر  $z(t_1) \neq z(t_2)$  وقتی که  $t_1 \neq t_2$ . وقتی قوس  $C$  ساده است، با این استثنای  $z(b) = z(a)$  یک منحنی ساده بسته، یا یک منحنی ثوردان، است. بیشتر موقع از ماهیت هندسی یک قوس خاص، نماد دیگری برای پارامتر  $t$  در رابطه (۲) به ذهن می‌رسد. در واقع در مثالهای زیر با چنین وضعی مواجهیم.

### مثال ۱. خط شکسته

$$z = \begin{cases} x + ix, & 0 \leq x \leq 1 \\ x + i, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases} \quad (4)$$

متشکل از پاره خطی از  $z = 1 + it$  و به دنبال آن پاره خطی از  $z = 2 + it$  (شکل ۳۶)، یک قوس ساده است.



شکل ۳۶

## مثال ۲. دایره واحد

$$z = e^{i\theta} \quad (0^\circ \leq \theta \leq 2\pi) \quad (5)$$

حول مبدأ، منحنی ساده بسته‌ای است که در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت جهت‌دار شده است. دایره

$$z = z_0 + Re^{i\theta} \quad (0^\circ \leq \theta \leq 2\pi) \quad (6)$$

به مرکز نقطه  $z_0$  و با شعاع  $R$  (بخش ۶ را ببینید) همین طور است.

برای یک مجموعه نقاط می‌توان قوسهای مختلفی ساخت.

## مثال ۳. قوس

$$z = e^{-i\theta} \quad (0^\circ \leq \theta \leq 2\pi) \quad (7)$$

همان قوسی نیست که با معادله (5) بیان شد. مجموعه نقاط یکی است اما حالا دایره در جهت حرکت عقربه‌های ساعت پیموده شده است.

## مثال ۴. نقاط روی قوس

$$z = e^{i2\theta} \quad (0^\circ \leq \theta \leq 2\pi) \quad (8)$$

همان نقاطی هستند که قوسهای (5) و (7) را تشکیل می‌دادند. اما، قوس در اینجا با هر یک از آن قوسها فرق دارد زیرا دایره را در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت دوبار پیموده است.

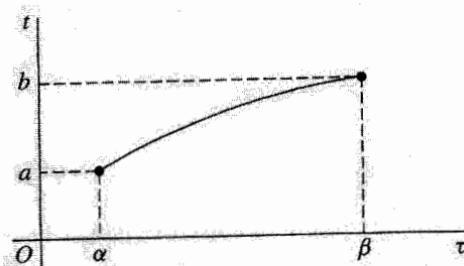
البته نمایش پارامتری برای هر منحنی مفروض  $C$  یکتا نیست. در واقع می‌توان بازه‌ای را که پارامتر بر آن تغییر می‌کند با هر بازه دیگری عوض کرد. به عبارت صریحت، فرض کنید

$$t = \phi(\tau) \quad (\alpha \leq \tau \leq \beta), \quad (9)$$

که در آن  $\phi$  تابع حقیقی مقداری است که بازه  $\beta \leq \tau \leq \alpha$  به روی بازه  $b \leq t \leq a$  در نمایش (2) می‌نگارد (شکل ۳۷ را ببینید). فرض می‌کنیم که  $\phi$  پیوسته و دارای مشتق پیوسته باشد. همچنین فرض می‌کنیم که بهازی هر  $\tau$ ,  $0 < (\tau')' \phi$ : این به ما اطمینان می‌دهد که  $t$  با  $\tau$  افزایش می‌یابد.

در این صورت نمایش (2) با معادله (9) به نمایش زیر تبدیل می‌شود

$$z = Z(\tau) \quad (\alpha \leq \tau \leq \beta), \quad (10)$$



شکل ۳۷

$$t = \phi(\tau)$$

که در آن

$$Z(\tau) = z[\phi(\tau)] \quad (11)$$

این مطلب در تمرین (۳) تشریح شده است، که در آن یک تابع صریح  $\phi(\tau)$  پیدا شده است.  
حال فرض کنید که مؤلفه های  $x'(t)$  و  $y'(t)$  مشتق تابع (۳) (بخش ۳۶ را ببینید)، یعنی

$$z'(t) = x'(t) + iy'(t) \quad (12)$$

که برای نمایش  $C$  به کار برد شد، در تمام بازه  $a \leq t \leq b$  پیوسته باشند. در این صورت قوس را  
قوسی مشتقپذیر می نامند و تابع حقیقی مقدار

$$|z'(t)| = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}$$

بر بازه  $a \leq t \leq b$  انتگرالپذیر است. در واقع بنابر تعریف طول قوس در حسابان، طول  $C$  برابر  
است با عدد

$$L = \int_a^b |z'(t)| dt. \quad (13)$$

همان طور که انتظار داریم مقدار  $L$  تحت برخی تغییرات در نمایش  $C$  از قبیل آنچه به کار بردیم  
پایاست. به عبارت دقیقتر، با تغییر متغیری که در معادله (۹) بیان شد، فرمول (۱۳) به صورت زیر  
در می آید [تمرین ۱ (ب) را ببینید]

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} |z'[\phi(\tau)]| |\phi'(\tau)| d\tau.$$

بنابراین اگر برای  $C$  از نمایش (۱۰) استفاده شود، چون (تمرین ۴)

$$Z'(\tau) = z'[\phi(\tau)]\phi'(\tau) \quad (14)$$

می‌توان فرمول (۱۳) را به شکل زیر نوشت

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} |Z'(\tau)| d\tau.$$

بنابراین اگر از نمایش (۱۰) استفاده شود همان طول  $C$  به دست خواهد آمد.

اگر معادله (۲) نمایش قوسی مشتقپذیر باشد و در هر نقطه از بازه  $a < t < b$  داشته باشیم

$\neq z'(t)$ ، آنگاه بردار یکه مماس

$$\mathbf{T} = \frac{z'(t)}{|z'(t)|}$$

به ازای هر  $t$  در این بازه باز با زاویه شبیه  $\arg z'(t)$  خوشنعیف است. بنابراین وقتی  $t$  بر تمامی بازه  $a < t < b$  تغییر کند  $\mathbf{T}$  پیوسته می‌چرخد. این عبارت که برای  $\mathbf{T}$  پیدا کردیم، همان عبارتی است که در حسابان دیده بودیم وقتی  $z(t)$  را بردار شعاعی گرفته بودیم. چنین قوسی را قوس هموار می‌نامند. پس قرارداد می‌کنیم که در ارجاع به قوس هموار  $(a \leq t \leq b)z = z(t)$  مشتق  $z'$  در بازه بسته  $a \leq t \leq b$  پیوسته و در بازه باز  $a < t < b$  ناصفر است.

مسیری، یا قوس تکمیلی هموار، قوسی است مشکل از تعداد متناهی قوس هموار که انتهای هر یک به ابتدای دیگری وصل است. اگر رابطه (۲) معرف یک مسیر باشد آنگاه  $z(t)$  پیوسته است، در حالی که  $(t)z'$  تکه‌بی‌پیوسته است. مثلاً خط شکسته (۴) یک مسیر است. در صورتی که فقط مقادیر ابتدایی و انتهایی  $z(t)$  یکی باشند، مسیر  $C$  یک مسیر ساده بسته نامیده می‌شود. دایره‌های (۵) و (۶) و مرز یک مثلث یا یک مستطیل که در جهت مشخصی در نظر گرفته شده باشند مثالهایی از مسیر ساده بسته هستند. طول یک مسیر یا یک مسیر ساده بسته، مجموع طول قوسهای تشکیل‌دهنده مسیر است.

نقاط واقع بر هر منحنی ساده بسته یا مسیر ساده بسته  $C$ ، نقاط مرزی دو حوزه متمایزنند. یکی از این حوزه‌ها، که داخل  $C$  نامیده می‌شود، کراندار و دیگری، خارج  $C$ ، بیکران است. بجایست این حکم را، که به قضیه منحنی زوردان مشهور است، پیذیریم، گرچه به طور هندسی معلوم است ولی اثبات آن ساده نیست.\*

\* صفحات ۱۱۵-۱۱۶ کتاب نویسن با بخش ۱۳ کتاب ثرون مذکور در پیوست ۱ را ببینید. حالت خاصی که  $C$  چندضلعی ساده بسته‌ای است در صفحات ۲۸۱-۲۸۵ جلد اول کتابهای هیل که در پیوست ۱ آمده ثابت شده است.

## تمرینها

۱. نشان دهید اگر تابع  $w(t) = u(t) + iv(t)$  در بازه  $a \leq t \leq b$  پیوسته باشد، آنگاه

$$\int_{-b}^{-a} w(-t) dt = \int_a^b w(\tau) d\tau \quad (\text{الف})$$

(ب)  $\int_a^b w(t) dt = \int_\alpha^\beta w[\phi(\tau)] \phi'(\tau) d\tau$  همان تابع در معادله (۹) بخش ۳۸، است.

راهنمایی: این روابط را می‌توان بدین طریق به دست آورد که ابتدا توجه کنیم که برای توابع حقیقی مقدار از  $t$  برقارند.

۲. فرض کنید  $C$  نیمة راست دایره  $|z| = 2$  در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت باشد و توجه کنید که دو نمایش پارامتری برای  $C$  عبارت‌اند از

$$z = z(\theta) = 2e^{i\theta} \quad \left( -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right)$$

$$z = Z(y) = \sqrt{4 - y^2} + iy \quad (-2 \leq y \leq 2).$$

ثابت کنید  $Z(y) = z[\phi(y)]$  که در آن

$$\phi(y) = \arctan \frac{y}{\sqrt{4 - y^2}} \quad \left( -\frac{\pi}{2} < \arctan t < \frac{\pi}{2} \right).$$

همچنین نشان دهید که تابع  $\phi$ ، به همان صورت که در شرایط بعد از معادله (۹) بخش ۳۸ لازم بود، دارای مشتق مثبت است.

۳. معادله خط ماربر نقاط  $(\alpha, a)$  و  $(\beta, b)$  در صفحه  $\tau\tau$  را که در شکل ۳۷ نشان داده شده است به دست آورید. سپس با استفاده از آن تابع خطی  $\phi(\tau)$  را پیدا کنید که بتوان با استفاده از آن در تغییر متغیر (۹) بخش ۳۸ نمایش (۲) آن بخش را به نمایش (۱۰) آن بخش تبدیل کرد.

$$\phi(\tau) = \frac{b-a}{\beta-\alpha} \tau + \frac{a\beta - b\alpha}{\beta-\alpha}$$

جواب:

۴. عبارت (۱۴)، بخش ۳۸، برای مشتق  $[Z(\tau)]$  را تحقیق کنید.

راهنمایی: قرار دهید  $Z(\tau) = x[\phi(\tau)] + iy[\phi(\tau)]$  و از قاعده زنجیری برای توابع حقیقی مقدار یک متغیره حقیقی استفاده کنید.

۵. فرض کنید تابع  $(z(t_0) = z)$  در نقطه  $f(z)$  روی قوس هموار  $w(t) = f[z(t)]$  درصورتی که  $t = t_0$  واقع است تحلیلی باشد. نشان دهید اگر  $w(t) = f[z(t)]$  آنگاه  $w'(t) = f'[z(t)]z'(t)$ .

$$w'(t) = f'[z(t)]z'(t).$$

راهنمایی: بنویسید  $z(t) = x(t) + iy(t)$  و  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  بنابراین

$$w(t) = u[x(t), y(t)] + iv[x(t), y(t)].$$

سپس با استفاده از قاعده زنجیری برای توابع دو متغیره در حسابان، بنویسید

$$w' = (u_x x' + u_y y') + i(v_x x' + v_y y'),$$

و از معادلات کوشی-ریمان استفاده کنید.

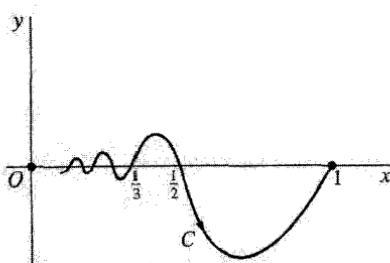
۶. فرض کنید  $y(x)$  تابعی حقیقی مقدار باشد که روی بازه  $0 \leq x \leq 1$  با رابطه زیر تعریف شده است

$$y(x) = \begin{cases} x^3 \sin\left(\frac{\pi}{x}\right), & 0 < x \leq 1 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

(الف) نشان دهید که رابطه

$$z = x + iy(x) \quad (0 \leq x \leq 1)$$

قوسی مانند  $C$  را نمایش می‌دهد که همان‌طور که در شکل ۳۸ نشان داده شده است، محور حقیقی را در نقاط  $z = 1/n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) و  $z = 0$  قطع می‌کند.



شکل ۳۸

(ب) ثابت کنید قوس  $C$  در قسمت (الف) در واقع یک قوس هموار است.  
راهنمایی: برای اثبات پیوستگی  $y(x)$  در  $x = 0$ , ملاحظه کنید که هرگاه  $x > 0$ , داریم

$$0 \leq \left| x^3 \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) \right| \leq x^3.$$

برای یافتن  $y'(0)$  و نشان دادن اینکه  $y'(0)$  در  $x = 0$  پیوسته است, عین همین مطلب به کار بردہ می شود.

### ۳۹. انتگرال روی مسیر

حال به انتگرال توابع مختلط  $f$  از متغیر مختلط  $z$  باز می گردیم. این انتگرال برحسب مقادیر  $f(z)$  در امتداد مسیر مفروض  $C$  که از نقطه  $z_1 = z_1$  تا نقطه  $z_2 = z_2$  در صفحه مختلط ادامه دارد تعریف می شود. بنابراین، این یک انتگرال روی خط است و مقدارش در حالت کلی بستگی به مسیر  $C$  و تابع  $f$  دارد. چنین انتگرالی به صورت

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z) dz \quad \text{یا} \quad \int_C f(z) dz$$

نوشته می شود؛ اغلب وقتی مقدار انتگرال از انتخاب مسیر بین دو نقطه انتهایی مستقل است نمادگذاری سمت چپ به کار می رود. با اینکه انتگرال را می توان مستقیماً به صورت حد یک مجموع تعریف کرد ولی ما ترجیح می دهیم آن را برحسب نوعی انتگرال معین که در بخش ۳۷ معرفی شد تعریف کنیم.

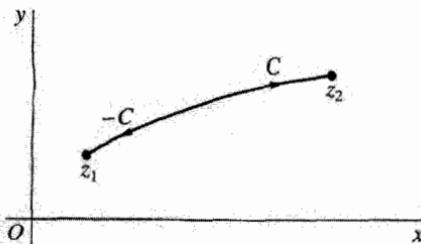
فرض کنید  $C$  مسیری باشد که با رابطه

$$z = z(t) \quad (a \leq t \leq b) \tag{۱}$$

نمایش داده شده و از نقطه  $(a) z(a) = z_1$  تا نقطه  $(b) z(b) = z_2$  ادامه داشته باشد. فرض کنید تابع  $f(z)$  بر  $C$  تکه بی پیوسته باشد؛ یعنی،  $[f[z(t)]]$  در بازه  $a \leq t \leq b$  تکه بی پیوسته باشد. انتگرال روی خط، یا انتگرال روی مسیر، تابع  $f$  در امتداد  $C$  را چنین تعریف می کنیم:

$$\int_C f(z) dz = \int_a^b f[z(t)] z'(t) dt. \tag{۲}$$

توجه کنید که چون  $C$  یک مسیر است  $(t)$  زیر روی بازه  $a \leq t \leq b$  تکه بی پیوسته است و لذا وجود انتگرال (۲) تضمین می شود.



شکل ۳۹

مقدار انتگرال روی مسیر تحت تغییر نمایش مسیرش ناوردادست هرگاه تغییر از نوع (۱۱)، بخش ۳۸، باشد. این مطلب را می‌توان با همان روش کلی نشان داد که در بخش ۳۸ برای ناوردادی طول قوس بهکار برده شد.

دو ویژگی دیگر انتگرال روی مسیر بالا فاصله از تعریف (۲) و ویژگیهای انتگرالهای توابع مختلط  $w(t)$  که در بخش ۳۷ ذکر شد به دست می‌آیند. یعنی بهازای هر عدد مختلط ثابت  $z_0$

$$\int_C z_0 f(z) dz = z_0 \int_C f(z) dz, \quad (3)$$

و

$$\int_C [f(z) + g(z)] dz = \int_C f(z) dz + \int_C g(z) dz. \quad (4)$$

به مسیر  $C$  که در انتگرال (۲) بهکار برد شد مسیر  $-C$ ، مشکل از همان مجموعه نقاط اما با ترتیب عکس وابسته می‌شود به طوری که مسیر جدید از نقطه  $z_2$  تا نقطه  $z_1$  ادامه دارد (شکل ۳۹). مسیر  $-C$  دارای نمایش پارامتری

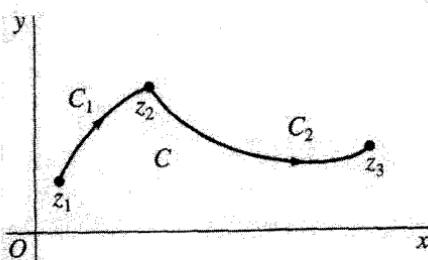
$$z = z(-t) \quad (-b \leq t \leq -a);$$

است. بنابراین

$$\int_{-C} f(z) dz = \int_{-b}^{-a} f[z(-t)] \frac{d}{dt} z(-t) dt = - \int_{-b}^{-a} f[z(-t)] z'(-t) dt$$

که در آن  $z'(-t)$  معرف مقدار مشتق  $(t)$   $z(t)$  نسبت به  $t$  در  $-t$  است. پس از تغییر متغیر  $\tau = -t$  در انتگرال اخیر و ارجاع به تمرین ۱ (الف) بخش ۳۸ در می‌یابیم که

$$\int_{-C} f(z) dz = - \int_a^b f[z(\tau)] z'(\tau) d\tau,$$



شکل ۴۰

$$C = C_1 + C_2$$

که همان رابطه زیر است

$$\int_{-C} f(z) dz = - \int_C f(z) dz. \quad (5)$$

حال فرض کنید مسیر  $C$ , با نمایش (۱) متشکل از مسیر  $C_1$  از  $z_1$  تا  $z_2$  و به دنبال آن مسیر  $C_2$  از  $z_2$  تا  $z_3$  باشد، نقطه ابتدایی  $C_2$  همان نقطه انتهایی  $C_1$  است (شکل ۴۰). در این صورت مقداری از  $t$  مانند  $c$  هست که  $w(c) = z_2$  و  $a < c < b$ . در نتیجه  $C_1$  با

$$z = z(t) \quad (a \leq t \leq c)$$

نمایش داده می‌شود و  $C_2$  با

$$z = z(t) \quad (c \leq t \leq b)$$

همچنین بنابر قاعده‌ای برای انتگرال‌های توابع  $w(t)$  که در بخش ۳۷ بیان شد،

$$\int_a^b f[z(t)] z'(t) dt = \int_a^c f[z(t)] z'(t) dt + \int_c^b f[z(t)] z'(t) dt.$$

پس روشن است که

$$\int_C f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz. \quad (6)$$

گاهی اوقات مسیر  $C$  را با مجموع ساقه‌های  $C_1$  و  $C_2$  آن می‌خوانند و به صورت  $C_1 + C_2$  نمایش می‌دهند. در صورتی که نقاط انتهایی  $C_1$  و  $C_2$  یکی باشد مجموع  $C_1$  و  $-C_2$  خوش‌تعریف است و به صورت  $C_1 - C_2$  نوشته می‌شود.

انتگرال‌های معین را در حسابان می‌توان به صورت مساحت‌ها تعبیر کرد؛ این انتگرال‌ها تعبیرهای دیگری نیز دارند. بجز در حالات خاص، هیچ تعبیر هندسی یا فیزیکی مفیدی در ارتباط با انتگرال‌ها در صفحه مختلط در دست نیست.

#### ۴۰. چند مثال

منظور ما از این بخش تهیه مثال‌هایی برای تعریف انتگرال روی مسیر در بخش ۳۹ و بیان بعضی از ویژگی‌های مذکور در آن جاست. بررسی مفهوم تابع اولیه انتگرال‌دهای  $(z)^f$  در انتگرال‌های روی مسیر را تا بخش ۴۲ به تأخیر می‌اندازیم.

**مثال ۱.** مقدار انتگرال زیر را پیدا کنید

$$I = \int_C \bar{z} dz \quad (1)$$

در صورتی که  $C$  نیمه سمت راست دایره  $|z| = 2$  از  $z = -2i$  تا  $z = 2i$  باشد (شکل ۴۱)

يعنى

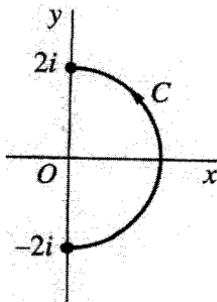
$$z = 2e^{i\theta} \quad \left( -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right).$$

بنابر تعریف (۲)، بخش ۳۹،

$$I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \overline{2e^{i\theta}} (2e^{i\theta})' d\theta$$

و چون

$$\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} \quad \text{و} \quad (e^{i\theta})' = ie^{i\theta}$$



شکل ۴۱

پس داریم

$$I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2e^{-i\theta} 2ie^{i\theta} d\theta = 4i \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta = 4\pi i.$$

توجه کنید که وقتی نقطه  $z$  بر دایره  $|z| = 2$  قرار دارد، نتیجه می‌شود که  $z\bar{z} = 4$  یا  $\bar{z} = 4/z$ . بنابراین، نتیجه  $I = 4\pi i$  را به صورت

$$\int_C \frac{dz}{z} = \pi i. \quad (2)$$

نیز می‌توان نوشت.

مثال ۲. در این مثال، ابتدا  $C_1$  را معرف مسیر  $OAB$  می‌گیریم که در شکل ۴۲ نشان داده شده و انتگرال زیر را محاسبه می‌کنیم

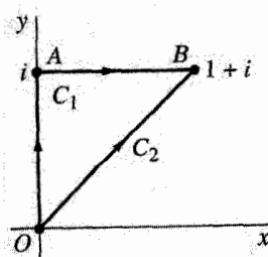
$$\int_{C_1} f(z) dz = \int_{OA} f(z) dz + \int_{AB} f(z) dz, \quad (3)$$

که در آن

$$f(z) = y - x - i^3 x^3 \quad (z = x + iy).$$

ساق  $OA$  را می‌توان به صورت پارامتری  $(0 \leq y \leq 1) z = 0 + iy$  نمایش داد، و چون در نقاط واقع روی آن ساق  $x = 0$  است، مقادیر  $f$  در آنجا با پارامتر  $y$  بنابر رابطه  $y f(z) = 0$  تغییر می‌کند. در نتیجه

$$\int_{OA} f(z) dz = \int_0^1 yi dy = i \int_0^1 y dy = \frac{i}{2}.$$



شکل ۴۲

روی ساق  $(\circ \leq x \leq 1) z = x + i$ ,  $AB$

$$\int_{AB} f(z) dz = \int_0^1 ((1-x-i^3x^2) \cdot 1) dx = \int_0^1 (1-x) dx - 3i \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{2} - i.$$

بنابر رابطه (۳)، می بینیم که

$$\int_{C_1} f(z) dz = \frac{1-i}{2}. \quad (4)$$

اگر  $(\circ \leq x \leq 1) z = x+ix$ ,  $y = x$ , با نمایش پارامتری  $OB$  از خط باشد آنگاه

$$\int_{C_1} f(z) dz = \int_0^1 -i^3 x^2 (1+i) dx = 3(1-i) \int_0^1 x^2 dx = 1-i. \quad (5)$$

پس بهوضوح انتگرالهای  $f(z)$  روی دو مسیر  $C_1$  و  $C_2$  مقادیر متمایز دارند، گرچه این مسیرها دارای یک ابتدا و یک انتهای هستند.

ملحوظه می کنیم که انتگرال  $f(z)$  روی مسیر ساده بسته  $OABO$  یا  $C_1 - C_2$  دارای مقدار ناصفر زیر است

$$\int_{C_1} f(z) dz - \int_{C_2} f(z) dz = \frac{-1+i}{2}.$$

مثال ۳. در اینجا با این فرض شروع می کنیم که  $C$  معرف قوس هموار دلخواهی مانند

$$z = z(t) \quad (a \leq t \leq b)$$

از نقطه ثابت  $z_1$  تا نقطه ثابت  $z_2$  باشد (شکل ۴۳). برای محاسبه انتگرال

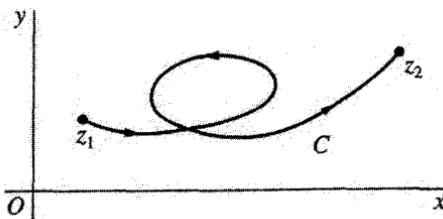
$$I = \int_C z dz = \int_a^b z(t) z'(t) dt,$$

توجه می کنیم که بنابر تمرین ۱ (ب)، بخش ۳۷

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{[z(t)]^2}{2} \right] = z(t) z'(t).$$

در نتیجه

$$I = \left. \frac{[z(t)]^2}{2} \right|_a^b = \frac{[z(b)]^2 - [z(a)]^2}{2}.$$



شکل ۴۳

اما  $z(b) = z_2$  و  $z(a) = z_1$  و لذا  $(z_2 - z_1)/2 = I$ . از آنجا که مقدار  $I$  فقط به نقاط انتهایی  $C$  بستگی دارد و از قوسی که گرفته شده مستقل است، می‌نویسیم

$$\int_{z_1}^{z_2} z \, dz = \frac{z_2 - z_1}{2}. \quad (6)$$

(با مثال ۲ مقایسه کنید، که در آن مقدار انتگرال از یک نقطه ثابت تا نقطه ثابت دیگری وابسته به مسیر بود).

عبارت (6) برای مسیر  $C$  نیز، بدون شرط همواربودن برقرار است زیرا مسیر  $C$  مرکب از تعدادی متناهی قوس هموار  $C_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) است که انتهایی هر یک ابتدای دیگری است. به عبارت دقیق‌تر، فرض کنید هر  $C_k$  از  $z_k$  تا  $z_{k+1}$  امتداد داشته باشد. در این صورت

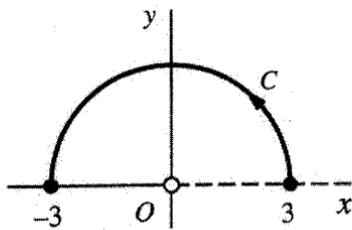
$$\int_C z \, dz = \sum_{k=1}^n \int_{C_k} z \, dz = \sum_{k=1}^n \frac{z_{k+1} - z_k}{2} = \frac{z_{n+1} - z_1}{2}, \quad (7)$$

$z_1$  نقطه ابتدای  $C$  و  $z_{n+1}$  نقطه انتهای آن است.

از عبارت (7) نتیجه می‌شود که انتگرال تابع  $z = f(z)$  روی هر مسیر بسته در صفحه دارای مقدار صفر است. (یک بار دیگر با مثال ۲ مقایسه کنید که در آن مقدار انتگرال تابع مفروض روی یک مسیر بسته، صفر بود). مسئله این پیش‌بینی را که چه موقع انتگرال، پیرامون یک مسیر بسته صفر است در بخش‌های ۴۲، ۴۴، ۴۶ بررسی خواهیم کرد.

مثال ۴. فرض کنید  $C$  معرف مسیر نیمداایه‌یی

$$z = 3e^{i\theta} \quad (0^\circ \leq \theta \leq \pi)$$



شکل ۴۴

از نقطه  $z = 3$  تا نقطه  $z = -3$  باشد (شکل ۴۴). گرچه شاخه (بخش  $30^\circ$ )

$$f(z) = \sqrt{r} e^{i\theta/2} \quad (r > 0, 0^\circ < \theta < 2\pi) \quad (8)$$

ازتابع چندمقداری  $z^{1/2}$  در  $z = 3$  در  $z$ , نقطه ابتدای مسیر  $C$ , تعریف نشده است، با وجود این انتگرال

$$I = \int_C z^{1/2} dz \quad (9)$$

برای آن شاخه موجود است. زیرا انتگرالde روی  $C$  نکهی پیوسته است. برای اثبات این ادعا ملاحظه می‌کنیم که اگر  $z(\theta) = 3e^{i\theta}$ , حدود راست مؤلفه‌های حقیقی و موهومی تابع

$$f[z(\theta)] = \sqrt{3} e^{i\theta/2} = \sqrt{3} \cos \frac{\theta}{2} + i \sqrt{3} \sin \frac{\theta}{2} \quad (0^\circ < \theta \leq \pi)$$

در  $\theta = 0^\circ$  به ترتیب  $\sqrt{3}$  و  $0^\circ$  هستند. بنابراین اگر مقدار  $[f[z(\theta)]]$  را در  $\theta = 0^\circ$  مساوی

تعریف کنیم این تابع در بازه بسته  $\pi \leq \theta \leq 0^\circ$  پیوسته می‌شود. در نتیجه

$$I = \int_0^\pi \sqrt{3} e^{i\theta/2} 3ie^{i\theta} d\theta = 3\sqrt{3}i \int_0^\pi e^{i3\theta/2} d\theta;$$

$$\int_0^\pi e^{i3\theta/2} d\theta = \left[ \frac{2}{3i} e^{i3\theta/2} \right]_0^\pi = -\frac{2}{3i}(1+i).$$

پس بالاخره داریم

$$I = -2\sqrt{3}(1+i).$$

## تمرینها

برای مسیرهای  $C$  و توابع  $f$  در تمرینهای ۱ تا ۶، با استفاده از نمایش پارامتری  $C$ , یا ساقهای

مقدار انتگرال زیر را پیدا کنید

$$\int_C f(z) dz.$$

۱.  $f(z) = (z + 2)/z$  و  $C$  عبارت است از

(الف) نیم دایره  $z = 2e^{i\theta}$  ( $0^\circ \leq \theta \leq \pi$ )؛

(ب) نیم دایره  $z = 2e^{i\theta}$  ( $\pi \leq \theta \leq 2\pi$ )؛

(ج) دایره  $z = 2e^{i\theta}$  ( $0^\circ \leq \theta \leq 2\pi$ ).

جواب: (الف)  $4\pi i$ ، (ب)  $-4 + 2\pi i$ ، (ج)  $4 + 2\pi i$ .

۲.  $C$  قوسی است از  $z = 2$  تا  $z = -1$  و متشکل از

(الف) نیم دایره  $z = 1 + e^{i\theta}$  ( $\pi \leq \theta \leq 2\pi$ )؛

(ب) پاره خط  $x \leq 2$  از محور حقیقی.

جواب: (الف)  $0^\circ$ ، (ب)  $0^\circ$ .

۳.  $f(z) = \pi \exp(\pi \bar{z})$  و  $C$  مرز مربعی با رؤوسی در نقاط  $1+i$ ،  $1-i$ ،  $-1+i$  و  $-1-i$  است و جهت  $C$  در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت است.

جواب:  $4(e^\pi - 1)$ .

۴.  $f(z)$  با رابطه زیر تعریف می‌شود

$$f(z) = \begin{cases} 1, & y < 0 \\ 4y, & y > 0 \end{cases}$$

و  $C$  قوسی است از  $z = -1 - i$  تا  $z = 1 + i$  در امتداد منحنی  $y = x^3$ . جواب:

۵.  $f(z) = 1$  و  $C$  مسیر دلخواهی از نقطه ثابت  $z_1$  تا نقطه ثابت  $z_2$  در صفحه است.

جواب:  $z_2 - z_1$ .

۶.  $f(z)$  شاخه

$$z^{-1+i} = \exp[(-1+i)\log z] \quad (|z| > 0, 0^\circ < \arg z < 2\pi)$$

ازتابع توانی  $z^{-1+i}$  و  $C$  دایره واحد  $|z| = 1$  درجهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت است.

جواب:  $i(1 - e^{-2\pi})$ .

۷. به کمک نتیجه تمرین ۳، بخش ۳۷، انتگرال

$$\int_C z^m \bar{z}^n dz$$

را محاسبه کنید که در آن  $m$  و  $n$  اعدادی صحیح هستند و  $C$  دایره واحد  $|z| = 1$  در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت است.

۸. انتگرال  $I$  در مثال ۱ بخش ۴۰ را با استفاده از نمایش زیر برای  $C$  محاسبه کنید:

$$z = \sqrt{4 - y^2} + iy \quad (-2 \leq y \leq 2).$$

(مثال ۲، بخش ۳۸، را ببینید.)

۹. فرض کنید  $C$  و  $C_0$  به ترتیب نمایش دویل

$$z = z_0 + Re^{i\theta} \quad (0^\circ \leq \theta \leq 2\pi) \quad \text{و} \quad z = Re^{i\theta} \quad (0^\circ \leq \theta \leq 2\pi)$$

باشند. با استفاده از این نمایشهای پارامتری نشان دهید که اگر  $f$  روی  $C$  تکه‌بی پیوسته باشد

$$\int_C f(z) dz = \int_{C_0} f(z - z_0) dz.$$

۱۰. فرض کنید  $C$  نمایش دایره  $|z - z_0| = R$  باشد که در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت گرفته شده است. با استفاده از نمایش پارامتری  $z = z_0 + Re^{i\theta}$  ( $-\pi \leq \theta \leq \pi$ ) برای

$C_0$  فرمولهای انتگرال‌گیری زیر را به دست آورید:

$$\int_{C_0} \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i \quad (\text{الف})$$

$$\cdot \int_{C_0} (z - z_0)^{n-1} dz = 0 \quad (n = \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (\text{ب})$$

۱۱. با استفاده از نمایش پارامتری در تمرین ۱۰ برای دایره جهت‌دار  $C$  نشان دهید که

$$\int_{C_0} (z - z_0)^{a-1} dz = i \frac{2R^a}{a} \sin(a\pi).$$

که در آن  $a$  هر عدد حقیقی غیر از صفر است و شاخه اصلی انتگرال‌ده و مقدار اصلی  $R^a$  گرفته شده‌اند. [توجه کنید که چگونه این عبارت تمرین ۱۰ (ب) را تعمیم می‌دهد.]

۱۲. (الف) فرض کنید  $f(z)$  روی قوس هموار  $C$ ، که دارای نمایش پارامتری  $z = z(t)$  ( $a \leq t \leq b$ ) است، پیوسته باشد، یعنی  $f[z(t)]$  روی بازه  $a \leq t \leq b$  پیوسته باشد. نشان دهید اگر  $\phi(\tau)$  تابعی باشد که در بخش ۳۸ توصیف شد، آنگاه  $\int_a^b f[z(t)]z'(t)dt = \int_{\alpha}^{\beta} f[Z(\tau)]Z'(\tau)d\tau$

$$\int_a^b f[z(t)]z'(t)dt = \int_{\alpha}^{\beta} f[Z(\tau)]Z'(\tau)d\tau,$$

که در آن  $Z(\tau) = z[\phi(\tau)]$ .

(ب) بیان کنید که چرا اتحاد حاصل در قسمت (الف) وقتی  $C$  مسیری، نه لزوماً هموار، و  $f(z)$  روی  $C$  تکه‌بی پیوسته باشد برقرار می‌ماند. بدین ترتیب نشان دهید که مقدار انتگرال  $\int_a^b f(z)dz$  در امتداد  $(a \leq t \leq b)z = z(t)$ ، وقتی از نمایش اولیه  $(\alpha \leq \tau \leq \beta)z = Z(\tau)$  به جای نمایش پارامتری استفاده کنیم، تغییر نمی‌کند.

راهنمایی: در قسمت (الف)، از نتیجه تمرین ۱ (ب)، بخش ۳۸، استفاده کنید و به رابطه (۱۴) آن بخش استناد کنید.

#### ۴۱. کرانهای بالا برای قدر مطلق انتگرال روی مسیر

اگر  $C$  نمایش مسیر  $(a \leq t \leq b)z = z(t)$  باشد، از تعریف (۲) بخش ۳۹ و نابرابری (۵) بخش ۳۷ می‌دانیم که

$$\left| \int_C f(z) dz \right| = \left| \int_a^b f[z(t)]z'(t) dt \right| \leq \int_a^b |f[z(t)]| \cdot |z'(t)| dt.$$

بنابراین به ازای هر عدد نامنفی  $M$  به طوری که مقادیر  $f$  روی  $C$  در نابرابری  $|f(z)| \leq M$  صدق کنند داریم

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq M \int_a^b |z'(t)| dt.$$

چون انتگرال سمت راست،  $L$ ، یعنی طول مسیر را نمایش می‌دهد (بخش ۳۸ را ببینید) در نتیجه قدر مطلق انتگرال  $f$  در امتداد  $C$  از  $ML$  تجاوز نمی‌کند:

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq ML. \quad (1)$$

البته، نابرابری بالا یک نابرابری اکید است اگر به ازای همه نقاط  $z$  بر  $C$   $|f(z)| < M$ .

توجه کنید که چون همه راههایی که در انتگرال‌گیری در نظر می‌گیریم مسیرند و انتگرال‌دها توابعی تکه‌بی پیوسته‌اند که روی این مسیرها تعریف شده‌اند، همیشه عدد  $M$  مانند آنچه در نابرابری (۱) ظاهر می‌شود موجود است. علت آن است که اگر  $f$  روی  $C$  پیوسته باشد، تابع حقیقی  $|f(z)|$  در بازه بسته و کراندار  $a \leq t \leq b$  پیوسته است و چنین تابعی همیشه بر آن بازه به یک مقدار ماکسیمم  $M$  می‌رسد.\* بنابراین در صورتی که  $f$  روی  $C$  پیوسته باشد،  $|f(z)|$  روی آن ماکسیمم دارد. از اینجا بالا فاصله نتیجه می‌شود که اگر  $f$  روی  $C$  تکه‌بی پیوسته باشد، این مطلب درست است.

مثال ۱. فرض کنید  $C$  قوسی از دایره  $|z| = 2$  از  $z = 2i$  تا  $z = 2$  باشد که در ربع اول واقع است (شکل ۴۵). با استفاده از نابرابری (۱) نشان دهید که

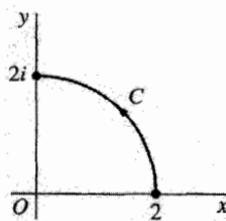
$$\left| \int_C \frac{z+4}{z^3-1} dz \right| \leq \frac{6\pi}{\sqrt{3}}. \quad (2)$$

این کار را بدین صورت انجام دهید که ابتدا توجه کنید اگر  $z$  نقطه‌ای روی  $C$  باشد، آن‌گاه  $|z| = 2$  و لذا

$$|z+4| \leq |z| + 4 = 6$$

و

$$|z^3 - 1| \geq |||z|^3 - 1| = 7.$$



شکل ۴۵

\* مثلاً صفحات ۸۶-۹۰ کتاب زیر را ببینید

A. E. Taylor and W. R. Mann, "Advanced Calculus," 3d ed., pp. 86-90, 1983.

بنابراین وقتی  $z$  روی  $C$  است،

$$\left| \frac{z+4}{z^3-1} \right| = \frac{|z+4|}{|z^3-1|} \leq \frac{6}{7}.$$

حال با قرار دادن  $M = 6/7$  و توجه به اینکه  $L = \pi$  طول مسیر  $C$  است، با استفاده از نابرابری (۱)، نابرابری (۲) به دست می‌آید.

مثال ۲. در اینجا  $C_R$  را مسیر نیمدايره بی

$$z = Re^{i\theta} \quad (0^\circ \leq \theta \leq \pi)$$

و  $z^{1/2}$  را شاخه

$$z^{1/2} = \sqrt{r} e^{i\theta/2} \quad \left( r > 0, -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2} \right)$$

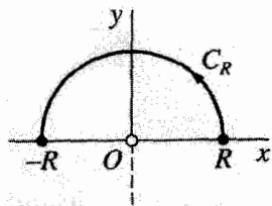
ازتابع ریشه دوم می‌گیریم. (شکل ۴۶ را ببینید). بدون اینکه عملاً مقدار انتگرال را محاسبه کنیم، به سادگی می‌توان نشان داد که

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{z^{1/2}}{z^4 + 1} dz = 0 \quad (3)$$

زیرا، وقتی  $|z| = R > 1$ ، داریم

$$|z^{1/2}| = |\sqrt{R} e^{i\theta/2}| = \sqrt{R}$$

$$|z^4 + 1| \geq ||z^4| - 1| = R^4 - 1.$$



شکل ۴۶

در نتیجه، در نقاطی روی  $C_R$  که انتگرالده تعريف شده باشد داریم

$$M_R = \frac{\sqrt{R}}{R^2 - 1} \quad \text{که در آن} \quad \left| \frac{z^{1/2}}{z^2 + 1} \right| \leq M_R$$

چون طول  $C_R$  عدد  $L = \pi R$  است، از تابعی (۱)، نتیجه می‌شود که

$$\left| \int_{C_R} \frac{z^{1/2}}{z^2 + 1} dz \right| \leq M_R L.$$

اما

$$M_R L = \frac{\pi R \sqrt{R}}{R^2 - 1} \cdot \frac{1/R^2}{1/R^2} = \frac{\pi / \sqrt{R}}{1 - (1/R^2)},$$

و روشن است که اگر  $R$  به بی‌نهایت میل کند، عبارت منتهی‌الیه سمت راست به صفر میل می‌کند.  
بنابراین حد (۳) ثابت شد.

### تمرینها

۱. بدون محاسبه انتگرال نشان دهید که

$$\left| \int_C \frac{dz}{z^2 - 1} \right| \leq \frac{\pi}{3}.$$

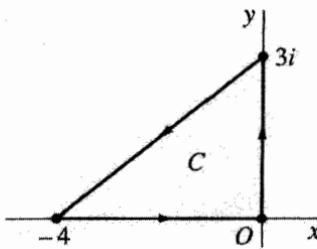
وقتی که  $C$  همان منحنی مثل ۱ بخش ۴۱ باشد.

۲. فرض کنید  $C$  پاره خط از  $i = z = 1$  تا  $z = i$  باشد. با توجه به اینکه نزدیکترین نقطه این پاره خط به مبدأ، نقطه وسط این پاره خط است، بدون محاسبه انتگرال نشان دهید که

$$\left| \int_C \frac{dz}{z^4} \right| \leq 4\sqrt{2}.$$

۳. نشان دهید که اگر  $C$  مرز مثلثی باشد که رئوس آن در نقاط  $0, 3i, -4$  و جهت  $C$  خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت باشد (شکل ۴۷ را ببینید)، آنگاه

$$\left| \int_C (e^z - \bar{z}) dz \right| \leq 60.$$



شکل ۴۷

۴. فرض کنید  $C_R$  معرف نیمة بالایی دایره  $|z| = R > 2$  باشد که در جهت عکس حرکت عقرهای ساعت گرفته شده است. نشان دهید که

$$\left| \int_{C_R} \frac{2z^2 - 1}{z^4 + 5z^2 + 4} dz \right| \leq \frac{\pi R(2R^4 + 1)}{(R^2 - 1)(R^2 - 4)}.$$

سپس با تقسیم صورت و مخرج کسر طرف راست بر  $R^4$ , نشان دهید که وقتی  $R$  به بی‌نهایت میل کند مقدار انتگرال به صفر میل می‌کند.

۵. فرض کنید  $C_R$  دایره  $|z| = R > 1$  باشد که در جهت عکس حرکت عقرهای ساعت گرفته شده است. نشان دهید که

$$\left| \int_{C_R} \frac{\operatorname{Log} z}{z^2} dz \right| < 2\pi \left( \frac{\pi + \ln R}{R} \right).$$

سپس با استفاده از قاعدة هوپیتال نشان دهید که وقتی  $R$  به بی‌نهایت میل کند مقدار انتگرال به صفر میل می‌کند.

۶. فرض کنید  $C_\rho$  معرف دایره  $\rho = |z| < \rho < 1$  باشد که در جهت عکس حرکت عقرهای ساعت گرفته شده و  $f(z)$  در قرص  $1 \leq |z| \leq \rho$  تحلیلی باشد. نشان دهید اگر  $z^{-1/2}$  نمایش هر یک از شاخه‌های خاص آن تابع توانی باشد، آنگاه عدد ثابت نامنفی مانند  $M$ , مستقل از  $\rho$  هست، که

$$\left| \int_{C_\rho} z^{-1/2} f(z) dz \right| \leq 2\pi M \sqrt{\rho}.$$

بدین ترتیب نشان دهید که وقتی  $\rho$  به  $0^+$  میل کند مقدار انتگرال به  $0^+$  میل می‌کند.  
راهنمایی: توجه کنید که چون  $f(z)$  در سراسر قرص  $1 \leq |z| \leq \rho$  تحلیلی و بنابراین پیوسته است، در این قرص کراندار می‌باشد (بخش ۱۷).

۷. فرض کنید  $C_N$  نمایش مرز مربع حاصل از خطوط

$$y = \pm \left( N + \frac{1}{2} \right) \pi \quad \text{و} \quad x = \pm \left( N + \frac{1}{2} \right) \pi$$

باشد که در آنها  $N$  عددی صحیح و مثبت و جهت  $C_N$  در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت است.

(الف) به کمک نابرابریهای

$$|\sin z| \geq |\sinh y| \quad \text{و} \quad |\sin z| \geq |\sin x|$$

که در تمرینهای ۱۰ (الف) و ۱۱ (الف)، بخش ۳۳، به دست آمدند، نشان دهید که روی اضلاع قائم مربع،  $1 \geq |\sin z| \geq |\sin z| > \sinh(\pi/2)$  و روی اضلاع افقی  $|\sin z| > \sinh(\pi/2)$ . بدین ترتیب نشان دهید که عدد ثابت مثبتی مانند  $A$ ، مستقل از  $N$ ، هست که به ازای همه نقاط  $z$  واقع بر مسیر  $C_N$  داریم  $|\sin z| \geq A$ .

(ب) با استفاده از نتیجهٔ نهایی قسمت (الف) نشان دهید که

$$\left| \int_{C_N} \frac{dz}{z^2 \sin z} \right| \leq \frac{16}{(2N+1)\pi A}$$

و بنابراین وقتی  $N$  به بی‌نهایت میل کند مقدار این انتگرال به صفر میل می‌کند.

## ۴۲. تابع اولیه

گرچه مقدار انتگرال روی مسیر تابع  $f(z)$  از نقطه ثابت  $z_1$  تا نقطه ثابت  $z_2$ ، در حالت کلی به مسیری که اختیار شده بستگی دارد، برخی از توابع موجودند که انتگرال آنها از  $z_1$  تا  $z_2$  مستقل از مسیر است. (با مثالهای ۲ و ۳ بخش ۴ مقایسه کنید). مثالهای مذکور همچنین نشان می‌دهند که مقدار انتگرال روی مسیرهای بسته گاهی از اوقات، اما نه همیشه، صفر است. قضیه زیر در تعیین موقعیتی که انتگرالگیری مستقل از مسیر است و به علاوه موقعیتی که انتگرال روی مسیر بسته صفر است مفید خواهد بود.

در اثبات قضیه، تعمیمی از قضیه اساسی حسابان به دست می‌آوریم که محاسبه تعداد زیادی از انتگرالهای روی مسیر را ساده می‌کند. این تعمیم، مفهوم تابع اولیه تابع پیوسته  $f$  در حوزه  $D$  را در بر دارد، یعنی تابع  $F$ ی که به ازای هر  $z$  در  $D$  داریم  $F'(z) = f(z)$ . توجه کنید که تابع

اولیه لزوماً تابعی تحلیلی است. همچنین توجه کنید که تابع اولیه تابع مفروض  $f$  بجز برای یک ثابت مختلط جمعی یکتاست. زیرا اگر  $F(z)$  و  $G(z)$  دو تابع اولیه  $(z)$  باشند آنگاه مشتق  $(z) - F(z) - G(z)$  صفر است و بینا بر قضیه بخش ۲۳ درصورتی که مشتق یک تابع تحلیلی در سراسر حوزه  $D$  صفر باشد آن تابع در حوزه  $D$  ثابت است.

قضیه. فرض کنید تابع  $(z)$  در حوزه  $D$  پیوسته باشد. اگر یکی از احکام زیر برقرار باشد آنگاه بقیه هم برقرارند

- (الف)  $f(z)$  دارای تابع اولیه‌ای مانند  $F(z)$  در  $D$  است;
- (ب) انتگرال‌های  $f(z)$  در امتداد مسیرهایی که کاملاً در  $D$  واقع و از نقطه ثابت  $z_1$  تا نقطه ثابت  $z_2$  امتداد داشته باشند همگی مساوی‌اند؛
- (ج) انتگرال  $f(z)$  روی هر مسیر بسته که کاملاً در  $D$  واقع باشد مساوی صفر است.

باید تأکید کنیم که در قضیه ادعا نشده که برای تابعی مفروض مانند  $f$  و حوزه‌ای مفروض مانند  $D$  هر یک از این احکام برقرار است. قضیه تنها گویای این نکته است که همه آنها برقرارند یا هیچ‌کدام برقرار نیستند. برای اثبات قضیه کافی است نشان دهیم که حکم (الف) مستلزم حکم (ب) و حکم (ب) مستلزم حکم (ج) و بالاخره حکم (ج) مستلزم حکم (الف) است.

فرض کنید حکم (الف) برقرار باشد. اگر  $C$  مسیری واقع در  $D$  از  $z_1$  تا  $z_2$  باشد که قوسی هموار با نمایش پارامتری  $(a \leq t \leq b) z = z(t)$  بخش ۳۸، می‌دانیم که

$$\frac{d}{dt} F[z(t)] = F'[z(t)] z'(t) = f[z(t)] z'(t) \quad (a \leq t \leq b).$$

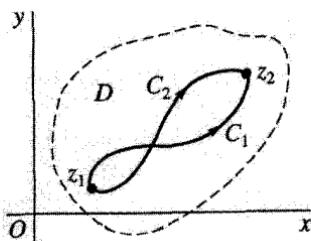
چون قضیه اساسی حسابان را می‌توان تعمیم داد تا برای توابع مختلط یک متغیره حقیقی قابل استفاده باشد (بخش ۳۷)، نتیجه می‌شود که

$$\int_C f(z) dz = \int_a^b f[z(t)] z'(t) dt = F[z(t)] \Big|_a^b = F[z(b)] - F[z(a)].$$

چون  $z_2 = z(a)$  و  $z_1 = z(b)$  پس مقدار این انتگرال روی مسیر برابر است با

$$F(z_2) - F(z_1)$$

و روشن است که این مقدار مستقل از مسیر  $C$  است مادامی که  $C$  از  $z_1$  تا  $z_2$  کشیده شده



شکل ۴۸

و کاملاً واقع در  $D$  باشد. یعنی در صورتی که  $C$  هموار باشد

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z) dz = F(z_2) - F(z_1) = F(z) \Big|_{z_1}^{z_2}. \quad (1)$$

البته این عبارت وقتی  $C$  مسیری، نه لزوماً هموار، واقع در  $D$  باشد نیز صحیح است. به عبارت صریحتی، اگر  $C$  از تعدادی متناهی قوس هموار  $C_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) تشکیل شده باشد که هر  $C_k$  از نقطه  $z_k$  تا نقطه  $z_{k+1}$  کشیده شده است، آنگاه

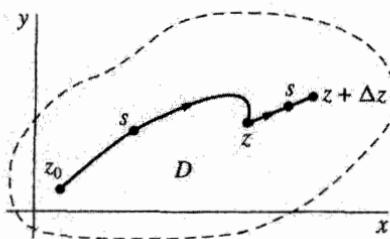
$$\int_C f(z) dz = \sum_{k=1}^n \int_{C_k} f(z) dz = \sum_{k=1}^n [F(z_{k+1}) - F(z_k)] = F(z_{n+1}) - F(z_1).$$

(با مثال ۳ بخش ۴۰ مقایسه کنید). ولذا ثابت شد که حکم (ب) از حکم (الف) نتیجه می‌شود. برای اینکه بینیم حکم (ب) مستلزم حکم (ج) است، فرض می‌کنیم  $z_1$  و  $z_2$  نمایش دو نقطه دلخواه روی مسیر بسته  $C$  در  $D$  واقع است و بدین ترتیب دو مسیر می‌سازیم که ابتدای هر دو  $z_1$  و انتهای هر دو  $z_2$  است، به طوری که  $C = C_1 - C_2$  (شکل ۴۸). با فرض درست بودن حکم (ب)، می‌توان نوشت

$$\int_{C_1} f(z) dz = \int_{C_2} f(z) dz, \quad (2)$$

$$\int_{C_1} f(z) dz + \int_{-C_2} f(z) dz = 0. \quad (3)$$

یعنی انتگرال  $f(z)$  پیرامون مسیر بسته  $C = C_1 - C_2$  دارای مقدار صفر است. آنچه باقی می‌ماند این است که نشان دهیم حکم (ج) مستلزم حکم (الف) است. این کار را بدین نحو انجام می‌دهیم که از فرض درست بودن (ج) برقراری (ب) را ثابت می‌کنیم و سپس به



شکل ۴۹

حکم (الف) می‌رسیم. برای اثبات درستی (ب) فرض می‌کنیم  $C_1$  و  $C_2$  نمایش دو مسیر واقع در  $D$  از نقطه  $z_1$  تا نقطه  $z_2$  باشند و ملاحظه می‌کنیم که بنا بر حکم (ج) معادله (۳) برقرار است (شکل ۴۸ را ببینید). بنابراین معادله (۲) برقرار است. در نتیجه در  $D$  انتگرالگیری مستقل از مسیر است و می‌توانیم تابع

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(s) ds$$

را در  $D$  تعریف کنیم. در صورتی که نشان دهیم همه جا در  $D$ ,  $F'(z) = f(z)$  اثبات قضیه کامل می‌شود. برای این کار فرض کنید  $z + \Delta z$  نقطه‌ای متمایز از  $z$  واقع در یک همسایگی  $z$  باشد که به قدر کافی کوچک است تا مشمول در  $D$  باشد. در این صورت

$$F(z + \Delta z) - F(z) = \int_{z_0}^{z + \Delta z} f(s) ds - \int_{z_0}^z f(s) ds = \int_z^{z + \Delta z} f(s) ds.$$

که در آن مسیر انتگرالگیری از  $z$  تا  $z + \Delta z$  را می‌توان یک پاره خط گرفت (شکل ۴۹). از آنجا که

$$\int_z^{z + \Delta z} ds = \Delta z$$

(تمرین ۵، بخش ۴۰، را ببینید)، می‌توانیم بنویسیم

$$f(z) = \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z + \Delta z} f(z) ds$$

و نتیجه می‌شود که

$$\frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) = \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z + \Delta z} [f(s) - f(z)] ds.$$

اما  $f$  در نقطه  $z$  پیوسته است. بنابراین به ازای هر عدد مثبت  $\varepsilon$  عدد مثبتی مانند  $\delta$  موجود است به قسمی که

$$\text{اگر } |f(s) - f(z)| < \varepsilon \text{ آنگاه } |s - z| < \delta$$

در نتیجه، اگر نقطه  $\Delta z + z$  آنقدر به  $z$  نزدیک باشد که  $\delta > |\Delta z|$ ، آنگاه

$$\left| \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) \right| < \frac{1}{|\Delta z|} \varepsilon |\Delta z| = \varepsilon;$$

یعنی،

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} = f(z)$$

$$\text{یا } F'(z) = f(z)$$

### ۴۳. چند مثال

مثالهای زیر، قضیه بخش ۴۲ و به خصوص استفاده از فرمول (۱) را روشن می‌کنند که تعمیمی از قضیه اساسی حسابان است.

مثال ۱. تابع پیوسته  $f(z) = z^2$  دارای تابع اولیه  $F(z) = z^{3/2}$  در سراسر صفحه است.  
بنابراین به ازای هر مسیر از  $z = 1 + i$  تا  $z = 0$  داریم

$$\int_0^{1+i} z^2 dz = \frac{z^3}{3} \Big|_0^{1+i} = \frac{1}{3}(1+i)^3 = \frac{2}{3}(-1+i)$$

مثال ۲. تابع  $f(z) = 1/z$  که همه جا بجز در مبدأ پیوسته است دارای تابع اولیه  $F(z) = -1/z$  در حوزه  $|z| > 0$ ، مشکل از تمامی صفحه  $z$  به استثنای مبدأ است. در نتیجه

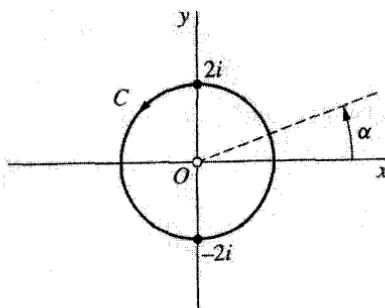
$$\int_C \frac{dz}{z^2} = 0$$

هرگاه  $C$  دایره

$$z = 2e^{i\theta} \quad (-\pi \leq \theta \leq \pi) \quad (1)$$

حول مبدأ در جهت مثبت باشد (شکل ۵۰).

توجه کنید که انتگرال تابع  $f(z) = 1/z$  را روی همان دایره نمی‌توان به روش مشابه محاسبه کرد. زیرا گرچه مشتق هر شاخه  $z$  مانند  $\log z$  مساوی  $1/z$  است (بخش ۳۰) در



شکل ۵۰

امتداد بریدگی شاخه‌اش مستقیم‌تر نیست یا حتی تعریف نشده است. به خصوص اگر پرتو  $\alpha = 0$  از مبدأ برای تشکیل بریدگی این شاخه به کار رود  $F'(z)$  در نقطه‌ای که این پرتو دایره  $C$  را قطع می‌کند موجود نیست (شکل ۵۰ را ببینید). بنابراین  $C$  در حوزه‌ای که در سراسر آن  $F'(z) = 1/z$  واقع نیست و نمی‌توان مستقیماً از تابع اولیه استفاده کرد. مثال ۳، نحوه استفاده از ترکیب دو تابع اولیه متقاول برای محاسبه انتگرال  $\int_C \frac{1}{z} dz$  را نشان می‌دهد.

مثال ۳. فرض کنید  $C_1$  نمایش نیمة سمت راست

$$z = 2e^{i\theta} \quad \left( -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right) \quad (2)$$

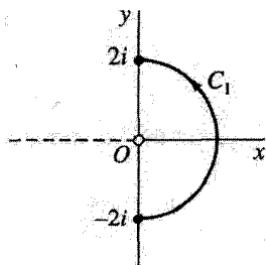
دایره  $C$  مثال ۲ باشد. برای محاسبه انتگرال  $\int_C \frac{1}{z} dz$  حول  $C_1$  از شاخه اصلی

$$\operatorname{Log} z = \ln r + i\Theta \quad (r > 0, -\pi < \Theta < \pi)$$

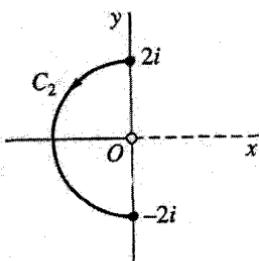
تابع لگاریتمی به عنوان تابع اولیه  $1/z$  استفاده می‌کنیم (شکل ۵۱):

$$\begin{aligned} \int_{C_1} \frac{dz}{z} &= \int_{-2i}^{2i} \frac{dz}{z} = \operatorname{Log} z \Big|_{-2i}^{2i} = \operatorname{Log}(2i) - \operatorname{Log}(-2i) \\ &= \left( \ln 2 + i\frac{\pi}{2} \right) - \left( \ln 2 - i\frac{\pi}{2} \right) = i\pi. \end{aligned}$$

این انتگرال در مثال ۱ بخش ۴۰، با استفاده از نمایش (۲) برای این نیم‌دایره، به روش دیگری محاسبه شده بود.



شکل ۵۱



شکل ۵۲

حال فرض کنید  $C_2$  نمایش نیمة چپ

$$z = \sqrt{r} e^{i\theta} \quad \left( \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2} \right) \quad (3)$$

همان دایره  $C$  باشد و شاخه

$$\log z = \ln r + i\theta \quad (r > 0, 0^\circ < \theta < 2\pi)$$

تابع لگاریتمی (شکل ۵۲) را در نظر بگیرید. می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} \int_{C_2} \frac{dz}{z} &= \int_{\sqrt{2}i}^{-\sqrt{2}i} \frac{dz}{z} = \log z \Big|_{\sqrt{2}i}^{-\sqrt{2}i} = \log(-\sqrt{2}i) - \log(\sqrt{2}i) \\ &= \left( \ln \sqrt{2} + i \frac{3\pi}{2} \right) - \left( \ln \sqrt{2} + i \frac{\pi}{2} \right) = \pi i. \end{aligned}$$

بدین ترتیب مقدار انتگرال  $\frac{1}{z}$  حول تمام دایره  $C = C_1 + C_2$  به دست می‌آید:

$$\int_C \frac{dz}{z} = \int_{C_1} \frac{dz}{z} + \int_{C_2} \frac{dz}{z} = \pi i + \pi i = 2\pi i.$$

مثال ۴. با استفاده از یک تابع اولیه، انتگرال زیر را محاسبه می‌کنیم

$$\int_{C_1} z^{1/2} dz \quad (4)$$

که در آن انتگرالده، شاخه زیر از تابع ریشه دوم است

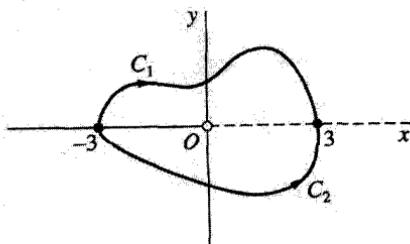
$$z^{1/2} = \sqrt{r} e^{i\theta/2} \quad (r > 0, 0^\circ < \theta < 2\pi) \quad (5)$$

و  $C_1$  مسیر دلخواهی از  $-3 = z = 3$  تا  $z = -3$  است که بجز نقاط انتهایی آن در بالای محور  $x$  قرار دارد (شکل ۵۳). گرچه انتگرالده روی  $C_1$  تکمیل پیوسته و لذا انتگرال موجود است، شاخه (۵) از  $z^{1/2}$  روی پیو  $0^\circ = \theta$  به خصوص در نقطه  $3 = z$  تعریف نشده است. اما شاخه دیگر

$$f_1(z) = \sqrt{r} e^{i\theta/2} \quad \left( r > 0, -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2} \right),$$

همه جا روی  $C_1$  تعریف شده و پیوسته است. مقادیر  $f_1(z)$  در همه نقاط روی  $C_1$  بجز در  $3 = z$  با مقادیر انتگرالده (۵) برابر است، لذا می‌توان به جای انتگرالده تابع  $(z)^{1/2}$  را قرار داد. چون تابع

$$F_1(z) = \frac{2}{3} z^{3/2} = \frac{2}{3} r \sqrt{r} e^{i3\theta/2} \quad \left( r > 0, -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2} \right)$$



شکل ۵۳

یک تابع اولیه تابع  $f_1(z)$  است می‌توان نوشت

$$\int_{C_1} z^{1/2} dz = \int_{-3}^3 f_1(z) dz = F_1(z) \Big|_{-3}^3 = 2\sqrt{3} \left( e^{i^\circ} - e^{i3\pi/2} \right) = 2\sqrt{3}(1+i).$$

(با مثال ۴ بخش ۴۰ مقایسه کنید.)

انتگرال تابع (۵)، روی هر مسیر  $C_2$  از  $z = -3$  تا  $z = 3$  که در زیر محور حقیقی واقع باشد، یعنی

$$\int_{C_2} z^{1/2} dz \quad (6)$$

را می‌توان به روش مشابهی محاسبه کرد. در این حالت می‌توان به جای انتگرال‌ده، شاخه

$$f_2(z) = \sqrt{r} e^{i\theta/2} \quad \left( r > 0, \frac{\pi}{2} < \theta < \frac{5\pi}{2} \right)$$

را قرار داد که مقادیر آن در  $-z$  و در همه نقاط روی  $C_2$  در نیم‌صفحه پایین با مقادیر انتگرال‌ده برابر است. با این اقدام می‌توان برای محاسبه انتگرال (۶) از یک تابع اولیه  $f_2(z)$  استفاده کرد. جزئیات را برای تمرین گذاشته‌ایم.

## تمرینها

۱. با استفاده از تابع اولیه نشان دهید که برای هر مسیر  $C$  که از نقطه  $z_1$  تا نقطه  $z_2$  کشیده شود، داریم

$$\int_C z^n dz = \frac{1}{n+1} (z_2^{n+1} - z_1^{n+1}) \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

۲. هر یک از انتگرال‌های زیر را با پیدا کردن تابع اولیه محاسبه کنید، که در آنها مسیر انتگرال‌گیری مسیری دلخواه بین حدود داده شده انتگرال‌گیری است:

$$\cdot \int_1^3 (z-2)^3 dz : \int_0^{\pi+2i} \cos\left(\frac{z}{2}\right) dz : \int_i^{i/2} e^{\pi z} dz \quad (\text{الف})$$

جواب: (الف)  $(1+i)/\pi$ ; (ب)  $(1/e + 1)$ ; (ج)  $0$ .

۳. با استفاده از قضیه بخش ۴۲ نشان دهید که اگر  $C$  مسیر بسته‌ای باشد که از نقطه  $z_0$  نمی‌گذرد، آنگاه

$$\int_{C_0} (z - z_0)^{n-1} dz = 0 \quad (n = \pm 1, \pm 2, \dots)$$

[با تمرین ۱۰ (ب) بخش ۴۰ مقایسه کنید.]

۴. یک تابع اولیه  $F_2(z)$  برای شاخه  $(z)$  از تابع  $z^{1/2}$  در مثال ۴ بخش ۴۳ پیدا کنید و نشان دهید که انتگرال  $(6)$  دارای مقدار  $i + \sqrt{3} - 1$  است. توجه کنید که انتگرال تابع  $(5)$  پیرامون مسیر بسته  $C_2 - C_1$  آن مثال برابر است با  $-\sqrt{3}$ .

۵. نشان دهید که

$$\int_{-1}^1 z^i dz = \frac{1+e^{-\pi}}{2}(1-i),$$

که در آن  $z^i$  معرف شاخه اصلی

$$z^i = \exp(i \operatorname{Log} z) \quad (|z| > 0, -\pi < \operatorname{Arg} z < \pi)$$

و مسیر انتگرالگیری مسیر دلخواهی از  $-z$  تا  $z$  است که به غیر از نقاط انتهایی آن در بالای محور  $x$  هاست.

راهنمایی: از یک تابع اولیه برای شاخه

$$z^i = \exp(i \log z) \quad \left( |z| > 0, -\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{3\pi}{2} \right)$$

از همان تابع توانی استفاده کنید.

#### ۴۴. قضیه کوشی-گورسا<sup>۱</sup>

در بخش ۴۲ دیدیم که اگر تابع پیوسته  $f$  دارای تابع اولیه‌ای در حوزه  $D$  باشد، انتگرال  $\int_D f(z) dz$  روی هر مسیر بسته  $C$  که تماماً در  $D$  واقع باشد دارای مقدار صفر است. در این بخش قضیه‌ای ارائه می‌دهیم که شرایط دیگری به تابع  $f$  می‌دهد تا متضمن صفر شدن انتگرال  $\int_C f(z) dz$  پیرامون هر مسیر ساده بسته باشد (بخش ۳۸). این قضیه در نظریه توابع یک متغیره مختلط نقشی اساسی دارد؛ و برخی از تعمیمهای آن شامل انواع خاصی از حوزه‌ها هستند که در بخش ۴۶ ارائه خواهند شد.

فرض می‌کنیم  $C$  معرف مسیر ساده بسته  $(t) \leq t \leq b$  باشد که در جهت مثبت (عکس جهت حرکت عقربه‌های ساعت) گرفته شده و فرض می‌کنیم  $f$  در هر نقطه درون و روی  $C$  تحلیلی است. بنابر بخش ۳۹

$$\int_C f(z) dz = \int_a^b f[z(t)] z'(t) dt \quad (1)$$

و اگر

$$z(t) = x(t) + iy(t) \quad \text{و} \quad f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

انتگرالده سمت راست عبارت (۱) حاصلضرب توابع

$$u[x(t), y(t)] + iv[x(t), y(t)] \quad \text{و} \quad x'(t) + iy'(t)$$

از متغیر حقیقی  $t$  است. از این رو

$$\int_C f(z) dz = \int_a^b (ux' - vy') dt + i \int_a^b (vx' + uy') dt \quad (2)$$

پس بر حسب انتگرالهای روی خط توابع حقیقی مقدار از دو متغیر حقیقی داریم

$$\int_C f(z) dz = \int_C u dx - v dy + i \int_C v dx + u dy \quad (3)$$

مالحظه کنید که عبارت (۳) را می‌توان به طور صوری با جایگزینی  $(z)$  و  $dz$  در سمت چپ، به ترتیب، با دو جمله‌ی

$$u + iv \quad \text{و} \quad dx + idy$$

و انجام اعمال ضرب به دست آورد. البته اگر  $C$  یک مسیر، نه لزوماً ساده بسته، باشد و  $[f(z(t))]$  فقط روی آن تکه‌یی پیوسته باشد عبارت (۳) برقرار خواهد بود.

قضیه‌ای از حسابان را یادآوری می‌کنیم که بر مبنای آن می‌توان انتگرالهای روی خط سمت راست رابطه (۳) را بر حسب انتگرالهای دوگانه بیان کرد. به عبارت صریحتر اگر توابع حقیقی  $P(x, y)$  و  $Q(x, y)$  با مشتقات جزئی مرتبه اول در سراسر ناحیه بسته  $R$  متشکل از نقاط درون و روی  $C$  پیوسته باشند، بنابر قضیه گرین\* داریم

$$\int_C P dx + \int_C Q dy = \int \int_R (Q_x - P_y) dA.$$

حال  $f$  در  $R$  پیوسته است زیرا در آنجا تحلیلی است. بنابراین توابع  $u$  و  $v$  نیز در  $R$  پیوسته‌اند. همچنین اگر مشتق  $f'$  یعنی  $f'$  در  $R$  پیوسته باشد، مشتقات جزئی مرتبه اول  $u$  و  $v$  در  $R$  پیوسته‌اند. پس بنابر قضیه گرین می‌توان رابطه (۳) را به صورت زیر نوشت

$$\int_C f(z) dz = \int \int_R (-v_x - u_y) dA + i \int \int_R (u_x - v_y) dA. \quad (4)$$

\* Green

اما، بنابر معادلات کوشی-ریمان

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x$$

انتگرالدهای این دو انتگرال دوگانه در سراسر  $R$  صفرند. بنابراین اگر  $f$  در  $R$  تحلیلی و  $f'$  در آنجا پیوسته باشد

$$\int_C f(z) dz = 0 \quad (5)$$

این قضیه را در نیمة اول قرن نوزدهم، کوشی ثابت کرد.

توجه کنید که وقتی ثابت شد مقدار این انتگرال صفر است، جهت  $C$  اهمیتی ندارد، یعنی وقتی را در جهت حرکت عقربه‌های ساعت بگیریم، حکم (5) باز هم درست است، زیرا در این صورت

$$\int_C f(z) dz = - \int_{-C} f(z) dz = 0$$

مثال. اگر  $C$  مسیر ساده بسته‌ای، در جهت دلخواهی باشد، آنگاه

$$\int_C \exp(z^3) dz = 0$$

دلیل این امر این است که تابع  $f(z) = \exp(z^3)$  همه جا تحلیلی و مشتق آن  $f'(z) = 3z^2 \exp(z^3)$  همه جا پیوسته است.

گورسا (۱۸۵۸-۱۹۳۶) اولین کسی بود که ثابت کرد شرط پیوستگی  $f'$  را می‌توان حذف کرد. برداشتن این شرط مهم است، مثلاً می‌توانیم نشان دهیم که  $f'$ ، مشتق تابع تحلیلی  $f$ ، تابعی تحلیلی است بدون اینکه نیاز به فرض پیوستگی  $f'$  داشته باشیم که خود به عنوان نتیجه‌ای به دست می‌آید. حال صورت تجدید نظر شده دستاورد کوشی را که به قضیه کوشی-گورسا مشهور است بیان می‌کنیم.

قضیه. اگر تابع  $f$  در همه نقاط درون و روی مسیر ساده بسته  $C$  تحلیلی باشد، آنگاه

$$\int_C f(z) dz = 0.$$

اثبات این قضیه در بخش بعد ارائه می‌شود که، برای دقیق‌بودن بحث، فرض می‌کنیم  $C$  به طور مثبت جهت‌دار شده باشد. خواصی که مایل است این قضیه را بدون اثبات پذیرد، می‌تواند مستقیماً به بخش ۴۶ برود.

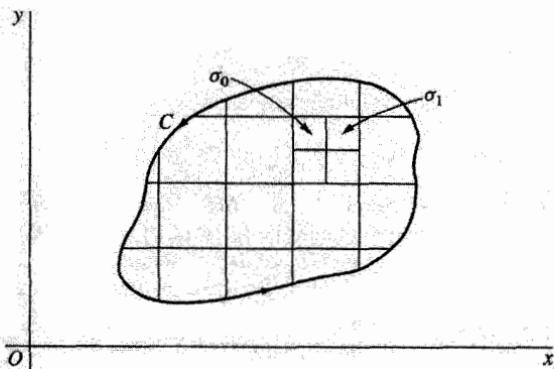
## ۴۵. برهان قضیه

برهان قضیه کوشی-گورسا را با لمی آغاز می‌کنیم. برای شروع، زیرمجموعه‌هایی از ناحیه  $R$  را می‌سازیم که  $R$  مشتمل از نقاط درون و روی مسیر ساده بسته  $C$  با جهت مثبت است. برای انجام این کار خطوطی با فواصل مساوی به موازات محورهای حقیقی و موهومی رسم می‌کنیم به قسمی که فاصله بین خطوط عمودی مجاور، با فاصله بین خطوط افقی مجاور، مساوی باشند. بدین ترتیب، تعدادی متناهی زیرناحیه بسته مربع شکل می‌سازیم که هر نقطه  $R$  در لاقل یک زیرناحیه واقع است و هر زیرناحیه شامل نقاطی از  $R$  است. از این زیرناحیه‌های مربع شکل، فقط به عنوان مربع نام خواهیم برد و همواره به یاد داریم که منظور ما از مربع، مرز آن همراه با نقاط داخلی آن است. اگر مربع خاصی شامل نقاطی باشد که در  $R$  نیستند، آن نقاط را بر می‌داریم و آنچه را که باقی می‌ماند یک مربع جزئی می‌نامیم. بنابراین ناحیه  $R$  را با تعدادی متناهی مربع و مربع جزئی می‌پوشانیم (شکل ۵۴) و اثبات لم زیر را با این پوشش شروع می‌کنیم.

لم. فرض کنید تابع  $f$  در همه نقاط ناحیه بسته  $R$ ، مشتمل از همه نقاط داخل مسیر ساده بسته  $C$  با جهت مثبت و نقاط روی خود  $C$ ، تحلیلی باشد. به ازای هر عدد مثبت  $\varepsilon$ ، می‌توان ناحیه  $R$  را با تعدادی متناهی مربع و مربع جزئی پوشاند، که با  $1, 2, \dots, n = j$  اندیس‌گذاری شده‌اند، به قسمی که در هر یک، نقطه ثابتی مانند  $z_j$  موجود باشد که برای آن نابرابری

$$\left| \frac{f(z) - f(z_j)}{z - z_j} - f'(z_j) \right| < \varepsilon \quad (z \neq z_j) \quad (1)$$

به ازای همه نقاط دیگر آن مربع یا مربع جزئی صادق باشد.



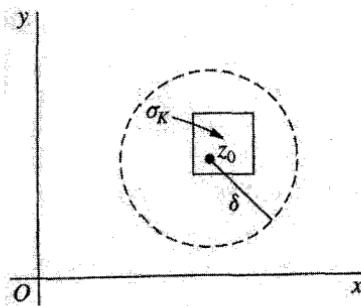
شکل ۵۴

برای شروع اثبات، این امکان را در نظر می‌گیریم که در پوششی که درست قبل از بیان لم ساختیم یک مربع یا مربع جزئی موجود است به قسمی که در آن هیچ نقطه‌ای مانند  $z_0$  موجود نباشد که به ازای همه نقاط دیگر در آن، نابرابری  $(1)$  برقرار باشد. اگر آن زیرناحیه یک مربع است با رسم پاره‌خطهای واصل بین نقاط وسط اضلاع مقابل، چهار مربع کوچکتر می‌سازیم ( $شکل ۵۴$ ). اگر زیرناحیه مورد نظر یک مربع جزئی باشد، تمام مربع را به همان طریق تقسیک می‌نماییم و سپس فرض می‌کنیم قسمتهایی که در خارج  $R$  اند کنار گذاشته شده باشند. اگر در هیچ یک از این زیرناحیه‌های کوچکتر نقطه‌ای مانند  $z_0$  موجود نباشد که برای آن نابرابری  $(1)$  به ازای همه نقاط دیگر آن برقرار باشد، باز مربعها و مربعهای جزئی کوچکتر می‌سازیم وغیره. اگر این عمل را در مورد هر یک از زیرناحیه‌های اولیه‌ای که به این کار نیاز دارد انجام دهیم، ثابت می‌شود که، بعد از تعدادی متناهی مرحله، ناحیه  $R$  را می‌توان با تعدادی متناهی مربع و مربع جزئی پوشاند به قسمی که لم درست باشد. برای تحقیق درستی این مطلب، فرض می‌کنیم یکی از زیرناحیه‌های اولیه چنان باشد که پس از هر تعداد متناهی تقسیم آن، نقاط  $z_0$  مربع موجود نباشند و به تناقض می‌رسیم. فرض کنیم اگر زیرناحیه مربع است  $\sigma_0$  نمایش آن باشد؛ اگر مربع جزئی است،  $\sigma_0$  نمایش تمام مربعی باشد که زیرناحیه جزئی از آن است. پس از تقسیم  $\sigma_0$ ، لااقل یکی از چهار مربع کوچکتر، که با  $\sigma_1$  نمایش داده می‌شود، باید شامل نقاطی از  $R$ ، اما نه نقطه مناسب  $z_0$  باشد. سپس  $\sigma_1$  را تقسیم می‌کنیم و به همین ترتیب ادامه می‌دهیم. شاید بعد از تقسیم مربع  $\sigma_{k-1}$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) بیش از یکی از چهار مربع کوچکتر ساخته شده از آن را بتوان انتخاب کرد. به منظور مشخص بودن انتخاب،  $\sigma_k$  را مربعی می‌گیریم که پایینترین و در منتهی‌الیه سمت چپ باشد.

با توجه به نحوه‌ای که دنباله نامتناهی

$$\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{k-1}, \sigma_k, \dots \quad (2)$$

از مربعهای تودرتو ساخته شده است به آسانی نشان داده می‌شود (تمرین ۹، بخش ۴۶) که نقطه  $z_0$  وجود دارد که بین همه  $\sigma_n$  ها مشترک است، همچنین هر یک از این مربعها شامل نقاطی از  $R$  هستند که متمایز از  $z_0$ ‌اند. به یاد می‌آوریم که چگونه اندازه مربعها در دنباله کاهش می‌یابد و توجه می‌کنیم که هر  $\delta$  همسایگی  $z_0$   $< |z - z_0| < \delta$  شامل چنین مربعهایی است وقتي که طول قطرشان کمتر از  $\delta$  باشد. بنابراین هر  $\delta$  همسایگی  $z_0$   $< |z - z_0| < \delta$  شامل نقاطی از  $R$  متمایز از  $z_0$  است و در نتیجه یک نقطه انشاستگی  $R$  است. چون ناحیه  $R$  مجموعه‌ای بسته است، در نتیجه نقطه‌ای در  $R$  است. (بخش ۱۰ را ببینید).



شکل ۵۵

حال تابع  $f$  در سراسر  $R$  و به خصوص در  $\mathbb{D}$  تحلیلی است. در نتیجه  $(z_0) f'$  موجود است. بنابر تعريف مشتق (بخش ۱۸) به ازای هر عدد مثبت  $\varepsilon$  یک  $\delta$ -همسایگی  $\delta < |z_0 - z|$  موجود است به قسمی که نابرابری

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| < \varepsilon$$

به ازای همه نقاط متمایز از  $z_0$  در آن همسایگی صادق است. اما اگر عدد صحیح  $K$  آنقدر بزرگ باشد که طول قطر  $\sigma_K$  کوچکتر از  $\delta$  باشد، آنگاه همسایگی  $\delta < |z - z_0|$  شامل مربع  $\sigma_K$  است (شکل ۵۵). در نتیجه  $\mathbb{D}$  به عنوان نقطه  $z$  در نابرابری (۱) برای زیرناحیه متشکل از  $\sigma_K$  یا قسمتی از  $\sigma_K$  به کار می‌رود. لذا برخلاف روشی که دنباله (۲) را ساختیم، نیازی به تقسیم  $\sigma_K$  نیست. بنابراین به تناقض رسیدیم و اثبات  $\text{Lm } f$  کامل می‌شود.

بحث را با تابعی مانند  $f$  ادامه می‌دهیم که در سراسر ناحیه  $R$  متشکل از مسیر ساده بسته  $C$  با جهت مثبت و نقاط درون آن تحلیلی است. حال آماده‌ایم تا قضیه کوشی-گورسا را ثابت کنیم، یعنی اینکه

$$\int_C f(z) dz = 0. \quad (3)$$

عدد مثبت دلخواه  $\varepsilon$  مفروض است، پوشش  $R$  در حکم  $\text{Lm } f$  را در نظر می‌گیریم. روی مربع یا مربع جزئی زام تابع زیر را تعريف می‌کنیم، که در آن  $z_j$  نقطه ثابت واقع در آن زیرناحیه است که برای آن نابرابری (۱) برقرار است:

$$\delta_j(z) = \begin{cases} \frac{f(z) - f(z_j)}{z - z_j} - f'(z_j), & z \neq z_j \\ 0, & z = z_j. \end{cases} \quad (4)$$

بنابر نابرابری (۱)، در همه نقاط  $z$  از زیرناحیه‌ای که  $\delta_j(z)$  در آن تعریف شده است

$$|\delta_j(z)| < \varepsilon. \quad (5)$$

همچنین تابع  $\delta_j(z)$  در سراسر زیرناحیه پیوسته است زیرا  $f$  در آنجا پیوسته است و

$$\lim_{z \rightarrow z_j} \delta_j(z) = f'(z_j) - f'(z_j) = 0.$$

حال فرض کنید  $(j = 1, 2, \dots, n)$  نمایش مرزهای مربعها یا مربعهای جزئی پوشاننده  $R$  در جهت مثبت باشد. بنابر تعریف (۴) مقدار  $f$  در هر نقطه  $z$  از هر  $C_j$  خاص را می‌توان چنین نوشت

$$f(z) = f(z_j) - z_j f'(z_j) + f'(z_j)z + (z - z_j)\delta_j(z);$$

و در نتیجه

$$\int_{C_j} f(z) dz = [f(z_j) - z_j f'(z_j)] \int_{C_j} dz + f'(z_j) \int_{C_j} z dz + \int_{C_j} (z - z_j) \delta_j(z) dz. \quad (6)$$

اما

$$\int_{C_j} z dz = 0 \quad \text{و} \quad \int_{C_j} dz = 0$$

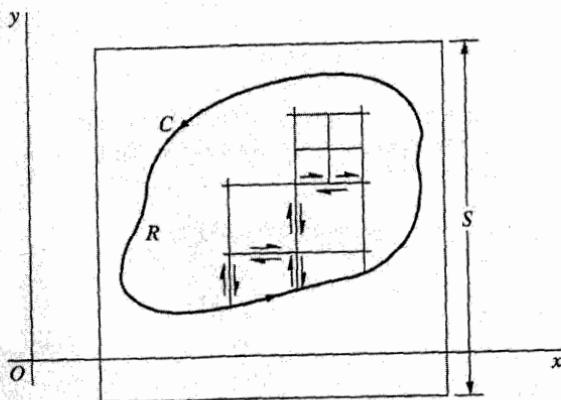
زیرا توابع ۱ و  $z$  همه جا در صفحه متناهی تابع اولیه دارند. لذا معادله زیر تبدیل می‌شود

$$\int_{C_j} f(z) dz = \int_{C_j} (z - z_j) \delta_j(z) dz \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (7)$$

مجموع همه  $n$  انتگرال سمت چپ روابط (۷) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\sum_{j=1}^n \int_{C_j} f(z) dz = \int_C f(z) dz$$

زیرا دو انتگرال روی مرز مشترک هر دو زیرناحیه مجاور با هم حذف می‌شوند، انتگرال روی آن پاره خط در یک زیرناحیه در یک جهت و در زیرناحیه دیگر در جهت مخالف آن گرفته می‌شود



شکل ۵۶

(شکل ۵۶)، فقط انتگرالها در طول قوسهایی که قسمتهایی از منحنی  $C$  هستند باقی می‌مانند.  
در نتیجه با توجه به معادله‌های (۷) داریم

$$\int_C f(z) dz = \sum_{j=1}^n \int_{C_j} (z - z_j) \delta_j(z) dz;$$

و لذا

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq \sum_{j=1}^n \left| \int_{C_j} (z - z_j) \delta_j(z) dz \right|. \quad (8)$$

حال با استفاده از ویژگی (۱)، بخش ۴۱، برای هر یک از قدرمطلقهای سمت راست نابرابری (۸) یک کران بالا پیدا می‌کنیم. برای انجام این کار ابتدا به باد می‌آوریم که هر  $C_j$  منطبق بر تمام یا قسمتی از مرز یک مربع است. در هر حالت فرض می‌کنیم  $z_j$  نمایش طول ضلع این مربع باشد. چون در انتگرال زام متغیر  $z$  و نقطه  $z_j$  هر دو در آن مربع واقع‌اند،

$$|z - z_j| \leq \sqrt{2}s_j.$$

بنابراین با توجه به نابرابری (۵)، می‌دانیم که هر انتگرال‌ده سمت راست نابرابری (۸) در شرط زیر صدق می‌کند

$$|(z - z_j) \delta_j(z)| < \sqrt{2}s_j \varepsilon. \quad (9)$$

اگر  $C_j$  مربع یک مریع باشد، طول مسیر  $C_j$  مساوی  $4s_j$  است. در این حالت فرض می‌کنیم  $A_j$  معرف مساحت مریع باشد و ملاحظه می‌کنیم که

$$\left| \int_{C_j} (z - z_j) \delta_j(z) dz \right| < \sqrt{2}s_j \varepsilon \cdot 4s_j = 4\sqrt{2}A_j \varepsilon. \quad (10)$$

اگر  $C_j$  مربع یک مریع جزئی باشد، طول آن از  $L_j$  تجاوز نمی‌کند، که در آن  $L_j$  طول آن قسمت از  $C_j$  است که قسمتی از  $C$  نیز هست. مجدداً اگر فرض کنیم  $A_j$  نمایش مساحت تمام مریع باشد، در می‌یابیم که

$$\left| \int_{C_j} (z - z_j) \delta_j(z) dz \right| < \sqrt{2}s_j \varepsilon (4s_j + L_j) < 4\sqrt{2}A_j \varepsilon + \sqrt{2}SL_j \varepsilon, \quad (11)$$

که در آن،  $S$  طول ضلع مریعی است که تمام مسیر  $C$  و همه مربعات اولیه را که در پوشاندن  $R$  به کار رفته‌اند در بر می‌گیرد (شکل ۵۶). توجه کنید که مجموع همه راه‌ها از  $S^2$  تجاوز نمی‌کند. حال اگر  $L$  معرف طول  $C$  باشد، از نابرابریهای (۸)، (۱۰) و (۱۱) نتیجه می‌شود که

$$\left| \int_C f(z) dz \right| < (4\sqrt{2}S^2 + \sqrt{2}SL)\varepsilon.$$

چون مقدار عدد مثبت  $\varepsilon$  دلخواه است، می‌توان آن را طوری انتخاب کرد که سمت راست نابرابری آخر به دلخواه ما کوچک شود. بنابراین سمت چپ که مستقل از  $\varepsilon$  است باید مساوی صفر باشد و حکم (۳) نتیجه می‌شود. بدین ترتیب اثبات قضیه کوشی-گورسا کامل می‌شود.

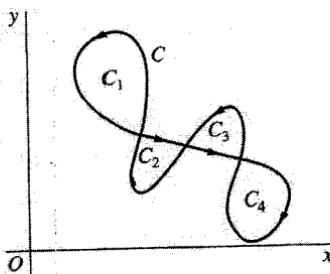
## ۴۶. حوزه‌های همبند ساده و چندگانه

حوزه همبند ساده  $D$ ، حوزه‌ای است که هر مسیر ساده بسته در درون آن فقط نقاط  $D$  را در بر گیرد. مجموعه نقاط داخلی یک مسیر ساده بسته مثالی در این مورد است. ولی حوزه طوقی بین دو دایره هم‌مرکز، همبند ساده نیست. یک حوزه که همبند ساده نباشد حوزه همبند چندگانه نامیده می‌شود.

قضیه کوشی-گورسا را می‌توان به روش زیر تعمیم داد تا شامل حوزه همبند ساده باشد.

**قضیه ۱.** اگر تابع  $f$  در سراسر حوزه همبند ساده  $D$  تحلیلی باشد آنگاه بهازای هر مسیر بسته  $C$  واقع در  $D$  داریم

$$\int_C f(z) dz = 0. \quad (1)$$



شکل ۵۷

اگر  $C$  مسیر ساده بسته‌ای باشد یا اگر مسیر بسته‌ای باشد که به دفعات متناهی خودش را قطع کند اثبات ساده است. زیرا اگر  $C$  ساده و واقع در  $D$  باشد، تابع  $f$  در هر نقطه درون و روی  $C$  تحلیلی است؛ و بنابر قضیه کوشی-گورسا معادله (۱) برقرار است. به علاوه، اگر  $C$  بسته باشد، ولی به دفعات متناهی خودش را قطع کند، مشکل از تعدادی متناهی مسیر ساده بسته خواهد بود. این مطلب در شکل ۵۷ نشان داده شده است، که مسیرهای ساده بسته  $C_k$  ( $k = 1, 2, 3, 4$ ) مسیر  $C$  را می‌سازند. چون مقدار انتگرال حول هر  $C_k$  صفر است، طبق قضیه کوشی-گورسا نتیجه می‌شود که

$$\int_C f(z) dz = \sum_{k=1}^4 \int_{C_k} f(z) dz = 0.$$

اگر مسیر بسته در تعدادی نامتناهی نقطه خودش را قطع کند دقت زیادی لازم خواهد بود. در تمرین ۵ روشنی را بیان کرده‌ایم که اغلب می‌توان برای نشان دادن کاربرد قضیه در این مورد هم از آن استفاده کرد.\*

فرع ۱. تابع  $f$  که در سراسر حوزه همبند ساده  $D$  تحلیلی است باید در  $D$  دارای تابع اولیه باشد.

این فرع بلافصله از قضیه ۱ نتیجه می‌شود زیرا بنابر قضیه بخش ۴۲ اگر تابع در حوزه‌ای بیوسته و بهارزی هر مسیر بسته  $C$  در آن حوزه رابطه (۱) برقرار باشد آنگاه  $f$  همیشه در آن حوزه تابع اولیه دارد. توجه کنید که چون صفحه متناهی همبند ساده است بنابر فرع ۱ توابع تام همیشه دارای تابع اولیه‌اند.

\* برای یک اثبات قضیه فوق، که شامل مسیرهای کلیتری با طول متناهی باشد، مثلاً بخش‌های ۶۳-۶۵ جلد ۱ کتاب مارکوشویچ (Markushevich) مذکور در پیوست ۱ را ببینید.

. قضیه کوشی-گورسا را می‌توان طوری تعیین داد که شامل انتگرال روی مرز حوزه همبند چندگانه شود. قضیه زیر چنین تعیینی است.

### قضیه ۲. فرض کنید که

(الف) مسیر ساده بسته‌ای در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت است؛

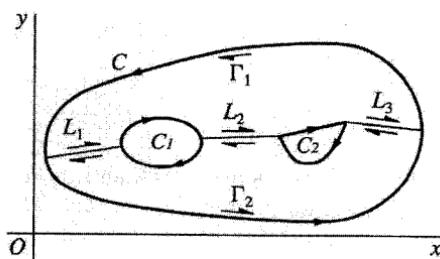
(ب)  $C_k = 1, 2, \dots, n$ ) مسیرهای ساده بسته‌ای هستند که همه در جهت حرکت عقربه‌های ساعت گرفته شده‌اند و در درون  $C$  بوده، درونهای آنها هیچ نقطه مشترکی ندارند (شکل ۵۸).

اگر تابع  $f$  روی همه این مسیرها و در سراسر این حوزه همبند چندگانه مشکل از همه نقاطی که درون  $C$  و خارج هر  $C_k$  واقع‌اند تحلیلی باشد، آن‌گاه

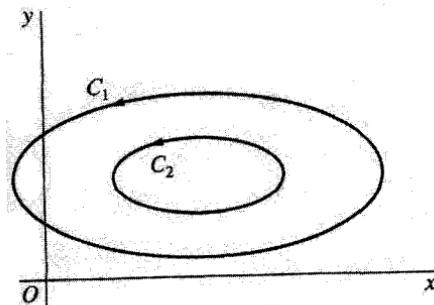
$$\int_C f(z) dz + \sum_{k=1}^n \int_{C_k} f(z) dz = 0. \quad (2)$$

توجه کنید که در رابطه (۲)، جهت هر یک از مسیرهای انتگرالگیری طوری است که داخل ناحیه بسته در سمت چپ آن مسیر واقع است.

برای اثبات قضیه، یک مسیر چندبر  $L_1$ ، مشکل از تعدادی متناهی پاره خط که انتهای هر یک ابتدای دیگری است، می‌سازیم که مسیر خارجی  $C$  را به مسیر داخلی  $C_1$  وصل کند. یک مسیر چندبر دیگر  $L_2$  می‌سازیم که  $C_1$  را به  $C_2$  وصل کند و همین طور ادامه می‌دهیم تا  $L_{n+1}$  تا  $C_n$  را به  $C$  وصل می‌کند ساخته شود. همان‌طور که در شکل ۵۸ با پیکانهای تک‌جهتی نشان داده‌ایم دو مسیر ساده بسته  $\Gamma_1$  و  $\Gamma_2$  می‌توان تشکیل داد که هر یک از مسیرهای چندبر  $-L_k$  و قطعاتی از  $C$  و  $C_k$ ‌ها هستند و هر کدام از آنها در جهتی گرفته می‌شوند که نقاطی



شکل ۵۸



شکل ۵۹

که به وسیله آنها محاط شده‌اند در سمت چپ واقع شوند. حال می‌توان قضیه کوشی-گورسا را در مورد  $f$  روی  $\Gamma_1$  و  $\Gamma_2$  اعمال کرد و معلوم می‌شود که مجموع انتگرال‌ها بر این مسیرها صفر است. چون انتگرال‌های روی هر مسیر  $L_k$  در جهت‌های مختلف حذف می‌شوند، فقط انتگرال‌های در طول  $C$  و  $C_k$  باقی می‌مانند و حکم (۲) ثابت می‌شود.

فرع زیر پیامدی مهم از قضیه ۲ است.

فرع ۲. فرض کنید  $C_1$  و  $C_2$  معرف مسیرهای ساده بسته‌ای در جهت مثبت بوده و  $C_2$  درون  $C_1$  باشد (شکل ۵۹). اگر تابع  $f$  در ناحیه بسته متشکل از آن مسیرها و همه نقاط بین آنها تحلیلی باشد، آنگاه

$$\int_{C_1} f(z) dz = \int_{C_2} f(z) dz. \quad (3)$$

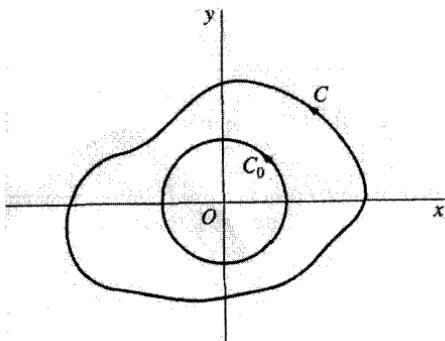
برای تحقیق درستی آن، با استفاده از قضیه ۲ می‌نویسیم

$$\int_{C_1} f(z) dz + \int_{-C_1} f(z) dz = 0$$

و توجه می‌کنیم که این رابطه، صورتی دیگر از رابطه (۳) است.

فرع ۲ به اصل تغییر شکل مسیرها معروف است زیرا می‌بین این نکته است که اگر  $C_1$  به طور پیوسته به  $C_2$  تغییر شکل یابد به قسمی که همیشه از نقاطی بگذرد که  $f$  در آنها تحلیلی است، آنگاه مقدار انتگرال  $f$  روی  $C_1$  هیچ وقت تغییر نمی‌کند.

مثال. اگر  $C$  مسیر ساده بسته‌ای با جهت مثبت باشد که مبدأ را احاطه کرده است، با استفاده



شکل ۶۰

از فرع ۲ می‌توان نشان داد که

$$\int_C \frac{dz}{z} = 2\pi i.$$

برای انجام این کار، فقط باید دایره‌یی به مرکز مبدأ و شعاع به قدر کافی کوچک مانند  $C_0$  در جهت مثبت ساخت که  $C_0$  کاملاً درون  $C$  واقع شود (شکل ۶۰). از آنجاکه [تمرین ۱۰ (الف) بخش  $4^\circ$ ]

$$\int_{C_0} \frac{dz}{z} = 2\pi i$$

و چون  $1/z$  همه جا بجز در  $0^\circ$  تحلیلی است، نتیجه مطلوب به دست می‌آید. توجه کنید که شعاع  $C_0$  را همچنین می‌توان به قدر کافی بزرگ گرفت تا  $C_0$  کاملاً درون  $C$  باشد.

### تمرینها

۱. با استفاده از قضیه کوشی-گورسا نشان دهید که

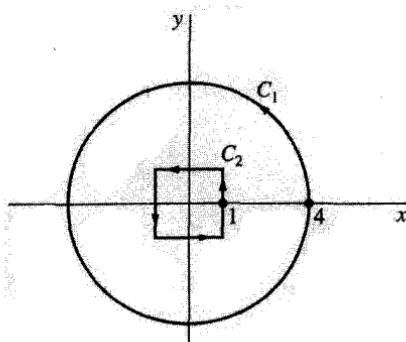
$$\int_C f(z) dz = 0,$$

در صورتی که مسیر  $C$  دایره  $|z| = 1$ ، در یک جهت دلخواه باشد و داشته باشیم

$$f(z) = ze^{-z} \quad (\text{ب}) \quad f(z) = \frac{z^2}{z - 3} \quad (\text{الف})$$

$$f(z) = \operatorname{sech} z \quad (\text{د}) \quad f(z) = \frac{1}{z^2 + 2z + 2} \quad (\text{ج})$$

$$f(z) = \operatorname{Log}(z + 2) \quad (\text{و}) \quad f(z) = \tan z \quad (\text{ه})$$



شکل ۶۱

۲. فرض کنید  $C_1$  معرف دایره  $|z| = 4$  در جهت مثبت و  $C_2$  مرز مربعی در جهت مثبت باشد که اضلاعش در امتداد خطوط  $y = \pm 1$ ,  $x = \pm 1$  هستند (شکل ۶۱). به کمک فرع ۲، بخش ۴۶، بگویید که چرا تساوی زیر برقرار است

$$\int_{C_1} f(z) dz = \int_{C_2} f(z) dz$$

وقتی

$$f(z) = \frac{z}{1-e^z} \quad ; \quad f(z) = \frac{z+2}{\sin(z/2)} \quad ; \quad f(z) = \frac{1}{3z^2+1} \quad (\text{الف})$$

۳. اگر  $C$  معرف دایره  $R = |z-z_0|$  در جهت مثبت باشد، آنگاه بنابر تمرین ۱، بخش ۴۰، داریم

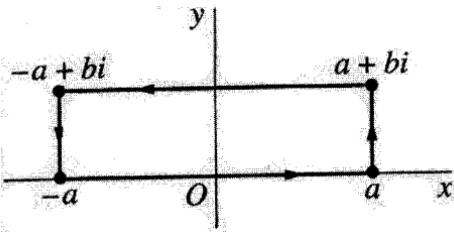
$$\int_{C_0} (z-z_0)^{n-1} dz = \begin{cases} 0, & n = \pm 1, \pm 2, \dots \\ 2\pi i, & n = 0 \end{cases}$$

با استفاده از این نتیجه و فرع ۲، بخش ۴۶، نشان دهید که اگر  $C$  مرز مستطیل  $0 \leq x \leq 3$ ,  $0 \leq y \leq 2$  در جهت مثبت باشد، آنگاه

$$\int_C (z-2-i)^{n-1} dz = \begin{cases} 0, & n = \pm 1, \pm 2, \dots \\ 2\pi i, & n = 0 \end{cases}$$

۴. با استفاده از روشی که در ذیل بیان می‌شود فرمول انتگرالگیری زیر را به دست آورید

$$\int_0^\infty e^{-x^2} \cos(2bx) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-b^2} \quad (b > 0).$$



شکل ۶۲

(الف) نشان دهید که مجموع انتگرال‌های  $\exp(-z^2)$  در امتداد ساقه‌های افقی بالا و پایین از مسیر مستطیلی شکل ۶۲ را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$2 \int_0^a e^{-x^2} dx - 2e^{b^2} \int_0^a e^{-x^2} \cos(2bx) dx$$

و مجموع انتگرال‌ها در امتداد ساقه‌های قائم چپ و راست را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$ie^{-a^2} \int_0^b e^{y^2} e^{-i2ay} dy - ie^{-a^2} \int_0^b e^{y^2} e^{i2ay} dy.$$

در این صورت، با استفاده از قضیه کوشی-گورسا نشان دهید که

$$\int_0^a e^{-x^2} \cos(2bx) dx = e^{-b^2} \int_0^a e^{-x^2} dx + e^{-(a^2+b^2)} \int_0^b e^{y^2} \sin(2ay) dy.$$

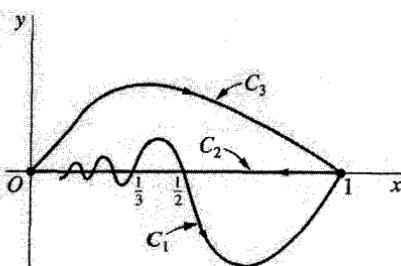
(ب) با پذیرفتن این امر که \*

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

\* روش معمولی برای محاسبه این انتگرال این است که مجازور آن را به صورت

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx \int_0^\infty e^{-y^2} dy = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$

می‌نویستند و این انتگرال را با استفاده از مختصات قطبی محاسبه می‌کنند. جزئیات، مثلاً در صفحات ۶۸۰-۶۸۱ کتاب زیرآمده است



شکل ۶۳

و ملاحظه این نکته که

$$\left| \int_0^b e^{y^r} \sin 2ay dy \right| < \int_0^b e^{y^r} dy$$

در معادله آخر قسمت (الف)  $a$  را به بی‌نهایت میل داده، فرمول انتگرال‌گیری مطلوب را به دست آورید.

۵. بنابر تمرین ۶، بخش ۳۸، مسیر  $C_1$  از مبدأ تا نقطه  $z = z$  در طول نمودار تابعی که با ضابطه‌های زیر تعریف شده قوس همواری است که محور حقیقی را بی‌نهایت بار قطع می‌کند

$$y(x) = \begin{cases} x^{\frac{3}{4}} \sin\left(\frac{\pi}{x}\right), & 0 < x \leq 1 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

فرض کنید  $C_2$  نمایش پاره خط در امتداد محور حقیقی از  $z = z$  تا مبدأ باشد و  $C_3$  معرف قوس همواری از مبدأ تا نقطه  $z = z$  باشد که خودش را قطع نکند و فقط در نقاط انتهایی خود با قوسهای  $C_1$  و  $C_2$  مشترک باشد (شکل ۶۳). با استفاده از قضیه کوشی-گورسا نشان دهید اگر  $f$  تابعی تام باشد، آنگاه

$$\cdot \int_{C_1} f(z) dz = - \int_{C_1} f(z) dz \quad \text{و} \quad \int_{C_1} f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz$$

نتیجه بگیرید که گرچه مسیر بسته  $C = C_1 + C_2$  خودش را بی‌نهایت بار قطع می‌کند، داریم

$$\int_C f(z) dz = 0.$$

۶. فرض کنید  $C$  معرف تمام مرز نیم قرص  $1 \leq r \leq \theta \leq \pi$  درجهت مثبت و  $f(z) = f(\theta)$  تابع پیوسته‌ای باشد که در این نیم قرص با نوشتن  $= (\circ)$  واستفاده از شاخه

$$f(z) = \sqrt{r} e^{i\theta/2} \quad \left( r > 0, -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2} \right)$$

از تابع چند مقداری  $\sqrt{z}$  تعریف شده است. با محاسبه جداگانه انتگرال‌های  $(z)f$  روی نیم دایره و دو شعاع که  $C$  را تشکیل می‌دهند نشان دهید که

$$\int_C f(z) dz = 0.$$

چرا در اینجا نمی‌توان قضیه کوشی-گورسا را به کار برد؟

۷. نشان دهید اگر  $C$  مسیر ساده بسته‌ای درجهت مثبت باشد، آنگاه مساحت ناحیه محدود به  $C$  را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\frac{1}{2i} \int_C \bar{z} dz.$$

راهنمایی: توجه کنید که گرچه تابع  $\bar{z}(z)$  تحلیلی نیست می‌توان از عبارت (۴)، بخش ۴۴، استفاده کرد (تمرین ۱ (الف) بخش ۲۲ را ببینید).

۸. بازه‌های تودرتو. دنباله نامتناهی  $a_n \leq x \leq b_n$  از بازه‌های بسته به روش زیر ساخته شده است. بازه  $b_1 \leq x \leq a_1$  نیمه سمت چپ با نیمه سمت راست اولین بازه  $a_2 \leq x \leq b_2$  یکی از دو نیمه  $a_1 \leq x \leq b_1$  و سپس بازه  $a_3 \leq x \leq b_3$  از بازه  $a_2 \leq x \leq b_2$ . ثابت کنید نقطه  $x$  هست که به هر یک از بازه‌های بسته  $a_n \leq x \leq b_n$  متعلق است.

راهنمایی: توجه کنید که نقاط انتهایی سمت چپ  $a_n$  نمایش یک دنباله غیرکاهاشی و کراندار از اعداد است زیرا  $a_n \leq a_{n+1} \leq b_n$ ؛ بنابراین وقتی  $n \rightarrow \infty$  می‌کند این دنباله دارای حدی مانند  $A$  است. نشان دهید که نقاط انتهایی  $b_n$  نیز دارای حدی مانند  $B$  هستند. سپس

نشان دهید که  $A = B$  و بنویسید  $A = B = x$ .

۹. مربعهای تودرتو. مربع  $\sigma$ :  $c_1 \leq x \leq b_1, a_1 \leq y \leq d_1$  را با پاره خط‌های موازی محورهای مختصات به چهار مربع مساوی تقسیم می‌کنیم. یکی از این چهار مربع کوچکتر چهار مربع مساوی تقسیم می‌شود یکی از آنها که آن را  $\sigma_2$  می‌نامیم انتخاب می‌شود و الی آخر.

## فرمول انتگرال کوشی ۱۸۹

(بخش ۴۵ را ببینید). ثابت کنید نقطه‌ای مانند  $(x_0, y_0)$  وجود دارد که به هر یک از ناحیه‌های بسته دنباله نامتناهی  $\sigma_1, \sigma_2, \dots$  متعلق است.

راهنمایی: نتیجه تمرین ۸ را در مورد هر یک از دنباله‌های بازه‌های بسته  $a_n \leq x \leq b_n$  و  $c_n \leq y \leq d_n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) به کار برد.

## ۴۷. فرمول انتگرال کوشی

حال قضیه اساسی دیگری را ثابت می‌کنیم.

قضیه. فرض کنید  $f$  همه جا درون و روی مسیر ساده بسته  $C$ ، که در جهت مثبت گرفته شده است، تحلیلی باشد. اگر  $z$  نقطه دلخواهی درون  $C$  باشد، آنگاه

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)dz}{z - z_0}. \quad (1)$$

فرمول (۱) را فرمول انتگرال کوشی می‌نامند. این فرمول بیان می‌کند که اگر تابع  $f$  درون و روی مسیر ساده بسته  $C$  تحلیلی باشد، آنگاه مقادیر  $f$  در درون  $C$  کاملاً به موسیله مقادیر  $f$  بر  $C$  معین می‌شوند.

در صورتی که فرمول انتگرال کوشی به صورت

$$\int_C \frac{f(z)dz}{z - z_0} = 2\pi i f(z_0), \quad (2)$$

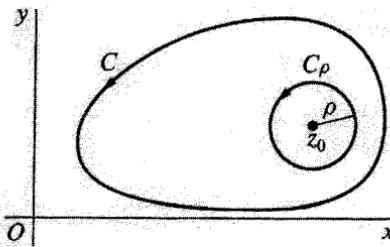
نوشته شود می‌توان در محاسبه برخی انتگرالها روی مسیرهای ساده بسته از آن استفاده کرد. مثال. فرض کنید  $C$  دایره  $|z| = 2$  در جهت مثبت باشد. چون تابع

$$f(z) = \frac{z}{z^2 - 1}$$

در درون و روی  $C$  تحلیلی است و چون نقطه  $-i$  درون  $C$  است، بنابر فرمول (۲) داریم

$$\int_C \frac{z dz}{(z^2 - 1)(z + i)} = \int_C \frac{z/(z - i)}{z - (-i)} dz = 2\pi i \left( \frac{-i}{10} \right) = \frac{\pi}{5}.$$

اثبات قضیه را با این فرض که  $C_\rho$  نمایش دایره  $\rho = |z - z_0|$  در جهت مثبت است شروع می‌کنیم، که در آن  $\rho$  به قدر کافی کوچک است تا  $C_\rho$  درون  $C$  باشد (شکل ۶۴ را ببینید). چون



شکل ۶۴

تابع  $f(z)/(z - z_0)$  روی مسیرهای  $C$  و  $C_\rho$  و بین آنها تحلیلی است، در نتیجه بنابر اصل تغییر شکل مسیرها (فرع ۲ بخش ۴۶) داریم

$$\int_C \frac{f(z) dz}{z - z_0} = \int_{C_\rho} \frac{f(z) dz}{z - z_0}.$$

پس می‌توان نوشت

$$\int_C \frac{f(z) dz}{z - z_0} - f(z_0) \int_{C_\rho} \frac{dz}{z - z_0} = \int_{C_\rho} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz. \quad (3)$$

اما [تمرین ۱۰ (الف) بخش ۴] را ببینید

$$\int_{C_\rho} \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i;$$

ولذا رابطه (۳) تبدیل می‌شود به

$$\int_C \frac{f(z) dz}{z - z_0} - 2\pi i f(z_0) = \int_{C_\rho} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz. \quad (4)$$

حال چون  $f$  در نقطه  $z_0$  تحلیلی، ولذا پیوسته است، متناظر با هر عدد مثبت هر اندازه کوچک  $\varepsilon$  عدد مثبتی مانند  $\delta$  هست که

$$|z - z_0| < \delta \quad \text{هرگاه} \quad |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon \quad (5)$$

فرض کنید  $\rho$  شعاع دایره  $C_\rho$  از عدد  $\delta$  در دومین نابرابری از این نابرابریها کوچکتر باشد. اگر  $z$  روی  $C_\rho$  باشد  $|z - z_0| = \rho$  در نتیجه وقتی  $z$  چنین نقطه‌ای باشد اولین نابرابری از نابرابریها

(۵) برقرار است و از نابرابری (۱) بخش ۴۱ کرانهای بالایی برای قدر مطلق انتگرالهای روی مسیر به دست می‌آید

$$\left| \int_{C_\rho} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \right| < \frac{\varepsilon}{\rho} 2\pi\rho = 2\pi\varepsilon.$$

پس بنابر رابطه (۴) داریم

$$\left| \int_C \frac{f(z)dz}{z - z_0} - 2\pi i f(z_0) \right| < 2\pi\varepsilon.$$

چون سمت راست این نابرابری عددی ثابت و نامنفی است که از هر عدد مثبت به دلخواه کوچک، کوچکتر است، باید مساوی صفر باشد. بنابراین رابطه (۲) برقرار است و قضیه ثابت می‌شود.

## ۴۸. مشتق توابع تحلیلی

از فرمول انتگرال کوشی (بخش ۴۷) نتیجه می‌شود که اگر تابعی در یک نقطه تحلیلی باشد، مشتقات آن از هر مرتبه در آن نقطه موجودند و خود در آنجا تحلیلی‌اند. برای اثبات این ادعا بالمی شروع می‌کنیم که فرمول انتگرال کوشی را طوری تعمیم می‌دهد که برای مشتقات مرتبه اول و دوم کارایی دارد.

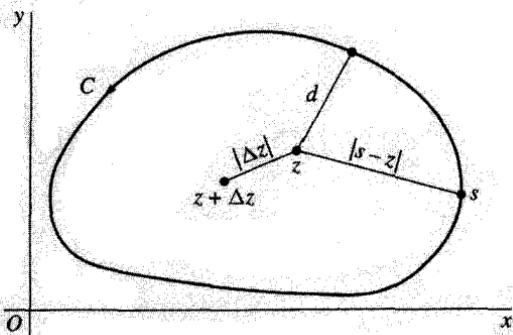
لم. فرض کنید تابع  $f$  همه جا در درون و روی مسیر سادهٔ پسته  $C$ ، که در جهت مثبت گرفته شده است، تحلیلی باشد. اگر  $z$  نقطه‌ای در درون  $C$  باشد، آنگاه

$$f''(z) = \frac{1}{\pi i} \int_C \frac{f(s) ds}{(s - z)^3} \quad \text{و} \quad f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(s) ds}{(s - z)^2} \quad (1)$$

توجه کنید که عبارات (۱) را می‌توان به طور صوری، یا بدون تحقیق دقیق با مشتقگیری نسبت به  $z$  از انتگرال‌ده فرمول انتگرال کوشی

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(s) ds}{s - z}, \quad (2)$$

به دست آورد که در آن  $z$  در درون  $C$  و  $s$  نمایش نقاط روی  $C$  است. برای اثبات اولین فرمول از فرمولهای (۱)، فرض می‌کنیم  $d$  کوتاه‌ترین فاصله  $z$  تا نقاط  $s$  در روی  $C$  باشد و  $\Delta z < |z - s| < \theta^\circ$ ، با استفاده از فرمول (۲) می‌توان نوشت (شکل ۶۵) را بینندید).



شکل ۶۵

$$\begin{aligned} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \left( \frac{1}{s - z - \Delta z} - \frac{1}{s - z} \right) \frac{f(s)}{\Delta z} ds \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(s) ds}{(s - z - \Delta z)(s - z)}, \end{aligned}$$

پس روش است که

$$\frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} - \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(s) ds}{(s - z)^2} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\Delta z f(s) ds}{(s - z)^2 (s - z - \Delta z)}. \quad (3)$$

حال فرض می‌کنیم  $M$  نمایش مقدار ماکسیمم  $|f(s)|$  روی  $C$  و  $L$  طول  $C$  باشد، توجه کنید که  $|\Delta z| < d$  و  $|s - z| \geq d$

$$|s - z - \Delta z| = |(s - z) - \Delta z| \geq ||s - z| - |\Delta z|| \geq d - |\Delta z| > 0.$$

در نتیجه

$$\left| \int_C \frac{\Delta z f(s) ds}{(s - z - \Delta z)(s - z)^2} \right| \leq \frac{|\Delta z| M L}{(d - |\Delta z|) d^2},$$

از این نابرابری در می‌یابیم که اگر  $\Delta z$  به صفر میل کند، طرف راست رابطه (3) نیز به صفر میل می‌کند. در نتیجه

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} - \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(s) ds}{(s - z)^2} = 0;$$

و فرمول مطلوب برای  $f'(z)$  اثبات می‌شود.

با استفاده از همین روش می‌توان درستی فرمول  $(z)''f$  در لم را تحقیق کرد. جزئیات را که در تمرین ۹ طرح ریزی شده است به عهده متعلم گذاشته‌ایم.

**قضیه ۱.** اگر تابعی در یک نقطه تحلیلی باشد، مشتقاتش از هر مرتبه در آن نقطه موجودند. به علاوه همه این مشتقات در آنجا تحلیلی‌اند.

برای اثبات این قضیه قابل توجه فرض می‌کنیم تابع  $f$  در نقطه  $z$  تحلیلی باشد. پس همسایگی از  $z$  مانند  $\varepsilon < |z - z_0|$  هست که  $f$  در سراسر آن تحلیلی است (بخش ۲۳ را ببینید). در نتیجه دایره‌یی با جهت مثبت مانند  $C$ ، به مرکز  $z$  و شعاع  $\varepsilon/2$ ، هست که  $f$  در درون و روی  $C$  تحلیلی است (شکل ۶۶). بنابر لم فوق در هر نقطه  $z$  در درون  $C$ .

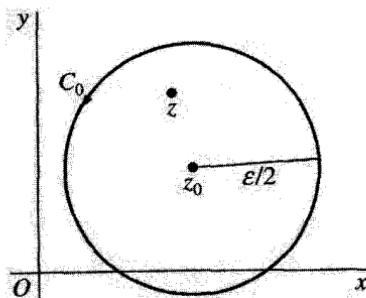
$$f''(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{C_0} \frac{f(s) ds}{(s - z)^3}$$

و وجود  $(z)''f$  در سراسر همسایگی  $\varepsilon/2 < |z - z_0|$  مستلزم تحلیلی‌بودن  $f'$  در  $z$  است. می‌توان برهان فوق را برای تابع تحلیلی  $f'$  به کار برد و تحلیلی‌بودن  $f''$  مشتق آن را نتیجه گرفت و همین طور برای مشتقات مرتبه‌های بالاتر. حال قضیه ۱ ثابت شد.  
به عنوان یک پیامد، اگر تابع

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

در نقطه  $(x, y) = z$  تحلیلی باشد، مشتقپذیری  $f'$  متضمن پیوستگی  $f$  در آن نقطه است (بخش ۱۸). پس چون

$$f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y,$$



شکل ۶۶

نتیجه می‌شود که مشتقات جزئی مرتبه اول  $u$  و  $v$  در آن نقطه پیوسته‌اند. به علاوه چون  $f''$  در  $z$  تحلیلی و پیوسته است و چون

$$f''(z) = u_{xx} + iv_{xx} = v_{yx} - iu_{yx},$$

و غیره، به فرعی می‌رسیم که در بخش ۲۵ هنگام معرفی توابع همساز آن را بدون اثبات پذیرفتیم. فرع. اگر تابع  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  در نقطه  $z = (x, y)$  تحلیلی باشد آن‌گاه تابع مؤلفه‌ی  $u$  و  $v$  در آن نقطه دارای مشتقات جزئی پیوسته از هر مرتبه‌اند.

با استفاده از استقرای ریاضی می‌توان فرمولهای (۱) را به

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(s) ds}{(s - z)^{n+1}} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (4)$$

تعمیم داد. تحقیق درستی آن خیلی پیچیده‌تر از حالت  $n = 1$  است و خواننده علاقه‌مند برای اثبات آن به کتابهای دیگر مراجعه کند.\* توجه کنید که با قرارداد

$$\circ ! = 1 \quad f^{(\circ)}(z) = f(z)$$

رابطه (۴) برای  $n = \circ$  نیز برقرار است و در این حالت به فرمول انتگرال کوشی (۲) تبدیل می‌شود. در صورتی که فرمول (۴) را به شکل زیر بنویسیم

$$\int_C \frac{f(z) dz}{(z - z_\circ)^{n+1}} = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_\circ) \quad (n = \circ, 1, 2, \dots) \quad (5)$$

در محاسبه برخی انتگرال‌ها که  $f$  در درون و روی مسیر ساده بسته  $C$ ، که در جهت مثبت گرفته شده، تحلیلی و  $\circ$  در درون  $C$  باشد مفید است. این مطلب قبلًا در بخش ۴۷ وقتی  $n = \circ$  نشان داده شده است.

مثال ۱. اگر  $C$  دایره واحد  $\mathbb{D}$  باشد و  $f(z) = \exp(2z)$ ، آن‌گاه

$$\int_C \frac{\exp(2z) dz}{z^4} = \int_C \frac{f(z) dz}{(z - \circ)^{3+1}} = \frac{2\pi i}{3!} f'''(\circ) = \frac{8\pi i}{3}.$$

مثال ۲. فرض کنید  $\circ$  نقطه‌ای در داخل مسیر ساده بسته  $C$  باشد که  $C$  در جهت مثبت گرفته شده است. در صورتی که  $f(z) = \exp(2z)$  فرمول (۵) نشان می‌دهد که

$$\int_C \frac{dz}{(z - z_\circ)^{n+1}} = \circ \quad (n = 1, 2, \dots).$$

---

\* مثالاً مراجعه کنید به جلد اول کتاب مارکوشویچ (Markushevich) مذکور در پیوست ۱.

$$\int_C \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i$$

(با تمرین ۱۰ بخش ۴ مقایسه کنید.)

این بخش را با قضیه‌ای منسوب به موررا<sup>۱</sup> (۱۸۵۶-۱۹۰۹) به پایان می‌بریم. اثبات ارائه شده، به این واقعیت بستگی دارد که مشتق یک تابع تحلیلی، همان‌طور که در قضیه ۱ بیان شد، خود تحلیلی است.

**قضیه ۲.** اگر تابع  $f$  در سراسر حوزه  $D$  پیوسته باشد و بهازای هر مسیر بسته  $C$  واقع در  $D$ ،

$$\int_C f(z) dz = 0. \quad (6)$$

آنگاه  $f$  در سراسر  $D$  تحلیلی است.

به خصوص وقتی  $D$  همبند ساده است برای ردۀ توابع پیوسته در  $D$  عکس قضیه ۱ در بخش ۴۶ را داریم که تعمیم قضیه کوشی-گورسا برای چنین حوزه‌هایی است. وقتی فرض قضیه برقرار باشد تنها با مراجعه به قضیه بخش ۴۲ می‌بینیم که  $f$  دارای تابع اولیه‌ای در  $D$  است یعنی تابعی تحلیلی مانند  $F$  وجود دارد که در هر نقطه  $D$  داریم  $F'(z) = f(z)$ . چون  $f$  مشتق  $F$  است از قضیه ۱ بالا نتیجه می‌شود که  $f$  در  $D$  تحلیلی است.

### تمرینها

۱. فرض کنیم  $C$  معرف مرز مربعی باشد که اضلاعش در امتداد خطوط  $x = \pm 2$  و  $y = \pm 2$  واقع‌اند، و  $C$  در جهت مثبت گرفته شده است. مقدار عددی هر یک از این انتگرال‌ها را به دست آورید.

$$\int_C \frac{z dz}{2z+1} \quad (\text{ج}) \quad ; \quad \int_C \frac{\cos z}{z(z^2+1)} dz \quad (\text{ب}) \quad ; \quad \int_C \frac{e^{-z} dz}{z - (\pi i/2)} \quad (\text{الف})$$

$$\int_C \frac{\tan(z/2)}{(z - x_0)^2} dz \quad (-2 < x_0 < 2) \quad (\text{ه}) \quad ; \quad \int_C \frac{\cosh z}{z^4} dz \quad (\text{د})$$

جواب: (الف)  $2\pi$ ; (ب)  $\pi/4$ ; (ج)  $-\pi i/2$ ; (د)  $0$ ; (ه)  $i\pi \sec^2(x_0/2)$

۲. مقدار انتگرال  $g(z)$  روی دایره  $|z - i| = 2$  را در جهت مثبت پیدا کنید در صورتی که

$$\cdot g(z) = \frac{1}{(z^2 + 4)^2} \quad (\text{الف}) \quad g(z) = \frac{1}{z^2 + 4} \quad (\text{ب})$$

. $\pi/16$  جواب: (الف)  $\pi/2$ ; (ب)  $\pi/4$

۳. فرض کنید  $C$  دایره  $|z| = 3$  در جهت مثبت باشد. نشان دهید که اگر

$$g(w) = \int_C \frac{2z^2 - z - 2}{z - w} dz \quad (|w| \neq 3)$$

آنگاه  $g(2) = 8\pi i$ . وقتی  $|w| > 3$  مقدار  $g(w)$  چیست؟

۴. فرض کنید  $C$  مسیر ساده بسته‌ای در جهت مثبت در صفحه  $z$  ها باشد و بنویسید

$$g(w) = \int_C \frac{z^3 + 2z}{(z - w)^3} dz$$

نشان دهید که وقتی  $w$  در درون  $C$  است  $g(w) = 6\pi i w$  و وقتی  $w$  در خارج  $C$  است

$$g(w) = 0.$$

۵. نشان دهید در صورتی که  $f$  در درون و روی مسیر ساده بسته  $C$  تحلیلی باشد و  $z_0$  روی  $C$  نباشد آنگاه

$$\int_C \frac{f'(z)dz}{z - z_0} = \int_C \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^2}.$$

۶. فرض کنید  $f$  معرف تابعی باشد که بر مسیر ساده بسته  $C$  پیوسته است. با پیروی از روشی که در بخش ۴۸ به کار رفته ثابت کنید که تابع

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(s)ds}{s - z}$$

در هر نقطه  $z$  در داخل  $C$  تحلیلی است و به ازای هر چنین نقطه‌ای

$$g'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(s)ds}{(s - z)^2}.$$

۷. فرض کنید  $C$  دایره واحد  $(-\pi \leq \theta \leq \pi)$  باشد. ابتدا نشان دهید که به ازای هر عدد حقیقی و ثابت  $a$

$$\int_C \frac{e^{az}}{z} dz = 2\pi i.$$

سپس با نوشتن انتگرال برحسب  $\theta$ , فرمول زیر را نتیجه بگیرید

$$\int_0^\pi e^{a \cos \theta} \cos(a \sin \theta) d\theta = \pi.$$

۸. (الف) به کمک فرمول دوچممه‌بی (بخش ۳) نشان دهید که بهازای هر مقدار  $n$ , تابع

$$P_n(z) = \frac{1}{n! 2^n} \frac{d^n}{dz^n} (z^2 - 1)^n \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

چندجمله‌بی از درجه  $n$  است.\*

(ب) فرض کنید  $C$  مسیر ساده بسته‌ای در جهت مثبت باشد که نقطه ثابت  $z$  را در برگرفته است. به کمک نمایش انتگرالی (۴)، بخش ۴۸، برای مشتق  $n$ ام تابع تحلیلی نشان دهید که می‌توان چندجمله‌بیهای قسمت (الف) را به شکل زیر نوشت

$$P_n(z) = \frac{1}{2^{n+1} \pi i} \int_C \frac{(s^2 - 1)^n}{(s - z)^{n+1}} ds \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

(ج) نشان دهید که چگونه در نمایش  $P_n(z)$  در قسمت (ب)، اگر  $1 = z$  می‌توان انتگرال‌ده را به صورت  $(1 - s + 1)^n / (s + 1)^n$  نوشت. سپس با استفاده از فرمول انتگرال کوشی نشان دهید که

$$P_n(1) = 1 \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

به روشنی مشابه نشان دهید که

$$P_n(-1) = (-1)^n \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

۹. طی مراحل زیر درستی عبارت

$$f''(z) = \frac{1}{\pi i} \int_C \frac{f(s) ds}{(s - z)^3}$$

در لم بخش ۴۸ را تحقیق کنید.

(الف) با استفاده از فرمول  $f'(z)$  در آن لم نشان دهید که

$$\frac{f'(z + \Delta z) - f'(z)}{\Delta z} - \frac{1}{\pi i} \int_C \frac{f(s) ds}{(s - z)^3} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{3(s - z)\Delta z - 2(\Delta z)^2}{(s - z - \Delta z)^2 (s - z)^3} f(s) ds.$$

(ب) فرض کنید  $d$  و  $D$ , بهترتب، نمایش کوچکترین و بزرگترین فاصله  $z$  تا نقاط روی

\* اینها چندجمله‌بیهای لزاندر هستند که در تمرین ۷، بخش ۳۷، بهازای  $x = z$  ظاهر شدند. پانوشت آن تمرین را ببینید.

$C$  باشدند. همچنین فرض کنید  $M$  مقدار ماکسیمم  $|f(s)|$  روی  $C$  و طول  $C$  باشد. به کمک نابرابری مثلثی و با استناد به عبارتی که برای  $f'(z)$  در لم به دست آمد، نشان دهید که اگر  $d < |\Delta z| < \infty$ ، قدر مطلق انتگرال سمت راست در قسمت (الف) از بالا به عدد زیر کراندار است

$$\frac{(3D|\Delta z| + 2|\Delta z|^2)M}{(d - |\Delta z|)^2 d^3} L.$$

(ج) با استفاده از نتایج حاصل در قسمتهای (الف) و (ب)، عبارت مطلوب برای  $(z)f''(z)$  را به دست آورید.

## ۴۹. قضیه لیوویل<sup>۱</sup> و قضیه اساسی جبر

این بخش را به دو قضیه مهم اختصاص می‌دهیم که از تعمیم فرمول انتگرال کوشی در بخش ۴۸ حاصل می‌شوند.

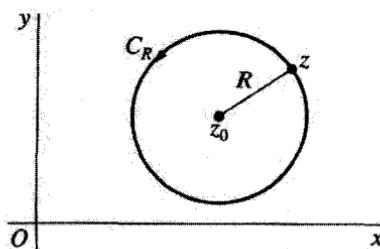
لم. فرض کنید تابع  $f$  در درون و روی دایره  $C_R$  با جهت مثبت، به مرکز  $z_0$  و شاعع  $R$  تحلیلی باشد (شکل ۶۷). اگر  $M_R$  نمایش مقدار ماکسیمم  $|f(z)|$  روی  $C_R$  باشد، آنگاه

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n! M_R}{R^n} \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (1)$$

نابرابری (۱) را نابرابری کوشی می‌نامند و نتیجه بلافصل رابطه زیر است

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{n+1}} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

که همان رابطه (۵) بخش ۴۸ است که شکل ظاهری آن کمی تغییر یافته است. با استفاده از



شکل ۶۷

نابرابری (۱) بخش ۴۱، کرانهای بالایی برای قدر مطلق انتگرالهای روی مسیر به دست می‌آوریم و نتیجه می‌گیریم که

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!}{2\pi} \cdot \frac{M_R}{R^{n+1}} 2\pi R \quad (n = 1, 2, \dots),$$

که در آن  $M_R$  همان عددی است که در حکم لم معروفی شد. البته این نابرابری همان نابرابری (۱) لم است.

با استفاده از این لم می‌توان نشان داد که هیچ تابع تامی، جز تابع ثابت، در صفحه مختلط کراندار نیست. اولین قضیه ما در اینجا که موسوم به قضیه لیوویل است، این حکم را به صورتی با انک اختلاف بیان می‌کند.

**قضیه ۱.** اگر  $f$  تابعی تام و در صفحه مختلط کراندار باشد، آن‌گاه  $(z) f$  در تمامی صفحه ثابت است.

برای شروع به اثبات، فرض می‌کنیم  $f$  به صورتی باشد که در قضیه آمده است و توجه می‌کنیم که چون  $f$  تام است، نابرابری کوشی (۱) با  $n = 1$  برای هر انتخاب  $z$  و  $R$  برقرار است:

$$|f'(z_0)| \leq \frac{M_R}{R}. \quad (2)$$

بنابر شرط کرانداری در قضیه، عددی ثابت و نامنفی مانند  $M$  هست که به ازای هر  $z$  داریم  $|f(z)| < M$  و چون عدد ثابت  $M_R$  در نابرابری (۲) همیشه مساوی یا کوچکتر از  $M$  است، نتیجه می‌شود

$$|f'(z_0)| \leq \frac{M}{R}, \quad (3)$$

که در آن  $z$  نقطه‌ای مشخص و  $R$  به دلخواه بزرگ است. حال عدد  $M$  در نابرابری (۳) از مقدار  $R$  اختیار شده مستقل است. در نتیجه آن نابرابری فقط وقتی می‌تواند برای مقادیر به دلخواه بزرگ  $R$  برقرار باشد که  $|f'(z_0)| = 0$ . چون انتخاب  $z$  دلخواه بود در نتیجه در هر نقطه از صفحه مختلط  $|f'(z)| = 0$ . در نتیجه، با توجه به قضیه بخش ۲۳،  $f$  تابعی ثابت است. قضیه زیر که به قضیه اساسی جبر مشهور است به آسانی از قضیه لیوویل نتیجه می‌شود.

**قضیه ۲.** هر چند جمله‌ی

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n \quad (a_n \neq 0)$$

از درجه  $n \geq 1$  حداقل یک صفر دارد. یعنی حداقل یک نقطه  $z$  موجود است به قسمی که  $P(z_0) = 0$ .

قضیه را به برهان خلف ثابت می‌کنیم. فرض کنید که  $P(z)$  به ازای هیچ مقدار  $z$  صفر نباشد. پس بهوضوح تابع

$$f(z) = \frac{1}{P(z)}$$

تام است و نیز در صفحهٔ مختلط کراندار است.

برای اثبات کرانداربودن آن، ابتدا می‌نویسیم

$$w = \frac{a_0}{z^n} + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \frac{a_2}{z^{n-2}} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{z}, \quad (4)$$

بنابراین،  $P(z) = (a_n + w)z^n$ . سپس ملاحظه می‌کنیم که می‌توان عدد مثبت به قدر کافی بزرگی مانند  $R$  یافت به طوری که اگر  $|z| \geq R$  آنگاه قدر مطلق هر یک از خارج قسمتهای موجود در عبارت (4) از عدد  $|a_n|/(2n)$  کوچکتر باشد. با استفاده از نابرابری مثلثی تعیین یافته برای عدد مختلط، نتیجه می‌گیریم که برای چنین مقادیری از  $z$  داریم  $|a_n|/2 < |w|$ . در نتیجه اگر

$$|z| \geq R$$

$$|a_n + w| \geq ||a_n| - |w|| > \frac{|a_n|}{2};$$

و بنابراین می‌توانیم بنویسیم

$$|z| \geq R \quad \text{هرگاه} \quad |P(z)| = |a_n + w||z^n| > \frac{|a_n|}{2}|z|^n \geq \frac{|a_n|}{2}R^n \quad (5)$$

در این صورت بهوضوح داریم

$$|z| > R \quad \text{هرگاه} \quad |f(z)| = \frac{1}{|P(z)|} < \frac{2}{|a_n|R^n}$$

بنابراین  $f$  در ناحیهٔ خارج قرص  $R \leq |z|$  کراندار است. اما  $f$  در آن قرص بسته، پیوسته و لذا در آن کراندار نیز هست. در نتیجه  $f$  در تمام صفحهٔ کراندار است.

حال از قضیهٔ لیوولیل نتیجه می‌گیریم که  $(z)f$  و در نتیجه  $(z)P(z)$  ثابت است. اما (4) ثابت نیست و به تناقض رسیده‌ایم.\*

---

\* برای یک برهان جالب قضیهٔ اساسی با استفاده از قضیهٔ کوشی-گورسا مقالهٔ زیر را ببینید  
R. P. Boas, Jr., Amer. Math. Monthly, Vol. 71, No. 2, p. 180, 1964.

## ۱۰. اصل ماکسیمم قدرمطلق

بنابر قضیه اساسی، هر چندجمله‌یی  $P(z)$  از درجه  $n$  ( $n \geq 1$ ) را می‌توان به صورت حاصلضرب عوامل خطی بیان کرد:

$$P(z) = c(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n) \quad (6)$$

که  $c$  و  $z_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) اعداد مختلط ثابتی هستند. به بیان صریحت، این قضیه تضمین می‌کند که  $P(z)$  صفری مانند  $z$  دارد. پس بنابر تمرین ۱۰، بخش ۵۰، داریم

$$P(z) = (z - z_1)Q_1(z),$$

که  $Q_1(z)$  یک چندجمله‌یی از درجه  $1 - n$  است. با بهکار بردن همین استدلال برای  $Q_1(z)$  معلوم می‌شود عددی مانند  $z_2$  هست به طوری که

$$P(z) = (z - z_1)(z - z_2)Q_2(z)$$

که  $Q_2(z)$  یک چندجمله‌یی از درجه  $2 - n$  است. با ادامه این روش، به فرمول (۶) می‌رسیم. البته بعضی از ثابت‌های  $z_k$  در فرمول (۶)، ممکن است بیش از یک بار ظاهر شوند و واضح است که  $P(z)$  نمی‌تواند بیش از  $n$  صفر متمایز داشته باشد.

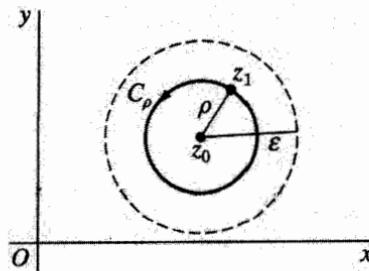
## ۵۰. اصل ماکسیمم قدرمطلق

در این بخش قضیه مهمی در مورد مقادیر ماکسیمم قدرمطلق‌های توابع تحلیلی به دست می‌آوریم. با یک لم شروع می‌کنیم.

لم. فرض کنید  $f(z)$  در سراسر همسایگی  $\varepsilon < |z - z_0|$  از نقطه  $z_0$  تحلیلی باشد. اگر بهازی هر  $z$  در آن همسایگی  $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ ، آنگاه  $f(z)$  در سراسر آن همسایگی دارای مقدار ثابت  $(z_0) f(z_0)$  است.

برای اثبات لم، فرض کنیم  $f$  در شرایط مذکور صدق کند و  $z_0$  نقطه دلخواهی غیر از  $z_0$  در آن همسایگی مفروض باشد. سپس  $\rho$  را فاصله بین  $z_0$  و  $z_1$  می‌گیریم. اگر  $C_\rho$  معروف دایره  $|z - z_0| = \rho$  در جهت مثبت باشد که مرکز آن در  $z_0$  است و از  $z_1$  می‌گذرد (شکل ۶۸)، آنگاه بنابر فرمول انتگرال کوشی،

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho} \frac{f(z) dz}{z - z_0} \quad (1)$$



شکل ۶۸

و با استفاده از نمایش پارامتری

$$z = z_0 + \rho e^{i\theta} \quad (0^\circ \leq \theta \leq 2\pi)$$

برای  $C_\rho$  می‌توان رابطه (۱) را به صورت زیر نوشت

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + \rho e^{i\theta}) d\theta. \quad (2)$$

فرمول (۲) نشان می‌دهد که مقدار تابع در مرکز دایره‌بی که تابع در درون و روی آن تحلیلی است، میانگین عددی مقادیرش بر آن دایره است. این نتیجه را معمولاً قضیه مقدار میانگین گاوس<sup>۱</sup> می‌نامند.

بنابر فرمول (۲)، نابرابری

$$|f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + \rho e^{i\theta})| d\theta \quad (3)$$

را به دست می‌آوریم. از طرف دیگر، چون

$$|f(z_0 + \rho e^{i\theta})| \leq |f(z_0)| \quad (0^\circ \leq \theta \leq 2\pi) \quad (4)$$

در می‌یابیم که

$$\int_0^{2\pi} |f(z_0 + \rho e^{i\theta})| d\theta \leq \int_0^{2\pi} |f(z_0)| d\theta = 2\pi |f(z_0)|.$$

در نتیجه

$$|f(z_0)| \geq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + \rho e^{i\theta})| d\theta. \quad (5)$$

حال از نابرابریهای (۳) و (۵) بدینهی است که

$$|f(z_0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + \rho e^{i\theta})| d\theta$$

یا

$$\int_0^{2\pi} [|f(z_0)| - |f(z_0 + \rho e^{i\theta})|] d\theta = 0.$$

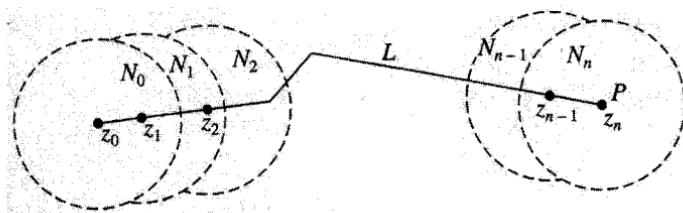
انتگرالده انتگرال آخرب، تابع پیوسته‌ای از متغیر  $\theta$  است و بنابر شرط (۴) روی تمام بازه  $2\pi \leq \theta \leq 0$  مساوی یا بزرگتر از صفر است. چون مقدار انتگرال صفر است پس انتگرالده باید متعدد با صفر باشد. یعنی

$$(6) \quad |f(z_0 + \rho e^{i\theta})| = |f(z_0)| \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi).$$

این تساوی نشان می‌دهد که بهازای هر  $z$  روی دایره  $\rho$  داریم  $|z - z_0| = |f(z)| = |f(z_0)|$ . بالاخره، چون  $z$  نقطه‌ای است که در همسایگی محدود  $\epsilon < |z - z_0| < \rho$  به دلخواه انتخاب شده است، می‌بینیم که در واقع رابطه  $|f(z)| = |f(z_0)|$  بهازای هر نقطه  $z$  واقع روی هر دایره  $\rho = |z - z_0| < \rho$ ، که در آن  $\epsilon < \rho < \rho$  برقرار است. در نتیجه همه جا در همسایگی  $\epsilon < |z - z_0|$  داریم  $|f(z)| = |f(z_0)|$ . اما بنابر تمرین ۷ (ب)، بخش ۲۴، می‌دانیم که اگر قدرمطلق تابعی تحلیلی در یک حوزه ثابت باشد خود تابع در آنجا ثابت است، بنابراین بهازای هر  $z$  در این همسایگی  $f(z) = f(z_0)$  و اثبات لم کامل می‌شود.

با استفاده از این لم قضیه زیر را که به اصل ماکسیمم قدرمطلق مشهور است ثابت می‌کنیم. قضیه. اگر تابع  $f$  در حوزه مفروض  $D$  تحلیلی و غیر ثابت باشد، آنگاه  $|f(z)|$  دارای هیچ مقدار ماکسیممی در  $D$  نیست. یعنی هیچ نقطه‌ای در  $D$  نیست که بهازای هر نقطه  $z$  در  $D$  داشته باشیم  $|f(z_0)| \leq |f(z)|$ .

بنابه فرض  $f$  در  $D$  تحلیلی است، برای اثبات قضیه فرض می‌کنیم که  $|f(z)|$  در نقطه‌ای از  $D$  مانند  $z_0$  دارای مقدار ماکسیمم باشد و سپس نشان می‌دهیم که  $f(z_0)$  باید در سراسر  $D$  ثابت باشد. روش کلی در اینجا شبیه روشی است که در اثبات لم بخش ۲۶ بهکار رفته است. خط شکسته‌ای در  $D$  مانند  $L$  رسم می‌کنیم که از  $z_0$  به نقطه دیگری از  $D$  مانند  $P$  امتداد یافته است. همچنین  $d$  نمایش کوتاهترین فاصله نقاط  $L$  تا مرز  $D$  است. درصورتی که  $D$  تمام صفحه باشد،  $d$  را می‌توان هر مقدار مثبتی گرفت. حال ملاحظه می‌کنیم که دنباله متناهی از نقاط مانند



شکل ۶۹

روی  $L$  وجود دارد به طوری که  $z_n$  بر  $P$  منطبق است و

$$|z_k - z_{k-1}| < d \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

سپس دنباله‌ای متناهی از همسایگیها مانند (شکل ۶۹)

$$N_0, N_1, N_2, \dots, N_{n-1}, N_n,$$

می‌سازیم، به قسمی که هر همسایگی  $N_k$  به مرکز  $z_k$  و شعاع  $d$  باشد. توجه کنید که این همسایگیها همگی مشمول در  $D$  هستند و هر  $z_k$  مرکز همسایگی  $N_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) در همسایگی  $N_{k-1}$  واقع است.

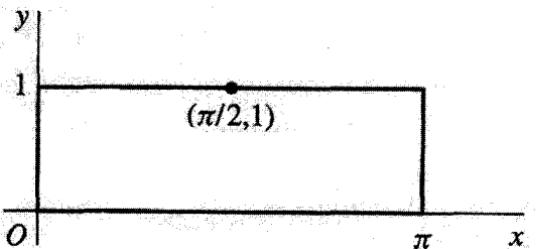
چون فرض کرده بودیم که  $|f(z)|$  در  $\mathbb{D}$  مقدار ماکسیمم خود در  $D$  را گرفته است، در آن نقطه مقدار ماکسیمم خود در  $N_0$  را نیز می‌گیرد. پس بنابراین قبل  $f(z)$  در سراسر  $N_0$  دارای مقدار ثابت  $f(z_0) = f(z_1) = \dots = f(z_n)$  است. به خصوص در نتیجه به ازای هر نقطه  $z$  در  $N_1$  داریم  $|f(z)| \leq |f(z_1)|$  و مجدداً می‌توان از لم قبیل استفاده کرد، این دفعه نتیجه می‌گیریم که اگر  $z$  در  $N_1$  باشد

$$f(z) = f(z_1) = f(z_0).$$

چون  $z_2$  در  $N_1$  است پس  $f(z_2) = f(z_0) = f(z_1)$ . بنابراین اگر  $z$  در  $N_2$  باشد،  $|f(z)| \leq |f(z_2)|$ . و بار دیگر می‌توان لم را به کار برد نشان داد که اگر  $z$  در  $N_2$  باشد

$$f(z) = f(z_2) = f(z_0).$$

با ادامه این روش، سرانجام به همسایگی  $N_n$  و به این واقعیت می‌رسیم که  $f(z_n) = f(z_0)$ .



شکل ۷۰

چون  $z_n$  منطبق بر  $P$  بود که نقطه دلخواهی در  $D$  غیر از  $z$  است نتیجه می‌گیریم که بهازای هر  $z$  در  $D$  داریم  $f(z) = f(z_0)$ . از آنجایی که ثابت شد  $f(z)$  در سراسر  $D$  ثابت است، قضیه ثابت می‌شود.

اگر تابع  $f$  که در هر نقطه داخلی ناحیه بسته و کراندار  $R$  تحلیلی است در سراسر  $R$  نیز پیوسته باشد، تابع پیوسته  $|f(z)|$  دارای مقدار ماکسیممی در  $R$  است (بخش ۱۷). یعنی، عدد نامنفی و ثابتی مانند  $M$  هست که بهازای هر نقطه  $z$  در  $R$   $|f(z)| \leq M$  و حداقل برای یکی از این نقاط برابری برقرار است. اگر  $f$  تابع ثابتی باشد آنگاه بهازای هر  $z$  در  $R$  داریم  $|f(z)| = M$ . ولی اگر  $f(z)$  ثابت نباشد بنابر اصل ماکسیمم قدرمطلق بهازای هر نقطه  $z$  در داخل  $R$ ، داریم  $|f(z)| \neq M$ . بدین ترتیب به نتیجه مهمی از اصل ماکسیمم قدرمطلق می‌رسیم.

فرع. فرض کنید تابع  $f$  در ناحیه بسته و کراندار  $R$  پیوسته و در داخل  $R$  تحلیلی و غیرثابت باشد. در این صورت مقدار ماکسیمم  $|f(z)|$  در  $R$ ، که همیشه قابل حصول است، در نقطه‌ای از مرز  $R$  به دست می‌آید و هیچ‌گاه در داخل آن رخ نمی‌دهد.

مثال. فرض کنید  $R$  نمایش ناحیه مستطیلی  $\pi \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 0$  باشد. بنابر نتیجه فوق قدرمطلق تابع تام  $f(z) = \sin z$  در این محدودیت مقدار ماکسیممی است که جایی در مرز آن است و نه در داخل  $R$ . این مطلب را می‌توان مستقیماً با نوشتن (بخش ۳۳ را ببینید).

$$|f(z)| = \sqrt{\sin^2 x + \sinh^2 y}$$

و با توجه به این نکته تحقیق کرد که در  $R$  تابع  $x = \pi/2$  وقتی بیشترین مقدار را دارد که  $y = 0$  و تابع صعودی  $y = \sinh^2 y$  وقتی بیشترین مقدار را دارد که  $x = 1$ . در نتیجه مقدار ماکسیمم  $|f(z)|$  در نقطه مرزی  $(\pi/2, 0)$  رخ نمی‌دهد و نه در هیچ نقطه دیگری از  $R$  (شکل ۷۰).

در صورتی که تابع  $f$  این نتیجه را به صورت  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  بنویسیم، تابع مولفه‌بی  $u(x, y)$  نیز در  $R$  دارای مقدار ماکسیممی است که روی مرز  $R$  گرفته می‌شود و نه هیچ‌گاه در داخل  $R$  که در آن همساز است (بخش ۲۵). زیرا تابع مركب  $[f(z)] = \exp[f(z)]$  در  $|g(z)| = \exp[u(x, y)]$  پیوسته و در داخل آن تحلیلی و غیرثابت است. در نتیجه قدرمطلق آن  $|f(z)| = \exp[u(x, y)]$  که در  $R$  پیوسته است باید مقدار ماکسیمم خود در  $R$  را روی مرز اختیار کند. بنابر صعودی بودن تابع نمایی، مقدار ماکسیمم  $u(x, y)$  نیز روی مرز گرفته می‌شود. ویرگیهای مقادیر مینیمم  $|z|$  و  $u(x, y)$  در تمرینها بررسی شده‌اند.

### تمرینها

- فرض کنید  $f$  تابع تامی است که به‌ازای هر  $z$  داریم  $|f(z)| \leq A|z|$ ، که در آن  $A$  عددی ثابت و مثبت است. نشان دهید که  $f(z) = a_1 z$  که در آن  $a_1$  عدد مختلط ثابتی است. راهنمایی: با استفاده از نابرابری کوشی (بخش ۴۹) نشان دهید که مشتق دوم  $f''(z)$  در همه نقاط صفحه مساوی صفر است. توجه کنید که  $M_R$  در نابرابری کوشی کوچکتر از  $A(|z| + R)$  با مساوی با آن است.
- فرض کنید  $f$  تام و تابع همساز  $[f(z)] = \operatorname{Re}[f(z)] + i\operatorname{Im}[f(z)]$  دارای کران بالا باشد، یعنی به‌ازای هر نقطه  $(x, y)$  از صفحه  $xy$  داشته باشیم  $|f(x, y)| \leq u$ . نشان دهید که  $u(x, y)$  باید در سراسر صفحه ثابت باشد.

راهنمایی: قضیه لیوپول (بخش ۴۹) را برای تابع  $[f(z)] = \exp[f(z)]$  به کار برد.

- نشان دهید برای  $R$  به قدر کافی بزرگ، چندجمله‌بی  $P(z)$  در قضیه ۲، بخش ۴۹، در نابرابری زیر صدق می‌کند:

$$\text{اگر } |z| \geq R \quad \text{آنگاه} \quad |P(z)| < 2|a_n||z|^n.$$

[با اولین نابرابری از نابرابریهای (۵) بخش ۴۹ مقایسه کنید.]

- راهنمایی: ملاحظه کنید که عدد مثبتی مانند  $R$  هست به قسمی که اگر  $|z| \geq R$  قدرمطلق هر یک از خارج قسمتهای موجود در عبارت  $(4)$ ، بخش ۴۹، از  $|a_n|/n$  کوچکتر است.
- فرض کنید تابع  $f$  در ناحیه بسته و کراندار  $R$  پیوسته و در سراسر داخل  $R$  تحلیلی و غیرثابت باشد. با فرض اینکه همه جا در  $R$  داشته باشیم  $f(z) \neq f(0)$ ، ثابت کنید  $|f(z)|$  در  $R$  دارای مقدار مینیممی مانند  $m$  است که بر مرز  $R$  گرفته می‌شود و هیچ‌گاه در داخل  $R$  گرفته نمی‌شود. این کار را با استفاده از نتیجه نظیر برای مقدار ماکسیمم (بخش ۵۰) تابع  $g(z) = 1/f(z)$  انجام دهید.

۵. با استفاده از تابع  $f(z) = z$  نشان دهید که در تمرین ۴، شرط  $f(z) \neq 0$  در هر نقطه  $R$  برای به دست آوردن نتیجه آن تمرین لازم است. یعنی نشان دهید اگر مینیمم تابع صفر باشد، آنگاه  $|f(z)|$  می‌تواند در یک نقطه داخلی به مقدار مینیمم خود برسد.

۶. تابع  $(z+1)f(z) = z^2$  و ناحیه مسئلی بسته  $R$  با روئوس واقع در نقاط  $z = 0, z = 2, z = i$  را در نظر بگیرید. نقاطی در  $R$  پیدا کنید که  $|f(z)|$  در آنها دارای مقادیر ماکسیم و مینیمم باشد، بدین ترتیب نتایج بخش ۵ و تمرین ۴ را تشریح نمایید.  
راهنمایی:  $|f(z)|$  را به عنوان مربع فاصله بین  $z$  و  $-1$  تعبیر کنید.

. $z = 0$  جواب:

۷. فرض کنید  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  در ناحیه بسته و کراندار  $R$  پیوسته و در داخل  $R$  تحلیلی و غیرثابت باشد. نشان دهید که تابع  $u(x, y)$  در  $R$  دارای مقدار مینیممی است که آن را روی مرز  $R$  اختیار می‌کند و هیچ‌گاه در داخل  $R$  این مقدار مینیمم را ندارد (تمرین ۴ را ببینید).

۸. فرض کنید  $f(z) = e^z$  تابع  $R$  و ناحیه مستطیلی شکل  $1 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi$  باشد. با پیدا کردن نقاطی در  $R$  که تابع مؤلفه‌یی  $u(x, y) = \operatorname{Re}[f(z)]$  در آنها ماکسیم یا مینیمم می‌شود نتایج بخش ۵ و تمرین ۷ را تشریح نمایید.

. $z = 1 + \pi i$  جواب:

۹. فرض کنید تابع  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  در ناحیه بسته و کراندار  $R$  پیوسته و در داخل  $R$  تحلیلی و غیرثابت باشد. نشان دهید که تابع مؤلفه‌یی  $v(x, y)$  در  $R$  دارای مقادیر ماکسیم و مینیممی است که روی مرز  $R$  به آنها می‌رسد و هیچ‌گاه در داخل  $R$  که در آن همساز است به این مقادیر نمی‌رسد.

راهنمایی: نتایج بخش ۵ و تمرین ۷ را برای تابع  $g(z) = -if(z)$  بدکار بردید.

۱۰. فرض کنید  $\mathbb{C}$  صفری از چندجمله‌یی درجه  $n \geq 1$  باشد. به روش زیر نشان دهید که

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n \quad (a_n \neq 0)$$

باشد. به روش زیر نشان دهید که

$$P(z) = (z - z_0)Q(z),$$

که در آن  $Q(z)$  یک چندجمله‌یی از درجه  $1 - n$  است.  
(الف) تحقیق کنید که

$$z^k - z_0^k = (z - z_0)(z^{k-1} + z^{k-2}z_0 + \cdots + zz_0^{k-2} + z_0^{k-1}) \quad (k = 2, 3, \dots).$$

(ب) با استفاده از تجزیه قسمت (الف) نشان دهید که

$$P(z) - P(z_0) = (z - z_0)Q(z)$$

که در آن  $Q(z)$  یک چندجمله‌ای از درجه  $1 - n$  است و از این رابطه نتیجه مطلوب را به دست آورید.

# ۵

## سریها

این فصل عمدتاً به نمایش‌های سری توابع تحلیلی اختصاص داده شده است. قضایایی ارائه می‌دهیم که وجود چنین نمایش‌هایی را تضمین نماید و تسهیلاتی در بررسی سریها فراهم می‌آوریم.

### ۵۱. همگرایی دنباله‌ها

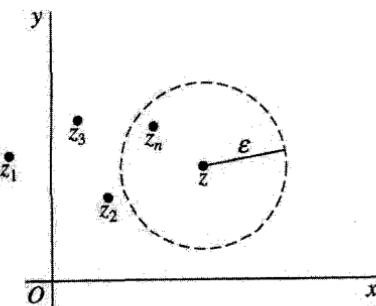
دنباله نامتناهی

$$z_1, z_2, \dots, z_n, \dots \quad (1)$$

از اعداد مختلط دارای حد  $z$  است اگر به ازای هر عدد مثبت  $\varepsilon$ ، عدد صحیح و مثبتی مانند  $n$  موجود باشد به قسمی که

$$n > n_0 \quad \text{هرگاه} \quad |z_n - z| < \varepsilon \quad (2)$$

از نظر هندسی، این بدان معنی است که به ازای مقادیر به قدر کافی بزرگ  $n$  نقاط  $z_n$  در ع-همسايگی  $z$  واقع‌اند (شکل ۷۱). چون می‌توانیم  $\varepsilon$  را هر اندازه کوچک بگیریم، در نتیجه  $z_n$  ها وقتی اندیس آنها افزایش یابد به دلخواه به  $z$  نزدیک می‌شوند. توجه کنید که مقدار  $n$  مورد لزوم عموماً به مقدار  $\varepsilon$  وابسته است.



شکل ۷۱

دنباله  $(z_n)$  می‌تواند خداکثر یک حد داشته باشد. یعنی حد  $z$  در صورت وجود یکتاست (تمرین ۵، بخش ۵۲). در صورتی که این حد موجود باشد گوییم دنباله به  $z$  همگراست و می‌نویسیم

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z. \quad (3)$$

اگر دنباله دارای حد نباشد و اگر است. قضیه. فرض کنید  $z = x + iy$  و  $z_n = x_n + iy_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ). در این صورت

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z \quad (4)$$

اگر و فقط اگر

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y \quad \text{و} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \quad (5)$$

برای اثبات این قضیه ابتدا فرض می‌کنیم شرایط (5) برقرار باشند و شرط (4) را از آن نتیجه می‌گیریم. بنابر شرایط (5) به ازای هر عدد مثبت  $\epsilon$  اعداد صحیح و مثبتی مانند  $n_1$  و  $n_2$  هستند که

$$n > n_1 \quad \text{هرگاه} \quad |x_n - x| < \frac{\epsilon}{4}$$

و

$$n > n_2 \quad \text{هرگاه} \quad |y_n - y| < \frac{\epsilon}{2}$$

بنابراین اگر  $n$  عدد بزرگتر بین دو عدد  $n_1$  و  $n_2$  باشد، آنگاه

$$n > n_0 \quad \text{هرگاه} \quad |y_n - y| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{و} \quad |x_n - x| < \frac{\epsilon}{2}$$

$$|(x_n + iy_n) - (x + iy)| = |(x_n - x) + i(y_n - y)| \leq |x_n - x| + |y_n - y|,$$

پس

$$n > n_0 \quad \text{هرگاه} \quad |z_n - z| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

در نتیجه شرط (۴) برقرار است.

برعکس، اگر با شرط (۴) شروع کنیم، می‌دانیم که بهارای هر عدد مثبت  $\varepsilon$  عدد صحیح و مثبتی مانند  $n_0$  هست که

$$n > n_0 \quad \text{هرگاه} \quad |(x_n + iy_n) - (x + iy)| < \varepsilon$$

اما

$$|x_n - x| \leq |(x_n - x) + i(y_n - y)| = |(x_n + iy_n) - (x + iy)|$$

و

$$|y_n - y| \leq |(x_n - x) + i(y_n - y)| = |(x_n + iy_n) - (x + iy)|;$$

و در نتیجه

$$n > n_0 \quad \text{هرگاه} \quad |y_n - y| < \varepsilon \quad \text{و} \quad |x_n - x| < \varepsilon$$

یعنی، شرایط (۵) برقرارند.

توجه کنید که با استفاده این قضیه می‌توان نوشت

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + iy_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + i \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$$

هرگاه هر دو حد سمت راست یا حد سمت چپ موجود باشد.  
مثال. دنباله

$$z_n = \frac{1}{n^3} + i \quad (n = 1, 2, \dots)$$

به  $\infty$  همگراست زیرا

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n^3} + i \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} + i \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 0 + i \cdot 1 = i.$$

با نوشتن

$$|z_n - i| = \frac{1}{n^3},$$

می‌توان با استفاده از تعریف (۲) این نتیجه را به دست آورد. به عبارت دقیق‌تر، به ازای هر عدد مثبت  $\varepsilon$

$$n > \frac{1}{\sqrt[3]{\varepsilon}} \quad \text{هرگاه} \quad |z_n - i| < \varepsilon$$

## ۵۲. همگرایی سریها

سری نامتناهی

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n + \cdots \quad (1)$$

از اعداد مختلط به مجموع  $S$  همگراست اگر دنباله

$$S_N = \sum_{n=1}^N z_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_N \quad (N = 1, 2, \dots) \quad (2)$$

از مجموعهای جزئی به  $S$  همگرا باشد. در این صورت می‌نویسیم

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S.$$

توجه کنید که چون هر دنباله حداکثر دارای یک حد است، هر سری حداکثر یک مجموع دارد. در صورتی که سری همگرا نباشد، گوییم واگراست.

قضیه. فرض کنید  $S = X + iY$  ( $n = 1, 2, \dots$ )  $z_n = x_n + iy_n$ . در این صورت

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S \quad (3)$$

اگر و فقط اگر

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n = Y \quad \text{و} \quad \sum_{n=1}^{\infty} x_n = X \quad (4)$$

البته با استناد به این قضیه می‌توان نوشت

$$\sum_{n=1}^{\infty} (x_n + iy_n) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n + i \sum_{n=1}^{\infty} y_n$$

هرگاه بدانیم که هر دو سری سمت راست یا سری سمت چپ همگرا هستند، برای اثبات قضیه ابتدا مجموعهای جزئی (۲) را به صورت زیر می‌نویسیم

$$S_N = X_N + iY_N, \quad (5)$$

که در آن

$$Y_N = \sum_{n=1}^N y_n \quad \text{و} \quad X_N = \sum_{n=1}^N x_n$$

حال شرط (۳) برقرار است اگر و فقط اگر

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N = S; \quad (6)$$

و با توجه به رابطه (۵) و قضیه مربوط به دنباله‌ها در بخش ۵۱ حد (۶) برقرار است اگر و فقط اگر

$$\lim_{N \rightarrow \infty} Y_N = Y \quad \text{و} \quad \lim_{N \rightarrow \infty} X_N = X \quad (7)$$

بنابراین شرایط (۷) مستلزم شرط (۳) آن و برعکس. چون  $X_N$  و  $Y_N$  مجموعهای جزئی سریهای (۴) هستند، قضیه ثابت می‌شود.

با یادآوری این نکته از حسابان که جملة  $\lambda m$  یک سری همگرا از اعداد حقیقی، وقتی  $n$  به بی‌نهایت میل کند به صفر میل می‌کند، بنابر قضایای این بخش و بخش قبل بی‌درنگ می‌بینیم که این حکم برای سریهای همگرا از اعداد مختلط برقرار است. یعنی یک شرط لازم برای همگرایی سری (۱) این است که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0. \quad (8)$$

بنابراین جملات یک سری همگرا از اعداد مختلط کراندار هستند، به عبارت دقیقتر عدد ثابت مشتبی مانند  $M$  هست که به ازای هر عدد صحیح و مشتبی  $n$  داریم  $|z_n| \leq M$ . (تمرین ۹ را ببینید).

برای ویژگی مهم دیگری از سریهای اعداد مختلط، فرض می‌کنیم که سری (۱) مطلقاً همگرا باشد. یعنی، اگر  $z_n = x_n + iy_n$ ، سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{x_n^2 + y_n^2}$$

از اعداد حقیقی  $\sqrt{x_n^2 + y_n^2}$  همگرا باشد. چون

$$|y_n| \leq \sqrt{x_n^2 + y_n^2} \quad \text{و} \quad |x_n| \leq \sqrt{x_n^2 + y_n^2}$$

از آزمون مقایسه در حسابان می‌دانیم که دو سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} |y_n| \quad \text{و} \quad \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$$

همگرا هستند. به علاوه چون همگرایی مطلق یک سری از اعداد حقیقی مستلزم همگرایی خود سری است، در نتیجه اعداد حقیقی مانند  $X$  و  $Y$  موجودند به قسمی که شرایط (۴) برقرارند. پس بنابر قضیه این بخش سری (۱) همگراست. در نتیجه، همگرایی مطلق یک سری از اعداد مختلط مستلزم همگرایی آن سری است.

در اثبات این واقعیت که مجموع سری عدد مفروض  $S$  است، اغلب مناسب است که باقیماندهٔ بعد از  $N$  جمله را تعریف کنیم:

$$\rho_N = S - S_N. \quad (۹)$$

بنابراین،  $S = S_N + \rho_N$  و چون  $|S_N - S| = |\rho_N|$  می‌بینیم که سری به عدد همگراست اگر و فقط اگر دنبالهٔ باقیمانده‌ها به  $0$  همگرا باشد. در بحث از سریهای توانی به طور قابل ملاحظه‌ای از این موضوع استفاده خواهیم کرد. سریهای توانی سریهایی هستند به صورت

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots + a_n(z - z_0)^n + \cdots$$

که در آن  $z$  و ضرایب  $a_n$  اعداد مختلط ثابتی هستند و  $z$  می‌تواند هر نقطه در ناحیه معینی، که شامل  $z$  است، باشد. در چنین سریهایی که شامل یک متغیر  $z$  هستند مجموع، مجموعهای جزئی و باقیمانده‌ها را، به ترتیب، با  $(z), S(z), S_N(z)$  و  $\rho_N(z)$  نمایش خواهیم داد.

مثال. به کمک باقیمانده‌ها، به سادگی می‌توان تحقیق کرد که

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \quad \text{آنگاه } |z| < 1 \quad (10)$$

کافی است اتحاد زیر را به بیان آوریم (تمرین ۱۰، بخش ۷)

$$1 + z + z^2 + \cdots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} \quad (z \neq 1)$$

تا بتوانیم مجموعهای جزئی

$$S_N(z) = \sum_{n=0}^{N-1} z^n = 1 + z + \cdots + z^{N-1} \quad (z \neq 1)$$

را به صورت زیر بنویسیم

$$S_N(z) = \frac{1 - z^N}{1 - z}.$$

اگر

$$S(z) = \frac{1}{1 - z},$$

آنگاه

$$\rho_N(z) = S(z) - S_N(z) = \frac{z^N}{1 - z} \quad (z \neq 1).$$

در نتیجه

$$|\rho_N(z)| = \frac{|z|^N}{|1 - z|},$$

واز این رابطه نتیجه می‌شود که اگر  $|z| < 1$ , آنگاه  $\rho_N(z)$  دنباله باقیمانده‌ها به صفر همگراست  
اما اگر  $|z| \geq 1$  به صفر همگرا نیستند. بنابراین فرمول مجموعهایی (۱۰) ثابت شده است.

تمرینها

۱. با دو روش نشان دهید که دنباله زیر به ۲ - همگراست

$$z_n = -2 + i \frac{(-1)^n}{n^2} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

۲. فرض کنید  $r_n$  نمایش قدر مطلقها و  $\Theta_n$  مقادیر اصلی آوندهای اعداد مختلط  $z_n$  در تمرین ۱ باشند. نشان دهید که دنباله  $(r_n, \Theta_n)$  همگراست اما دنباله  $(\Theta_n)$  همگرا نیست.

۳. نشان دهید که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = |z| \quad \text{آنگاه} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z \quad \text{اگر}$$

۴. در فرمول مجموعیابی مثال بخش ۵۲ قرار دهید  $z = re^{i\theta}$  که در آن  $1 < r < \infty$ . سپس به کمک قضیه بخش ۵۲ نشان دهید که اگر  $1 < r < \infty$ .

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n \sin n\theta = \frac{r \sin \theta}{1 - 2r \cos \theta + r^2} \quad \text{و} \quad \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n\theta = \frac{r \cos \theta - r^2}{1 - 2r \cos \theta + r^2}$$

(توجه کنید که این فرمولها در حالت  $r = \infty$  برقرارند).

۵. با استفاده از یکتایی حدود دنباله‌های همگرای اعداد حقیقی نشان دهید که حد یک دنباله همگرا از اعداد مختلط یکتاست.

۶. نشان دهید که

$$\sum_{n=1}^{\infty} \overline{z_n} = \overline{S} \quad \text{آنگاه} \quad \sum_{n=1}^{\infty} z_n = S \quad \text{اگر}$$

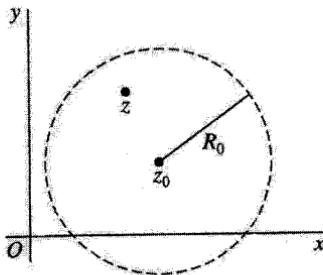
۷. فرض کنید  $c$  عدد مختلط دلخواهی باشد و نشان دهید که

$$\sum_{n=1}^{\infty} cz_n = cS \quad \text{آنگاه} \quad \sum_{n=1}^{\infty} z_n = S \quad \text{اگر}$$

۸. با یادآوری نتیجه نظیر برای سریهای اعداد حقیقی و استناد به قضیه بخش ۵۲، نشان دهید که

$$\sum_{n=1}^{\infty} (z_n + w_n) = S + T \quad \text{آنگاه} \quad \sum_{n=1}^{\infty} w_n = T \quad \text{و} \quad \sum_{n=1}^{\infty} z_n = S \quad \text{اگر}$$

۹. فرض کنید دنباله  $(z_n)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) به عدد  $\infty$  همگرا باشد. نشان دهید که عدد مثبتی مانند  $M$  هست به قسمی که نابرابری  $|z_n| \leq M$  برقرار است. این کار را به هر یک از روش‌های زیر انجام دهید.



شکل ۷۲

(الف) توجه کنید که عدد صحیح مثبتی مانند  $n > n_0$  هست که هرگاه

$$|z_n| = |z + (z_n - z)| < |z| + 1.$$

(ب) بنویسید  $z_n = x_n + iy_n$  و از نظریه دنباله‌های اعداد حقیقی به یاد آورید که بنابر همگرایی  $x_n$  و  $y_n$  اعداد مثبتی مانند  $M_1$  و  $M_2$  وجود دارند که  $|x_n| \leq M_1$  و  $|y_n| \leq M_2$  (۱، ۲، ...).

### ۵۳. سری تیلر<sup>۱</sup>

حال به بررسی قضیه تیلر می‌پردازیم که یکی از مهمترین قضایای این فصل است. قضیه. فرض کنید  $f$  در سراسر قرص باز  $z - z_0 < R_0$  به مرکز  $z_0$  و شعاع  $R_0$  تحلیلی باشد (شکل ۷۲). در این صورت  $f(z)$  دارای نمایش سری توانی

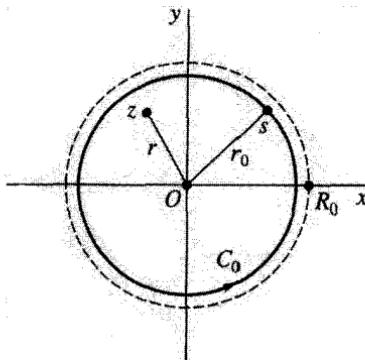
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad (|z - z_0| < R_0) \quad (1)$$

است که در آن

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (2)$$

یعنی هرگاه  $z$  در قرص باز مذکور واقع باشد، سری (۱) به  $f(z)$  همگرایست. این بسط  $f(z)$  به سری تیلر حول نقطه  $z_0$  است. این همان سری تیلر معمولی در حسابان است که برای توابع یک متغیره مختلط جرح و تعدیل شده است. توجه کنید که با قرارداد

$$0! = 1 \quad \text{و} \quad f^{(0)}(z_0) = f(z_0).$$



شکل ۷۳

سری (۱) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$f(z) = f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!}(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \dots \quad (|z - z_0| < R_0). \quad (3)$$

هر تابعی که در نقطه  $z_0$  تحلیلی باشد باید سری تیلری حول نقطه  $z_0$  داشته باشد. زیرا اگر  $f$  در  $z_0$  تحلیلی باشد در یک همسایگی  $z_0$  مانند  $\varepsilon < |z - z_0|$  تحلیلی است (بخش ۲۳) و  $\varepsilon$  به عنوان مقدار  $R_0$  در قضیه تیلر به کار می‌رود. اگر از طرف دیگر  $f$  تام باشد،  $R_0$  را می‌توان به دلخواه بزرگ گرفت و شرط  $|z - z_0| < R_0$ ، به شرط  $\infty < |z - z_0|$  تبدیل می‌شود. در این صورت سری در هر نقطه  $z$  از صفحه متاهی به  $f(z)$  همگراست.

ابتدا قضیه را وقتی  $= z$  ثابت می‌کنیم، در این حالت سری (۱) به سری

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} z^n \quad (|z| < R_0) \quad (4)$$

تبدیل می‌شود و آن را سری مکلورن<sup>۱</sup> می‌نامند. اثبات وقتی  $z$  دلخواه است به صورت نتیجه بالا فصل آن در می‌آید.

برای شروع اثبات نمایش (۴) قرار می‌دهیم  $r = |z|$  و فرض می‌کنیم  $C$  معرف دایره دلخواه  $r_0 = r$  در جهت مثبت باشد که در آن  $r_0 < R_0 < r$  (شکل ۷۳ را ببینید). چون  $f$  در درون و روی دایره  $C$  تحلیلی است و نقطه  $z$  در درون  $C$  واقع است، می‌توان از فرمول انتگرال

1. Maclaurin

کوشی استفاده کرد:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} \frac{f(s)ds}{s-z}. \quad (5)$$

حال عامل  $(s-z)^{-1}$  در این انتگرالده را می‌توان به صورت

$$\frac{1}{s-z} = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{1-(z/s)} \quad (6)$$

نوشت و بنابر مثال بخش ۵۲، می‌دانیم که اگر  $z$  عدد مختلطی غیر از واحد باشد

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{N-1} z^n + \frac{z^N}{1-z}. \quad (7)$$

پس با قرار دادن  $s/z$  به جای  $z$  در فرمول (۷)، می‌توان رابطه (۶) را چنین نوشت

$$\frac{1}{s-z} = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{s^{n+1}} z^n + z^N \frac{1}{(s-z)s^N}. \quad (8)$$

با ضرب کردن هر یک از جملات این تساوی در  $f(s)$  و انتگرالگیری از هر طرف نسبت به  $s$  روی  $C_0$ ، در می‌یابیم که

$$\int_{C_0} \frac{f(s)ds}{s-z} = \sum_{n=0}^{N-1} \int_{C_0} \frac{f(s)ds}{s^{n+1}} z^n + z^N \int_{C_0} \frac{f(s)ds}{(s-z)s^N}.$$

به موجب عبارت (۵) و این واقعیت که (بخش ۴۸)

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} \frac{f(s)ds}{s^{n+1}} = \frac{f^{(n)}(\infty)}{n!} \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

درصورتی که هر یک از جملات رابطه بالا در  $(2\pi i)^{-1}$  ضرب کنیم، نتیجه می‌شود که

$$f(z) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{f^{(n)}(\infty)}{n!} z^n + \rho_N(z), \quad (9)$$

که در آن

$$\rho_N(z) = \frac{z^N}{2\pi i} \int_{C_0} \frac{f(s)ds}{(s-z)s^N}. \quad (10)$$

حال به محض اینکه ثابت کنیم

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \rho_N(z) = 0 \quad (11)$$

نمایش (۱۱) به دست می‌آید. برای انجام این کار، یادآور می‌شویم که  $r = |z|$  و  $r_0$  دارای شعاع است که  $r > r_0$ . در این صورت اگر  $s$  نقطه‌ای روی  $C$  باشد

$$|s - z| \geq ||s| - |z|| = r_0 - r.$$

بنابراین اگر  $M$  نمایش مقدار ماکسیمم  $|f(s)|$  روی  $C$  باشد،

$$|\rho_N(z)| \leq \frac{r^N}{2\pi} \cdot \frac{M}{(r_0 - r)r_0^N} \cdot 2\pi r_0 = \frac{Mr_0}{r_0 - r} \left(\frac{r}{r_0}\right)^N.$$

تا وقتی که  $< 1$   $(r/r_0)$  حد (۱۱) بهوضوح برقرار است.

برای تحقیق برقراری قضیه وقتی مرکز قرص به شعاع  $R_0$  در نقطه دلخواه  $z$  باشد، فرض می‌کنیم  $f$  در قرص  $|z - z_0| < R_0$  تحلیلی باشد و توجه می‌کنیم که تابع مرکب  $(z + z_0)$  باید در قرص  $|z + z_0| < R_0$  تحلیلی باشد. البته این نابرابری آخری درست همان  $|z| < R_0$  است؛ و اگر بنویسیم  $(z + z_0) = g(z)$  تحلیلی بودن  $g$  در قرص  $|z| < R_0$  منضم و وجود بسط سری مکلورن است:

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(z_0)}{n!} z^n \quad (|z| < R_0).$$

یعنی

$$f(z + z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} z^n \quad (|z| < R_0)$$

پس از قراردادن  $z - z_0$  به جای  $z$  در این رابطه و در شرط برقراری آن، بسط سری تیلر مطلوب (۱۱) را خواهیم داشت.

## ۵۴. چند مثال

در صورتی که بدانیم  $f$  در همه نقاط داخل دایره‌یی به مرکز  $z$  تحلیلی است، مطمئن می‌شویم که به ازای هر  $z$  در داخل آن دایره سری تیلر حول  $z$  به  $f(z)$  همگراست، و هیچ آزمونی برای

همگرایی سری لازم نیست. در واقع بنابر قضیهٔ تیلر، این سری در داخل دایره‌یی حول  $z_0$  که شعاع آن برابر است با فاصلهٔ  $|z - z_0|$  تا نزدیکترین نقطهٔ  $\gamma$  که  $f$  در آن تحلیلی نیست، به  $f(z)$  همگرایست. در بخش ۵۹ درخواهیم یافت که این دایره در واقع بزرگترین دایره به مرکز  $z_0$  است که به‌ازای هر  $z$  در داخل آن، سری به  $f(z)$  همگرایست.

همچنین در بخش ۶۰ خواهیم دید که اگر اعداد ثابتی مانند  $a_n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) موجود باشند به قسمی که به‌ازای هر  $z$  در داخل دایره‌یی به مرکز  $z_0$  داشته باشیم

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

آنگاه بدون توجه به نحوهٔ بدست آمدن این اعداد ثابت، این سری توانی سری تیلر  $f$  حول  $z_0$  است. این مطلب موجب می‌شود که اغلب بتوانیم ضرایب  $a_n$  در سری تیلر را به روش‌هایی کارانtere از مراجعةٍ مستقیم به فرمول  $a_n = f^{(n)}(z_0)/n!$  در قضیهٔ تیلر، پیدا کنیم.

در مثال‌های زیر با استفاده از فرمول قضیهٔ تیلر، بسط مکلورن بعضی از توابع نسبتاً ساده را پیدا می‌کنیم و تأکید ما بر این است که با استفاده از این بسطها نمایش‌های دیگر را بیابیم. در مثال‌ها به طور آزادانه از ویژگیهای مورد انتظار سریهای همگرایی، از قبیل ویژگیهایی که درستی آنها در تمرینات ۷ و ۸ بخش ۵۲ ثابت شد، استفاده خواهیم کرد.

مثال ۱. چون تابع  $f(z) = e^z$  تام است، دارای نمایش سری مکلورنی است که به‌ازای هر  $z$  برقرار است. در اینجا  $f(z) = e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$  و چون  $1 = f(0)$  در نتیجه

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad (|z| < \infty). \quad (1)$$

توجه کنید که اگر  $x + iy = z$ ، بسط (1) تبدیل می‌شود به

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (-\infty < x < \infty).$$

تابع تام  $e^{3z}$  نیز دارای بسط سری مکلورنی است. ساده‌ترین راه به‌دست آوردن آن قراردادن  $z$  به جای  $z$  در هر طرف رابطهٔ (1) و ضرب کردن هر جمله رابطه حاصل در  $e^{3z}$  است

$$z^2 e^{3z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!} z^{n+2} \quad (|z| < \infty).$$

بالاخره اگر در اینجا به جای  $n$  عدد  $2 - n$  را قرار دهیم، نتیجه می‌گیریم که

$$z^2 e^{zz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n-2}}{(n-2)!} z^n \quad (|z| < \infty).$$

مثال ۲. با استفاده از بسط (۱) و تعریف (بخش ۳۳)

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

می‌توان سری مکلورن تابع تمام  $f(z) = \sin z$  را به دست آورد. برای ارائه جزئیات به بسط (۱) استناد می‌کنیم و می‌نویسیم

$$\sin z = \frac{1}{2i} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-iz)^n}{n!} \right] = \frac{1}{2i} \sum_{n=0}^{\infty} [1 - (-1)^n] \frac{i^n z^n}{n!} \quad (|z| < \infty).$$

اما اگر  $n$  زوج باشد،  $1 - (-1)^n = 0$  و لذا می‌توان در سری آخر به جای  $n$  عدد  $1 + 2n$  را قرار داد:

$$\sin z = \frac{1}{2i} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ 1 - (-1)^{2n+1} \right] \frac{i^{2n+1} z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (|z| < \infty).$$

از آنجایی که

$$i^{2n+1} = (i^2)^n i = (-1)^n i \quad \text{و} \quad 1 - (-1)^{2n+1} = 2$$

بسط فوق به سری زیر تبدیل می‌شود

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (|z| < \infty). \quad (2)$$

مجاز بودن مشتقگیری جمله به جمله در بخش ۵۹ ثابت خواهد شد. در اینجا با استفاده از این روش از طرفین رابطه (۲) مشتق می‌گیریم و می‌نویسیم

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot \frac{d}{dz} z^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{(2n+1)!} z^{2n}.$$

يعنى

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad (|z| < \infty). \quad (3)$$

مثال ۳. چون  $\sinh z = -i \sin(i z)$  (بخش ۳۴) فقط باید در هر طرف رابطه (۲) به جای  $z$  عدد  $i z$  را قرار دهیم و هر یک از جملات رابطه حاصل را در  $i$ - ضرب کنیم تا بینیم که

$$\sinh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (|z| < \infty). \quad (4)$$

همین طور، از آنجایی که  $\cosh z = \cos(i z)$ ، از بسط (۳) نتیجه می‌شود که

$$\cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad (|z| < \infty). \quad (5)$$

مالحظه می‌کنید که سری تیلر  $\cosh z$  حول نقطه  $z = -2\pi i$  بدین طریق به دست می‌آید که در هر طرف رابطه (۵) به جای  $z$  مقدار  $z + 2\pi i$  را قرار دهید و به یاد آورید که به ازای هر  $z$  داریم

$$\cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z + 2\pi i)^{2n}}{(2n)!} \quad (|z| < \infty).$$

مثال ۴. نمایش سری مکلورن دیگری چنین است

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad (|z| < 1). \quad (6)$$

مشتقات تابع  $f(z) = 1/(1-z)$ ، که در  $z = 1$  تحلیلی نیست، عبارت اند از

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{(1-z)^{n+1}} \quad (n = 0, 1, 2, \dots);$$

و به خصوص  $f^{(n)}(0) = n!$ . توجه کنید که بسط (۶) مجموع سری هندسی نامتناهی را به ما می‌دهد، که در آن  $z$  قدر نسبت سری است:

$$1 + z + z^2 + z^3 + \dots = \frac{1}{1-z} \quad (|z| < 1).$$

این فرمول اساساً همان فرمول مجموعیابی است که به روش دیگری در مثال بخش ۵۲ پیدا کردیم.

اگر در رابطه (۶) و شرط برقراری آن بهجای  $z$  مقدار  $z - 1$  قرار دهیم و توجه کنیم که هرگاه  $|z - 1| < |z|$ ، آنگاه  $1 < |z|$ ، می‌بینیم که

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n \quad (|z| < 1).$$

اگر از طرف دیگر در رابطه (۶) بهجای  $z$  مقدار  $z - 1$  قرار دهیم نمایش سری تیلر زیر را خواهیم داشت

$$\frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n \quad (|z-1| < 1).$$

این شرط برقراری از شرط مربوط به بسط (۶) نتیجه می‌شود زیرا  $|z-1| < |z|$  همان  $1 < |z-1|$  است.

مثال ۵. به عنوان آخرین مثال، تابع

$$f(z) = \frac{1+2z^2}{z^3+z^5} = \frac{1}{z^3} \cdot \frac{2(1+z^2)-1}{1+z^2} = \frac{1}{z^3} \left( 2 - \frac{1}{1+z^2} \right)$$

را به سری شامل توانهای  $z$  بسط می‌دهیم. چون تابع  $f(z)$  در  $z=0$  تحلیلی نیست نمی‌توانیم سری مکلورنی برای آن پیدا کنیم، اما با توجه به بسط (۶) می‌دانیم که

$$\frac{1}{1+z^2} = 1 - z^2 + z^4 - z^6 + z^8 - \dots \quad (|z| < 1).$$

بنابراین، وقتی  $1 < |z| < \infty$

$$f(z) = \frac{1}{z^3} \left( 2 - 1 + z^2 - z^4 + z^6 - z^8 + \dots \right) = \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z} - z + z^3 - z^5 + \dots$$

جملاتی از قبیل  $z^3/1$  و  $z/1$  را توانهای منفی  $z$  می‌نامیم زیرا آنها را می‌توان، به ترتیب،  $-z^3$  و  $-z$  نوشت. نظریه بسطهای شامل توانهای منفی  $z$  در بخش بعد مورد بحث قرار خواهد گرفت.

## تمرینها \*

۱. نمایش سری مکلورن زیر را به دست آورید

$$z \cosh(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{4n+1}}{(2n)!} \quad (|z| < \infty).$$

۲. سری تیلر

$$e^z = e \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{n!} \quad (|z-1| < \infty).$$

برای تابع  $f(z) = e^z$  را به یکی از روش‌های زیر به دست آورید.

(الف) استفاده از  $(1) f^{(n)}(z) = e^{z-1}$  با  $n = 0, 1, 2, \dots$ ؛ (ب) با نوشتند

۳. بسط سری مکلورن تابع زیر را پیدا کنید

$$f(z) = \frac{z}{z^4 + 9} = \frac{z}{9} \cdot \frac{1}{1 + (z^4/9)}.$$

$$\cdot (|z| < \sqrt[4]{9}) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{2n+1}} z^{4n+1} \quad \text{جواب:}$$

۴. نشان دهید اگر  $f(z) = \sin z$ , آنگاه

$$(n = 0, 1, 2, \dots) \quad f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n \quad \text{و} \quad f^{(2n)}(0) = 0$$

بدین ترتیب برهان دیگری برای سری مکلورن  $(2) \sin z$  در بخش ۵۴ ارائه دهید.

۵. به هر یک از روش‌های زیر سری مکلورن  $(3) \cos z$  را برای تابع  $f(z) = \cos z$  مجدداً به دست آورید

(الف) با استفاده از تعریف

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

در بخش ۳۳ و با استفاده از سری مکلورن  $(1) e^z$  برای  $\cos z$  در بخش ۵۴:

(ب) با نشان دادن اینکه

$$(n = 0, 1, 2, \dots) \quad f^{(2n+1)}(0) = 0 \quad \text{و} \quad f^{(2n)}(0) = (-1)^n$$

\* در این تمرینها و تمرینهای بعد که درباره بسطهای سری هستند، توصیه می‌کنیم که خواننده در صورت امکان از نمایش‌های  $(1)$  تا  $(6)$  بخش ۵۴ استفاده کند.

۶. بسط سری مکلورن تابع  $f(z) = \sin(z)$  را بنویسید و بیان کنید چگونه نتیجه می‌شود که  $(n = 0, 1, 2, \dots)$   $f^{(2n+1)}(0) = 0$  و  $f^{(4n)}(0) = 0$ .

۷. نمایش سری تیلر زیر را به دست آورید

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{(1-i)^{n+1}} \quad (|z-i| < \sqrt{2}).$$

راهنمایی: با نوشتن رابطه زیر شروع کنید

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{(1-i)-(z-i)} = \frac{1}{1-i} \cdot \frac{1}{1-(z-i)/(1-i)}.$$

۸. به کمک اتحاد (بخش ۳۳)

$$\cos z = -\sin\left(z - \frac{\pi}{2}\right)$$

تابع  $\cos z$  را به سری تیلر حول نقطه  $z = \pi/2$  بسط دهید.

۹. با استفاده از اتحاد  $\sinh(z + \pi i) = -\sinh z$ ، که در تمرین ۷ (الف)، بخش ۳۴، درستی آن تحقیق شد، و اینکه  $\sinh z$  متناوب و با دوره تناوب  $2\pi i$  است سری تیلر  $\sinh z$  حول نقطه  $z = \pi i$  را بیابید.

$$(|z - \pi i| < \infty) \quad - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - \pi i)^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{جواب:}$$

۱۰. بزرگترین دایره‌بی که به ازای هر  $z$  در درون آن، سری مکلورن تابع  $\tanh z$  به  $z$  همگرا باشد، کدام است؟ اولین دو جمله ناصرف این سری را بنویسید.

۱۱. نشان دهید که هرگاه  $z \neq 0$  داریم

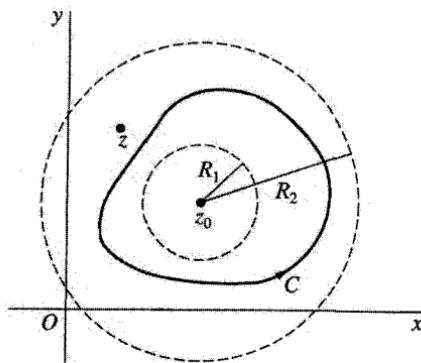
$$\frac{e^z}{z^2} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} + \frac{z}{3!} + \frac{z^2}{4!} + \dots \quad (\text{الف})$$

$$\cdot \frac{\sin(z)}{z^4} = \frac{1}{z^2} - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^6}{5!} - \frac{z^{10}}{7!} + \dots \quad (\text{ب})$$

۱۲. بسطهای زیر را به دست آورید

$$\cdot \frac{\sinh z}{z^2} = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+3)!} \quad (0 < |z| < \infty) \quad (\text{الف})$$

$$\cdot z^3 \cosh\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{z}{2} + z^3 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+2)!} \cdot \frac{1}{z^{2n-1}} \quad (0 < |z| < \infty) \quad (\text{ب})$$



شکل ۷۴

۱۳. نشان دهید که هرگاه  $|z| < r < R$  داریم

$$\frac{1}{cz - z^2} = \frac{1}{cz} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{c^{n+2}}.$$

### ۵۵. سری لوران<sup>۱</sup>

اگر تابع  $f$  در نقطه  $z_0$  تحلیلی باشد، نمی‌توانیم از قضیهٔ تیلر در آن نقطه استفاده کنیم. ولی اغلب می‌توانیم یک نمایش سری برای  $f(z)$  شامل توانهای مثبت و منفی  $z - z_0$  پیدا کنیم. (مثال ۵، بخش ۵۴ و همچنین تمرینهای ۱۱، ۱۲، ۱۳ آن بخش را ببینید). حال نظریهٔ چنین نمایشها را ارائه می‌دهیم و با قضیهٔ لوران شروع می‌کنیم.

قضیه. فرض کنید تابع  $f$  در سراسر حوزهٔ طویقی  $R_1 < |z - z_0| < R_2$  به مرکز  $z_0$  تحلیلی و  $C$  معرف مسیر سادهٔ بسته‌ای در جهت مثبت حول  $z_0$  واقع در این حوزه باشد (شکل ۷۴). در این صورت در هر نقطه  $z$  از آن حوزه،  $f(z)$  دارای نمایش سری

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n} \quad (R_1 < |z - z_0| < R_2) \quad (1)$$

است که در آن

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{n+1}} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (2)$$

1. Laurent

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{-n+1}} \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (3)$$

رابطه (۱) را اغلب به صورت زیر می‌نویسند

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \quad (R_1 < |z - z_0| < R_2), \quad (4)$$

که در آن

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{n+1}} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (5)$$

هر یک از سریهای (۱) یا (۴) را سری لوران می‌نامند.

ملاحظه کنید که انتگرالده عبارت (۳) را می‌توان به صورت  $f(z)(z - z_0)^{n-1}$  نوشت. بنابراین واضح است که اگر  $f$  در سراسر قرص  $R_2 < |z - z_0| < R_1$  تحلیلی باشد این انتگرالده نیز تحلیلی است. در نتیجه همه ضرایب  $b_n$  صفرند؛ و چون (بخش ۴۸)

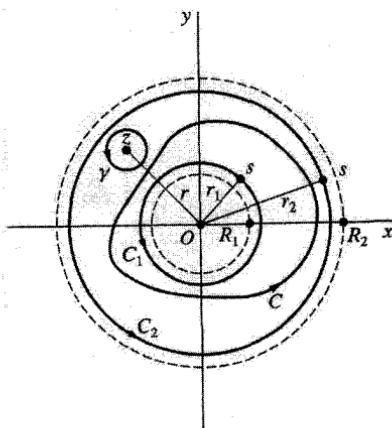
$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{n+1}} = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

بسط (۱) به سری تیلر حول  $z_0$  تبدیل می‌شود.

با وجود این، اگر  $f$  در  $z_0$  تحلیلی نباشد اما در بقیه نقاط قرص  $R_2 < |z - z_0| < R_1$  تحلیلی باشد، شعاع  $R_1$  را می‌توان به دلخواه کوچک گرفت. در این صورت نمایش (۱) بازی هر  $z$  که  $R_2 < |z - z_0| < R_1$  باشد، شرط برقراری  $f$  در همه نقاط صفحه متناهی که خارج دایره  $R_1 = |z - z_0|$  واقع‌اند تحلیلی باشد، شرط برقراری عبارت از  $\infty < |z - z_0| < R_1$  ملاحظه کنید که اگر  $f$  همه جا در صفحه متناهی بجز در  $z_0$  تحلیلی باشد، سری (۱) در هر نقطه که تحلیلی بودن برقرار باشد یا وقتی که  $|z - z_0| > R_1$  برقرار است.

ابتدا قضیه لوران را وقتی  $z_0 = 0$  ثابت می‌کنیم، در این حالت مرکز طوق در مبدأ است. تحقیق درستی قضیه وقتی  $z_0$  دلخواه است به آسانی نتیجه می‌شود.

اثبات را با ساختن یک ناحیه طوقی بسته مانند  $r_1 \leq |z| \leq r_2$  که مشمول در حوزه  $R_2 < |z| < R_1$  است و درون آن شامل نقطه  $z_0$  و مسیر  $C$  است، شروع می‌کنیم (شکل ۷۵). فرض می‌کنیم که  $C_1$  و  $C_2$  به ترتیب، معرف دوایر  $r_1 = |z_0|$  و  $r_2 = |z_0| + \epsilon$  باشند و این دوایر را در جهت مثبت می‌گیریم. ملاحظه می‌کنید که  $f$  روی  $C_1$  و  $C_2$  در حوزه بین آنها تحلیلی است.



شکل ۷۵

حال دایره  $\gamma$  را به مرکز  $z$  و در جهت مثبت و به قدر کافی کوچک می‌گیریم تا همان طور که در شکل ۷۵ نشان داده شده در درون ناحیه طوقی  $r_1 \leq |z| \leq r_2$  باشد. اکنون بنابر تعمیم قضیه کوشی-گورسا برای انتگرال توابع تحلیلی حول مرزهای حول نواحی همبند چندگانه (قضیه ۲ بخش ۴۶) داریم

$$\int_{C_1} \frac{f(s)ds}{s-z} - \int_{C_2} \frac{f(s)ds}{s-z} - \int_{\gamma} \frac{f(s)ds}{s-z} = 0.$$

اما بنابر فرمول انتگرال کوشی، مقدار انتگرال سوم مساوی  $2\pi i f(z)$  است. بنابراین

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(s)ds}{s-z} + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(s)ds}{z-s}. \quad (6)$$

حال عامل  $(z-s)^{-1}$  در اولین انتگرال همان عامل موجود در عبارت (۵) بخش ۵۳ است، که قضیه تیلر در آن ثابت شده بود و در اینجا به بسط

$$\frac{1}{s-z} = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{s^{n+1}} z^n + z^N \frac{1}{(s-z)s^N}, \quad (7)$$

نیاز داریم که در بخش قبل از آن استفاده شد. همچنین برای عامل  $(z-s)^{-1}$  در انتگرال دوم

با تعویض  $z$  و  $s$  در رابطه (۷) می‌توانیم بنویسیم

$$\frac{1}{z-s} = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{s^{-n}} \cdot \frac{1}{z^{n+1}} + \frac{1}{z^N} \cdot \frac{s^N}{z-s}.$$

اگر در اینجا اندیس مجموعیابی را به جای  $n$  عدد  $1-n$  بگیریم، بسط بالا به صورت زیر در می‌آید

$$\frac{1}{z-s} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{s^{-n+1}} \cdot \frac{1}{z^n} + \frac{1}{z^N} \cdot \frac{s^N}{z-s}, \quad (8)$$

که در ادامه کار از آن استفاده می‌شود.

با ضرب همه جملات روابط (۷) و (۸) در  $(2\pi i)/(2\pi i)$  و انتگرال‌گیری از هر طرف روابط حاصل نسبت به  $s$ ، به ترتیب، روی  $C_1$  و  $C_2$ ، از عبارت (۶) در می‌یابیم که

$$f(z) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n z^n + \rho_N(z) + \sum_{n=1}^N \frac{b_n}{z^n} + \sigma_N(z), \quad (9)$$

که در آن اعداد  $a_n$  و  $(n = 0, 1, 2, \dots, N-1) b_n$  با برابریهای زیر داده شده‌اند

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(s)ds}{s^{n+1}}, \quad b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(s)ds}{s^{-n+1}} \quad (10)$$

و

$$\rho_N(z) = \frac{z^N}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(s)ds}{(s-z)s^N}, \quad \sigma_N(z) = \frac{1}{2\pi iz^N} \int_{C_1} \frac{s^N f(s)ds}{z-s}.$$

وقتی  $N$  به  $\infty$  میل کند عبارت (۹) بهوضوح به صورت یک سری لوران، در حوزه  $|z| < R_1 < |z| < R_2$  در می‌آید به شرط آنکه

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sigma_N(z) = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \rho_N(z) = 0 \quad (11)$$

این حدود به سادگی با روشی که قبلاً برای اثبات قضیه تیلر در بخش ۵۳ به کار رفت، ثابت می‌شوند. می‌نویسیم  $|z| = r$ ، پس  $r_1 < r < r_2$  و فرض می‌کنیم  $M$  مقدار ماکسیمم  $|f(s)|$  روی  $C_1$

و  $C_2$  باشد. همچنین توجه می‌کنیم که اگر  $s$  نقطه‌ای روی  $C_2$  باشد آنگاه  $|s - z| \geq r_2 - r$  و اگر  $s$  روی  $C_1$  باشد،  $|z - s| \geq r - r_1$ . پس می‌توانیم بنویسیم

$$|\sigma_N(z)| \leq \frac{Mr_1}{r - r_1} \left( \frac{r_1}{r} \right)^N \quad \text{و} \quad |\rho_N(z)| \leq \frac{Mr_2}{r_2 - r} \left( \frac{r}{r_2} \right)^N$$

چون  $1 < r_1/r$  و  $1 < r/r_2$  واضح است که  $\sigma_N(z)$  و  $\rho_N(z)$  دارای ویژگی مطلوب‌اند. بالاخره با یادآوری فرع ۲ بخش ۴۶ می‌بینیم که می‌توان در انتگرال‌های  $(10)$  به جای مسیرهای آنها مسیر  $C$  را قرار داد. بدین ترتیب اثبات قضیه لوران وقتی  $= z$  کامل می‌شود، زیرا اگر به جای  $s$  از  $z$  به عنوان متغیر انتگرال‌گیری استفاده کنیم عبارات  $(10)$  برای ضرایب  $a_n$  و  $b_n$  همان عبارات  $(2)$  و  $(3)$  هستند که در آنها  $= z$ .

برای تعمیم اثبات به حالت کلی که در آن  $z$  نقطه دلخواهی در صفحه متناهی است، فرض می‌کنیم  $f$  تابعی باشد که در شرایط قضیه صدق می‌کند و همانند اثبات قضیه تیلر قرار می‌دهیم  $f(z+z_0) = f(z+z_0)$ . چون  $f$  در طوق  $R_1 < |z-z_0| < R_2$  تحلیلی است، تابع  $R_1 < |z| < R_2$  تحلیلی است وقتی  $R_1 < |z+z_0| < R_2$ . یعنی،  $g$  در طوق  $R_1 < |z| < R_2$  که به مرکز مبدأ است تحلیلی است. حال مسیر ساده بسته  $C$  در صورت قضیه، دارای نمایش پارامتری  $a \leq t \leq b$  است که به ازای هر  $t$  در بازه  $a \leq t \leq b$   $z = z(t)$  است.

$$R_1 < |z(t) - z_0| < R_2. \quad (12)$$

بنابراین اگر  $\Gamma$  معرف مسیر

$$z = z(t) - z_0, \quad (a \leq t \leq b), \quad (13)$$

باشد  $\Gamma$  نه تنها مسیر ساده بسته‌ای است بلکه بنابر نابرابریهای  $(12)$  در حوزه  $R_1 < |z| < R_2$  در حوزه  $R_1 < |z| < R_2$  واقع است. در نتیجه  $g(z)$  دارای نمایش سری لوران زیر است

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{z^n} \quad (R_1 < |z| < R_2), \quad (14)$$

که در آن

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{g(z) dz}{z^{n+1}} \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (15)$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{g(z) dz}{z^{-n+1}} \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (16)$$

اگر در رابطه (۱۴) بهجای  $g(z)$  بنویسیم  $f(z + z_0)$  و سپس، هم در رابطه حاصل و هم در شرط برقراری  $R_1 < |z| < R_2$  بهجای  $z$  مقدار  $z - z_0$  را قرار دهیم نمایش (۱) بدست می‌آید. به علاوه عبارت (۱۵) برای ضرایب  $a_n$  همان عبارت (۲) است، زیرا

$$\int_{\Gamma} \frac{g(z)dz}{z^{n+1}} = \int_a^b \frac{f[z(t)]z'(t)}{[z(t) - z_0]^{n+1}} dt = \int_C \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{n+1}}.$$

همین طور ضرایب  $b_n$  در عبارت (۱۶) همان ضرایب در عبارت (۳) هستند.

## ۵۶. چند مثال

ضرایب سری لوران را عموماً به روشنی غیر از مراجعة مستقیم به نمایش انتگرالی آنها پیدا می‌کنند. این موضوع در مثالهای زیر نشان داده شده است، که در آنها همیشه فرض می‌کنیم اگر حوزه طوقی مشخص باشد، سری لوران یک تابع مفروض، یکتاست. همانند سری تیلر، اثبات چنین یکتاپی را تا بخش ۶۰ به تعریق می‌اندازیم.

**مثال ۱.** با قرار دادن  $z^{-1}$  بهجای  $z$  در بسط سری مکلورن

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots \quad (|z| < \infty),$$

بسط سری لوران زیر بدست می‌آید

$$e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!z^n} = 1 + \frac{1}{1!z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \dots \quad (0 < |z| < \infty).$$

توجه کنید که این سری لوران شامل هیچ توان مثبت  $z$  نیست، ضرایب توانهای مثبت صفرند. همچنین توجه کنید که ضریب  $z^{-1}$  مساوی یک است؛ و بنابر قضیه لوران در بخش ۵۵ آن ضریب برابر با عدد زیر است

$$b_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{1/z} dz,$$

که در آن  $C$  مسیر ساده بسته‌ای در جهت مثبت پیامون مبدأ است. چون  $b_1 = 1$ ، پس

$$\int_C e^{1/z} dz = 2\pi i.$$

این روش محاسبه برخی انتگرالها روی مسیرهای ساده بسته را در فصل ۶ مفصلأً شرح و بسط خواهیم داد.

مثال ۲. تابع  $f(z) = 1/(z-i)$  هم‌اکنون به صورت سری لوران است که در آن  $i = z$  یعنی،

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-i)^n \quad (\circ < |z-i| < \infty),$$

که در آن  $c_{-2} = 1$  و همه ضرایب دیگر صفرند. بنابر فرمول (۵) بخش ۵۵ برای ضرایب سری لوران، داریم

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{dz}{(z-i)^{n+3}} \quad (n = \circ, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

که در آن  $C$  مثلاً دایره  $|z-i| = R$  حول نقطه  $i$  در جهت مثبت است. بنابراین (با تمرین ۱۰ بخش ۴۰ مقایسه کنید)

$$\int_C \frac{dz}{(z-i)^{n+3}} = \begin{cases} \circ, & n \neq -2 \\ 2\pi i, & n = -2 \end{cases}$$

### مثال ۳. تابع

$$f(z) = \frac{-1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-2}, \quad (1)$$

که دارای دو نقطه تکین  $z=1$  و  $z=2$  است در حوزه‌های

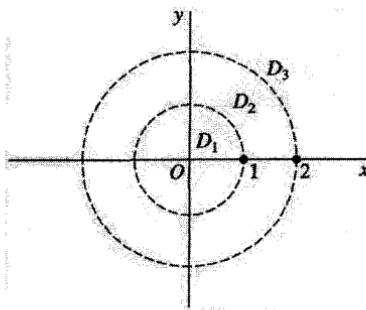
$$2 < |z| < \infty \quad \text{و} \quad 1 < |z| < 2, |z| < 1$$

تحلیلی است. در هر یک از این حوزه‌ها که در شکل ۷۶، به ترتیب، با  $D_1, D_2$  و  $D_3$  نشان داده شده  $f(z)$  دارای نمایش‌های سری بر حسب توانهای  $z$  است. همه آنها را می‌توان با یادآوری این مطلب از مثال ۴ بخش ۵۴ بدست آورد که

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=\circ}^{\infty} z^n \quad (|z| < 1).$$

نمایش در  $D_1$  یک سری مکلورن است. برای پیدا کردن آن می‌نویسیم

$$f(z) = -\frac{1}{1-z} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-(z/2)}$$



شکل ۷۶

و ملاحظه می‌کنیم که چون در  $D_1$  داریم  $|z| < 1$  و  $|z/2| < 1$

$$f(z) = - \sum_{n=0}^{\infty} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} (2^{-n-1} - 1) z^n \quad (|z| < 1). \quad (2)$$

همچنین برای نمایش در  $D_2$  می‌نویسیم

$$f(z) = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - (1/z)} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - (z/2)}.$$

چون اگر  $|z| < 2$  آنگاه  $|1/z| < 1$  و  $|z/2| < 1$ ، درنتیجه

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} \quad (1 < |z| < 2).$$

اگر به جای  $n$ ، اندیس مجموعیابی در سری اول،  $1 - n$  قرار دهیم و سپس جای دو سری را عوض کنیم بسطی به دست می‌آید که به همان صورت بسط سری لوران (بخشن ۵۵) است:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} \quad (1 < |z| < 2). \quad (3)$$

چون فقط یک چنین نمایشی برای  $f(z)$  در طوق  $2 < |z| < 1$  موجود است، بسط (۳) در واقع سری لوران  $f(z)$  در آن حوزه است.

نمایش  $f(z)$  در حوزه بیکران  $D_3$  نیز یک سری لوران است. اگر عبارت (۱) را به صورت زیر

بنویسیم

$$f(z) = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - (1/z)} - \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - (2/z)}$$

و ملاحظه کنیم که اگر  $|z| < \infty$  آنگاه  $1/|z| < 1$  و  $1/|z| < 1/2$  در می‌بایس که

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 - 2^n}{z^{n+1}} \quad (2 < |z| < \infty).$$

يعنى

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - 2^{n-1}}{z^n} \quad (2 < |z| < \infty). \quad (4)$$

### تمرینها

۱. سری لورانی را بیابید که نمایش تابع

$$f(z) = z^{\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{1}{z^{\frac{1}{2}}}\right)$$

در حوزه  $|z| < \infty$  باشد.

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot \frac{1}{z^{4n}} \quad \text{جواب:}$$

۲. نمایش سری لوران زیر را به دست آورید

$$\frac{e^z}{(z+1)^2} = \frac{1}{e} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{(n+2)!} + \frac{1}{z+1} + \frac{1}{(z+1)^2} \right] \quad (0 < |z+1| < \infty).$$

۳. نمایشی برای تابع

$$f(z) = \frac{1}{1+z} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1+(1/z)}$$

برحسب توانهای منفی  $z$  بیابید به طوری که در حوزه  $\infty < |z| < 1$  معتبر باشد.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{z^n} \quad \text{جواب:}$$

۴. دو بسط سری لوران برحسب توانهای  $z$  برای تابع

$$f(z) = \frac{1}{z^2(1-z)},$$

ارائه دهید و نواحی معتبربودن این بسطها را مشخص سازید.

$$-\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{z^n} \quad (1 < |z| < \infty) ; \sum_{n=0}^{\infty} z^n + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} \quad (0 < |z| < 1) \quad \text{جواب:}$$

۵. تابع  $f(z) = (z+1)/(z-1)$  را

(الف) با سری مکلورن آن نمایش دهید و ناحیه معتبربودن آن نمایش را معین کنید؛

(ب) با سری لوران آن برای حوزه  $\infty < |z| < 1$  نمایش دهید.

$$1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} (z-1) - 2 \sum_{n=1}^{\infty} z^n \quad (\text{الف}) \quad (\text{ب})$$

جواب: ۶. نشان دهید که اگر  $|z-1| < 2$  آنگاه

$$\frac{z}{(z-1)(z-3)} = -3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{2^{n+2}} - \frac{1}{2(z-1)}.$$

۷. دو بسط سری لوران برحسب توانهای  $z$  برای نمایش تابع

$$f(z) = \frac{1}{z(1+z^2)}$$

ارائه دهید و نواحی معتبربودن این بسطها را مشخص کنید.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{z^{2n+1}} \quad (1 < |z| < \infty) ; \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} z^{2n+1} + \frac{1}{z} \quad (0 < |z| < 1)$$

۸. (الف) فرض کنید  $a$  عددی حقیقی باشد که  $1 < a < -1$ . نمایش سری لوران زیر را به دست آورید

$$\frac{a}{z-a} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{z^n} \quad (|a| < |z| < \infty).$$

(ب) در رابطه‌ای که در قسمت (الف) به دست آمد، بنویسید  $z = e^{i\theta}$  و سپس در رابطه حاصل قسمتهای حقیقی و موهومی طرفین را مساوی قرار دهید تا دستورهای مجموعیابی

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^n \sin n\theta = \frac{a \sin \theta}{1 - 2a \cos \theta + a^2} \quad \text{و} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos n\theta = \frac{a \cos \theta - a^2}{1 - 2a \cos \theta + a^2}$$

را به دست آورید که در آنها  $1 < a < -1$ . (با تمرین ۴ بخش ۵۲ مقایسه کنید.)

۹. فرض کنید سری

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

در طوق  $R_2 < |z| < R_1$  به تابع تحلیلی  $X(z)$  همگرا باشد. این مجموع  $(X(z), \text{تبديل } z \text{ از دنباله } [n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots]x[n])^*$  نامیده می‌شود. با استفاده از عبارت (۵) بخش ۵۵ برای ضرایب سری لوران، نشان دهید که اگر طوق شامل دایره واحد  $|z| = 1$  باشد، آنگاه مقدار وارون تبدیل  $z$  تابع  $X(z)$  را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{i\theta}) e^{in\theta} d\theta \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

۱۰. (الف) فرض کنید  $z$  عدد مختلطی دلخواه و  $C$  دایره واحد

$$w = e^{i\phi} \quad (-\pi \leq \phi \leq \pi)$$

در صفحه  $w$  باشند. سپس با استفاده از مسیر مربوط به عبارت (۵)، بخش ۵۵، در مورد ضرایب سری لوران، که برای چنین سریهایی حول مبدأ در صفحه  $w$  تنظیم شده است، نشان دهید که

$$\exp \left[ \frac{z}{2} \left( w - \frac{1}{w} \right) \right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) w^n \quad (0 < |w| < \infty),$$

که در آن

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp[-i(n\phi - z \sin \phi)] d\phi \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

(ب) به کمک تمرین ۶، بخش ۳۷، درباره انتگرالهای معین توابع مختلط زوج و فرد از یک متغیر حقیقی، نشان دهید که ضرایب قسمت (الف) را می‌توان به صورت زیر نوشت\*\*

$$J_n(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\phi - z \sin \phi) d\phi \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

۱۱. (الف) فرض کنید  $f(z)$  معرف تابعی باشد که در یک حوزه طوقی حول مبدأ، شامل دایره واحد  $z = e^{i\phi}$  ( $-\pi \leq \phi \leq \pi$ )، تحلیلی است. این دایره را مسیر انتگرالگیری در فرمولهای (۲) Schafer, Oppenheim و Buck را که در بیوست ۱ آمده است ببینید.

\*\* این ضرایب  $J_n(z)$  را تابع نوع اول بسل می‌نامند. اینها نقش مهمی در بعضی قسمتهای ریاضی کاربردی ایفا می‌کنند. مثلاً فصل ۸ کتاب زیر از مؤلفان، را ببینید:

و (۳) بخش ۵۵، برای ضرایب  $a_n$  و  $b_n$  در سری لوران بر حسب توانهای  $z$  بگیرید و نشان دهید که به ازای هر  $z$  در حوزه طوقی داریم

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\phi}) d\phi + \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\phi}) \left[ \left( \frac{z}{e^{i\phi}} \right)^n + \left( \frac{e^{i\phi}}{z} \right)^n \right] d\phi.$$

(ب) بنویسید  $[f(e^{i\theta})] = u(\theta) = \operatorname{Re}[f(e^{i\theta})]$  و نشان دهید که چگونه از بسط قسمت (الف) نتیجه می‌شود که

$$u(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(\phi) d\phi + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} u(\phi) \cos[n(\theta - \phi)] d\phi.$$

این صورتی از بسط سری فوریه تابع حقیقی مقدار  $u(\theta)$  در بازه  $\pi \leq \theta \leq -\pi$  است. محدودیتهای روی  $u(\theta)$  جدیتر از محدودیتهایی است که برای نمایش آن با سری فوریه لازم است.\*

## ۵۷. همگرایی مطلق و یکنواخت سریهای توانی

این بخش و سه بخش بعدی، عمدتاً به شرح ویژگیهای متعدد سریهای توانی اختصاص دارد. خوانندهای که میل دارد سریعتر به بخش ۶۱ برسد، به سادگی می‌تواند قضیه‌ها و فرعهای این چهار بخش را بپنیرد و از اثبات آنها صرف نظر نماید.

از بخش ۵۲ یادآوری می‌کنیم که یک سری از اعداد مختلط مطلقاً همگراست هرگاه سری قدر مطلقهای آن اعداد همگرا باشد. قضیه زیر درباره همگرایی مطلق سریهای توانی است.

**قضیه ۱.** اگر سری توانی

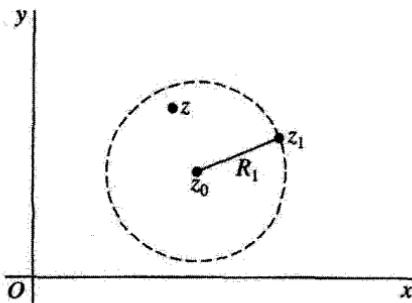
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad (1)$$

همگرا باشد وقتی  $|z - z_0| < R_1$  (که در آن  $|z - z_0| = |z_1 - z_0| = R_1$ ). (شکل ۷۷).

ابتدا قضیه را برای  $z = z_0$  ثابت می‌کنیم، و فرض می‌کنیم که سری

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_1^n \quad (z_1 \neq 0)$$

\* برای شرایط کافی دیگر، فصول ۳۱ و ۳۲ کتاب مذکور در پانوشت تمرین ۱۰ را ببینید.



شکل ۷۷

همگرا باشد. از این رو جملات  $a_n z^n$  کراندارند، یعنی به ازای یک عدد ثابت و مثبت  $M$  داریم (بخش ۵۲ را ببینید)

$$|a_n z_1^n| \leq M \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

اگر  $|z_1| < |z|$  و معرف قدر مطلق  $|z/z_1|$  باشد، می‌بینیم که

$$|a_n z^n| = |a_n z_1^n| \left| \frac{z}{z_1} \right|^n \leq M \rho^n \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

که در آن  $\rho < 1$ . اما سری که جملات آن اعداد حقیقی  $(M \rho^n)$  هستند یک سری هندسی است که اگر  $\rho < 1$ ، همگراست. بنابراین از آزمون مقایسه برای سریهای اعداد حقیقی نتیجه می‌گیریم که سری

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n|$$

در قرص باز  $|z_1| < |z|$  همگراست؛ و قضیه برای  $\circ = \circ$  اثبات می‌شود. وقتی  $\circ$  عدد ناصفر دلخواهی باشد، فرض می‌کنیم سری  $(1)$  در  $(z_1 \neq z_0)z = z_1$  در  $w = z - z_0$  سری  $(1)$  به همگرا باشد. اگر قرار دهیم  $w = z - z_0$ ، سری  $(1)$  به

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n \tag{2}$$

تبديل می‌شود و این سری در  $w = z_1 - z$  همگراست. در نتیجه، چون درستی قضیه برای  $\circ = \circ$  معلوم است، می‌بینیم که سری  $(2)$  در قرص باز  $|z_1 - z| < |w|$  مطلقاً همگراست.

سرانجام با قراردادن  $z - z_0$  به جای  $w$ , هم در سری (۲) و هم در این شرط برقراری و قراردادن  $R_1 = |z_1 - z_0|$ , به اثبات قضیه, به صورتی که بیان شده است, می‌رسیم.

این قضیه بیان می‌کند که مجموعه همه نقاط داخل یک دایره حول  $z_0$ , یک ناحیه همگرایی برای سری توانی (۱) است به شرط اینکه سری (۱) در نقطه‌ای غیر از  $z_0$  همگرا باشد. بزرگترین دایره حول  $z_0$ , که در هر نقطه داخلی آن سری (۱) همگرا باشد, دایره همگرایی سری (۱) نامیده می‌شود. بنابر قضیه بالا, سری مذکور در هیچ نقطه‌ای مانند  $z_0$  در خارج آن دایره نمی‌تواند همگرا باشد, زیرا در آن حالت همه جا در درون دایره به مرکز  $z_0$  که از  $z_0$  می‌گذرد, همگرا خواهد بود. در این صورت دایرة اول نمی‌تواند دایرة همگرایی باشد.

قضیه بعد شامل اصطلاحی است که ابتدا باید آن را تعریف کنیم. فرض کنید که سری توانی (۱) دارای دایرة همگرایی  $R$  باشد و  $S(z)$  و  $S_N(z)$ , به ترتیب, نمایش مجموع و مجموعهای جزئی آن سری باشند:

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad S_N(z) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n (z - z_0)^n \quad (|z - z_0| < R).$$

سپس تابع باقیمانده را تعریف می‌کنیم

$$\rho_N(z) = S(z) - S_N(z) \quad (|z - z_0| < R). \quad (3)$$

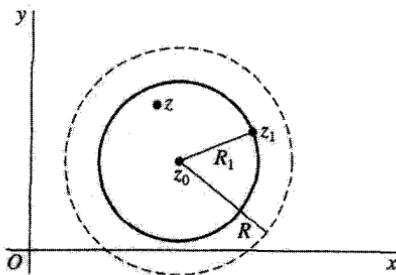
چون بهارای هر مقدار ثابت  $z$  که  $|z - z_0| < R$ , سری توانی همگراست, می‌دانیم که باقیمانده  $\rho_N(z)$  بهارای هر چنین  $z$ , وقتی  $N$  به بینهایت میل کند, به صفر میل می‌کند. بنابر تعریف (۲), بخش ۵۱, درباره حد یک دنباله, این بدان معنی است که متناظر با هر عدد مثبت  $\epsilon$ , عدد صحیح و مثبتی مانند  $N_\epsilon$  هست که

$$N > N_\epsilon \quad \text{هرگاه} \quad |\rho_N(z)| < \epsilon \quad (4)$$

وقتی انتخاب  $N_\epsilon$  فقط به مقدار  $\epsilon$  بستگی داشته باشد و از نقطه  $z$ , که در یک ناحیه مشخص درون دایرة همگرایی اختیار شده, مستقل باشد گوییم همگرایی در آن ناحیه یکنواخت است. قضیه ۲. اگر  $z$  نقطه‌ای در درون دایرة همگرایی  $R = |z_0 - z|$  از سری توانی

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad (5)$$

باشد آنگاه سری در قرص بسته  $R_1 = |z - z_0| \leq R$  همگرای یکنواخت است که در آن (شکل ۷۸).  $R_1 = |z_1 - z_0|$



شکل ۷۸

مانند اثبات قضیه ۱، ابتدا حالتی را بررسی می‌کنیم که در آن  $|z| = R$ . می‌دانیم که نقطه  $z$  درون دایره همگرایی سری

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad (6)$$

واقع است، توجه کنید که نقاطی با قدر مطلق بزرگتر از  $|z_1|$  وجود دارند که برای آنها سری همگراست. پس بنابر قضیه (۱)، سری

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z_1^n| \quad (7)$$

همگراست. فرض می‌کنیم  $m$  و  $N$  دو عدد صحیح مثبت باشند که  $m > N$ ، می‌توانیم باقیمانده سریهای (۶) و (۷) را به ترتیب به شکل زیر بنویسیم

$$\rho_N(z) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=N}^m a_n z^n \quad (8)$$

$$\sigma_N = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=N}^m |a_n z_1^n|. \quad (9)$$

حال، بنابر تمرین ۳ بخش ۵۲

$$|\rho_N(z)| = \lim_{m \rightarrow \infty} \left| \sum_{n=N}^m a_n z^n \right|;$$

و وقتی  $|z| \leq |z_1|$

$$\left| \sum_{n=N}^m a_n z^n \right| \leq \sum_{n=N}^m |a_n| |z|^n \leq \sum_{n=N}^m |a_n| |z_1|^n = \sum_{n=N}^m |a_n z_1^n|.$$

در نتیجه

$$|z| \leq |z_1| \quad \text{هرگاه} \quad |\rho_N(z)| \leq \sigma_N \quad (10)$$

چون  $\sigma_N$  ها باقیمانده‌های یک سری همگرا هستند، وقتی  $N$  به بینهایت میل کند، به صفر میل می‌کنند. یعنی، به ازای هر عدد مثبت  $\varepsilon$  عدد صحیحی  $N_\varepsilon$  هست که

$$N > N_\varepsilon \quad \text{هرگاه} \quad \sigma_N < \varepsilon \quad (11)$$

پس بنابر شرایط (۱۰) و (۱۱)، شرط (۴) به ازای هر  $z$  در قرص  $|z| \leq |z_1|$  برقرار است؛ و مقدار  $N_\varepsilon$  مستقل از انتخاب  $z$  است. بنابراین همگرایی سری (۶) در آن قرص، یکنواخت است. البته تعمیم اثبات به حالتی که  $z$  دلخواه باشد با جایگذاری  $z - z_1 = w$  در سری (۵)، انجام می‌شود. برای این حالت فرض قضیه این است که  $z - z_1$  نقطه‌ای در درون دایره همگرایی سری

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$$

یعنی  $w = R$  است. چون می‌دانیم که این سری باید در قرص بسته  $|z_1 - z| \leq |w|$  همگرا یکنواخت باشد، روشن است که حکم قضیه نتیجه می‌شود.

## ۵۸. پیوستگی مجموع سری توانی

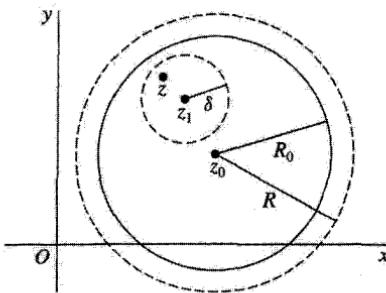
قضیه بعد نتیجه مهمی از همگرایی یکنواخت است، که در بخش قبل مورد بحث قرار گرفت. قضیه. سری توانی

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad (1)$$

در هر نقطه داخلي دایره همگرایی خود، یعنی  $R = |z - z_0|$ ، یکتابع پيوسته  $S(z)$  را نمایش می‌دهد.

روش دیگری برای بیان قضیه بالا این است که اگر (۱) در درون دایره همگرایی آن یعنی  $R = |z - z_0|$  باشد و  $z$  نقطه‌ای در درون آن دایره، آنگاه به ازای هر عدد مثبت  $\varepsilon$ ، عدد مثبتی مانند  $\delta$  هست به طوری که

$$|z - z_0| < \delta \quad \text{هرگاه} \quad |S(z) - S(z_0)| < \varepsilon \quad (2)$$



شکل ۷۹

عدد  $\delta$  به قدر کافی کوچک است به طوری که  $z$  در حوزه تعریف تابع  $S(z)$ ، یعنی  $|z - z_0| < R$  واقع باشد. [تعریف ۴، بخش ۱۷، برای پیوستگی را ببینید].

برای نشان دادن این مطلب، فرض می کنیم  $S_N(z)$  معرف مجموع  $N$  جمله اول سری (۱) باشد و تابع باقیمانده را می نویسیم

$$\rho_N(z) = S(z) - S_N(z) \quad (|z - z_0| < R).$$

پس از آنجا که

$$S(z) = S_N(z) + \rho_N(z) \quad (|z - z_0| < R),$$

می توان نوشت

$$|S(z) - S(z_1)| = |S_N(z) - S_N(z_1) + \rho_N(z) - \rho_N(z_1)|,$$

یا

$$|S(z) - S(z_1)| \leq |S_N(z) - S_N(z_1)| + |\rho_N(z)| + |\rho_N(z_1)|. \quad (3)$$

اگر  $R_0$  بزرگتر از  $|z_1 - z_0|$  ولی کوچکتر از  $R$ ، شاع دایره همگرایی سری (۱)، باشد (شکل ۷۹) را ببینید، بنابر همگرایی یکنواخت در قرص بسته  $|z - z_0| \leq R_0$  که در قضیه ۲ بخش ۵۷ بیان شد، مطمئناً عدد صحیح مثبتی مانند  $N_\varepsilon$  هست به طوری که به ازای هر  $z$  در این قرص بسته داریم

$$N > N_\varepsilon \quad \text{هرگاه} \quad |\rho_N(z)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (4)$$

به خصوص اگر همسایگی  $\delta$  به قدر کافی کوچک اختیار کنیم تا مشمول در قرص بسته  $|z - z_0| \leq R_0$  باشد، به ازای هر نقطه  $z$  در این همسایگی، شرط (۴) برقرار است.

حال به ازای هر مقدار  $N$ ، مجموع جزئی  $S_N(z)$ ، یک چندجمله‌ای است و لذا در  $z$  پیوسته است. به خصوص وقتی  $1 + N = N_\varepsilon$ ، می‌توانیم  $\delta$  را آنقدر کوچک بگیریم که

$$|z - z_1| < \delta \quad \text{هرگاه} \quad |S_N(z) - S_N(z_1)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (5)$$

با نوشتن  $1 + N = N_\varepsilon + 1$  در نابرابری (۱۳) و استفاده از این واقعیت که احکام (۴) و (۵) وقتی  $1 + N = N_\varepsilon + 1$  برقرارند، در می‌باییم که

$$|z - z_1| < \delta \quad \text{هرگاه} \quad |S(z) - S(z_1)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3}$$

این همان حکم (۲) است و قضیه ثابت می‌شود.

با جایگذاری  $w = 1/(z - z_0)$  می‌توان دو قضیه و فرع این بخش را طوری اصلاح کرد که در مورد سریهایی از نوع زیر کارایی داشته باشند

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}. \quad (6)$$

مثالاً اگر سری (۶) در نقطه  $z_1 \neq z_0$  همگرا باشد، سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n w^n$$

باید به تابع پیوسته‌ای مطلقاً همگرا باشد هرگاه

$$|w| < \frac{1}{|z_1 - z_0|}. \quad (7)$$

بنابراین چون نابرابری (۷) همان نابرابری  $|z - z_0| > |z_1 - z_0|$  است، سری (۶) باید در خارج دایره  $|z - z_0| = R_1$  به تابع پیوسته‌ای مطلقاً همگرا شود که در آن  $|z_1 - z_0| = R_1$ . همچنین می‌دانیم که اگر نمایش سری لوران

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}$$

در طوق  $R_2 < |z - z_0| < R_1$  معتبر باشد آنگاه هر دو سری سمت راست در هر طوق بسته‌ای که در داخل ناحیه معتبر بودن و با آن متحdalمرکز باشد، همگرای یکنواخت هستند.

## ۵۹. انتگرالگیری و مشتقگیری از سریهای توانی

دیدیم که سری توانی

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad (1)$$

در هر نقطه در درون دایره همگرایی خود، تابع پیوسته‌ای را نمایش می‌دهد. در این بخش ثابت می‌کنیم که مجموع  $S(z)$  علاوه بر درون آن دایره، تحلیلی است. اثبات بستگی به قضیه زیر دارد که به خودی خود با ارزش است.

**قضیه ۱.** فرض کنیم  $C$  نمایش مسیر دلخواهی در داخل دایره همگرایی سری توانی (۱) است و  $g(z)$  تابع دلخواهی است که بر  $C$  پیوسته است. در این صورت می‌توان از سری حاصل از ضرب هر جمله سری توانی در  $(g(z), g)$ ، جمله به جمله بر  $C$  انتگرال گرفت، یعنی

$$\int_C g(z) S(z) dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_C g(z) (z - z_0)^n dz. \quad (2)$$

برای اثبات این قضیه، توجه می‌کنیم که چون  $(g(z), g)$  و  $S(z)$  که مجموع یک سری توانی است هر دو روی  $C$  پیوسته‌اند، انتگرال حاصلضرب

$$g(z) S(z) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n g(z) (z - z_0)^n + g(z) \rho_N(z),$$

روی  $C$  موجود است، که در آن  $\rho_N(z)$  باقیمانده سری مفروض بعد از  $N$  جمله است. در اینجا جملات مجموع متناهی نیز بر مسیر  $C$  پیوسته و بنابراین انتگرالهایشان بر  $C$  موجودند. در نتیجه باید انتگرال  $(g(z), g) \rho_N(z)$  موجود باشد و می‌توان نوشت

$$\int_C g(z) S(z) dz = \sum_{n=0}^{N-1} a_n \int_C g(z) (z - z_0)^n dz + \int_C g(z) \rho_N(z) dz. \quad (3)$$

فرض کنید  $M$  مقدار ماکسیمم  $|g(z)|$  بر  $C$  و  $L$  معرف طول  $C$  باشد. با توجه به همگرایی یکنواخت سری توانی مفروض (بخش ۵۷)، می‌دانیم که به ازای هر عدد مثبت  $\varepsilon$ ، عدد صحیح  $N_\varepsilon$  موجود است به قسمی که به ازای هر نقطه  $z$  روی  $C$

$$N > N_\varepsilon \quad \text{هرگاه} \quad |\rho_N(z)| < \varepsilon$$

چون  $N_\varepsilon$  مستقل از  $z$  است، در می‌یابیم که

$$N > N_\varepsilon \quad \text{هرگاه} \quad \left| \int_C g(z) \rho_N(z) dz \right| < M\varepsilon L$$

يعنى

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_C g(z) \rho_N(z) dz = 0.$$

بنابراین از رابطه (۳) نتیجه می‌شود که

$$\int_C g(z) S(z) dz = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{N-1} a_n \int_C g(z) (z - z_0)^n dz.$$

اين همان تساوي (۲) است و قضيه ۱ ثابت می‌شود.

اگر بهازای هر مقدار  $z$  در قرص باز محدود به دایره همگرایی سری توانی (۱)،  $|g(z)| = 1$   
چون بهازای هر  $n = 0, 1, 2, \dots$  تابع  $(z - z_0)^n$  تام است، آنگاه بهازای هر مسیر بسته  
واقع در آن حوزه داريم

$$\int_C g(z) (z - z_0)^n dz = \int_C (z - z_0)^n dz = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

پس بنابر رابطه (۲) بهازای هر چنین مسیری

$$\int_C S(z) dz = 0.$$

و بنابر قضيه موررا (بخش ۴۸) تابع  $S(z)$  در سراسر حوزه تحليلی است. اين نتیجه را به صورت  
يك فرع بيان می‌کنیم.

فرع.  $S(z)$ ، مجموع سری توانی (۱)، در هر نقطه  $z$  در درون دایره همگرایی آن سری تحليلی  
است.

اين فرع اغلب در اثبات تحليلی بودن توابع و محاسبه حدود مفید است.

مثال ۱. برای روشن شدن مطلب، نشان می‌دهیم تابعی که با ضابطه‌های

$$f(z) = \begin{cases} (\sin z)/z, & z \neq 0 \\ 1, & z = 0 \end{cases}$$

تعریف شده است، تام است. چون برای هر مقدار  $z$ ، بسط سری مکلورن

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$z$  را نمایش می‌دهد، اگر  $\circ \neq z$  آنگاه سری حاصل از تقسیم هر جمله آن سری بر  $z$ ، یعنی

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+1)!} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots, \quad (4)$$

به  $f(z)$  همگراست. اما وقتی  $\circ = z$ ، بهوضوح سری  $(4)$  به  $(0)$  همگراست. بنابراین بهازای هر  $z$ ،  $f(z)$  با سری توانی همگرای  $(4)$  نمایش داده می‌شود و در نتیجه  $f$  یک تابع تام است. توجه کنید که چون  $f$  در  $\circ = z$  پیوسته است، وقتی  $\circ \neq z$ ، داریم  $(\sin z)/z = f(z)$ .

$$\lim_{z \rightarrow \circ} \frac{\sin z}{z} = \lim_{z \rightarrow \circ} f(z) = f(\circ) = 1. \quad (5)$$

این نتیجه‌ای است که از قبل می‌دانستیم، زیرا این حد، تعریف مشتق  $z$  در  $\circ = z$  است.

در ابتدای بخش ۵۴، ملاحظه کردیم که سری تیلر تابع  $f$  حول نقطه  $\circ$ ، در هر نقطه  $z$  در داخل دایره‌ی به مرکز  $\circ$  که از نزدیکترین نقطه  $z$  که  $f$  در آن تحلیلی نیست می‌گذرد، به  $f(z)$  همگراست. حال با توجه به فرع بالا، می‌دانیم که دایره بزرگتری حول  $\circ$  موجود نیست به قسمی که در هر نقطه  $z$  در داخل آن، سری تیلر به  $f(z)$  همگرا باشد. زیرا اگر چنین دایره‌ی موجود باشد  $f$  در  $z$  تحلیلی خواهد بود، اما  $f$  در  $z$  تحلیلی نیست.

حال قضیه‌ای مشابه قضیه ۱ ارائه می‌دهیم.

قضیه ۲. از سری توانی  $(1)$  می‌توان جمله به جمله مشتق گرفت. یعنی در هر نقطه  $z$  در داخل دایره همگرایی آن سری داریم

$$S'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}. \quad (6)$$

برای اثبات این قضیه فرض می‌کنیم  $z$  معرف نقطه دلخواهی در داخل دایره همگرایی سری  $(1)$  و  $C$  مسیر ساده و بسته‌ای در جهت مثبت باشد که  $z$  را در برگرفته و داخل دایره است.

همچنین تابع

$$g(s) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{1}{(s-z)^2} \quad (7)$$

را در هر نقطه  $s$  روی  $C$  تعریف می‌کنیم. چون تابع  $g(s)$  روی  $C$  پیوسته است بنابر قضیه (۱) داریم

$$\int_C g(s)S(s)ds = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_C g(s)(s - z_0)^n ds. \quad (8)$$

چون تابع  $S(s)$  درون و روی  $C$  تحلیلی است با استفاده از نمایش انتگرالی مشتق، در بخش ۴۸، می‌توان نوشت

$$\int_C g(s)S(s)ds = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{S(s)ds}{(s - z)^2} = S'(z).$$

به علاوه

$$\int_C g(s)(s - z_0)^n ds = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{(s - z_0)^n}{(s - z)^2} ds = \frac{d}{dz} (z - z_0)^n \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

بنابراین رابطه (۸) به رابطه زیر که همان رابطه (۶) است تبدیل می‌شود

$$S'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{d}{dz} (z - z_0)^n.$$

این مطلب اثبات را کامل می‌کند.

مثال ۲. در مثال ۴، بخش ۵۴، دیدیم که

$$\frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z - 1)^n \quad (|z - 1| < 1).$$

با مشتقگیری از هر طرف این رابطه نتیجه می‌شود که

$$\frac{-1}{z^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n (z - 1)^{n-1} \quad (|z - 1| < 1),$$

یا

$$\frac{1}{z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) (z - 1)^n \quad (|z - 1| < 1).$$

## ۶۰. یکتاپی نمایش سریها

یکتاپی نمایش سریهای تیلر و لوران را که بهترتیب، در بخش‌های ۵۴ و ۵۶ بدون اثبات پذیرفتیم به سادگی می‌توان از قضیه ۱، بخش ۵۹ بدست آورد. ابتدا یکتاپی نمایش‌های سری تیلر را در نظر می‌گیریم.

قضیه ۱. اگر سری

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \quad (1)$$

در همه نقاط داخلی دایره  $|z - z_0| = R$  به  $f(z)$  همگرا باشد، این سری بسط سری تیلر  $f$  بر حسب توانهای  $z - z_0$  است.

برای اثبات این قضیه نمایش سری

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \quad (|z - z_0| < R) \quad (2)$$

در فرض قضیه را، با استفاده از اندیس مجموعیابی  $m$  می‌نویسیم:

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m(z - z_0)^m \quad (|z - z_0| < R).$$

سپس، با مراجعه به قضیه ۱، بخش ۵۹، می‌توانیم بنویسیم

$$\int_C g(z)f(z)dz = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \int_C g(z)(z - z_0)^m dz, \quad (3)$$

که در آن  $g(z)$  هر یک از توابع

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{1}{(z - z_0)^{n+1}} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (4)$$

و  $C$  دایره‌یی به مرکز  $z_0$  و شعاع کمتر از  $R$  است.

بنابر صورت تعمیم یافته فرمول انتگرال کوشی، عبارت (۵) بخش ۴۸، (همچنین فرع بخش ۵۹) در می‌بینید که

$$\int_C g(z)f(z)dz = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{n+1}} = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}; \quad (5)$$

و چون (تمرین ۱۰ بخش ۴۰) را بینید

$$\int_C g(z)(z - z_0)^m dz = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{dz}{(z - z_0)^{n-m+1}} = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 1, & m = n \end{cases} \quad (6)$$

واضح است که

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m \int_C g(z)(z - z_0)^m dz = a_n. \quad (7)$$

حال با توجه به روابط (۵) و (۷)، رابطه (۳) به رابطه زیر تبدیل می‌شود

$$\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = a_n,$$

و این نشان می‌دهد که سری (۲)، در واقع سری تیلر  $f$  حول نقطه  $z_0$  است.

توجه کنید چگونه از قضیه ۱ نتیجه می‌شود که اگر سری (۱) در هر نقطه از یک همسایگی  $z_0$  به صفر همگرا باشد، آنگاه تمام ضرایب  $a_n$ ، باید صفر باشند.

قضیه دوم مربوط به یکتایی نمایش سری لوران است.

**قضیه ۲.** اگر سری

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n} \quad (8)$$

در همه نقاط یک حوزه طوقی حول  $z_0$  به  $f(z)$  همگرا باشد، این سری بسط سری لوران  $f$  بر حسب توانهای  $z - z_0$  برای آن حوزه است.

روش اثبات در اینجا مشابه روشی است که در اثبات قضیه ۱ به کار رفت. بنابر فرض قضیه، یک حوزه طوقی حول  $z_0$  وجود دارد به طوری که برای هر نقطه  $z$  در آن طوق داریم

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n.$$

فرض کنید  $g(z)$  طوری باشد که در رابطه (۴) تعریف شده ولی  $n$  بتواند عدد صحیح منفی هم باشد. همچنین فرض کنید  $C$  دایره دلخواهی حول این طوق باشد که به مرکز  $z_0$  و در جهت مشبт گرفته شده است. در این صورت با استفاده از اندیس مجموعهای  $m$  و پذیرفتن قضیه ۱ بخش ۵۹ برای سریهایی که شامل توانهای منفی و نامنفی  $z - z_0$  باشند (تمرین ۱۰)، می‌توان نوشت

$$\int_C g(z)f(z)dz = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m \int_C g(z)(z - z_0)^m dz,$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{n+1}} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m \int_C g(z)(z - z_0)^m dz. \quad (9)$$

چون روابط (۶) وقتی  $m$  و  $n$  اعداد صحیح منفی باشند نیز برقرارند، رابطه (۹) به

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{n+1}} = c_n,$$

تبديل می‌شود که همان عبارت (۵) بخش ۵۵ برای ضرایب سری لوران  $f$  در این طوق است.

## تمرینها

۱. با مشتقگیری از نمایش سری مکلورن

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad (|z| < 1),$$

نمایشهای زیر را به دست آورید

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)z^n \quad (|z| < 1)$$

$$\frac{2}{(1-z)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)z^n \quad (|z| < 1).$$

۲. با قرار دادن  $1/(1-z)$  به جای  $z$  در بسط

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)z^n \quad (|z| < 1),$$

که در تمرین ۱ به دست آمد، نمایش سری لوران زیر را به دست آورید

$$\frac{1}{z^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(n-1)}{(z-1)^n} \quad (1 < |z-1| < \infty).$$

(با مثال ۲ بخش ۵۹ مقایسه کنید.)

۳. سری تیلر تابع

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{2 + (z-2)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + (z-2)/2}$$

حول نقطه  $z = 2$  را پیدا کنید. سپس با مشتقگیری جمله به جمله از آن سری نشان دهید که

$$\frac{1}{z^2} = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) \left( \frac{z-2}{2} \right)^n \quad (|z-2| < 2).$$

۴. به کمک سریها، ثابت کنید تابع  $f$  که با ضابطه‌های

$$f(z) = \begin{cases} (e^z - 1)/z, & z \neq 0 \\ 1, & z = 0 \end{cases}$$

تعریف می‌شود، تام است.

۵. ثابت کنید اگر

$$f(z) = \begin{cases} \frac{\cos z}{z^2 - (\pi/2)^2}, & z \neq \pm\pi/2 \\ \frac{-1}{\pi}, & z = \pm\pi/2 \end{cases}$$

آنگاه  $f$  تابعی تام است.

۶. در صفحه  $w$  از بسط سری تیلر (مثال ۴ بخش ۵۴ را ببینید)

$$\frac{1}{w} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (w-1)^n \quad (|w-1| < 1)$$

در امتداد مسیری از  $w = 1$  تا  $w = z$  در داخل دایره همگرایی انتگرال گرفته، نمایش زیر را به دست آورید

$$\operatorname{Log} z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (z-1)^n \quad (|z-1| < 1).$$

۷. با استفاده از نتیجه تمرین ۶ نشان دهید که اگر

$$f(z) = \begin{cases} \frac{\operatorname{Log} z}{z-1}, & z \neq 1 \\ 1, & z = 1 \end{cases}$$

آنگاه  $f$  در سراسر حوزه  $-\pi < \operatorname{Arg} z < \pi$ ،  $0 < |z| < \infty$  تحلیلی است.

۸. ثابت کنید که اگر  $f$  در  $\mathbb{D}$  تحلیلی باشد و  $f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(m)}(z_0) = 0$  آنگاه تابع  $g$  که با ضابطه‌های

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{m+1}}, & z \neq z_0 \\ \frac{f^{(m+1)}(z_0)}{(m+1)!}, & z = z_0 \end{cases}$$

تعریف می‌شود در  $\mathbb{D}$  تحلیلی است.

۹. فرض کنید تابع  $f(z)$  در درون دایره  $|z - z_0| = R$  دارای نمایش سری توانی

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

باشد. با استفاده از قضیه ۲ بخش ۵۹ در مورد مشتقگیری جمله به جمله از چنین سریهایی و استقرای ریاضی نشان دهید که اگر  $R < |z - z_0|$ , آنگاه

$$f^{(n)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{k!} a_{n+k} (z - z_0)^k \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

سپس با قراردادن  $z = z_0$  نشان دهید که ضرایب  $a_n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) همان ضرایب سری تیلر  $f$  حول  $z_0$  است. بدین ترتیب برهان دیگری برای قضیه ۱، بخش ۶، ارائه دهید.

۱۰. دو سری

$$S_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad S_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n},$$

را که در یک حوزه طوقی به مرکز  $z_0$  هستند در نظر بگیرید. فرض کنید  $C$  معرف مسیری واقع در این طوق باشد و  $g(z)$  تابعی پیوسته در  $C$ . اثبات قضیه ۱، بخش ۵۹، برای

$$\int_C g(z) S_1(z) dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_C g(z) (z - z_0)^n dz,$$

را کمی تغییر داده ثابت کنید که

$$\int_C g(z) S_2(z) dz = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_C \frac{g(z)}{(z - z_0)^n} dz.$$

با استفاده از این روابط نتیجه بگیرید که اگر

$$S(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n},$$

آنگاه

$$\int_C g(z) S(z) dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_C g(z) (z - z_0)^n dz.$$

۱۱. نشان دهید که تابع

$$f_2(z) = \frac{1}{z^2 + 1} \quad (z \neq \pm i)$$

ادامه تحلیلی (بخش ۲۶) تابع

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n} \quad (|z| < 1)$$

به حوزه متشکل از همه نقاط صفحه  $z$  بجز  $z = \pm i$  است.

۱۲. نشان دهید که تابع  $f_2(z) = 1/z^2$  عبارت است از ادامه تحلیلی (بخش ۲۶) تابع

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(z+1)^n \quad (|z+1| < 1)$$

به حوزه متشکل از همه نقاط صفحه  $z$  بجز  $z = -1$ .

## ۶۱. ضرب و تقسیم سریهای توانی

فرض کنید هر یک از سریهای توانی

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n \quad \text{و} \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad (1)$$

در درون دایره  $|z - z_0| = R$  همگرا باشد. پس مجموعهای آنها، به ترتیب،  $f(z)$  و  $g(z)$  توابعی تحلیلی در قرص  $|z - z_0| < R$  (بخش ۵۹) هستند و حاصل ضرب این مجموعهای سری تیلری دارد که در آن قرص معتبر است:

$$f(z)g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \quad (|z - z_0| < R). \quad (2)$$

بنابر قضیه ۱، بخش ۶۰، سریهای (۱) خود سری تیلرند. بنابراین سه ضریب اول در سری

(۲) با ضابطه‌های زیر داده می‌شوند

$$c_0 = f(z_0)g(z_0) = a_0 b_0,$$

$$c_1 = \frac{f(z_0)g'(z_0) + f'(z_0)g(z_0)}{1!} = a_0 b_1 + a_1 b_0,$$

$$c_2 = \frac{f(z_0)g''(z_0) + 2f'(z_0)g'(z_0) + f''(z_0)g(z_0)}{2!} = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0.$$

فرمول کلی برای ضریب  $c_n$  را می‌توان به آسانی با استناد به قاعده لایپیتیس برای مشتق  $n$  حاصلضرب دو تابع مشتقپذیر به دست آورد (تمرین ۶)

$$[f(z)g(z)]^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(z)g^{(n-k)}(z), \quad (3)$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n).$$

طبق معمول  $f^{(0)}(z) = f(z)$  و  $a_0 = 1$ . آشکارا دیده می‌شود که

$$c_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} \cdot \frac{g^{(n-k)}(z_0)}{(n-k)!} = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k};$$

ولذا می‌توان بسط (۲) را به صورت زیر نوشت

$$\begin{aligned} f(z)g(z) &= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)(z - z_0) \\ &\quad + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)(z - z_0)^2 + \dots \\ &\quad + \left( \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) (z - z_0)^n + \dots \quad (|z - z_0| < R). \end{aligned} \quad (4)$$

سری (۴) همان سری است که از ضرب جمله به جمله دو سری (۱) در هم و دسته‌بندی جملاتی که دارای یک توان  $z - z_0$  هستند حاصل می‌شود، این را حاصلضرب کوشی دو سری مفروض می‌نامند.

مثال ۱. تابع  $(1+z)/e^z$  دارای نقطهٔ تکینی در  $z = -1$  است و لذا نمایش سری مکلورن آن در قرص باز  $|z| < |z_0|$  معتبر است. اولین سه جملهٔ ناصلفر آن به‌آسانی با نوشتن

$$\frac{e^z}{1+z} = e^z \frac{1}{1-(-z)} = \left(1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \dots\right) (1-z+z^2-z^3+\dots)$$

و ضرب جملهٔ دو سری به‌دست می‌آید. به عبارت دقیق‌تر، می‌توان هر یک از جملات سری اول را در  $1$  و سپس هر یک از جملات را در  $-z$  ضرب کرد و غیره. روش رده‌بندی زیر را پیشنهاد می‌کنیم، که در آن توانهای مساوی  $z$  به‌طور قائم دسته‌بندی شده‌اند به قسمی که ضرایب آنها را بتوان به‌سهولت با هم جمع کرد:

$$\begin{aligned} & 1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \dots \\ & -z - z^2 - \frac{1}{2}z^3 - \frac{1}{6}z^4 - \dots \\ & z^2 + z^3 + \frac{1}{2}z^4 + \frac{1}{6}z^5 + \dots \\ & -z^3 - z^4 - \frac{1}{2}z^5 - \frac{1}{6}z^6 - \dots \\ & \vdots \end{aligned}$$

نتیجهٔ مطلوب عبارت است از

$$\frac{e^z}{1+z} = 1 + \frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{3}z^3 + \dots \quad (|z| < 1). \quad (5)$$

با این فرض ادامه می‌دهیم که  $f(z)$  و  $g(z)$  معرف مجموعهای سریهای (۱) باشند و فرض می‌کنیم که  $g(z) \neq 0$  هرگاه  $|z - z_0| < R$ . چون خارج قسمت  $f(z)/g(z)$  در سراسر قرص  $|z - z_0| < R$  تحلیلی است، دارای نمایش سری تیلر زیر است

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} d_n (z - z_0)^n \quad (|z - z_0| < R), \quad (6)$$

که در آن ضرایب  $d_n$  را می‌توان با مشتقگیری متوالی از  $(z-z_0)f(z)/g(z)$  و محاسبهٔ مشتقات در  $z = z_0$  به‌دست آورد. نتایج همان است که با تقسیم صوری اولین سری (۱) بر دومین سری آن به‌دست می‌آید. چون عموماً در عمل فقط به چند جملهٔ اول نیاز داریم، این روش مشکل نیست.

مثال ۲. همان‌طور که در بخش ۳۴ اشاره شد صفرهای تابع  $\sinh z$  اعداد  $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)z = n\pi i$  هستند. بنابراین خارج قسمت

$$\frac{1}{z^2 \sinh z} = \frac{1}{z^2(z + z^3/3! + z^5/5! + \dots)},$$

که می‌توان آن را به صورت زیر نوشت

$$\frac{1}{z^2 \sinh z} = \frac{1}{z^3} \left( \frac{1}{1 + z^2/3! + z^4/5! + \dots} \right), \quad (7)$$

دارای نمایش سری لورانی در قرص محذوف  $\pi < |z| < \infty$  است. مخرج کسر داخل پرانتر سمت راست عبارت (7) یک سری توانی است که وقتی  $z = 0$  به  $(\sinh z)/z$  و وقتی  $|z| > \pi$  به ۱ همگراست. بنابراین مجموع این سری هیچ‌جا در قرص  $\pi < |z| < \infty$  صفر نیست و نمایش سری توانی این کسر را می‌توان به روش زیر با تقسیم یک بر این سری بدست آورد:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1 + \frac{1}{3!}z^2 + \frac{1}{5!}z^4 + \dots} \\ & \frac{-\frac{1}{3!}z^2 - \frac{1}{5!}z^4 + \dots}{-\frac{1}{3!}z^2 - \frac{1}{5!}z^4 + \dots} \\ & \frac{\left[ \frac{1}{(3!)^2} - \frac{1}{5!} \right] z^4 + \dots}{\left[ \frac{1}{(3!)^2} - \frac{1}{5!} \right] z^4 + \dots} \\ & \vdots \end{aligned}$$

$$\frac{1}{1 + z^2/3! + z^4/5! + \dots} = 1 - \frac{1}{3!}z^2 + \left[ \frac{1}{(3!)^2} - \frac{1}{5!} \right] z^4 + \dots,$$

یعنی،

یا

$$\frac{1}{1+z^2/3!+z^4/5!+\dots} = 1 - \frac{1}{6}z^2 + \frac{7}{360}z^4 + \dots \quad (|z| < \pi). \quad (8)$$

بنابراین

$$\frac{1}{z^2 \sinh z} = \frac{1}{z^3} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{z} + \frac{7}{360} z + \dots \quad (0 < |z| < \pi). \quad (9)$$

گرچه فقط سه جمله اول ناصرف این سری لوران را ارائه داده ایم اما با ادامه تقسیم می توان هر تعداد از جملات را پیدا کرد.

### تمرینها

۱. با استفاده از حاصلضرب سریها، نشان دهید که

$$\frac{e^z}{z(z^2 + 1)} = \frac{1}{z} + 1 - \frac{1}{2}z - \frac{5}{6}z^3 + \dots \quad (0 < |z| < 1).$$

۲. با نوشتن  $\csc z = 1/\sin z$  و استفاده از تقسیم، نشان دهید که

$$\csc z = \frac{1}{z} + \frac{1}{3!}z + \left[ \frac{1}{(3!)^2} - \frac{1}{5!} \right] z^3 + \dots \quad (0 < |z| < \pi).$$

۳. با استفاده از تقسیم نمایش سری لوران را به دست آورید

$$\frac{1}{e^z - 1} = \frac{1}{z} - \frac{1}{2} + \frac{1}{12}z - \frac{1}{720}z^3 + \dots \quad (0 < |z| < 2\pi).$$

۴. با استفاده از بسط

$$\frac{1}{z^2 \sinh z} = \frac{1}{z^3} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{z} + \frac{7}{360} z + \dots \quad (0 < |z| < \pi).$$

در مثال ۲، بخش ۶۱، و روشی که در مثال ۱، بخش ۵۶ تشریح شد نشان دهید اگر  $C$  دایره  $|z| = ۱$  در جهت عکس حرکت عقربه های ساعت باشد، آنگاه

$$\int_C \frac{dz}{z^2 \sinh z} = -\frac{\pi i}{3}.$$

۵. طی مراحل زیر، که روش مستقیم دیگری را جهت تقسیم سریها نشان می دهد، نمایش (۸) مثال ۲، بخش ۶۱، را به دست آورید.

(الف) قرار دهید

$$\frac{1}{1+z^2/3!+z^4/5!+\dots} = d_0 + d_1 z + d_2 z^2 + d_3 z^3 + d_4 z^4 + \dots,$$

که در آن ضرایب سری توانی طرف راست با ضرب دو سری در معادله زیر به دست می‌آیند

$$1 = \left( 1 + \frac{1}{3!} z^2 + \frac{1}{5!} z^4 + \dots \right) (d_0 + d_1 z + d_2 z^2 + d_3 z^3 + d_4 z^4 + \dots).$$

با انجام این ضرب نشان دهید که اگر  $\pi < |z|$  آنگاه

$$(d_0 - 1) + d_1 z + \left( d_2 + \frac{1}{3!} d_0 \right) z^2 + \left( d_3 + \frac{1}{3!} d_1 \right) z^3 + \left( d_4 + \frac{1}{3!} d_2 + \frac{1}{5!} d_0 \right) z^4 + \dots = 0$$

- (ب) با مساوی صفر قراردادن ضرایب در آخرین سری قسمت (الف) مقادیر  $d_0, d_1, d_2, d_3$  و  $d_4$  را بیابید. با این مقادیر، اولین رابطه قسمت (الف) تبدیل به رابطه (۸) بخش ۶۱ می‌شود.
۶. با استفاده از استقرای ریاضی درستی فرمول (۳) بخش ۶۱ را برای مشتق  $n$  حاصلضرب دوتابع مشتقپذیر تحقیق کنید.

۷. فرض کنید  $f(z)$  تابع تامی باشد که با یک سری به صورت زیر نمایش داده شده است

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots \quad (|z| < \infty).$$

- (الف) با مشتقگیری متوالی از تابع مرکب  $f[f(z)] = f(g(z))$  اولین سه جمله ناصفر در سری مکلورن  $(g(z))$  را به دست آورید و بدین ترتیب نشان دهید که

$$f[f(z)] = z + 2a_2 z^2 + 2(a_2^2 + a_3)z^3 + \dots \quad (|z| < \infty).$$

- (ب) نتیجه قسمت (الف) را به روش صوری چنین به دست آورید که بنویسید

$$f[f(z)] = f(z) + a_2 [f(z)]^2 + a_3 [f(z)]^3 + \dots$$

- و در سمت راست این رابطه به جای  $f(z)$  نمایش سری آن را قرار دهید و جملاتی را که توان  $z$  آنها یکی است با هم بگیرید.

(ج) با به کار بردن نتیجه قسمت (الف) برای تابع  $f(z) = \sin z$  نشان دهید که

$$\sin(\sin z) = z - \frac{1}{3}z^3 + \dots \quad (|z| < \infty).$$

۸. اعداد اویلر عبارت اند از اعداد  $E_n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) در نمایش سری مکلورن

$$\frac{1}{\cosh z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_n}{n!} z^n \quad (|z| < \pi/2).$$

بگویید چرا این نمایش در قرص نشان داده شده معتبر است و چرا

$$E_{2n+1} = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

سپس نشان دهید که

$$E_0 = 1, \quad E_2 = -1, \quad E_4 = 5, \quad E_6 = -61.$$

# ۶

## مانده‌ها و قطبها

قضیه کوشی-گورسا (بخش ۴۴) بیان می‌کند که اگر تابعی در همه نقاط درون و روی مسیر ساده و بسته  $C$  تحلیلی باشد، آنگاه انتگرال تابع پیرامون آن مسیر صفر است. ولی اگر تابع در تعدادی متناهی نقطه از نقاط درونی  $C$  تحلیلی نباشد، همان‌طورکه در این فصل خواهیم دید، اثر این نقاط از طریق عدد مشخصی موسوم به مانده در مقدار انتگرال ظاهر می‌شود. در اینجا نظریه مانده‌ها را ارائه می‌دهیم و در فصل ۷ استفاده آنها را در برخی زمینه‌های ریاضی کاربردی نشان می‌دهیم.

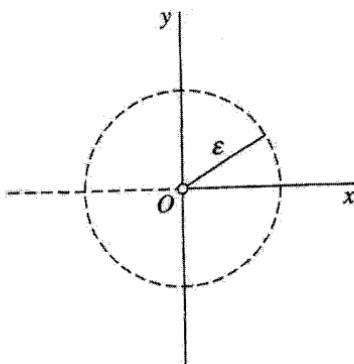
### ۶۲. مانده‌ها

یادآوری می‌کنیم (بخش ۲۳) که نقطه  $\infty$  یک نقطه تکین تابع  $f$  نامیده می‌شود، اگر  $f$  در  $\infty$  تحلیلی نباشد اما در نقطه‌ای از هر همسایگی  $\infty$  تحلیلی باشد. نقطه تکین  $\infty$  را تنها نامند هرگاه علاوه بر این، همسایگی مذکوفی از  $\infty$  مانند  $\epsilon < |z - z_0| < \delta$  موجود باشد که  $f$  در سراسر آن تحلیلی است.

#### مثال ۱. تابع

$$\frac{z+1}{z^3(z^2+1)}$$

دارای سه نقطه تکین تنها  $z = \pm i$ ،  $z = 0$  است.



شکل ۸۰

**مثال ۲.** مبدأ یک نقطه تکین شاخه اصلی (بخش ۳۰)

$$\operatorname{Log} z = \ln r + i\Theta \quad (r > 0, -\pi < \Theta < \pi)$$

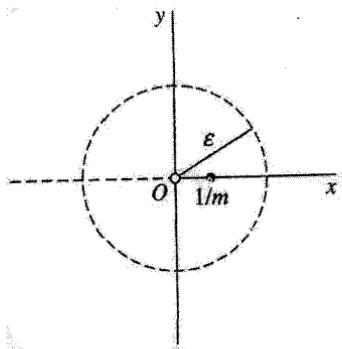
تابع لگاریتمی است. ولی نقطه تکین تنها نیست زیرا هر همسایگی محذوف مبدأ شامل نقاطی روی محور حقیقی منفی است (شکل ۸۰ را ببینید) و این شاخه حتی در آنجا تعریف نشده است.

**مثال ۳.** تابع

$$\frac{1}{\sin(\pi/z)}$$

دارای نقاط تکین  $z = 1/n$  و  $z = 1/\varepsilon$  ( $n = \pm 1, \pm 2, \dots$ ) است که همه آنها بر پاره خطی از محور حقیقی واقع‌اند که بین  $-1 = z$  تا  $1 = z$  است. هر نقطه تکین بجز  $z = 0$ ، تنهاست. نقطه تکین  $z = 0$  تنها نیست زیرا هر همسایگی محذوف مبدأ شامل نقاط تکین دیگری از تابع است. به عبارت دقیقتر اگر  $\varepsilon$  عدد مثبت مشخصی باشد و  $m$  عدد صحیح مثبتی باشد به طوری که  $1/\varepsilon < m$ ، آنگاه  $1/m < 1/\varepsilon < 0$  یعنی نقطه  $z = 1/m$  در  $\varepsilon$ -همسایگی محذوف  $\varepsilon < |z| < 0$  واقع است (شکل ۸۱).

اگر  $z$  یک نقطه تکین تنها تابع  $f$  باشد، عدد مثبتی مانند  $R_2$  هست به قسمی که تابع  $f$



شکل ۸۱

در هر نقطه  $z$  با ویزگی  $R_2 < |z - z_0| < \infty$ , تحلیلی است. در نتیجه این تابع با سری لوران

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \frac{b_1}{z - z_0} + \frac{b_2}{(z - z_0)^2} + \cdots + \frac{b_n}{(z - z_0)^n} + \cdots \quad (0 < |z - z_0| < R_2) \quad (1)$$

نمایش داده می‌شود، که در آن  $a_n$  و  $b_n$  دارای نمایش انتگرالی‌اند (بخش ۵۵). به خصوص

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{n+1}} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

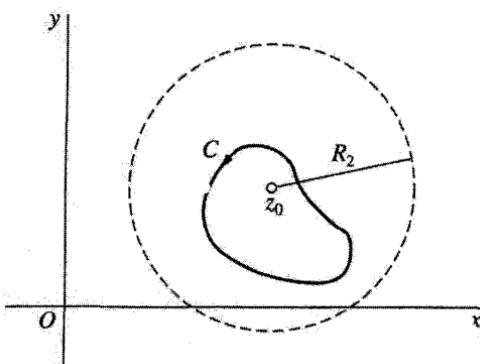
که در آن  $C$  مسیر ساده بسته‌ای حول نقطه  $z$  در جهت مثبت و واقع در قرص محذوف  $|z - z_0| < R_2$  است (شکل ۸۲). وقتی  $n = 1$  این فرمول برای  $b_1$  را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i b_1. \quad (2)$$

عدد مختلط  $b_1$  را که ضریب  $1/(z - z_0)$  در بسط (۱) است مانده  $f$  در نقطه تکین تنهای  $z$  می‌نامند. اغلب برای نمایش مانده  $b_1$  از نماد

$$\text{Res}_{z=z_0} f(z),$$

یا وقتی نقطه  $z$  و تابع  $f$  بهوضوح مشخص باشند صرفاً از  $B$ , استفاده خواهیم کرد.



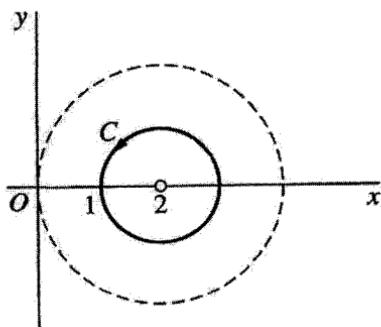
شکل ۸۲

معادله (۲) روشی توانا برای محاسبه برخی انتگرال‌ها پیرامون مسیرهای ساده بسته را به دست می‌دهد.

#### مثال ۴. انتگرال

$$\int_C \frac{dz}{z(z - 2)^4}, \quad (3)$$

را در نظر می‌گیریم، که در آن  $C$  دایره  $|z - 2| = 1$  در جهت مثبت است (شکل ۸۳). چون انتگرال‌ده همه جا در صفحه متناهی بجز در نقاط  $z = 0$  و  $z = 2$  تحلیلی است، دارای نمایش سری لورانی است که در قرص مذوف  $2 < |z - 2| < 0$  معتبر است، این قرص نیز در شکل ۸۳ نشان داده شده است. در نتیجه بنابر رابطه (۲) مقدار انتگرال (۳) برابر با حاصل ضرب



شکل ۸۳

$2\pi i$  و مانده انتگرال‌ده در  $z = 2$  است. برای تعیین این مانده بسط سری مکلورن

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad (|z| < 1)$$

را به یاد می‌آوریم (بخش ۵۴) و با استفاده از آن می‌نویسیم

$$\begin{aligned} \frac{1}{z(z-2)^4} &= \frac{1}{(z-2)^4} \cdot \frac{1}{2+(z-2)} \\ &= \frac{1}{2(z-2)^4} \cdot \frac{1}{1 - \left(-\frac{z-2}{2}\right)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} (z-2)^{n-4} \quad (0 < |z-2| < 2). \end{aligned}$$

در این سری لوران که می‌توان آن را به صورت (۱) نوشت، ضریب  $(z-2)/z$  مانده مطلوب یعنی  $-1/16$  است. در نتیجه

$$\int_C \frac{dz}{z(z-2)^4} = 2\pi i \left(-\frac{1}{16}\right) = -\frac{\pi i}{8}. \quad (4)$$

مثال ۵. نشان می‌دهیم که

$$\int_C \exp\left(\frac{1}{z^2}\right) dz = 0 \quad (5)$$

که در آن  $C$  دایره واحد  $|z| = 1$  است. چون  $1/z^2$  همه جا بجز در مبدأ تحلیلی است، انتگرال‌ده نیز چنین است. نقطه تکین تنهای  $z = 0$  در داخل  $C$  است و به کمک سری مکلورن (بخش ۵۴)

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots \quad (|z| < \infty),$$

می‌توان بسط سری لوران زیر را نوشت

$$\exp\left(\frac{1}{z^2}\right) = 1 + \frac{1}{1!} \cdot \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{z^4} + \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{z^6} + \dots \quad (0 < |z| < \infty).$$

بنابراین مانده انتگرال‌ده در نقطه تکین تنهایش، یعنی  $z = 0$ ، صفر است ( $b_1 = 0$ ) و مقدار انتگرال (۵) به دست می‌آید.

در این مثال متوجه می‌شویم که گرچه تحلیلی بودن تابع در درون و روی مسیر ساده بسته  $C$  شرطی کافی برای صفرشدن مقدار انتگرال روی  $C$  است ولی شرط لازمی برای آن نیست.

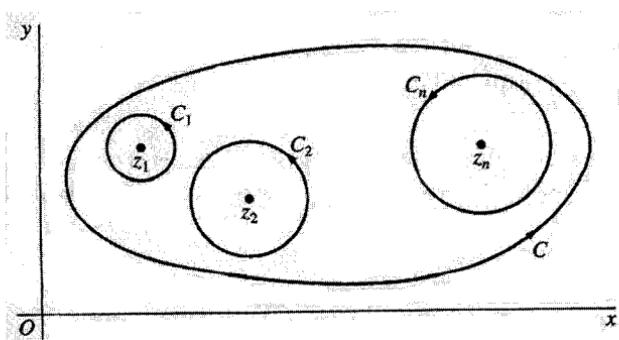
### ۶۳. قضیه مانده‌کوشی

اگر تابع  $f$  درون مسیر ساده بسته  $C$  بجز در تعدادی متناهی نقطه تکین تحلیلی باشد، آنگاه نقاط تکین باید تنها باشند (بخش ۶۲). قضیه زیر، که به قضیه مانده‌کوشی مشهور است و آن را قضیه مانده‌ها نیز می‌نامند، بیان دقیقی از این امر است که اگر  $f$  روی  $C$  نیز تحلیلی باشد و  $C$  را در جهت مثبت بگیریم، آنگاه مقدار انتگرال  $f$  پیرامون  $C$  برابر با حاصل ضرب  $2\pi i$  در مجموع مانده‌های مربوط به آن نقاط تکین است.

قضیه. فرض کنید  $C$  مسیر ساده بسته‌ای در جهت مثبت باشد. اگر تابع  $f$  در درون و روی  $C$  بجز در تعدادی متناهی نقطه تکین  $(z_k)$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) که در داخل  $C$  هستند، تحلیلی باشند، آنگاه

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z). \quad (1)$$

برای اثبات قضیه، فرض کنید نقاط  $(z_k)$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) مرکز دوایر  $C_k$  با جهت مثبت باشند که در داخل  $C$  واقع و آنقدر کوچک‌اند که هیچ دوتایی از این دوایر نقطه مشترکی ندارند (شکل ۸۴). دوایر  $C_k$  همراه با مسیر ساده بسته  $C$  مرز ناحیه‌ای را تشکیل می‌دهند که  $f$  در سراسر آن تحلیلی است و داخل آن یک حوزه همبند چندگانه است. پس بنابر تعمیم قضیه کوشی-گورسا



شکل ۸۴

به اینگونه نواحی (قضیه ۲، بخش ۴۶)

$$\int_C f(z) dz - \sum_{k=1}^n \int_{C_k} f(z) dz = 0.$$

این تساوی به فرمول (۱) تبدیل می‌شود زیرا (بخش ۶۲)

$$\int_{C_k} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z) \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

و اثبات کامل می‌شود.

مثال. با استفاده از این قضیه، انتگرال

$$\int_C \frac{5z - 2}{z(z-1)} dz$$

را محاسبه می‌کنیم که در آن  $C$  دایره  $|z| = 2$  با جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت است.

انتگرالده دارای دو نقطه تکین  $z = 0$  و  $z = 1$  است که هر دو در داخل  $C$  واقع‌اند. می‌توانیم

مانده‌های  $B_1$  در  $z = 0$  و  $B_2$  در  $z = 1$  را به کمک سری مکلورن

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \dots \quad (|z| < 1).$$

پیدا کنیم. ابتدا ملاحظه می‌کنیم که وقتی  $|z| < 1$  (شکل ۸۵)،

$$\frac{5z - 2}{z(z-1)} = \frac{5z - 2}{z} \cdot \frac{-1}{1-z} = \left(5 - \frac{2}{z}\right) (-1 - z - z^2 - \dots);$$

و با مشخص کردن ضریب  $z$  در حاصلضرب طرف راست در می‌باشیم که  $B_1 = 2$ . همچنین،

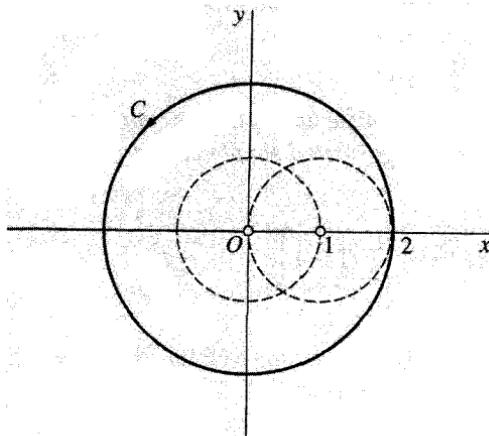
چون وقتی  $|z| < 1$  داریم  $|z-1| < 0$

$$\frac{5z - 2}{z(z-1)} = \frac{5(z-1) + 3}{z-1} \cdot \frac{1}{1+(z-1)}$$

$$= \left(5 + \frac{3}{z-1}\right) [1 - (z-1) + (z-1)^2 - \dots]$$

واضح است که  $B_2 = 3$ . بنابراین

$$\int_C \frac{5z - 2}{z(z-1)} dz = 2\pi i (B_1 + B_2) = 10\pi i.$$



شکل ۸۵

در این مثال، البته ساده‌تر این است که انتگرال‌ده را به صورت مجموع کسرهای جزئی آن بنویسیم:

$$\frac{5z - 2}{z(z-1)} = \frac{2}{z} + \frac{3}{z-1}.$$

در این صورت چون  $2/z$  وقتی  $1 < |z| < \infty$  و  $(1-z)/z$  وقتی  $1 < |z-1| < \infty$ ، خود سری لوران هستند در نتیجه

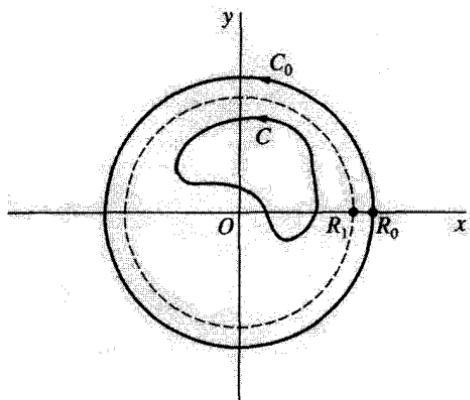
$$\int_C \frac{5z - 2}{z(z-1)} dz = 2\pi i(2) + 2\pi i(3) = 10\pi i.$$

#### ۶۴. استفاده از فقط یک مانده

اگر تابع  $f$  در قضیه مانده کوشی (بخش ۶۳)، بعلاوه در هر نقطهٔ صفحهٔ متناهی که در خارج  $C$  است تحلیلی باشد، بعضی مواقع کاراتر است که انتگرال  $f$  روی  $C$  را با یافتن تنها یک مانده برای تابعی وابسته به  $f$  محاسبه کنیم. این روش را به صورت یک قضیه بیان می‌کنیم.\*

قضیه. فرض کنید  $C$  مسیر سادهٔ بسته‌ای در جهت مثبت باشد. اگر تابع  $f$  همه جا در

\* این شیوه کار در نظریه مانده‌ها در بینهایت مطرح می‌شود که ما بررسی نمی‌کنیم. برای جزئیات این نظریه مثلاً صفحات ۷۶ و ۷۷ کتاب زیر را ببینید.



شکل ۸۶

صفحةٌ متناهی، بجز در تعدادی متناهی نقطهٌ تکین واقع در داخل  $C$ ، تحلیلی باشد آنگاه

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=0} \left[ \frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) \right]. \quad (1)$$

برای به دست آوردن عبارت (۱)، دایره  $|z| = R_1$  را می‌سازیم که به قدر کافی بزرگ است تا مسیر  $C$  در داخل آن باشد (شکل ۸۶). در این صورت اگر  $C$  معرف دایره  $|z| = R_0$  در جهت مثبت باشد که در آن  $R_1 > R_0$ ، بنابر قضیهٔ لوران (بخش ۵۵) می‌دانیم که

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n \quad (R_1 < |z| < \infty), \quad (2)$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} \frac{f(z) dz}{z^{n+1}} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (3)$$

با قراردادن  $n = -1$  در عبارت (۳) در می‌یابیم که

$$\int_{C_0} f(z) dz = 2\pi i c_{-1}. \quad (4)$$

ملحوظه کنید که چون شرط برقراری نمایش (۲) از نوع  $|z| < R_2$  نیست، ضریب  $c_{-1}$  مانده  $f$  در  $z = 0$  نیست. حتی ممکن است نقطهٔ  $z = 0$  نقطهٌ تکین  $f$  نباشد. اما اگر در نمایش

(۲) و شرط برقراری آن، به جای  $z$  مقدار  $z/1$  را قرار دهیم، می‌بینیم که

$$\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{c_n}{z^{n+2}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{c_{n-2}}{z^n} \quad \left(0 < |z| < \frac{1}{R_1}\right).$$

ولذا

$$c_{-1} = \operatorname{Res}_{z=0} \left[ \frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) \right]. \quad (5)$$

در نتیجه بنابر روابط (۴) و (۵) داریم

$$\int_{C_0} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=0} \left[ \frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) \right].$$

بالاخره چون  $f$  در سراسر ناحیه بسته محدود به  $C$  و  $C_0$  تحلیلی است، بنابر اصل تغییر شکل مسیرها (فرع ۲، بخش ۴۶)، نتیجه مطلوب (۱) به دست می‌آید.

مثال. در مثال بخش ۶۳ انتگرال

$$f(z) = \frac{5z - 2}{z(z-1)}$$

پیرامون دایره  $|z|=2$ ، در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت، را با پیدا کردن مانده‌های  $f(z)$  در  $z=0$  و  $z=1$  محاسبه کردیم. چون

$$\begin{aligned} \frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) &= \frac{5-2z}{z(1-z)} = \frac{5-2z}{z} \cdot \frac{1}{1-z} \\ &= \left(\frac{5}{z} - 2\right) (1 + z + z^2 + \dots) \\ &= \frac{5}{z} + 3 + 3z + \dots \quad (0 < |z| < 1), \end{aligned}$$

می‌بینیم که می‌توان از قضیه فوق، که در آن مانده مطلوب برابر با ۵ است، استفاده کرد. به عبارت دقیقتر،

$$\int_C \frac{5z - 2}{z(z-1)} dz = 2\pi i(5) = 10\pi i,$$

که در آن  $C$  دایرة مطرح شده در مسئله است. البته، این همان نتیجه حاصل در بخش ۶۳ است.

## تمرینها

۱. مانده هر یک از توابع زیر را در  $z = 0$  بیابید.

$$\begin{array}{lll} \text{(الف)} & \frac{1}{z+z^2} & z \cos\left(\frac{1}{z}\right) \\ \text{(ب)} & \frac{1}{z^4(1-z^2)} & \frac{\sinh z}{z^4} \\ \text{(ج)} & \frac{\cot z}{z^4} & \end{array}$$

جواب: (الف) ۱؛ (ب)  $-\frac{1}{2}$ ؛ (ج) ۰؛ (د)  $-\frac{1}{45}$ ؛ (ه)  $\frac{7}{4}$ .

۲. با استفاده از قضیه مانده کوشی (بخش ۶۳) مقدار انتگرال هر یک از توابع زیر را روی دایره  $|z| = 3$  در جهت مثبت محاسبه کنید.

$$\begin{array}{lll} \text{(الف)} & \frac{\exp(-z)}{z-1)^2} & \frac{\exp(-z)}{z^2} \\ \text{(ب)} & \frac{z+1}{z^2-2z} & z^2 \exp\left(\frac{1}{z}\right) \\ \text{(د)} & & \end{array}$$

جواب: (الف)  $-2\pi i$ ؛ (ب)  $-\frac{2\pi i}{e}$ ؛ (ج)  $\frac{2\pi i}{3}$ ؛ (د)  $0$ .

۳. با استفاده از قضیه بخش ۶۴ که تنها با یک مانده سروکار دارد، مقدار انتگرال هر یک از توابع زیر را روی دایره  $|z| = 2$  در جهت مثبت محاسبه کنید.

$$\frac{1}{z}; \frac{1}{1+z^2}; \frac{z^5}{1-z^3} \quad \text{(الف)} \quad \text{(ب)} \quad \text{(ج)}$$

جواب: (الف)  $-2\pi i$ ؛ (ب)  $0$ ؛ (ج)  $2\pi i$ .

۴. فرض کنید  $C$  معرف دایره  $|z| = 1$  در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت باشد، مراحل زیر را طی کرده نشان دهید که

$$\int_C \exp\left(z + \frac{1}{z}\right) dz = 2\pi i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(n+1)!}.$$

(الف) با استفاده از بسط سری مکلورن برای  $e^z$  و استناد به قضیه ۱، بخش ۵۹، که بر مبنای آن می‌توان جمله به جمله انتگرال گرفت، انتگرال بالا را به صورت زیر بنویسید

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_C z^n \exp\left(\frac{1}{z}\right) dz.$$

(ب) با استفاده از قضیه بخش ۶۳، انتگرالهای قسمت (الف) را محاسبه کرده به نتیجه مطلوب برسید.

۵. فرض کنید درجه چندجمله‌یهای

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n \quad (a_n \neq 0)$$

$$Q(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots + b_m z^m \quad (b_m \neq 0)$$

طوری باشند که  $m \geq n + 2$ . با استفاده از قضیه بخش ۶۴ نشان دهید اگر همه صفرهای درون مسیر ساده بسته  $C$  واقع باشند، آنگاه  $\int_C \frac{P(z)}{Q(z)} dz = 0$ .

$$\int_C \frac{P(z)}{Q(z)} dz = 0.$$

[با تمرین ۳ (ب) مقایسه کنید].

## ۶۵. سه نوع نقطه تکین تنها

در بخش ۶۲ دیدیم که نظریه ماندها بر مبنای این واقعیت بنا شده است که اگر  $f$  دارای نقطه تکین تنها  $z_0$  باشد، آنگاه  $f(z)$  را می‌توان در قرص محدود  $|z - z_0| < R_2$  با سری لوران زیر نمایش داد

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \frac{b_1}{z - z_0} + \frac{b_2}{(z - z_0)^2} + \cdots + \frac{b_n}{(z - z_0)^n} + \cdots \quad (1)$$

بخش

$$\frac{b_1}{z - z_0} + \frac{b_2}{(z - z_0)^2} + \cdots + \frac{b_n}{(z - z_0)^n} + \cdots$$

از این سری را که شامل توانهای منفی  $z - z_0$  است، قسمت اصلی  $f$  در  $z_0$  می‌نامند. حال با استفاده از قسمت اصلی، نقطه تکین تنها  $z_0$  را در مقام یکی از سه نوع خاص مشخص می‌سازیم. این رده‌بندی ما را در بررسی نظریه ماندها در بخش‌های بعد یاری خواهد کرد.

اگر قسمت اصلی  $f$  در  $z_0$  شامل حداقل یک جمله نااصر باشد ولی تعداد این‌گونه جملات متناهی باشد، عدد صحیح مثبتی مانند  $m$  هست به قسمی که

$$b_{m+1} = b_{m+2} = \cdots = 0 \quad \text{و} \quad b_m \neq 0$$

یعنی بسط (۱) به صورت زیر در می‌آید

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n + \frac{b_1}{z - z_0} + \frac{b_2}{(z - z_0)^2} + \cdots + \frac{b_m}{(z - z_0)^m} \quad (0 < |z - z_0| < R_2) \quad (2)$$

که در آن  $b_m \neq 0$ . در این حالت نقطه تکین تنها  $z_0$  را قطب مرتبه  $m$  می‌نامند.\* هر قطب مرتبه  $m = 1$  را معمولاً یک قطب ساده می‌گویند.

مثال ۱. ملاحظه کنید که تابع

$$\frac{z^2 - 2z + 3}{z - 2} = \frac{z(z - 2) + 3}{z - 2} = z + \frac{3}{z - 2} = 2 + (z - 2) + \frac{3}{z - 2} \quad (0 < |z - 2| < \infty)$$

دارای یک قطب ساده ( $m = 1$ ) در  $z_0 = 2$  است.  $b_1$ ، مانده تابع در این نقطه، ۳ است.

مثال ۲. تابع

$$\frac{\sinh z}{z^4} = \frac{1}{z^4} \left( z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} + \cdots \right) = \frac{1}{z^3} + \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{z} + \frac{z}{5!} + \frac{z^3}{7!} + \cdots \quad (0 < |z| < \infty)$$

در  $z_0 = 0$  دارای قطب مرتبه  $m = 3$  با مانده  $b_1 = 1/6$  است.

دو حالت فرین باقی می‌مانند، حالتی که در آن همه ضرایب  $b_n$  در قسمت اصلی صفرند و حالتی که در آن تعدادی نامتناهی از  $b_n$ ها نا صفرند. وقتی همه  $b_n$ ها در قسمت اصلی صفر باشند، به طوری که

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots \quad (0 < |z - z_0| < R_2), \quad (3)$$

نقطه  $z_0$  به نقطه تکین برداشتی موسوم است. توجه کنید که مانده در نقطه تکین برداشتی همیشه مساوی با صفر است. اگر  $f$  را در  $z_0$  تعریف یا احتمالاً مجدداً تعریف کنیم به طوری که

\* دلایلی برای اصطلاح قطب در صفحه ۶۴ کتابی که در پانوشت بخش ۷۰ معرفی شد، آمده است.

$f(z) = a$  در سراسر قرص  $|z - z_0| < R_2$  برقرار می‌شود. چون هر سری توانی همیشه نمایش تابعی تحلیلی در درون دایره همگرایی خود داشت (بخش ۵۹)، در نتیجه  $f$  در  $\mathbb{C}$  تحلیلی می‌شود، هرگاه به  $f$  مقدار  $a$  را در آن نقطه نسبت دهیم. بدین ترتیب تکینی در  $\mathbb{C}$  برداشته می‌شود.

مثال ۳. نقطه  $\infty$  یک نقطه تکین برداشتی تابع زیر است

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1 - \cos z}{z^2} = \frac{1}{z^2} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots \right) \right] \\ &= \frac{1}{2!} - \frac{z^2}{4!} + \frac{z^4}{6!} - \dots \quad (\infty < |z| < \infty). \end{aligned}$$

در صورتی که مقدار  $1/2!$  را اختیار کنیم،  $f$  تام می‌شود.

وقتی تعداد نامتناهی از ضرایب  $b_n$  در قسمت اصلی ناصفر باشند،  $\infty$  را یک نقطه تکین اساسی  $f$  می‌نامند. یک نتیجه مهم در مورد رفتار یک تابع در نزدیکی یک نقطه تکین اساسی، قضیه پیکار<sup>۱</sup> است با این مضمون که یک تابع در هر همسایگی یک نقطه تکین اساسی خود، هر مقدار متناهی بجز احتمالاً یک مقدار را بی‌نهایت بار اختیار می‌کند.\*

مثال ۴. تابع

$$\exp\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{z^n} = 1 + \frac{1}{1!} \cdot \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{z^2} + \dots \quad (\infty < |z| < \infty)$$

یک نقطه تکین اساسی در  $\infty$  دارد، که در آن  $b_1$  مساوی یک است. برای روش ساختن قضیه پیکار، نشان می‌دهیم که تابع  $\exp(1/z)$  مقدار  $1$  را در هر همسایگی مبدأ بی‌نهایت بار اختیار می‌کند. برای انجام این کار، مثال بخش ۲۸ را به ياد می‌آوریم که  $\exp z = 1 - \exp(-z)$  هرگاه  $z = (2n+1)\pi i$  باشد. این بدان معنی است که  $\exp(1/z) = 1 - \exp(-(1/z))$ .

$$z = \frac{1}{(2n+1)\pi i} \cdot \frac{i}{i} = -\frac{i}{(2n+1)\pi} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

و بهوضوح دیده می‌شود که در هر همسایگی مبدأ تعدادی نامتناهی از این نقاط واقع است. چون به ازای هر مقدار  $z$ ،  $\exp(1/z) \neq 1$ ، صفر مقدار استثنایی در قضیه پیکار است.

1. Picard

\* برای اثبات قضیه پیکار بخش ۵۱ از جلد سوم کتاب مارکوشویچ (Markushevich) را ببینید که در پیوست ۱ معرفی شده است.

در بقیه بخش‌های این فصل، نظریه این سه نوع نقطه تکین تنها را که مطرح کردیم به صورتی عمیقتر بررسی خواهیم کرد. تأکید ما روی روش‌های مفید و کارا برای مشخص کردن قطبها و یافتن مانده‌های متناظر آنهاست.

### تمرینها

۱. در هر یک از حالات زیر، قسمت اصلی تابع را در نقطه تکین تنها آن بنویسید. تعیین کنید که آیا آن نقطه یک قطب، یک نقطه تکین برداشتی، یا یک نقطه تکین اساسی تابع مفروض است.

$$\begin{array}{ll} \text{(الف)} & z \exp\left(\frac{1}{z}\right) \\ \text{(ب)} & \frac{\sin z}{z} \\ \text{(ج)} & \frac{z^2}{1+z} \\ \text{(د)} & \frac{\cos z}{z} \\ \text{(ه)} & \frac{1}{(2-z)^2} \end{array}$$

۲. نشان دهید که نقطه تکین هر یک از توابع زیر یک قطب است.  $m$ ، مرتبه آن قطب، و  $B$  مانده متناظر آن را تعیین کنید.

$$\begin{array}{ll} \text{(الف)} & \frac{\exp(2z)}{(z-1)^2} \\ \text{(ب)} & \frac{1-\exp(2z)}{z^4} \\ \text{(ج)} & \frac{1-\cosh z}{z^3} \end{array}$$

جواب: (الف)  $1$  و  $m=1$ ; (ب)  $B=\frac{-1}{2}$  و  $m=3$ ; (ج)  $B=2e^2$  و  $m=2$ .

۳. فرض کنید  $f$  تابعی باشد که در نقطه  $\infty$  تحلیلی است و کسر زیر را در نظر بگیرید

$$g(z) = \frac{f(z)}{z - z_0}.$$

نشان دهید که

(الف) اگر  $f(z_0) \neq 0$  آنگاه  $z_0$  یک قطب ساده  $g$  با مانده  $f(z_0)$  است.

(ب) اگر  $f(z_0) = 0$  آنگاه  $z_0$  یک نقطه تکین برداشتی  $g$  است.

راهنمایی: همان‌طور که در بخش ۵۳ ذکر شد چون  $f$  حول  $\infty$  تحلیلی است سری تیلر برای در آنجا وجود دارد. هر قسمت این تمرین را با نوشتن چند جمله آن سری آغاز کنید.

۴. تابع

$$f(z) = \frac{az^3 z^2}{(z^2 + a^2)^2} \quad (a > 0)$$

را به شکل زیر بنویسید

$$\phi(z) = \frac{az^3}{(z+ai)^3} \quad \text{که در آن} \quad f(z) = \frac{\phi(z)}{(z-ai)^3}$$

بگویید چرا  $\phi(z)$  حول  $z = ai$  نمایش سری تیلر دارد، و سپس با استفاده از این مطلب نشان دهید که قسمت اصلی  $f$  در این نقطه عبارت است از

$$\frac{\phi''(ai)/2}{z-ai} + \frac{\phi'(ai)}{(z-ai)^2} + \frac{\phi(ai)}{(z-ai)^3} = -\frac{i/2}{z-ai} - \frac{a/2}{(z-ai)^2} - \frac{a^3 i}{(z-ai)^3}.$$

## ۶۶. مانده در قطب

وقتی تابع  $f$  در نقطه  $z_0$  یک تکینی تنها داشته باشد، روش اصلی برای مشخص کردن  $z_0$  به عنوان یک قطب و یافتن مانده در آنجا، این است که سری لوران مناسبی بنویسیم و به ضریب  $(z-z_0)^{-1}$  توجه کنیم. قضیه زیر روش دیگری است برای مشخص کردن قطبها و یافتن مانده‌های متناظر آنها.

قضیه.  $z_0$  نقطه تکین تنهای تابع  $f$ ، یک قطب از مرتبه  $m$  است اگر و فقط اگر  $\phi(z)$  را بتوان به صورت زیر نوشت

$$f(z) = \frac{\phi(z)}{(z-z_0)^m}, \quad (1)$$

که در آن،  $\phi(z)$  در  $z_0$  تحلیلی و ناصرف است. به علاوه

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = \phi(z_0) \quad \text{آنگاه } m = 1 \quad (2)$$

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{\phi^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!} \quad \text{آنگاه } m \geq 2 \quad (3)$$

ملحوظه کنید که نیازی نیست عبارت (2) را جداگانه بنویسیم زیرا با قراردادهای  $\phi^{(0)}(z_0) = \phi(z_0)$  و  $1 = 1!$ ، عبارت (3) برای  $m = 1$  به آن تبدیل می‌شود. برای اثبات قضیه، ابتدا فرض می‌کنیم  $f(z)$  به صورت (1) باشد و یادآوری می‌کنیم (بخش ۵۳) که چون  $\phi(z)$  در  $z_0$  تحلیلی است، در یک همسایگی  $\varepsilon < |z - z_0|$  از  $z_0$  دارای سری

$$\phi(z) = \phi(z_0) + \frac{\phi'(z_0)}{1!}(z - z_0) + \frac{\phi''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \dots$$

$$+ \frac{\phi^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}(z - z_0)^{m-1} + \sum_{n=m}^{\infty} \frac{\phi^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$$

و از عبارت (۱) نتیجه می‌شود که اگر  $\varepsilon < |z - z_0|$  باشد آنگاه

$$f(z) = \frac{\phi(z_0)}{(z - z_0)^m} + \frac{\phi'(z_0)/1!}{(z - z_0)^{m-1}} + \frac{\phi''(z_0)/2!}{(z - z_0)^{m-2}} + \dots \quad (4)$$

$$+ \frac{\phi^{(m-1)}(z_0)/(m-1)!}{z - z_0} + \sum_{n=m}^{\infty} \frac{\phi^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^{n-m}$$

از این نمایش سری لوران، همراه با این واقعیت که  $\phi(z_0)$  معلوم می‌شود که در واقع  $z$  یک قطب مرتبه  $m$  تابع  $f(z)$  است. البته از ضریب  $(z - z_0)^1$  نتیجه می‌شود که مانده  $(z_0)$  در  $z$  همان طور است که در صورت قضیه بیان شد.  
از طرف دیگر، فرض کنید که فقط بدانیم،  $z$  یک قطب مرتبه  $m$  تابع  $f$  باشد یا اینکه  $f(z)$  دارای نمایش سری لوران زیر باشد

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n + \frac{b_1}{z - z_0} + \frac{b_2}{(z - z_0)^2} + \dots + \frac{b_{m-1}}{(z - z_0)^{m-1}} + \frac{b_m}{(z - z_0)^m} \quad (b_m \neq 0)$$

که در فرص محدود  $|z - z_0| < R_2$  معتبر است. تابع  $\phi(z)$  که با ضابطه‌های

$$\phi(z) = \begin{cases} (z - z_0)^m f(z), & z \neq z_0 \\ b_m, & z = z_0 \end{cases}$$

تعریف می‌شود بهوضوح دارای نمایش سری توانی

$$\phi(z) = b_m + b_{m-1}(z - z_0) + \dots + b_2(z - z_0)^{m-2} + b_1(z - z_0)^{m-1} \\ + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^{m+n}$$

در سراسر فرص کامل  $|z - z_0| < R_2$  است. در نتیجه  $\phi(z)$  در آن فرص و بهخصوص در  $z$  تحلیلی است (بخش ۵۹). چون  $b_m \neq 0$ ، عبارت (۱) ثابت و اثبات قضیه کامل می‌شود.

## ۶۷. چند مثال

مثالهای زیر برای توضیح نحوه استفاده از قضیه بخش قبل آورده شده‌اند.

مثال ۱. تابع  $f(z) = (z+1)/(z^2 + 9)$  در  $z = 3i$  نقطه تکین تنها دارد و می‌توان آن را به صورت زیر نوشت

$$\phi(z) = \frac{z+1}{z+3i} \quad \text{که در آن} \quad f(z) = \frac{\phi(z)}{z-3i}$$

چون  $\phi(z)$  در  $z = 3i$  تحلیلی است و  $\phi(3i) = (3-i)/6 \neq 0$ , آن نقطه قطب ساده تابع  $f$  است و مانده در آن برابر است با  $B_1 = (3-i)/6$ . نقطه  $-3i$  نیز یک قطب ساده با مانده  $B_2 = (3+i)/6$  است.

مثال ۲. اگر  $f(z) = (z^3 + 2z)/(z - i)^3$  آنگاه

$$\phi(z) = z^3 + 2z \quad \text{که در آن} \quad f(z) = \frac{\phi(z)}{(z-i)^3}$$

تابع  $\phi(z)$  تام است و  $\phi(i) = i \neq 0$ . بنابراین  $f$  در  $i$  قطب مرتبه ۳ دارد. مانده در آن برابر است با

$$B = \frac{\phi''(i)}{2!} = 3i.$$

البته، وقتی شاخه‌های توابع چندمقداری مطرح‌اند هم می‌توان از این قضیه استفاده کرد.

مثال ۳. فرض کنید

$$f(z) = \frac{(\log z)^3}{z^2 + 1},$$

که در آن شاخه

$$\log z = \ln r + i\theta \quad (r > 0, 0 < \theta < 2\pi)$$

از تابع لگاریتمی استفاده می‌شود. برای یافتن مانده  $f$  در  $i$   $z = i$  می‌نویسیم

$$\phi(z) = \frac{(\log z)^3}{z+i} \quad \text{که در آن} \quad f(z) = \frac{\phi(z)}{z-i}$$

تابع  $\phi(z)$  بهوضوح در  $i$  تحلیلی است و چون

$$\phi(i) = \frac{(\log i)^3}{2i} = \frac{(\ln 1 + i\pi/2)^3}{2i} = -\frac{\pi^3}{16} \neq 0,$$

مانده مطلوب عبارت است از

$$B = \phi(i) = -\pi^3/16.$$

در حالی که قضیه بخش ۶۶ می‌تواند خیلی مفید باشد، بعضی مواقع برای اینکه بینیم یک نقطه تکین تنها قطب از مرتبه معینی است مؤثرترین راه استفاده مستقیم از سری لوران است.

**مثال ۴.** اگر مثلاً مانده تابع

$$f(z) = \frac{\sinh z}{z^4}$$

را در تکینی  $\infty = z$  بخواهیم، درست نیست که بنویسیم

$$\phi(z) = \sinh z \quad \text{که در آن} \quad f(z) = \phi(z)/z^4$$

و از فرمول (۳)، بخش ۶۶، با  $m = 4$  استفاده کنیم. زیرا اگر بخواهیم از فرمول (۳) استفاده کنیم لازم است  $\phi(z) \neq 0$ . ساده‌ترین راه یافتن مانده در  $\infty = z$  این است که مانند مثال ۲، بخش ۶۵، چند جمله سری لوران  $f(z)$  را بنویسیم. در آن مثال نشان دادیم که  $z = \infty$  یک قطب مرتبه سوم بوده و مانده برابر با  $B = 1/6$  است.

بعضی مواقع روش سریها را می‌توان به صورتی مؤثر با قضیه بخش ۶۶ ترکیب کرد.

**مثال ۵.** چون  $(1 - e^z)z$  تام است و صفرهای آن عبارت‌اند از  $z = 2n\pi i$  ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ )، نقطه  $\infty = z$  بهوضوح یک نقطه تکین تنها تابع

$$f(z) = \frac{1}{z(e^z - 1)}$$

است. از سری مکلورن

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots \quad (|z| < \infty),$$

می‌بینیم که

$$z(e^z - 1) = z \left( \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots \right)$$

$$= z^2 \left( 1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \dots \right) \quad (|z| < \infty).$$

بنابراین

$$\phi(z) = \frac{1}{1 + z/2! + z^2/3! + \dots} \quad \text{که در آن} \quad f(z) = \frac{\phi(z)}{z^2}$$

چون  $(z) \phi$  در  $\circ = z$  تحلیلی است و  $\circ \neq 1 = \phi(\circ)$ , نقطه  $\circ = z$  یک قطب مرتبه دوم بوده و بنابر فرمول (۳) بخش ۶۶ مانده برابر با  $(\circ) \phi' = B$  است. چون در یک همسایگی مبدأ

$$\phi'(z) = \frac{-(1/2! + 2z/3! + \dots)}{(1 + z/2! + z^2/3! + \dots)^2},$$

$$B = -1/2$$

این مانده را می‌توان از تقسیم ۱ برنمایش سری  $(1 - e^z)z$  یا از ضرب سری لوران  $(1 - e^z)^{-1}$  در  $z/1$  نیز پیدا کرد، که این سری لوران در تمرین ۳، بخش ۶۱، به دست آمد.

### تمرینها

۱. در هریک از حالات زیر نشان دهید که نقاط تکین تابع، قطب‌اند.  $m$ ، مرتبه هر قطب و  $B$ ، مانده متناظر را تعیین کنید.

$$\frac{\exp z}{z^2 + \pi^2} \quad (\text{الف}) \quad ; \quad \left( \frac{z}{2z+1} \right)^3 \quad (\text{ب}) \quad ; \quad \frac{z^2 + 2}{z-1} \quad (\text{ج})$$

$$\begin{aligned} & \text{جواب: (الف) } B = -3/16, m = 3 \quad (\text{ب}) \quad ; \quad B = 3, m = 1 \\ & \quad . \quad B = \pm i/2\pi, m = 1 \quad (\text{ج}) \end{aligned}$$

۲. نشان دهید که

$$\operatorname{Res}_{z=-1} \frac{z^{1/4}}{z^2 + 1} = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \quad (|z| > 0, 0^\circ < \arg z < 2\pi) \quad (\text{الف})$$

$$\operatorname{Res}_{z=i} \frac{\operatorname{Log} z}{(z^2 + 1)^2} = \frac{\pi + 2i}{4} \quad (\text{ب})$$

$$\operatorname{Res}_{z=i} \frac{z^{1/2}}{(z^2 + 1)^2} = \frac{1-i}{4\sqrt{2}} \quad (|z| > 0, 0^\circ < \arg z < 2\pi) \quad (\text{ج})$$

### ۳. مقدار انتگرال

$$\int_C \frac{3z^3 + 2}{(z-1)(z^2 + 9)} dz$$

را که در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت روی دایره (الف)  $|z-2|=2$ ; (ب)  $|z|=4$  گرفته شده است پیدا کنید.

$$\text{جواب: (الف) } 6\pi i \quad (\text{ب}) \quad ; \quad \text{جواب:}$$

۴. مقدار انتگرال

$$\int_C \frac{dz}{z^3(z+4)}$$

را که در جهت عکس عقره‌های ساعت روی دایره (الف)  $|z| = 2$ ; (ب)  $|z+2|=3$  گرفته شده پیدا کنید.

جواب: (الف)  $2\pi i/3$ ; (ب)  $0$ .

۵. مقدار انتگرال

$$\int_C \frac{\cosh \pi z}{z(z^2+1)} dz$$

را محاسبه کنید که در آن  $C$  دایره  $|z| = 2$  در جهت مثبت است.

جواب:  $4\pi i$

۶. با استفاده از قضیه بخش ۶۴، که تنها یک مانده دارد، انتگرال  $f(z)$  را پیرامون دایره  $|z| = 3$  که در جهت مثبت گرفته شده محاسبه کنید هرگاه

$$f(z) = \frac{z^3(1-3z)}{(1+z)(1+2z^4)} \quad (\text{ب}) \quad f(z) = \frac{(3z+2)^2}{z(z-1)(2z+5)} \quad (\text{الف})$$

$$f(z) = \frac{z^3 e^{1/z}}{1+z^3} \quad (\text{ج})$$

جواب: (الف)  $9\pi i$ ; (ب)  $-3\pi i$ ; (ج)  $2\pi i$ .

## ۶۸. صفرهای توابع تحلیلی

صفرها و قطبها توابع ارتباط نزدیکی با هم دارند. در واقع، در بخش بعد خواهید دید که چگونه صفرها می‌توانند سرمنشأ قطبها باشند. با وجود این به نتایج مقدماتی در مورد صفرهای توابع تحلیلی نیاز داریم.

فرض کنید تابع  $f$  در نقطه  $z_0$  تحلیلی باشد. با توجه به بخش ۴۸ می‌دانیم که همه مشتقات  $f^{(n)}(z_0)$  در  $z_0$  موجودند. اگر  $f'(z_0) = 0$  و اگر عدد صحیح مثبتی مانند  $m$  موجود باشد به طوری که  $f^{(m)}(z_0) \neq 0$  و همه مشتقات مرتبه‌های پایین‌تر در  $z_0$  صفر شوند، آنگاه  $f$  در  $z_0$  دارای صفر مرتبه  $m$  است. اولین قضیه این بخش خاصیت مشخصه مفید دیگری برای صفرهای مرتبه  $m$  ارائه می‌دهد.

قضیهٔ ۱. تابع  $f$  که در نقطه  $z_0$  تحلیلی است، در این نقطه صفر مرتبه  $m$  دارد اگر و فقط اگر تابعی مانند  $g$  موجود باشد که در  $z_0$  تحلیلی و ناصف بوده به قسمی که

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z). \quad (1)$$

در هر دو قسمت اثبات زیر از این واقعیت استفاده می‌کنیم (بخش ۵۳) که اگر تابعی در نقطه  $z_0$  تحلیلی باشد آنگاه باید دارای نمایش سری تیلر معنبری برحسب توانهای  $|z - z_0|$  باشد که در سراسر یک همسایگی آن نقطه، مانند  $\varepsilon < |z - z_0|$ ، معنبر است.

اثبات قسمت اول را با این فرض آغاز می‌کنیم که عبارت (۱) برقرار باشد و توجه می‌کنیم که چون  $(g(z))$  در  $z_0$  تحلیلی است دارای نمایش سری سری تیلر

$$g(z) = g(z_0) + \frac{g'(z_0)}{1!}(z - z_0) + \frac{g''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \dots$$

در یک همسایگی  $z_0$  مانند  $\varepsilon < |z - z_0|$  است. بنابراین هرگاه  $\varepsilon < |z - z_0|$ ، عبارت (۱) به صورت زیر در می‌آید

$$f(z) = g(z_0)(z - z_0)^m + \frac{g'(z_0)}{1!}(z - z_0)^{m+1} + \frac{g''(z_0)}{2!}(z - z_0)^{m+2} + \dots$$

چون در واقع، این بسط سری تیلر برای  $f(z)$  است، بنابر قضیهٔ ۱ بخش ۶۰، نتیجه می‌شود که

$$f(z_0) = f'(z_0) = f''(z_0) = \dots = f^{(m-1)}(z_0) = 0, \quad (2)$$

و

$$f^{(m)}(z_0) = m!g(z_0) \neq 0. \quad (3)$$

بنابراین  $z_0$  یک صفر مرتبه  $m$  تابع  $f$  است. بر عکس، اگر فرض کنیم  $f$  در  $z_0$  صفر مرتبه  $m$  داشته باشد، از تحلیلی بودن آن در  $z_0$  و برقراری شرط (۲) نتیجه می‌شود که سری تیلر در یک همسایگی  $z_0$  مانند  $\varepsilon < |z - z_0|$  موجود است

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=m}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n \\ &= (z - z_0)^m \left[ \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!} + \frac{f^{(m+1)}(z_0)}{(m+1)!}(z - z_0) + \frac{f^{(m+2)}(z_0)}{(m+2)!}(z - z_0)^2 + \dots \right] \end{aligned}$$

در نتیجه،  $f(z)$  به صورت (۱) است، که در آن

$$g(z) = \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!} + \frac{f^{(m+1)}(z_0)}{(m+1)!}(z - z_0) + \frac{f^{(m+2)}(z_0)}{(m+2)!}(z - z_0)^2 + \dots$$

$$(|z - z_0| < \varepsilon).$$

همگرایی این سری آخر به شرط  $\varepsilon < |z - z_0|$ ، تضمین می‌کند که  $g$  در آن همسایگی و به خصوص در  $\mathbb{C}$  تحلیلی است (بخش ۵۹). به علاوه

$$g(z_0) = \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!} \neq 0.$$

این اثبات قضیه را کامل می‌کند.

مثال. تابع تام (۱)  $f(z) = z(e^z - 1)$  در نقطه  $z = 0$  صفر مرتبه ۲ دارد، زیرا

$$f''(0) = 2 \neq 0 \quad \text{و} \quad f'(0) = f'(0) = 0$$

در این حالت، تابع  $g$  در رابطه (۱) با ضابطه زیر تعریف می‌شود

$$g(z) = \begin{cases} (e^z - 1)/z, & z \neq 0 \\ 1, & z = 0 \end{cases}$$

که در  $z = 0$  تحلیلی و در واقع تام است. (تمرین ۴ بخش ۶۰ را ببینید.)

قضیه بعد بیان می‌کند که صفرهای توابع تحلیلی نقاط تنها هستند.

قضیه ۲. تابع  $f$  و نقطه  $z_0$  مفروض‌اند. فرض کنید که

(الف)  $f$  در  $\mathbb{C}$  تحلیلی است؛

(ب)  $f(z_0) = 0$  (اما  $f(z_0) \neq 0$ ) در هیچ همسایگی  $z_0$  متعدد با صفر نیست.

در این صورت در سراسر یک همسایگی محدود  $z_0$  مانند  $\varepsilon < |z - z_0| < \delta$  داریم

برای اثبات این قضیه، فرض کنید  $f$  با شرایط فوق باشد و ملاحظه کنید که همه مشتقات  $f$  در  $\mathbb{C}$  صفر نیستند. زیرا اگر چنین باشد، همه ضرایب در سری تیلر برای  $f$  حول نقطه  $z_0$  صفر خواهد بود و در نتیجه  $f(z) = 0$  در یک همسایگی  $z_0$  متعدد با صفر خواهد بود. پس با توجه به تعریف صفرهای مرتبه  $m$  که در ابتدای این بخش بیان شد بدیهی است که  $f$  باید در  $\mathbb{C}$  دارای

یک صفر مرتبه  $m$  باشد. پس بنابر قضیه ۱،

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z) \quad (4)$$

که در آن  $g(z)$  در  $\mathbb{C}$  تحلیلی و ناصرف است.

حال  $g$  علاوه بر ناصرف بودن در  $\mathbb{C}$  پیوسته است زیرا در آن نقطه تحلیلی است. بنابراین همسایگی مانند  $\epsilon < |z - z_0|$  هست که در آن رابطه (۴) برقرار است و  $|g(z)| \neq 0$  (بخش ۱۷ را ببینید). در نتیجه در همسایگی محدود  $\epsilon < |z - z_0| < \delta$   $f(z) \neq 0$  و اثبات قضیه کامل می‌شود. آخرین قضیه این بخش در مورد توابعی است که همه صفرهای آن تنها نیستند. قبل از بخش ۲۶ به این قضیه ارجاع داده‌ایم و مغایرت جالبی با قضیه ۲ فوق دارد.

قضیه ۳.تابع  $f$  و نقطه  $z_0$  مفروض‌اند. فرض کنید که

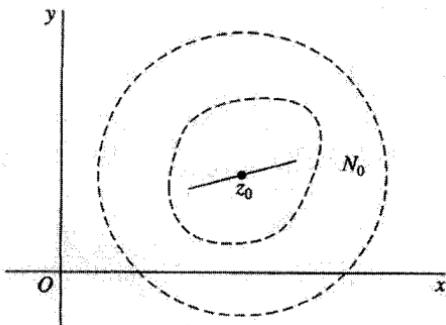
(الف)  $f$  در سراسر یک همسایگی  $z_0$  مانند  $N$  تحلیلی است؛

(ب)  $f(z_0) = 0$  و در هر نقطه  $z$  از یک حوزه یا پاره خط شامل  $z_0$ ,  $f(z) = 0$  (شکل ۸۷).

در این صورت  $f(z) \equiv 0$  در  $N$ ؛ یعنی  $f(z) = 0$  در سراسر  $N$  متحدد با صفر است.

اثبات را با ملاحظه این مطلب آغاز می‌کنیم که تحت شرایط فوق در یک همسایگی  $z_0$  مانند  $N$ ,  $f(z) \equiv 0$ . زیرا در غیر این صورت بنابر قضیه ۲ همسایگی محدودی از  $z_0$  موجود خواهد بود که در سراسر آن  $f(z) \neq 0$ , که با فرض اینکه در هر نقطه از حوزه یا پاره خطی شامل  $z_0$ ,  $f(z) \equiv 0$  سازگار نیست. چون در همسایگی  $N$ ,  $f(z) \equiv 0$  نتیجه می‌شود که همه ضرایب

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$



شکل ۸۷

در سری تیلر  $f(z)$  حول  $z_0$  باید صفر باشد. بنابراین در  $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ ,  $f(z) \equiv 0$ , زیرا سری تیلر،  $f(z)$  را در  $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$  نیز نمایش می‌دهد. با این امر اثبات قضیه کامل می‌شود.

## ۶۹. صفرها و قطبها

قضیه زیر نشان می‌دهد که چگونه صفرهای مرتبه  $m$  می‌توانند قطب‌های مرتبه  $m$  تولید کنند.  
قضیه ۱. فرض کنید

(الف) دو تابع  $p$  و  $q$  در نقطه  $z_0$  تحلیلی باشند؛

(ب)  $p(z_0) \neq q(z_0)$  در  $z_0$  صفر مرتبه  $m$  داشته باشد.

در این صورت خارج قسمت  $p(z)/q(z)$  در  $z_0$  قطب مرتبه  $m$  دارد.

اثبات ساده است. فرض کنید  $p$  و  $q$  دارای ویژگی‌هایی باشند که در صورت قضیه آمده است. چون  $q$  در  $z_0$  دارای صفر مرتبه  $m$  است بنابر قضیه ۲ بخش ۶۸ همسایگی محدودی از  $z_0$  موجود است که در آن  $q(z) \neq 0$  و لذا  $z_0$  یک نقطه تکین تنهای خارج قسمت  $p(z)/q(z)$  است. به علاوه قضیه ۱ بخش ۶۸ می‌بین این نکته است که

$$q(z) = (z - z_0)^m g(z),$$

که  $g$  در  $z_0$  تحلیلی و ناصرف است و می‌توان نوشت

$$\frac{p(z)}{q(z)} = \frac{p(z)/g(z)}{(z - z_0)^m}. \quad (1)$$

چون  $p(z)/g(z)$  در  $z_0$  تحلیلی و ناصرف است، از قضیه بخش ۶۶ نتیجه می‌شود که  $z_0$  قطب مرتبه  $m$  تابع  $p(z)/q(z)$  است.

مثال ۱. دو تابع

$$q(z) = z(e^z - 1) \quad \text{و} \quad p(z) = 1$$

تاماند را استناد به مثال بخش ۶۸ می‌دانیم که  $q$  در نقطه  $z_0 = 0$  دارای صفر مرتبه ۲ است. پس بنابر قضیه ۱ این بخش خارج قسمت

$$\frac{p(z)}{q(z)} = \frac{1}{z(e^z - 1)}$$

در آن نقطه دارای قطب مرتبه ۲ است. این مطلب را در مثال ۵ بخش ۶۷ به روش دیگری نشان دادیم.

قضیه ۱ منجر به روش دیگری برای شناسایی قطب‌های ساده و یافتن مانده‌های نظیر می‌شود. بعضی مواقع این روش از روش بخش ۶۶ ساده‌تر است.

قضیه ۲. فرض کنید توابع  $p$  و  $q$  در نقطه  $z_0$  تحلیلی باشند. اگر

$$p(z_0) \neq 0, \quad q(z_0) = 0 \quad \text{و} \quad q'(z_0) \neq 0,$$

آنگاه  $z_0$  قطب ساده خارج قسمت  $p(z)/q(z)$  است و

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}. \quad (2)$$

برای اثبات این مطلب، فرض کنید  $p$  و  $q$  با ویژگی‌های فوق باشند و ملاحظه کنید که با توجه به شرایط روی  $z_0$  صفر مرتبه  $m = m_0$  آن تابع است. پس بنابر قضیه ۱ بخش ۶۸

$$q(z) = (z - z_0)^m g(z) \quad (3)$$

که در آن  $g(z)$  در  $z_0$  تحلیلی و ناصرف است. به علاوه، بنابر قضیه ۱ این بخش،  $z_0$  قطب ساده است و رابطه (۱) تبدیل می‌شود به

$$\frac{p(z)}{q(z)} = \frac{p(z)/g(z)}{z - z_0}.$$

حال  $p(z)/g(z)$  در  $z_0$  تحلیلی و ناصرف است و از قضیه بخش ۶۶ نتیجه می‌شود که

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{p(z_0)}{g(z_0)}. \quad (4)$$

اما  $p(z_0)/g(z_0) = q'(z_0)$  این تساوی با مشتق گرفتن از طرفین رابطه (۳) و قراردادن  $z = z_0$  به دست می‌آید. بدین ترتیب عبارت (۴) به شکل (۲) در می‌آید.

مثال ۲. تابع

$$f(z) = \cot z = \frac{\cos z}{\sin z},$$

را که خارج قسمت توابع تام  $p(z) = \cos z$  و  $q(z) = \sin z$  است در نظر بگیرید. تکینیهای این خارج قسمت در صفرهای  $q$  یعنی در نقاط

$$z = n\pi \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

بروز می‌کند. چون

$$q'(n\pi) = (-1)^n \neq 0 \quad \text{و} \quad q(n\pi) = 0 \quad p(n\pi) = (-1)^n \neq 0.$$

هر نقطه تکین  $f$  یک قطب ساده است با مانده  $z = n\pi$

$$B_n = \frac{p(n\pi)}{q'(n\pi)} = \frac{(-1)^n}{(-1)^n} = 1.$$

مثال ۳. مانده تابع

$$f(z) = \frac{\tanh z}{z^2} = \frac{\sinh z}{z^2 \cosh z}$$

در صفر  $z = \pi i/2$  تابع  $\cosh z$  (بخش ۳۴ را ببینید) به سادگی با نوشتن

$$q(z) = z^2 \cosh z \quad \text{و} \quad p(z) = \sinh z$$

به دست می‌آید. چون

$$p\left(\frac{\pi i}{2}\right) = \sinh\left(\frac{\pi i}{2}\right) = i \sin \frac{\pi}{2} = i \neq 0.$$

و

$$q\left(\frac{\pi i}{2}\right) = 0, \quad q'\left(\frac{\pi i}{2}\right) = \left(\frac{\pi i}{2}\right)^2 \sinh\left(\frac{\pi i}{2}\right) = \frac{-\pi^2}{4} i \neq 0,$$

در می‌یابیم که  $z = \pi i/2$  یک قطب ساده  $f$  است و مانده در آن نقطه برابر است با

$$B = \frac{p(\pi i/2)}{q'(\pi i/2)} = -\frac{4}{\pi^2}.$$

## مثال ۴. می‌توان مانده تابع

$$f(z) = \frac{z}{z^4 + 4}$$

در نقطهٔ تکین تنهای

$$z_0 = \sqrt{2}e^{i\pi/4} = 1+i$$

را با نوشتن  $p(z) = z^4 + 4$  و  $q(z) = z^4$  به دست آورد. چون

$$q'(z_0) = 4z_0^3 \neq 0 \quad \text{و} \quad q(z_0) = 0 \quad p(z_0) = z_0 \neq 0.$$

تابع  $f$  در  $z_0$  دارای قطب ساده است. ماندهٔ نظیر عبارت است از عدد

$$B_0 = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)} = \frac{z_0}{4z_0^3} = \frac{1}{4z_0^2} = \frac{1}{4i} = -\frac{i}{4}.$$

گرچه می‌توان این مانده را به روش بخش ۶۶ پیدا کرد ولی محاسباتش پیچیده‌تر است.

برای مانده در قطب‌های از مرتبهٔ بالاتر فرمولهایی نظیر فرمول (۲) موجود است اما طولانی‌تر و عموماً بدون کارایی‌اند.

## تمرینها

۱. نشان دهید نقطهٔ  $z = 0$  قطب ساده تابع

$$f(z) = \csc z = \frac{1}{\sin z}$$

است و مانده در آن نقطه برابر با یک است

(الف) با استفاده از قضیهٔ ۲ بخش ۶۹

(ب) با استفاده از سری لوران  $\csc z$  که در تمرین ۲ بخش ۶۱ به دست آوردهیم.

۲. نشان دهید که

$$\operatorname{Res}_{z=\pi i} \frac{z - \sinh z}{z^2 \sinh z} = \frac{i}{\pi} \quad (\text{الف})$$

$$\operatorname{Res}_{z=\pi i} \frac{\exp(zt)}{\sinh z} + \operatorname{Res}_{z=-\pi i} \frac{\exp(zt)}{\sinh z} = -2 \cos \pi t \quad (\text{ب})$$

۳. نشان دهید که

$$(n=0, \pm 1, \pm 2, \dots) z_n = \frac{\pi}{2} + n\pi, \text{ که در آن } \underset{z=z_n}{\operatorname{Res}}(z \sec z) = (-1)^{n+1} z_n, \quad (\text{الف})$$

$$(n=0, \pm 1, \pm 2, \dots) z_n = \left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)i, \text{ که در آن } \underset{z=z_n}{\operatorname{Res}}(\tanh z) = 1 \quad (\text{ب})$$

۴. فرض کنید  $C$  دایره  $|z| = 2$  در جهت مثبت باشد و انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید

$$\int_C \frac{dz}{\sinh 2z} \quad (\text{ب}) \quad ; \quad \int_C \tan z dz \quad (\text{الف})$$

جواب: (الف)  $-4\pi i$ ; (ب)  $-\pi i$

۵. فرض کنید  $C_N$  مرز مربعی با اضلاع واقع در امتداد خطوط

$$y = \pm \left(N + \frac{1}{2}\right)\pi \quad \text{و} \quad x = \pm \left(N + \frac{1}{2}\right)\pi$$

در جهت مثبت باشد، که در آن  $N$  عدد صحیح مثبتی است. نشان دهید که

$$\int_{C_N} \frac{dz}{z^2 \sin z} = 2\pi i \left[ \frac{1}{6} + 2 \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n}{n^2 \pi^2} \right].$$

سپس با استفاده از این واقعیت که وقتی  $N$  به بینهایت میل کند مقدار این انتگرال به صفر میل می‌کند (تمرین ۷ بخش ۴۱)، بیان کنید چگونه نتیجه می‌شود که

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

۶. نشان دهید که

$$\int_C \frac{dz}{(z^2 - 1)^2 + 3} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}},$$

که در آن  $C$  مرز مستطیلی با اضلاع واقع روی خطوط  $x = \pm 2$  و  $y = 0$  در جهت مثبت است.

راهنمایی: با ملاحظه این مطلب که چهار صفر چندجمله‌یی  $(z^2 - 1)^2 + 3$  عبارت‌اند از ریشه‌های دوم اعداد  $i\sqrt{3} \pm 1$ ، نشان دهید که تابع  $q(z) = 1/z$  در درون و روی  $C$  بجز در نقاط

$$-\bar{z}_0 = \frac{-\sqrt{3} + i}{\sqrt{2}} \quad \text{و} \quad z_0 = \frac{\sqrt{3} + i}{\sqrt{2}}$$

تحلیلی است. سپس قضیه ۲ بخش ۶۹ را به کار برد.

## ۷. تابع

$$f(z) = \frac{1}{[q(z)]^2}$$

را در نظر بگیرید که در آن تابع  $q$  در  $\mathbb{C}$  تحلیلی است و  $q'(z_0) \neq 0$ . نشان دهید که  $z_0$  قطب مرتبه ۲ تابع  $f$  است با مانده  $m = q''(z_0)$ .

$$B_0 = -\frac{q''(z_0)}{[q'(z_0)]^3}.$$

راهنمایی: توجه کنید که  $z_0$  یک صفر مرتبه ۱ تابع  $q$  است، بنابراین

$$q(z) = (z - z_0)g(z)$$

که  $g(z)$  در  $\mathbb{C}$  تحلیلی و ناصرف است. سپس بنویسید

$$\phi(z) = \frac{1}{[g(z)]^2} \quad \text{که در آن} \quad f(z) = \frac{\phi(z)}{(z - z_0)^2}$$

صورت مطلوب مانده  $B_0 = \phi'(z_0)$  را می‌توان با نشان دادن

$$q''(z_0) = 2g'(z_0) \quad \text{و} \quad q'(z_0) = g(z_0)$$

به دست آورد.

۸. با استفاده از نتیجه تمرین ۷ مانده هر یک از توابع زیر را در  $\mathbb{C}$  پیدا کنید.

$$f(z) = \frac{1}{(z + z^2)^2} \quad (\text{ب}) \quad f(z) = \csc^2 z \quad (\text{الف})$$

جواب: (الف)  $(z + z^2)^{-2}$ .

۹. فرض کنید  $p$  و  $q$  معرف توابعی تحلیلی در  $\mathbb{C}$  باشند، که  $p(z_0) \neq 0$  و  $q(z_0) = 0$ . نشان دهید اگر خارج قسمت  $p(z)/q(z)$  دارای قطب مرتبه  $m$  در  $\mathbb{C}$  باشد، آنگاه  $z_0$  صفر مرتبه  $m$  تابع  $q$  است (با قضیه ۱ بخش ۶۹ مقایسه کنید).

راهنمایی: توجه کنید که بنابر قضیه بخش ۶۶ می‌توان نوشت

$$\frac{p(z)}{q(z)} = \frac{\phi(z)}{(z - z_0)^m}$$

که در آن  $\phi(z)$  در  $\mathbb{C}$  تحلیلی و ناصرف است. سپس  $q(z)$  را به دست آورید.

۱۰. یادآور می‌شویم (بخش ۱۰) که نقطه  $z_0$  یک نقطه ابیاشتگی مجموعه  $S$  است هرگاه هر همسایگی محدود  $\mathbb{D}$  شامل حداقل یک نقطه از  $S$  باشد. یک صورت قضیه بولتسانو-وایرشتراس را می‌توان چنین بیان کرد: هر مجموعه نامتناهی از نقاط واقع در یک ناحیه بسته و محدود مانند  $R$  حداقل یک نقطه ابیاشتگی در  $R$  دارد.\* با استفاده از این قضیه و قضیه ۲ بخش ۶۸ نشان دهید که اگر تابع  $f$  در ناحیه  $R$  مشکل از همه نقاط درون و روی مسیر ساده بسته  $C$ ، بجز محتملًا در قطبها درون  $C$ ، تحلیلی باشد و اگر همه صفرهای  $f$  در درون  $C$  واقع و از مرتبه متناهی باشند، آنگاه تعداد آن صفرها متناهی است.

۱۱. فرض کنید  $R$  معرف ناحیه مشکل از همه نقاط درون و روی مسیر ساده بسته  $C$  باشد. با استفاده از قضیه بولتسانو-وایرشتراس (تمرین ۱۰ را بینید) و این واقعیت که قطبها نقاط تکین تنها هستند نشان دهید که اگر  $f$  در ناحیه  $R$  بجز در قطبها که در درون  $C$  هستند تحلیلی باشد، آنگاه تعداد این قطبها باید متناهی باشد.

## ۷۵. رفتار تابع در نزدیکی نقاط تکین تنها

همان‌طور که قبلاً در بخش ۶۵ دیدیم رفتار تابع  $f$  در نزدیکی نقطه تکین تنها  $z_0$  بسته به اینکه  $z_0$  قطب، نقطه تکین برداشتنی یا نقطه تکین اساسی باشد، فرق می‌کند. در این بخش اختلاف رفتارها را بیشتر بررسی می‌کنیم. چون از این قضایا در قسمتهای دیگر این کتاب استفاده نمی‌شود خواننده‌ای که مایل است زودتر به کاربردها برسد می‌تواند بدون هیچ خللی مستقیماً به فصل ۷ برود.

قضیه ۱. اگر  $z_0$  یک قطب تابع  $f$  باشد، آنگاه

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty \quad (1)$$

برای تحقیق درستی حد (۱) فرض می‌کنیم که  $f$  در  $z_0$  دارای قطب مرتبه  $m$  باشد و از قضیه بخش ۶۶ استفاده می‌کنیم. بنابر آن قضیه

$$f(z) = \frac{\phi(z)}{(z - z_0)^m},$$

\* به عنوان مثال، صفحات ۵۱۷ و ۵۲۱ کتاب زیر را بینید

که در آن  $\phi(z)$  در  $\mathbb{H}$  تحلیلی و ناصرف است. چون

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{f(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(z - z_0)^m}{\phi(z)} = \frac{\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^m}{\lim_{z \rightarrow z_0} \phi(z)} = \frac{0}{\phi(z_0)} = 0.$$

پس بنابر قضیه بخش ۱۶ در مورد حدودی که نقطه در بی‌نهایت مطرح است، حد (۱) برقرار است. تأکید قضیه بعد بر این نکته است که رفتار  $f$  در نزدیکی نقطه تکین برداشتی اساساً با رفتار آن در نزدیکی قطب فرق می‌کند.

قضیه ۲. اگر  $\mathbb{H}$  یک نقطه تکین برداشتی تابع  $f$  باشد، آنگاه  $f$  در یک همسایگی محدود  $\mathbb{H}$  مانند  $\varepsilon < |z - z_0| < 0$  تحلیلی و کراندار است.

اثبات ساده و بر مبنای این امر است که اگر  $(z_0, f(z_0))$  به صورتی مناسب تعریف شود تابع  $f$  در قرصی مانند  $R_2 < |z - z_0| < 0$  تحلیلی می‌شود و در این صورت  $f$  در هر قرص بسته  $\varepsilon \leq |z - z_0| < R_2 < \varepsilon$  پیوسته است. در نتیجه بنابر بخش ۱۷ تابع  $f$  در قرص  $\varepsilon < |z - z_0| < 0$  کراندار است و لذا تابع  $f$  علاوه بر تحلیلی بودن باید در همسایگی محدود  $\varepsilon < |z - z_0| < 0$  کراندار باشد.

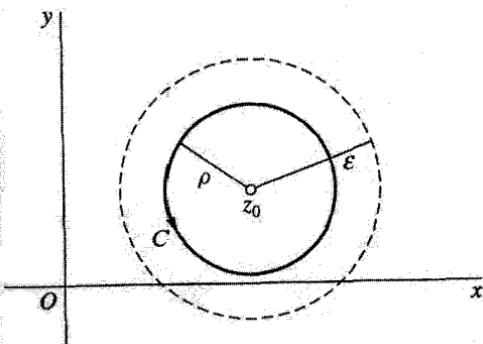
اثبات قضیه آخر، در مورد رفتار تابع در نزدیکی نقطه تکین اساسی، بر مبنای لم زیر است که ارتباط نزدیکی با قضیه ۲ دارد و به قضیه ریمان مشهور است. لم. فرض کنید تابع  $f$  در همسایگی محدود  $\varepsilon < |z - z_0| < 0$  از نقطه  $\mathbb{H}$  تحلیلی و کراندار باشد. اگر  $f$  در  $\mathbb{H}$  تحلیلی نباشد، آنگاه در  $\mathbb{H}$  تکینی برداشتی دارد.

برای اثبات این مطلب، فرض می‌کنیم که  $f$  در  $\mathbb{H}$  تحلیلی نباشد. پس نقطه  $\mathbb{H}$  یک تکینی تنها  $f$  است و  $f$  در سراسر همسایگی محدود  $\varepsilon < |z - z_0| < 0$  با سری لوران نمایش داده می‌شود

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}. \quad (2)$$

اگر  $C$  معرف دایره  $|z - z_0| = \rho$  در جهت مثبت باشد، که در آن  $\varepsilon < \rho$  (شکل ۸۸)، با توجه به بخش ۵۵ می‌دانیم که ضرایب  $b_n$  در بسط (۲) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{n+1}} \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (3)$$



شکل ۸۸

حال بنابر شرط کرانداری  $f$ ، عدد ثابت مثبتی مانند  $M$  هست که  $|f(z)| \leq M$  هرگاه  $\epsilon < |z - z_0| < 0$ . بنابراین از فرمول (۳) نتیجه می‌شود که

$$|b_n| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{M}{\rho^{-n+1}} 2\pi\rho = M\rho^n \quad (n = 1, 2, \dots).$$

چون ضرایب  $b_n$  ثابت‌اند و  $\rho$  را می‌توان به دلخواه کوچک گرفت، نتیجه می‌گیریم که در سری لوران  $(2), b_n = 1, 2, \dots)$  در نتیجه  $z$  تکینی برداشتنی  $f$  است و اثبات قضیه کامل می‌شود.

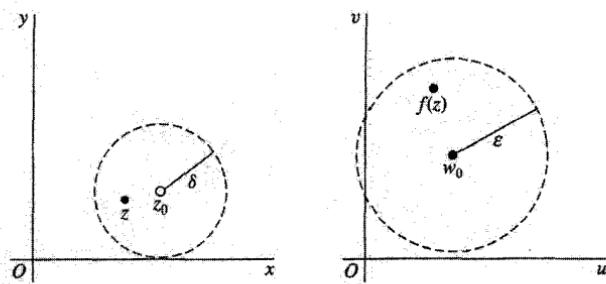
همان‌طور که قبلاً در بخش ۶۵ خاطر نشان ساختیم، رفتار یک تابع در نزدیکی نقطه تکین اساسی کاملاً نامنظم است. قضیه دوم که در اینجا ثابت می‌شود وابسته به قضیه پیکار است و از آن به عنوان قضیه کازوراتی<sup>۱</sup> وایرشتراس یاد می‌کنند. این قضیه بدین مضمون است که در هر همسایگی محدود یک نقطه تکین اساسی، تابع مقادیری به دلخواه نزدیک به هر عدد مفروض اختیار می‌کند.

قضیه ۳. فرض کنید  $z$  یک تکینی اساسی تابع  $f$  و  $w$  عدد مختلط دلخواهی باشد. در این صورت به ازای هر عدد مثبت  $\delta$  در هر همسایگی محدود  $z$  مانند  $\delta < |z - z_0| < \epsilon$  نابرابر

$$|f(z) - w| < \epsilon \quad (4)$$

در نقطه‌ای مانند  $z$  از آن همسایگی صادق است (شکل ۸۹).

اثبات بهوسیلهٔ یافتن تناقض است. چون  $z$  تکینی تنهای  $f$  است، همسایگی محدودی مانند  $\delta < |z - z_0| < \epsilon$  هست که  $f$  در سراسر آن تحلیلی است، و فرض می‌کنیم که شرط (۴)



شکل ۸۹

به ازای هیچ  $z$ ی در این همسایگی محدود برقرار نباشد. در نتیجه  $|f(z) - w_0| \geq \epsilon$  هرگاه  $|z - z_0| < \delta$  و تابع

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - w_0} \quad (0 < |z - z_0| < \delta) \quad (5)$$

در حوزه تعریف‌شده تحلیلی و کراندار است. پس بنابر لم فوک، نقطه  $z$  یک تکینی برداشتی  $g$  است؛ و فرض کنید  $g$  در  $z$  طوری تعریف شود که در آن تحلیلی باشد.  
اگر  $f(z_0) \neq g(z_0)$ ، تابع  $f(z)$  که می‌توان آن را به صورت زیر نوشت

$$f(z) = \frac{1}{g(z)} + w_0 \quad (6)$$

وقتی  $\delta < |z - z_0| < \delta$  در  $z$  تحلیلی می‌شود به شرطی که آن را در  $z$  چنین تعریف کنیم

$$f(z_0) = \frac{1}{g(z_0)} + w_0.$$

اما این بدان معناست که  $z$  یک تکینی برداشتی  $f$  است، نه یک تکینی اساسی و به تناقض می‌رسیم.

اگر  $f(z_0) = g(z_0)$  باشد در  $z$  دارای صفری از یک مرتبه متناهی مانند  $m$  باشد (بخش ۶۸) زیرا  $|f(z) - g(z)| < |z - z_0|^\alpha$  متعدد با صفر نیست. پس بنابر رابطه (۶)،  $f$  در  $z$  دارای قطب مرتبه  $m$  است (قضیه ۱ بخش ۶۹ را ببینید). بنابراین مجدداً به تناقض می‌رسیم و قضیه ۳ ثابت می‌شود.

# ۷

## کاربردهای مانده‌ها

حال به بعضی از کاربردهای مهم نظریه مانده‌ها که در فصل قبل بررسی شد می‌پردازیم. این کاربردها شامل محاسبه برخی از انواع انتگرال‌های معین و ناسره است که در آنالیز حقیقی و ریاضی کاربردی مطرح می‌شوند. توجه قابل ملاحظه‌ای به یک روش، مبتنی بر مانده‌ها، برای تعیین محل صفرهای توابع و یافتن تبدیلهای وارون لaplas با روش جمع کردن مانده‌ها شده است.

### ۷۱. محاسبه انتگرال‌های ناسره

در حسابان، انتگرال ناسره تابع پیوسته  $f(x)$  بر بازه نیمه نامتناهی  $0 \leq x$  با ضابطه زیر تعریف می‌شود

$$\int_0^\infty f(x)dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R f(x)dx. \quad (1)$$

وقتی حد سمت راست موجود باشد، گویند انتگرال ناسره به آن حد همگرایست. اگر  $f(x)$  در هر نقطه  $x$  پیوسته باشد، انتگرال ناسره آن بر بازه نامتناهی  $-\infty < x < \infty$  چنین تعریف می‌شود

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \lim_{R_\leftarrow \rightarrow -\infty} \int_{-R_\leftarrow}^0 f(x)dx + \lim_{R_\rightarrow \rightarrow \infty} \int_0^{R_\rightarrow} f(x)dx \quad (2)$$

و درصورتی که هر دو حد موجود باشند، انتگرال (۲) به مجموع آنها همگراست. مقدار دیگری که به انتگرال (۲) نسبت می‌دهند اغلب مفید است. یعنی، مقدار اصلی کوشی (P.V.) انتگرال (۲) برابر است با عدد

$$\text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) dx, \quad (3)$$

به شرطی که این حد تک موجود باشد.

اگر انتگرال (۲) همگرا باشد، مقدار اصلی کوشی (۳) موجود است؛ و این مقدار برابر با عددی است که انتگرال (۲) به آن همگراست. به این دلیل که

$$\int_{-R}^R f(x) dx = \int_{-R}^{\circ} f(x) dx + \int_{\circ}^R f(x) dx$$

و درصورتی که انتگرال (۲) همگرا باشد، حد هر یک از انتگرهای سمت راست وقتی  $\infty \rightarrow \infty$  موجود است. ولی همان‌طور که مثال زیر نشان می‌دهد اگر مقدار اصلی کوشی موجود باشد، همیشه نمی‌توان گفت انتگرال (۲) همگراست.

مثال. ملاحظه کنید که

$$\text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} x dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R x dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \left[ \frac{x^2}{2} \right]_{-R}^R = \lim_{R \rightarrow \infty} \circ = \circ. \quad (4)$$

از طرف دیگر

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} x dx &= \lim_{R_1 \rightarrow \infty} \int_{-R_1}^{\circ} x dx + \lim_{R_2 \rightarrow \infty} \int_{\circ}^{R_2} x dx \\ &= \lim_{R_1 \rightarrow \infty} \left[ \frac{x^2}{2} \right]_{-R_1}^{\circ} + \lim_{R_2 \rightarrow \infty} \left[ \frac{x^2}{2} \right]_{\circ}^{R_2} \\ &= - \lim_{R_1 \rightarrow \infty} \frac{R_1^2}{2} + \lim_{R_2 \rightarrow \infty} \frac{R_2^2}{2}; \end{aligned} \quad (5)$$

چون این دو حد موجود نیستند، درمی‌یابیم که انتگرال ناسرة (۵) موجود نیست.  
اما فرض کنید  $f(x) < x < \infty$  تابعی زوج باشد، تابعی که

$$f(-x) = f(x) \quad \text{با ازای هر } x$$

بنابر تقارن نمودار  $y = f(x)$  نسبت به محور  $z$  می‌توان نوشت

$$\int_0^R f(x)dx = \frac{1}{2} \int_{-R}^R f(x)dx$$

و می‌بینیم که اگر مقدار اصلی کوشی (۳) موجود باشد، انتگرال (۱) به نصف مقدار اصلی کوشی (۳) همگراست. به علاوه چون انتگرال (۱) همگراست و چون

$$\int_{-R_1}^0 f(x)dx = \int_0^{R_1} f(x)dx$$

انتگرال (۲) به دو برابر مقدار انتگرال (۱) همگراست. بنابراین نشان داده‌ایم که اگر  $f(x)$  زوج و مقدار اصلی کوشی (۳) موجود باشد، هر دو انتگرال (۱) و (۲) همگرا هستند و

$$\text{P.V. } \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2 \int_0^{\infty} f(x)dx. \quad (6)$$

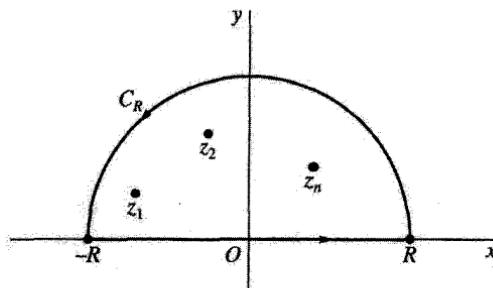
حال روشی، مشتمل بر مانده‌ها، را تشریح می‌کنیم که اغلب برای محاسبه انتگرال‌های ناسره توابع گویای زوج  $f(x) = p(x)/q(x)$  به کار می‌رود، که در آن  $f(-x) = f(x)$  مساوی است و  $p(x)$  و  $q(x)$  چندجمله‌یهای با ضرایب حقیقی و بدون عامل مشترک‌اند. توافق می‌کنیم که  $q(z)$  هیچ صفر حقیقی ندارد اما حداقل یک صفر در بالای محور حقیقی دارد.

این روش با شناسایی همهٔ صفرهای متمایز چندجمله‌ی  $q(z)$  که در بالای محور حقیقی واقع‌اند شروع می‌شود. البته تعداد آنها متناهی است (بخش ۴۹ را ببینید) و می‌توان آنها را با  $z_1, z_2, \dots, z_n$  نمایش داد، که در آن  $n$  مساوی یا کوچکتر از درجه  $q(z)$  است. سپس از

خارج قسمت

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)} \quad (7)$$

پیرامون مرز ناحیهٔ نیم‌دایره‌ی  $i\pi$  که در شکل ۹۰ نشان داده شده و در جهت مثبت گرفته شده است انتگرال می‌گیریم. این مسیر ساده بسته مشتمل است از قطعه‌ای از محور حقیقی از  $-R = z$  تا  $R = z$  و نیمةٔ بالایی دایره  $R = |z|$  که در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت گرفته شده و به  $C_R$  نمایش داده است. باید متوجه بود که عدد مثبت  $R$  بقدر کافی بزرگ است تا همه نقاط  $z_1, z_2, \dots, z_n$  درون این مسیر بسته واقع باشد.



شکل ۹۰

با استفاده از قضیه مانده‌کوشی در بخش ۶۳ و نمایش پارامتری  $z = x$  برای قطعه محور حقیقی که بیان شد می‌توان نوشت

$$\int_{-R}^R f(x) dx + \int_{C_R} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z),$$

یا

$$\int_{-R}^R f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z) - \int_{C_R} f(z) dz. \quad (\text{۸})$$

اگر

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) dz = 0,$$

آنگاه نتیجه می‌شود که

$$\text{P.V. } \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z) \quad (\text{۹})$$

اگر  $f(x)$  زوج باشد، از رابطه (۶) نتیجه می‌شود که

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z) \quad (\text{۱۰})$$

و

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z). \quad (\text{۱۱})$$

## مثال ۷۲

حال به تشریح روش بخش ۷۱ برای محاسبه انتگرالهای ناسره می‌پردازیم.  
مثال. نشان می‌دهیم که

$$\int_0^\infty \frac{x^2}{x^6 + 1} dx$$

همگراست و مقدار آن را پیدا می‌کنیم. با این نکته آغاز می‌کنیم که تابع

$$f(z) = \frac{z^2}{z^6 + 1}$$

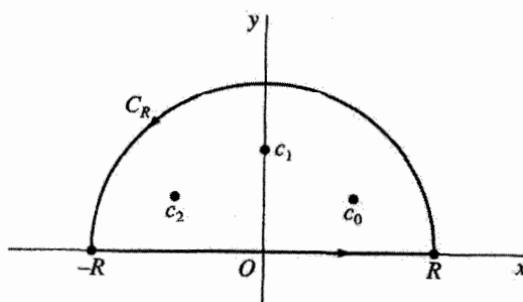
دارای تکینهای تنها در ریشه‌های ششم ۱ - است و در هر جای دیگر تحلیلی است. روش بخش ۸ برای یافتن ریشه‌های اعداد مختلط نشان می‌دهد که ریشه‌های ششم ۱ - عبارتند از

$$c_k = \exp \left[ i \left( \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{6} \right) \right] \quad (k = 0, 1, 2, \dots, 5)$$

و هیچ‌یک از آنها روی محور حقیقی نیست. سه ریشه اول

$$c_0 = e^{i5\pi/6} \quad \text{و} \quad c_1 = i, \quad c_0 = e^{i\pi/6}$$

در نیم صفحه بالا واقع‌اند (شکل ۹۱) و سه ریشه دیگر در نیم صفحه پایین. در صورتی که نقاط تکین  $c_k$  ( $k = 0, 1, 2$ ) درون ناحیه نیم‌دایره‌بی محدود به پاره خط  $(-R \leq z \leq R)z = x$  نیمة بالایی دایره  $|z| = R$  از محور حقیقی و  $C_R$  نیمه



شکل ۹۱

$z = -R$  واقع‌اند. با انتگرالگیری از  $f(z)$  پیرامون مرز این ناحیه نیمداire‌بی در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت، می‌بینیم که

$$\int_{-R}^R f(x)dx + \int_{C_R} f(z)dz = 2\pi i(B_0 + B_1 + B_2) \quad (1)$$

که در آن  $B_k$  مانده  $f(z)$  در  $\circ, 1, 2$  است.  $(k = \circ, 1, 2)$  به  $c_k$  نقاط قطبی ساده  $f$  هستند و

$$B_k = \operatorname{Res}_{z=c_k} \frac{z^2}{z^6 + 1} = \frac{c_k^2}{6c_k^5} = \frac{1}{6c_k^3} \quad (k = \circ, 1, 2).$$

بنابراین

$$2\pi i(B_0 + B_1 + B_2) = 2\pi i \left( \frac{1}{6i} - \frac{1}{6i} + \frac{1}{6i} \right) = \frac{\pi}{3};$$

و رابطه (1) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\int_{-R}^R f(x)dx = \frac{\pi}{3} - \int_{C_R} f(z)dz \quad (2)$$

که به ازای همه مقادیر  $R$  بزرگتر از ۱ برقرار است.

سپس نشان می‌دهیم که وقتی  $R$  به  $\infty$  میل کند مقدار انتگرال سمت راست رابطه (2) به میل می‌کند. برای انجام این کار، ملاحظه می‌کنیم که وقتی  $|z| = R$

$$|z^2| = |z|^2 = R^2$$

و

$$|z^6 + 1| \geq ||z|^6 - 1| = R^6 - 1.$$

بنابراین اگر  $z$  نقطه‌ای روی  $C_R$  باشد،

$$M_R = \frac{R^2}{R^6 - 1} \quad \text{که در آن} \quad |f(z)| = \frac{|z^2|}{|z^6 + 1|} \leq M_R$$

و در نتیجه

$$\left| \int_{C_R} f(z)dz \right| \leq M_R \pi R, \quad (3)$$

طول نیمداایه  $C_R$  است. (بخش ۴۱ را ببینید.) چون عدد

$$M_R \pi R = \frac{\pi R^{\frac{1}{\epsilon}}}{R^{\epsilon} - 1}$$

خارج قسمت دو چندجمله‌یی بر حسب  $R$  و درجهٔ صورت از درجهٔ مخرج کوچکتر است وقتی  $R \rightarrow \infty$  میل کند این خارج قسمت باید به صفر میل کند. به عبارت دقیق‌تر، اگر صورت و مخرج را بر  $R^{\frac{1}{\epsilon}}$  تقسیم کنیم و بنویسیم

$$M_R \pi R = \frac{\frac{\pi}{R^{\frac{1}{\epsilon}}}}{1 - \frac{1}{R^{\epsilon}}},$$

بدیهی است که  $M_R \pi R$  به صفر میل می‌کند. در نتیجه، بنابر نابرابری (۳)

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) dz = 0.$$

حال از رابطهٔ (۲) نتیجه می‌شود که

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{x^{\frac{1}{\epsilon}}}{x^{\epsilon} + 1} dx = \frac{\pi}{3},$$

یا

$$\text{P.V. } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{\frac{1}{\epsilon}}}{x^{\epsilon} + 1} dx = \frac{\pi}{3}.$$

چون در اینجا انتگرال‌ده زوج است، با توجه به روابط (۶) و (۷) و عبارت ایرانیک قبل از آنها می‌دانیم که

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\frac{1}{\epsilon}}}{x^{\epsilon} + 1} dx = \frac{\pi}{6}. \quad (4)$$

## تمرینها

با استفاده از مانده‌ها انتگرال‌های ناسره در تمرینهای ۱ تا ۵ را محاسبه کنید.

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^{\frac{1}{\epsilon}} + 1}$$

. $\pi/2$  جواب:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^4 + 1)^2} . \cdot ۲$$

. $\pi/4$  جواب:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^4 + 1} . \cdot ۳$$

. $\pi/(2\sqrt{2})$  جواب:

$$\int_0^\infty \frac{x^4 dx}{(x^4 + 1)(x^4 + 4)} . \cdot ۴$$

. $\pi/6$  جواب:

$$\int_0^\infty \frac{x^4 dx}{(x^4 + 9)(x^4 + 4)^2} . \cdot ۵$$

. $\pi/200$  جواب:

با استفاده از ماندها مقادیر اصلی کوشی انتگرالهای تمرینات ۶ و ۷ را پیدا کنید.

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2 + 2x + 2} . \cdot ۶$$

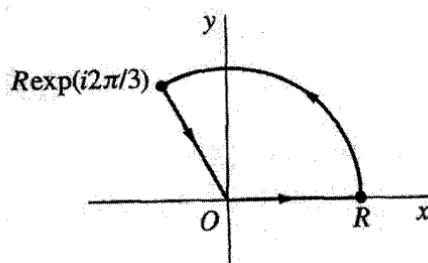
$$\int_{-\infty}^\infty \frac{x dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 2x + 2)} . \cdot ۷$$

. $-\pi/5$  جواب:

۸. با استفاده از ماندها و مسیر نشان داده شده در شکل ۹۲، که در آن  $1 < R$ ، فرمول انتگرال‌گیری زیر را به دست آورید

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^3 + 1} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

۹. فرض کنید  $m$  و  $n$  اعدادی صحیح باشند، که  $n < m \leq 0$ . طی مراحل زیر فرمول انتگرال‌گیری



شکل ۹۲

زیر را نتیجه بگیرید

$$\int_0^\infty \frac{x^{2m}}{x^{2n} + 1} dx = \frac{\pi}{2n} \csc\left(\frac{2m+1}{2n}\pi\right).$$

(الف) نشان دهید که صفرهای چندجمله‌ی  $z^{2n} + 1$  واقع در بالای محور حقیقی عبارت‌اند از

$$c_k = \exp\left[i\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right] \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1)$$

و هیچ صفری از آن روی محور حقیقی نیست.

(ب) به کمک قضیه ۶۹ بخش ۲ نشان دهید که

$$\operatorname{Res}_{z=c_k} \frac{z^{2m}}{z^{2n} + 1} = -\frac{1}{2n} e^{i(2k+1)\alpha} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1)$$

که در آن  $c_k$ ‌ها صفرهایی هستند که در قسمت (الف) پیدا شدند و

$$\alpha = \frac{2m+1}{2n}\pi.$$

سپس با استفاده از فرمول مجموعیابی

$$\sum_{k=0}^{n-1} z^k = \frac{1-z^n}{1-z} \quad (z \neq 1)$$

(تمرین ۱۰ بخش ۷ را ببینید) عبارت زیر را به دست آورید

$$2\pi i \sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{Res}_{z=c_k} \frac{z^{2m}}{z^{2n} + 1} = \frac{\pi}{n \sin \alpha}.$$

(ج) با استفاده از نتیجهٔ نهایی قسمت (ب) استنتاج فرمول انتگرال‌گیری را کامل کنید.

۱۰. فرمول انتگرال‌گیری

$$\int_0^\infty \frac{dx}{[(x^2 - a)^2 + 1]^2} = \frac{\pi}{8\sqrt{2}A^3} \left[ (2a^2 + 3)\sqrt{A+a} + a\sqrt{A-a} \right]$$

که در آن  $a$  عددی حقیقی و دلخواه است و  $A = \sqrt{a^2 + 1}$ ، در نظریه ساخت‌سازی فولاد به‌وسیلهٔ حرارت‌دادن با فرکانس رادیویی مطرح می‌شود.\* این فرمول را طی مراحل زیر استنتاج کنید.

\* صفحات ۳۶۴-۳۵۹ کتاب براون، هویلر و بیرورس (Brown, Hoyler, Bierwirth) را که در پیوست ۱ آمده است ببینید.

(الف) خاطرنشان سازید چرا چهار صفر چندجمله‌ایی

$$q(z) = (z^2 - a)^2 + 1$$

عبارت‌اند از ریشه‌های دوم اعداد  $i \pm a$ . سپس با استفاده از اینکه اعداد

$$z_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \sqrt{A+a} + i\sqrt{A-a} \right)$$

و  $z = a + i$  هستند (تمرین ۵، بخش ۹)، تحقیق کنید که  $\pm \bar{z}$  ریشه‌های دوم  $i - a$  بوده ولذا  $z$  و  $\bar{z}$  تنها صفرهای  $q(z)$  در نیم‌صفحه بالابی  $\text{Im } z \geq 0$  هستند.

(ب) با استفاده از روشی که در تمرین ۷، بخش ۶۹، به دست آمد و با به خاطر داشتن  $z = a + i$  به منظور ساده‌کردن، نشان دهید که نقطه  $z$  در قسمت (الف) یک قطب مرتبه ۲ تابع  $f(z) = 1/[q(z)]$  است و  $B_1$ ، مانده در  $z$ ، را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$B_1 = -\frac{q''(z_0)}{[q'(z_0)]^3} = \frac{a - i(2a^2 + 3)}{16A^2 z_0}.$$

پس از ملاحظه اینکه  $q'(-\bar{z}) = -\overline{q'(z)}$  و  $q''(-\bar{z}) = \overline{q''(z)}$ ، با استفاده از همان روش نشان دهید که نقطه  $\bar{z}$  در قسمت (الف) نیز یک قطب مرتبه ۲ تابع  $f(z)$  است با مانده

$$B_2 = \overline{\left\{ \frac{q''(z_0)}{[q'(z_0)]^3} \right\}} = -\overline{B}_1.$$

سپس عبارت زیر را برای مجموع این مانده‌ها به دست آورید

$$B_1 + B_2 = \frac{1}{8A^2 i} \text{Im} \left[ \frac{-a + i(2a^2 + 3)}{z_0} \right].$$

(ج) با رجوع به قسمت (الف) نشان دهید اگر  $R = |z_0|$ ، آن‌گاه  $|q(z)| \geq (R - |z_0|)^4$ ، که در آن  $|z| > R$ . سپس به کمک نتیجه نهایی قسمت (ب) استنتاج فرمول انتگرال‌گیری را کامل کنید.

### ۷۳. انتگرال‌های ناسره از آنالیز فوریه

نظریه مانده‌ها می‌تواند در محاسبه انتگرال‌های ناسره و همگرا به صورت

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos ax dx \quad \text{یا} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin ax dx \quad (1)$$

که در آنها  $a$  نمایش عدد ثابت مثبتی است مفید واقع شود. مانند بخش ۷۱، فرض می‌کنیم  $f(x) = p(x)/q(x)$ ، که در آن  $p(x)$  و  $q(x)$  چندجمله‌یهای با ضرایب حقیقی اند که هیچ عامل مشترکی ندارند. همچنین  $(z)$  هیچ صفر حقیقی ندارد. انتگرالهایی از نوع (۱) در نظریه و کاربردهای انتگرال فوریه پیدا می‌شوند.\*

روش مذکور در بخش ۷۱ را که در بخش ۷۲ از آن استفاده شد در اینجا نمی‌توان مستقیماً به کار بردن زیرا (بخش ۳۳ را ببینید)

$$|\sin az|^2 = \sin^2 ax + \sinh^2 ay$$

و

$$|\cos az|^2 = \cos^2 ax + \sinh^2 ay.$$

به عبارت دقیقتر چون

$$\sinh ay = \frac{e^{ay} - e^{-ay}}{2}$$

قدرمطلقهای  $|\sin az|$  و  $|\cos az|$  مثل  $e^{ay}$  وقتی  $y$  به بینهایت میل کند افزایش می‌یابند. روش اصلاح‌شده‌ای که در مثال زیر توضیح داده‌ایم بر اثر این واقعیت به ذهن القا شده است که

$$\int_{-R}^R f(x) \cos ax dx + i \int_{-R}^R f(x) \sin ax dx = \int_{-R}^R f(x) e^{iax} dx,$$

و قدرمطلق

$$|e^{iaz}| = |e^{ia(x+iy)}| = |e^{-ay} e^{iax}| = e^{-ay}$$

در نیم صفحه بالایی  $y \geq 0$  کراندار است.

مثال. نشان می‌دهیم که

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos^2 x}{(x^2 + 1)^2} dx = \frac{\pi}{e^2}. \quad (2)$$

چون این انتگرالده زوج است، کافی است نشان دهیم که مقدار اصلی کوشی انتگرال موجود است و مقدار آن را پیدا کنیم.

\* فصل ۷ کتاب زیر از مؤلفان را ببینید

تابع

$$f(z) = \frac{1}{(z^2 + 1)^2} \quad (3)$$

را معرفی کرده و ملاحظه می‌کنیم که حاصلضرب  $f(z)e^{iz^2}$  در همه نقاط محور  $x$ ‌ها و بالای آن جز در نقطه  $i = z$  تحلیلی است. تکینی  $i = z$  درون ناحیه نیم‌دایره‌یی واقع است که مرز آن از پاره خط  $-R \leq x \leq R$  محور حقیقی و  $C_R$  نیمة بالای دایره  $R$  ( $R > 1$ ) با  $|z| = R$  از  $z = -R = z$  تشکیل شده است. با انتگرالگیری از  $f(z)e^{iz^2}$  پیرامون این مرز رابطه زیر پیدا می‌شود

$$\int_{-R}^R \frac{e^{iz^2}}{(x^2 + 1)^2} dx = 2\pi i B_1 - \int_{C_R} f(z)e^{iz^2} dz, \quad (4)$$

که در آن

$$B_1 = \operatorname{Res}_{z=i} [f(z)e^{iz^2}] .$$

چون

$$\phi(z) = \frac{e^{iz^2}}{(z+i)^2} \quad \text{که در آن} \quad f(z)e^{iz^2} = \frac{\phi(z)}{(z-i)^2}$$

نقطه  $i = z$  به‌وضوح یک قطب مرتبه ۲ تابع  $f(z)e^{iz^2}$  است و

$$B_1 = \phi'(i) = \frac{1}{ie^3} .$$

سپس با مساوی قراردادن قسمتهای حقیقی طرفین رابطه (۴) در می‌یابیم که

$$\int_{-R}^R \frac{\cos 3x}{(x^2 + 1)^2} dx = \frac{2\pi}{e^3} - \operatorname{Re} \int_{C_R} f(z)e^{iz^2} dz. \quad (5)$$

بالاخره، ملاحظه می‌کنیم که اگر  $z$  نقطه‌ای روی  $C_R$  باشد،

$$M_R = \frac{1}{(R^2 - 1)^2} \quad \text{که در آن} \quad |f(z)| \leq M_R$$

و برای چنین نقطه‌ای  $1 = |e^{iz^2}| = e^{-3y}$ . در نتیجه

$$\left| \operatorname{Re} \int_{C_R} f(z)e^{iz^2} dz \right| \leq \left| \int_{C_R} f(z)e^{iz^2} dz \right| \leq M_R \pi R. \quad (6)$$

چون وقتی  $R$  به  $\infty$  میل کند کمیت

$$M_R \pi R = \frac{\pi R}{(R^2 - 1)^2} \times \frac{1}{\frac{1}{R^4}} = \frac{\frac{\pi}{R^3}}{\left(1 - \frac{1}{R^2}\right)^2}$$

به  $^\circ$  میل میکند و نابرابریهای (۶) برقرارند، برای رسیدن به نتیجه مطلوب (۲) فقط باید در رابطه (۵)،  $R$  را به  $\infty$  میل داد.

## ۷۴. لام ژوردان

در محاسبه انتگرالهایی از نوع بررسی شده در بخش ۷۳ گاهی لازم است از لام ژوردان<sup>\*</sup>، که در اینجا آن را به صورت قضیه بیان کرده‌ایم، استفاده کنیم.

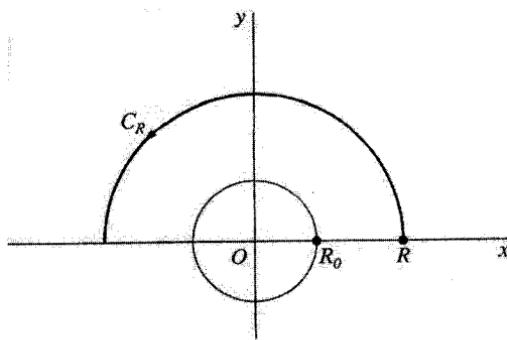
قضیه. فرض کنید که

(الف) تابع  $f(z)$  در همه نقاط  $z$  واقع در نیم صفحه بالایی  $y \geq 0$  که خارج دایره  $|z| = R$  باشد؛

(ب) نمایش نیمدایره  $(-\pi \leq \theta \leq \pi)z = Re^{i\theta}$  باشد، که در آن  $R > R_0$  (شکل ۹۳)؛

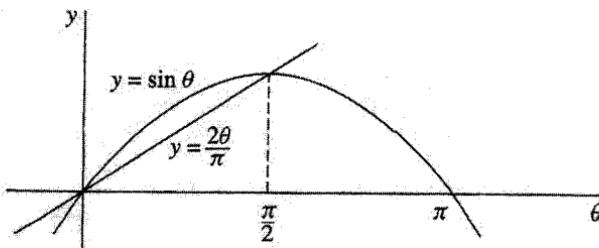
(ج) عدد ثابت مثبتی مانند  $M_R$  هست که به ازای هر  $z$  روی  $|f(z)| \leq M_R$  که در آن

$$\lim_{R \rightarrow \infty} M_R = 0.$$



شکل ۹۳

\* اولین پانوشت در بخش ۳۸ را ببینید.



شکل ۹۴

در این صورت به ازای هر عدد ثابت مثبت  $a$ ,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) e^{iaz} dz = 0 \quad (1)$$

اثبات بر مبنای قضیه‌ای موسوم به نابرابری زوردان است:

$$\int_0^\pi e^{-R \sin \theta} d\theta < \frac{\pi}{R} \quad (R > 0) \quad (2)$$

برای تحقیق درستی این نابرابری، ابتدا از روی نمودارهای توابع  $y = \sin \theta$  و  $y = 2\theta/\pi$  و قطی  $\pi/2 \leq \theta \leq \pi$  (شکل ۹۴) توجه می‌کنیم که به ازای هر  $\theta$  در این بازه  $\sin \theta \geq 2\theta/\pi \geq 0$ . در نتیجه اگر  $R > 0$

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{هرگاه} \quad e^{-R \sin \theta} \leq e^{-2R\theta/\pi}$$

ولذا

$$\int_0^{\pi/2} e^{-R \sin \theta} d\theta \leq \int_0^{\pi/2} e^{-2R\theta/\pi} d\theta = \frac{\pi}{2R} (1 - e^{-R}) .$$

بنابراین

$$\int_0^{\pi/2} e^{-R \sin \theta} d\theta < \frac{\pi}{2R} \quad (R > 0) . \quad (3)$$

اما این نابرابری دقیقاً صورت دیگری از نابرابری (2) است، زیرا نمودار  $y = \sin \theta$  نسبت به خط قائم  $\theta = \pi/2$  در بازه  $0 \leq \theta \leq \pi$  متقابن است.

حال به تحقیق درستی حد (1) می‌پردازیم، احکام (الف)–(ج) قضیه را پذیرفته و می‌نویسیم

$$\int_{C_R} f(z) e^{iaz} dz = \int_0^\pi f(Re^{i\theta}) \exp(iaRe^{i\theta}) iRe^{i\theta} d\theta .$$

$$|\exp(iaRe^{i\theta})| \leq e^{-aR\sin\theta} \quad \text{و} \quad |f(Re^{i\theta})| \leq M_R$$

بنابر نابرابری ثوردان (۲) نتیجه می‌شود که

$$\left| \int_{C_R} f(z)e^{iaz} dz \right| \leq M_R R \int_0^\pi e^{-aR\sin\theta} d\theta < \frac{M_R \pi}{a}.$$

پس حد (۱) بدیهی است زیرا وقتی  $R \rightarrow \infty$ ,  $M_R \rightarrow 0$ .  
مثال. حال مقدار اصلی کوشی انتگرال زیر را پیدا می‌کنیم

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x \, dx}{x^2 + 2x + 2}.$$

طبق معمول وجود مقدار مورد سؤال را با یافتن آن ثابت می‌کنیم، می‌نویسیم

$$f(z) = \frac{z}{z^2 + 2z + 2} = \frac{z}{(z - z_1)(z - \bar{z}_1)},$$

که در آن  $i + z_1 = -z$ . نقطه  $z_1$  که بالای محور  $x$  هاست، قطب ساده تابع  $f(z)e^{iz}$  است، با مانده

$$B_1 = \frac{z_1 e^{iz_1}}{z_1 - \bar{z}_1}. \quad (4)$$

بنابراین اگر  $R > \sqrt{2}$  و  $C_R$  نمایش نیمه بالایی دایره  $|z| = R$  در جهت مثبت باشد،

$$\int_{-R}^R \frac{xe^{ix} dx}{x^2 + 2x + 2} = 2\pi i B_1 - \int_{C_R} f(z)e^{iz} dz;$$

و در نتیجه

$$\int_{-R}^R \frac{x \sin x \, dx}{x^2 + 2x + 2} = \operatorname{Im}(2\pi i B_1) - \operatorname{Im} \int_{C_R} f(z)e^{iz} dz. \quad (5)$$

حال

$$\left| \operatorname{Im} \int_{C_R} f(z)e^{iz} dz \right| \leq \left| \int_{C_R} f(z)e^{iz} dz \right|; \quad (6)$$

و توجه می‌کنیم که وقتی  $z$  نقطه‌ای روی  $C_R$  باشد،

$$M_R = \frac{R}{(R - \sqrt{2})^2} \quad \text{که در آن} \quad |f(z)| \leq M_R$$

و برای هر چنین نقطه‌ای  $1 \leq |e^{iz}| = e^{-y}$ . به روش مثالهای بخش‌های ۷۲ و ۷۳ نمی‌توانیم نتیجه بگیریم که وقتی  $R$  به بی‌نهایت میل کند سمت راست نابرابری (۶) و بنابراین سمت چپ آن به صفر میل می‌کند. زیرا کمیت

$$M_R \pi R = \frac{\pi R^4}{(R - \sqrt{2})^2} = \frac{\pi}{\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{R}\right)^2}$$

به صفر میل نمی‌کند. ولی حد (۱) نتیجه مطلوب را به دست می‌دهد.  
بنابراین در واقع از نابرابری (۶) نتیجه می‌شود که وقتی  $R$  به بی‌نهایت میل کند سمت چپ آن به صفر میل می‌کند. در نتیجه از رابطه (۵) و عبارت (۴) برای مانده  $B_1$  می‌بینیم که

$$\text{P.V. } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x \, dx}{x^4 + 2x + 2} = \text{Im}(2\pi i B_1) = \frac{\pi}{e} (\sin 1 + \cos 1). \quad (7)$$

### تمرینها

به کمک مانده‌ها، انتگرالهای ناسرة تمرینهای ۱ تا ۸ را به دست آورید.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x \, dx}{(x^4 + a^4)(x^4 + b^4)} \quad (a > b > 0). \quad 1$$

$$\cdot \frac{\pi}{a^4 - b^4} \left( \frac{e^{-b}}{b} - \frac{e^{-a}}{a} \right) \quad \text{جواب:}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos ax \, dx}{x^4 + 1} \quad (a > 0). \quad 2$$

$$\cdot \frac{\pi}{2} e^{-a} \quad \text{جواب:}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos ax \, dx}{(x^4 + b^4)^2} \quad (a > 0, b > 0). \quad 3$$

$$\cdot \frac{\pi}{4b^4} (1 + ab)e^{-ab} \quad \text{جواب:}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x \sin 2x \, dx}{x^4 + 3} \quad 4$$

$$\cdot \frac{\pi}{2} \exp(-2\sqrt{3}) \quad \text{جواب:}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin ax \, dx}{x^4 + 4} \quad (a > 0). \quad 5$$

$$\cdot \frac{\pi}{2} e^{-a} \sin a \quad \text{جواب:}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{\frac{1}{4}} \sin ax}{x^{\frac{1}{4}} + \frac{1}{4}} dx \quad (a > 0) . \text{۶}$$

.  $\pi e^{-a} \cos a$  جواب:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x dx}{(x^{\frac{1}{4}} + 1)(x^{\frac{1}{4}} + \frac{1}{4})} . \text{۷}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\frac{1}{4}} \sin x dx}{(x^{\frac{1}{4}} + 1)(x^{\frac{1}{4}} + \frac{1}{4})} . \text{۸}$$

با استفاده از مانده‌ها، مقدار اصلی کوشی انتگرال ناسره در تمرینهای ۹ تا ۱۱ را به دست آورید.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x dx}{x^{\frac{1}{4}} + 4x + 5} . \text{۹}$$

.  $-\frac{\pi}{e} \sin 2$  جواب:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+1) \cos x dx}{x^{\frac{1}{4}} + 4x + 5} . \text{۱۰}$$

.  $\frac{\pi}{e} (\sin 2 - \cos 2)$  جواب:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x dx}{(x+a)^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}} \quad (b > 0) . \text{۱۱}$$

۱۲. طی مراحل زیر، انتگرال‌های فرنل<sup>۱</sup> را که در نظریه پراش حائز اهمیت‌اند به دست آورید

$$\int_0^{\infty} \cos(x^{\frac{1}{2}}) dx = \int_0^{\infty} \sin(x^{\frac{1}{2}}) dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

(الف) با انتگرال‌گیری از تابع  $\exp(iz^{\frac{1}{2}})$  روی مرز قطاع  $R \leq r \leq \theta \leq \pi/4$  در

جهت مثبت (شکل ۹۵) و با استفاده از قضیه کوشی-گورسا نشان دهید که

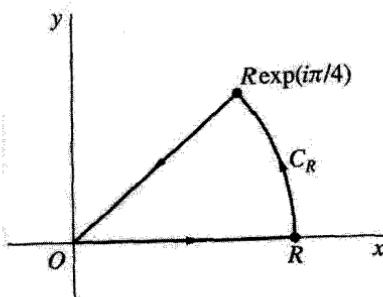
$$\int_0^R \cos(x^{\frac{1}{2}}) dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^R e^{-r^{\frac{1}{2}}} dr - \operatorname{Re} \int_{C_R} e^{iz^{\frac{1}{2}}} dz$$

$$\int_0^R \sin(x^{\frac{1}{2}}) dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^R e^{-r^{\frac{1}{2}}} dr - \operatorname{Im} \int_{C_R} e^{iz^{\frac{1}{2}}} dz$$

که، قوس  $C_R$  (۰ ≤ θ ≤ π/۴)  $z = Re^{i\theta}$  است.

(ب) با به دست آوردن نابرابری

$$\left| \int_{C_R} e^{iz^{\frac{1}{2}}} dz \right| \leq \frac{R}{\sqrt{2}} \int_0^{\pi/2} e^{-R^{\frac{1}{2}} \sin \phi} d\phi$$



شکل ۹۵

و سپس با مراجعه به صورت (۳)، بخش ۷۴، از نابرابری زوردان، نشان دهید که مقدار انتگرال در امتداد قوس  $C_R$ ، که در قسمت (الف) مطرح شد، به صفر میل می‌کند هرگاه  $R$  به بی‌نهایت میل کند.

(ج) نتایج قسمتهای (الف) و (ب)، همراه با فرمول انتگرالگیری مشهور\* زیر را به کار برد  
تمرین را کامل کنید،

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

## ۷۵. مسیرهای دندانه‌دار

در این بخش و بخش بعد نحوه استفاده از مسیرهای دندانه‌دار را توصیف می‌کنیم. مطلب را با بیان حد مهمی که در مثال این بخش مطرح خواهد شد شروع می‌کنیم. قضیه. فرض کنید که

(الف) تابع  $f(z)$  در نقطه  $x = z$  بر محور حقیقی دارای قطب ساده و نمایش سری لوران در قرص محدود  $|z - x| < R_2$  باشد (شکل ۹۶)؛

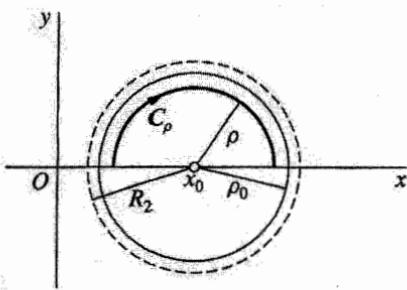
(ب)  $C_\rho$  نمایش نیمه‌بالایی دایره  $|\rho| < |z - x|$  باشد که  $\rho < R_2$  و در جهت حرکت عقربه‌های ساعت گرفته شده است.

در این صورت

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{C_\rho} f(z) dz = -B_0 \pi i. \quad (1)$$

فرض می‌کنیم شرایط (الف) و (ب) برقرار باشند. اثبات قضیه را با نوشتن سری لوران قسمت

\* پانوشت تمرین ۴ بخش ۴۶ را ببینید.



شکل ۹۶

(الف) به صورت زیر آغاز می‌کنیم

$$f(z) = g(z) + \frac{B_\circ}{z - x_\circ} \quad (\circ < |z - x_\circ| < R_2),$$

که در آن

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - x_\circ)^n \quad (|z - x_\circ| < R_2).$$

در نتیجه

$$\int_{C_\rho} f(z) dz = \int_{C_\rho} g(z) dz + B_\circ \int_{C_\rho} \frac{dz}{z - x_\circ}. \quad (2)$$

حال بنابر قضیه بخش ۵۸، تابع  $g(z)$  در قرص  $R_2 > |z - x_\circ| > \rho_0$  پیوسته است. بنابراین اگر عدد  $\rho$  را طوری بگیریم که  $\rho < \rho_0 < R_2$  (شکل ۹۶ را ببینید) بنابر بخش ۱۷، تابع  $g(z)$  باید در قرص بسته  $|z - x_\circ| \leq \rho_0$  کراندار باشد. یعنی عدد ثابت نامنفی  $M$  هست که

$$|z - x_\circ| \leq \rho_0 \quad \text{هرگاه} \quad |g(z)| \leq M$$

و چون  $L$  طول مسیر  $C_\rho$  برابر است با  $L = \pi\rho$  در نتیجه

$$\left| \int_{C_\rho} g(z) dz \right| \leq ML = M\pi\rho.$$

بنابراین

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{C_\rho} g(z) dz = 0 \quad (3)$$

چون نیمدایره  $C_\rho$  – دارای نمایش پارامتری

$$z = x_0 + \rho e^{i\theta} \quad (0 \leq \theta \leq \pi),$$

است، انتگرال دوم در سمت راست رابطه (۲) دارای مقدار زیر است

$$\int_{C_\rho} \frac{dz}{z - x_0} = \int_{-C_\rho} \frac{dz}{z - x_0} = - \int_0^\pi \frac{1}{\rho e^{i\theta}} \rho i e^{i\theta} d\theta = -i \int_0^\pi d\theta = -i\pi.$$

در نتیجه

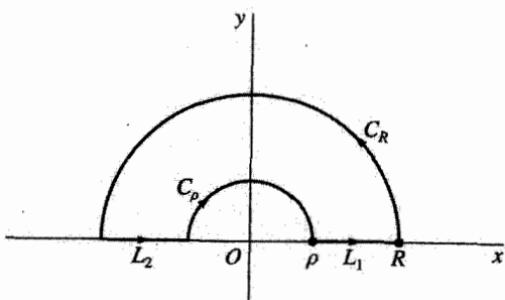
$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{C_\rho} \frac{dz}{z - x_0} = -i\pi. \quad (4)$$

حال حد (۱) با میل دادن  $\rho$  به سمت صفر در طرفین رابطه (۲) و استفاده از حدود (۳) و (۴) به دست می‌آید.

مثال. حال با تغییر مختص در روش بهکار رفته در بخش‌های ۷۳ و ۷۴ و انتگرال‌گیری از  $z/x e^{iz}$  روی مسیر ساده و بسته‌ای که در شکل ۹۷ نشان داده شده است، فرمول انتگرال‌گیری\*

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2} \quad (5)$$

را به دست می‌آوریم. در آن شکل،  $\rho$  و  $R$  معرف اعداد حقیقی و مثبتی هستند که  $\rho < R$  و  $L_2 < L_1$  و  $L_2$  به ترتیب بازه‌های  $\rho \leq x \leq R$  و  $-R \leq x \leq -\rho$  را روی محور حقیقی نمایش می‌دهند.



شکل ۹۷

\* این فرمول در نظریه انتگرال فوریه پیدا می‌شود. صفحات ۲۰۸–۲۰۶ کتاب ششم ۲۰۰۱ کتاب "Fourier Series and Boundary Value Problems" همین مؤلفان را ببینید که این فرمول در آن به روشنی کاملاً متفاوت به دست آمده است.

در حالی که نیمدایره  $C_R$  مانند بخش‌های ۷۳ و ۷۴ گرفته شده است، نیمدایره  $C_\rho$  بدین منظور معرفی شده است که مسیر انتگرالگیری از تکینی  $z = e^{iz}/z$  عبور نکند.

از قضیه کوشی-گورسا نتیجه می‌شود که

$$\int_{L_1} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{L_2} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{C_\rho} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0.$$

یا

$$\int_{L_1} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{L_2} \frac{e^{iz}}{z} dz = - \int_{C_\rho} \frac{e^{iz}}{z} dz - \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z} dz. \quad (6)$$

به علاوه، چون ساقهای  $L_1$  و  $L_2$  به ترتیب دارای نمایش‌های زیرند

$$z = r e^{i\pi} = -r (\rho \leq r \leq R) \quad \text{و} \quad z = r e^{i\circ} = r (\rho \leq r \leq R) \quad (7)$$

می‌توان طرف چپ رابطه (6) را به صورت زیر نوشت

$$\int_{L_1} \frac{e^{iz}}{z} dz - \int_{-L_2} \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_\rho^R \frac{e^{ir}}{r} dr - \int_\rho^R \frac{e^{-ir}}{r} dr = 2i \int_\rho^R \frac{\sin r}{r} dr.$$

در نتیجه،

$$2i \int_\rho^R \frac{\sin r}{r} dr = - \int_{C_\rho} \frac{e^{iz}}{z} dz - \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z} dz. \quad (8)$$

حال بنابر نمایش سری لوران

$$\begin{aligned} \frac{e^{iz}}{z} &= \frac{1}{z} \left[ 1 + \frac{(iz)}{1!} + \frac{(iz)^2}{2!} + \frac{(iz)^3}{3!} + \dots \right] \\ &= \frac{1}{z} + \frac{i}{1!} + \frac{i^2}{2!} z + \frac{i^3}{3!} z^2 + \dots \quad (0 < |z| < \infty), \end{aligned}$$

بهوضوح دیده می‌شود که،  $z/e^{iz}$  قطب ساده‌ای در مبدأ با مانده واحد دارد. پس بنابر قضیه ابتدای این بخش،

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{C_\rho} \frac{e^{iz}}{z} dz = -\pi i.$$

همچنین، چون وقتی  $z$  نقطه‌ای روی  $C_R$  باشد

$$\left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|} = \frac{1}{R},$$

بنابراین ژوردان در بخش ۷۴ می‌دانیم که

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0.$$

بنابراین، با میل دادن  $\rho$  به  $0^\circ$  در معادله (۸) و سپس میل دادن  $R$  به  $\infty$ ، به نتیجه زیر می‌رسیم

$$2i \int_0^\infty \frac{\sin r}{r} dr = \pi i$$

که در واقع فرمول (۵) است.

## ۷۶. یک دندانه پیرامون نقطه شاخه‌یی

در مثال این بخش از همان مسیر دندانه‌داری استفاده می‌شود که در مثال بخش قبل استفاده شد. ولی این دندانه به علت نقطه شاخه‌یی اختیار شده است نه تکینی تنها. مثال. فرمول انتگرالگیری

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{(x^2 + 4)^2} dx = \frac{\pi}{32} (\ln 2 - 1). \quad (1)$$

را می‌توان با در نظر گرفتن شاخه

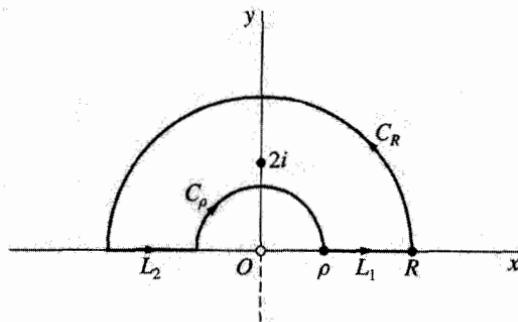
$$f(z) = \frac{\log z}{(z^2 + 4)^2} \quad \left( |z| > 0, -\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{3\pi}{2} \right).$$

از تابع چندمقداری  $(\log z)/(z^2 + 4)$  بدست آورد. این شاخه، که بریدگی شاخه‌یی آن متشکل از مبدأ و قسمت منفی محور موهومی است، در همه نقاط حوزه نشان داده شده بجز در نقطه  $z = 2i$  تحلیلی است. برای اینکه همیشه نقطه تکین تنهای  $2i$  درون مسیر بسته باشد، لازم است  $z < R < 2 < \rho$ . شکل ۹۸ را ببینید، که در آن نقطه تکین تنها و نقطه شاخه‌یی  $z = 0$  نشان داده شده و از همان نمادهای  $L_1, L_2, C_\rho$  و  $C_R$  شکل ۹۷ استفاده شده است. بنابر قضیه مانده کوشی

$$\int_{L_1} f(z) dz + \int_{C_R} f(z) dz + \int_{L_2} f(z) dz + \int_{C_\rho} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=2i} f(z).$$

يعنى

$$\int_{L_1} f(z) dz + \int_{L_2} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=2i} f(z) - \int_{C_\rho} f(z) dz - \int_{C_R} f(z) dz. \quad (2)$$



شکل ۹۸

چون

$$f(z) = \frac{\ln r + i\theta}{(r^2 e^{i2\theta} + 4)^2} \quad (z = re^{i\theta})$$

می‌توان نمایش‌های پارامتری

$$z = re^{i\pi} = -r \quad (\rho \leq r \leq R) \quad z = re^{i\circ} = r \quad (\rho \leq r \leq R) \quad (3)$$

را برای  $L_1$  و  $-L_2$  به کار برد طرف چپ رابطه (۲) را به صورت زیر نوشت

$$\int_{L_1} f(z) dz - \int_{-L_2} f(z) dz = \int_{\rho}^R \frac{\ln r}{(r^2 + 4)^2} dr + \int_{\rho}^R \frac{\ln r + i\pi}{(r^2 + 4)^2} dr.$$

همچنین، چون

$$\phi(z) = \frac{\log z}{(z + 2i)^2} \quad \text{که در آن} \quad f(z) = \frac{\phi(z)}{(z - 2i)^2}$$

تکینی  $2i$   $= z$  تابع  $f(z)$ ، یک قطب از مرتبه ۲ با مانده

$$\phi'(2i) = \frac{\pi}{64} + i \frac{1 - \ln 2}{32}$$

است. بنابراین رابطه (۲) به

$$2 \int_{\rho}^R \frac{\ln r}{(r^2 + 4)^2} dr + i\pi \int_{\rho}^R \frac{dr}{(r^2 + 4)^2} = \frac{\pi}{16}(\ln 2 - 1) + i \frac{\pi}{32}$$

$$- \int_{C_\rho} f(z) dz - \int_{C_R} f(z) dz \quad (4)$$

تبديل می‌شود و با مساوی قراردادن قسمتهای حقیقی طرفین با هم، در می‌یابیم که

$$2 \int_{\rho}^R \frac{\ln r}{(r^2 + 4)^2} dr = \frac{\pi}{16} (\ln 2 - 1) - \operatorname{Re} \int_{C_\rho} f(z) dz - \operatorname{Re} \int_{C_R} f(z) dz. \quad (5)$$

آنچه می‌ماند این است که نشان دهیم

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \operatorname{Re} \int_{C_R} f(z) dz = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{\rho \rightarrow 0} \operatorname{Re} \int_{C_\rho} f(z) dz = 0. \quad (6)$$

زیرا در این صورت اگر در رابطه (5)،  $\rho$  و  $R$  را، به ترتیب، به  $0$  و  $\infty$  میل دهیم به رابطه زیر می‌رسیم

$$2 \int_0^\infty \frac{\ln r}{(r^2 + 4)^2} dr = \frac{\pi}{16} (\ln 2 - 1)$$

که همان رابطه (1) است.

حدود (6) به صورت زیر اثبات می‌شوند. ابتدا توجه می‌کنیم که اگر  $1 < \rho < R$  و نقطه‌ای روی  $C_\rho$  باشد آنگاه

$$|\log z| = |\ln \rho + i\theta| \leq |\ln \rho| + |i\theta| \leq -\ln \rho + \pi$$

$$|z^2 + 4| \geq ||z|^2 - 4| = 4 - \rho^2.$$

در نتیجه،

$$\left| \operatorname{Re} \int_{C_\rho} f(z) dz \right| \leq \left| \int_{C_\rho} f(z) dz \right| \leq \frac{-\ln \rho + \pi}{(4 - \rho^2)^2} \pi \rho = \pi \frac{\pi \rho - \rho \ln \rho}{(4 - \rho^2)^2};$$

و بنابر قاعده هوپیتال<sup>1</sup> وقتی  $\rho$  به  $0$  میل کند، حاصل ضرب  $\rho \ln \rho$  که در صورت کسر منتهی‌الیه سمت راست قرار دارد، به  $0$  میل می‌کند. بنابراین اولین حد (6) بهوضوح برقرار است. به صورتی مشابه، با نوشتن

$$\left| \operatorname{Re} \int_{C_R} f(z) dz \right| \leq \left| \int_{C_R} f(z) dz \right| \leq \frac{\ln R + \pi}{(R^2 - 4)^2} \pi R = \pi \frac{\frac{\pi}{R} + \frac{\ln R}{R}}{\left(R - \frac{4}{R}\right)^2}$$

1. l'Hospital

و استفاده از قاعدة هوبیتال می‌توان نشان داد که خارج قسمت  $(\ln R)/R$  به  $\circ$  میل می‌کند وقتی  $R \rightarrow \infty$  میل کند، و دومین حد (۶) به دست می‌آید.

توجه کنید که چگونه یک فرمول انتگرال‌گیری دیگر، یعنی

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2 + 4)^2} = \frac{\pi}{32} \quad (7)$$

با مساوی گرفتن قسمتهای موهومی، به جای قسمتهای حقیقی، در دو طرف رابطه (۴) نتیجه می‌شود:

$$\pi \int_\rho^R \frac{dr}{(r^2 + 4)^2} = \frac{\pi^2}{32} - \operatorname{Im} \int_{C_R} f(z) dz - \operatorname{Im} \int_{C_\rho} f(z) dz. \quad (8)$$

در این صورت با میل دادن  $\rho$  و  $R$  به ترتیب به  $\circ$  و  $\infty$ ، فرمول (۷) به دست می‌آید، زیرا

$$\left| \operatorname{Im} \int_{C_R} f(z) dz \right| \leq \left| \int_{C_R} f(z) dz \right| \quad \text{و} \quad \left| \operatorname{Im} \int_{C_\rho} f(z) dz \right| \leq \left| \int_{C_\rho} f(z) dz \right|. \quad (9)$$

## ۷۷. انتگرال‌گیری در امتداد یک بریدگی شاخه‌یی

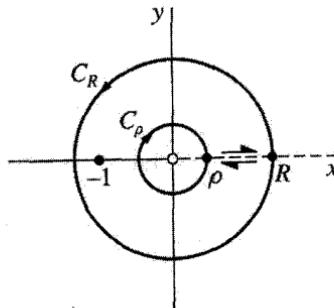
قضیه مانده کوشی در محاسبه یک انتگرال حقیقی، وقتی قسمتی از مسیر انتگرال‌گیری تابع  $f(z)$ ، که قضیه برای آن به کار می‌رود، در امتداد یک بریدگی شاخه‌یی آن تابع است، می‌تواند مفید باشد.

مثال. فرض کنیم  $x^{-a}$ ، که در آن  $\circ < x < a < 1$ ، معرف مقدار اصلی توان مورد نظر  $x$  است؛ یعنی،  $x^{-a}$  عدد حقیقی مثبت است. حال انتگرال حقیقی ناسرة

$$\int_0^\infty \frac{x^{-a}}{x+1} dx \quad (\circ < a < 1) \quad (1)$$

را که در مطالعه تابع گاما مهم است محاسبه می‌کنیم.\* توجه کنید که انتگرال (۱) نه فقط به دلیل حد بالای انتگرال‌گیری ناسره است بلکه به دلیل داشتن ناپوستگی بی‌نهایت انتگرال‌ده در  $\circ$  نیز  $x = 1$  نیز  $x = a$  است. در صورتی که  $1 < a < 0$  این انتگرال همگراست زیرا انتگرال‌ده در نزدیکی  $\circ$  همانند  $x^{-a}$ ، رفتار می‌کند و وقتی  $x$  به بی‌نهایت میل کند همانند  $x^{-a-1}$ . ولی نیازی نیست که همگرای را جداگانه ثابت کنیم زیرا این مطالعه در محاسبه انتگرال مستتر است.

\* به عنوان مثال صفحه ۴ کتاب لبدف (Lebedev) را که در پیوست ۱ ذکر شده، ببینید.



شکل ۹۹

اثبات را با این فرض شروع می‌کنیم که  $C_R$  و  $C_\rho$  به ترتیب نمایش دوایر  $|z| = R$  و  $|z| = \rho$  باشند که در آن  $R > 1 > \rho$  و آنها را در جهتی می‌گیریم که در شکل ۹۹ نشان داده شده است. سپس از شاخه

$$f(z) = \frac{z^{-a}}{z + 1} \quad (|z| > 0, 0 < \arg z < 2\pi) \quad (2)$$

ازتابع چندمقداری  $(1 + z^{-a})/(z + 1)$  با بریدگی شاخه‌یی  $\arg z = 0$ ، روی مسیر ساده بسته‌ای که در شکل ۹۹ نشان داده شده است انتگرال می‌گیریم. این مسیر به وسیله نقطه متحركی پیموده می‌شود که در امتداد لبه بالایی بریدگی شاخه‌یی  $f(z)$  از  $\rho$  به  $R$  می‌رود، سپس روی  $C_R$  بر می‌گردد، بعد در امتداد لبه پایینی بریدگی به  $\rho$  می‌رود و بالاخره روی  $C_\rho$  به  $0$  بر می‌گردد. حال در امتداد «لبه‌های» بالایی و پایینی طوق بریده شده‌ای که ساخته شده است، به ترتیب،

$\theta = 0$  و  $\theta = 2\pi$ . چون

$$f(z) = \frac{\exp(-a \log z)}{z + 1} = \frac{\exp[-a(\ln r + i\theta)]}{re^{i\theta} + 1}$$

هرگاه  $z = re^{i\theta}$ ، در نتیجه روی لبه بالایی که

$$f(z) = \frac{\exp[-a(\ln r + i\theta)]}{r + 1} = \frac{r^{-a}}{r + 1}$$

و روی لبه پایینی که

$$f(z) = \frac{\exp[-a(\ln r + i2\pi)]}{r + 1} = \frac{r^{-a}e^{-i2\pi a}}{r + 1}.$$

بدین ترتیب از قضیه مانده‌ها نتیجه می‌شود که

$$\int_{\rho}^R \frac{r^{-a}}{r+1} dr + \int_{C_R} f(z) dz - \int_{\rho}^R \frac{r^{-a} e^{-i2a\pi}}{r+1} dr + \int_{C_\rho} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=-1} f(z). \quad (3)$$

البته استنتاج رابطه (۳) فقط صوری است زیرا  $f(z)$  روی بریدگی شاخه مطرح شده تحلیلی نیست، یا حتی تعریف نشده است. مع‌هذا این رابطه برقرار است و با استدلالی نظیر آنچه در تمرین ۸ آمده می‌توان درستی آن را کاملاً ثابت کرد.

مانده موجود در رابطه (۳) را می‌توان با توجه به این نکته کهتابع

$$\phi(z) = z^{-a} = \exp(-a \log z) = \exp[-a(\ln r + i\theta)] \quad (r > 0, 0^\circ < \theta < 2\pi)$$

در  $z = -1$  تحلیلی است و

$$\phi(-1) = \exp[-a(\ln 1 + i\pi)] = e^{-ia\pi} \neq 0.$$

به دست آورد. این رابطه نشان می‌دهد که نقطه  $-1 = z$  یک قطب ساده تابع  $f(z)$  است که با ضابطه (۲) تعریف شده و

$$\operatorname{Res}_{z=-1} f(z) = e^{-ia\pi}.$$

بنابراین رابطه (۳) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$(1 - e^{-i2a\pi}) \int_{\rho}^R \frac{r^{-a}}{r+1} dr = 2\pi i e^{-ia\pi} - \int_{C_\rho} f(z) dz - \int_{C_R} f(z) dz. \quad (4)$$

حال با استناد به تعریف (۲) برای  $f(z)$  می‌بینیم که

$$\left| \int_{C_\rho} f(z) dz \right| \leq \frac{\rho^{-a}}{1-\rho} 2\pi\rho = \frac{2\pi}{1-\rho} \rho^{1-a}$$

$$\left| \int_{C_R} f(z) dz \right| \leq \frac{R^{-a}}{R-1} 2\pi R = \frac{2\pi R}{R-1} \cdot \frac{1}{R^a}.$$

چون  $1 < a < 0$  وقتی  $\rho \rightarrow \infty$  میل کنند مقادیر این دو انتگرال به  $0$  میل می‌کنند. بنابراین اگر در رابطه (۴) ابتدا  $\rho \rightarrow \infty$  میل کند و سپس  $R \rightarrow 1$  میل کند، نتیجه می‌شود که

$$(1 - e^{-i2a\pi}) \int_0^\infty \frac{r^{-a}}{r+1} dr = 2\pi i e^{-ia\pi},$$

$$\int_0^\infty \frac{r^{-a}}{r+1} dr = 2\pi i \frac{e^{-ia\pi}}{1-e^{-i2a\pi}} \cdot \frac{e^{ia\pi}}{e^{ia\pi}} = \pi \frac{2i}{e^{ia\pi}-e^{-ia\pi}}.$$

این رابطه البته همان رابطه زیر است

$$\int_0^\infty \frac{x^{-a}}{x+1} dx = \frac{\pi}{\sin a\pi} \quad (\circ < a < 1). \quad (5)$$

### تمرینها

در تمرینهای ۱ تا ۴ مسیر دندانه دار شکل ۹۷ (بخش ۷۵) را در نظر بگیرید.

۱. فرمول انتگرالگیری زیر را به دست آورید

$$\int_0^\infty \frac{\cos(ax) - \cos(bx)}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}(b-a) \quad (a \geq 0, b \geq 0).$$

سپس با کمک اتحاد مثلثاتی  $x = 2 \sin^2 x - \cos(2x) = 2 \sin^2 x - 1$  بگویید که چگونه نتیجه می شود که

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}.$$

۲. انتگرال ناسرة زیر را محاسبه کنید

$$x^a = \exp(a \ln x) \quad \text{که در آن } -1 < a < 3 \quad \text{و} \quad \int_0^\infty \frac{x^a}{(x^2+1)^2} dx$$

$$\begin{cases} \frac{(1-a)\pi}{4 \cos(a\pi/2)}, & a \neq 1 \\ \frac{1}{2}, & a = 1 \end{cases} \quad \text{جواب:}$$

۳. با استفاده ازتابع

$$f(z) = \frac{z^{1/3} \log z}{z^2 + 1} = \frac{e^{(1/3)\log z} \log z}{z^2 + 1} \quad \left( |z| > 0, -\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{3\pi}{2} \right)$$

دو فرمول انتگرالگیری زیر را به دست آورید:

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt[3]{x} \ln x}{x^2 + 1} dx = \frac{\pi}{6}, \quad \int_0^\infty \frac{\sqrt[3]{x}}{x^2 + 1} dx = \frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

۴. با استفاده از تابع

$$f(z) = \frac{(\log z)^{\frac{1}{2}}}{z^{\frac{1}{2}} + 1} \quad \left( |z| > 0, -\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{3\pi}{2} \right)$$

نشان دهید که

$$\int_0^\infty \frac{(\ln x)^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}} + 1} dx = \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}}, \quad \int_0^\infty \frac{\ln x}{x^{\frac{1}{2}} + 1} dx = 0.$$

راهنمایی: در اینجا به فرمول انتگرال‌گیری که در تمرین ۱ بخش ۷۲ به دست آمد، نیاز دارید.

۵. با استفاده از تابع

$$f(z) = \frac{z^{1/3}}{(z+a)(z+b)} = \frac{e^{(1/3)\log z}}{(z+a)(z+b)} \quad (|z| > 0, 0 < \arg z < 2\pi)$$

و مسیر بسته شکل ۹۹ (بخش ۷۷) به طور صوری نشان دهید که

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt[3]{x}}{(x+a)(x+b)} dx = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}}{a-b} \quad (a > b > 0).$$

۶. با انتگرال‌گیری از یک شاخه مناسب تابع چندمقداری

$$f(z) = \frac{z^{-1/2}}{z^{\frac{1}{2}} + 1} = \frac{e^{(-1/2)\log z}}{z^{\frac{1}{2}} + 1}$$

روی (الف) مسیر دندانه‌دار شکل ۹۷ بخش ۷۵؛ (ب) مسیر بسته شکل ۹۹ بخش ۷۷؛

نشان دهید که

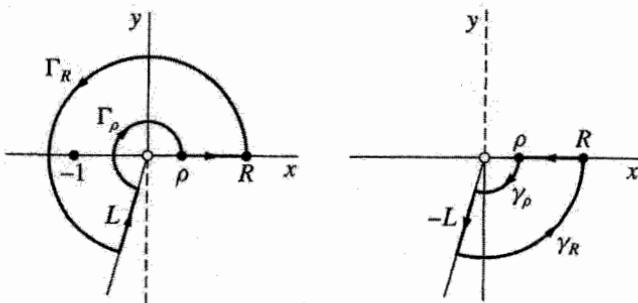
$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(x^{\frac{1}{2}} + 1)} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

۷. تابع بتا عبارت است از تابع دو متغیره حقیقی زیر:

$$B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt \quad (p > 0, q > 0).$$

با قراردادن  $t = 1/(x+1)$  و استفاده از نتیجه حاصل در مثال بخش ۷۷، نشان دهید که

$$B(p, 1-p) = \frac{\pi}{\sin(p\pi)} \quad (0 < p < 1).$$



شکل ۱۰۰

۸. دو مسیر ساده بسته‌ای را، که در شکل ۱۰۰ نشان داده شده و از دو قسمت‌گردن طوق محدود به دواير  $C_\rho$  و  $C_R$  در شکل ۹۹ (بخش ۷۷) به دست آمده است، در نظر بگیرید. ساقهای  $L$  و  $\arg z = \theta$  همچنین  $\Gamma_\rho$  و  $\gamma_R$  مسیرها عبارت‌اند از پاره‌خط‌های جهتداری در امتداد پتو دلخواهی مانند  $L$  که در آن  $\frac{3\pi}{2} < \theta < \pi$ . همچنانی از  $C_\rho$  اند که نشان داده شده است در حالی که  $\Gamma_R$  و  $C_R$  را می‌سازند.

(الف) نشان دهید چگونه از قضیه مانده‌کوشی نتیجه می‌شود که وقتی از شاخه

$$f_1(z) = \frac{z^{-a}}{z+1} \quad \left( |z| > 0, -\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{3\pi}{2} \right)$$

تابع چندمقداری  $(z+1)^{-a}/z$  روی مسیر بسته سمت چپ شکل ۱۰۰ انتگرال بگیریم،

$$\int_{\rho}^R \frac{r^{-a}}{r+1} dr + \int_{\Gamma_R} f_1(z) dz + \int_L f_1(z) dz + \int_{\Gamma_\rho} f_1(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=-1} f_1(z).$$

(ب) با استفاده از قضیه کوشی-گورسا برای انتگرال شاخه

$$f_2(z) = \frac{z^{-a}}{z+1} \quad \left( |z| > 0, \frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{5\pi}{2} \right)$$

از تابع (۱)، روی مسیر بسته سمت راست شکل ۱۰۰ نشان دهید که

$$-\int_{\rho}^R \frac{r^{-a} e^{-i2\pi a}}{r+1} dr + \int_{\gamma_\rho} f_2(z) dz - \int_L f_2(z) dz + \int_{\gamma_R} f_2(z) dz = 0.$$

(ج) بگویید چرا در سه انتگرال آخری قسمتهای (الف) و (ب) می‌توان به جای شاخه‌های  $f_1(z)$  و  $f_2(z)$  از  $(z+1)/(z-a)$ , شاخه زیر را به کار برد

$$f(z) = \frac{z^{-a}}{z+1} \quad (|z| > 0, 0 < \arg z < 2\pi).$$

سپس با جمع کردن طرفهای متناظر این دو رابطه، معادله (۳) بخش ۷۷ را که در آنجا فقط به طور صوری به دست آمده نتیجه بگیرید.

## ۷۸. انتگرالهای معین مشتمل بر سینوس و کسینوس

روش مانده‌ها در محاسبه برخی انتگرالهای معین از نوع

$$\int_0^{2\pi} F(\sin \theta, \cos \theta) d\theta \quad (۱)$$

نیز مفید است. این واقعیت که  $\theta$  از  $0$  تا  $2\pi$  تغییر می‌کند این فکر را به ما می‌دهد که  $\theta$  را یک آوند نقطه  $z$  بر دایره واحد  $C$  به مرکز مبدأ در نظر بگیریم، بنابراین می‌نویسیم

$$z = e^{i\theta} \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi) \quad (۲)$$

پس به طور صوری

$$dz = ie^{i\theta} d\theta = iz d\theta;$$

و با استفاده از روابط

$$\sin \theta = \frac{z - z^{-1}}{2i}, \quad \cos \theta = \frac{z + z^{-1}}{2}, \quad d\theta = \frac{dz}{iz} \quad (۳)$$

انتگرال (۱) تبدیل به

$$\int_C F\left(\frac{z - z^{-1}}{2i}, \frac{z + z^{-1}}{2}\right) \frac{dz}{iz} \quad (۴)$$

می‌شود که انتگرال مسیری تابعی از  $z$  روی دایره  $C$  پیموده شده در جهت مثبت است. البته، بنابر عبارت (۲)، انتگرال (۱) فقط یک صورت پارامتری انتگرال (۴) است. وقتی انتگرال‌دهه انتگرال (۴) تابعی گویا از  $z$  باشد، انتگرال را می‌توان پس از تعیین صفرهای چندجمله‌یی مخرج، مشروط بر اینکه هیچ یک از آنها روی  $C$  نباشد، به وسیله قضیه مانده کوشی محاسبه کرد.

مثال. نشان می‌دهیم که

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + a \sin \theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - a^2}} \quad (-1 < a < 1). \quad (5)$$

وقتی  $a = 0$ , این فرمول انتگرالگیری بهوضوح برقرار است و در اثبات مسئله این حالت را کنار می‌گذاریم. با جایگذاری (۳), این انتگرال بهصورت

$$\int_C \frac{2/a}{z^2 + (2i/a)z - 1} dz \quad (6)$$

در می‌آید که در آن  $C$  دایره  $|z| = 1$  در جهت مثبت است. در اینجا مخرج انتگرالده دارای صفرهای موهومی محض

$$z_1 = \left( \frac{-1 + \sqrt{1 - a^2}}{a} \right) i, \quad z_2 = \left( \frac{-1 - \sqrt{1 - a^2}}{a} \right) i$$

است. بنابراین اگر  $f(z)$  نمایش انتگرالده باشد، آنگاه

$$f(z) = \frac{2/a}{(z - z_1)(z - z_2)}.$$

توجه کنید که چون  $|a| < 1$

$$|z_2| = \frac{1 + \sqrt{1 - a^2}}{|a|} > 1.$$

همچنین، چون  $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$  نتیجه می‌شود که  $|z_1| < 1 < |z_2|$ . بنابراین هیچ نقطه تکینی روی  $C$  نیست و تنها نقطه تکین در داخل آن نقطه  $z_1$  است.  $B_1$  مانده متناظر با نوشتن

$$\phi(z) = \frac{2/a}{z - z_2} \quad \text{که در آن} \quad f(z) = \frac{\phi(z)}{z - z_1}$$

پیدا می‌شود. این رابطه نشان می‌دهد که  $z_1$  یک قطب ساده است و

$$B_1 = \phi(z_1) = \frac{2/a}{z_1 - z_2} = \frac{1}{i\sqrt{1 - a^2}}.$$

در نتیجه

$$\int_C \frac{2/a}{z^2 + (2i/a)z - 1} dz = 2\pi i B_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - a^2}}$$

و فرمول انتگرالگیری (۵) بهدست می‌آید.

روشی که اکنون توضیح دادیم برای موقعی که متغیرهای مستقل سینوس و کسینوس مضارب صحیح  $\theta$  باشند به همین خوبی به کار می‌رود. مثلاً می‌توان با استفاده از رابطه (۲) نوشت

$$\cos 2\theta = \frac{e^{i2\theta} + e^{-i2\theta}}{2} = \frac{(e^{i\theta})^2 + (e^{i\theta})^{-2}}{2} = \frac{z^2 + z^{-2}}{2}.$$

### تمرینها

با استفاده از مانده‌ها، انتگرال‌های معین را در تمرینهای ۱ تا ۷ به دست آورید.

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5 + 4 \sin \theta}. ۱$$

$$\cdot \frac{2\pi}{3} \quad \text{جواب:}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{1 + \sin^2 \theta}. ۲$$

$$\cdot \sqrt{2}\pi \quad \text{جواب:}$$

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos^3 3\theta d\theta}{5 - 4 \cos 2\theta}. ۳$$

$$\cdot \frac{3\pi}{8} \quad \text{جواب:}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + a \cos \theta} \quad (-1 < a < 1). ۴$$

$$\cdot \frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}} \quad \text{جواب:}$$

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos 2\theta d\theta}{1 - 2a \cos \theta + a^2} \quad (-1 < a < 1). ۵$$

$$\cdot \frac{a^{\frac{1}{2}}\pi}{1-a^2} \quad \text{جواب:}$$

$$\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{(a + \cos \theta)^2} \quad (a > 1). ۶$$

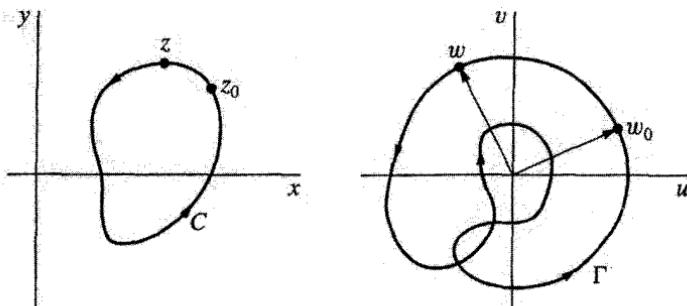
$$\cdot \frac{a\pi}{(\sqrt{a^2-1})^3} \quad \text{جواب:}$$

$$\int_0^{\pi} \sin^{2n} \theta d\theta \quad (n = 1, 2, \dots). ۷$$

$$\cdot \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \pi \quad \text{جواب:}$$

### اصل آوند ۷۹

تابع  $f$  در حوزه  $D$  را برخه‌ریخت می‌نامند، هرگاه در سراسر  $D$  بجز محتملاً در قطبها تحلیلی باشد. حال فرض کنید که  $C$  مسیر ساده بسته‌ای با جهت مثبت و  $f$  در حوزه داخلی  $C$  برخه‌ریخت و



شکل ۱۰۱

روی  $C$  تحلیلی و ناصفر باشد.  $\Gamma$ ، تصویر  $C$  تحت تبدیل  $w = f(z)$ ، مسیر بسته‌ای، نه لزوماً ساده، در صفحه  $w$  است (شکل ۱۰۱). وقتی نقطه  $z$  مسیر  $C$  را در جهت مثبت بپیماید، تصویر آن،  $w$ ، مسیر  $\Gamma$  را در جهت خاصی، که جهت  $\Gamma$  را معنی می‌کند، می‌بپیماید. توجه کنید که چون تابع  $f$ ، صفری روی  $C$  ندارد مسیر  $\Gamma$  از مبدأ صفحه  $w$  نمی‌گذرد.

فرض کنید  $w$  و  $w$  نقاطی روی  $\Gamma$  باشند که  $w$  ثابت و  $w$  مقداری از  $\arg w$  باشد. سپس فرض کنید وقتی که نقطه  $w$ ، با شروع از  $w$ ،  $\Gamma$  را در جهتی که بهوسیله نگاشت  $(w = f(z))$  به آن داده شده است بپیماید،  $w$  با شروع از  $w$ ، به طور پیوسته تغییر کند. وقتی  $w$  به نقطه شروع  $w$  بر می‌گردد،  $w$  مقدار خاصی از  $\arg w$  را که با  $\phi_1$  نمایش می‌دهیم اختیار می‌کند. بدین ترتیب، وقتی  $w$  مسیر  $\Gamma$  را در جهتی که به آن داده شده است یک دور بپیماید تغییر  $w$  عبارت است از  $\phi_1 - \phi_0$ . توجه کنید که این تغییر از نقطه خاص  $w$ ، که برای تعیین آن برگزیده شده، مستقل است. چون  $f(z) = f(z)$  در واقع عدد  $\phi_1 - \phi_0$  تغییر آوند  $f(z)$  است وقتی  $z$  با شروع از  $z$ ، مسیر  $C$  را در جهت مثبت یک دور بپیماید؛ و قرار دهیم

$$\Delta_C \arg f(z) = \phi_1 - \phi_0.$$

مقدار  $\Delta_C \arg f(z)$  بهوضوح مضرب صحیحی از  $2\pi$  است و عدد صحیح

$$\frac{1}{2\pi} \Delta_C \arg f(z)$$

نمایش تعداد دفعاتی است که نقطه  $w$  حول مبدأ در صفحه  $w$  می‌چرخد. به این دلیل، گاهی اوقات این عدد صحیح را عدد پیچش  $\Gamma$  نسبت به مبدأ  $w$  می‌نامند. عدد پیچش مثبت است اگر  $\Gamma$  حول مبدأ در جهت عکس عقربه‌های ساعت بپیچد و منفی است اگر حول آن

نقطه در جهت حرکت عقربه‌های ساعت بپیچد. عدد پیچش همیشه صفر است هرگاه  $\Gamma$  مبدأ را در بر نگیرد. تحقیق درستی این واقعیت را در حالت خاص به عنوان تمرین باقی گذاشته‌ایم.

از روی تعداد صفرها و قطبها  $f$  درون  $C$ , می‌توان عدد پیچش را تعیین کرد. بنابر تمرین ۱۱ بخش ۶۹، تعداد قطبها لزوماً متناهی است. به طور مشابه، با درک این مطلب که  $f(z)$  در بقیه نقاط درون  $C$  متحده با صفر نیست به آسانی دیده می‌شود (تمرین ۴، بخش ۸۰) که تعداد صفرهای  $f$  متناهی است و همه آنها از مرتبهٔ متناهی‌اند. حال فرض کنید که  $f$  در حوزهٔ داخلی  $C$ , دارای  $Z$  صفر و  $m$  قطب باشد. قرارداد می‌کنیم که  $f$  در نقطهٔ  $z_0$ , دارای  $m_0$  صفر است اگر در آن نقطه صفری از مرتبهٔ  $m$  داشته باشد، و اگر  $f$  در  $z_0$  قطبی از مرتبهٔ  $m_p$  داشته باشد، آن قطب  $m_p$  بار شمرده می‌شود. قضیهٔ زیر که به اصل آوند مشهور است، بیان می‌کند که عدد پیچش صرفاً تفاضل  $P - Z$  است.

قضیه. فرض کنید

(الف) مسیر سادهٔ بسته‌ای در جهت مثبت وتابع  $f(z)$  در حوزهٔ داخلی  $C$  برخه‌ریخت باشد؛

(ب) روی  $C$  تحلیلی و ناصرف باشد؛

(ج)  $Z$  تعداد صفرها و  $P$  تعداد قطبها  $f(z)$  در داخل  $C$ , با احتساب چندگانگی آنها باشد. در این صورت

$$\frac{1}{2\pi} \Delta_C \arg f(z) = Z - P. \quad (1)$$

برای اثبات این مطلب، انتگرال  $(f'(z)/f(z))$  روی  $C$  را از دو راه مختلف محاسبه می‌کنیم.

ابتدا فرض می‌کنیم  $(a \leq t \leq b)z = z(t)$  نمایش پارامتری  $C$  باشد، بنابراین

$$\int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \int_a^b \frac{f'[z(t)]z'(t)}{f[z(t)]} dt. \quad (2)$$

چون  $\Gamma$ , تصویر  $C$  تحت تبدیل  $w = f(z)$ , هرگز از مبدأً صفحهٔ  $w$  نمی‌گذرد، تصویر هر نقطهٔ  $C$  را می‌توان به شکل نمایی  $w = \rho(t) \exp[i\phi(t)]$  بیان کرد. بنابراین

$$f[z(t)] = \rho(t) e^{i\phi(t)} \quad (a \leq t \leq b) \quad (3)$$

و در امتداد هر یک از قوسهای هموار تشکیل‌دهندهٔ مسیر  $\Gamma$  داریم (تمرین ۵، بخش ۳۸ را ببینید)

$$f'[z(t)]z'(t) = \frac{d}{dt} f[z(t)] = \frac{d}{dt} [\rho(t) e^{i\phi(t)}] = \dot{\rho}(t) e^{i\phi(t)} + i\rho(t) e^{i\phi(t)} \phi'(t). \quad (4)$$

چون  $\rho'(t)$  و  $\phi'(t)$  روی بازة  $a \leq t \leq b$  تکه‌بی پیوسته‌اند می‌توان با استفاده از عبارات (۳) و

(۴)، انتگرال (۲) را به صورت زیر نوشت:

$$\int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \int_a^b \frac{\rho'(t)}{\rho(t)} dt + i \int_a^b \phi'(t) dt = [\ln \rho(t)]_a^b + [i\phi(t)]_a^b.$$

اما

$$\rho(b) = \rho(a), \quad \phi(b) - \phi(a) = \Delta_C \arg f(z).$$

بنابراین

$$\int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = i \Delta_C \arg f(z). \quad (5)$$

روش دیگر محاسبه انتگرال (۵) این است که از قضیه مانده کوشی استفاده کنیم. به بیان صریح، ملاحظه می‌کنیم که انتگرال  $\int_C f'(z)/f(z) dz$  در درون و روی  $C$ ، بجز در نقاطی از درون  $C$  که در آنها صفرها و قطبها  $f$  واقع‌اند، تحلیلی است. اگر  $f$  در  $z_0$  صفری از مرتبه  $m_0$  داشته باشد آن‌گاه (بخش ۶۸)

$$f(z) = (z - z_0)^{m_0} g(z) \quad (6)$$

که در آن  $g(z)$  در  $z_0$  تحلیلی و ناصرف است. بنابراین

$$f'(z_0) = m_0 (z - z_0)^{m_0 - 1} g(z) + (z - z_0)^{m_0} g'(z)$$

یا

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m_0}{z - z_0} + \frac{g'(z)}{g(z)}. \quad (7)$$

چون  $g'(z)/g(z)$  در  $z_0$  تحلیلی است، دارای نمایش سری تیلر حول آن نقطه است و بنابراین از معادله (۷) نتیجه می‌شود که  $f'(z)/f(z)$  در  $z_0$  قطب ساده‌ای با مانده  $m_0$  دارد. از طرف دیگر اگر  $f$  در  $z_0$  قطبی از مرتبه  $m_p$  داشته باشد، با توجه به قضیه بخش ۶۶ می‌دانیم که

$$f(z) = (z - z_0)^{-m_p} \phi(z) \quad (8)$$

که در آن  $\phi(z)$  در  $z_0$  تحلیلی و ناصرف است. چون عبارت (۸) همان شکل عبارت (۶) را دارد که به جای عدد صحیح و مثبت  $m_p - m_0$  گذاشته شده است، بهوضوح از رابطه (۷)،  $f'(z)/f(z)$  قطب ساده‌ای در  $z_0$  با مانده  $-m_p - m_0$  دارد. در این صورت، با استفاده از قضیه مانده‌ها در می‌یابیم که

$$\int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i(Z - P). \quad (9)$$

حال با مساوی گرفتن طرفهای راست روابط (۵) و (۹)، عبارت (۱) نتیجه می‌شود.

مثال. تنها تکینی تابع  $z^2 / z^2$  قطبی از مرتبه ۲ در مبدأ است و هیچ صفری در صفحه متناهی ندارد. به خصوص، این تابع روی دایره واحد  $z = e^{i\theta}$  ( $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ) تحلیلی و ناصرف است. اگر  $C$  معرف این دایره در جهت مثبت باشد، از قضیه فوق نتیجه می‌شود که

$$\frac{1}{2\pi} \Delta_C \arg \left( \frac{1}{z^2} \right) = -2.$$

یعنی،  $\Gamma$ ، تصویر  $C$  تحت تبدیل  $w = 1/z^2$ ، دو بار در جهت حرکت عقربه‌های ساعت حول مبدأ  $w = 0$  می‌پیچد. با توجه به اینکه  $\Gamma$  دارای نمایش پارامتری  $w = e^{-i2\theta}$  ( $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ) است، می‌توان این موضوع را مستقیماً بررسی کرد.

## ۱۰. قضیه روش<sup>۱</sup>

قضیه اصلی این بخش موسوم به قضیه روش نتیجه‌ای از اصل آوند است که در بخش ۷۹ مطرح شد. این قضیه برای تعیین نواحی از صفحه مختلط که یک تابع تحلیلی مفروض در آن صفری دارد مفید است.

قضیه. فرض کنید که

(الف) توابع  $f(z)$  و  $g(z)$  در درون و روی مسیر ساده بسته  $C$  تحلیلی باشند؛

(ب) در هر نقطه روی  $C$ ،  $|f(z)| > g(z)$ .

در این صورت تعداد صفرهای توابع  $f(z) + g(z)$  در داخل  $C$ ، با احتساب چندگانگی آنها برابرند.

واضح است که جهت  $C$  در صورت قضیه اهمیتی ندارد. بنابراین در اثبات زیر می‌توان فرض کرد که جهت آن مثبت باشد. ابتدا ملاحظه می‌کنیم که تابع  $f(z) + g(z)$  و مجموع  $f(z) + g(z)$  هیچ یک صفری روی  $C$  ندارند، چون اگر  $z$  روی  $C$  باشد آنگاه

$$|f(z) + g(z)| \geq ||f(z)| - |g(z)|| > 0 \quad \text{و} \quad |f(z)| > |g(z)| \geq 0.$$

اگر  $Z_f$  و  $Z_{f+g}$  به ترتیب معرف تعداد صفرهای  $f(z)$  و  $f(z) + g(z)$  در داخل  $C$  با احتساب چندگانگی آنها، باشند، با توجه به قضیه بخش ۷۹ می‌دانیم که

$$Z_{f+g} = \frac{1}{2\pi} \Delta_C \arg [f(z) + g(z)] \quad \text{و} \quad Z_f = \frac{1}{2\pi} \Delta_C \arg f(z)$$

در نتیجه، چون

$$\begin{aligned}\Delta_C \arg [f(z) + g(z)] &= \Delta_C \arg \left\{ f(z) \left[ 1 + \frac{g(z)}{f(z)} \right] \right\} \\ &= \Delta_C \arg f(z) + \Delta_C \arg \left[ 1 + \frac{g(z)}{f(z)} \right],\end{aligned}$$

واضح است که

$$Z_{f+g} = Z_f + \frac{1}{2\pi} \Delta_C \arg F(z) \quad (1)$$

که در آن

$$F(z) = 1 + \frac{g(z)}{f(z)}.$$

اما

$$|F(z) - 1| = \frac{|g(z)|}{|f(z)|} < 1$$

و این بدان معنی است که تحت تبدیل  $w = F(z)$ ، تصویر  $C$  در قرص باز  $|w - 1| < |w - 1|$  قرار دارد. پس این تصویر، مبدأ  $w = 0$  را دور نمی‌زند. بنابراین  $\Delta_C \arg F(z) = 0$  و چون رابطه  $Z_{f+g} = Z_f$  تبدیل می‌شود، قضیه به اثبات می‌رسد.

(۱) به امثال. برای تعیین تعداد ریشه‌های معادله

$$z^4 - 4z^3 + z - 1 = 0 \quad (2)$$

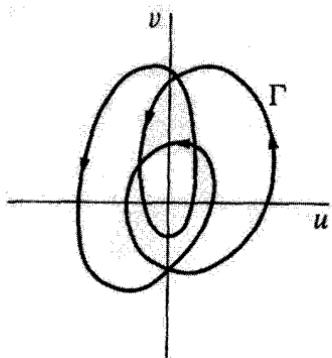
در داخل دایره  $|z| = 1$  می‌نویسیم

$$g(z) = z^4 + z - 1 \quad \text{و} \quad f(z) = -4z^3$$

سپس ملاحظه می‌کنیم که اگر  $|g(z)| \leq |z|^4 + |z| + 1 = 3$  باشد، آنگاه  $|f(z)| = 4|z|^3 = 4$ . در نتیجه چون  $f(z)$  در داخل دایره  $|z| = 1$  با احتساب چندگانگی، سه صفر دارد،  $f(z) + g(z) = 0$  نیز سه صفر دارد. یعنی معادله (۲) در داخل دایره  $|z| = 1$  سه ریشه دارد.

### تمرینها

۱. فرض کنید  $C$  معرف دایره واحد  $|z| = 1$  در جهت مثبت باشد. با استفاده از قضیه بخش ۷۹ مقدار  $\Delta_C \arg f(z)$  را تعیین کنید هرگاه



شکل ۱۰۲

- . $f(z) = (2z - 1)^7/z^3$ ; (ب)  $f(z) = (z^3 + 2)/z$ ; (ج)  $f(z) = z^2 - 4\pi$   
جواب: (الف)  $(b)$ ; (ج)  $(c)$

۲. فرض کنید  $f$  تابعی باشد که درون و روی مسیر ساده و بسته  $C$  تحلیلی است و  $(z)$  هیچگاه روی  $C$  صفر نیست. فرض کنید تصویر  $C$  تحت تبدیل  $w = f(z)$ , مسیر بسته  $\Gamma$  باشد که در شکل ۱۰۲ نشان داده شده است. از روی آن شکل، مقدار  $\Delta_C \arg f(z)$  را تعیین کنید؛ با مک قضیه بخش ۷۹ تعداد صفرهای  $f$  را در داخل  $C$ , با احتساب چندگانگی آنها، بدست آورید.  
جواب:  $3\pi$

۳. با استفاده از نمادگذاری بخش ۷۹، فرض کنید که  $\Gamma$  مبدأ  $w$  را در بر نگیرد و پرتوی از آن نقطه موجود باشد که  $\Gamma$  را قطع نکند. با ملاحظه اینکه وقتی نقطه  $z$  یک دور پیرامون  $C$  می‌چرخد قدر مطلق  $\Delta_C \arg f(z)$  باید کمتر از  $2\pi$  باشد و یادآوری اینکه  $\Delta_C \arg f(z)$  نسبت به مبدأ  $w$  باید صفر باشد.

۴. فرض کنید  $D$  حوزه داخلی مسیر ساده و بسته  $C$  باشد و تابع  $f$  در حوزه  $D$  برخريخت و روی  $C$  تحلیلی و ناصرف باشد.  $D$  را حوزه مشتمل بر همه نقاط  $D$  بجز قطبهای بگیرید. بگویید چگونه از لم بخش ۲۶ و تمرین ۱۰، بخش ۶۹، نتیجه می‌شود که اگر  $f(z)$  در  $D$  متعدد با صفر نباشد آنگاه تمام صفرهای  $f$  در  $D$  از مرتبه متناهی هستند و تعدادشان هم متناهی است. راهنمایی: توجه کنید که اگر نقطه  $z$  در  $D$ , یک صفر تابع  $f$  باشد که از مرتبه متناهی نیست آنگاه باید یک همسایگی  $z$  موجود باشد که  $f(z)$  روی آن متعدد با صفر باشد.

۵.  $C$  را مسیر ساده و بسته‌ای در جهت مثبت بگیرید و فرض کنید تابع  $f$  در درون و روی  $C$  تحلیلی باشد و روی  $C$  هیچ صفری نداشته باشد. نشان دهید که اگر  $f$  درون  $C$  دارای  $n$  صفر (باشد که هر  $z_k$  با چندگانگی  $m_k$  است آنگاه  $(k = 1, 2, \dots, n)z_k$

$$\int_C \frac{zf'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n m_k z_k.$$

[با رابطه (۹)، بخش ۷۹، مقایسه کنید وقتی در آنجا  $P = [z]$ .]  
۶. تعداد صفرهای هر یک از چندجمله‌یهای زیر را، با احتساب چندگانگی آنها، درون دایره  $|z| = 1$  تعیین کنید

$$(الف) z^6 - 5z^4 + z^3 - 2z; \quad (ب) z^9 - 2z^3 + 2z^2 - 2z + 1; \quad (ج) 2z^4 - 2z^3 + 2z^2 + z - 1$$

جواب: (الف) ۴؛ (ب) ۰.

۷. تعداد صفرهای هر یک از چندجمله‌یهای زیر را، با احتساب چندگانگی آنها، درون دایره  $|z| = 2$  تعیین کنید

$$(الف) z^5 + 3z^3 + z^2 + 1; \quad (ب) z^4 + 3z^3 + 6z^2 + z - 1; \quad (ج) z^4 - 2z^3 + 9z^2 + z - 1$$

جواب: (الف) ۳؛ (ب) ۲؛ (ج) ۵.

۸. تعداد ریشه‌های معادله

$$2z^5 - 6z^2 + z + 1 = 0$$

را، با احتساب چندگانگی آنها، در طوق  $2 < |z| \leq 1$ ، تعیین کنید.

جواب: ۳.

۹. نشان دهید اگر  $c$  عدد مختلطی باشد که  $e^c > e^{|c|}$  آنگاه معادله  $cz^n = e^z$ ،  $n \in \mathbb{N}$ ، با احتساب چندگانگی، در داخل دایره  $|z| = 1$  دارد.

۱۰. با قراردادن  $g(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_{n-1} z^{n-1}$  و  $f(z) = z^n$  واستفاده از قضیه روش ثابت کنید هر چندجمله‌ی

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n \quad (a_n \neq 0)$$

که  $n \geq 1$ , با احتساب چندگانگیها, دقیقاً  $n$  صفر دارد. بدین ترتیب برای قضیه اساسی جبر, اثبات دیگری ارائه دهید. (قضیه ۲, بخش ۴۹).

راهنمایی: توجه کنید که می‌توان  $a_n$  را یک گرفت. سپس نشان دهید که اگر  $R$  به اندازه کافی بزرگ و به خصوص بزرگتر از

$$1 + |a_0| + |a_1| + \cdots + |a_{n-1}|$$

باشد, روی دایره  $R = |z|$  داریم  $|g(z)| < |f(z)|$ .

۱۱. نابرابری (۵) بخش ۴۹ متناسبن این است که صفرهای چندجمله‌ی

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n \quad (a_n \neq 0)$$

از درجه  $n \geq 1$ , همه در درون دایره‌یی حول مبدأ مانند  $R = |z|$  واقع‌اند. همچنین از تمرین ۴ بالا نتیجه می‌شود که همه این صفرها از مرتبه متناهی هستند و تعدادی متناهی از آنها, مثلاً  $N$  تا وجود دارد. با استفاده از عبارت (۹), بخش ۷۹, و قضیه بخش ۶۴, نشان دهید که

$$N = \operatorname{Res}_{z=0} \frac{P'(1/z)}{z^2 P(1/z)}$$

که چندگانگی صفرها باید شمرده شوند. سپس با محاسبه این مانده نشان دهید که  $N = n$ . (با تمرین ۱۰ مقایسه کنید).

۱۲. فرض کنید توابع  $f$  و  $g$  چنان باشند که در صورت قضیه روش در بخش ۸۰ آمده است و مسیر  $C$  را در جهت مثبت بگیرید. سپس تابع

$$\Phi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z) + tg'(z)}{f(z) + tg(z)} dz \quad (0 \leq t \leq 1)$$

را تعریف کرده و طی مراحل زیر, اثبات دیگری برای قضیه روش ارائه دهید.  
(الف) بگویید که چرا مخرج انتگرال‌ده در انتگرال‌الی که  $\Phi(t)$  را تعریف می‌کند هرگز روی  $C$  صفر نمی‌شود. این امر وجود انتگرال را تضمین می‌کند.

(ب)  $t_0$  را دو نقطه دلخواه در بازه  $0 \leq t \leq 1$  گرفته نشان دهید که

$$|\Phi(t) - \Phi(t_0)| = \frac{|t - t_0|}{2\pi} \left| \int_C \frac{fg' - f'g}{(f + tg)(f + t_0 g)} dz \right|.$$

سپس، بعد از آنکه گفتید چرا در نقاط روی  $C$  داریم

$$\left| \frac{fg' - f'g}{(f + tg)(f + t_0 g)} \right| \leq \frac{|fg' - f'g|}{(|f| - |g|)^2}$$

نشان دهید که ثابت مثبتی مانند  $A$  مستقل از  $t$  و  $t_0$  هست به طوری که

$$|\Phi(t) - \Phi(t_0)| \leq A|t - t_0|.$$

از این نابرابری نتیجه بگیرید که  $\Phi(t)$  روی بازه  $1 \leq t \leq 0$  پیوسته است.

(ج) با استناد به رابطه (۹) بخش ۷۹، بیان کنید که چرا برای هر مقدار  $t$  در بازه  $1 \leq t \leq 0$  مقدار تابع  $\Phi$  یک عدد صحیح است که تعداد صفرهای  $f(z) + tg(z)$  را در درون  $C$  نمایش می‌دهد. سپس از این واقعیت که  $\Phi$  پیوسته است، همان‌طور که در قسمت (ب) نشان داده شد، نتیجه بگیرید که تعداد صفرهای  $f(z) + g(z)$  با احتساب چندگانگی، در داخل  $C$  برابرند.

## ۸۱. تبدیلهای وارون لاپلاس

فرض می‌کنیم تابع  $F$  از متغیر مختلط  $s$  در سراسر صفحه متناهی  $s$  بجز در تعدادی متناهی تکینی تنها، تحلیلی باشد. در این صورت فرض می‌کنیم  $L_R$  نمایش پاره خطی قائم واصل از  $s = \gamma + iR$  به  $s = \gamma - iR$  باشد، که در آن عدد ثابت  $\gamma$  مثبت و به قدر کافی بزرگ است تا همه تکینیهای  $F$  در سمت چپ پاره خط باشند (شکل ۱۰۳). تابع جدید  $f$  از متغیر حقیقی  $t$  برای مقادیر مثبت  $t$  با رابطه زیر تعریف می‌شود

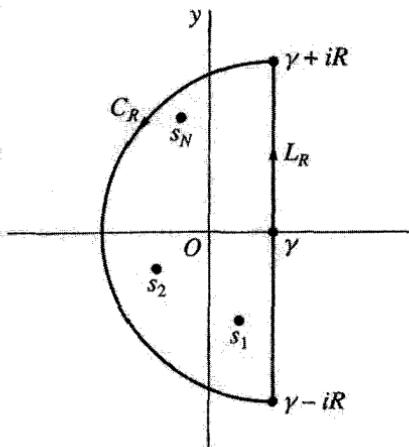
$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{L_R} e^{st} F(s) ds \quad (t > 0) \quad (1)$$

به شرطی که این حد موجود باشد. عبارت (۱) را معمولاً به صورت زیر می‌نویسند

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} P.V. \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st} F(s) ds \quad (t > 0) \quad (2)$$

[با رابطه (۳) بخش ۷۱ مقایسه کنید]، و چنین انتگرالی را انتگرال برامویج<sup>۱</sup> می‌نامند. می‌توان نشان داد که، اگر شرایط نسبتاً کلی روی توابع مطرح شده قرار دهیم،  $f(t)$  تبدیل وارون لاپلاس  $F(s)$  است. یعنی اگر  $F(s)$  تبدیل لاپلاس  $f(t)$  باشد که با رابطه زیر تعریف شده است

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \quad (3)$$



شکل ۱۰.۳

آنگاه  $f(t)$  دوباره با رابطه (۲) بدست می‌آید، که در آن انتخاب عدد مثبت  $\gamma$  مادامی که همه تکینیهای  $F$  در سمت چپ  $L_R$  باشند اهمیت ندارد.\* تبدیلهای لاپلاس و وارون آنها در حل معادلات دیفرانسیل معمولی و جزئی مهم‌اند.

وقتی که تابع  $F(s)$  مشخص شده باشد اغلب می‌توان از مانده‌ها برای محاسبه حد عبارت (۱) استفاده کرد. برای اینکه بینیم این کار چگونه انجام می‌شود، فرض می‌کنیم  $s_n$  ( $n = 1, 2, \dots, N$ ) معروف تکینیهای  $F(s)$  باشند. سپس  $R$  را بزرگترین قدر مطلق آنها و  $C_R$  را یک نیمداire با نمایش پارامتری

$$s = \gamma + Re^{i\theta} \quad \left( \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2} \right) \quad (4)$$

می‌گیریم که در آن  $\gamma > R_0 + R$ . توجه کنید که برای هر  $s_n$  داریم

$$|s_n - \gamma| \leq |s_n| + \gamma \leq R_0 + \gamma < R.$$

بنابراین همه تکینیها در داخل ناحیه نیمداire‌یی محدود به  $C_R$  و  $L_R$  واقع‌اند (شکل ۱۰.۳) و بنابر

\* برای یک بررسی جامع چنین جزئیاتی در مورد تبدیل لاپلاس، کتاب

R. V. Churchill, "Operational Mathematics" 3d ed., 1972.

را ببینید که در آن تبدیل  $F(s)$  با تعدادی نامتناهی نقطه تکین تنها یا با بریدگی شاخه‌یی نیز بررسی شده است.

قضیه ماندها داریم

$$\int_{L_R} e^{st} F(s) ds = 2\pi i \sum_{n=1}^N \text{Res}_{s=s_n} [e^{st} F(s)] - \int_{C_R} e^{st} F(s) ds. \quad (5)$$

حال فرض می‌کنیم، عدد ثابت مثبتی مانند  $M_R$  موجود باشد به طوری که به ازای هر  $s$  روی داشته باشیم  $|F(s)| \leq M_R$ ، که در آن  $M_R$  به صفر میل می‌کند وقتی  $R$  به بی‌نهایت میل کند. با استفاده از نمایش پارامتری (۴) برای  $C_R$  می‌توان نوشت

$$\int_{C_R} e^{st} F(s) ds = \int_{\pi/2}^{\pi/2} \exp(\gamma t + Rte^{i\theta}) F(\gamma + Re^{i\theta}) Rie^{i\theta} d\theta.$$

پس، چون

$$|F(\gamma + Re^{i\theta})| \leq M_R \quad \text{و} \quad |\exp(\gamma t + Rte^{i\theta})| = e^{\gamma t} e^{Rt \cos \theta}$$

در می‌یابیم که

$$\left| \int_{C_R} e^{st} F(s) ds \right| \leq e^{\gamma t} M_R R \int_{\pi/2}^{\pi/2} e^{Rt \cos \theta} d\theta. \quad (6)$$

اما اگر قرار دهیم  $\phi = \theta - (\pi/2)$  با توجه به نابرابری ثوردان (۲)، بخش ۷۴، نتیجه می‌شود که

$$\int_{\pi/2}^{\pi/2} e^{Rt \cos \theta} d\theta = \int_0^\pi e^{-Rt \sin \phi} d\phi < \frac{\pi}{Rt}.$$

بنابراین نابرابری (۶) تبدیل می‌شود به

$$\left| \int_{C_R} e^{st} F(s) ds \right| \leq e^{\gamma t} \frac{M_R \pi}{t}, \quad (7)$$

و این نشان می‌دهد که

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} e^{st} F(s) ds = 0. \quad (8)$$

سپس با میل دادن  $R$  به  $\infty$  در رابطه (۵) می‌بینیم که تابع  $f(t)$  که با ضابطه (۱) تعریف شد، موجود است و می‌توان آن را به صورت زیر نوشت

$$f(t) = \sum_{n=1}^N \text{Res}_{s=s_n} [e^{st} F(s)] \quad (t > 0). \quad (9)$$

در بسیاری از کاربردهای تبدیلهای لاپلاس، مانند حل معادلات دیفرانسیل جزئی که در مطالعه هدایت گرما و ارتعاشهای مکانیکی مطرح می‌شوند تابع  $(s)$   $F(s)$  برای همه مقادیر  $s$  در صفحه متناهی بجز یک مجموعه نامتناهی از نقاط تکین تنها مانند  $s_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) که در سمت چپ خطی قائم مانند  $\text{Re } s = \gamma$  قرار دارند، تحلیلی است. اغلب می‌توان این روشی را که برای یافتن  $f(t)$  توصیف کردیم، طوری اصلاح کرد که به جای مجموع متناهی (۹) سری

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \text{Res}_{s=s_n} [e^{st} F(s)] \quad (t > 0) \quad (10)$$

که یک سری نامتناهی از مانده‌هایست، قرار گیرد. تعدیل اساسی این است که به جای پاره‌خطهای قائم  $L_R$  پاره‌خطهای قائم  $L_N$  ( $N = 1, 2, \dots$ )، واصل از  $s = \gamma - ib_N$  به  $s = \gamma + ib_N$  را قرار دهیم. در این صورت به جای قوسهای دایره‌بی  $C_R$  مسیرهای  $C_N$  ( $N = 1, 2, \dots$ )، از ساده‌بسته باشد که نقاط تکین  $s_1, s_2, \dots, s_N$  را در بر گیرد. وقتی که نشان دهیم

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{C_N} e^{st} F(s) ds = 0, \quad (11)$$

عبارت (۲) برای  $f(t)$  به عبارت (۱۰) تبدیل می‌شود.

انتخاب مسیرهای  $C_N$  بستگی به ماهیت تابع  $F(s)$  دارد. انتخابهای متداول شامل قوسهای دایره‌بی یا سه‌می‌شکل و مسیرهای مستطیلی است. همچنین نیازی نیست که مسیر ساده و بسته  $L_N + C_N$ ، دقیقاً  $N$  تکینی را در بر گیرد. مثلاً وقتی ناحیه بین  $L_{N+1} + C_{N+1}$  و  $L_N + C_N$  شامل دو نقطه تکین  $F(s)$  باشد، دو مانده  $e^{st} F(s)$  نظیر آنها صرفاً به صورت یک جمله در سری (۱۰) دسته‌بندی می‌شود. چون اثبات حد (۱۱) در هر حالت معمولاً خسته‌کننده است، در مثالها و تمرینهای زیر که شامل تعدادی نامتناهی نقطه تکین‌اند، این حد را می‌پذیریم.\* بنابراین استفاده از عبارت (۱۰) فقط جنبهٔ صوری خواهد داشت.

## ۸۲. چند مثال

اغلب با تکنیکهایی که در تمرینهای ۱۲ و ۱۳ این بخش مطرح کردہ‌ایم، محاسبه مجموع مانده‌های  $e^{st} F(s)$  در عبارات (۹) و (۱۰)، بخش ۸۱، به‌آسانی انجام می‌شود. در اینجا قبل از مثال‌ها، یک بررسی جامع روشهای بدست آوردن حد (۱۱) در کتاب R. V. Churchill (R. V. Churchill) آمده است که در پانوشت قبل به آن ارجاع دادیم. در واقع تبدیل وارونی که در مثال ۳ بخش آتی پیدا می‌شود، در صفحات ۲۲۶-۲۲۰ آن کتاب به‌طور کامل بررسی شده است.

حکمی برای این تکنیکها ارائه می‌دهیم.

فرض کنید  $F(s)$  در نقطه  $s_0$  قطبی از مرتبه  $m$  داشته باشد و نمایش سری لوران آن در قرص محدود  $|s - s_0| < R_2$  دارای قسمت اصلی

$$\frac{b_1}{s - s_0} + \frac{b_2}{(s - s_0)^2} + \cdots + \frac{b_m}{(s - s_0)^m} \quad (b_m \neq 0)$$

باشد. در این صورت

$$\operatorname{Res}_{s=s_0} [e^{st} F(s)] = e^{s_0 t} \left[ b_1 + \frac{b_2}{1!} t + \cdots + \frac{b_m}{(m-1)!} t^{m-1} \right]. \quad (1)$$

اگر قطب  $s_0$  به صورت  $s_0 = \alpha + i\beta$  باشد و در نقاط تحلیلی بودن  $F(s)$  داشته باشیم ( $\overline{F(s)} = F(\bar{s})$  (بخش ۲۷ را ببینید)، آنگاه مزدوج آن یعنی  $\bar{s}_0 = \alpha - i\beta$  نیز یک قطب مرتبه  $m$  است. به علاوه برای عددی حقیقی مانند  $t$  داریم

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{s=s_0} [e^{st} F(s)] + \operatorname{Res}_{s=\bar{s}_0} [e^{st} F(s)] \\ = 2e^{\alpha t} \operatorname{Re} \left\{ e^{i\beta t} \left[ b_1 + \frac{b_2}{1!} t + \cdots + \frac{b_m}{(m-1)!} t^{m-1} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2)$$

توجه کنید که اگر  $s_0$  یک قطب ساده باشد ( $m = 1$ )، روابط (۱) و (۲)، به ترتیب، به

$$\operatorname{Res}_{s=s_0} [e^{st} F(s)] = e^{s_0 t} \operatorname{Res}_{s=s_0} F(s) \quad (3)$$

و

$$\operatorname{Res}_{s=s_0} [e^{st} F(s)] + \operatorname{Res}_{s=\bar{s}_0} [e^{st} F(s)] = 2e^{\alpha t} \operatorname{Re} \left[ e^{i\beta t} \operatorname{Res}_{s=s_0} F(s) \right] \quad (4)$$

تبديل می‌شوند.

**مثال ۱.** حال تابع  $f(t)$  را پیدا می‌کنیم که متناظر با تابع زیر باشد

$$F(s) = \frac{s}{(s^2 + a^2)^2} \quad (a > 0). \quad (5)$$

تکنیکهای  $F(s)$  عبارت‌اند از نقاط مزدوج

$$s_0 = ai \quad \text{و} \quad \bar{s}_0 = -ai$$

$$\phi(s) = \frac{s}{(s + ai)^2} \quad \text{که در آن} \quad F(s) = \frac{\phi(s)}{(s - ai)^2}$$

می‌بینیم که  $\phi(s) = ai$  در  $s = ai$  تحلیلی و ناصرف است. بنابراین  $\phi$  یک قطب مرتبه ۲ از تابع  $F(s)$  است. بعلاوه در نقاطی که  $F(s)$  تحلیلی است داریم  $\overline{F(s)} = F(\bar{s})$ . در نتیجه،  $\overline{s}$  نیز یک قطب مرتبه ۲ از تابع  $F(s)$  است؛ و با توجه به رابطه (۲) می‌دانیم که

$$\operatorname{Res}_{s=s_0} [e^{st} F(s)] + \operatorname{Res}_{s=\bar{s}} [e^{st} F(s)] = 2\operatorname{Re} [e^{iat} (b_1 + b_2 t)], \quad (6)$$

که در آن  $b_1$  و  $b_2$  ضرایب قسمت اصلی

$$\frac{b_1}{s - ai} + \frac{b_2}{(s - ai)^2}$$

از تابع  $ai$  در  $F(s)$  هستند. این ضرایب را می‌توان با کمک دو جمله اول سری تیلر  $\phi(s)$  حول  $s = ai$  به آسانی بدست آورد:

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{1}{(s - ai)^2} \phi(s) = \frac{1}{(s - ai)^2} \left[ \phi(ai) + \frac{\phi'(ai)}{1!} (s - ai) + \dots \right] \\ &= \frac{\phi(ai)}{(s - ai)^2} + \frac{\phi'(ai)}{s - ai} + \dots \quad (\circ < |s - ai| < 2a). \end{aligned}$$

به سادگی می‌توان نشان داد که  $\phi(ai) = -i/(4a)$  و  $\phi'(ai) = 0$  و در می‌باییم که  $b_1 = -i/(4a)$ . بنابراین، عبارت (۶) چنین می‌شود و

$$\operatorname{Res}_{s=s_0} [e^{st} F(s)] + \operatorname{Res}_{s=\bar{s}} [e^{st} F(s)] = 2\operatorname{Re} \left[ e^{iat} \left( -\frac{i}{4a} t \right) \right] = \frac{1}{2a} t \sin at.$$

پس می‌توان نتیجه گرفت که

$$f(t) = \frac{1}{2a} t \sin at \quad (t > 0) \quad (7)$$

به شرط آنکه  $F(s)$  در شرط کرانداری که در بخش ۸۱ با خط ایرانیک بیان شد، صدق کند. برای بررسی شرط کرانداری،  $s$  را نقطه دلخواهی روی نیمداایره

$$s = \gamma + Re^{i\theta} \quad \left( \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2} \right),$$

می‌گیریم که در آن  $\gamma > a + \gamma$  و  $R > a$ ; و توجه می‌کنیم که

$$|s| = |\gamma + Re^{i\theta}| \geq |\gamma - R| = R - \gamma > a \quad \text{و} \quad |s| = |\gamma + Re^{i\theta}| \leq \gamma + R$$

چون

$$|s^2 + a^2| \geq ||s|^2 - a^2| \geq (R - \gamma)^2 - a^2 > 0,$$

نتیجه می‌شود که

$$M_R = \frac{\gamma + R}{[(R - \gamma)^2 - a^2]^2} \quad \text{که در آن} \quad |F(s)| = \frac{|s|}{|s^2 + a^2|^2} \leq M_R$$

چون اگر  $R \rightarrow \infty$  آنگاه  $M_R \rightarrow 0$ , شرط کرانداری مورد نظر ثابت می‌شود.

مثال ۲. برای یافتن  $f(t)$  وقتی

$$F(s) = \frac{\tanh s}{s^2} = \frac{\sinh s}{s^2 \cosh s},$$

توجه می‌کنیم که  $F(s)$  تکینیهای تنها در  $s = 0$  و در صفرهای  $\cosh s$  (بخش ۳۴)، یعنی

$$s = \left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)i \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

دارد. این تکینیها را به شکل زیر فهرست می‌کنیم

$$s_0 = 0, \quad s_n = \frac{(2n-1)\pi}{2}i \quad ; \quad \bar{s}_n = -\frac{(2n-1)\pi}{2}i \quad (n = 1, 2, \dots)$$

در این صورت، به طور صوری

$$f(t) = \operatorname{Res}_{s=s_0} [e^{st} F(s)] + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \operatorname{Res}_{s=s_n} [e^{st} F(s)] + \operatorname{Res}_{s=\bar{s}_n} [e^{st} F(s)] \right\}. \quad (\text{۸})$$

با تقسیم سریهای مکلورن، تماش سری لوران

$$F(s) = \frac{1}{s^2} \cdot \frac{\sinh s}{\cosh s} = \frac{1}{s} - \frac{1}{3}s + \dots \quad (0 < |s| < \frac{\pi}{2})$$

به دست می‌آید که نتیجه می‌دهد  $s = 0$  یک قطب ساده  $F(s)$  با مانده واحد است. لذا، بنابر عبارت (۳) داریم

$$\operatorname{Res}_{s=s_0} [e^{st} F(s)] = \operatorname{Res}_{s=s_0} F(s) = 1. \quad (\text{۹})$$

با استفاده از روشی که در قضیه ۲ بخش ۶۹ برای تشخیص قطب‌های ساده و تعیین مانده‌ها در چنین نقاطی مطرح شد، به آسانی می‌توان مانده‌های  $F(s)$  را در نقاط  $s_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) به دست آورد. به عبارت دقیق‌تر، می‌نویسیم

$$q(s) = s^{\frac{1}{2}} \cosh s \quad \text{و} \quad p(s) = \sinh s \quad \text{که در آن} \quad F(s) = \frac{p(s)}{q(s)}$$

و ملاحظه می‌کنیم که

$$\sinh s_n = \sinh \left[ i \left( n\pi - \frac{\pi}{2} \right) \right] = i \sin \left( n\pi - \frac{\pi}{2} \right) = -i \cos n\pi = (-1)^{n+1} i \neq 0.$$

پس، چون

$$q'(s_n) = s_n^{\frac{1}{2}} \sinh s_n \neq 0 \quad \text{و} \quad q(s_n) = 0 \quad , \quad p(s_n) = \sinh s_n \neq 0,$$

در می‌یابیم که [با مثال ۳ بخش ۶۹ مقایسه کنید]

$$\operatorname{Res}_{s=s_n} F(s) = \frac{p(s_n)}{q'(s_n)} = \frac{1}{s_n^{\frac{1}{2}}} = -\frac{4}{\pi^2} \cdot \frac{1}{(2n-1)^2} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

اتحادهای

$$\overline{\sinh s} = \sinh \bar{s} \quad \text{و} \quad \overline{\cosh s} = \cosh \bar{s}$$

(تمرین ۱۱ بخش ۳۴ را بینید) تضمین می‌کنند در نقاطی که تابع  $F(s)$  تحلیلی است داریم  $\overline{F(s)} = F(\bar{s})$ . بنابراین  $\bar{s}_n$  نیز یک قطب ساده  $F(s)$  است و می‌توان با استفاده از عبارت (۴) نوشت

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{s=\bar{s}_n} [e^{st} F(s)] + \operatorname{Res}_{s=\bar{s}_n} [e^{st} \overline{F(s)}] &= 2 \operatorname{Re} \left\{ -\frac{4}{\pi^2} \cdot \frac{1}{(2n-1)^2} \exp \left[ i \frac{(2n-1)\pi t}{2} \right] \right\} \\ &= \frac{-8}{\pi^2} \cdot \frac{1}{(2n-1)^2} \cos \frac{(2n-1)\pi t}{2} \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (10) \end{aligned}$$

سرانجام با جایگذاری عبارات (۹) و (۱۰) در معادله (۸) به نتیجه مورد نظر می‌رسیم:

$$f(t) = 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos \frac{(2n-1)\pi t}{2} \quad (t > 0). \quad (11)$$

### مثال ۳. حال تابع

$$F(s) = \frac{\sinh(xs^{1/2})}{s \sinh(s^{1/2})} \quad (\circ < x < 1), \quad (12)$$

را در نظر می‌گیریم که  $s^{1/2}$  معرف شاخه دلخواهی از این تابع دو مقداری است. با وجود این، قرارداد می‌کنیم که از یک شاخه در صورت و مخرج کسر استفاده کنیم، بنابراین اگر  $s$  یک نقطه تکین  $F(s)$  نباشد، آنگاه

$$F(s) = \frac{xs^{1/2} + (xs^{1/2})^3/3! + \dots}{s[s^{1/2} + (s^{1/2})^3/3! + \dots]} = \frac{x + x^3 s/6 + \dots}{s + s^3/6 + \dots}. \quad (13)$$

بهوضوح یکی از این نقاط تکین  $s = \circ$  است. با این قرارداد اضافی، که بریدگی شاخه‌یی  $s^{1/2}$  در امتداد محور حقیقی منفی قرار نگیرد تا  $\sinh(s^{1/2})$  در امتداد آن محور خوشنویسی باشد، سایر نقاط تکین زمانی رخ می‌دهند که  $s^{1/2} = \pm n\pi i$  ( $n = 1, 2, \dots$ ). بنابراین نقاط

$$s_{\circ} = \circ, \quad s_n = -n^2 \pi^2 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

مجموعه نقاط تکین  $F(s)$  را تشکیل می‌دهند. حال مسئله، محاسبه مانده‌ها در نمایش سری صوری زیر است

$$f(t) = \operatorname{Res}_{s=s_{\circ}} [e^{st} F(s)] + \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Res}_{s=s_n} [e^{st} F(s)]. \quad (14)$$

با تقسیم سریهای توانی در منتهی‌الیه راست عبارت (۱۴) معلوم می‌شود که  $s = \circ$  یک قطب ساده  $F(s)$  با مانده  $x$  است. بنابراین از عبارت (۳) نتیجه می‌شود که

$$\operatorname{Res}_{s=s_{\circ}} [e^{st} F(s)] = x. \quad (15)$$

همین‌طور برای مانده‌های  $F(s)$  در نقاط تکین  $s_n = -n^2 \pi^2$  ( $n = 1, 2, \dots$ )، می‌نویسیم

$$q(s) = s \sinh(s^{1/2}) \quad \text{و} \quad p(s) = \sinh(xs^{1/2}) \quad \text{که در آن} \quad F(s) = \frac{p(s)}{q(s)}$$

همان‌طور که در مثال ۲ انجام دادیم، برای استفاده از قضیه ۲ بخش ۶۹ مشاهده می‌کنیم که

$$q'(s_n) = \frac{1}{2} s_n^{1/2} \cosh(s_n^{1/2}) \neq 0 \quad \text{و} \quad q(s_n) = 0, \quad p(s_n) = \sinh(xs_n^{1/2}) \neq 0.$$

و در نتیجه هر  $s_n$  قطب ساده‌ای از  $F(s)$  است با مانده

$$\operatorname{Res}_{s=s_n} F(s) = \frac{p(s_n)}{q'(s_n)} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{(-1)^n}{n} \sin n\pi x.$$

لذا، بنابر عبارت (۳) داریم

$$\operatorname{Res}_{s=s_n} [e^{st} F(s)] = e^{s_n t} \operatorname{Res}_{s=s_n} F(s) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{(-1)^n}{n} e^{-n\pi t} \sin n\pi x. \quad (16)$$

با جایگذاری عبارات (۱۵) و (۱۶) در معادله (۱۴) به تابع زیر می‌رسیم

$$f(t) = x + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} e^{-n\pi t} \sin n\pi x \quad (t > 0). \quad (17)$$

### تمرینها

در تمرینهای ۱ تا ۵، با استفاده از روشی که در بخش ۸۱ بیان شد و در مثال ۱ بخش ۸۲ آن را توضیح دادیم، تابع  $f(t)$  نظری تابع مفروض  $F(s)$  را بباید.

$$F(s) = \frac{2s^3}{s^4 - 4}. \quad ۱$$

$. f(t) = \cosh \sqrt{2}t + \cos \sqrt{2}t \quad \text{جواب:}$

$$F(s) = \frac{2s - 2}{(s+1)(s^2 + 2s + 5)}. \quad ۲$$

$. f(t) = e^{-t}(\sin 2t + \cos 2t - 1) \quad \text{جواب:}$

$$F(s) = \frac{12}{s^2 + 4}. \quad ۳$$

$. f(t) = e^{-2t} + e^t(\sqrt{3} \sin \sqrt{3}t - \cos \sqrt{3}t) \quad \text{جواب:}$

$$F(s) = \frac{s^2 - a^2}{(s^2 + a^2)^2} \quad (a > 0). \quad ۴$$

$. f(t) = t \cos at \quad \text{جواب:}$

$$F(s) = \frac{a^2 s^2}{(s^2 + a^2)^3} \quad (a > 0). \quad ۵$$

راهنمایی: برای قسمت اصلی  $F(s)$  در  $ai$  به تمرین ۴ بخش ۶۵ مراجعه کنید.

$. f(t) = (1 + a^2 t^2) \sin at - at \cos at \quad \text{جواب:}$

در تمرینهای ۶ تا ۱۱، با استفاده از روش صوری شامل یک سری نامتناهی از مانده‌ها که در

مثالهای ۲ و ۳، بخش ۸۲، توضیح داده شد، تابع  $f(t)$  نظیر تابع مفروض  $F(s)$  را بیابید.

$$F(s) = \frac{\sinh(xs)}{s^2 \cosh s} \quad (\circ < x < 1) . \text{۶}$$

$$f(t) = x + \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)^2} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2} \cos \frac{(2n-1)\pi t}{2} \quad \text{جواب:}$$

$$F(s) = \frac{1}{s \cosh(s^{1/2})} . \text{۷}$$

$$f(t) = 1 + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} \exp \left[ -\frac{(2n-1)^2 \pi^2 t}{4} \right] \quad \text{جواب:}$$

$$F(s) = \frac{\coth(\pi s/2)}{s^2 + 1} . \text{۸}$$

$$f(t) = \frac{2}{\pi} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nt}{4n^2 - 1} \quad \text{جواب:}$$

$$F(s) = \frac{\sinh(xs^{1/2})}{s^2 \sinh(s^{1/2})} \quad (\circ < x < 1) . \text{۹}$$

$$f(t) = \frac{1}{\pi} x(x^2 - 1) + xt + \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} e^{-n^2 \pi^2 t} \sin n\pi x \quad \text{جواب:}$$

$$F(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s \sinh s} . \text{۱۰}$$

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin n\pi t \quad \text{جواب:}$$

$$F(s) = \frac{\sinh(xs)}{s(s^2 + \omega^2) \cosh s} \quad (\circ < x < 1) . \text{۱۱}$$

$$(n = 1, 2, \dots) \omega \neq \omega_n = \frac{(2n-1)\pi}{2} \quad \text{که در آن } \circ < \omega < \circ$$

$$f(t) = \frac{\sin \omega x \sin \omega t}{\omega^2 \cos \omega} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\omega_n} \cdot \frac{\sin \omega_n x \sin \omega_n t}{\omega^2 - \omega_n^2} \quad \text{جواب:}$$

۱۲. فرض کنید تابع  $F(s)$  در  $s = s_0$  دارای قطبی از مرتبه  $m$  باشد و دارای بسط سری لوران

$$F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (s - s_0)^n + \frac{b_1}{s - s_0} + \frac{b_2}{(s - s_0)^2} + \cdots + \frac{b_{m-1}}{(s - s_0)^{m-1}} + \frac{b_m}{(s - s_0)^m} \quad (b_m \neq 0)$$

\* این عملأً تابع سینوس اصلاح شده  $f(t) = |\sin t|$  است. صفحه ۶۸ کتاب زیر را از مؤلفان بینید  
"Fourier Series and Boundary Value Problems." 6th ed., 2001.

در قرص محدود  $|s - s_0| < R_2$  و توجه کنید که  $(s - s_0)^m F(s)$  در این حوزه با سری توانی

$$b_m + b_{m-1}(s - s_0) + \cdots + b_2(s - s_0)^{m-2} + b_1(s - s_0)^{m-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (s - s_0)^{m+n}$$

نمایش داده می‌شود. با تعیین ضریب  $(s - s_0)^{m-1}$  در حاصلضرب (بخش ۶۱) این سری توانی در سری تیلر تابع تام  $e^{st} = e^{s_0 t} e^{(s-s_0)t}$  یعنی

$$e^{st} = e^{s_0 t} \left[ 1 + \frac{t}{1!} (s - s_0) + \cdots + \frac{t^{m-2}}{(m-2)!} (s - s_0)^{m-2} + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} (s - s_0)^{m-1} + \cdots \right]$$

نشان دهید که

$$\text{Res}_{s=s_0} [e^{st} F(s)] = e^{s_0 t} \left[ b_1 + \frac{b_2}{1!} t + \cdots + \frac{b_{m-1}}{(m-2)!} t^{m-2} + \frac{b_m}{(m-1)!} t^{m-1} \right],$$

همان طور که در ابتدای بخش ۸۲ بیان شد.

۱۳. فرض کنید نقطه  $s_0 = \alpha + i\beta$  یک قطب مرتبه  $m$  تابع  $F(s)$  باشد که دارای نمایش سری لوران

$$F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (s - s_0)^n + \frac{b_1}{s - s_0} + \frac{b_2}{(s - s_0)^2} + \cdots + \frac{b_m}{(s - s_0)^m} \quad (b_m \neq 0)$$

در قرص محدود  $|s - s_0| < R_2$  است. همچنین فرض کنید در نقاط  $s_i$  که  $\overline{F(s)} = F(\bar{s})$  است، تحلیلی است.

(الف) با کمک نتیجه تمرین ۵۲ بگویید که چگونه نتیجه می‌شود اگر  $|\bar{s} - \bar{s}_0| < R_2$  باشد آن‌گاه

$$F(\bar{s}) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{a}_n (\bar{s} - \bar{s}_0)^n + \frac{\bar{b}_1}{\bar{s} - \bar{s}_0} + \frac{\bar{b}_2}{(\bar{s} - \bar{s}_0)^2} + \cdots + \frac{\bar{b}_m}{(\bar{s} - \bar{s}_0)^m} \quad (\bar{b}_m \neq 0).$$

حال  $s$  را به جای  $\bar{s}$  قرار داده نمایش سری لوران  $F(s)$  را در قرص محدود  $|s - s_0| < R_2$  به دست آورید و نتیجه بگیرید که  $\bar{s}$  یک قطب مرتبه  $m$  تابع  $F(s)$  است.

(ب) با استفاده از نتایج تمرین ۱۲ و قسمت (الف) بالا نشان دهید که اگر  $t$  حقیقی باشد آنگاه

$$\operatorname{Res}_{s=s_0} [e^{st} F(s)] + \operatorname{Res}_{s=\bar{s}_0} [e^{st} F(s)] = 2e^{\alpha t} \operatorname{Re} \left\{ e^{i\beta t} \left[ b_1 + \frac{b_2}{1!} t + \dots + \frac{b_m}{(m-1)!} t^{m-1} \right] \right\},$$

همان طور که در ابتدای بخش ۸۲ بیان شد.

۱۴. فرض کنید  $F(s)$  تابع تمرین ۱۳ باشد و ضریب نااصر  $b_m$  را به شکل نمایی  $b_m = r_m \exp(i\theta_m)$  بنویسید. سپس با استفاده از نتیجه اصلی قسمت (ب) تمرین ۱۳ نشان دهید که اگر  $t$  حقیقی باشد مجموع مانده‌های  $e^{st} F(s)$  در  $\bar{s}_0$  ( $\beta \neq 0^\circ$ ) و شامل جمله‌ای از نوع زیر است

$$\frac{2r_m}{(m-1)!} t^{m-1} e^{\alpha t} \cos(\beta t + \theta_m).$$

توجه کنید که اگر  $\alpha > 0$ ، وقتی  $t \rightarrow \infty$  میل می‌کند حاصل ضرب  $t^{m-1} e^{\alpha t}$  به  $\infty$  میل می‌کند. بنابراین وقتی  $f(t)$ ، تبدیل وارون لاپلاس، با جمع کردن مانده‌های  $e^{st} F(s)$  بدست آمده باشد، جمله‌ای که در بالا ظاهر شده، مؤلفه ناپایدار  $f(t)$  است هرگاه  $\alpha > 0$ ؛ و گفته می‌شود از نوع تشدید است. همچنین اگر  $m \geq 2$  و  $\alpha = 0$ ، این جمله از نوع تشدید است.



## نگاشت به وسیلهٔ توابع مقدماتی

تعابیر هندسی تابع یک متغیره مختلط به عنوان نگاشت، یا تبدیل، در بخش‌های ۱۲ و ۱۳ (فصل ۲) معرفی شد. در آنجا دیدیم که چگونه ماهیت چنین تابعی را، تا حدی، می‌توان از روی نحوه نگاشتن برخی منحنیها و نواحی با نمودار نمایش داد.

در این فصل با مثال‌های بیشتری خواهیم دید که چگونه منحنیها و نواحی گوناگون به وسیلهٔ توابع تحلیلی مقدماتی نگاشته می‌شوند. کاربردهای چنین نتایجی در مسائل فیزیکی، بعداً در فصول ۱۰ و ۱۱ تشریح خواهند شد.

### ۸۳. تبدیلات خطی

برای مطالعه نگاشت

$$w = Az \quad (1)$$

که در آن  $A$  عدد ثابت مختلط و ناصرفی است و  $z \neq 0$ ، اعداد  $z$  و  $A$  را به صورت نمایی می‌نویسیم:

$$A = ae^{i\alpha}, \quad z = re^{i\theta}.$$

در این صورت

$$w = (ar)e^{i(\alpha+\theta)} \quad (2)$$

و از رابطه (۲) می‌بینیم که تبدیل (۱) بردار شعاعی نمایش  $z$  را با ضریب  $a = |A|$  منبسط (یا منقبض) می‌کند و آن را حول مبدأ به اندازه زاویه  $A = \arg A$  دوران می‌دهد. بنابراین تصویر یک ناحیه مفروض از نظر هندسی با آن ناحیه متشابه است.

نگاشت

$$w = z + B \quad (3)$$

که در آن  $B$  عدد مختلط ثابتی است، انتقالی بهوسیله بردار نمایش  $B$  است. یعنی اگر

$$B = b_1 + ib_2 \quad \text{و} \quad z = x + iy \quad , \quad w = u + iv$$

آنگاه تصویر هر نقطه  $(x, y)$  در صفحه  $z$  نقطه

$$(u, v) = (x + b_1, y + b_2) \quad (4)$$

در صفحه  $w$  است. چون هر نقطه در ناحیه مفروضی از صفحه  $z$  بدین نحو بهتوی صفحه  $w$  نگاشته می‌شود، ناحیه تصویر از نظر هندسی با ناحیه اول همنهشت است.

تبدیل خطی کلی (غیر ثابت)

$$w = Az + B \quad (A \neq ۰) \quad (5)$$

که ترکیبی از تبدیلهای

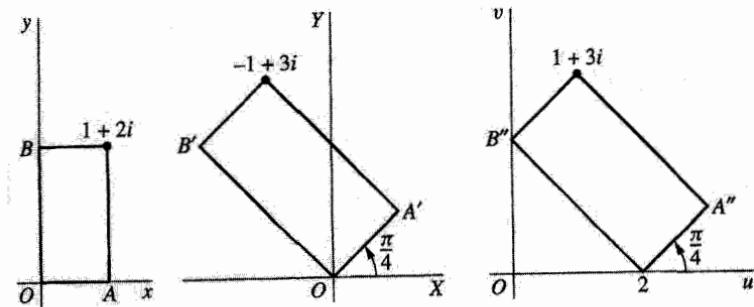
$$w = Z + B \quad \text{و} \quad Z = Az \quad (A \neq ۰)$$

است بهوضوح انبساط یا انقباض و دورانی است که به دنبال آن یک انتقال صورت می‌گیرد. مثال. تبدیل

$$w = (1+i)z + ۲$$

ناحیه‌ای مستطیلی از صفحه  $z$  را که در شکل ۱۰۴ نشان داده شده به روی ناحیه مستطیلی نشان داده شده در صفحه  $w$  می‌نگارد. این مطلب با نوشتن تبدیل بالا به صورت ترکیبی از تبدیلهای

$$w = Z + ۲ \quad \text{و} \quad Z = (1+i)z$$



شکل ۱۰۴

$$w = (1+i)z + 2$$

مشهود است. چون  $1+i = \sqrt{2} \exp(i\pi/4)$ ، تبدیل اول انساطی با ضریب  $\sqrt{2}$  و دورانی به اندازه زاویه  $\pi/4$  است. تبدیل دوم انتقالی به اندازه دو واحد به راست است.

### تمرینها

۱. بیان کنید چرا تبدیل  $w = iz$  یک دوران صفحه  $z$  به اندازه  $\pi/2$  است. سپس تصویر نوار نامتناهی  $1 < x < \infty$  را پیدا کنید.

. جواب:  $1 < v < \infty$

۲. نشان دهید که تبدیل  $w = iz + i$  نیم صفحه  $x > 0$  را به روی نیم صفحه  $v > 0$  می نگارد.

۳. ناحیه‌ای را پیدا کنید که نیم صفحه  $y > 0$  تحت تبدیل  $w = (1+i)z$  به روی آن نگاشته می شود. (الف) با استفاده از مختصات قطبی؛ (ب) با استفاده از مختصات دکارتی. این ناحیه را با شکل نمایش دهید.

. جواب:  $v > u$

۴. تصویر نیم صفحه  $v > 1$  را تحت تبدیل  $w = (1-i)z$  پیدا کنید.

۵. تصویر نوار نیمه نامتناهی  $1 < x < 2$  را تحت تبدیل  $w = iz + 1$  پیدا کنید. این نوار و تصویرش را با شکل نمایش دهید.

. جواب:  $v < -1 < u < 1$

۶. از تبدیل  $w = A(z + B)$  که در آن  $A$  و  $B$  اعداد مختلط ثابت‌اند و  $A \neq 0$ ، توصیفی هندسی ارائه دهید.

۸۴. تبدیل  $w = 1/z$ 

رابطه

$$w = \frac{1}{z} \quad (1)$$

تناظری یک به یک بین نقاط ناصرف صفحات  $z$  و  $w$  برقرار می‌کند. چون  $|z|^2 = z\bar{z}$  این نگاشت را می‌توان به وسیله تبدیلهای متوالی زیر بیان کرد

$$Z = \frac{1}{|z|^2} z, \quad w = \bar{Z}. \quad (2)$$

تبدیل اول یک انعکاس نسبت به دایره  $|z| = 1$  است. یعنی تصویر نقطه ناصرف  $z$  نقطه  $Z$  است با ویژگیهای

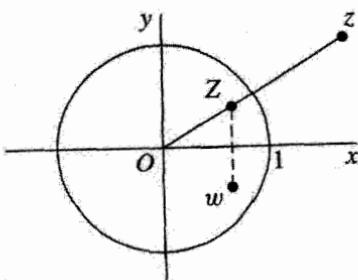
$$\arg Z = \arg z \quad \text{و} \quad |Z| = \frac{1}{|z|}$$

پس نقاط خارج دایره  $|z| = 1$  به روی نقاط ناصرف داخل آن نگاشته می‌شوند و بر عکس (شکل ۱۰۵). هر نقطه بر دایره، به روی خودش نگاشته می‌شود. تبدیل دوم از تبدیلهای (۲) فقط یک تقارن نسبت به محور حقیقی است.

اگر تبدیل (۱) را به صورت

$$T(z) = \frac{1}{z} \quad (z \neq 0) \quad (3)$$

بنویسیم، می‌توانیم  $T$  را در مبدأ و در نقطه در بی‌نهایت طوری تعریف کنیم که در صفحه مختلط توسعه‌یافته پیوسته باشد. برای انجام این کار، فقط لازم است به بخش ۱۶ مراجعه کنیم تا ملاحظه



شکل ۱۰۵

کنیم که

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{T(z)} = 0 \quad \text{زیرا} \quad \lim_{z \rightarrow \infty} T(z) = \infty \quad (4)$$

و

$$\lim_{z \rightarrow 0} T\left(\frac{1}{z}\right) = 0 \quad \text{زیرا} \quad \lim_{z \rightarrow \infty} T(z) = 0 \quad (5)$$

پس به منظور پیوسته نمودن  $T$  در صفحه توسعه یافته، می‌نویسیم

$$T(z) = \frac{1}{z} \quad \text{و برای بقیه مقادیر } z, \quad T(\infty) = 0, \quad T(0) = \infty \quad (6)$$

به عبارت دقیقتر، بنابر روابط (۶) و حدود اول (۴) و (۵) به ازای هر  $z$  در صفحه توسعه یافته به انضمام  $0 = 0$  و  $\infty = \infty$  داریم

$$\lim_{z \rightarrow z_0} T(z) = T(z_0). \quad (7)$$

حال پیوستگی  $T$  در هر نقطه از صفحه توسعه یافته نتیجه‌ای از رابطه (۷) است (بخش ۱۷ را ببینید). به دلیل این پیوستگی وقتی در بحث از تابع  $z/1$  نقطه در بینهایت مطرح می‌شود، این نکته در آن مستتر است که منظور تابع  $T(z)$  است.

## ۱/۸۵. نگاشت به وسیله $z$

در صورتی که نقطه  $w = u + iv$  تصویر نقطه ناصرف  $z = x + iy = 1/z$  تحت تبدیل باشد، با نوشتن  $w = \bar{z}/|z|^2$  نتیجه می‌شود که

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad v = \frac{-y}{x^2 + y^2}. \quad (1)$$

همچنین چون  $z = 1/w = \bar{w}/|w|^2$

$$x = \frac{u}{u^2 + v^2}, \quad y = \frac{-v}{u^2 + v^2}. \quad (2)$$

استدلال زیر که بر مبنای این روابط بین مختصات، بنا شده، نشان می‌دهد که تبدیل  $z = 1/w = A/x + B/y + C/x^2 + D/y^2$  را به دوازده خطوط تبدیل می‌کند. اگر  $A, B, C$  و  $D$  همگی اعدادی حقیقی باشند که در شرط  $A^2 + B^2 > 4AD$  صدق کنند، معادله

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0 \quad (3)$$

نمایش دایره یا خطی دلخواه است، که برای دایره  $A \neq 0$  و برای خط  $A = 0$ . اگر با روش کامل کردن مربعات، معادله (۳) را به شکل

$$\left(x + \frac{B}{2A}\right)^2 + \left(y + \frac{C}{2A}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{B^2 + C^2 - 4AD}}{2A}\right)^2$$

بنویسیم، در حالت  $A \neq 0$  نیاز به شرط  $B^2 + C^2 > 4AD$  آشکار می‌شود. وقتی  $A = 0$ ، این شرط به صورت  $B^2 + C^2 > 0$  در می‌آید. یعنی اینکه  $B$  و  $C$  هر دو باهم صفر نیستند. حال به اثبات حکمی می‌پردازیم که با حروف ایرانیک نوشته‌یم، ملاحظه می‌کنیم که اگر  $x$  و  $y$  در معادله (۳) صدق کنند، می‌توان به جای این متغیرها مقدارشان را از روابط (۲) قرار داد. پس از چند بار ساده کردن، در می‌یابیم که  $u$  و  $v$  در معادله

$$D(u^2 + v^2) + Bu - Cv + A = 0 \quad (4)$$

صدق می‌کنند (همچنین تمرین ۱۴ را ببینید) که نمایش یک دایره یا خط است. بر عکس اگر  $u$  و  $v$  در معادله (۴) صدق کنند، از روابط (۱) نتیجه می‌شود که  $x$  و  $y$  در معادله (۳) صدق می‌کنند.

حال از معادلات (۳) و (۴) واضح است که

(الف) دایره‌یی ( $A \neq 0$ ) در صفحه  $z$  که از مبدأ عبور نکند ( $D \neq 0$ ) به دایره‌یی در صفحه  $w$  تبدیل می‌شود که از مبدأ نمی‌گذرد؛

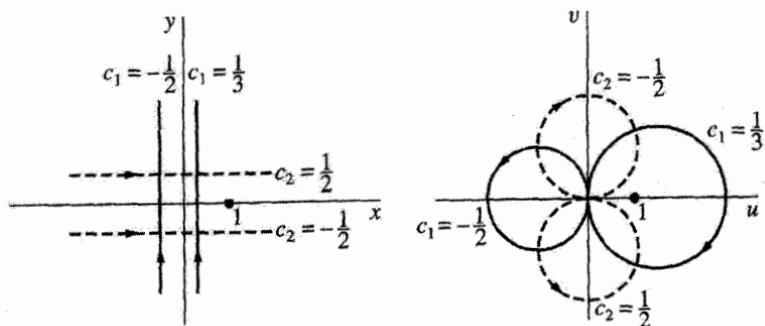
(ب) دایره‌یی ( $A \neq 0$ ) در صفحه  $z$  که از مبدأ عبور کند ( $D = 0$ ) به خطی در صفحه  $w$  تبدیل می‌شود که از مبدأ نمی‌گذرد؛

(ج) خطی ( $A = 0$ ) در صفحه  $z$  که از مبدأ عبور نکند ( $D \neq 0$ ) به دایره‌یی در صفحه  $w$  تبدیل می‌شود که از مبدأ نمی‌گذرد؛

(د) خطی ( $A = 0$ ) در صفحه  $z$  که از مبدأ عبور کند ( $D = 0$ ) تبدیل به خطی در صفحه  $w$  می‌شود که از مبدأ عبور می‌کند.

مثال ۱. بنابر معادلات (۳) و (۴) خط قائم  $c_1 \neq 0$   $x = c_1/z$  به وسیله  $w = 1/z$  به دایره  $w = -c_1(u^2 + v^2) + u = 0$  یا

$$\left(u - \frac{1}{2c_1}\right)^2 + v^2 = \left(\frac{1}{2c_1}\right)^2, \quad (5)$$



شکل ۱۰۶

$$w = 1/z$$

تبديل می شود که مرکز آن روی محور  $u$  ها و مماس بر محور  $v$  هاست. تصویر نقطه نوعی  $(c_1, y)$  روی آن خط، بنابر روابط (۱)، عبارت است از

$$(u, v) = \left( \frac{c_1}{c_1^2 + y^2}, \frac{-y}{c_1^2 + y^2} \right).$$

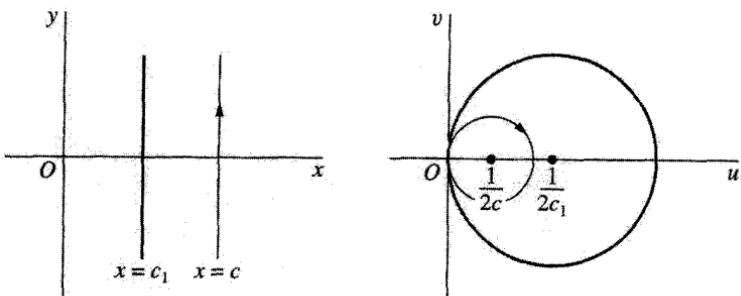
اگر  $c_1 > 0$  دایره (۵) بهوضوح در سمت راست محور  $v$  هاست. وقتی نقطه  $(c_1, y)$  روی تمام خط بالا رود، تصویر آن دایره را یکبار در جهت حرکت عقربه های ساعت می پیماید، نقطه در بینهایت صفحه  $\infty$  توسعه یافته، با مبدأ صفحه  $w$  متناظر است. زیرا اگر  $y < 0$  آنگاه  $v > 0$  و وقتی  $y$  با مقادیر منفی به  $0$  افزایش یابد،  $u$  از  $0$  تا  $1/c_1$  افزایش می یابد. پس درصورتی که  $y$  با مقادیر مثبت افزایش یابد،  $v$  منفی است و  $u$  به  $0$  کاهش می یابد.

اما اگر  $c_1 < 0$ ، دایره در سمت چپ محور  $v$  هاست. در صورتی که نقطه  $(c_1, y)$  به طرف بالا حرکت کند، تصویر آن باز یک دایره می سازد، اما در جهت عکس حرکت عقربه های ساعت. شکل ۱۰۶ را بینید که در آن حالتهای  $c_1 = 1/3$  و  $c_1 = -1/2$  رسم شده اند.

مثال ۲. تبدیل  $w = 1/z = 1/y$  خط افقی  $y = c_2$  را به روی دایره

$$u^2 + \left( v + \frac{1}{2c_2} \right)^2 = \left( \frac{1}{2c_2} \right)^2, \quad (6)$$

می نگارد که مرکز آن روی محور  $u$  ها و مماس بر محور  $v$  هاست. دو حالت خاص آن را در شکل ۱۰۶ نشان داده ایم که در آن جهتهای خطوط و دایر نظیر را نیز مشخص کرده ایم.



شکل ۱۰۷

$$w = 1/z$$

مثال ۳. وقتی  $w = 1/z$ , نیم صفحه  $x \geq c_1$  ( $c_1 > 0$ ) به روی قرص

$$\left(u - \frac{1}{2c_1}\right)^2 + v^2 \leq \left(\frac{1}{2c_1}\right)^2, \quad (7)$$

نگاشته می‌شود. زیرا بنابر مثال ۱، خط دلخواه  $x = c$  ( $c \geq c_1$ ) تبدیل به دایره

$$\left(u - \frac{1}{2c}\right)^2 + v^2 = \left(\frac{1}{2c}\right)^2 \quad (8)$$

می‌شود. بعلاوه، در صورتی که  $c$  با مقادیر بزرگتر از  $c_1$  افزایش یابد، خطوط  $x = c$  به سمت راست حرکت می‌کنند و اندازه دوایر تصویر (۸) کوچک می‌شود (شکل ۱۰۷ را ببینید). چون از هر نقطه نیم صفحه  $x \geq c_1$  یکی از خطوط  $x = c$  می‌گذرد و از هر نقطه قرص (۷) یکی از دوایر (۸) می‌گذرد، درستی نگاشت ثابت می‌شود.

### تمرینها

۱. در بخش ۸۵ بگویید چگونه از اولین رابطه از روابط (۲) نتیجه می‌شود که وقتی  $w = 1/z$ , نابرابری  $(c_1 > 0)$  ( $x \geq c_1$ ) برقرار است اگر و تنها اگر نابرابری (۷) برقرار باشد. بدین ترتیب برای درستی نگاشتی که در مثال ۳ این بخش ثابت شد، اثبات دیگری ارائه دهید.
۲. نشان دهید که اگر  $0 < c_1 < c$ , تصویر نیم صفحه  $x < c_1$  تحت تبدیل  $w = 1/z$  درون یک دایره است. اگر  $0 < c_1 = c$ , تصویر چیست؟

۳. نشان دهید که تصویر نیم صفحه  $c_2 > y$  تحت تبدیل  $w = 1/z$  درون یک دایره است، به شرط اینکه  $c_2 > 0$ . تصویر را وقتی  $c_2 < 0$  پیدا کنید، همچنین تصویر را وقتی  $c_2 = 0$  بیابید.

۴. تصویر نوار نیمه نامتناهی  $y < 1/(2c)$  را تحت تبدیل  $w = 1/z$  پیدا کنید. این نوار و تصویرش را با شکل نمایش دهید.

۵. جواب:  $v < 0, u^2 + (v + c)^2 > c^2$

۶. تصویر ربع صفحه  $x > 0, y > 0$  را تحت تبدیل  $w = 1/z$  پیدا کنید.

۷. جواب:  $v^2 < (1/2)^2 + u^2 < (1/2)^2$

۸. درستی نگاشت نواحی و قسمتهای نشان داده شده از مرازها در (الف) شکل ۴ پیوست ۲؛ (ب) شکل ۵ پیوست ۲، را تحت تبدیل  $w = 1/z$  تحقیق کنید.

۹. تبدیل  $(1 - z)/w = 1$  را به طور هندسی توصیف کنید.

۱۰. تبدیل  $z/i = w$  را به طور هندسی توصیف کنید؛ همچنین نشان دهید که این تبدیل، دایره و خط را به دایره و خط تبدیل می‌کند.

۱۱. تصویر نوار نیمه نامتناهی  $x < 1 < y$  را تحت تبدیل  $w = i/z$  پیدا کنید. این نوار و تصویرش را با شکل نمایش دهید.

۱۲. جواب:  $v > 0, u > 0, (u - 1/2)^2 + v^2 > (1/2)^2$

۱۳. با نوشتن  $w = \rho \exp(i\phi)$  نشان دهید که نگاشت  $w = 1/z$ ، هذلولوی ۱ را به لمنیسکات  $\rho^2 \cos 2\phi = 1$  تبدیل می‌کند. (تمرین ۱۵ بخش ۵ را ببینید).

۱۴. فرض کنید دایره  $|z| = r_0$  دارای جهت مثبت، یا جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت، باشد. جهت تصویر این دایره تحت تبدیل  $w = 1/z$  را معین کنید.

۱۵. نشان دهید که هرگاه دایره‌یی تحت تبدیل  $w = 1/z$  به دایره تبدیل شود مرکز دایره اولی هیچوقت به روی مرکز دایره تصویر نگاشته نمی‌شود.

۱۶. با استفاده از شکل نمایی  $z = re^{i\theta}$  نشان دهید تبدیل

$$w = z + \frac{1}{z}$$

که مجموع تبدیل همانی و تبدیل مطرح شده در بخش‌های ۸۴ و ۸۵ است، دایر  $r = r_0$  را به روی بیضیهایی با نمایش پارامتری

$$u = \left(r_0 + \frac{1}{r_0}\right) \cos \theta, \quad v = \left(r_0 - \frac{1}{r_0}\right) \sin \theta \quad (0^\circ \leq \theta \leq 2\pi)$$

و کانونهایی واقع در نقاط  $w = \pm 2$  می‌نگارد. سپس نشان دهید چگونه نتیجه می‌شود که این تبدیل، تمام دایره  $|z| = 1$  را به روی قطعه  $u \leq -2$  از محور  $u$  می‌نگارد و حوزه خارج آن دایره را به روی بقیه صفحه  $w$ .

۱۴. (الف) معادله (۳) بخش ۸۵ را به صورت

$$2Az\bar{z} + (B - Ci)z + (B + Ci)\bar{z} + 2D = 0.$$

بنویسید که در آن  $z = x + iy$

(ب) نشان دهید که وقتی  $z = 1/w$ ، نتیجه قسمت (الف) چنین می‌شود

$$2Dw\bar{w} + (B + Ci)w + (B - Ci)\bar{w} + 2A = 0.$$

سپس نشان دهید که اگر  $iv = u + w$ ، این رابطه همان رابطه (۴) بخش ۸۵ می‌شود.  
راهنمایی: در قسمت (الف) از روابط زیر استفاده کنید (بخش ۵ را ببینید)

$$y = \frac{z - \bar{z}}{2i} \quad \text{و} \quad x = \frac{z + \bar{z}}{2}$$

## ۱۵. تبدیل خطی کسری

تبدیل

$$w = \frac{az + b}{cz + d} \quad (ad - bc \neq 0) \quad (1)$$

که در آن  $a, b, c$  و  $d$  اعداد مختلط ثابتی هستند، تبدیل خطی کسری یا تبدیل موبیوس<sup>۱</sup> نامیده می‌شود. ملاحظه کنید که رابطه (۱) را می‌توان به صورت

$$Azw + Bz + Cw + D = 0 \quad (AD - BC \neq 0); \quad (2)$$

نوشت و بر عکس هر رابطه از نوع (۲) را می‌توان به صورت (۱) در آورد. چون این صورت، هم نسبت به  $z$  و هم نسبت به  $w$  خطی است، یا برحسب  $z$  و  $w$  دوخطی است، تبدیل خطی کسری را تبدیل دوخطی نیز می‌نامند.

در صورتی که  $c = 0$ ، شرط  $ad - bc \neq 0$  که در رابطه (۱) آمده است به صورت  $0 \neq 0$  در می‌آید و می‌بینیم که تبدیل بالا به تابع خطی غیرثابتی تحویل می‌یابد. وقتی  $c \neq 0$ ، رابطه (۱)

1. Möbius

را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$w = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c} \cdot \frac{1}{cz + d} \quad (ad - bc \neq 0). \quad (3)$$

لذا باز دیگر شرط  $ad - bc \neq 0$  تضمین می‌کند که تابع ثابتی نداریم. البته تبدیل  $w = 1/z$  = حالتی خاص از تبدیل (۱) است، وقتی  $c \neq 0$ .

رابطه (۳) نشان می‌دهد که وقتی  $c \neq 0$ ، تبدیل خطی کسری ترکیبی از نگاشتهای زیر است

$$Z = cz + d, \quad W = \frac{1}{Z}, \quad w = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c} W \quad (ad - bc \neq 0).$$

بدین ترتیب نتیجه می‌شود که  $c$  صفر باشد یا نباشد هر تبدیل خطی کسری همیشه دایره و خط را به دایره و خط تبدیل می‌کند زیرا این تبدیلهای خطی کسری خاص واجد این ویژگی‌اند. (بخش‌های ۸۳ و ۸۵ را ببینید).

با حل معادله (۱) بر حسب  $z$ ، در می‌یابیم که

$$z = \frac{-dw + b}{cw - a} \quad (ad - bc \neq 0). \quad (4)$$

بنابراین اگر نقطه مفروض  $w$  تصویر نقطه‌ای مانند  $z$  را می‌توان بهوسیله رابطه (۴) دوباره به دست آورد. اگر  $c = 0$ ، آنگاه  $a$  و  $d$  هر دو ناصرفند و هر نقطه از صفحه  $w$  بهوضوح تصویر یک و تنها یک نقطه از صفحه  $z$  است. اگر  $c \neq 0$  این حکم برقرار است بجز وقتی که  $w = a/c$ ، زیرا اگر  $w$  دارای آن مقدار باشد در رابطه (۴) مخرج صفر می‌شود. ولی می‌توان حوزه تعریف تبدیل (۱) را توسعه داد تا تبدیل خطی کسری  $T$  روی صفحه  $z$  توسعه یافته تعریف شود به قسمی که وقتی  $c \neq 0$  نقطه  $w = a/c$  تصویر  $\infty$  باشد. ابتدا می‌نویسیم

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad (ad - bc \neq 0) \quad (5)$$

سپس می‌نویسیم

$$c = 0 \quad \text{اگر} \quad T(\infty) = \infty$$

۶

$$c \neq 0 \quad \text{اگر} \quad T\left(\frac{-d}{c}\right) = \infty \quad \text{و} \quad T(\infty) = \frac{a}{c}$$

بنابر تمرین ۱۱ بخش ۱۷، این امر  $T$  را روی صفحه  $z$  توسعه یافته پیوسته می‌سازد. این موضوع با روش توسعی حوزه تعریف  $z = w$  در بخش ۸۴ نیز سازگار است.

درصورتی که حوزه تعریف بدین نحو توسعه یابد، تبدیل خطی کسری (۵) نگاشتی یک به یک از صفحه  $z$  توسعه یافته به روی صفحه  $w$  توسعه یافته است. یعنی،  $T(z_1) \neq T(z_2)$  هرگاه  $z_1 \neq z_2$ ؛ و بازای هر نقطه  $w$  در صفحه دوم نقطه‌ای مانند  $z$  در صفحه اول هست به طوری که  $T(z) = w$ . بنابراین بازای هر تبدیل  $T$ ، تبدیل وارون  $T^{-1}$  موجود است که روی صفحه  $w$  توسعه یافته چنین تعریف می‌شود:

$$T(z) = w \quad \text{اگر و تنها اگر} \quad T^{-1}(w) = z$$

از رابطه (۴) می‌بینیم که

$$T^{-1}(w) = \frac{-dw + b}{cw - a} \quad (ad - bc \neq 0). \quad (6)$$

بهوضوح،  $T^{-1}$  یک تبدیل خطی کسری است، که در آن

$$c = 0 \quad \text{اگر} \quad T^{-1}(\infty) = \infty$$

$$\cdot c \neq 0 \quad \text{اگر} \quad T^{-1}(\infty) = \frac{-d}{c} \quad \text{و} \quad T^{-1}\left(\frac{a}{c}\right) = \infty$$

اگر  $S$  و  $T$  دو تبدیل خطی کسری باشند، آنگاه ترکیب  $S[T(z)]$  نیز تبدیل خطی کسری است. با ترکیب عبارتی از نوع (۵) درستی این مطلب را می‌توان تحقیق کرد. توجه کنید که به خصوص بازای هر نقطه  $z$  در صفحه توسعه یافته  $z = T^{-1}[T(z)]$  است.

همیشه یک تبدیل خطی کسری وجود دارد که سه نقطه مفروض و متمایز  $z_1, z_2$  و  $z_3$  را، به ترتیب، به روی سه نقطه مشخص و متمایز  $w_1, w_2$  و  $w_3$  می‌نگارد. اثبات این مطلب در بخش ۸۷ خواهد آمد، که  $w$  تصویر نقطه  $z$  تحت چنین تبدیلی، به طور ضمنی بر حسب  $z$  داده می‌شود. در اینجا به توضیح روش مستقیمتری برای یافتن تبدیل مطلوب می‌پردازیم.

**مثال ۱.** حالتی خاص از تبدیل (۱) را می‌باییم که نقاط

$$z_3 = 1 \quad z_2 = 0, \quad z_1 = -1$$

را به روی نقاط

$$w_3 = i \quad \text{و} \quad w_2 = 1 \quad , \quad w_1 = -i$$

بنگارد. چون ۱ تصویر ° است از عبارت (۱) نتیجه می‌شود که  $1 = b/d$  یا  $d = b$ . بنابراین

$$w = \frac{az + b}{cz + b} \quad [b(a - c) \neq 0]. \quad (7)$$

سپس چون  $1 - i$  به ترتیب به  $-i$  و  $i$  تبدیل می‌شوند، نتیجه می‌شود که

$$ic + ib = a + b \quad \text{و} \quad ic - ib = -a + b$$

با جمع کردن طرفهای متناظر این معادلات، در می‌یابیم که  $c = -ib$ ؛ و با تفکیک کردن معلوم می‌شود که  $a = ib$ . در نتیجه،

$$w = \frac{ibz + b}{-iz + b} = \frac{b(iz + 1)}{b(-iz + 1)}.$$

چون در اینجا  $b$  دلخواه و ناصرف است، می‌توانیم به جای آن، مقدار یک را قرار دهیم (یا آن را حذف کنیم) و بنویسیم

$$w = \frac{iz + 1}{-iz + 1} \cdot \frac{i}{i} = \frac{i - z}{i + z}.$$

**مثال ۲.** فرض می‌کنیم نقاط

$$z_3 = -1 \quad \text{و} \quad z_2 = \infty \quad , \quad z_1 = 1$$

به روی نقاط

$$w_3 = 1 \quad \text{و} \quad w_2 = \infty \quad , \quad w_1 = i$$

نگاشته شوند. چون  $w_2 = \infty$  نظیر ° است، در عبارت (۱) باید  $z_2 = d$  باشد، و بنابراین

$$w = \frac{az + b}{cz} \quad (bc \neq 0). \quad (8)$$

چون باید ۱ به روی  $-i$  نگاشته شود و  $1 - i$  به روی ۱، روابط زیر را داریم

$$-c = -a + b \quad \text{و} \quad ic = a + b$$

و نتیجه می شود که

$$\cdot a = \frac{i+1}{2}c, \quad b = \frac{i-1}{2}c$$

پس سرانجام اگر قرار دهیم  $c = 2$ ، رابطه (۸) چنین می شود

$$w = \frac{(i+1)z + (i-1)}{2z}.$$

## ۸۷. یک صورت ضمنی

معادله

$$\frac{(w - w_1)(w_2 - w_3)}{(w - w_2)(w_2 - w_1)} = \frac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z - z_3)(z_2 - z_1)} \quad (1)$$

معرف یک تبدیل خطی کسری (به طور ضمنی) است که نقاط متمایز  $z_1, z_2$  و  $z_3$  از صفحه متناهی  $z$  را به ترتیب به روی نقاط  $w_1, w_2$  و  $w_3$  از صفحه متناهی  $w$  می نگارد.\* برای اثبات این مطلب، معادله (۱) را چنین می نویسیم

$$(z - z_2)(w - w_1)(z_2 - z_1)(w_2 - w_3) = (z - z_1)(w - w_3)(z_2 - z_3)(w_2 - w_1). \quad (2)$$

اگر  $z = z_1$ ، سمت راست رابطه (۲) صفر می شود؛ و در نتیجه  $w_1 = w$ . همین طور اگر  $z = z_3$ ، سمت چپ آن صفر می شود و در نتیجه  $w_3 = w$ . اگر  $z = z_2$ ، معادله خطی

$$(w - w_1)(w_2 - w_3) = (w - w_3)(w_2 - w_1),$$

را به دست می آوریم که جواب یکتای آن  $w_2 = w$  است. می توان دید که نگاشت تعریف شده با رابطه (۱)، در واقع یک تبدیل خطی کسری است، این موضوع را می توان با انجام عمل ضرب در رابطه (۲) و نوشتتن نتیجه حاصل به صورت (بخش ۸۶)

$$Azw + Bz + Cw + D = 0 \quad (3)$$

\* دو طرف معادله (۱) نسبت ناهمساز است که در بررسی تبدیلهای خطی کسری، در سطحی وسیعتر از آنچه در این کتاب آمده، نقش مهمی ایفا می کند. مثلاً صفحات ۱۹۲-۱۹۶ کتاب

R. P. Boas, "Invitation to Complex Analysis," 1993

با صفحات ۴۸-۵۵ کتاب

J. B. Conway, "Functions of One Complex Variable," 2d ed., 6th Printing, 1997

را بینید.

ملاحظه کرد. شرط  $AD - BC \neq 0$  که آن را در رابطه (۱) لازم داریم بهوضوح برقرار است، زیرا همان طور که توضیح دادیم رابطه (۱)تابع ثابتی را تعریف نمی‌کند. از خواننده خواسته شده است (تمرین ۱۰) که نشان دهد رابطه (۱) تنها تبدیل خطی کسری را تعریف می‌کند که نقاط  $z_1$  و  $z_2$  و  $z_3$  را، بهترتبی، به روی نقاط  $w_1$  و  $w_2$  و  $w_3$  می‌نگارد.

مثال ۱. تبدیلی را که در مثال ۱، بخش ۸۶، یافته‌یم، با این شرط بود که

$$w_3 = i, \quad w_2 = 1, \quad w_1 = -i \quad \text{و} \quad z_3 = 1, \quad z_2 = 0, \quad z_1 = -1$$

با استفاده از رابطه (۱) می‌نویسیم

$$\frac{(w+i)(1-i)}{(w-i)(1+i)} = \frac{(z+1)(0-1)}{(z-1)(0+1)}$$

و سپس با بهدست آوردن  $w$  بر حسب  $z$ ، به تبدیل

$$w = \frac{i-z}{i+z}$$

می‌رسیم که قبلاً بهدست آمده بود.

اگر رابطه (۱) به صورتی مناسب تغییر داده شود، می‌توان آن را در حالتی نیز به کار برد که نقطه در بی‌نهایت، یکی از نقاط از قبل تعیین شده در هر یک از صفحات (توسعه‌یافته)  $z$  یا  $w$  باشد. مثلاً فرض کنید  $\infty = z_1$ . چون هر تبدیل خطی کسری روی صفحه توسعه‌یافته پیوسته است، تنها لازم است در طرف راست رابطه (۱)،  $z_1/1$  را به جای  $z$  قرار داده، مخرج کسرها را برداشته و  $z_1$  را به صفر میل دهیم:

$$\lim_{z_1 \rightarrow \infty} \frac{(z - 1/z_1)(z_2 - z_3)}{(z - z_3)(z_2 - 1/z_1)} \cdot \frac{z_1}{z_1} = \lim_{z_1 \rightarrow \infty} \frac{(z_1 z - 1)(z_2 - z_3)}{(z - z_3)(z_1 z_2 - 1)} = \frac{z_2 - z_3}{z - z_3}.$$

در این صورت، تغییریافته مطلوب رابطه (۱) عبارت است از

$$\frac{(w - w_1)(w_2 - w_3)}{(w - w_3)(w_2 - w_1)} = \frac{z_2 - z_3}{z - z_3}.$$

توجه کنید که به طور صوری این تغییر با حذف عاملهای شامل  $z$  در رابطه (۱) بهدست می‌آید. به آسانی می‌توان دید که وقتی هر یک از نقاط از قبل تعیین شده دیگر  $\infty$  باشد همین روش صوری به کار می‌رود.

مثال ۲. در مثال ۲، بخش ۸۶، نقاط از قبل تعیین شده عبارت بودند از

$$w_3 = 1, w_2 = \infty, w_1 = i, z_3 = -1, z_2 = 0, z_1 = 1$$

در این حالت، تغییر زیر از رابطه (۱) را به کار می بریم

$$\frac{w - w_1}{w - w_3} = \frac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z - z_3)(z_2 - z_1)}$$

که نتیجه می دهد

$$\frac{w - i}{w - 1} = \frac{(z - 1)(0 + 1)}{(z + 1)(0 - 1)}.$$

حال اگر  $w$  را به دست آوریم، به تبدیل مطلوب می رسمیم:

$$w = \frac{(i + 1)z + (i - 1)}{2z}.$$

### تمرینها

۱. تبدیل خطی کسری پیدا کنید که نقاط  $z_1 = 2, z_2 = -2, z_3 = i$  را به روی نقاط  $w_3 = -1, w_2 = i, w_1 = 1$  بنگارد.

$$w = (3z + 2i)/(iz + 6) \quad \text{جواب:}$$

۲. تبدیل خطی کسری پیدا کنید که نقاط  $z_1 = -i, z_2 = 0, z_3 = i$  را به روی نقاط  $w_3 = 1, w_2 = i, w_1 = -1$  بنگارد. محور موهومی  $x = 0$  به چه منحنی می شود؟

۳. تبدیل دوخطی پیدا کنید که نقاط  $z_1 = \infty, z_2 = i, z_3 = 0$  را به روی نقاط  $w_3 = \infty, w_2 = i, w_1 = 1$  بنگارد.

$$w = -1/z \quad \text{جواب:}$$

۴. تبدیل دوخطی پیدا کنید که نقاط متمایز  $z_1, z_2, z_3$  را به روی نقاط  $0, w_2 = 1, w_1 = \infty$  بنگارد.

$$w = \frac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z - z_3)(z_2 - z_1)} \quad \text{جواب:}$$

۵. نشان دهید، همان طور که در بخش ۸۶ بیان شد ترکیب دو تبدیل خطی کسری، یک تبدیل خطی کسری است.

۶. یک نقطه ثابت از تبدیل  $f(z) = w$ ، نقطه ای مانند  $z_0$  است به قسمی که  $f(z_0) = z_0$  نشان دهید که هر تبدیل خطی کسری، به استثنای تبدیل همانی  $z = w$ ، حداقل دو نقطه ثابت در صفحه توسعه یافته دارد.

۷. نقاط ثابت (تمرین ۶) تبدیلهای زیر را پیدا کنید

$$(الف) \quad w = (z+1)/(z-1); \quad (ب) \quad w = (z-1)/(z+1).$$

جواب: (الف)  $z = \pm i$ ; (ب)  $z = 3$ .

۸. معادله (۱)، بخش ۸۷، را برای حالتی که  $w_2$  و  $w_1$  هر دو نقطه در بی‌نهایت باشند به صورتی مناسب تغییر دهید. سپس نشان دهید هر تبدیل خطی کسری که نقاط ثابتش (تمرین ۶)  $\infty$  و  $0$  هستند باید به صورت  $w = az$  ( $a \neq 0$ ) باشد.

۹. ثابت کنید اگر مبدأً یک نقطه ثابت (تمرین ۶) تبدیل خطی کسری باشد، آن تبدیل را می‌توان به صورت  $w = z/(cz+d)$  نوشت، که در آن  $d \neq 0$ .

۱۰. نشان دهید که فقط یک تبدیل خطی کسری موجود است به طوری که سه نقطه مفروض و متمایز  $z_1, z_2$  و  $z_3$  از صفحه توسعه یافته  $z$  را به روی سه نقطه متمایز و مشخص  $w_1, w_2$  و  $w_3$  از صفحه توسعه یافته  $w$  بنگارد.

راهنمایی: فرض کنید  $T$  و  $S$  دو تبدیل خطی کسری با ویژگیهای بالا باشند. در این صورت پس از ملاحظه این مطلب که  $S^{-1}[T(z_k)] = z_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) با استفاده از تمرینهای ۵ و ۶ نشان دهید که به ازای هر  $z$ ,  $S^{-1}[T(z)] = z$ . بدین ترتیب نشان دهید که به ازای هر  $z$ ,  $T(z) = S(z)$ .

۱۱. به کمک رابطه (۱) بخش ۸۷، ثابت کنید که اگر یک تبدیل خطی کسری نقاط محور  $x$  را به روی محور  $u$  بنگارد، آنگاه همه ضرایب موجود در این تبدیل، حقیقی‌اند، مگر محتملأً با یک عامل مشترک مختصط. عکس این حکم بدیهی است.

۱۲. فرض کنید  $T(z) = (az+b)/(cz+d)$ , که در آن  $ad - bc \neq 0$ , یک تبدیل خطی کسری باشد که متمایز از  $T(z) = z$  است. نشان دهید که  $T^{-1} = T$  اگر و تنها اگر  $d = -a$ . راهنمایی: رابطه  $T^{-1}(z) = T(z)$  را چنین بنویسید

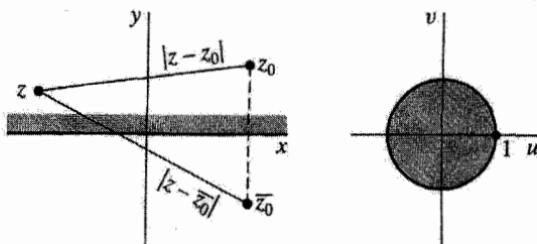
$$(a+d)[cz^2 + (d-a)z - b] = 0.$$

## ۸۸. نگاشتهای نیم صفحه بالایی

حال همه تبدیلهای خطی کسری را معین می‌کنیم که نیم صفحه بالایی  $\text{Im } z > 0$  را به روی فرصل

باز  $1 < |w|$ , می‌نگارند و مرز  $0 = \text{Im } z = \text{Im } w$  را به روی مرز  $1 = |w|$  (شکل ۱۰۸).

با در نظر داشتن این مطلب که نقاط روی خط  $0 = \text{Im } z$  باید به نقاط روی دایره  $1 = |w|$



شکل ۱۰۸

$$w = e^{i\alpha} \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0} \quad (\operatorname{Im} z_0 > 0)$$

تبديل شوند، با انتخاب نقاط  $z = 1, z = \infty$  و  $z = 0$  روی این خط شروع کرده به تعیین شرایطی روی تبدیل خطی کسری

$$w = \frac{az + b}{cz + d} \quad (ad - bc \neq 0) \quad (1)$$

می پردازیم که برای اینکه تصاویر این نقاط دارای قدر مطلق واحد باشند ضروری هستند. با توجه به رابطه (۱) می بینیم که اگر برای  $z = 0$  داشته باشیم  $|w| = 1$  آنگاه  $|b/d| = 1$  یعنی،

$$|b| = |d| \neq 0. \quad (2)$$

حال بنابر بخش ۸۶،  $w = a/c$  تصویر نقطه  $\infty = z$  تنها زمانی یک عدد متناهی، یعنی  $c \neq 0$  است که  $|a/c| = 1$ . لذا این شرط که  $z = \infty$  وقتی  $|w| = 1$  بدين معنی است که  $|a| = |c| \neq 0$ .

$$|a| = |c| \neq 0. \quad (3)$$

و بنابر نا صفر بودن  $a$  و  $c$  می توان رابطه (۱) را به صورت زیر بازنویسی کرد

$$w = \frac{a}{c} \cdot \frac{z + (b/a)}{z + (d/c)}. \quad (4)$$

در این صورت، چون  $|a/c| = 1$  و

$$\left| \frac{b}{a} \right| = \left| \frac{d}{c} \right| \neq 0,$$

بنابر روابط (۲) و (۳)، رابطه (۴) را می‌توان به صورت

$$w = e^{i\alpha} \frac{z - z_0}{z - z_1} \quad (|z_1| = |z_0| \neq 0) \quad (5)$$

نوشت که در آن  $\alpha$  یک عدد حقیقی ثابت است و  $z$  و  $z_1$  اعداد مختلط ثابت (ناصفر) هستند. اکنون، این شرط را روی تبدیل (۵) می‌گذاریم که  $|w| = 1$  هرگاه  $z = z_0$ . این نتیجه می‌دهد که

$$|1 - z_1| = |1 - z_0|,$$

یا

$$(1 - z_1)(1 - \bar{z}_1) = (1 - z_0)(1 - \bar{z}_0).$$

اما  $z_1 \bar{z}_1 = z_0 \bar{z}_0$  چون  $|z_1| = |z_0|$  و رابطه بالا به

$$z_1 + \bar{z}_1 = z_0 + \bar{z}_0.$$

تبدیل می‌شود؛ یعنی،  $\operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_0$ . در نتیجه چون داریم  $|z_1| = |z_0|$  پس

$$z_1 = \bar{z}_0 \quad \text{یا} \quad z_1 = z_0.$$

اگر  $z_1 = z_0$ ، تبدیل (۵) تابع ثابت  $w = \exp(i\alpha)$  می‌شود؛ بنابراین  $z_1 = \bar{z}_0$ . تبدیل (۵) با  $z_1 = \bar{z}_0$  نقطه  $z$  را به روی مبدأ  $w = 0$  می‌نگارد و چون نقاط درون دایره  $1 = |w|$  باید تصاویر نقاط بالای محور حقیقی در صفحه  $z$  باشند، نتیجه می‌گیریم که  $z > 0$ . بنابراین هر تبدیل خطی کسری با ویژگی نگاشتی مذکور در پاراگراف اول این بخش

باید به شکل

$$w = e^{i\alpha} \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0} \quad (\operatorname{Im} z_0 > 0) \quad (6)$$

باشد، که در آن  $\alpha$  عددی حقیقی است.

حال باید نشان دهیم که بر عکس هر تبدیل خطی کسری به شکل (۶) دارای ویژگی نگاشتی مطلوب است. این کار را می‌توان به آسانی با قدر مطلق گرفتن از طرفین رابطه (۶) و تعبیر هندسی رابطه حاصل،

$$|w| = \left| \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0} \right|$$

انجام داد. اگر نقطه  $z$  در بالای محور حقیقی باشد، این نقطه و نقطه  $\bar{z}$  هر دو در یک طرف آن محور واقع‌اند که عمودمنصف پاره خط واصل بین  $z$  و  $\bar{z}$  است. در نتیجه فاصله  $|z - \bar{z}|$  از فاصله  $|z - \bar{z}|$  کوچکتر است (شکل ۱۰۸)؛ یعنی،  $1 < |w|$ . همچنین اگر  $z$  پایین محور حقیقی باشد، فاصله  $|z - \bar{z}|$  از فاصله  $|z - z|$  بزرگتر است؛ و بنابراین  $1 > |w|$ . بالاخره اگر  $z$  روی محور حقیقی باشد،  $1 = |w|$  زیرا در این صورت  $|z - \bar{z}| = |z - z|$ . چون هر تبدیل خطی کسری نگاشتی یک بهیک از صفحه  $\mathbb{H}$  توسعه یافته به روی صفحه  $w$  توسعه یافته است، در نتیجه تبدیل (۶) نیم صفحه  $\mathbb{H}$  را به روی قرص  $1 < |w|$  و مرز نیم صفحه را به روی مرز قرص می‌نگارد.

اولین مثال استفاده از نتیجه فوق را، که با حروف ایرانیک نوشته شده است، روشن می‌کند.

### مثال ۱. تبدیل

$$w = \frac{i - z}{i + z} \quad (7)$$

در مثالهای ۱ بخش‌های ۸۶ و ۸۷ را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$w = e^{i\pi} \frac{z - i}{z + i}.$$

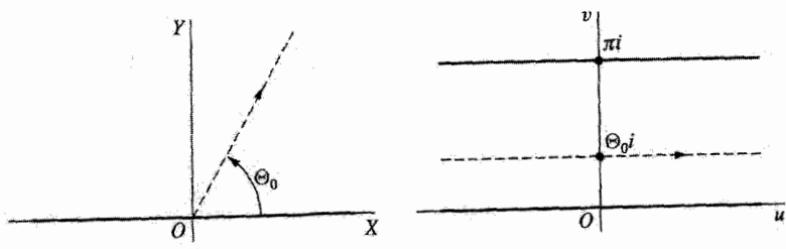
از این رو این نگاشت دارای ویژگی نگاشتی مذکور در عبارت ایرانیک بالاست. (شکل ۱۳ در پیوست ۲ را نیز که نقاط مرزی متناظر نشان داده شده‌اند، ببینید). تصویر نیم صفحه بالایی  $\mathbb{H}$  تحت انواع دیگر تبدیلهای خطی کسری بیشتر موقع با وارد بحث کردن این تبدیل خاص به سهولت تعیین می‌شود.

### مثال ۲. با نوشتن $y = ix$ و $z = x + iy$ به سادگی می‌توان نشان داد که تبدیل

$$w = \frac{z - 1}{z + 1} \quad (8)$$

نیم صفحه  $\mathbb{H}$  را به روی نیم صفحه  $v$  می‌نگارد و محور  $x$ ها را به روی محور  $u$ ها. ابتدا توجه می‌کنیم که اگر  $z$  عددی حقیقی باشد، عدد  $w$  نیز حقیقی است. در نتیجه چون تصویر محور حقیقی  $v = y$  یک دایره یا یک خط است، باید محور حقیقی  $v = y$  باشد. به علاوه به ازای هر نقطه  $w$  در صفحه متناهی  $w$ ،

$$v = \operatorname{Im} w = \operatorname{Im} \frac{(z - 1)(\bar{z} + 1)}{(z + 1)(\bar{z} + 1)} = \frac{2y}{|z + 1|^2} \quad (z \neq -1).$$



شکل ۱۰.۹

$$w = \operatorname{Log} z$$

بنابراین اعداد  $u$  و  $v$  هم علامت‌اند و در نتیجه نقاط بالای محور  $x$ ‌ها متناظرند با نقاط بالای محور  $u$ ‌ها و نقاط زیر محور  $x$ ‌ها با نقاط زیر محور  $u$ ‌ها. بالاخره، چون نقاط روی محور  $x$ ‌ها با نقاط روی محور  $u$ ‌ها متناظرند و هر تبدیل خطی کسری نگاشتی یک به یک از صفحه توسعه یافته به روی صفحه توسعه یافته است (بخش ۸۶)، وینگی نگاشتی بیان شده برای تبدیل (۸) ثابت می‌شود.

آخرین مثال متضمن تابعی است مرکب و در آن از نگاشتی که در مثال ۲ مورد بحث قرار گرفته استفاده می‌شود.

### مثال ۳. تبدیل

$$w = \operatorname{Log} \frac{z - 1}{z + 1}, \quad (9)$$

که در آن از شاخه اصلی لگاریتم استفاده شده، ترکیبی از توابع زیر است

$$w = \operatorname{Log} Z \quad \text{و} \quad Z = \frac{z - 1}{z + 1} \quad (10)$$

با توجه به مثال ۲ می‌دانیم که تبدیل اول از تبدیلهای (۱۰)، نیم صفحه بالایی  $Y > 0$  را به روی نیم صفحه بالایی  $Z = X + iY > 0$  می‌نگارد، که در آن  $z = x + iy$  و  $Z = R \operatorname{exp}(i\Theta)$ . به علاوه از شکل ۱۰.۹ به آسانی می‌توان دید که تبدیل دوم از تبدیلهای (۱۰) نیم صفحه  $Y > 0$  را به روی نوار  $Z = R \operatorname{exp}(i\Theta)$  می‌نگارد، که در آن  $w = u + iv = u + i\ln R + i\Theta$ .

$$\operatorname{Log} Z = \ln R + i\Theta \quad (R > 0, -\pi < \Theta < \pi),$$

می‌بینیم که وقتی نقطه  $Z = R \operatorname{exp}(i\Theta)$  در امتداد پرتو  $\Theta = \Theta_0$  از مبدأ به طرف خارج برود، تصویر آن نقطه‌ای می‌شود که مختصات قائم آن در صفحه  $w$

عبارت‌اند از  $(\ln R, \Theta)$ . این تصویر بهوضوح در امتداد تمام خط افقی  $v = \Theta$  به سمت راست حرکت می‌کند. چون وقتی که انتخاب  $\Theta$  بین  $0 < \Theta < \pi$  تغییر کند، این خطوط نوار  $\pi < v < 0$  را پر می‌کنند، نگاشت نیم‌صفحه  $Y >$  به روی این نوار در واقع یک‌به‌یک است.

این مطلب نشان می‌دهد که ترکیب (۹) مربوط به نگاشتهای (۱۰) نیم‌صفحه  $y > 0$  را بر روی نوار  $\pi < v < 0$  می‌نگارد. نقاط مرزی متناظر در شکل ۱۹ پیوست ۲ نشان داده شده‌اند.

### تمرینها

۱. مثال ۱ بخش ۸۸ را یادآوری می‌کنیم که تبدیل

$$w = \frac{i - z}{i + z}$$

نیم‌صفحه  $Im z > 0$  را به روی قرص  $|w| < 1$  و مرز نیم‌صفحه را به روی مرز قرص می‌نگارد. نشان دهید که نقطه  $x = z$  به روی نقطه

$$w = \frac{1 - x^2}{1 + x^2} + i \frac{2x}{1 + x^2},$$

نگاشته می‌شود و سپس درستی نگاشت نشان داده شده در شکل ۱۳ پیوست ۲ را بدین صورت تحقیق کنید که نشان دهید قطعه خط‌های محور  $x$ ‌ها به نحوی که نمایش داده شده نگاشته می‌شوند. ۲. درستی نگاشت نشان داده شده در شکل ۱۲ پیوست ۲ را که در آن

$$w = \frac{z - 1}{z + 1}$$

تحقیق کنید.

راهنمایی: تبدیل مفروض را به صورت ترکیبی از نگاشتهای زیر بنویسید

$$Z = iz, \quad W = \frac{i - Z}{i + Z}, \quad w = -W.$$

سپس به نگاشتی که در تمرین ۱ بررسی شد استناد کنید.

۳. (الف) با پیدا کردن وارون تبدیل

$$w = \frac{i - z}{i + z}$$

و استفاده از شکل ۱۳ پیوست ۲ که در تمرین ۱ بررسی شد، نشان دهید که تبدیل

$$w = i \frac{1-z}{1+z}$$

قرص  $1 \leq |z| \leq R$  را به روی نیم صفحه بالایی  $\text{Im } w \geq 0$  می‌نگارد.

(ب) نشان دهید که تبدیل خطی کسری

$$w = \frac{z-2}{z}$$

را می‌توان چنین نوشت

$$Z = z - 1, \quad W = i \frac{1-Z}{1+Z}, \quad w = iW.$$

سپس به کمک نتیجه قسمت (الف) تحقیق کنید که این تبدیل قرص  $1 \leq |z| - 1$  را به روی نیم صفحه سمت چپ  $\text{Re } w \leq 0$  می‌نگارد.

۴. تبدیل (۶) بخش ۸۸ نقطه  $\infty = z$  را به روی نقطه  $w = \exp(i\alpha)$  می‌نگارد، که بر مرز قرص  $1 \leq |w| \leq R$  واقع است. نشان دهید که اگر  $2\pi < \alpha < 0$  و نقاط  $z = 1$  و  $z = 0$ ، به ترتیب، به روی نقاط  $w = 1$  و  $w = \exp(i\alpha/2)$  نگاشته شوند، آنگاه تبدیل را می‌توان چنین نوشت

$$w = e^{i\alpha} \frac{z + \exp(-i\alpha/2)}{z + \exp(i\alpha/2)}.$$

۵. توجه کنید که وقتی  $\alpha = \pi/2$  تبدیل تمرین ۴ چنین می‌شود

$$w = \frac{iz + \exp(i\pi/4)}{z + \exp(i\pi/4)}.$$

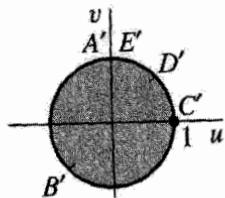
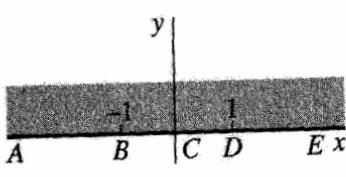
تحقیق کنید که این حالت خاص، نقاط روی محور  $x$  را به نحوی می‌نگارد که در شکل ۱۱۰ نشان داده شده است.

۶. نشان دهید که وقتی  $0 < \text{Im } z \leq R$ ، تبدیل (۶) بخش ۸۸ نیم صفحه پایینی  $\text{Im } z \leq 0$  را به روی قرص واحد  $1 \leq |w| \leq R$  می‌نگارد.

۷. رابطه  $w = \log(z-1)$  را می‌توان چنین نوشت

$$Z = z - 1, \quad w = \log Z.$$

شاخصه‌یی از  $Z$  را پیدا کنید به طوری که صفحه  $z$  بریده شده که مشکل از همه نقاط بجز نقاط روی نیم خط  $1 \geq x \geq 0$  از محور حقیقی است، به وسیله  $w = \log(z-1) = \log(z-v)$  به روی نوار  $v < v < 2\pi$  در صفحه  $w$  نگاشته شود.



شکل ۱۱۰

$$w = \frac{iz + \exp(i\pi/4)}{z + \exp(i\pi/4)}.$$

۱۱۰. تبدیل  $w = \sin z$ 

چون (بخش ۳۳)

$$\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y,$$

تبدیل  $z$  را می‌توان چنین نوشت

$$u = \sin x \cosh y, \quad v = \cos x \sinh y. \quad (1)$$

یکی از روشهایی که اغلب برای یافتن تصاویر نواحی تحت این تبدیل مفید است، بررسی تصاویر خطوط قائم  $x = c_1 < \pi/2 < c_1 < \pi$  است. اگر  $x = c_1$  روی خط  $x = c_1$  به نقاط روی منحنی

$$u = \sin c_1 \cosh y, \quad v = \cos c_1 \sinh y \quad (-\infty < y < \infty) \quad (2)$$

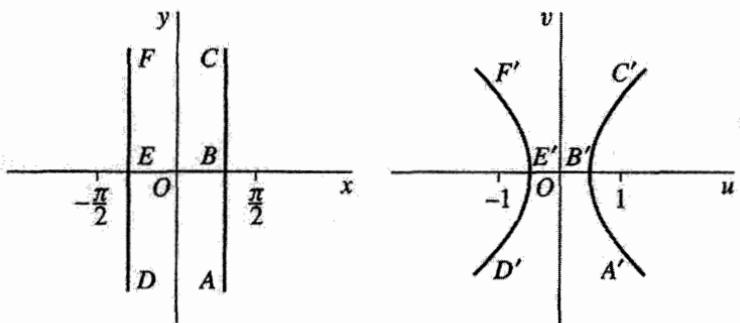
نگاشته می‌شوند که شاخه سمت راست هذلولی

$$\frac{u^2}{\sin^2 c_1} - \frac{v^2}{\cos^2 c_1} = 1 \quad (3)$$

با کانونهای واقع در نقاط زیر است

$$w = \pm \sqrt{\sin^2 c_1 + \cos^2 c_1} = \pm 1.$$

دومین رابطه از روابط (۲) نشان می‌دهد که وقتی نقطه  $(c_1, y)$  روی آن خط به طرف بالا حرکت می‌کند، تصویرش روی این شاخه هذلولی به طرف بالا حرکت می‌کند. چنین خطی و



شکل ۱۱۱

$$w = \sin z$$

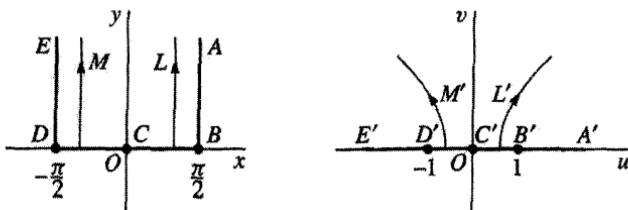
تصویرش در شکل ۱۱۱ نشان داده شده‌اند. توجه کنید که، به خصوص، نگاشتی یک‌به‌یک از نیمة بالایی ( $y > 0$ ) این خط به روی نیمة بالایی ( $v > 0$ ) این شاخه هذلولی موجود است. اگر  $0 < c_1 < x = -\pi/2$ ، خط  $y = c_1$  به روی شاخه سمت چپ همان هذلولی نگاشته می‌شود. مثل قبل، نقاط متناظر در شکل ۱۱۱ نشان داده شده‌اند.

خط  $x = 0$ ، یا محور  $y$ ، را باید جداگانه در نظر گرفت. بنابر روابط (۱) تصویر هر نقطه  $(y, 0)$  عبارت است از  $(\sinh y, 0)$ . بنابراین محور  $y$  به روی یک‌به‌یک به روی محور  $v$  نگاشته می‌شود، محور  $u$  مثبت با محور  $v$  مثبت متناظر است.

حال نحوه استفاده از این ملاحظات را در یافتن تصاویر برخی نواحی تشریح می‌کنیم.  
مثال ۱. در اینجا نشان می‌دهیم که تبدیل  $w = \sin z$  نگاشت یک‌به‌یکی از نوار نیمه نامتناهی

$$\pi/2 \leq x \leq \pi/2, 0 \leq y \leq \pi$$

برای انجام این کار، ابتدا نشان می‌دهیم که مرز این نوار، همان طور که در شکل ۱۱۲ نشان داده شده است، به روی یک‌به‌یک به روی محور حقیقی در صفحه  $w$  نگاشته می‌شود. تصویر پاره خط  $BA$  بدین روش به دست می‌آید که در روابط (۱) قرار می‌دهیم  $x = \pi/2, y = 0$  و  $x = \pi/2, y = \pi$  را مقید می‌کنیم که نامنفی باشد. چون وقتی  $x = \pi/2$  داریم  $u = \cosh y$  و  $v = \sinh y$ ، نقطه نوعی  $(\cosh y, \sinh y)$  را روی  $BA$  به روی نقطه  $(\cosh y, 0)$  در صفحه  $w$  نگاشته می‌شود و وقتی  $(\pi/2, y)$  از  $B$  به طرف بالا حرکت کند آن تصویر باید در امتداد محور  $u$  از  $B'$  به طرف راست حرکت کند. نقطه  $(x, 0)$  روی پاره خط افقی  $DB$  دارای تصویر  $(\sin x, 0)$  است که وقتی  $x$  از  $-\pi/2$  تا  $\pi/2$  افزایش یابد یا وقتی  $x$  از  $(0, 0)$  برود این تصویر از  $D'$  به طرف  $B'$  به طرف



شکل ۱۱۲

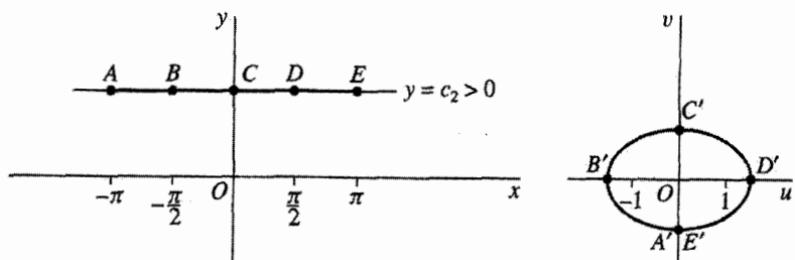
$$w = \sin z$$

راست حرکت می‌کند. بالاخره وقتی نقطه  $(-\pi/2, y)$  روی پاره خط  $DE$  از  $D$  به طرف بالا می‌رود تصویر آن  $(-\cosh y, \sin y)$  از  $D'$  به طرف چپ حرکت می‌کند.

حال هر نقطه در درون نوار  $\pi/2 < x < -\pi/2$  به  $y > 0$  روی یکی از نیم خط‌های قائم  $x = c_1$  می‌رود. به این نکته که تصاویر این نیم خط‌ها متمایزند و همه نیم صفحه  $v > 0$  را تشکیل می‌دهند مهم است. به عبارت دقیق‌تر اگر تصویر کنیم که  $L$  نیمة بالایی خط  $x = c_1 < \pi/2$  به سمت چپ به طرف محور  $v$  مثبت حرکت می‌کند، شاخه سمت راست هذلولی که شامل  $L'$  است بازتر می‌شود و رأس آن  $(\sin c_1, 0)$  به مبدأ  $w = 0$  میل می‌کند. بنابراین،  $L'$  در حد، محور  $v$  مثبت می‌شود که در پاراگراف قبل از مثال دیدیم تصویر محور  $u$  مثبت است. از طرف دیگر در صورتی که  $L$  به قطعه  $BA$  مرز نوار میل کند، شاخه هذلولی حول قطعه  $B'A'$  از محور  $u$  بسته می‌شود و رأس آن  $(\sin c_1, 0)$  به نقطه  $1 = w$  میل می‌کند. در مورد نیم خط  $M$  و تصویرش  $M'$  در شکل ۱۱۲ می‌توان عبارات مشابهی بیان کرد. می‌توان نتیجه گرفت که تصویر هر نقطه در درون نوار نقطه‌ای واقع در نیم صفحه بالایی  $v > 0$  است و به علاوه هر نقطه در نیم صفحه بالایی تصویر درست یک نقطه در درون نوار است.

بدین ترتیب اثبات اینکه تبدیل  $w = \sin z$  نگاشتی یک به یک از نوار  $\pi/2 \leq x \leq -\pi/2$  به  $v \geq 0$  روی نیم صفحه  $v \geq 0$  است کامل می‌شود. نتیجه نهایی در شکل ۹ پیوست ۲ نشان داده شده است. همان‌طور که در شکل ۱۰ پیوست ۲ نشان داده شده است، نیمة سمت راست نوار به روی ربع اول صفحه  $w$  نگاشته می‌شود.

روش مناسب دیگری برای یافتن تصاویر برخی نواحی وقتی  $w = \sin z$  است که تصاویر پاره خط‌های افقی  $y = c_2$  ( $-\pi \leq x \leq \pi$ ) را در نظر بگیریم، که در آن  $0 < c_2$ . بنابر روابط



شکل ۱۱۳

$$w = \sin z$$

(۱) تصویر چنین پاره خطی عبارت است از منحنی با نمایش پارامتری

$$u = \sin x \cosh c_2, \quad v = \cos x \sinh c_2 \quad (-\pi \leq x \leq \pi). \quad (4)$$

به سادگی ملاحظه می شود که این منحنی عبارت است از بیضی

$$\frac{u^2}{\cosh^2 c_2} + \frac{v^2}{\sinh^2 c_2} = 1 \quad (5)$$

که کانونهای آن در نقاط زیر واقع اند

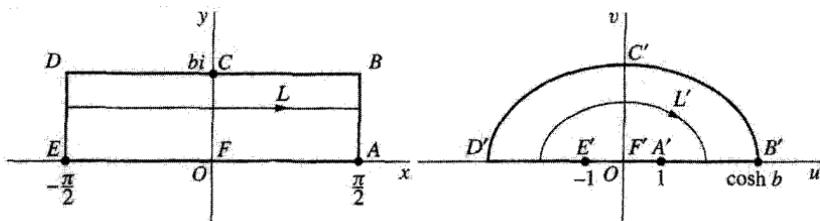
$$w = \pm \sqrt{\cosh^2 c_2 - \sinh^2 c_2} = \pm 1.$$

وقتی نقطه  $(x, c_2)$  در شکل ۱۱۳ از نقطه  $A$  در جهت راست به نقطه  $E$  می رود تصویرش مداری پیرامون بیضی در جهت حرکت عقربه های ساعت می سازد. توجه کنید که وقتی برای عدد مثبت  $c_2$  مقادیر کوچکتر گرفته شود، بیضی کوچکتر می شود اما همان کانونهای  $(\pm 1, 0)$  باقی میمانند. در حالت حدی  $c_2 = 0$ ، روابط (۴) چنین می شوند

$$u = \sin x, \quad v = 0 \quad (-\pi \leq x \leq \pi);$$

و در می بابیم که بازه  $\pi \leq x \leq -\pi$  - از محور  $x$  ها به روی بازه  $1 \leq u \leq -1$  - از محور  $v$  ها نگاشته می شود. با وجود این، نگاشت یک به یک نیست در حالی که وقتی  $c_2 > 0$ ، نگاشت یک به یک است. مثال زیر مبتنی بر این ملاحظات است.

مثال ۲. ناحیه مستطیلی  $b \leq x \leq \pi/2, -\pi/2 \leq y \leq b$  با  $w = \sin z$  به صورتی یک به یک به روی ناحیه نیم بیضی شکل نشان داده شده در شکل ۱۱۴ نگاشته می شود، که در آن



شکل ۱۱۴

$$w = \sin z$$

نقاط مرزی متناظر نیز نشان داده شده‌اند. زیرا اگر  $L$  پاره خط  $y = c_2$  باشد که در آن  $b \leq c_2 < \infty$ ، تصویر آن  $L'$  نیمة بالایی بیضی (۵) است. وقتی  $c_2$  کاهش می‌یابد،  $L$  به طرف پایین محور  $x$  ها حرکت می‌کند. همچنین نیم بیضی  $L'$  نیز به طرف پایین حرکت کرده در حد، به پاره خط  $E'F'A'$ ، از  $w = -1$  تا  $w = 1$  تبدیل می‌شود. در واقع وقتی  $c_2 = 0$  روابط (۴) چنین می‌شوند

$$u = \sin x, \quad v = 0 \quad \left( -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \right);$$

و این بهوضوح نگاشتی یک‌به‌یک از پاره خط  $EFA$  به روی  $E'F'A'$  است. از آنجایی که هر نقطه در ناحیه نیم بیضی شکل صفحه  $w$  روی یک و تنها یکی از نیم بیضیها یا روی حالت حدی  $E'F'A'$  واقع است، آن نقطه، تصویر دقیقاً یک نقطه از ناحیه مستطیلی در صفحه  $z$  است. حال درستی نگاشت مطلوب، که در شکل ۱۱ پیوست ۲ نیز نشان داده شده، تأیید می‌شود.

اگر نگاشتها به وسیله تابع سینوس معلوم باشند، نگاشت به وسیله تابع گوناگون دیگری که ارتباط نزدیکی با تابع سینوس دارد به سادگی به دست می‌آید.

### مثال ۳. تنها با یادآوری اتحاد (بخش ۳۳)

$$\cos z = \sin \left( z + \frac{\pi}{2} \right)$$

می‌بینیم که تبدیل  $z = \cos w$  را می‌توان متواالیاً به صورت

$$Z = z + \frac{\pi}{2}, \quad w = \sin Z$$

نوشت. پس این تبدیل همان تبدیل سینوس است که مقدم بر آن یک انتقال به سمت راست به اندازه  $\pi/2$  صورت گرفته است.

مثال ۴. بنابر بخش ۳۴، تبدیل  $w = \sinh z = w$  را می‌توان چنین نوشت (یا  $w = -i \sin(iz)$ )

$$Z = iz, \quad W = \sin Z, \quad w = -iW.$$

از این‌رو، این ترکیبی است از تبدیل سینوس با دورانهایی به زوایای قائم. همچنین تبدیل  $w = \cosh z = \cos(iz)$  را به روشی یک‌به‌یک به اساساً یک تبدیل کسینوس است زیرا (یا  $\cosh z = \cos(iz)$ ).

### تمرینها

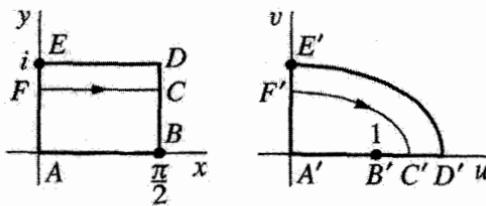
۱. نشان دهید که تبدیل  $w = \sin z$  همان‌طور که در شکل ۱۱۲ بخش ۸۹ نشان داده شده است نیمة بالایی ( $0 < c_1 < \pi/2$ ) خط قائم  $x = c_1$  را به روشی یک‌به‌یک به روی نیمة بالایی ( $0 < v < \pi/2$ ) شاخه سمت چپ هذلولی (۳) آن بخش می‌نگارد.

۲. نشان دهید که در تبدیل  $w = \sin z$  خط  $x = c_1$  ( $\pi/2 < c_1 < \pi$ ) به روی شاخه سمت راست هذلولی (۳) بخش ۸۹ نگاشته می‌شود. توجه کنید که نگاشت یک‌به‌یک است و نیمه‌های بالایی و پایینی خط، به ترتیب، به روی نیمه پایینی و بالایی شاخه نگاشته می‌شوند.

۳. در مثال ۱ بخش ۸۹ با استفاده از نیم خطهای قائم نشان دادیم که تبدیل  $w = \sin z$  یک‌به‌یک از ناحیه باز  $-\pi/2 < x < \pi/2$  به روی نیم صفحه  $v > 0$  است. این مطلب را با استفاده از پاره‌خطهای افقی  $y = c_2$  ( $-\pi/2 < x < \pi/2$ ) تحقیق کنید.

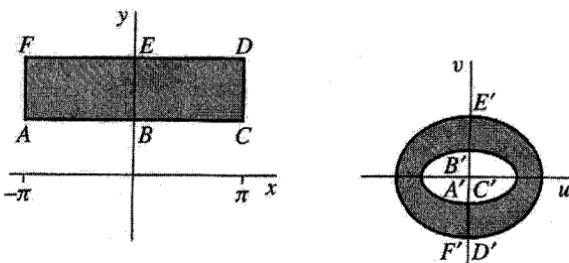
۴. (الف) نشان دهید که در تبدیل  $w = \sin z$  تصاویر پاره‌خطهایی که مرز ناحیه مستطیلی  $0 \leq x \leq \pi/2$  و  $0 \leq y \leq 1$  را تشکیل می‌دهند عبارت اند از قوس  $D'E'$  و پاره‌خطهایی که در شکل ۱۱۵ نشان داده شده‌اند. قوس  $D'E'$  ربعی از بیضی زیر است

$$\frac{u^2}{\cosh^2 v} + \frac{v^2}{\sinh^2 v} = 1.$$



شکل ۱۱۵

$$w = \sin z$$



شکل ۱۱۶

$$w = \sin z$$

(ب) با استفاده از تصاویر پاره خطهای افقی، نگاشت نشان داده شده در شکل ۱۱۵ را کامل کرده ثابت کنید که تبدیل  $w = \sin z$  تناظری یک به یک بین نقاط داخلی نواحی  $ABDE$  و  $A'B'D'E'$  برقرار می‌کند.

۵. تحقیق کنید همان طور که در شکل ۱۱۶ نشان داده شده، درون ناحیه مستطیلی  $-\pi \leq x \leq \pi, -b \leq y \leq a$  که در بالای محور  $x$  ها واقع است با  $w = \sin z$  به روی درون یک حلقة بیضی شکل نگاشته می‌شود که بریدگی در امتداد قطعه  $-\sinh b \leq v \leq \sinh a$  از محور حقیقی منفی دارد. توجه کنید که نگاشت درون ناحیه مستطیلی، یک به یک است اما نگاشت مرزی چنین نیست.

۶. (الف) نشان دهید که رابطه  $w = \cosh z$  را می‌توان چنین نوشت

$$Z = iz + \frac{\pi}{2}, \quad w = \sin Z.$$

(ب) با استفاده از نتیجه قسمت (الف) و نگاشتی به وسیله  $z = \sin w$  که در شکل ۱۰ پیوست ۲ نشان داده شده است، تحقیق کنید که تبدیل  $w = \cosh z$  به روی نامتناهی  $x \geq 0, 0 \leq y \leq \pi/2$  را به صفحه  $w$  می‌نگارد. قسمتهای متناظر از مرزهای دو ناحیه را نمایش دهید.

۷. ملاحظه کنید که تبدیل  $w = \cosh z$  را می‌توان به صورت ترکیبی از نگاشتهای زیر نوشت

$$Z = e^z, \quad W = Z + \frac{1}{Z}, \quad w = \frac{1}{2}W.$$

سپس با استفاده از شکلهای ۷ و ۱۶ پیوست ۲ نشان دهید که وقتی  $w = \cosh z$  نوار نامتناهی  $0 \leq x, \pi \leq y \leq \pi$  را به صفحه  $z$  روی نیمه پایینی  $0 \leq v$  صفحه  $w$  نگاشته می‌شود. قسمتهای متناظر مرزها را نمایش دهید.

۸. (الف) تحقیق کنید که رابطه  $w = \sin z$  را می‌توان به شکل زیر نوشت

$$Z = i \left( z + \frac{\pi}{2} \right), \quad W = \cosh Z, \quad w = -W.$$

(ب) با استفاده از نتیجه قسمت (الف) این مسئله و نتیجه تمرین ۷ نشان دهید که تبدیل  $w = \sin z$  نوار نیمه نامتناهی  $y \geq 0$  را، همان‌طور که در شکل ۹ پیوست ۲ نشان داده شده است، به روی نیم صفحهٔ  $v \geq 0$  می‌نگارد. (درستی این نگاشت به روش دیگری در مثال ۱، بخش ۸۹، تحقیق شده است).

## ۹۰. نگاشت به وسیلهٔ $z^2$ و شاخه‌های $z^{1/2}$

در فصل ۲ (بخش ۱۲) بعضی از نگاشتهای نسبتاً ساده تحت تبدیل  $z^2 = w$  را در نظر گرفتیم و این تبدیل را به شکل زیر نوشتیم

$$u = x^2 - y^2, \quad v = 2xy \quad (1)$$

حال به مثال پیشرفته‌تری می‌پردازیم و سپس نگاشتهای وابسته به  $z^{1/2} = w$  را بررسی می‌کنیم که در آن شاخه‌های مشخصی از این تابع جذر در نظر گرفته شده است.

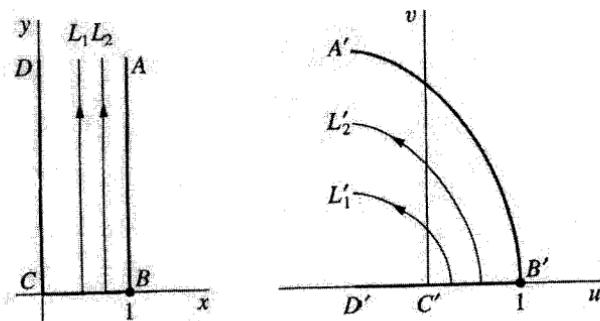
مثال ۱. با استفاده از روابط (۱) نشان دهید همان‌طور که در شکل ۱۱۷ نشان داده شده است تصویر نوار قائم  $1 \leq x \leq 0, 0 \leq y \leq \infty$  ناحیهٔ بستهٔ نیم سهمی شکل است. اگر  $x_1 < 0$  وقتی  $y$  از  $= 0$  افزایش می‌یابد، نقطه  $(x_1, y)$  در امتداد نیم خط قائمی که در شکل ۱۱۷ به  $L_1$  نمایش داده شده بالا می‌رود. بنابر روابط (۱) تصویر آن در صفحه  $uv$  دارای نمایش پارامتری زیر است

$$u = x_1^2 - y^2, \quad v = 2x_1y \quad (0 \leq y < \infty). \quad (2)$$

حال اگر  $y$  را از معادله دوم به دست آورده و در معادله اول قرار دهیم، می‌بینیم که نقاط تصویر  $(u, v)$  باید روی سهمی

$$v^2 = -4x_1^2(u - x_1^2), \quad (3)$$

به رأس  $(x_1^2, 0)$  و کانون مبدأ باشد. چون بنابر دومین رابطه از روابط (۲)،  $v$  با  $y$  از  $= 0$  افزایش می‌یابد می‌بینیم که وقتی نقطه  $(x_1, y)$  در امتداد  $L_1$  با شروع از محور  $x$  به طرف بالا حرکت می‌کند، تصویرش در امتداد  $L'_1$  نیمة بالایی این سهمی با شروع از محور  $u$  به طرف بالا



شکل ۱۱۷

$$w = z^2$$

حرکت می‌کند. به علاوه اگر عدد  $x_2$  بزرگتر از  $x_1$  و کوچکتر از ۱ گرفته شود، نیم خط متضاظر آن دارای تصویر  $L'_2$  است که همان‌طور که در شکل ۱۱۷ نشان داده شده نیم‌سه‌می در سمت راست  $L'_1$  است. توجه می‌کنیم که در واقع تصویر نیم خط  $BA$  در آن شکل عبارت است از نیمه بالا‌ی سه‌می  $(1 - u)^{-\frac{1}{2}}$  که با  $B'A'$  نمایش داده شده است.

تصویر نیم خط  $CD$  به این صورت به دست می‌آید که بنابر معادلات (۱) نقطه  $(y, 0)$ ، که در آن  $y \geq 0$  روی  $CD$  به نقطه  $(-u^{\frac{1}{2}}, 0)$  در صفحه  $uv$  نگاشته می‌شود. بنابراین وقتی نقطه‌ای از مبدأ در امتداد  $CD$  بالا رود، تصویر آن از مبدأ در امتداد محور  $u$  به سمت چپ حرکت می‌کند. پس بهوضوح اگر نیم خط‌های قائم در صفحه  $xy$  به سمت چپ حرکت کنند، نیم‌سه‌می‌هایی که تصاویر آنها در صفحه  $uv$  هستند به نیم خط  $C'D'$  میل می‌کنند.

حال بدیهی است که تصاویر همه نیم خط‌های بین  $BA$  و  $CD$  به انصمام خود آنها ناحیه بسته نیم‌سه‌می محدود به  $A'B'C'D'$  را پر می‌کنند. همچنین هر نقطه این ناحیه تصویر فقط یک نقطه در نوار بسته محدود به  $ABCD$  است. بنابراین نتیجه می‌گیریم که ناحیه نیم‌سه‌می شکل، تصویر این نوار است و تناظر یک‌به‌یکی بین نقاط این دو ناحیه بسته وجود دارد. (با شکل ۳ بیوست ۲ مقایسه کنید، که در آن نوار با عرض دلخواه گرفته شده است.)

برای نگاشت به وسیله شاخه‌های  $z^{1/2}$ ، با توجه به بخش ۸ یادآوری می‌کنیم که اگر  $z \neq 0$  مقادیر  $z^{1/2}$  ریشه‌های دوم  $z$  هستند. با استناد به آن بخش اگر از مختصات قطبی استفاده شود و

$$z = r \exp(i\Theta) \quad (r > 0, -\pi < \Theta \leq \pi),$$

$$z^{1/2} = \sqrt{r} \exp \frac{i(\Theta + 2k\pi)}{2} \quad (k = 0, 1), \quad (4)$$

ریشه اصلی وقتی به دست می‌آید که  $\theta = k\pi$ . در بخش ۳۱ دیدیم که  $z^{1/2}$  را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$z^{1/2} = \exp \left( \frac{1}{2} \log z \right) \quad (z \neq 0). \quad (5)$$

پس  $F_0(z)$  شاخه اصلی تابع دومقداری  $z^{1/2}$ , با گرفتن شاخه اصلی  $\log z$  و نوشتن (بخش ۳۲ را ببینید)

$$F_0(z) = \exp \left( \frac{1}{2} \text{Log } z \right) \quad (|z| > 0, -\pi < \text{Arg } z < \pi)$$

به دست می‌آید. چون اگر  $z = r \exp(i\Theta)$

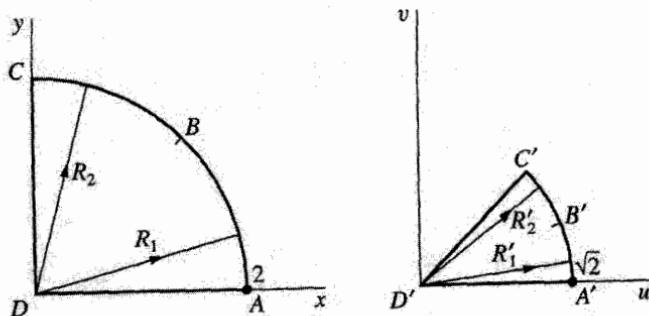
$$\frac{1}{2} \text{Log } z = \frac{1}{2} (\ln r + i\Theta) = \ln \sqrt{r} + i\frac{\Theta}{2}$$

در نتیجه

$$F_0(z) = \sqrt{r} \exp \frac{i\Theta}{2} \quad (r > 0, -\pi < \Theta < \pi). \quad (6)$$

البته سمت راست این رابطه همان سمت راست رابطه (۴) با شرط‌های  $k = 0$  و  $-\pi < \Theta < \pi$  است. مبدأ و پرتو  $\pi$  =  $\Theta$  تشكیل بریدگی شاخه‌یی برای  $F_0$  می‌دهند و مبدأ نقطه شاخه‌یی است. تصاویر منحنيها و نواحی تحت تبدیل  $w = F_0(z)$  را می‌توان با نوشتن  $w = \rho \exp(i\phi)$  به دست آورد که در آن  $\sqrt{r} = \rho$  و  $\Theta/2 = \phi$ . به‌وضوح این تبدیل، آوندها را نصف می‌کند، و در می‌یابیم که اگر  $z = 0$ , آنگاه  $w = 0$ .

مثال ۲. به‌آسانی می‌توان تحقیق کرد که  $w = F_0(z) = w$  نگاشتی یک‌به‌یک از ربع قرص  $2 \leq \rho \leq \sqrt{2}, 0^\circ \leq \theta \leq \pi/2$  به روى قطاع  $0^\circ \leq \phi \leq \pi/4$  در صفحه  $z$  است (شکل ۱۱۸). برای انجام این کار، ملاحظه می‌کنیم که وقتی نقطه در صفحه  $w$  است ( $z = r \exp(i\theta)$ ) در امتداد شعاع  $R_1$  به طول  $2$  و زاویه شیب  $\theta_1$  از مبدأ به طرف خارج حرکت کند، تصویر آن  $w = \sqrt{r} \exp(i\theta_1/2)$  در امتداد شعاع  $R'_1$  به طول  $\sqrt{2}$  و زاویه شیب  $\theta_1/2$  از مبدأ به طرف خارج حرکت می‌کند. شکل ۱۱۸ را ببینید، که در آن، شعاع  $R_2$  و تصویر آن  $R'_2$  نیز نشان داده شده‌اند. حال از روی این شکل واضح است که اگر این



شکل ۱۱۸

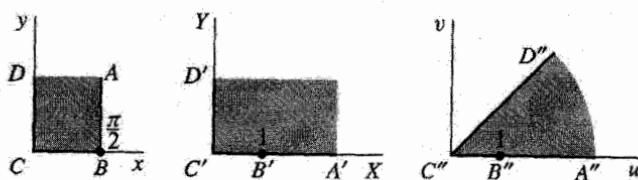
$$w = F_{\circ}(z)$$

ناحیه صفحه  $z$  به وسیله شعاعی، با شروع از  $DA$  و ختم در  $DC$  روفته شود، آن‌گاه ناحیه صفحه  $w$  به وسیله شعاع متناظر، با شروع از  $D'A'$  و ختم در  $D'C'$  روفته می‌شود. بدین ترتیب متناظری یک‌به‌یک بین نقاط دو ناحیه برقرار می‌شود.

**مثال ۳.** تبدیل  $w = F_{\circ}(\sin z)$  را می‌توان چنین نوشت

$$Z = \sin z, \quad w = F_{\circ}(Z) \quad (|Z| > 0, -\pi < \operatorname{Arg} Z < \pi).$$

همان طور که در آخر مثال ۱، بخش ۸۹، توضیح دادیم، تبدیل اول نوار نیمه نامتناهی  $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2, 0 \leq y \leq \infty$  را به روی ربع اول  $X \geq 0, Y \geq 0$  در صفحه  $Z$  می‌نگارد. تبدیل دوم، با در نظر داشتن اینکه  $F_{\circ}(0) = 0$ ، این ربع را به روی هشت‌یک صفحه  $w$  می‌نگارد. این تبدیلهای متوالی در شکل ۱۱۹ تشریح شده‌اند، که در آن نقاط متناظر نشان داده شده‌اند.



شکل ۱۱۹

$$w = F_{\circ}(\sin z)$$

وقتی  $\pi < \Theta < -\pi$  و از شاخهٔ

$$\log z = \ln r + i(\Theta + 2\pi)$$

تابع لگاریتمی استفاده شود، رابطهٔ (۵)، شاخهٔ

$$F_1(z) = \sqrt{r} \exp \frac{i(\Theta + 2\pi)}{2} \quad (r > 0, -\pi < \Theta < \pi) \quad (7)$$

ازتابع  $z^{1/2}$  رابه مامی دهد، که متناظر با انتخاب  $k = 1$  در رابطهٔ (۴) است. چون  $\exp(i\pi) = -1$  در نتیجه  $F_1(z) = -F_0(z)$ . بنابراین مقادیر  $(z)^{1/2} \pm F_0(z)$  همه مقادیر  $z^{1/2}$  را در همه نقاط حوزهٔ  $r > 0, -\pi < \Theta < \pi$  نمایش می‌دهند. اگر با استفاده از عبارت (۶) حوزهٔ تعریف  $F_0$  را توسعه دهیم تا شامل پرتو  $\pi = \Theta$  شود و اگر بنویسیم  $F_0(z) = \pm F_0(z)$  آنگاه مقادیر  $z^{1/2}$  در همه صفحه  $z$  است.

با استفاده از سایر شاخه‌های  $z$  در عبارت (۵) شاخه‌های دیگری از  $z^{1/2}$  به دست می‌آیند.

شاخه‌یی که در آن پرتو  $\alpha = \theta$  بریدگی شاخه است با رابطهٔ زیر تعریف می‌شود

$$f_\alpha(z) = \sqrt{r} \exp \frac{i\theta}{2} \quad (r > 0, \alpha < \theta < \alpha + 2\pi). \quad (8)$$

ملحوظه کنید که وقتی  $\alpha = -\pi$  شاخهٔ  $F_1(z)$  را داریم و وقتی  $\alpha = \pi$  شاخهٔ  $F_1(z)$  را داریم. درست مثل حالت  $F_0$ ، حوزهٔ تعریف  $f_\alpha$  را می‌توان به همه صفحهٔ مختلط توسعه داد بدین صورت که  $f_\alpha$  را در نقاط ناصفر روی بریدگی شاخه با استفاده از عبارت (۸)، تعریف می‌کنیم و می‌نویسیم  $f_\alpha(z) = f_\alpha(0)$ . ولی چنین توسعه‌هایی هیچ وقت در همه صفحه پیوسته نیستند.

بالاخره فرض کنید  $n$  عدد صحیح دلخواهی باشد، که در آن  $n \geq 2$ . اگر  $z \neq 0$ ، مقادیر  $z^{1/n}$  ریشه‌های  $n$  اند و بنابر بخش ۳۱ تابع چندمقداری  $z^{1/n}$  را می‌توان چنین نوشت

$$z^{1/n} = \exp \left( \frac{1}{n} \log z \right) = \sqrt[n]{r} \exp \frac{i(\Theta + 2k\pi)}{n} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1) \quad (9)$$

که در آن  $r = |z|$  و  $\Theta = \arg z$  هم‌اکنون بررسی شده است. در حالت کلی هر یک از  $n$  تابع

$$F_k(z) = \sqrt[n]{r} \exp \frac{i(\Theta + 2k\pi)}{n} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1) \quad (10)$$

یک شاخه  $z^{1/n}$  است که در حوزه  $\pi < \theta < \pi - \pi/n$  تعریف شده است. اگر  $w = re^{i\phi}$ ، تبدیل  $w = F_k(z)$  نگاشتی یک به یک از آن حوزه به روی حوزه

$$\rho > 0, \quad \frac{(2k-1)\pi}{n} < \phi < \frac{(2k+1)\pi}{n}$$

است. این  $n$  شاخه  $z^{1/n}$  در هر نقطه  $z$  از حوزه  $\pi < \theta < \pi - \pi/n$ ، هر  $n$  ریشه متمایز  $z$  را به ما می‌دهند. وقتی  $k=0$  شاخه اصلی پیدا می‌شود و شاخه‌های بیشتری از نوع (۸) به آسانی ساخته می‌شوند.

### تمرینها

۱. با نشان دادن جهت‌های متناظر نشان دهید، که نگاشت  $z^2 = w$  خطوط  $y = c_2 > 0$  را به سهمیهای  $v^2 = 4c_2^2(u + c_2^2)$  که کانون همه آنها  $w = 0$  است تبدیل می‌کند. (با مثال ۱ بخش ۹۰ مقایسه کنید).

۲. با استفاده از نتیجه تمرین ۱ نشان دهید که تبدیل  $z^2 = w$  نگاشت یک به یکی از نوار  $a \leq y \leq b$  در بالای محور  $x$  را به روی ناحیه بسته محدود به سهمیهای زیر است

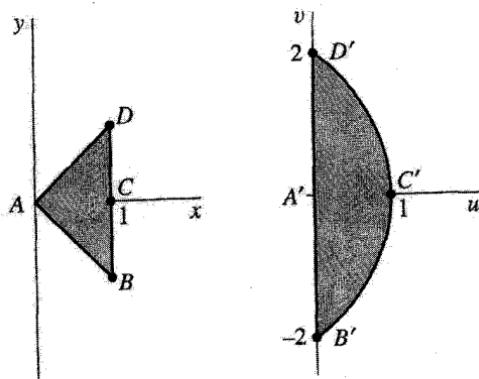
$$v^2 = 4a^2(u + a^2), \quad v^2 = 4b^2(u + b^2).$$

۳. نشان دهید که چگونه از بحث مثال ۱ بخش ۹۰ نتیجه می‌شود که تبدیل  $z^2 = w$  نوار قائم  $c \leq x \leq 0, 0 \leq y$  با عرض دلخواه را آن‌طور که در شکل ۳ پیوست ۲ نشان داده شده، به روی یک ناحیه نیم‌سهمی‌شکل بسته می‌نگارد.

۴. با مختصر تغییری در بحث مثال ۱ بخش ۹۰ نشان دهید که وقتی  $z^2 = w$ ، تصویر ناحیه مثلثی بسته حاصل از خطوط  $x = \pm y$  و  $x = 0$  ناحیه بسته سهمی‌شکل محدود از سمت چپ به قطعه  $v \leq -2$  از محور  $v$  و از سمت راست به قسمتی از سهمی  $(1-4)(u-4)^2 = 0$  است. تحقیق کنید که در شکل ۱۲۰ نقاط متناظر روی دو مرز درست نشان داده شده‌اند.

۵. با استناد به شکل ۱۰ پیوست ۲ نشان دهید که تبدیل  $z^2 = \sin^2(\pi/2 - x)$  نوار  $0 \leq y \leq \pi/2$  را به روی نیم صفحه  $v \geq 0$  می‌نگارد. قسمتهای متناظر از مرزها را نمایش دهید. راهنمایی: اولین پاراگراف مثال ۳ بخش ۱۲ را ببینید.

۶. با استفاده از شکل ۹ پیوست ۲ نشان دهید که تحت تبدیل  $(\sin z)^{1/4} = w$ ، که در آن شاخه اصلی توان کسری گرفته شده است، نوار نیمه نامتناهی  $-\pi/2 < x < \pi/2$  به روی



شکل ۱۲۰

$$w = z^2$$

قسمتی از ربع اول نگاشته می‌شود که بین خط  $v = u$  و محور  $u$  واقع است. قسمتهای متناظر مرزها را مشخص کنید.

۷. بنابر مثال ۲ بخش ۸۸، تبدیل خطی کسری

$$Z = \frac{z-1}{z+1}$$

محور  $x$  را به روی محور  $X$  و نیم صفحه‌های  $y > 0$  و  $y < 0$  را، به ترتیب، به روی نیم صفحه‌های  $Y > 0$  و  $Y < 0$  می‌نگارد. نشان دهید که به خصوص این تبدیل پاره خط  $1 \leq x \leq -1$  از محور  $x$  را به روی قطعه  $X \leq 0$  از محور  $X$  می‌نگارد. سپس نشان دهید که وقتی از شاخه اصلی ریشه دوم استفاده شود،تابع مركب

$$w = Z^{1/2} = \left( \frac{z-1}{z+1} \right)^{1/2}$$

صفحه  $z$ ، بجز پاره خط  $1 \leq x \leq -1$  از محور  $x$ ، را به روی نیم صفحه  $u > 0$  می‌نگارد.  
۸. تصویر حوزه  $\theta < r < \pi$  در صفحه  $z$  را تحت هر یک از تبدیلهای  $w = F_k(z)$  ( $k = 0, 1, 2, 3$ ) تعیین کنید، که در آن  $F_k(z)$  چهار شاخه  $z^{1/4}$  هستند که با رابطه  $(10)$  بخش  $90^\circ$ ، وقتی که  $n = 4$  تعریف شده‌اند. با استفاده از این چهار شاخه، ریشه‌های چهارم  $z$  را تعیین کنید.

## ۹۱. ریشه‌های دوم چندجمله‌یها

حال نگاشتهای را در نظر می‌گیریم که ترکیب چندجمله‌یها و ریشه‌های دوم  $z$  است.

مثال ۱. شاخه‌های تابع دومقداری  $(z - z_0)^{1/2}$  را می‌توان با توجه به اینکه ترکیبی از انتقال  $z = z - z_0$  با تابع دومقداری  $Z^{1/2}$  است به دست آورد. هر شاخه  $Z^{1/2}$  شاخه‌یی از  $(z - z_0)^{1/2}$  را به دست می‌دهد. اگر  $Z = Re^{i\theta}$ , شاخه‌های  $Z^{1/2}$  عبارت‌اند از

$$Z^{1/2} = \sqrt{R} \exp \frac{i\theta}{2} \quad (R > 0, \alpha < \theta < \alpha + 2\pi).$$

بنابراین، اگر بنویسیم

$$\theta = \arg(z - z_0) \quad \text{و} \quad \Theta = \operatorname{Arg}(z - z_0) \quad R = |z - z_0|$$

دو شاخه  $(z - z_0)^{1/2}$  عبارت‌اند از

$$G_+(z) = \sqrt{R} \exp \frac{i\Theta}{2} \quad (R > 0, -\pi < \Theta < \pi) \quad (1)$$

و

$$g_-(z) = \sqrt{R} \exp \frac{i\theta}{2} \quad (R > 0, 0 < \theta < 2\pi). \quad (2)$$

شاخه‌یی از  $Z^{1/2}$  که در نوشتمن  $G_+(z)$  به کار برده شده در هر نقطه از صفحه  $Z$ ، بجز مبدأ و نقاط روی نیم خط  $\operatorname{Arg} Z = \pi$  تعریف شده است. بنابراین، تبدیل  $w = G_+(z)$  نگاشتی یک‌به‌یک از حوزه

$$|z - z_0| > 0, \quad -\pi < \operatorname{Arg}(z - z_0) < \pi$$

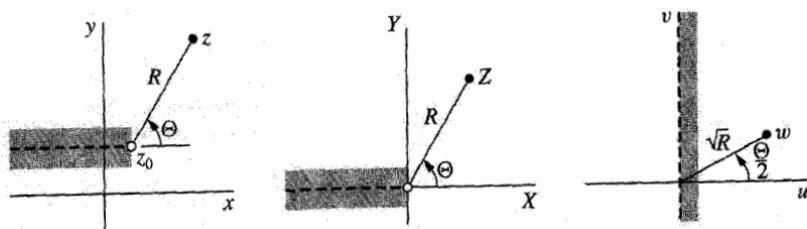
به روی نیمه راست صفحه  $w$ .  $\operatorname{Re} w > 0$ . است (شکل ۱۲۱). تبدیل  $w = g_-(z)$  حوزه

$$|z - z_0| > 0, \quad 0 < \arg(z - z_0) < 2\pi$$

را به روشنی یک‌به‌یک به روی نیم صفحه بالایی  $\operatorname{Im} w > 0$  نگارد.

مثال ۲. حال به عنوان مثالی آموزنده و تا حدی پیشرفته، تابع دومقداری  $(1 - z^2)^{1/2}$  را در نظر می‌گیریم. با استفاده از ویژگیهای ثابت شده تابع لگاریتمی، می‌توانیم بنویسیم

$$(z^2 - 1)^{1/2} = \exp \left[ \frac{1}{2} \log(z^2 - 1) \right] = \exp \left[ \frac{1}{2} \log(z - 1) + \frac{1}{2} \log(z + 1) \right]$$



شکل ۱۲۱

$$w = G_{\circ}(z)$$

یا

$$(z^2 - 1)^{1/2} = (z - 1)^{1/2}(z + 1)^{1/2} \quad (z \neq \pm 1). \quad (3)$$

بنابراین اگر  $f_1(z)$  شاخه‌یی از  $(z - 1)^{1/2}$  باشد که بر حوزه  $D_1$  تعریف شده و  $f_2(z)$  شاخه‌یی از  $(z + 1)^{1/2}$  باشد که بر حوزه  $D_2$  تعریف شده است، آنگاه حاصلضرب  $f(z) = f_1(z)f_2(z)$  شاخه‌یی از  $(1 - z^2)^{1/2}$  است که در همه نقاط واقع در هر دو حوزه  $D_1$  و  $D_2$  تعریف شده است.

برای به دست آوردن شاخه مشخصی از  $(1 - z^2)^{1/2}$ ، شاخه‌یی از  $(1 - z)^{1/2}$  و شاخه‌یی از  $(1 + z)^{1/2}$  را، که با رابطه (۲) داده شده‌اند به کار می‌بریم. اگر قرار دهیم

$$\theta_1 = \arg(z - 1) \quad \text{و} \quad r_1 = |z - 1|$$

آن شاخه از  $(1 - z)^{1/2}$  چنین است

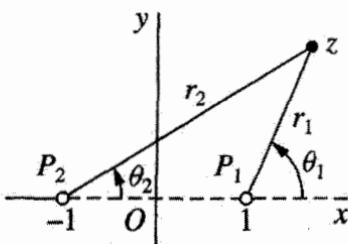
$$f_1(z) = \sqrt{r_1} \exp \frac{i\theta_1}{2} \quad (r_1 > 0, 0 < \theta_1 < 2\pi).$$

شاخه‌یی از  $(1 + z)^{1/2}$  که با رابطه (۲) تعریف می‌شود چنین است

$$f_2(z) = \sqrt{r_2} \exp \frac{i\theta_2}{2} \quad (r_2 > 0, 0 < \theta_2 < 2\pi)$$

که در آن

$$\theta_2 = \arg(z + 1) \quad \text{و} \quad r_2 = |z + 1|$$



شکل ۱۲۲

بنابراین حاصلضرب این دو شاخه، شاخه  $f$  از  $(1 - z^2)^{1/2}$  است که با رابطه زیر تعریف می‌شود

$$f(z) = \sqrt{r_1 r_2} \exp \frac{i(\theta_1 + \theta_2)}{2} \quad (4)$$

که در آن

$$r_k > 0, \quad 0^\circ < \theta_k < 2\pi \quad (k = 1, 2).$$

همان‌طور که در شکل ۱۲۲ نشان داده شده است، شاخه  $f$  همه جا در صفحه  $z$  بجز روی پرتو

$x$  محور  $x$  است، تعریف شده است.

شاخه  $f$  از  $(1 - z^2)^{1/2}$  را، که با رابطه (۴) داده شده است، می‌توان به تابع زیر توسعی داد

$$F(z) = \sqrt{r_1 r_2} \exp \frac{i(\theta_1 + \theta_2)}{2} \quad (5)$$

که در آن

$$r_1 + r_2 > 2 \quad 0^\circ \leq \theta_k < 2\pi \quad (k = 1, 2), \quad r_k > 0.$$

همان‌طور که حالا خواهیم دید، این تابع همه جا در حوزه تعریف‌شده، که همه صفحه  $z$  بجز پاره خط  $1 \leq x \leq -1$  است، تحلیلی است.

چون به‌ازای هر  $z$  در حوزه تعریف  $F$  بجز روی پرتو  $0^\circ < \theta_1 < 180^\circ$  داریم  $\theta_1 = 180^\circ$  لازم است نشان دهیم که  $F$  بر آن نیم خط تحلیلی است. برای انجام این کار، حاصلضرب شاخه‌های  $(1 - z^2)^{1/2}$  و  $(z + 1)^{1/2}$  را که با رابطه (۱) داده شده‌اند تشکیل می‌دهیم. یعنی تابع زیر را در نظر می‌گیریم

$$G(z) = \sqrt{r_1 r_2} \exp \frac{i(\theta_1 + \theta_2)}{2},$$

$$r_1 = |z - 1|, \quad r_2 = |z + 1|, \quad \Theta_1 = \operatorname{Arg}(z - 1), \quad \Theta_2 = \operatorname{Arg}(z + 1)$$

و

$$r_k > 0, \quad -\pi < \Theta_k < \pi \quad (k = 1, 2).$$

ملاحظه کنید که  $G$  در تمام صفحه  $z$  بجز بر نیم خط  $\Theta_1 = \pi, r_1 \geq 0$  تحلیلی است. حال وقتی نقطه  $z$  در بالا یا روی نیم خط  $r_1 > 0, \Theta_1 = 0$  واقع باشد،  $F(z) = G(z)$  زیرا در این صورت  $(k = 1, 2) \theta_k = \Theta_k + 2\pi$  واقع باشد  $\theta_k = \Theta_k + 2\pi$  در زیر آن نیم خط  $\exp(i\theta_k/2) = -\exp(i\Theta_k/2)$  و لذا

$$\exp \frac{i(\theta_1 + \theta_2)}{2} = \left( \exp \frac{i\theta_1}{2} \right) \left( \exp \frac{i\theta_2}{2} \right) = \exp \frac{i(\Theta_1 + \Theta_2)}{2}.$$

بنابراین مجدداً  $F(z) = G(z)$ . چون در حوزه‌ای شامل نیم خط  $r_1 > 0, \Theta_1 = 0$  داریم  $F(z) = G(z)$  در آن حوزه تحلیلی است پس  $F(z)$  در آن حوزه تحلیلی است. بنابراین  $F(z)$  همه جا بجز بر پاره خط  $P_2P_1$  در شکل ۱۲۲ تحلیلی است.

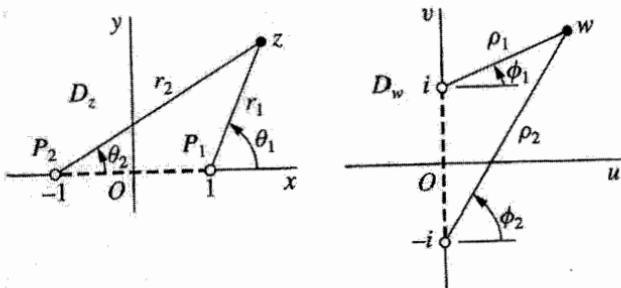
تابع  $F$  را که با رابطه (۵) تعریف شده است نمی‌توان به تابعی توسعی داد که در نقاط روی پاره خط  $P_2P_1$  تحلیلی باشد، زیرا وقتی نقطه  $z$  از روی آن پاره خط به پایین می‌آید، مقدار سمت راست رابطه (۵) از  $i\sqrt{r_1r_2}$  به اعداد نزدیک به  $-i\sqrt{r_1r_2}$  می‌جهد. پس این توسعی حتی در آنجا پیوسته نخواهد بود.

تبديل  $w = F(z) = F(z)$  همان‌طور که خواهیم دید نگاشتی یک‌به‌یک است از حوزه  $D_z$  متشکل از همه نقاط صفحه  $z$  بجز نقاط روی پاره خط  $P_2P_1$  به روی حوزه  $D_w$  متشکل از تمام صفحه  $w$  به استثنای پاره خط  $1 \leq v \leq -1$  از محور  $v$  (شکل ۱۲۳).

قبل از تحقیق درستی این مطلب، توجه می‌کنیم که اگر  $y > 0$  ( $z = iy$ ) آنگاه

$$\theta_1 + \theta_2 = \pi \quad \text{و} \quad r_1 = r_2 > 1$$

بنابراین، محور مثبت  $y$  تحت  $w = F(z)$  به روی قسمتی از محور  $v$  نگاشته می‌شود که برای آن  $v > 0$ . به علاوه محور منفی  $y$  به روی قسمتی از محور  $v$  نگاشته می‌شود که برای آن  $v < 0$ . هر نقطه در نیمة بالایی  $D_z$  به توی نیمة بالایی  $v > 0$  از صفحه  $w$  نگاشته می‌شود و هر نقطه در نیمة پایینی  $D_z$  به توی نیمة پایینی صفحه  $w$ .



شکل ۱۲۳

$$w = F(z)$$

نگاشته می شود. پرتو  $r_1 > 0$ ,  $\theta_1 = 0$  به روی محور حقیقی مثبت در صفحه  $w$  نگاشته می شود و نیم خط  $r_2 > \pi$ ,  $\theta_2 = \pi$  به روی محور حقیقی منفی.

برای اینکه نشان دهیم تبدیل  $w = F(z)$  یک به یک است توجه می کنیم که اگر  $F(z_1) = F(z_2)$  آنگاه  $z_1 - z_2 = 1 - z_2^2$ . از این رابطه نتیجه می شود که  $z_1 = z_2$  یا  $z_1 = -z_2$ . مع هذا به علت نحوه نگاشته شدن نیمه های بالایی و پایینی حوزه  $D_z$  و قسمتهای محور حقیقی واقع در  $D_z$  توسط  $F$ , حالت  $z_1 = -z_2$  غیرممکن است. بنابراین اگر  $F(z_1) = F(z_2)$ , آنگاه  $z_1 = z_2$  و  $F$  یک به یک است.

می توان نشان داد که  $F$  حوزه  $D_w$  را به روی  $D_z$  می نگارد، برای این کار تابعی مانند  $H$  می یابیم که  $D_w$  را به توی  $D_z$  بناگارد، با این ویژگی که اگر  $w = H(z)$  آنگاه  $z = F(w)$ . این کار نشان خواهد داد که به ازای هر نقطه  $w$  در  $D_w$  نقطه ای مانند  $z$  در  $D_z$  هست به قسمی که  $F(z) = w$ : یعنی، نگاشت  $F$  پوشاست. نگاشت  $H$  وارون  $F$  خواهد بود.

برای پیدا کردن  $H$ , ابتدا توجه می کنیم که اگر  $w$  یک مقدار  $(1 - z^2)^{1/2}$  برای  $z$  خاصی باشد، آنگاه  $z = w^{1/2}$  و بنابراین  $z$  مقداری از  $(w^2 + 1)^{1/2}$  برای آن  $w$  است. تابع  $H$  شاخه بی از تابع دومقداری زیر است

$$(w^2 + 1)^{1/2} = (w - i)^{1/2}(w + i)^{1/2} \quad (w \neq \pm i).$$

به پیروی از روشی که برای به دست آوردن تابع  $F(z)$  به کار بردهیم، می نویسیم  $w - i = \rho_1 \exp(i\phi_1)$  و  $w + i = \rho_2 \exp(i\phi_2)$ . (شکل ۱۲۳ را ببینید). سپس با محدودیتهای

$$\rho_1 + \rho_2 > 2 \quad \text{و} \quad (k = 1, 2) \quad \frac{-\pi}{2} \leq \phi_k < \frac{3\pi}{2}, \quad \rho_k > 0$$

$$H(w) = \sqrt{\rho_1 \rho_2} \exp \frac{i(\phi_1 + \phi_2)}{2} \quad (6)$$

حوزه تعریف،  $D_w$  است. تبدیل  $D_w$  نقاط  $z = H(w)$  واقع در بالا یا پایین محور  $w$  را، به ترتیب، به روی نقاط بالایی یا پایینی محور  $x$  می‌نگارد. این تبدیل محور  $w$  مثبت را به توی قسمتی از محور  $x$  که  $1 > x$ ، و محور  $w$  منفی را به توی قسمتی از محور  $x$  منفی که  $-1 < x$  می‌نگارد. اگر  $z = H(w)$ ، آنگاه  $1 = w^2 + z^2$  و بنابراین  $1 - z^2 = w^2$ . چون  $z$  در  $D_z$  است و چون  $w = F(z)$  و  $F(z) = -F(-z)$  دو مقدار  $1/(1-z^2)$  به ازای نقطه‌ای در  $D_z$  هستند می‌بینیم که  $w = F(z)$  یا  $(z) = F(w)$ . اما از نحوه‌ای که  $F$  و  $H$  نیمه‌های بالایی و پایینی حوزه‌های تعریفشان را، به انضمام قسمتهایی از محورهای حقیقی که در این حوزه‌ها واقع‌اند، می‌نگارند، بدیهی است که  $w = F(z)$ .

نگاشت بهوسیله شاخه‌های توابع دومقداری

$$w = (z^2 + Az + B)^{1/2} = [(z - z_0)^2 - z_1^2]^{1/2} \quad (z_1 \neq 0) \quad (7)$$

را، که در آن  $A = -2z_0$  و  $B = z_0^2 - z_1^2$ ، می‌توان به کمک نتایج حاصل برای تابع  $F$  در مثال ۲ و تبدیلهای متوالی زیر بررسی کرد

$$Z = \frac{z - z_0}{z_1}, \quad W = (Z^2 - 1)^{1/2}, \quad w = z_1 W. \quad (8)$$

### تمرینها

۱. شاخه  $F$  از  $(1 - z^2)^{1/2}$  در مثال ۲ بخش ۹۱ بر حسب مختصات  $r_1, r_2, \theta_1, \theta_2$  تعریف شد. به طور هندسی توضیح دهید چرا شرایط  $\theta_1 + \theta_2 < \pi$ ،  $r_1 > 0$ ،  $x > 0$ ،  $y > 0$  ربع از صفحه  $z$  را توصیف می‌کند. سپس نشان دهید که تبدیل  $w = F(z)$  آن ربع را به روی ربع  $u > 0$ ،  $v > 0$  از صفحه  $w$  می‌نگارد.

راهنمایی: برای آنکه نشان دهید ربع  $x > 0$ ،  $y > 0$  در صفحه  $z$  توصیف می‌شود، توجه کنید که در هر نقطه روی محور  $y$  مثبت  $\theta_1 + \theta_2 = \pi$  و وقتی  $z$  در امتداد پرتو  $c < \theta_2 < \pi/2$  به طرف راست حرکت کند،  $\theta_1 + \theta_2$  کاهش می‌یابد.

۲. برای تبدیل  $w = F(z)$  از ربع اول صفحه  $z$  به روی ربع اول صفحه  $w$  (تمرین ۱) نشان دهید که

$$v = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{r_1 r_2 - x^2 + y^2 + 1} \quad \text{و} \quad u = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{r_1 r_2 + x^2 - y^2 - 1}$$

که در آن

$$r_1 r_2 = (x^2 + y^2 + 1)^2 - 4x^2,$$

و نشان دهید که تصویر قسمتی از هذلولی  $x^2 - y^2 = 1$  که در ربع اول است پرتو  $u = v > 0$  است.

۳. نشان دهید که در تمرین ۲، حوزه  $D$  که زیر هذلولی و در ربع اول صفحه  $z$  واقع است با شرایط  $r_1 > r_2 > 0$  و  $\theta_2 < \pi/2 < \theta_1 < \pi$  توصیف می‌شود. سپس نشان دهید که تصویر  $D$  هشت‌یک  $u < v < 0$  است. شکل حوزه  $D$  و تصویر آن را بکشید.

۴. فرض کنید  $F$  شاخه‌یی از  $(z^2 - 1)^{1/2}$  باشد که در مثال ۲ بخش ۹۱ تعریف شد و فرض کنید  $z = r \exp(i\theta)$  نقطه ثابتی باشد، که در آن  $0 < \theta < 2\pi$  و  $r \leq 1$ . نشان دهید که شاخه‌یی از  $(z^2 - 1)^{1/2}$  مانند  $F$  هست که بریدگی شاخه‌یی آن پاره خط بین نقاط  $z$  و  $-z$  است و می‌توان آن را به صورت  $F(z) = z \cdot F(z)$  نوشت که

۵. بنویسید  $z + 1 = r_2 \exp(i\Theta_2)$  و  $z - 1 = r_1 \exp(i\theta_1)$  که در آن

$$-\pi < \Theta_2 < \pi \quad \text{و} \quad 0 < \theta_1 < 2\pi$$

و سپس شاخه‌یی از تابع

$$\left( \frac{z-1}{z+1} \right)^{1/2} \quad (\text{الف}) \quad (z^2 - 1)^{1/2}; \quad (\text{ب})$$

را تعریف کنید. در هر حالت بریدگی شاخه‌یی باید متشکل از دو پرتو  $\theta_1 = \pi$  و  $\theta_2 = 0$  باشد.

۶. با استفاده از نماد بخش ۹۱ نشان دهید که تابع

$$w = \left( \frac{z-1}{z+1} \right)^{1/2} = \sqrt{\frac{r_1}{r_2}} \exp \frac{i(\theta_1 - \theta_2)}{2}$$

یک شاخه با همان حوزه تعریف  $D_z$  و همان بریدگی شاخه‌یی مربوط به  $w = F(z)$  آن بخش است. نشان دهید که این تبدیل،  $D_z$  را به روی نیم صفحه سمت راست  $-\pi/2 < \phi < \pi/2$ ،  $\rho > 0$  مبدل می‌کند.

می‌نگارد، که در آن  $z = w$  تصویر نقطه  $\infty = z$  است. همچنین نشان دهید که تبدیل وارون عبارت است از

$$z = \frac{1+w^2}{1-w^2} \quad (\operatorname{Re} w > 0).$$

(با تمرین ۷ بخش ۹ مقایسه کنید.)

۷. نشان دهید که تبدیل تمرین ۶ ناحیه خارجی دایره واحد  $|z| = 1$  در نیمة بالایی صفحه  $z$  را به روی ناحیه‌ای در ربع اول صفحه  $w$  می‌نگارد که بین خط  $u = v$  و محور  $u$  واقع است. شکل دو ناحیه را بکشید.

۸. بنویسید  $(z = r \exp(i\theta))$ ،  $z = r_1 \exp(i\Theta_1)$  و  $z - 1 = r_2 \exp(i\Theta_2)$  آنها مقادیر هر سه آوند بین  $-\pi$  و  $\pi$  است. سپس شاخه‌یی ازتابع  $[z^2(z^2 - 1)]^{1/2}$  را تعریف کنید که بریدگی شاخه‌یی آن مشتمل از دو قطعه  $-1 \leq x \leq 1$  و  $0 \leq x \leq \pi$ ، از محور  $x$  باشد.

## ۹۲. سطح ریمان

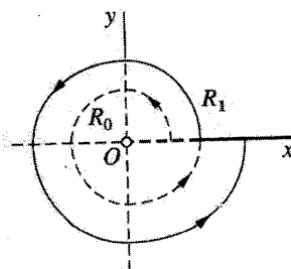
دو بخش پایانی این فصل، آشنایی مختصری با مفهوم نگاشتی است که روی یک سطح ریمان، که تعیینی از صفحه مختلط با بیش از یک لایه است، تعریف شده است. این نظریه متکی بر این واقعیت است که به هر نقطه روی چنین سطحی فقط یک مقدار ازتابع چندمقداری مفروض نسبت داده می‌شود. از مطالب این دو بخش در فصلهای بعد استفاده نمی‌شود و خواننده می‌تواند بدون هیچ نگرانی به فصل ۹ برود.

به مجرد اینکه چنین سطحی برای یکتابع مفروض طحریزی شد، تابع بر این سطح تک‌مقداری است و نظریه توابع تک‌مقداری در مورد آن به کار برده می‌شود. بدین ترتیب مشکلات ناشی از چندمقداری بودن تابع بهوسیله یک طرح هندسی آسان می‌شود. با وجود این، تعبیر آن سطح و ترتیب ارتباطهای مناسب بین لایه‌ها ممکن است کاملاً پیچیده شود. توجه خود را به چند مثال نسبتاً ساده محدود می‌کنیم و ابتدا با سطحی برای  $z = \log w$  شروع می‌کنیم.

مثال ۱. متناظر با هر عدد ناصرف  $z$ ، تابع چندمقداری

$$\log z = \ln r + i\theta \quad (1)$$

دارای بینهایت مقدار است. به منظور بیان  $z = \log w$  به صورت تابعی تک‌مقداری، صفحه  $z$  بدون مبدأ را با سطحی جایگزین می‌کنیم که هرگاه آوند عدد  $z$  به اندازه  $2\pi$ ، یا مضرب صحیحی از  $2\pi$ ، افزایش یا کاهش یابد آنگاه نقطه جدیدی روی آن سطح مشخص شود.

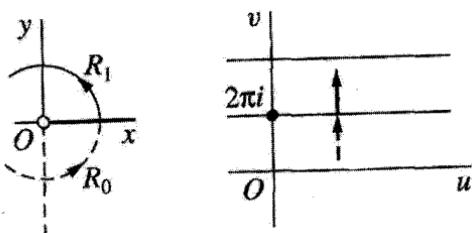


شکل ۱۲۴

صفحة  $z$  را با مبدأ مذوف به عنوان یک لایه نازک  $R_0$  در نظر می‌گیریم که در امتداد نیمة مثبت محور حقیقی بریده شده است. فرض کنید  $\theta$  بر این سطح از صفر تا  $2\pi$  تغییر کند. فرض کنید لایه دومی مانند  $R_1$  به همین روش بریده شده و در مقابل لایه  $R_0$  قرار گرفته باشد. سپس لبه پایینی شکاف  $R_0$  به لبه بالایی شکاف  $R_1$  وصل شده باشد. زاویه  $\theta$  بر  $R_1$  از  $2\pi$  تا  $4\pi$  تغییر می‌کند، لذا وقتی  $z$  به وسیله نقطه‌ای روی  $R_1$  معرفی می‌شود، مؤلفه موهومی  $z$  از  $2\pi$  تا  $4\pi$  تغییر می‌کند.

سپس لایه  $R_2$  به همین روش بریده شده و در مقابل  $R_1$  قرار گرفته است و لبه پایینی شکاف  $R_1$  به لبه بالایی شکاف این لایه جدید وصل شده است و همین طور برای لایه‌های  $R_3, R_4, \dots$ ، ... لایه  $R_{-1}$  که  $\theta$  بر آن از صفر تا  $-2\pi$  تغییر می‌کند بریده شده و در پشت سر  $R_0$  قرار گرفته است، لبه پایینی شکافش متصل به لبه بالایی شکاف  $R_0$  است؛ لایه‌های  $R_{-2}, R_{-3}, \dots$  به نحوی مشابه ساخته می‌شوند. مختصات  $r$  و  $\theta$  هر نقطه روی هر لایه را می‌توان به عنوان مختصات قطبی تصویر آن نقطه روی صفحه  $z$  اولیه در نظر گرفت، مختص زاویه‌ی  $\theta$  بر هر لایه، به یک برد معین  $2\pi$  رادیان محدود می‌شود.

منحنی پیوسته دلخواهی روی این سطح همبند، که از تعدادی نامتناهی لایه تشکیل شده، در نظر می‌گیریم. وقتی نقطه  $z$  این منحنی را پیماید، مقادیر  $z$  به طور پیوسته تغییر می‌کند زیرا  $\theta$ ، علاوه بر  $r$ ، حالا به طور پیوسته تغییر می‌کند؛ و  $z = \log r$  با هر نقطه روی منحنی درست یک مقدار اختیار می‌کند. مثلاً وقتی نقطه روی لایه  $R_0$  بر مسیری که در شکل ۱۲۴ نشان داده شده است یک دور کامل حول مبدأ بچرخد، زاویه از صفر تا  $2\pi$  تغییر می‌کند. وقتی این نقطه از خط  $\theta = 2\pi$  بگذرد، به لایه  $R_1$  سطح می‌رود. وقتی نقطه یک دور کامل در  $R_1$  بچرخد، زاویه از  $2\pi$  تا  $4\pi$  تغییر می‌کند و وقتی نقطه مزبور از خط  $\theta = 4\pi$  بگذرد، به لایه  $R_2$  می‌رود.



شکل ۱۲۵

سطحی را که در اینجا توصیف کردیم یک سطح ریمان برای  $\log z$  است. این سطح، سطحی است همبند و متشکل از تعدادی نامتناهی لایه که به قسمی مرتب شده‌اند که  $\log z$  تابعی تک‌مقداری از نقاط روی آن است.

تبدیل  $w = \log z$  کل سطح ریمان را به روشی یک‌به‌یک به روی تمام صفحه  $w$  می‌نگارد. تصویر لایه  $R_1$  عبارت است از نوار  $2\pi \leq v \leq 0$ . (مثال ۳ بخش ۸۸ را ببینید). وقتی نقطه  $z$  بر قوسی که در شکل ۱۲۵ نشان داده شده به روی لایه  $R_1$  رود، همچنان‌که در شکل نشان داده شده، تصویرش،  $w$ ، از خط  $v = 2\pi$  رو به بالا می‌رود. توجه کنید که  $\log z$  که بر لایه  $R_1$  تعریف شد، ادامه تحلیلی (بخش ۲۶) تابع تحلیلی تک‌مقداری

$$f(z) = \ln r + i\theta \quad (0 < \theta < 2\pi)$$

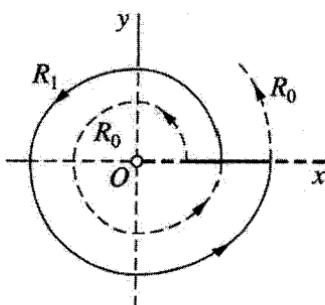
را از روی محور حقیقی مثبت به طرف بالا نمایش می‌دهد. با این مفهوم،  $\log z$  نه فقط تابع تک‌مقداری از همه نقاط  $z$  بر سطح ریمان است بلکه تابعی تحلیلی در همه نقاط آن سطح نیز هست.

البته، می‌توانستیم این سطوح را در امتداد محور حقیقی منفی، یا در امتداد هر نیم خط دیگری که از مبدأ شروع شود، ببریم و به طور مناسبی در امتداد شکافها به هم وصل کنیم تا سطح ریمان دیگری برای  $\log z$  تشکیل دهند.

مثال ۲. متناظر با هر نقطه صفحه  $z$  غیر از مبدأ، تابع

$$z^{1/2} = \sqrt{r}e^{i\theta/2} \quad (2)$$

دارای دو مقدار است. یک سطح ریمان برای  $z^{1/2}$  با قرار دادن سطحی متشکل از دو لایه  $R_1$  و  $R_1$  به جای صفحه  $z$  به دست می‌آید. هر لایه در امتداد محور حقیقی مثبت بریده شده و در



شکل ۱۲۶

مقابل  $R_0$  قارگرفته است. لبه پایینی شکاف  $R_0$  به لبه بالایی شکاف  $R_1$  وصل شده است و لبه پایینی شکاف  $R_1$  به لبه بالایی شکاف  $R_0$ .

وقتی نقطه  $z$  از لبه بالایی شکاف  $R_0$  شروع کند و مدار پیوسته‌ای حول مبدأ در جهت عکس حرکت عقره‌های ساعت را بپیماید (شکل ۱۲۶)، زاویه  $\theta$  از  $0$  تا  $2\pi$  افزایش می‌یابد. سپس نقطه از لایه  $R_0$  به لایه  $R_1$  می‌رود، که در آن  $\theta$  از  $2\pi$  تا  $4\pi$  افزایش می‌یابد. وقتی نقطه از این هم بیشتر حرکت کند به لایه  $R_0$  برگردید، که در آن مقادیر  $\theta$  می‌توانند از  $4\pi$  تا  $6\pi$  یا از  $0$  تا  $2\pi$  تغییر کنند، انتخابی که روی مقدار  $z$  اثر ندارد، وغیره. توجه کنید مقدار  $z$  در نقطه‌ای که مدار از لایه  $R_1$  به لایه  $R_0$  می‌رود غیر از مقدار  $z$  در نقطه‌ای است که مدار از لایه  $R_1$  به لایه  $R_0$  می‌رود.

بدین ترتیب، یک سطح ریمان ساخته‌ایم که به ازای هر  $z$  ناصفر  $z$  بر آن تک‌مقداری است. در این ساختمان، لبه‌های لایه‌های  $R_0$  و  $R_1$  به قسمی دو به دو به هم وصل شده‌اند که سطح حاصل بسته و همبند است. نقاطی که در آنها دو لبه به هم وصل می‌شوند متمایز از نقاطی هستند که در آنها دو لبه دیگر به هم وصل می‌شوند. بنابراین از نظر فیزیکی ساختن مدلی برای این سطح ریمان غیرممکن است. برای تصور سطح ریمان، مهم این است که بفهمیم در موقع رسیدن به یک لبه شکاف چگونه باید عمل کنیم.

مبدأ، نقطه خاصی روی این سطح ریمان است که بین دو لایه مشترک بوده و هر منحنی حول مبدأ روی این سطح باید دو بار حول آن بچرخد تا منحنی بسته‌ای شود. نقطه‌ای از این نوع روی یک سطح ریمان را نقطه شاخه‌یی می‌نامند.

تصویر لایه  $R_0$  تحت تبدیل  $w = z^{1/2}$  عبارت از نیمه بالایی صفحه  $w$  است زیرا آوند  $w$  روی  $R_0$  برابر با  $\theta/2$  است، که در آن  $\pi \leq \theta/2 \leq 0$ . همین‌طور، تصویر لایه  $R_1$ ، نیمه پایینی

صفحه  $w$  است. این تابع را به صورتی که بر هر یک از لایه‌ها تعریف شد، می‌توان ادامه تحلیلی تابع تعریف شده روی لایه دیگر از روی بریدگی دانست. از این نظر، تابع تک‌مقداری  $z^{1/2}$  از نقاط روی سطح ریمان، در همه نقاط بجز مبدأ، تحلیلی است.

### تمرینها

۱. سطح ریمان برای  $z \log z$  را که با بریدن صفحه  $z$  در امتداد محور حقیقی منفی حاصل می‌شود توصیف نمایید. این سطح ریمان برای  $z \log z$  را با سطحی که در مثال ۱ بخش ۹۲ به دست آمد مقایسه کنید.

۲. تصویر لایه  $R_n$ ، وقتی  $n$  یک عدد صحیح دلخواه است، از سطح ریمان برای  $z \log z$  را که در مثال ۱ بخش ۹۲ داده شد، تحت تبدیل  $z = w = \log z$  معین کنید.

۳. تحقیق کنید که تحت تبدیل  $z^{1/2} = w$ ، لایه  $R_1$  سطح ریمان برای  $z^{1/2}$  که در مثال ۲ بخش ۹۲ داده شد، به روی نیمة پایینی صفحه  $w$  نگاشته می‌شود.

۴. منحنی، بر یک سطح ریمان برای  $z^{1/2}$ ، تعریف کنید که تصویرش تحت تبدیل  $z^{1/2} = w$  تمام دایره  $|w| = 1$  باشد.

۵. فرض کنید  $C$  معرف دایره  $|z - 2| = 1$  در جهت مثبت بر سطح ریمانی باشد که در مثال ۲ بخش ۹۲ برای  $z^{1/2}$  توصیف شد، به طوری که نیمة بالایی این دایره در لایه  $R_1$  و نیمة پایینی آن در  $R_1$  واقع است. توجه کنید که برای هر نقطه  $z$  بر  $C$  می‌توان نوشت

$$4\pi - \frac{\pi}{2} < \theta < 4\pi + \frac{\pi}{2} \quad \text{که در آن} \quad z^{1/2} = \sqrt{r} e^{i\theta/2}.$$

بیان کنید چرا نتیجه می‌شود که

$$\int_C z^{1/2} dz = 0.$$

این نتیجه را تعمیم دهید تا برای منحنیهای ساده بسته دیگری که از لایه‌ای به لایه دیگر می‌گذرند، بدون اینکه نقاط شاخه‌یی را دربر گیرند، مناسب گردد. با تعمیم آن به تابع دیگر، قضیه کوشی-گورسا را به انتگرالهای توابع چندمقداری گسترش دهید.

### ۹۳. سطوحی برای توابع مرکب

در اینجا سطوح ریمان برای دو تابع مرکب را در نظر می‌گیریم که در آنها چندجمله‌یهای ساده و تابع جذر (ریشه دوم) مطرح‌اند.

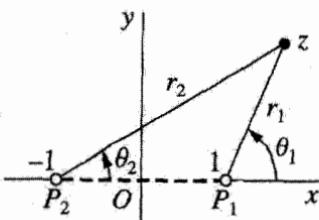
مثال ۱. حال به توصیف یک سطح ریمان برای تابع دومقداری

$$f(z) = (z^2 - 1)^{1/2} = \sqrt{r_1 r_2} \exp \frac{i(\theta_1 + \theta_2)}{2} \quad (1)$$

می پردازیم، که در آن  $(i\theta_2)$ ،  $z - 1 = r_1 \exp(i\theta_1)$ ،  $z + 1 = r_2 \exp(i\theta_2)$  باشد. یک شاخه این تابع با پاره خط  $P_1 P_2$  بین نقاط شاخه‌ی  $1 \pm z$  به عنوان یک بریدگی شاخه‌ی (شکل ۱۲۷) در مثال ۲ بخش ۹۱ توصیف شد. آن شاخه به صورت نوشه شده فوق با محدودیتهای  $r_k > 0$  و  $2\pi < \theta_k < 2\pi$  ( $k = 1, 2$ ) بود. این شاخه روی قطعه  $P_1 P_2$  تعریف نشده است.

یک سطح ریمان برای تابع دومقداری (۱) باید متشکل از دو لایه  $R_1$  و  $R_2$  باشد. فرض کنید هر دو لایه در امتداد قطعه  $P_1 P_2$  بریده شده باشند. در این صورت لبه پایینی شکاف  $R_2$  به لبه بالایی شکاف  $R_1$  وصل می‌شود و لبه پایینی  $R_1$  به لبه بالایی  $R_2$ .

فرض کنید زوایای  $\theta_1$  و  $\theta_2$  بر لایه  $R_2$  از  $0$  تا  $2\pi$  تغییر کنند. اگر نقطه‌ای بر لایه  $R_2$  یک منحنی ساده بسته را که قطعه  $P_1 P_2$  را در بر گرفته در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت یک دور بپیماید، آنگاه با برگشتن نقطه به وضعیت اولیه‌اش،  $\theta_1$  و  $\theta_2$  هر دو به اندازه  $2\pi$  تغییر می‌کنند. تغییر  $\theta_1 + \theta_2 / 2$  نیز  $2\pi$  است و مقدار  $f$  تغییر نمی‌کند. اگر نقطه‌ای از روی لایه  $R_2$  شروع کند و مسیری را بپیماید که فقط حول نقطه شاخه‌ی  $1 = z$  دو دور می‌چرخد، از لایه  $R_2$  به لایه  $R_1$  می‌رود و سپس قبل از اینکه به وضعیت اولیه‌اش برگردد به لایه  $R_1$  باز می‌گردد. در این حالت مقدار  $\theta_1$  به اندازه  $4\pi$  تغییر می‌کند در حالی که مقدار  $\theta_2$  ابدأ تغییر نمی‌نماید. همین طور، برای مداری که دو بار حول نقطه  $-1 = z$  می‌چرخد، مقدار  $\theta_2$  به اندازه  $4\pi$  تغییر می‌کند، در حالی که مقدار  $\theta_1$  بدون تغییر باقی می‌ماند. مجدداً تغییر  $\theta_1 + \theta_2 / 2$  نیز  $2\pi$  است و مقدار  $f$  تغییر نمی‌کند. بدین ترتیب، روی لایه  $R_2$  می‌توان بر  $\theta_1$  و  $\theta_2$  را گسترش داد.



شکل ۱۲۷

بدین صورت که  $\theta_1$  و  $\theta_2$  هر دو به اندازه یک مضرب صحیح  $2\pi$  تغییر کنند یا فقط یکی از زوایا به اندازه یک مضرب صحیح  $4\pi$  تغییر کند. در هر حالت تغییر کلی دو زاویه مضرب زوجی از  $2\pi$  است.

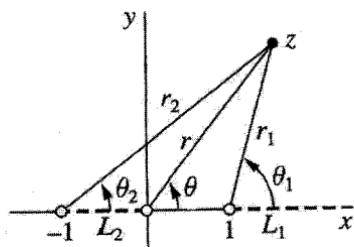
برای به دست آوردن برد مقادیر  $\theta_1$  و  $\theta_2$  روی لایه  $R_1$ , توجه می کنیم که اگر نقطه ای از روی لایه  $R_0$  شروع به حرکت کند و مسیری را بپیماید که فقط حول یکی از نقاط شاخه‌یی یک دور چرخیده است، نقطه به لایه  $R_1$  می رود و به لایه  $R_0$  برآمده گردد. در این حالت مقدار یکی از زوایا به اندازه  $2\pi$  تغییر می کند در حالی که مقدار دیگری بدون تغییر باقی می ماند. بنابراین، بر لایه  $R_1$  یک زاویه می تواند از  $2\pi$  تا  $4\pi$  تغییر کند در حالی که زاویه دیگر از  $0$  تا  $2\pi$  تغییر می کند. در این صورت مجموع این دو زاویه از  $2\pi$  تا  $4\pi$  تغییر می کند و مقدار  $\frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2)$ , که آوند  $f(z)$  است، از  $\pi$  تا  $2\pi$  با تغییر می کند. مجدداً با تغییر درست یکی از زوایا به اندازه مضرب صحیحی از  $4\pi$  یا با تغییر مقدار هر دو زاویه به اندازه یک مضرب صحیح  $2\pi$ , برد زوایا گسترش می یابد.

حال می توان تابع دومقداری را که با رابطه (۱) تعریف شده است به عنوان تابعی تک مقداری از نقاط روی سطح ریمان، که اینک ساختیم، در نظر گرفت. تبدیل  $(z) = w$  هر یک از لایه هایی را که در ساختن این سطح ریمان به کار رفته است به روی تمام صفحه  $w$  می نگارد.

## مثال ۲. تابع دومقداری

$$f(z) = [z(z^2 - 1)]^{1/2} = \sqrt{rr_1r_2} \exp \frac{i(\theta + \theta_1 + \theta_2)}{2} \quad (2)$$

را در نظر می گیریم (شکل ۱۲۸). نقاط  $\pm 1$ ,  $z$ , نقاط شاخه‌یی این تابع اند. توجه داریم که اگر نقطه  $z$  مداری را بپیماید که هر سه این نقاط را در بر گرفته است، آوند  $(z) = f$ , به اندازه زاویه  $3\pi$  تغییر می کند و بدین ترتیب مقدار تابع تغییر می کند. در نتیجه، برای توصیف یک شاخه تک مقداری



شکل ۱۲۸

$f$ ، لازم است یک بریدگی شاخه‌یی از یکی از این نقاط شاخه‌یی تا نقطه در بی‌نهایت ادامه یابد. بنابراین نقطه در بی‌نهایت نیز یک نقطه شاخه‌یی است، همچنان که می‌توان این مطلب را با توجه به اینکه تابع  $f(z) = z$  دارای نقطه‌ای شاخه‌یی در  $z = 0$  است نشان داد.

حال فرض کنید دو لایه در امتداد پاره خط  $L_2$  از  $z = 0$  در امتداد قسمت  $L_1$  از محور حقیقی که در سمت راست نقطه  $z = 0$  واقع است بریده شده باشد. این را تصریح می‌کنیم که هر یک از سه زاویه  $\theta_1, \theta_2$  و  $\theta_3$  می‌تواند بر لایه  $R_1$  از  $0 < z < 2\pi$  و بر لایه  $R_2$  از  $0 < z < 4\pi$  تغییر کند. این را نیز تصریح می‌کنیم که زوایای متناظر با نقطه‌ای بر هر یک از لایه‌ها می‌تواند با مضرب صحیحی از  $2\pi$  تغییر کنند به قسمی که مجموع سه زاویه به اندازه مضرب صحیحی از  $4\pi$  تغییر نماید، بنابراین مقدار تابع  $f$  تغییر نمی‌کند.

یک سطح ریمان برای تابع دومقداری (۲) بدین شکل به دست می‌آید که لبه‌های پایینی شکافها در امتداد  $L_1$  و  $L_2$  را که در  $R_1$  واقع‌اند به ترتیب به لبه‌های بالایی شکافها در امتداد  $L_1$  و  $L_2$  که در  $R_2$  واقع‌اند وصل کنیم. در این صورت لبه‌های پایینی شکافها در امتداد  $L_1$  و  $L_2$  که در  $R_1$  واقع‌اند به ترتیب به لبه‌های بالایی شکافها در امتداد  $L_1$  و  $L_2$  که در  $R_2$  واقع‌اند وصل کنیم. به کمک شکل ۱۲۸ به سهولت تحقیق می‌شود که یک شاخه تابع به وسیله مقادیرش در نقاط روی  $R_1$  نمایش داده می‌شود و شاخه دیگر به وسیله مقادیرش در نقاط روی  $R_2$  نمایش داده می‌شود.

### تمرینها

۱. یک سطح ریمان برای تابع سه‌مقداری  $w = (1 - z)^{1/3}$  توصیف نماید و بگویید که کدام ثلث صفحه  $w$  نمایش تصویر هر یک از لایه‌های این سطح است.
۲. متناظر با هر نقطه بر سطح ریمانی که در مثال ۱ بخش ۹۳ برای تابع  $w = f(z)$  آن مثال توصیف شد، فقط یک مقدار  $w$  موجود است. نشان دهید که در حالت کلی، متناظر با هر مقدار  $w$  سه نقطه روی سطح موجودند.
۳. یک سطح ریمان برای تابع چندمقداری زیر توصیف نماید

$$f(z) = \left( \frac{z-1}{z} \right)^{1/2}.$$

۴. توجه کنید سطح ریمانی که در مثال ۱، بخش ۹۳، برای  $w = (1 - z^2)^{1/2}$  توصیف شد سطح ریمانی برای تابع زیر نیز هست

$$g(z) = z + (z^2 - 1)^{1/2}$$

فرض کنید  $f$  معرف شاخه‌یی از  $(1 - z^2)^{1/2}$  باشد که بر لایه  $R$  تعریف شده است و نشان دهید که شاخه‌های  $g_1$  و  $g_2$  تابع  $g$  بر این دو لایه با روابط زیر تعریف می‌شوند

$$g_1(z) = \frac{1}{g_2(z)} = z + f_0(z).$$

۵. در تمرین ۴، شاخه  $f$  تابع  $(1 - z^2)^{1/2}$  را می‌توان با رابطه زیر توصیف کرد

$$f_0(z) = \sqrt{r_1 r_2} \left( \exp \frac{i\theta_1}{2} \right) \left( \exp \frac{i\theta_2}{2} \right),$$

که در آن  $\theta_1$  و  $\theta_2$  از  $0$  تا  $2\pi$  تغییر می‌کنند و

$$z - 1 = r_1 \exp(i\theta_1), \quad z + 1 = r_2 \exp(i\theta_2).$$

توجه کنید که  $2z = r_1 \exp(i\theta_1) + r_2 \exp(i\theta_2)$  و نشان دهید که شاخه  $g$  تابع  $g(z) = z + (z^2 - 1)^{1/2}$  را می‌توان به صورت زیر توشت

$$g_0(z) = \frac{1}{2} \left( \sqrt{r_1} \exp \frac{i\theta_1}{2} + \sqrt{r_2} \exp \frac{i\theta_2}{2} \right)^2.$$

با پیدا کردن  $\overline{g_0(z)}$  و توجه به اینکه بازی هر  $z$  و  $r_1 + r_2 \geq 2$  ثابت کنید که  $|g_0(z)| \geq 1$ . سپس نشان دهید که تبدیل  $w = z + (z^2 - 1)^{1/2}$  را به روی ناحیه  $|w| \geq 1$ ، لایه  $R_1$  را به روی ناحیه  $|w| \leq 1$ ، و بریدگی شاخه‌یی بین نقاط  $z = \pm 1$  را به روی دایره  $|w| = 1$  می‌نگارد. توجه کنید که تبدیلی که در اینجا به کار برдیم وارون تبدیل زیر است

$$z = \frac{1}{2} \left( w + \frac{1}{w} \right).$$

# ۹

## نگاشت همدیس

در این فصل به معرفی و شرح و بسط مفهوم نگاشت همدیس با تأکید بر رابطه بین این قبیل نگاشتها و توابع همساز می‌پردازیم. کاربردهای آن در مسائل فیزیکی در فصل بعد خواهد آمد.

### ۹۴. حفظ زوایا

فرض کنید  $C$  قوسی هموار باشد (بخش ۳۸) که با رابطه

$$z = z(t) \quad (a \leq t \leq b)$$

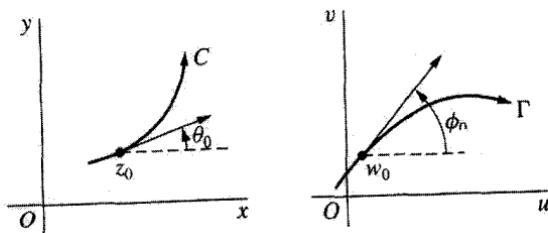
نمایش داده شده و  $(z)$  تابعی باشد که در همه نقاط روی  $C$  تعریف شده است. رابطه

$$w = f[z(t)] \quad (a \leq t \leq b)$$

یک نمایش پارامتری برای  $\Gamma$  تصویر  $C$  تحت تبدیل  $w = f(z)$  است.

فرض کنید  $C$  از نقطه  $(a < t_0 < b)z_0 = z(t_0)$  بگزند که  $f$  در آن تحلیلی است و  $w(t) = f[z(t)]$  ارائه شد اگر  $f'(z_0) \neq 0$ . بنابر قاعده زنجیری که در تمرین ۵ بخش ۳۸ ارائه شد

$$w'(t_0) = f'[z(t_0)]z'(t_0); \quad (1)$$



شکل ۱۲۹

$$\phi_0 = \psi_0 + \theta_0$$

و در نتیجه (بخش ۷ را ببینید)

$$\arg w'(t_0) = \arg f'[z(t_0)] + \arg z'(t_0). \quad (2)$$

رابطه (۲) در ارتباط دادن جهتهای  $C$  و  $\Gamma$ ، به ترتیب، در نقاط  $z_0$  و  $w_0 = f(z_0)$  مفید است. به عبارت صریحتر، فرض کنید  $\psi_0$  نمایش مقداری از  $\arg f'(z_0)$  باشد و  $\theta_0$  زاویه شیب خط جهت‌داری مماس بر  $C$  در نقطه  $z_0$  (شکل ۱۲۹). بنابر بخش ۳۸،  $\theta_0$  مقداری از  $\arg z'(t_0)$  است و در نتیجه بنابر رابطه (۲) کمیت

$$\phi_0 = \psi_0 + \theta_0$$

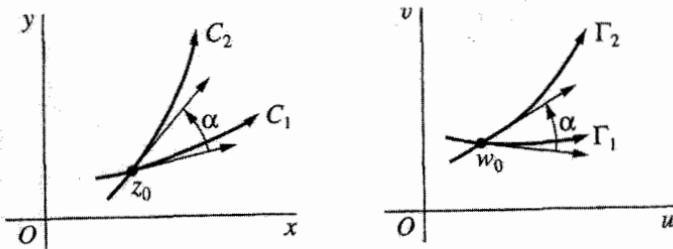
یک مقدار از  $\arg w'(t_0)$  و بنابراین زاویه شیب یک خط مماس جهت‌دار بر  $\Gamma$  در نقطه  $w_0 = f(z_0)$  است. در نتیجه زاویه شیب یک خط جهت‌دار در  $w_0$  اختلافش با زاویه شیب یک خط جهت‌دار در  $z_0$  به اندازه زاویه دوران زیر است

$$\psi_0 = \arg f'(z_0). \quad (3)$$

حال فرض کنید  $C_1$  و  $C_2$  دو قوس هموار مار بر  $z$  باشند و  $\theta_1$  و  $\theta_2$ ، به ترتیب، زوایای شیب خطوط مماس جهت‌دار بر  $C_1$  و  $C_2$  در  $z$  باشند. پس بنابر پاراگراف قبل، کمیتهای

$$\phi_2 = \psi_0 + \theta_2 \quad \text{و} \quad \phi_1 = \psi_0 + \theta_1$$

به ترتیب، زوایای شیب خطوط مماس جهت‌دار بر منحنیهای تصویر،  $\Gamma_1$  و  $\Gamma_2$ ، در نقطه  $w_0 = f(z_0)$  هستند. بدین ترتیب  $\phi_2 - \phi_1 = \theta_2 - \theta_1$ ؛ یعنی زاویه  $\Gamma_2 - \Gamma_1$  به



شکل ۱۳۰

از نظر اندازه و جهت همان زاویه  $\theta_2 - \theta_1$  از  $C_2$  به  $C_1$  است. این زوایا را در شکل ۱۳۰ با  $\alpha$  نشان داده‌ایم.

به دلیل این ویژگی حفظ زاویه، گویند تبدیل  $f(z) = w$  در نقطه  $z$  همدیس است اگر  $f$  در آن نقطه تحلیلی باشد و  $f'(z) \neq 0$ . چنین تبدیلی عملاً در هر نقطه از یک همسایگی همدیس است، زیرا  $f$  باید در یک همسایگی  $z$  تحلیلی باشد (بخش ۲۳) و چون  $f'$  در  $z$  پیوسته است (بخش ۴۸) در نتیجه بنابر قضیه ۲ بخش ۱۷ همسایگی از آن نقطه نیز موجود است که در سراسر آن  $f'(z) \neq 0$ .

تبدیلی مانند  $w = f(z)$  را که در حوزه‌ای مانند  $D$  تعریف شده است تبدیل همدیس یا نگاشت همدیس می‌نامیم هرگاه در هر نقطه  $D$  همدیس باشد. یعنی، نگاشت در  $D$  همدیس است هرگاه  $f$  در  $D$  تحلیلی باشد و مشتق آن  $f'$  هیچ صفری در آنجا نداشته باشد. هر یک از توابع مقدماتی را که در فصل ۳ بررسی شد می‌توان برای تعریف تبدیلی که در یک حوزه همدیس باشد به کار برد.

**مثال ۱.** نگاشت  $w = e^z$  در تمام صفحه  $z$  همدیس است زیرا به ازای هر  $z$  داریم  $(e^z)' = e^z \neq 0$ . دو خط  $y = c_1$  و  $x = c_2$  در صفحه  $z$  را در نظر می‌گیریم که جهت  $w = e^z$  اولی به بالا و جهت دومی به طرف راست باشد. بنابر بخش ۱۳ تصاویر آنها تحت  $w = e^z$  به ترتیب عبارت‌اند از دایره‌یی به مرکز مبدأ در جهت مثبت و نیم خطی از مبدأ. همان‌طور که در شکل ۲۰ (بخش ۱۳) نشان داده شده است، زاویه بین خطوط در نقطه تقاطع آنها زاویه‌یی قائمه در جهت منفی است و همین مطلب در مورد زاویه بین دایره و نیم خط در نقطه نظر در صفحه  $w$  صادق است. همدیسی نگاشت  $w = e^z$  در شکلهای ۷ و ۸ پیوست ۲ نیز نشان داده است.

مثال ۲. دو قوس هموار در نظر می‌گیریم که، به ترتیب، منحنیهای تراز  $c_1 = u(x, y)$  و  $c_2 = v(x, y)$  مؤلفه‌های حقیقی و موهومی تابع

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y),$$

هستند و فرض می‌کنیم که همدیگر را در نقطه  $z_0$  قطع کنند که  $f$  در آن تحلیلی است و  $f'(z_0) \neq 0$ . تبدیل  $w = f(z)$  در  $z_0$  همدیس است و این قوسها را به خطوط  $u = c_1$  و  $v = c_2$  می‌نگارد که در نقطه  $w_0 = f(z_0)$  متعامدند. پس بنابر نظریه ما این قوسها باید در  $z_0$  متعامد باشند. این مطلب قبلاً در تمرینهای ۷ تا ۱۱ بخش ۲۵ بررسی و تشریح شده است.

نگاشتی که اندازه زاویه بین دو قوس هموار را حفظ کند، اما نه لزوماً جهت آن را، نگاشت حافظ زاویه نامیده می‌شود.

مثال ۳. تبدیل  $\bar{z} = w$ ، که تقارن نسبت به محور حقیقی است، حافظ زاویه است اما همدیس نیست. اگر متعاقب این نگاشت تبدیلی همدیس اثر کند، تبدیل حاصل یعنی  $f(\bar{z}) = w$  نیز حافظ زاویه است ولی همدیس نیست.

فرض کنید  $f$  تابعی غیر ثابت و در نقطه  $z_0$  تحلیلی باشد. اگر  $z_0$  یک نقطه بحرانی تبدیل  $w = f(z_0)$  نامیده می‌شود.

مثال ۴. نقطه  $z_0$  یک نقطه بحرانی تبدیل

$$w = 1 + z^2$$

است که ترکیبی از نگاشتهای

$$w = 1 + Z \quad \text{و} \quad Z = z^2$$

است. پرتو  $\alpha = \theta$  از نقطه  $z_0$  بهوضوح به روی پرتوی از نقطه  $1 = w$  نگاشته می‌شود که زاویه شبیه آن برابر با  $2\alpha$  است. به علاوه، زاویه بین هر دو پرتو که از نقطه بحرانی  $z_0$  کشیده شوند، بهوسیله این تبدیل دو برابر می‌شود.

به طور کلیتر، می‌توان نشان داد که اگر  $z_0$  نقطه‌ای بحرانی از تبدیل  $f(z) = w$  باشد آنگاه عدد صحیح و مشتبی مانند  $m$  هست ( $m \geq 2$ ) به قسمی که زاویه بین هر دو قوس هموار مار بر  $z_0$  تحت آن تبدیل، در  $m$  ضرب می‌شود. عدد صحیح  $m$ ، کوچکترین عدد صحیح و مشتبی است که  $(z_0)^m \neq f(z_0)$ . تحقیق این واقعیتها را به عنوان تمرین به خواننده واگذار کردہ‌ایم.

## ۹۵. ضریب مقیاس

ویژگی دیگری از تبدیل  $f(z) = w$  که در نقطه  $z_0$  همدیس است با در نظر گرفتن قدر مطلق  $|f'(z_0)|$  به دست می‌آید. بنابر تعریف مشتق و ویژگی (۷) بخش ۱۷ در مورد حد، می‌دانیم که

$$|f'(z_0)| = \left| \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right| = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|}. \quad (1)$$

حال  $|z - z_0|$  طول پاره خط واصل بین  $z$  و  $z_0$  است و  $|f(z) - f(z_0)|$  طول پاره خط واصل بین نقاط  $f(z)$  و  $f(z_0)$  در صفحه  $w$ . پس بهوضوح اگر  $z$  نزدیک نقطه  $z_0$  باشد، نسبت این دو طول، یعنی

$$\frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|}$$

تقریباً برابر عدد  $|f'(z_0)|$  است. توجه کنید که  $|f'(z_0)|$  اگر بزرگتر از واحد باشد نمایش یک انبساط و اگر کوچکتر از واحد باشد نمایش یک انقباض است.

گرچه زاویه دوران  $\arg f'(z)$  (بخش ۹۴) و ضریب مقیاس  $|f'(z)|$ ، در حالت کلی، از نقطه‌ای به نقطه دیگر تغییر می‌کند، بنابر پیوستگی  $f'$  مقادیر آنها در نقاط  $z$  نزدیک به  $z_0$  تقریباً برابر با  $|f'(z_0)|$  هستند. بنابراین تصویر یک ناحیه کوچک در همسایگی از نقطه  $z_0$  با ناحیه اولیه همدیس است بدین معنی که تقریباً همان شکل را دارد. با وجود این یک ناحیه بزرگ ممکن است به ناحیه‌ای تبدیل شود که هیچ شباهتی با ناحیه اولیه نداشته باشد.

مثال. وقتی  $z^2 = f(z)$ ، تبدیل

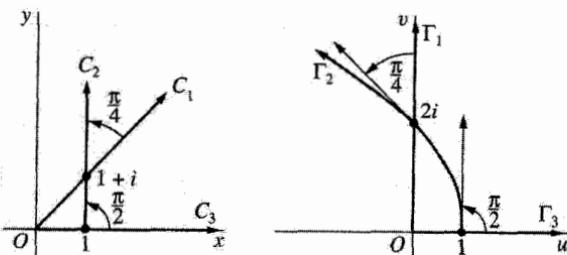
$$w = f(z) = x^2 - y^2 + i2xy$$

در نقطه  $i + 1 = z$ ، که دو نیم خط

$$x = 1 (y \geq 0) \quad \text{و} \quad y = x (x \geq 0)$$

همدیگر را قطع می‌کنند، همدیس است. این نیم خطها، با جهت مثبت به طرف بالا، را به  $C_1$  و  $C_2$  نمایش می‌دهیم، و ملاحظه می‌کنیم که زاویه  $C_1$  با  $C_2$  در نقطه تقاطع آنها برابر با  $\pi/4$  است (شکل ۱۳۱). چون تصویر نقطه  $(x, y)$  از صفحه  $z$  عبارت است از نقطه‌ای در صفحه  $w$  که مختصات قائم آن برابرند با

$$v = 2xy \quad \text{و} \quad u = x^2 - y^2$$



شکل ۱۳۱

$$w = z^r$$

نیم خط  $C_1$  به منحنی  $\Gamma_1$ ، با نمایش پارامتری زیر، تبدیل می‌شود

$$u = \circ, \quad v = 2x^2 \quad (\circ \leq x < \infty). \quad (2)$$

بنابراین  $\Gamma_1$  نیمة بالایی  $v \geq 0$  محور  $v$  است. نیم خط  $C_2$  به منحنی  $\Gamma_2$  تبدیل می‌شود که معادلات پارامتری آن عبارت اند از

$$u = 1 - y^2, \quad v = 2y \quad (\circ \leq y < \infty). \quad (3)$$

بنابراین  $\Gamma_2$  نیمة بالایی سهمی  $(1 - v)^2 = -4(u - 1)$  است. توجه کنید که در هر حالت جهت مثبت منحنی تصویر به طرف بالاست.

اگر در نمایش (3) برای منحنی تصویر  $\Gamma_2$  متغیرها  $u$  و  $v$  باشند، آنگاه

$$\frac{dv}{du} = \frac{dv/dy}{du/dy} = \frac{2}{-2y} = -\frac{1}{y}.$$

به خصوص وقتی  $v = 2$  داریم  $dv/du = -1$ . در نتیجه زاویه منحنی تصویر  $\Gamma_1$  با منحنی تصویر  $\Gamma_2$  در نقطه  $2i$  برابر است با  $\pi/4$  و این همان چیزی است که بنابر همدیسی نگاشت در آن نقطه لازم است. همان‌طور که پیش‌بینی کردۀ بودیم، زاویه دوران  $\pi/4$  در نقطه  $i + 1 = 1 + i$  یکی از مقادیر زیر است

$$\arg [f'(1+i)] = \arg [2(1+i)] = \frac{\pi}{4} + 2n\pi \quad (n = \circ, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

ضریب مقیاس در آن نقطه برابر است با عدد

$$|f'(1+i)| = |2(1+i)| = 2\sqrt{2}.$$

برای آنکه نشان دهیم چگونه زاویه دوران و ضریب مقیاس می‌توانند از نقطه‌ای به نقطه دیگر تغییر کنند، توجه می‌کنیم که در نقطه  $z = 1$ ، به ترتیب، برابرند با  $0^\circ$  و  $2\pi$  زیرا  $f'(1) = 2$ . شکل ۱۳۱ را ببینید که در آن  $C_2$  و  $\Gamma_2$  همان منحنی‌های بالا هستند و محور  $x$  نامنفی، به  $\Gamma_3$  که محور  $u$  نامنفی است تبدیل می‌شود.

## ۹۶. وارونهای موضعی

تبدیل  $w = f(z)$  که در نقطه  $z_0$  همدیس است دارای یک وارون موضعی در آن نقطه است. یعنی اگر  $(w_0, z_0) = f(z_0)$ ، آنگاه تبدیل یکتاوی مانند  $(w, z) = g$  موجود است که در یک همسایگی  $w_0$  مانند  $N$  تعریف شده و تحلیلی است به طوری که  $g(w_0) = z_0$  و به ازای هر نقطه  $w$  در  $N$  داریم  $g[f(g(w))] = w$ . مشتق  $f[g(w)] = w$  در واقع برابر است با

$$(1) \quad g'(w) = \frac{1}{f'(z)}.$$

از عبارت (۱) توجه می‌کنیم که تبدیل  $z = g(w)$  خود در  $w$  همدیس است. حال وجود چنین تابع وارونی را بررسی می‌کنیم، که پیامد مستقیم نتایج حسابان پیشرفته است.\* همان‌طور که در بخش ۹۴ توضیح دادیم، همدیسی تبدیل  $(w, z) = f(z)$  در  $z$  مستلزم وجود همسایگی از  $z_0$  است که این تبدیل در آن همدیس است و در نتیجه  $f$  در آن تحلیلی است. بنابراین اگر بنویسیم

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \quad \text{و} \quad z_0 = x_0 + iy_0, \quad z = x + iy$$

می‌دانیم که همسایگی از نقطه  $(x_0, y_0)$  هست که توابع  $u(x, y)$  و  $v(x, y)$  و مشتقات جزئی آنها از هر مرتبه در سراسر آن پیوسته‌اند (بخش ۴۸ را ببینید).

حال دو معادله

$$(2) \quad u = u(x, y), \quad v = v(x, y)$$

نمایش تبدیلی از همسایگی مذکور به توی صفحه  $uv$  است. به علاوه، دترمینان

$$J = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = u_x v_y - v_x u_y$$

\* نتایجی از حسابان پیشرفته را که اینجا به کار برده می‌شود می‌توانید در صفحات ۲۴۷-۲۴۱ کتاب زیر ببینید

که به ژاکوبی این تبدیل معروف است، در نقطه  $(x_0, y_0)$  غیر صفر است. چون بنابر معادلات کوشی-ریمان  $v_y = -v_x$  و  $u_y = u_x$  می‌توان  $J$  را به صورت زیر نوشت

$$J = (u_x)^2 + (v_x)^2 = |f'(z)|^2$$

واز آنچه که تبدیل  $w = f(z)$  در  $z_0$  همیس است  $\Rightarrow f'(z_0) \neq 0$ . شرایط پیوستگی بالا درباره توابع  $u(x, y)$  و  $v(x, y)$  و مشتقات آنها همراه با شرط ناصفر بودن ژاکوبی برای وجود وارون موضعی تبدیل (۲) در  $(x_0, y_0)$  کافی است. یعنی، اگر

$$v_0 = v(x_0, y_0) \quad \text{و} \quad u_0 = u(x_0, y_0) \quad (3)$$

آنگاه تبدیل پیوسته یکتاپی مانند

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v) \quad (4)$$

هست که در یک همسایگی  $N$  از نقطه  $(u_0, v_0)$  تعریف شده و نقطه  $(u_0, v_0)$  را به روی  $(x_0, y_0)$  می‌نگارد به طوری که در صورت برقراری روابط (۴)، روابط (۲) برقرارند. همچنین علاوه بر پیوسته بودن، توابع (۴) دارای مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته‌اند که در سراسر  $N$  در روابط زیر صدق می‌کنند

$$x_u = \frac{1}{J} v_y, \quad x_v = -\frac{1}{J} u_y, \quad y_u = -\frac{1}{J} v_x, \quad y_v = \frac{1}{J} u_x. \quad (5)$$

اگر بنویسیم  $w_0 = u_0 + iv_0$  و  $w = u + iv$

$$g(w) = x(u, v) + iy(u, v), \quad (6)$$

تبدیل  $z = g(w)$  بهوضوح یک وارون موضعی  $w = f(z)$  در  $z_0$  است. تبدیلهای (۲) و (۴) را می‌توان چنین نوشت

$$x + iy = x(u, v) + iy(u, v) \quad \text{و} \quad u + iv = u(x, y) + iv(x, y)$$

و این دو رابطه آخری همان روابط

$$z = g(w) \quad \text{و} \quad w = f(z)$$

هستند، که  $w$  دارای ویژگی‌های مطلوب است. با استفاده از روابط (۵) می‌توان نشان داد که  $w$  در  $N$  تحلیلی است. جزئیات را به عنوان تمرین گذاشته‌ایم، عبارت (۱) برای  $w = \rho \exp(i\phi)$  را نیز در تمرینها به دست خواهید آورد.

مثال. در مثال ۱ بخش ۹۴ دیدیم که، اگر  $f(z) = e^z$ ، تبدیل  $w = f(z)$  همه جا در صفحه  $z$  و به خصوص در نقطه  $z = 2\pi i$  همدیس است. تصویر این انتخاب  $z$  نقطه  $1$  است. در صورتی که نقاط صفحه  $w$  را به صورت  $w = \rho \exp(i\phi)$  بیان کنیم، وارون موضعی در  $z$  را می‌توان با نوشتن  $w = \log w = \ln \rho + i\phi$  به دست آورد که در آن  $w$  نمایش شاخه

$$\log w = \ln \rho + i\phi \quad (\rho > 0, \pi < \phi < 3\pi)$$

از تابع لگاریتمی است که به همسایگی از  $w$  که شامل مبدأ نیست تحدید شده باشد. ملاحظه کنید که

$$g(1) = \ln 1 + i2\pi = 2\pi i$$

و اگر  $w$  در آن همسایگی باشد،

$$f[g(w)] = \exp(\log w) = w.$$

همچنین بر طبق رابطه (۱) داریم

$$g'(w) = \frac{d}{dw} \log w = \frac{1}{w} = \frac{1}{\exp z}.$$

توجه کنید که اگر نقطه  $z = 0$  انتخاب شود، می‌توان از شاخه اصلی

$$\text{Log } w = \ln \rho + i\phi \quad (\rho > 0, -\pi < \phi < \pi)$$

تابع لگاریتمی، برای تعریف  $g$  استفاده کرد. در این حالت  $g(1) = 1$ .

### تمرینها

- زاویه دوران، در نقطه  $z = 2 + 2i$  برای تبدیل  $w = z$  را تعیین کنید. زاویه دوران برای یک منحنی خاص را رسم کنید. نشان دهید که ضریب مقیاس تبدیل در این نقطه  $\sqrt{5}$  است.
  - به وسیله تبدیل  $z = 1/w$  چه زاویه دورانی (الف) در نقطه  $1 = z$ : (ب) در نقطه  $i = z$  حاصل می‌شود؟
- جواب: (الف)  $\pi$ ; (ب)  $0$ .

۳. نشان دهید که تحت تبدیل  $w = 1/z$  تصاویر خطوط  $1 - x = y$  و  $y = v^2 - u^2$  و خط  $v = u$  هر چهار منحنی را رسم کنید، جهت‌های متناظر در امتداد آنها را معین نمایید و همدیسی نگاشت در نقطه  $z = 1$  را تحقیق کنید.

۴. نشان دهید که زاویه دوران در نقطه ناصفر  $(r \exp(i\theta), z)$  تحت تبدیل  $w = z^n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) عبارت است از  $\theta(1-n)$ . ضریب مقیاس تبدیل در آن نقطه را معین کنید.

جواب:  $nr^{n-1}$

۵. نشان دهید که تبدیل  $z = \sin w$  در همه نقاط بجز

$$z = \frac{\pi}{2} + n\pi \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

همدیس است. توجه کنید که این مطلب با نگاشت قطعه خط‌های جهت‌داری که در شکل‌های ۹ و ۱۰ پیوست ۲ نشان داده شده سازگار است.

۶. وارون موضعی تبدیل  $z = w$  را در هر یک از نقاط زیر پیدا کنید

$$(الف) z = -2, (ب) z = -i, (ج) z = -2i$$

جواب: (الف)  $w = \sqrt{\rho}e^{i\phi/2}$  ( $\rho > 0, -\pi < \phi < \pi$ )

(ج)  $w = \sqrt{\rho}e^{i\phi/2}$  ( $\rho > 0, 2\pi < \phi < 4\pi$ )

۷. در بخش ۹۶ خاطر نشان کردیم که مؤلفه‌های  $x(u, v)$  و  $y(u, v)$  تابع وارون  $g(w)$  که در رابطه (۶) تعریف شد در همسایگی  $N$  پیوسته و دارای مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته‌اند. با استفاده از معادلات (۵) بخش ۹۶ نشان دهید که معادلات کوشی-ریمان  $x_v = -y_u$ ,  $x_u = y_v$  در  $N$  برقرارند. سپس نتیجه بگیرید که  $g(w)$  در آن همسایگی تحلیلی است.

۸. نشان دهید که اگر  $z = g(w)$  وارون موضعی تبدیل همدیس  $f(z) = w$  در نقطه  $z$  باشد، آنگاه در نقاط  $w$  از همسایگی  $N$  که  $g$  در آن تحلیلی است (تمرین ۷) داریم

$$g'(w) = \frac{1}{f'(z)}.$$

راهنمایی: با این مطلب شروع کنید که  $f[g(w)] = w$  و قاعده زنجیری برای مشتقگیری توابع مركب را به کار ببرید.

۹. فرض کنید قوس همواری واقع در حوزه  $D$  باشد که تبدیل  $w = f(z)$  در سراسر آن حوزه همدیس است و  $\Gamma$  نمایش تصویر  $C$  تحت این تبدیل باشد. نشان دهید که  $\Gamma$  نیز قوسی هموار است.

۱۰. فرض کنید تابع  $f$  در  $z_0$  تحلیلی باشد و به ازای عدد صحیح مثبتی  $m$  داشته باشد ( $m \geq 1$ )

$$f'(z_0) = f''(z_0) = \dots = f^{(m-1)}(z_0) = 0, \quad f^{(m)}(z_0) \neq 0.$$

$$\text{همچنین بتوسید } w_0 = f(z_0).$$

(الف) با استفاده از سری تیلر  $f$  حول نقطه  $z_0$  نشان دهید که همسایگی از  $z_0$  موجود است که تفاضل  $w - f(z)$  را می‌توان در آن چنین نوشت

$$f(z) - w_0 = (z - z_0)^m \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!} [1 + g(z)]$$

که  $g(z)$  در  $z_0$  پیوسته است و  $= 0$ .

(ب) فرض کنید همان‌طور که در شکل ۱۲۹ (بخش ۹۴) نشان داده شده است  $\Gamma$  تصویر قوس هموار  $C$  تحت تبدیل  $w = f(z)$  باشد، و توجه کنید که زوایای شیب  $\theta$  و  $\phi$  در آن شکل، به ترتیب، حدود  $(z - z_0)$  و  $\arg[f(z) - w_0]$  هستند وقتی  $z$  در امتداد قوس  $C$  به  $z_0$  میل کند. سپس با استفاده از نتیجه قسمت (الف) نشان دهید که  $\theta$  و  $\phi$  با رابطه زیر به هم وابسته‌اند

$$\phi_0 = m\theta_0 + \arg f^{(m)}(z_0).$$

(ج) فرض کنید همان‌طور که در سمت چپ شکل ۱۳۰ (بخش ۹۴) نشان داده شده است زاویه بین دو قوس هموار  $C_1$  و  $C_2$  مبار  $z_0$  باشد. نشان دهید که چگونه از رابطه حاصل در قسمت (ب) نتیجه می‌شود که زاویه متناظر بین منحنیهای تصویر  $\Gamma_1$  و  $\Gamma_2$  در نقطه  $w_0 = f(z_0)$  برابر با  $m\alpha$  است. (توجه کنید که اگر  $m = 1$  این تبدیل در  $z_0$  همدیس است و اگر  $m \geq 2$  آنگاه  $z_0$  یک نقطه بحرانی است.).

## ۹۷. مزدوجهای همساز

در بخش ۲۵ دیدیم که اگر تابع

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

در حوزه  $D$  تحلیلی باشد، آنگاه تابع حقیقی  $u$  و  $v$  در آن حوزه همسازند. یعنی، در  $D$  دارای

مشتقات جزئی مرتبه اول و دوم پیوسته‌اند و در آنجا در معادله لابلاس صدق می‌کنند:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad v_{xx} + v_{yy} = 0. \quad (1)$$

قبل‌آ دیده بودیم که مشتقات جزئی مرتبه اول  $u$  و  $v$  در معادلات کوشی-ریمان

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x \quad (2)$$

صدق می‌کنند و همان‌طور که در بخش ۲۵ خاطرنشان ساختیم  $v$  یک مزدوج همساز  $u$  نامیده می‌شود.

حال فرض کنید  $(x, y) \in D$  تابع همساز مفروضی باشد که در یک حوزه همبند ساده (بخش ۴۶) تعریف شده است. در این بخش نشان می‌دهیم که  $(x, y) \in D$  همیشه دارای مزدوج همسازی مانند  $v(x, y)$  در  $D$  است و این کار را با یافتن عبارتی برای  $v(x, y)$  انجام می‌دهیم.  
برای انجام این کار، ابتدا مطالب مهمی درباره انتگرال روی خط را از حسابان یادآوری می‌کنیم.\* فرض کنید  $P(x, y)$  و  $Q(x, y)$  در حوزه همبند ساده  $D$  از صفحه  $xy$  دارای مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته باشند و  $(x_0, y_0)$  و  $(x, y)$  دو نقطه دلخواه در  $D$  باشند. اگر در هر نقطه  $D$  داشته باشیم  $P_y = Q_x$ ، آن‌گاه انتگرال روی خط

$$\int_C P(s, t)ds + Q(s, t)dt$$

از  $(x_0, y_0)$  تا  $(x, y)$ ، مادامی که مسیر تمامًا در  $D$  واقع باشد، مستقل از مسیر  $C$  است. به علاوه، در صورتی که نقطه  $(x_0, y_0)$  ثابت گرفته شود و  $(x, y)$  مجاز به تغییر در سراسر  $D$  باشد، این انتگرال نمایش تابعی تک‌مقداری مانند

$$F(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P(s, t)ds + Q(s, t)dt \quad (3)$$

از  $x$  و  $y$  است که مشتقات جزئی مرتبه اول آن با ضابطه‌های زیر داده می‌شوند

$$F_x(x, y) = P(x, y), \quad F_y(x, y) = Q(x, y). \quad (4)$$

توجه کنید که اگر نقطه  $(x_0, y_0)$  دیگری بگیریم مقدار  $F$  با یک ثابت جمعی تغییر می‌کند.

\* مثلاً صفحات ۵۵۰-۵۴۶ کتاب زیر را ببینید

به تابع همساز مفروض  $u(x, y)$  برمسیگردیم و ملاحظه میکنیم که از معادله لابلاس  $D u_{xx} + u_{yy} = 0$  نتیجه میشود که همه جا در

$$(-u_y)_y = (u_x)_x.$$

همچنین مشتقات جزئی مرتبه دوم  $u$  در  $D$  پیوسته‌اند و لذا مشتقات جزئی مرتبه اول تابع  $u_x$  و  $u_y$  در آنجا پیوسته‌اند. بنابراین اگر  $(x_0, y_0)$  را در  $D$  ثابت بگیریم، تابع

$$v(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} -u_t(s, t) ds + u_s(s, t) dt \quad (5)$$

بمازای هر  $(x, y)$  در  $D$  خوشنعريف است و بنابر روابط (۴)،

$$v_x(x, y) = -u_y(x, y), \quad v_y(x, y) = u_x(x, y). \quad (6)$$

اینها معادلات کوشی-ریمان‌اند. چون مشتقات جزئی مرتبه اول  $u$  پیوسته‌اند، از روابط (۶) معلوم میشود که مشتقات جزئی مرتبه اول  $v$  نیز پیوسته‌اند. در نتیجه،  $v(x, y) + iv(x, y)$  یک تابع تحلیلی در  $D$  و بنابراین  $v$  مزدوج همساز  $u$  است (بخش ۲۱).

البته تابع  $v$ ، که با فرمول (۵) تعریف شد، تنها مزدوج همساز  $u$  نیست. زیرا تابع  $c + v(x, y)$  که در آن  $c$  یک عدد حقیقی ثابت و دلخواه است، نیز مزدوج همساز  $u$  است. [تمرین ۲ بخش ۲۵ را به یاد آورید.]

مثال. تابع  $u(x, y) = xy$  را که در تمام صفحه  $xy$  همساز است در نظر بگیرید. بنابر معادله (۵) تابع

$$v(x, y) = \int_{(0, 0)}^{(x, y)} -s ds + t dt$$

یک مزدوج همساز  $u(x, y)$  است. این انتگرال را میتوان به سهولت با تحقیق و بررسی محاسبه کرد؛ همچنین میتوان آن را با انتگرالگیری در امتداد مسیر افقی از نقطه  $(0, 0)$  تا نقطه  $(x, y)$  و سپس در امتداد مسیر عمودی از  $(x, 0)$  تا نقطه  $(x, y)$  محاسبه کرد. نتیجه چنین است

$$v(x, y) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$$

و بنابراین، تابع تحلیلی متناظر عبارت است از

$$f(z) = xy - \frac{i}{2}(x^2 - y^2) = -\frac{i}{2}z^2.$$

## ۹۸. تبدیلهای توابع همساز

مسئلهٔ یافتن تابعی که در یک حوزهٔ مشخص همساز باشد، و بر مز آن حوزه در شرایط از پیش تعیین شده‌ای صدق کند، در ریاضیات کاربردی از اهمیت خاصی برخوردار است. اگر مقادیر تابع درامتداد مرزاپیش تعیین شده باشند، مسئله، به مسئلهٔ مقدار مرزی نوع اول یا مسئلهٔ دیریکله<sup>۱</sup> معروف است. اگر مقادیر مشتق نرمال تابع بر مرزاپیش تعیین شده باشند، مسئلهٔ مقدار مرزی یکی از مسائل نوع دوم یا مسئلهٔ نویمان<sup>۲</sup> است. صورتهای اصلاح شده و ترکیبیهای از این دونوع شرایط مرزی نیز پیش می‌آیند. حوزه‌هایی که بیشتر موقع در کاربردها با آن مواجه می‌شویم همبند ساده‌اند و چون هر تابع که در حوزهٔ همبند ساده‌ای همساز باشد همیشه دارای مزدوج همساز است (بخش ۹۷)، جوابهای مسائل مقدار مرزی برای چنین حوزه‌هایی قسمتهای حقیقی یا موهومی تابع تحلیلی‌اند.

مثال ۱. در مثال ۱ بخش ۲۵، دیدیم که تابع

$$T(x, y) = e^{-y} \sin x$$

در یک مسئلهٔ دیریکله برای نوار  $\pi < x < ۰, ۰ < y$  صدق می‌کند و خاطر نشان کردیم که جوابی از یک مسئلهٔ دما را نمایش می‌دهد. تابع  $T(x, y)$ ، که در راست صفحهٔ  $xy$  همساز است، بهوضوح قسمت حقیقی تابع تام

$$-ie^{iz} = e^{-y} \sin x - ie^{-y} \cos x$$

است. همچنین قسمت موهومی تابع تام  $e^{iz}$  است.

بعضی مواقع جواب یک مسئلهٔ مقدار مرزی مفروض را می‌توان با گرفتن آن به عنوان قسمت حقیقی یا موهومی یک تابع تحلیلی پیدا کرد. اما موفقیت در این روش بستگی به سادگی مسئله و آشنایی با قسمتهای حقیقی و موهومی تابع تحلیلی گوناگون دارد. قضیه زیر وسیلهٔ کمکی مهمی است. قضیه. فرض کنید تابع تحلیلی

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \quad (1)$$

حوزهٔ  $D_z$  از صفحهٔ  $z$  را به روی حوزهٔ  $D_w$  از صفحهٔ  $w$  بنگارد. اگر  $(u, v)$  تابع همسازی باشد که بر  $D_w$  تعریف شده است آنگاه تابع

$$H(x, y) = h[u(x, y), v(x, y)] \quad (2)$$

در  $D_z$  همساز است.

ابتدا قضیه را برای حالت ثابت می‌کنیم که  $D_w$  همبند ساده است. بنابر بخش ۹۷ چون  $D_w$  همبند ساده است، تابع همساز مفروض  $h(u, v)$  دارای مزدوج همسازی مانند  $g(u, v)$  است. بنابراین تابع

$$\Phi(w) = h(u, v) + ig(u, v) \quad (3)$$

در  $D_w$  تحلیلی است. چون تابع  $f(z)$  در  $D_z$  تحلیلی است، تابع مرکب  $\Phi[f](z)$  نیز در  $D_z$  تحلیلی است. در نتیجه  $[h[u(x, y), v(x, y)]$  قسمت حقیقی این تابع مرکب در  $D_z$  همساز است.

اگر  $D_w$  همبند ساده نباشد، ملاحظه می‌کنیم که هر نقطه  $w$  در  $D_w$  دارای همسایگی مانند  $\varepsilon < |w - w_0|$  است که تماماً در  $D_w$  واقع است. چون این همسایگی همبند ساده است، تابعی از نوع (۳) در آن تحلیلی است. به علاوه، چون  $f$  در نقطه  $z_0$  از  $D_z$  که تصویر آن  $w_0$  است پیوسته است، همسایگی مانند  $\delta < |z - z_0|$  وجود دارد به طوری که تصویر آن مشمول در همسایگی  $\varepsilon < |w - w_0|$  است. بنابراین نتیجه می‌شود که تابع مرکب  $\Phi[f](z)$  در همسایگی  $|z - z_0| < \delta$  تحلیلی است و در نتیجه  $[h[u(x, y), v(x, y)]$  در آنجا همساز است. بالاخره، چون  $w_0$  در  $D_w$  به دلخواه گرفته شده بود و چون هر نقطه  $D_z$  تحت تبدیل  $w = f(z)$  به چنین نقطه‌ای نگاشته می‌شود، تابع  $[h[u(x, y), v(x, y)]$  باید در سراسر  $D_z$  همساز باشد.

اثبات این قضیه را برای حالت کلی که  $D_w$  لزوماً همبند ساده نیست می‌توان مستقیماً به وسیله قاعده زنجیری در مورد مشتقات جزئی ارائه داد. ولی محاسبات تا اندازه‌ای پیچیده است (تمرین ۸، بخش ۹۹، را ببینید).

مثال ۲. تابع  $u = h(u, v) = e^{-v} \sin D_w$  در حوزه  $D_w$ ، متشکل از همه نقاط واقع در نیم صفحه بالایی  $v > 0$  همساز است (مثال ۱ را ببینید). اگر تبدیل عبارت باشد از  $w = z^2$ ، آنگاه  $v(x, y) = 2xy$  و  $u(x, y) = x^2 - y^2$  داده شد، حوزه  $D_z$  از صفحه  $z$  متشکل از نقاط واقع در ربع اول  $x > 0, y > 0$  به روی حوزه  $D_w$  نگاشته می‌شود. بنابراین تابع

$$H(x, y) = e^{-2xy} \sin(x^2 - y^2)$$

در  $D_z$  همساز است.

مثال ۳. تابع  $v = h(u, v) = \operatorname{Im} w = \operatorname{Log} z$  که در نوار افقی  $-\pi/2 < v < \pi/2$  همساز است، در نظر می‌گیریم. بنابر مثال ۳، در بخش ۸۸، به سادگی نتیجه می‌شود که تبدیل

نیم صفحه سمت راست  $x >$  را به روی آن نوار می‌نگارد. اگر بنویسیم

$$\operatorname{Log} z = \ln \sqrt{x^2 + y^2} + i \arctan \frac{y}{x},$$

که در آن  $\pi/2 < \arctan t < \pi/2 - \pi/2$ ، در می‌یابیم که تابع

$$H(x, y) = \arctan \frac{y}{x}$$

در نیم صفحه  $x >$  همساز است.

## ۹۹. تبدیل شرایط مرزی

شرایطی که تابع یا مشتق نرمال آن در امتداد مرز یک حوزه که در آن همساز است دارای مقادیر از پیش تعیین شده‌ای باشند، عمومی‌ترین نوع شرایط مرزی‌اند، ولی تنها نوع مهم آن نیستند. در این بخش نشان می‌دهیم که برخی از این شرایط تحت تغییر متغیرهای وابسته به تبدیل همدیس، تغییرناپذیر باقی می‌مانند. در فصل ۱۰ این نتایج را برای به دست آوردن جواب مسائل مقدار مرزی به کار خواهیم برد. روشی که در آنجا به کار رفته بدین صورت است که مسئله مرزی مفروض در صفحه  $xy$  را به مسئله ساده‌تری در صفحه  $uv$  تبدیل می‌کنند و سپس با استفاده از قضایای این بخش و بخش قبل، جواب مسئله اولیه را بر حسب جواب حاصل برای دومی می‌نویسند.

قضیه. فرض کنید تبدیل

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \quad (1)$$

روی قوس هموار  $C$  همدیس و  $\Gamma$  تصویر  $C$  تحت این تبدیل باشد. اگر تابع  $h(u, v)$  در امتداد  $\Gamma$  در یکی از شرایط

$$\frac{dh}{dn} = 0 \quad \text{یا} \quad h = h_0. \quad (2)$$

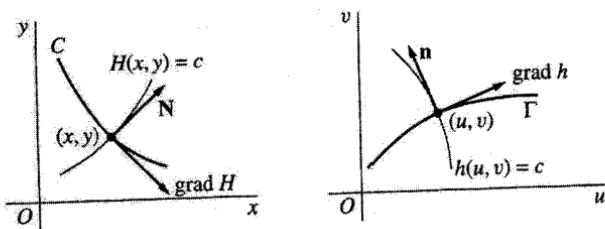
صدق کند، که در آن  $h$  یک عدد حقیقی ثابت و  $dh/dn$  نمایش مشتقات نرمال بر  $\Gamma$  است، آنگاه تابع

$$H(x, y) = h[u(x, y), v(x, y)] \quad (3)$$

در امتداد  $C$  در شرط متناظر

$$\frac{dH}{dN} = 0 \quad \text{یا} \quad H = h_0. \quad (4)$$

صدق می‌کند، که در آن  $dH/dN$  نمایش مشتقات نرمال بر  $C$  است.



شکل ۱۳۲

برای آنکه نشان دهیم شرط  $h = h$  روی  $\Gamma$  مستلزم شرط  $H = H$  روی  $C$  است، توجه می‌کنیم که بنابر رابطه (۳) مقدار  $H$  در هر نقطه  $(x, y)$  روی  $C$  همان مقدار  $h$  در  $(u, v)$  تصویر  $(x, y)$  تحت تبدیل (۱) است. چون نقطه تصویر یعنی  $(u, v)$  روی  $\Gamma$  واقع است و چون در امتداد آن منحنی  $h = h$  در نتیجه در امتداد  $C$  داریم  $.H = H$  در اینجا  $h = h$  در امتداد  $C$  داشته باشیم. از حسابات می‌دانیم که

$$\frac{dh}{dn} = (\text{grad } h) \cdot \mathbf{n}, \quad (5)$$

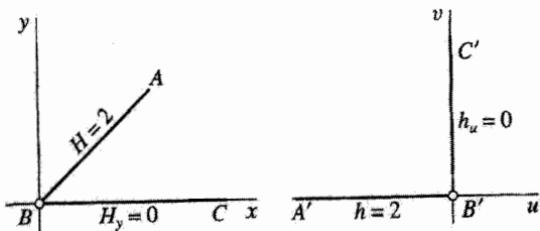
که در آن  $\text{grad } h$  نمایش گرادیان  $h$  در نقطه  $(u, v)$  روی  $\Gamma$  است و  $\mathbf{n}$  بردار یکه‌ای قائم بر  $\Gamma$  در  $(u, v)$  است. چون در  $(u, v)$  داریم  $.dh/dn = 0$  از رابطه (۵) نتیجه می‌شود که  $h$  در  $(u, v)$  بر  $\mathbf{n}$  عمود است. یعنی،  $\text{grad } h$  در آنجا بر  $\Gamma$  مماس است (شکل ۱۳۲). اما گرادیانها بر منحنی‌های تراز عمودند؛ و چون  $\text{grad } h$  بر  $\Gamma$  مماس است، می‌بینیم که  $\Gamma$  بر هر منحنی تراز  $h(u, v) = c$  مار بر  $(u, v)$  عمود است.

حال بنابر رابطه (۳)، منحنی تراز  $c$  در صفحه  $z$  را می‌توان چنین نوشت

$$h[u(x, y), v(x, y)] = c;$$

و لذا بهوضوح تحت تبدیل (۱) به منحنی تراز  $c$   $h(u, v) = h$  تبدیل می‌شود. به علاوه چون  $C$  بر  $\Gamma$  تبدیل می‌شود و همان طور که در بند قبل توضیح دادیم  $\Gamma$  بر منحنی تراز  $c$   $h(u, v) = c$  بر منحنی  $C$  بر منحنی تراز  $c$   $H(x, y) = c$  عمود است. چون گرادیانها بر منحنی‌های تراز عمودند، در نتیجه  $H$  در  $(x, y)$  بر  $C$  مماس است (شکل ۱۳۲ را ببینید). بنابراین اگر  $\mathbf{N}$  نمایش بردار یکه‌ای قائم بر  $C$  در  $(x, y)$  باشد،  $\text{grad } H$  بر  $\mathbf{N}$  عمود است. یعنی،

$$(\text{grad } H) \cdot \mathbf{N} = 0. \quad (6)$$



شکل ۱۳۳

بالاخره، چون

$$\frac{dH}{dN} = (\text{grad } H) \cdot \mathbf{N},$$

می‌توان از رابطه (۶) نتیجه گرفت که در هر نقطه روی  $C$ ،  $dH/dN = 0$ . در بحث بالا، به طور ضمنی فرض کردہ‌ایم که  $\text{grad } h \neq 0$ . اگر  $\text{grad } h = 0$ ، از اتحاد

$$|\text{grad } H(x, y)| = |\text{grad } h(u, v)| \cdot |f'(z)|,$$

که در تمرین ۱۰ (الف) در ذیل به دست می‌آید، نتیجه می‌شود که  $\text{grad } H = 0$  بنا براین و مشتق نرمال متناظر  $dH/dN$  هر دو صفرند. همچنین فرض کردیم که (الف)  $\text{grad } h$  و  $\text{grad } H$  همیشه موجودند؛

(ب) در صورتی که در  $(u, v)$ ،  $\text{grad } h \neq 0$  منحنی تراز  $c$  در نقطه  $(x, y) = H(x, y)$  قوسی هموار است.

شرط (ب) اطمینان می‌دهد که اگر تبدیل (۱) همیس باشد زوایای بین قوسها به وسیله این تبدیل حفظ می‌شوند. در همه کاربردهایمان شرایط (الف) و (ب) هر دو برقرار خواهند بود. مثال. به عنوان نمونه، تابع  $h(u, v) = v + 2$  را در نظر بگیرید. تبدیل

$$w = iz^2 = -2xy + i(x^2 - y^2)$$

همیس است هرگاه  $x > 0$ . این تبدیل نیم خط  $y = x$  را به روی محور  $u$  منعی می‌نگارد، که در آن  $h = 2$  و محور  $x$  مثبت را به روی محور  $v$  مثبت می‌نگارد، که در آن مشتق نرمال  $h_u$  مساوی است (شکل ۱۳۳). بنابر قضیه بالا، تابع

$$H(x, y) = x^2 - y^2 + 2$$

باید در امتداد نیم خط  $y = x$  ( $x > 0$ ) در شرط  $H = 2$  و در امتداد محور  $x$  مثبت در شرط  $H_y = 0$  صدق کند، این مطلب را می‌توان مستقیماً تحقیق کرد.

شرطی که یکی از دو نوع شرط مرزی مذکور در قضیه نباشد ممکن است به شرطی تبدیل شود که اساساً مغایر شرط اولیه است (تمرین ۶ را ببینید). در هر حالت برای یک تبدیل خاص ممکن است شرایط مرزی جدیدی به دست آید. توجه به این نکته جالب است که تحت یک تبدیل همیس، نسبت مشتق جهتی  $H$  در امتداد قوس هموار  $C$  از صفحه  $z$ ، به مشتق جهتی  $h$  در امتداد منحنی تصویر  $\Gamma$  در نقطه متناظر صفحه  $w$  عبارت است از  $|f'(z)|$ : معمولاً این نسبت در امتداد یک قوس مفروض ثابت نیست. (تمرین ۱۰ را ببینید).

### تمرینها

۱. با استفاده از فرمول (۵) بخش ۹۷ یک مزدوج همساز برای تابع همساز  $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$  بینا کنید. تابع تحلیلی حاصل را بر حسب متغیر مختلط  $z$  بنویسید.
۲. فرض کنید  $u(x, y)$  در حوزه همبند ساده  $D$  همساز باشد. با استفاده از نتایج بخش‌های ۹۷ و ۴۸ نشان دهید که مشتقات جزئی  $u$  از هر مرتبه در سراسر  $D$  پیوسته‌اند.
۳. همان طور که در شکل ۶ پیوست ۲ نشان داده شده، تبدیل  $z = w$  نوار افقی  $y < \pi < u < v$  را به روی نیم صفحه بالایی  $v > 0$  می‌نگارد، و تابع

$$h(u, v) = \operatorname{Re}(w^2) = u^2 - v^2$$

- در آن نیم صفحه همساز است. به کمک قضیه بخش ۹۸ نشان دهید که تابع  $2y$  در این نوار همساز است. این نتیجه را مستقیماً تحقیق کنید.
۴. تحت تبدیل  $z = \exp w$ ، تصویر پاره خط  $u^2 + v^2 = 1$  از محور  $u$  نیم‌دایره  $u^2 + v^2 \geq 0$  است. همچنین، تابع

$$h(u, v) = \operatorname{Re} \left( 2 - w + \frac{1}{w} \right) = 2 - u + \frac{u}{u^2 + v^2}$$

همه جا در صفحه  $w$ ، بجز در مبدأ، همساز و روی نیم‌دایره بالا مقدارش  $2 = h$  است. برای تابع  $H(x, y)$  که در قضیه بخش ۹۹ تعریف شد عبارت صریحی بنویسید. سپس با اثبات مستقیم این مطلب که روی پاره خط  $\pi \leq y \leq 0$  از محور  $u$ ها داریم  $2 = H$ ، این قضیه را با مثال تشریح نمایید.

۵. تحت تبدیل  $z^2 = w$ ، محورهای  $x$  و  $y$  مثبت و مبدأ صفحه  $z$  به روی محور  $u$  در صفحه  $w$  نگاشته می‌شوند. حال تابع همساز

$$h(u, v) = \operatorname{Re}(e^{-w}) = e^{-u} \cos v$$

را در نظر بگیرید و توجه کنید که  $h_v$  مشتق نرمال آن در امتداد محور  $u$ ، صفر است. وقتی  $f(z) = z^2$ ، قضیه بخش ۹۹ را با مثال تشریح نمایید، برای انجام این کار مستقیماً نشان دهید که مشتق نرمال تابع  $H(x, y)$  که در آن قضیه تعریف شد در امتداد محورهای مثبت صفحه  $z$  صفر است. (توجه کنید که تبدیل  $z^2 = w$  در مبدأ همیس نیست.)

۶. به جای تابع  $h(u, v)$  در تمرین ۵ تابع همساز

$$h(u, v) = \operatorname{Re}(-2iw + e^{-w}) = 2v + e^{-u} \cos v$$

را قرار دهید. سپس نشان دهید که در امتداد محور  $x$ ,  $h_v = 2$ , اما در امتداد محور  $y$  مثبت و در امتداد محور  $y$  مثبت  $H_x = 4y$  و  $H_y = 4x$

$$\frac{dh}{dn} = h_0 \neq 0.$$

لزوماً به شرطی از نوع  $dH/dN = h_0$  تبدیل نمی‌شود.

۷. نشان دهید که اگر تابع  $H(x, y)$  جواب مسئله نویمان باشد (بخش ۹۸ آنگاه  $A$ ) آنگاه  $H(x, y) + A$  نیز که در آن  $A$  عدد حقیقی ثابتی است جواب آن مسئله است.

۸. فرض کنید تابع تحلیلی  $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  حوزه  $D_z$  از صفحه  $z$  را به روی حوزه  $D_w$  از صفحه  $w$  بنگارد و تابع  $h(u, v)$  با مشتقات جزئی مرتبه اول و دوم پیوسته در  $D_w$  تعریف شده باشد. با استفاده از قاعده زنجیری برای مشتقات جزئی نشان دهید اگر  $h$  در آنگاه  $H(x, y) = h[u(x, y), v(x, y)]$

$$H_{xx}(x, y) + H_{yy}(x, y) = [h_{uu}(u, v) + h_{vv}(u, v)]|f'(z)|^2.$$

نتیجه بگیرید که اگر  $(v)$  در  $D_w$  همساز باشد، آنگاه  $H(x, y)$  در  $D_z$  همساز است . این برهان دیگری برای قضیه بخش ۹۸ است، حتی وقتی که حوزه  $D_w$  همبند چندگانه باشد.

راهنمایی: در ساده کردنها، توجه به این نکته مهم است که چون  $f$  تحلیلی است معادلات کوشی-ریمان  $u_y = -v_x$  و  $u_x = v_y$  برقرارند و توابع  $u$  و  $v$  در معادله لاپلاس صدق می‌کنند. همچنین بنابر شرایط پیوستگی مشتقات  $h$  مطمئنیم که  $h_{uv} = h_{vu}$ .

۹. فرض کنید  $(u, v)$  تابعی باشد که در حوزه  $D_w$  از صفحه  $w$  دارای مشتقات جزئی مرتبه اول و دوم پیوسته باشد و در معادله پواسون<sup>۱</sup> صدق کنند

$$p_{uu}(u, v) + p_{vv}(u, v) = \Phi(u, v),$$

که در آن  $\Phi$  تابع از پیش تعیین شده‌ای است. نشان دهید چگونه از اتحاد حاصل در تمرین ۸ نتیجه می‌شود که اگر تابع تحلیلی

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

حوزه  $D_z$  را به روی حوزه  $D_w$  بنگارد، آنگاه تابع

$$P(x, y) = p[u(x, y), v(x, y)]$$

در  $D_z$  در معادله پواسون زیر صدق می‌کند

$$P_{xx}(x, y) + P_{yy}(x, y) = \Phi[u(x, y), v(x, y)]|f'(z)|^4.$$

۱۰. فرض کنید  $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  نگاشت همدیسی از قوس هموار  $C$  به روی قوس هموار  $\Gamma$  در صفحه  $w$  باشد. فرض کنید تابع  $h(u, v)$  روی  $\Gamma$  تعریف شده باشد و قرار دهید

$$H(x, y) = h[u(x, y), v(x, y)].$$

(الف) با توجه به حسابان می‌دانیم که مؤلفه‌های  $x$  و  $y$  تابع  $\text{grad } H$  به ترتیب، مشتقات جزئی  $H_x$  و  $H_y$  هستند، همین‌طور  $\text{grad } h$  دارای مؤلفه‌های  $h_u$  و  $h_v$  است. با استفاده از قاعدة زنجیری برای مشتقات جزئی و معادلات کوشی-ربیمان، نشان دهید که اگر  $(x, y)$  نقطه‌ای روی  $C$  و  $(u, v)$  تصویر آن روی  $\Gamma$  باشد، آنگاه

$$|\text{grad } H(x, y)| = |\text{grad } h(u, v)| |f'(z)|.$$

(ب) ثابت کنید زاویه قوس  $C$  با  $\text{grad } H$  در هر نقطه  $(x, y)$  روی  $C$  برابر است با زاویه  $.(x, y)$  در  $(u, v)$  تصویر نقطه  $.$  با  $\text{grad } h$

(ج) فرض کنید  $s$  و  $\sigma$ ، به ترتیب، نمایش فاصله در امتداد  $C$  و  $\Gamma$  باشند و  $t$  و  $\tau$  نمایش بردارهای یکه مماس در  $(x, y)$  روی  $C$  و تصویرش  $(u, v)$  در جهت افزایش فاصله باشند. به کمک نتایج قسمتهای (الف) و (ب) واستفاده از اینکه

$$\frac{dh}{d\sigma} = (\operatorname{grad} h) \cdot \tau \quad \text{و} \quad \frac{dH}{ds} = (\operatorname{grad} H) \cdot t$$

نشان دهید که مشتق جهتی در امتداد قوس  $\Gamma$  به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\frac{dH}{ds} = \frac{dh}{d\sigma} |f'(z)|.$$

## کاربردهای نگاشت همدیس

اینک با استفاده از نگاشت همدیس، به حل تعدادی مسئله فیزیکی می‌پردازیم که شامل معادله لایپلاس با دو متغیر مستقل‌اند. مسائلی در هدایت گرما، پتانسیل الکترواستاتیکی و جریان سیال بررسی خواهد شد. چون هدف این است که این مسائل روشها را تشریح کنند، آنها را در سطحی نسبتاً مقدماتی ارائه می‌کنیم.

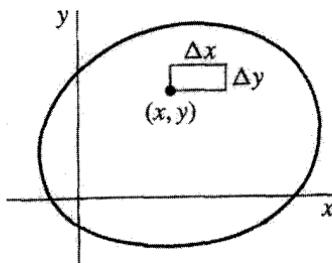
### ۱۰۰. دمای پایا

در نظریه هدایت گرما شارگذرنده از سطح یک جسم صلب در نقطه‌ای از آن سطح عبارت است از مقدار گرمایی که در امتداد مشخصی عمود بر سطح در واحد زمان و در واحد سطح از آن نقطه جریان دارد. بنابراین شار بر حسب واحدهایی از قبیل کالری در ثانیه در سانتی‌متر مربع اندازه‌گیری می‌شود. در اینجا آن را با  $\Phi$  نمایش می‌دهیم و با مشتق نرمال دمای  $T$  در نقطه روی سطح تغییر می‌کند:

$$\Phi = -K \frac{dT}{dN} \quad (K > 0). \quad (1)$$

رابطه (۱) به قانون فوریه مشهور است و عدد ثابت  $K$  هدایت گرمایی جسم صلب، که فرض می‌کنیم همگن باشد، نامیده می‌شود.\*

\* این قانون به احترام فیزیک‌دان فرانسوی ژوزف فوریه (۱۸۳۰-۱۷۶۸) نامگذاری شده است. ترجمه کتاب او، مذکور در پیوست ۱، کتابی کلاسیک در نظریه هدایت گرما است.



شکل ۱۳۴

نقاط جسم صلب با مختصات دکارتی در فضای سه بعدی تعیین می شوند، و ما توجه خود را به حالت هایی محدود می کنیم که دمای  $T$  فقط با مختصات  $x$  و  $y$  تغییر کند. چون  $T$  با مختص در امتداد محور عمود بر صفحه  $xy$  تغییر نمی کند پس جریان گرما دو بعدی و موازی با آن صفحه است. علاوه بر آن فرض می کنیم، که جریان در حالت پایاست؛ یعنی،  $T$  با زمان تغییر نمی کند.

فرض می شود که در درون جسم صلب، انرژی گرمایی تولید یا تلف نشود. یعنی هیچ چشممه یا چاهک گرمایی در آن نیست. همچنین تابع دما،  $T(x, y)$ ، و همه مشتقات جزئی مرتبه اول و دوم آن در هر نقطه داخلی جسم صلب پیوسته اند. این حکم و فرمول (۱) درباره شار گرما اصول موضوعه نظریه ریاضی هدایت گرما هستند؛ اصول موضوعه ای که در نقاط درون یک جسم صلب شامل توزیع پیوسته چشممه ها یا چاهکها نیز به کار می رود.

حال یک عنصر حجم واقع در داخل جسم صلب را در نظر می گیریم، این عنصر به شکل یک منشور مستطیلی به ارتفاع واحد عمود بر صفحه  $xy$  است با قاعدة  $\Delta x$  در  $y$  در  $\Delta y$  در آن صفحه (شکل ۱۳۴). نزد زمانی جریان گرما به طرف راست در طول وجه سمت چپ عبارت از  $-KT_x(x, y)\Delta y$  است و به طرف راست در طول وجه سمت راست عبارت از  $-KT_x(x + \Delta x, y)\Delta y$ . با کم کردن نزد اولی از دومی نزد اتفاق گرمای عنصر را در میان آن دو وجه به دست می آوریم. اگر  $\Delta x$  خیلی کوچک باشد، نسبت حاصل را می توان چنین نوشت

$$-K \left[ \frac{T_x(x + \Delta x, y) - T_x(x, y)}{\Delta x} \right] \Delta x \Delta y$$

یا

$$-KT_{xx}(x, y)\Delta x \Delta y. \quad (2)$$

البته عبارت (۲) تقریبی است و وقتی  $\Delta x$  و  $\Delta y$  کوچکتر شوند، دقیقش افزایش می یابد.

به روشهای مشابه نزخ اتلاف گرمای حاصل در میان وجههای دیگر عمود بر صفحه  $xy$  چنین به دست می‌آید

$$-KT_{yy}(x, y)\Delta x\Delta y. \quad (3)$$

گرما فقط از طریق این چهار وجه به عنصر داخل یا از آن خارج می‌شود و دما درون عنصر پایاست. بنابراین، مجموع عبارات (۲) و (۳) صفر است؛ یعنی

$$T_{xx}(x, y) + T_{yy}(x, y) = 0. \quad (4)$$

پس تابع دما در هر نقطه داخلی جسم صلب در معادله لابلás صدق می‌کند. با توجه به معادله (۴) و پیوستگی تابع دما و مشتقات جزئی آن در حوزه‌ای که معرف داخل

جسم باشد،  $T$  تابع همسازی از  $x$  و  $y$  در حوزه معرف داخل جسم صلب است.

سطوح  $S_1 = c_1$  که در آن عدد حقیقی ثابتی است، تکدهای درون جسم صلب هستند همچنین می‌توان آنها را به عنوان منحنیهای در صفحه  $xy$  در نظر گرفت؛ در این صورت  $T(x, y)$  را می‌توان به عنوان دما در نقطه  $(x, y)$  لایه نازکی از ماده در آن صفحه تعبیر کرد که وجههای لایه عایق گرما هستند. تکدهای عبارت‌اند از منحنیهای تراز تابع

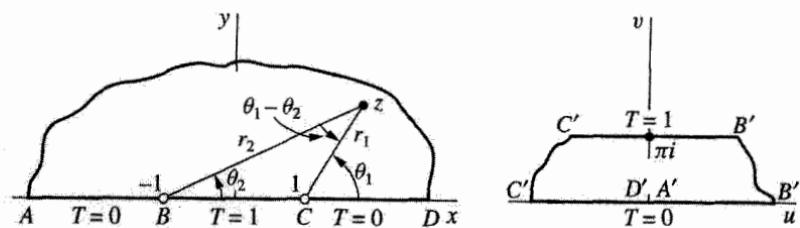
گرادیان  $T$  در هر نقطه بر تکدها عمود است و شار ماکسیمم در یک نقطه در جهت گرادیان در آن نقطه است. اگر  $T(x, y)$  معرف دما در یک لایه نازک باشد و  $S$  یک مزدوج همسار تابع  $T$ ، آنگاه در هر نقطه‌ای که تابع تحلیلی  $T(x, y) + iS(x, y)$  همدیس باشد گرادیان  $T$  همان بردار مماس بر منحنی  $S(x, y) = c_2$  است. منحنیهای  $S(x, y) = c_2$  خطوط جریان نامیده می‌شوند.

اگر مشتق نرمال  $dT/dN$  در امتداد قسمتی از مرز لایه صفر باشد، شار دما در امتداد آن قسمت صفر است. یعنی آن قسمت عایق گرما و بنابراین یک خط جریان است.

تابع  $T$  همچنین می‌تواند معرف غلظت ماده‌ای باشد که در جسم صلب پخش می‌شود. در آن حالت  $K$  ضریب پخش است. بحث فوق واستنتاج معادله (۴) در مورد پخش پایا-حالات هم به کار می‌رود.

## ۱۰۱. دماهای پایا در نیم صفحه

حال فرمولی برای دمای پایا،  $T(x, y)$ ، در یک ورق نازک نیمه نامتناهی  $y \geq 0$  پیدا می‌کنیم که وجود آن عایق‌اند و لبّه  $y = 0$  آن، بجز تکه  $1 < x < -1$ ، که در دمای واحد نگهداری



شکل ۱۳۵

$$w = \log \frac{z-1}{z+1} \left( \frac{r_1}{r_2} > 0, -\frac{\pi}{2} < \theta_1 - \theta_2 < \frac{\pi}{2} \right)$$

شده است، در دمای صفر نگهداشته می‌شود (شکل ۱۳۵). تابع  $T(x, y)$  باید کراندار باشد؛ اگر ورق مفروض را به عنوان حالت حدی ورق  $y \leq 0$  در نظر بگیریم، که وقتی  $y$  افزایش یابد، لبۀ بالائی آن در دمای ثابتی نگهداشته می‌شود، این شرط طبیعی خواهد بود. در واقع از نظر فیزیکی معقول است که شرط کنیم وقتی  $y$  به بی‌نهایت میل می‌کند  $T(x, y)$  به صفر میل کند. مسئله مقدار مرزی را که باید حل کرد می‌توان چنین نوشت

$$T_{xx}(x, y) + T_{yy}(x, y) = 0 \quad (-\infty < x < \infty, y > 0) \quad (1)$$

$$T(x, 0) = \begin{cases} 1, & |x| < 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases} \quad (2)$$

همچنین  $|T(x, y)| < M$  عدد ثابت مثبتی است. این یک مسئله دیریکله برای نیمه بالائی صفحه  $xy$  است. روش حل ما به دست آوردن مسئله دیریکله جدیدی برای یک ناحیه در صفحه  $uv$  است. این ناحیه عبارت خواهد بود از تصویر این نیم‌صفحه تحت تبدیل  $w = f(z)$  که در حوزه  $y > 0$  تحلیلی و در امتداد مرز  $y = 0$  بجز در نقاط  $(\pm 1, 0)$ ، که در آنها تعريف نشده است، همیس است. پیدا کردن تابع همساز و کرانداری که در مسئله جدید صدق کند، کار ساده‌ای خواهد بود. در این صورت با استفاده از دو قضیه فصل ۹، جواب مسئله در صفحه  $uv$  را به جواب مسئله اصلی در صفحه  $xy$  تبدیل می‌کنیم. بهویژه، تابعی همساز از  $u$  و  $v$  به تابعی همساز از  $x$  و  $y$  تبدیل خواهد شد و شرایط مرزی در صفحه  $uv$  روی قسمتهای متناظر مرز در صفحه  $xy$  حفظ خواهد شد. اگر همان نماد  $T$  را برای نمایش تابع دمای مختلف در دو صفحه به کار ببریم، ابهامی پیش نخواهد آمد.

## حال می‌نویسیم

$$z + 1 = r_2 \exp(i\theta_2) \quad \text{و} \quad z - 1 = r_1 \exp(i\theta_1)$$

که در آنها  $\pi \leq \theta_k \leq \pi$  ( $k = 1, 2$ ). تبدیل

$$w = \log \frac{z-1}{z+1} = \ln \frac{r_1}{r_2} + i(\theta_1 - \theta_2) \quad \left( \frac{r_1}{r_2} > 0, -\frac{\pi}{2} < \theta_1 - \theta_2 < \frac{3\pi}{2} \right) \quad (3)$$

در نیم صفحه بالایی  $y \geq 0$ , بجز نقاط  $z = \pm 1$  تعريف شده است، زیرا در آن ناحیه  $\pi \leq \theta_1 - \theta_2 \leq \theta_1 \leq \pi$  (شکل ۱۳۵ را ببینید). حال وقتی  $y < 0$  مقدار لگاریتم، مقدار اصلی است و مثال ۳، بخش ۸۸ را یادآور می‌شویم که نیم صفحه بالایی  $y > 0$  به روی نوار  $\pi < v < \pi$  در صفحه  $w$  نگاشته می‌شود. چنانکه قبلًا در آن مثال گفته شد، این نگاشت و نقاط مرزی متناظرش در شکل ۱۹، پیوست ۲ نشان داده شده است. در واقع همان شکل راهنمای ما برای رسیدن به تبدیل (۳) بود. قطعه محور  $x$  واقع بین  $-1 = z = z = 1$  و  $z = 1 = \pi - \theta_2 = \theta_1 - \theta_2$ , به روی لبه بالایی نوار نگاشته می‌شود و بقیه محور  $x$ , که در آن  $v = \pi$  به روی لبه پایینی. شرایط تحلیلی بودن و همدیس بودن لازم بهوضوح برای تبدیل (۳) برقرارند. یک تابع همساز و کراندار از  $v$  و  $v$  که روی لبه  $v = \pi$  از نوار، مساوی صفر و روی لبه  $v = \pi$  مساوی واحد باشد مسلماً چنین است

$$T = \frac{1}{\pi} v; \quad (4)$$

که چون قسمت موهمی تابع  $w(\pi/1)$  است، همساز است. اگر به وسیله رابطه

$$w = \ln \left| \frac{z-1}{z+1} \right| + i \arg \left( \frac{z-1}{z+1} \right), \quad (5)$$

آن را به مختصات  $x$  و  $y$  تغییر دهیم، در می‌یابیم که

$$v = \arg \left[ \frac{(z-1)(\bar{z}+1)}{(z+1)(\bar{z}+1)} \right] = \arg \left[ \frac{x^2 + y^2 - 1 + i2y}{(x+1)^2 + y^2} \right]$$

یا

$$v = \arctan \left( \frac{2y}{x^2 + y^2 - 1} \right).$$

در اینجا برد تابع آرکتانزانت از  $\pi$  است زیرا

$$\arg \left( \frac{z-1}{z+1} \right) = \theta_1 - \theta_2$$

$\pi \leq \theta_1 - \theta_2 < 0$ . حال فرمول (۴) به صورت زیر در می‌آید

$$T = \frac{1}{\pi} \arctan \left( \frac{2y}{x^2 + y^2 - 1} \right) \quad (\pi \leq \arctan t \leq \pi). \quad (6)$$

چون تابع (۴) در نوار  $v < \pi < y$  همساز و تبدیل (۳) در نیم صفحه  $\pi < y$  تحلیلی است، می‌توان با استفاده از قضیه بخش ۹۸ نتیجه گرفت که تابع (۶) در این نیم صفحه همساز است. شرایط مرزی دو تابع همساز بر تکه‌های متناظر مرزها یکی هستند، زیرا از نوع  $h = h$  هستند. که در قضیه بخش ۹۹ بررسی شدند. بنابراین تابع کراندار (۶) جواب مطلوب مسئله اصلی است. البته می‌توان مستقیماً تحقیق کرد که تابع (۶) در معادله لاپلاس صدق می‌کند و دارای مقادیری است که وقتی نقطه  $(x, y)$  از بالا به محور  $x$  میل می‌کند، به مقادیر نشان داده شده در سمت چپ شکل ۱۳۵ میل می‌کنند.

تکدهای  $c_1$  از قوسهایی از دوازده ربع

$$x^2 + (y - \cot \pi c_1)^2 = \csc^2 \pi c_1,$$

که مراکز آنها روی محور  $y$  هاست و از نقاط  $(\pm 1, 0)$  می‌گذرند.

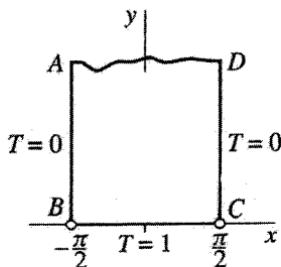
سرانجام توجه می‌کنیم که چون حاصلضرب یک تابع همساز در عددی ثابت نیز تابعی همساز است، تابع

$$T = \frac{T_0}{\pi} \arctan \left( \frac{2y}{x^2 + y^2 - 1} \right) \quad (\pi \leq \arctan t \leq \pi)$$

نمایش دمای پایا در نیم صفحه مفروض است، هنگامی که به جای دمای  $1$  در امتداد قطعه  $1 < x < -1$  از محور  $x$  دمای ثابت  $T = T_0$  را قرار دهیم.

## ۱۰۲. مسئله‌ای در این زمینه

یک قاب نیمه نامتناهی در فضای سه بعدی را در نظر می‌گیریم که به صفحات  $x/\pi/2$  و  $y = 0$  محدود است. دو سطح اول در دمای صفر نگهداری می‌شوند و سومی در دمای واحد.



شکل ۱۳۶

می‌خواهیم عبارتی برای دمای  $T(x, y)$  در هر نقطه داخلی قاب پیدا کنیم. این مسئله، همچنین مسئلهٔ یافتن دما در ورق نازکی است به شکل نوار نیمه نامتناهی  $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$ ،  $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$ ، وقتی که وجهه ورق کاملاً عایق‌بندی شده‌اند (شکل ۱۳۶). مسئلهٔ مقدار مرزی در اینجا عبارت است از

$$T_{xx}(x, y) + T_{yy}(x, y) = 0 \quad \left( -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, y > 0 \right) \quad (1)$$

$$T\left(-\frac{\pi}{2}, y\right) = T\left(\frac{\pi}{2}, y\right) = 0 \quad (y > 0) \quad (2)$$

$$T(x, 0) = 1 \quad \left( -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \right) \quad (3)$$

که در آن  $T(x, y)$  کراندار است.  
با توجه به مثال ۱ بخش ۸۹ و شکل ۹ پیوست ۲، نگاشت

$$w = \sin z \quad (4)$$

این مسئلهٔ مقدار مرزی را به مسئله‌ای که در بخش ۱۰ مطرح شد تبدیل می‌کند (شکل ۱۳۵). بنابراین طبق جواب (۶) آن بخش،

$$T = \frac{1}{\pi} \arctan \left( \frac{2v}{u^2 + v^2 - 1} \right) \quad (\circ \leq \arctan t \leq \pi). \quad (5)$$

تغییر متغیرهایی را که در رابطه (۴) گفته شده است می‌توان چنین نوشت

$$u = \sin x \cosh y, \quad v = \cos x \sinh y;$$

و تابع همساز (۵) چنین می‌شود

$$T = \frac{1}{\pi} \arctan \left( \frac{2 \cos x \sinh y}{\sin^2 x \cosh^2 y + \cos^2 x \sinh^2 y - 1} \right).$$

چون مخرج این کسر به  $\sinh^2 y - \cos^2 x$  تبدیل می‌شود، خارج قسمت را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\frac{2 \cos x \sinh y}{\sinh^2 y - \cos^2 x} = \frac{2(\cos x / \sinh y)}{1 - (\cos x / \sinh y)^2} = \tan 2\alpha,$$

که در آن  $\tan \alpha = \cos x / \sinh y$  است. بنابراین  $T = (2/\pi)\alpha$ ; یعنی،

$$T = \frac{2}{\pi} \arctan \left( \frac{\cos x}{\sinh y} \right) \quad \left( 0^\circ \leq \arctan t \leq \frac{\pi}{2} \right). \quad (6)$$

این تابع آرکتانزانت دارای برد  $0^\circ$  تا  $2\pi$  است زیرا متغیر آن نامنفی است.

چون  $\sin z$  تام و تابع (۵) در نیم صفحه  $y > v$  همساز است، تابع (۶) در نوار  $-\pi/2 < x < \pi/2$ ،  $y > v$  همساز است. همچنین تابع (۵) در شرط مرزی  $T = 1$  وقتی  $|u| < 1$  و  $v = 0^\circ$  و نیز در شرط  $T = 0^\circ$  هرگاه  $|u| > 1$  و  $v = 0^\circ$  صدق می‌کند. پس تابع (۶) در شرایط مرزی (۲) و (۳) صدق می‌کند. به علاوه در سراسر نوار داریم  $|T(x, y)| \leq 1$ . بنابراین عبارت (۶)، فرمول دمای مطلوب است.

تکدهای  $T(x, y) = c_1$  ( $c_1 < 1$ ) عبارت اند از قسمتهایی از سطح

$$\cos x = \tan \left( \frac{\pi c_1}{2} \right) \sinh y$$

که درون قاب واقع‌اند، هر سطح از نقاط  $(\pm\pi/2, y)$  در صفحه  $xy$  می‌گذرد. اگر  $K$  هدایت گرمایی باشد، شارگرما از سطح واقع در صفحه  $y = 0^\circ$  به توی قاب چنین است

$$-KT_y(x, 0^\circ) = \frac{2K}{\pi \cos x} \quad \left( -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \right).$$

شاری که از سطح واقع در صفحه  $x = \pi/2$  به طرف خارج می‌گذرد عبارت است از

$$-KT_x \left( \frac{\pi}{2}, y \right) = \frac{2K}{\pi \sinh y} \quad (y > 0^\circ).$$

مسئله مقدار مرزی را که در این بخش مطرح شد می‌توان به روش جداسازی متغیرها نیز حل کرد. آن روش سرراست‌تر است، اما جواب را به شکل یک سری نامتناهی به دست می‌دهد.\*

### ۱۰۳. دما در ربع صفحه

حال دمای پایا در ورق نازکی به شکل یک ربع صفحه را چنان پیدا می‌کنیم که قسمتی در انتهای یک لبه عایق باشد، بقیه آن لبه در دمای مشخصی، و لبه دوم در دمای مشخص دیگری نگه‌داشته شود. سطوح عایق‌اند و لذا مسئله دو بعدی است.

مقیاس دما و واحد طول را می‌توان چنان اختیار کرد که مسئله مقدار مرزی مربوط به تابع دمای  $T$  چنین شود

$$T_{xx}(x, y) + T_{yy}(x, y) = 0 \quad (x > 0, y > 0) \quad (1)$$

$$\begin{cases} T_y(x, 0) = 0, & 0 < x < 1 \\ T(x, 0) = 1, & x > 1 \end{cases} \quad (2)$$

$$T(0, y) = 0 \quad (y > 0) \quad (3)$$

که در آن  $T(x, y)$  در ربع صفحه کراندار است. ورق و شرایط مرزی آن در سمت چپ شکل ۱۳۷ نشان داده شده‌اند. شرایط (۲)، مقدار مشتق نرمال تابع  $T$  را بر قسمتی از خط مرزی و مقدار خود تابع را بر بقیه آن خط از پیش تعیین می‌کنند. روش جداسازی متغیرها که در پایان بخش ۱۰۲ بیان شد در مورد چنین مسائلی که در امتداد یک خط مرزی انواع مختلف شرایط را دارا هستند مناسب نیست.

همان‌طور که در شکل ۱۰ پیوست ۲ نشان داده شده است، تبدیل

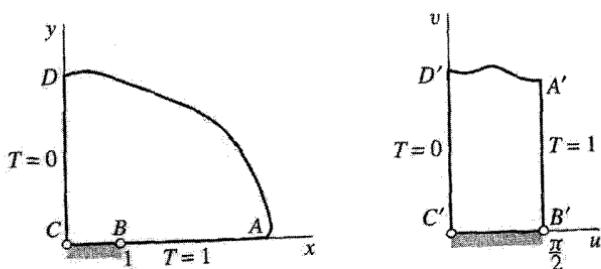
$$z = \sin w \quad (4)$$

نگاشتی یک‌به‌یک است از نوار  $\pi/2 \leq u \leq \pi$ ،  $0 \leq v \leq \infty$  به روی ربع صفحه  $x \geq 0, y \geq 0$ . حال ملاحظه می‌کنید که چون تبدیل مفروض یک‌به‌یک و بهروست از وجود وارون آن مطمئن \*

\* مشابه این مسئله در مسئله ۷ صفحه ۱۴۲ کتاب

"Fourier Series and Boundary Value Problems," 6th ed., 2001.

این مؤلفان بررسی شده است. همچنین بحث کوتاهی درباره یکتایی جوابهای مسائل مقدار مرزی را می‌توان در فصل ۱۰ آن کتاب یافت.



شکل ۱۳۷

هستیم. چون تبدیل (۴) در سراسر نوار بجز در نقطه  $w = \pi/2$  همدیس است، تبدیل وارون باید در سراسر ربع صفحه بجز در نقطه  $z = 1$  همدیس باشد. همان‌طور که در شکل ۱۳۷ نشان داده شده است، این تبدیل وارون، پاره خط  $1 < x < \infty$  از محور  $x$  را به روی قاعده نوار می‌نگارد و بقیه مرز را به روی اضلاع نوار.

چون وارون تبدیل (۴) در ربع صفحه، بجز وقتی که  $z = 1$ ، همدیس است، جواب مسئله مفروض را می‌توان با یافتن تابعی به دست آورد که در نوار همساز باشد و در شرایط مرزی که در سمت راست شکل ۱۳۷ نشان داده شده صدق کند. ملاحظه می‌کنید که این شرایط مرزی از نوع  $h = h^\circ$  و  $dh/dn = 0$  در قضیه بخش ۹۹ هستند.

تابع دمای مورد نیاز،  $T$ ، برای مسئله مقدار مرزی جدید بهوضوی عبارت است از

$$T = \frac{2}{\pi} u, \quad (5)$$

تابع  $u(\pi/2)$  قسمت حقیقی تابع تمام  $w(\pi/2)$  است. حال باید  $T$  را برحسب  $x$  و  $y$  بیان کنیم. برای به دست آوردن  $u$  برحسب  $x$  و  $y$  ابتدا توجه می‌کنیم که بنا بر رابطه (۴)

$$x = \sin u \cosh v, \quad y = \cos u \sinh v. \quad (6)$$

وقتی  $\pi/2 < u < \pi$ ، اعداد  $\cos u$  و  $\sin u$  هر دو نامنفی‌اند و در نتیجه

$$\frac{x^2}{\sin^2 u} - \frac{y^2}{\cos^2 u} = 1. \quad (7)$$

حال بهتر است توجه کنیم که به ازای هر  $u$  مشخص، هذلولی (۷) دارای کانونهایی است در نقاط

$$z = \pm \sqrt{\sin^2 u + \cos^2 u} = \pm 1$$

و محور کانونی، که پاره خط واصل بین دو رأس آن است، به طول  $2 \sin u$  است. پس، قدر مطلق تفاضل فاصله‌های دو کانون از نقطه  $(x, y)$  واقع بر قسمتی از هذلولی در ربع اول عبارت است از

$$\sqrt{(x+1)^2 + y^2} - \sqrt{(x-1)^2 + y^2} = 2 \sin u.$$

از روابط (۶) مستقیماً نتیجه می‌شود که وقتی  $u = \pi/2$  یا  $u = 0$  نیز این رابطه برقرار است. بنابراین با توجه به رابطه (۵) تابع دمای مطلوب عبارت است از

$$T = \frac{2}{\pi} \arcsin \left[ \frac{\sqrt{(x+1)^2 + y^2} - \sqrt{(x-1)^2 + y^2}}{2} \right] \quad (8)$$

که چون  $\pi/2 \leq u \leq 0$ ، تابع آرکسینوس دارای برد  $0 < T \leq \pi/2$  است.

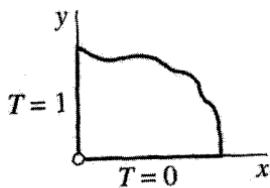
اگر بخواهیم تحقیق کنیم که این تابع در شرایط مرسی (۲) صدق می‌کند باید به خاطر بیاوریم که چون جذر مثبت است،  $\sqrt{(x-1)^2} = |x-1|$  است در صورتی که  $x > 1$ ، و معروف  $x-1 < 0$  است در صورتی که  $x < 1$ . همچنین توجه کنید که دما در هر نقطه در امتداد قسمت عایق لبه پایینی ورق عبارت است از

$$T(x, 0) = \frac{2}{\pi} \arcsin x \quad (0 < x < 1).$$

می‌توان از رابطه (۵) تحقیق کرد که تکدهای  $c_1 < x < c_1 + 1$  عبارت اند از قسمتهایی از هذلولیهای هم‌کانون (۷)، که در آنها  $u = \pi c_1 / 2$ ، و در ربع اول واقع‌اند. چون تابع  $v(\pi/2)$  یک مزدوج همساز تابع (۵) است، خطوط جریان عبارت اند از ربع بیضیهای هم‌کانون حاصل از ثابت گرفتن  $v$  در روابط (۶).

### تمرینها

۱. در مسئله مربوط به ورق نیمه نامتناهی که در سمت چپ شکل ۱۳۵ (بخش ۱۰۱) نشان داده شده است یک مزدوج همساز تابع دمای  $T(x, y)$  را از رابطه (۵) بخش ۱۰۱ به دست آورید و خطوط جریان گرما را پیدا کنید. نشان دهید که خطوط جریان مشکل‌اند از نیمه بالایی محور  $y$ ‌ها و نیمه‌های بالایی دوایر در هر دو طرف آن محور، مراکز این دوایر بر قطعه  $AB$  یا  $CD$  محور  $x$  واقع‌اند.
۲. نشان دهید که اگر تابع  $T$ ، بخش ۱۰۱، قید کراندار بودن را نداشته باشد، می‌توان به جای تابع



شکل ۱۳۸

همساز (۴) آن بخش، تابع همسار

$$T = \operatorname{Im} \left( \frac{1}{\pi} w + A \cosh w \right) = \frac{1}{\pi} v + A \sinh u \sin v$$

را قرار داد که در آن  $A$  عدد حقیقی ثابت دلخواهی است. نتیجه بگیرید که، در این صورت، جواب مسئله دیریکله برای نوار صفحه  $uv$  (شکل ۱۳۵) یکتا نخواهد بود.

۳. فرض کنید که از مسئله دما در قاب نیمه نامتناهی بخش ۲ (شکل ۱۳۶) شرط کراندار بودن  $T$  حذف شود. آن‌گاه با توجه به اثر افزودن قسمت موهومی تابع  $z$  به جوابی که در آن بخش پیدا کردیم، که در آن  $A$  یک عدد حقیقی ثابت دلخواه است، نشان دهید که داشتن تعدادی نامتناهی جواب امکان‌پذیر است.

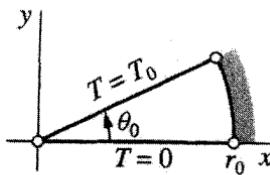
۴. با استفاده از تابع  $z = \operatorname{Log} y$ ، فرمولی برای دمای پایا و کراندار در ورقی که به شکل ربع صفحه  $x \geq 0, y \geq 0$  است پیدا کنید اگر وجوده کاملاً عایق و لبه‌های آن دارای دمای  $0^\circ$  باشند (شکل ۱۳۸). تکدهای و خطوط جريان را بیابید و بعضی از آنها را رسم کنید.

$.T = (\frac{2}{\pi}) \arctan(y/x)$  جواب:

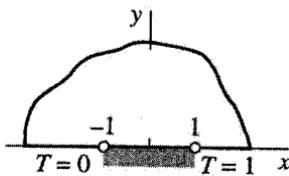
۵. دمای پایا در یک جسم صلب به شکل گوشه استوانه‌ای دراز را پیدا کنید که صفحات مرزی  $\theta = 0^\circ$  و  $\theta = 90^\circ$ ، به ترتیب در دمای‌های صفر و  $90^\circ$  نگهداشت شوند و سطح آن کاملاً عایق باشد (شکل ۱۳۹).

$.T = (T_0 / \theta_0) \arctan(y/x)$  جواب:

۶. دمای پایا و کراندار  $T(x, y)$  در جسم صلب نیمه نامتناهی  $y \geq 0$  را چنان پیدا کنید که بر قسمت  $-1 < x < 0$  از مرز،  $T = 0^\circ$ ، بر قسمت  $0 < x < 1$  از مرز،  $T = 1^\circ$  و نوار  $(y = 0)$  از مرز عایق‌بندی شده باشد (شکل ۱۴۰).



شکل ۱۳۹



شکل ۱۴۰

$$T = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin \left[ \frac{\sqrt{(x+1)^2 + y^2} - \sqrt{(x-1)^2 + y^2}}{2} \right] \quad \text{جواب:}$$

$$\left( -\frac{\pi}{2} \leq \arcsin t \leq \frac{\pi}{2} \right).$$

۷. دمای پایا و کراندار در جسم صلب  $x \geq 0, y \geq 0$  را پیدا کنید، هنگامی که سطوح مرزی، بجز نوارهای عایق با پهنای مساوی در گوش، در دمای مشخصی نگهداشت شوند، همچنان که در شکل ۱۴۱ نشان داده شده است.

راهنمایی: این مسئله را می‌توان به مسئله تمرین ۶ تبدیل کرد.

$$T = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin \left[ \frac{\sqrt{(x^2 - y^2 + 1)^2 + 4x^2 y^2} - \sqrt{(x^2 - y^2 - 1)^2 + 4x^2 y^2}}{2} \right] \quad \text{جواب:}$$

$$\left( -\frac{\pi}{2} \leq \arctan t \leq \frac{\pi}{2} \right).$$

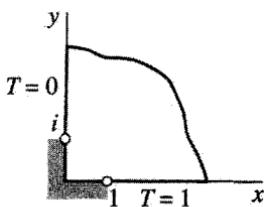
۸. مسئله دیریکله زیر را برای نوار نیمه نامتناهی (شکل ۱۴۲) حل کنید:

$$H_{xx}(x, y) + H_{yy}(x, y) = 0 \quad (\circ < x < \pi/2, y > \circ),$$

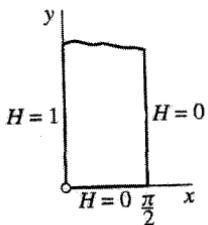
$$H(x, \circ) = \circ \quad (\circ < x < \pi/2),$$

$$H(\circ, y) = 1, \quad H(\pi/2, y) = \circ \quad (y > \circ),$$

که در آن  $1 \leq H(x, y) \leq \circ$



شکل ۱۴۱



شکل ۱۴۲

راهنمایی: این مسئله را می‌توان به مسئله تمرین ۴ تبدیل کرد.

$$H = \frac{2}{\pi} \arctan \left( \frac{\tanh y}{\tan x} \right) \quad \text{جواب:}$$

۹. فرمولی برای دمای  $T(r, \theta)$  در ورق نیمدایره‌ی  $1 \leq r \leq \pi, 0 \leq \theta \leq \pi$  با سطوح عایق را چنان پیدا کنید که در امتداد لبه شعاعی  $0 < r < 1$ ،  $T = 1$  و در بقیه مرز  $\theta = 0$ .

راهنمایی: این مسئله را می‌توان به مسئله تمرین ۸ تبدیل کرد.

$$T = \frac{2}{\pi} \arctan \left( \frac{1-r}{1+r} \cot \frac{\theta}{2} \right) \quad \text{جواب:}$$

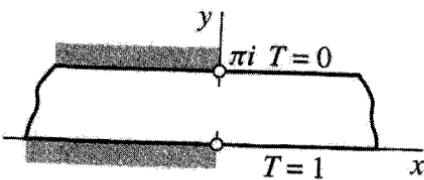
۱۰. مسئله مقدار مرزی برای ورق  $x \geq 0, y \geq 0$  در صفحه  $z$  را حل کنید درصورتی که وجود آن عایق‌بندی شده و شرایط مرزی همانهایی باشند که در شکل ۱۴۳ نشان داده شده‌اند.

راهنمایی: با استفاده از نگاشت

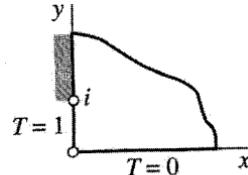
$$w = i/z = i\bar{z}/|z|^2$$

این مسئله را به مسئله‌ای که در بخش ۱۰۳ (شکل ۱۳۷) مطرح شد تبدیل کنید.

۱۱. قسمتهای  $0 < x < \pi$  و  $y = 0$  از لبه‌های ورق نامتناهی  $0 \leq y \leq \pi$



شکل ۱۴۴



شکل ۱۴۳

و وجوده ورق، عایق گرما هستند. وقتی  $x > 0$ ، شرایط  $T(x, \pi) = 1$  و  $T(x, 0) = 0$  حفظ می‌شوند (شکل ۱۴۴). دمای ای پایا در ورق را پیدا کنید.

راهنمایی: این مسئله را می‌توان به مسئله تمرین ۶ تبدیل کرد.

۱۲. یک ورق نازک با وجوده عایق‌بندی شده را در نظر می‌گیریم که شکل آن نیمة بالایی ناحیه محدود به بیضی با کانونهای  $(\pm 1, 0)$  است. دما روی قسمت بیضوی مرز برابر است با  $T = 1$ . دما در امتداد پاره‌خط  $x < -1$  از محور  $x$  برابر است با  $0$  و بقیه مرز در امتداد محور  $x$  عایق‌بندی شده است. به کمک شکل ۱۱ پیوست ۲ خطوط جریان گرما را پیدا کنید.

۱۳. بنابر بخش ۵ و تمرین ۷ آن بخشن، اگر تابع  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  در ناحیه بسته و کراندار  $R$  پیوسته و در داخل  $R$  تحلیلی و غیر ثابت باشد، آنگاه تابع  $u(x, y)$  مقادیر ماکسیمم و مینیمم خود را بر مرز  $R$  اختیار می‌کند و نه هرگز در داخل آن. با تعبیر  $u(x, y)$  به عنوان یک دمای پایا، دلیلی فیزیکی بیان کنید که چرا باید این ویژگی مقادیر ماکسیمم و مینیمم برقرار باشد.

## ۱۰۴. پتانسیل الکترواستاتیکی

در یک میدان الکترواستاتیکی، شدت میدان در یک نقطه، بردار نمایش دهنده نیرویی است که بر یک واحد بار مثبت واقع در آن نقطه وارد می‌شود. پتانسیل الکترواستاتیک تابعی است عددی از مختصات فضایی به قسمی که در هر نقطه مشتق جهتی آن در هر جهت عبارت است از منفی مؤلفه شدت میدان در آن جهت.

برای دو ذره باردار مانا، اندازه نیروی جاذبه یا دافعه‌ای که از یکی بر دیگری وارد می‌شود با حاصلضرب بارها نسبت مستقیم و با محدود فاصله بین دو ذره نسبت معکوس دارد. با توجه به این قانون عکس محدود، می‌توان نشان داد که در یک نقطه پتانسیل ناشی از یک ذره تک در فضا با فاصله بین نقطه و ذره نسبت معکوس دارد. پس می‌توان نشان داد که در هر ناحیه بی‌بار پتانسیل ناشی از پخش بارها در خارج آن ناحیه در معادله لایپلاس برای فضای سه بعدی صدق می‌کند.

اگر شرایط به قسمی باشند که پتانسیل  $V$  در همه صفحات موازی صفحه  $xy$  یکی باشد آن‌گاه در ناحیه‌های بی‌بار  $V$  تابع همسازی تنها از دو متغیر  $x$  و  $y$  است:

$$V_{xx}(x, y) + V_{yy}(x, y) = 0.$$

بردار شدت میدان در هر نقطه به موازات صفحه  $xy$  است و مؤلفه‌های  $x$  و  $y$  آن، به ترتیب، عبارت‌اند از  $-V_x(x, y)$  و  $-V_y(x, y)$ . پس این بردار عبارت است از گرادیان  $V(x, y)$  با علامت منفی. سطحی که در امتداد آن  $V(x, y)$  ثابت باشد، یک سطح هم‌پتانسیل است. در یک نقطه بر سطح هادی، مؤلفه مماسی بردار شدت میدان، در حالت سکون صفر است، زیرا بارها مجاز نبود بر چنین سطحی حرکت نمایند. بنابراین  $V(x, y)$  در امتداد سطح یک هادی ثابت و آن سطح یک سطح هم‌پتانسیل است.

اگر  $U$  یک مزدوج همساز  $V$  باشد منحنی‌های  $c_2 U(x, y) = c_1$  در صفحه  $xy$  خطوط شار نامیده می‌شوند. در صورتی که خط شاری یک منحنی هم‌پتانسیل  $V(x, y) = c_1$  را در نقطه‌ای قطع کند که در آن مشتق تابع تحلیلی  $V(x, y) + iU(x, y)$  صفر نیست، دو منحنی در آن نقطه متعامدند و شدت میدان در آن نقطه بر خط شار مماس است.

مسائل مقدار مرزی برای پتانسیل  $V$ ، همان مسائل ریاضیی هستند که برای دماهای پایای  $T$  بودند؛ و همانند حالت دماهای پایای، روش‌های متغیرهای مختلط محدود به مسائل دوبعدی‌اند. مثلاً مسئله‌ای را که در بخش ۱۰۲ (شکل ۱۳۶) عنوان شد می‌توان به عنوان مسئلهٔ یافتن پتانسیل الکترواستاتیکی دوبعدی در فضای تهی

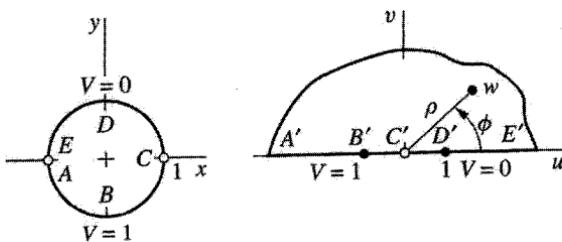
$$y > 0, -\pi/2 < x < \pi/2$$

تعییر کرد که به صفحات هادی  $x = \pm\pi/2$  و  $y = 0$ ، که در فصل مشترکشان عایق شده‌اند، محدود است، در صورتی که دو سطح اول در پتانسیل صفر و سومی در پتانسیل واحد نگه‌داشته شود.

پتانسیل جریان پایای برق در یک ورق مسطح هادی در نقاطی که عاری از چشم و چاهک‌اند، نیز تابعی همساز است. پتانسیل گرانشی، مثال دیگری از تابع همساز در فیزیک است.

## ۱۰۵. پتانسیل در فضای استوانه‌بی‌ی

یک استوانهٔ مستبدیر دراز توالی از یک ورق نازک با جنس هادی درست شده و استوانه با برش در امتداد دو مولدش به دو قسمت مساوی تقسیم شده است. این قسمتها به وسیلهٔ نوارهای باریکی



شکل ۱۴۵

از مواد عایق از هم جدا شده‌اند و به صورت الکترودهایی مورد استفاده قرار می‌گیرند، یکی از آنها در پتانسیل صفر و دیگری در پتانسیل مشخص دیگری نگهداشته می‌شود. محورهای مختصات و واحدهای طول و اختلاف پتانسیل را به صورتی که در شکل ۱۴۵ نشان داده شده اختیار می‌کنیم. در این صورت پتانسیل الکترواستاتیکی  $V(x, y)$  را بر هر مقطع عرضی فضای بسته که از دو انتهای استوانه دور باشد، به عنوان یکتابع همساز در درون دایره  $1 + y^2 = x^2$  در صفحه  $xy$  تعبیر می‌نماییم. توجه کنید بر نیمه بالایی دایره،  $V = 0$ ، و بر نیمه پایینی آن،  $V = 1$ . تبدیل خطی کسری که نیم صفحه بالایی را به روی دایره واحد به مرکز مبدأ، محور حقیقی مشیت را به روی نیمه بالایی دایره و محور حقیقی منفی را به روی نیمه پایینی دایره می‌نگارد، در تمرین ۱ بخش ۸۸ بررسی شد. این نگاشت، در شکل ۱۳ پیوست ۲ داده شده است؛ و اگر در آنجا  $z$  و  $w$  را با هم عوض نماییم در می‌یابیم که وارون تبدیل

$$z = \frac{i - w}{i + w} \quad (1)$$

مسئله جدیدی برای  $V$  در نیم صفحه ارائه می‌دهد، که در شکل ۱۴۵ نمایش داده شده است. حال قسمت موهومیتابع

$$\frac{1}{\pi} \operatorname{Log} w = \frac{1}{\pi} \ln \rho + \frac{i}{\pi} \phi \quad (\rho > 0, 0 \leq \phi \leq \pi) \quad (2)$$

تابع کرانداری است از  $u$  و  $v$  که مقادیر ثابت لازم را بر دو قسمت  $\phi = 0$  و  $\phi = \pi$  محور  $u$ ها اختیار می‌کند. بنابراین تابع همساز مطلوب برای نیم صفحه، عبارت است از

$$V = \frac{1}{\pi} \arctan \left( \frac{v}{u} \right) \quad (3)$$

که در آن مقادیر تابع آرکتانزانت بین  $0$  و  $\pi$  تغییر می‌کند.

وارون تبدیل (۱)، عبارت است از

$$w = i \frac{1-z}{1+z}, \quad (4)$$

که از روی آن می‌توان  $u$  و  $v$  را برحسب  $x$  و  $y$  بیان کرد. پس معادله (۳) چنین می‌شود

$$V = \frac{1}{\pi} \arctan \left( \frac{1-x^2-y^2}{2y} \right) \quad (0 \leq \arctan t \leq \pi). \quad (5)$$

تابع (۵)، تابع پتانسیل برای فضای محدود به الکترودهای استوانه‌بی است، زیرا در درون دایره همساز است و مقادیر لازم را بر نیمدایره‌ها اختیار می‌کند. اگر بخواهیم این جواب را امتحان کنیم باید توجه کنیم که

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t < 0}} \arctan t = \pi \quad \text{و} \quad \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} \arctan t = 0.$$

منحنیهای همپتانسیل در ناحیه دایره‌بی، قوسهایی هستند از دوایر

$$x^2 + (y + \tan \pi c_1)^2 = \sec^2 \pi c_1,$$

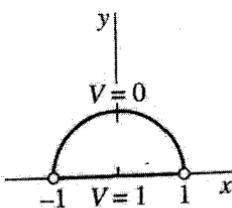
هر دایره از نقاط  $(\pm 1, 0)$  می‌گذرد. همچنین پاره خطی از محور  $x$ ‌ها که بین این دو نقطه واقع است همپتانسیل  $V(x, y) = 1/2$  است. یک مزدوج همساز  $U$  برای  $V$  عبارت از  $\ln \rho / (\pi)$  است. با توجه به رابطه (۴)،  $U$  را می‌توان چنین نوشت

$$U = -\frac{1}{\pi} \ln \left| \frac{1-z}{1+z} \right|.$$

از روی این رابطه می‌توان تحقیق کرد که خطوط شار  $U(x, y) = c_2$  قوسهایی هستند از دوایر که مرکزشان روی محور  $x$ ‌هاست. پاره خطی از محور  $y$ ‌ها که بین الکترودها واقع است نیز یک خط شار است.

## تمرینها

- تابع همساز (۳) بخش ۱۰۵، در نیم صفحه  $0 \geq v$  کراندار است و در شرایط مرزی که در سمت راست شکل ۱۴۵ نمایش داده شده است، صدق می‌کند. نشان دهید اگر قسمت موهومی  $Ae^w$  را، که  $A$  عدد حقیقی ثابتی است، به آن تابع بیفزاییم، آنگاه تابع حاصل در همه شرایط بجز شرط کراندار بودن صدق می‌کند.



شکل ۱۴۶

۲. نشان دهید که تبدیل (۴)، بخش  $10.5$ ، نیمة بالایی ناحیه دایره‌یی را که در سمت چپ شکل ۱۴۵ نشان داده شده است به روی ربع اول صفحه  $w$  می‌نگارد و قطر  $CE$  را به روی محور  $v$  مثبت. سپس پتانسیل الکترواستاتیکی  $V$  را در فضای محصور به نیم استوانه  $x^2 + y^2 = 1$  و صفحه  $y = 0$  پیدا کنید به طوری که بر سطح استوانه‌یی،  $V = 1$  و بر سطح تخت  $V = 0$  (شکل ۱۴۶).

$$.V = \frac{2}{\pi} \arctan \left( \frac{1-x^2-y^2}{2y} \right) \quad \text{جواب:}$$

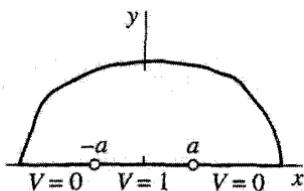
۳. پتانسیل الکترواستاتیکی  $V(r, \theta)$  را در فضای  $1 < r < \infty$ ،  $0 < \theta < \pi/4$  که به نیم صفحه‌های  $\theta = \pi/4$  و  $\theta = 0$  قسمت  $\pi/4 \leq \theta \leq \pi/2$  از سطح استوانه‌یی  $V = 1$  محدود می‌شود به قسمی پیدا کنید که بر سطح تخت،  $V = 0$ ، و بر سطح استوانه‌یی،  $V = 0$  (تمرین ۲ را ببینید). تحقیق کنید که تابع حاصل در این شرایط مرزی صدق می‌کند.

۴. توجه کنید که همه شاخه‌های  $z = \log w$  یک مؤلفه حقیقی دارند که همه جا بجز در مبدأ همساز است. سپس فرمولی برای پتانسیل الکترواستاتیکی  $V(x, y)$  در فضای بین دو سطح استوانه‌یی هادی هم محور  $x^2 + y^2 = r^2$  و  $x^2 + y^2 = 1$  ( $r \neq 1$ ) بنویسید به قسمی که بر سطح اول  $V = 0$  و بر دومی  $V = 1$ .

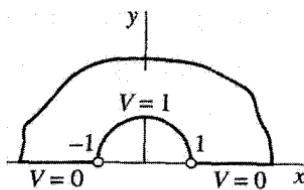
$$.V = \frac{\ln(x^2 + y^2)}{2 \ln r} \quad \text{جواب:}$$

۵. پتانسیل الکترواستاتیکی کراندار  $V(x, y)$  در فضای  $y > 0$  محدود به صفحه هادی نامتناهی  $y = 0$  را به قسمی پیدا کنید که نوار  $(y = 0, -a < x < a)$  که از بقیه صفحه جدا شده در پتانسیل  $V = 1$  نگهداشته شود و در بقیه صفحه،  $V = 0$  (شکل ۱۴۷). تحقیق کنید که تابع حاصل در شرایط مرزی صدق می‌کند.

$$.V = \frac{1}{\pi} \arctan \left( \frac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2} \right) \quad (0 \leq \arctan t \leq \pi) \quad \text{جواب:}$$



شکل ۱۴۷



شکل ۱۴۸

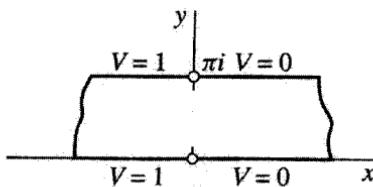
۶. فرمولی برای پتانسیل الکترواستاتیکی در فضای نیمه نامتناهی که در شکل ۱۴۸ نشان داده شده و به دو نیم صفحه و یک نیم استوانه محدود است پیدا کنید به قسمی که در سطح استوانه بی  $V = 1$  باشد و بر سطح تخت،  $V = 0$ . بعضی از منحنیهای همپتانسیل در صفحه  $xy$  را رسم کنید.

$$V = \frac{2}{\pi} \arctan \left( \frac{2y}{x^2 + y^2 - 1} \right) \quad \text{جواب:}$$

۷. پتانسیل  $V$  در فضای بین صفحات  $y = \pi$  و  $y = 0$  را به قسمی پیدا کنید که بر قسمتی از هر یک از آن صفحات که  $x > 0$  داشته باشیم  $V = 0$ ، و بر قسمتیهایی که  $x < 0$  داشته باشیم  $V = 1$  (شکل ۱۴۹). نتیجه را با شرایط مرزی امتحان کنید.

$$V = \frac{1}{\pi} \arctan \left( \frac{\sin y}{\sinh x} \right) \quad (0^\circ \leq \arctan t \leq \pi) \quad \text{جواب:}$$

۸. فرمولی برای پتانسیل الکترواستاتیکی  $V$  در فضای داخلی استوانه دراز  $r = 1$  به قسمی پیدا کنید که بر ربع اول ( $0^\circ < \theta < \pi/2$ )  $r = 1$  سطح استوانه بی،  $V = 0$ ، و بر بقیه آن سطح ( $\pi/2 < \theta < 2\pi$ )  $r = 1$  (رجوع کنید به تمرین ۵، بخش ۸۸ و شکل ۱۱۰). نشان دهید که بر محور استوانه  $V = 3/4$ . فرمول حاصل را با شرایط مرزی امتحان کنید.



شکل ۱۴۹

۹. با استفاده از شکل ۲۰ پیوست ۲، یک تابع دمای  $T(x, y)$  بیابید که در حوزه سایه‌زده شده صفحه  $xy$ ، که در آنجا نشان داده شده است، همساز باشد و در امتداد قوس  $ABC$ ،  $T = 0$  و در امتداد پاره خط  $DEF$ ،  $T = 1$ . تحقیق کنید که تابع حاصل در شرایط مرزی لازم صدق می‌کند. (تمرین ۲ را ببینید).
۱۰. مسئله دیریکله

$$V_{xx}(x, y) + V_{yy}(x, y) = 0 \quad (\circ < x < a, \circ < y < b)$$

$$V(x, \circ) = 0, \quad V(x, b) = 1 \quad (\circ < x < a)$$

$$V(\circ, y) = V(a, y) = 0 \quad (\circ < y < b)$$

را برای  $V(x, y)$  در یک مستطیل، می‌توان به روش جداسازی متغیرها حل کرد.\* جواب عبارت است از

$$V = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sinh(m\pi y/a)}{m \sinh(m\pi b/a)} \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (m = 2n - 1).$$

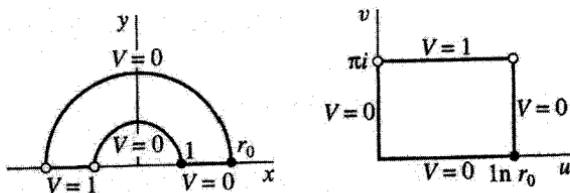
با پذیرفتن این نتیجه و وفق دادن آن برای مسئله در صفحه  $uv$ ، پتانسیل  $V(r, \theta)$  در فضای  $\theta = \pi$  داشته باشد  $V = 1$  و بر بقیه مرز  $\theta = \circ$ . (شکل ۱۵۰ را ببینید).

$$. V = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sinh(\alpha_n \theta)}{\sinh(\alpha_n \pi)} \cdot \frac{\sin(\alpha_n \ln r)}{2n - 1} \quad \left[ \alpha_n = \frac{(2n - 1)\pi}{\ln r_0} \right] \quad \text{جواب:}$$

۱۱. به کمک جواب مسئله دیریکله برای مستطیل

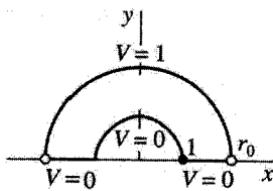
$$\circ \leq y \leq b, \circ \leq x \leq a$$

\* صفحات ۱۳۷-۱۳۵ و ۱۸۷-۱۸۵ کتاب مؤلفان را ببینید.



شکل ۱۵۰

$$w = \log z \left( r > 0, -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2} \right)$$



شکل ۱۵۱

که در تمرین ۱۰ بکار برده شد، تابع پتانسیل  $V(r, \theta)$  برای فضای

$$0 < \theta < \pi, 1 < r < r_0$$

$V =$  را به قسمی پیدا کنید که بر قسمت  $0 < \theta < \pi, r = r_0$  از مرز  $V = 1$  و بر بقیه مرز  $V = 0$  (شکل ۱۵۱).

$$\cdot V = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{r^m - r_0^{-m}}{r_0^m - r_0^{-m}} \right) \frac{\sin m\theta}{m} \quad (m = 2n - 1) \quad \text{جواب:}$$

## ۱۰۶. جریان سیال دو بعدی

توابع همساز نقش مهمی در هیدرودینامیک و آئرودینامیک بازی می‌کنند. مجدداً، فقط نوع حالت پایا و دو بعدی مسئله را در نظر می‌گیریم. یعنی فرض می‌کنیم که حرکت سیال در همه صفحات موازی صفحه  $xy$  یکسان است و سرعت، موازی آن صفحه و مستقل از زمان است. در این صورت کافی است حرکت یک لایه جریان در صفحه  $xy$  را در نظر بگیریم.

### فرض کنیم بردار نمایش دهنده عدد مختصاط

$$V = p + iq$$

معرف سرعت یک ذره سیال در نقطه  $(x, y)$  باشد، بنابراین مؤلفه‌های  $x$  و  $y$  بردار سرعت به ترتیب  $p(x, y)$  و  $q(x, y)$  هستند. فرض می‌شود که توابع  $p(x, y)$  و  $q(x, y)$  و مشتقات جزئی مرتبه اول آنها در نقاط داخلی یک ناحیه جریان که در آن هیچ چشممه یا چاهکی از سیال وجود ندارد پیوسته باشند.

گردش سیال روی هر مسیر  $C$ ، به عنوان انتگرال روی خط مؤلفه مماسی بردار سرعت  $V_T(x, y)$  نسبت به طول قوس  $\sigma$  روی  $C$  تعریف می‌شود:

$$\int_C V_T(x, y) d\sigma. \quad (1)$$

بنابراین، نسبت گردش سیال روی  $C$  به طول  $C$  عبارت از تندی متوسط سیال روی آن مسیر است. در حسابابان پیشرفتۀ \* نشان داده شده است که چنین انتگرالی را می‌توان این‌گونه نوشت

$$\int_C V_T(x, y) d\sigma = \int_C p(x, y) dx + q(x, y) dy. \quad (2)$$

در صورتی که  $C$  مسیر ساده و بسته‌ای واقع در یک حوزه همبند ساده جریان عاری از هر چشممه یا چاهک باشد، بنابر قضیه گرین (بخش ۴۴ را ببینید) می‌توان نوشت

$$\int_C p(x, y) dx + q(x, y) dy = \int \int_R [q_x(x, y) - p_y(x, y)] dA$$

که در آن  $R$  ناحیه بسته متشکل از نقاط درون و روی  $C$  است. در نتیجه برای هر چنین مسیری داریم

$$\int_C V_T(x, y) d\sigma = \int \int_R [q_x(x, y) - p_y(x, y)] dA. \quad (3)$$

یک تعبیر فیزیکی انتگرال‌ده سمت راست عبارت (۳) برای گردش در امتداد مسیر ساده بسته  $C$  را می‌توان به سادگی ارائه داد. فرض می‌کنیم  $C$  نمایش دایره‌بی به شعاع  $r$  باشد که مرکزش \* ویژگیهایی از انتگرال روی خط در حسابابان پیشرفتۀ را که در این بخش و بخش بعد به کار می‌بریم، به عنوان مثال می‌توان در فصل ۱۰ کتاب زیر یافت

در نقطه  $(x_0, y_0)$  و جهت آن عکس حرکت عقربه های ساعت گرفته شده است. بنابراین یک تندی متوسط روی  $C$  با تقسیم گردش بر محیط  $2\pi r$  به دست می آید و سرعت زاویه بی متوسط متناظر سیال حول مرکز دایره از تقسیم آن تندی متوسط بر  $r$  حاصل می شود:

$$\frac{1}{\pi r^2} \int \int_R \frac{1}{2} [q_x(x, y) - p_y(x, y)] dA.$$

حال این عبارت مقدار متوسط تابع

$$\omega(x, y) = \frac{1}{r} [q_x(x, y) - p_y(x, y)] \quad (4)$$

بر ناحیه دایره بی  $R$  محدود به  $C$  نیز می باشد. حد آن وقتی  $r$  به صفر میل کند برابر با مقدار  $\omega$  در نقطه  $(x_0, y_0)$  است. بنابراین تابع  $\omega(x, y)$  که دوران سیال نامیده می شود، سرعت زاویه بی حدی یک عنصر دایره بی از سیال را نمایش می دهد وقتی که دایره در مرکزش  $(x, y)$  جمع شود، نقطه ای که  $\omega$  در آن محاسبه می شود.

اگر در هر نقطه از یک حوزه همبند ساده  $= \omega$ , جریان در آن حوزه غیر دورانی است. در اینجا فقط جریانهای غیر دورانی را در نظر می گیریم و نیز فرض می کنیم سیال غیرقابل تراکم و بدون چسبندگی باشد. تحت این فرض که سیالات با چگالی یکنواخت  $\rho$  و جریان غیر دورانی و پایا هستند، می توان نشان داد که فشار سیال  $P(x, y)$  در حالت خاص زیر از معادله برنولی<sup>۱</sup>

صدق می کند:

$$\frac{P}{\rho} + \frac{1}{2} |V|^2 = . \quad \text{ثابت}$$

توجه کنید که فشار بیشترین مقدار را دارد هرگاه تندی  $|V|$  کمترین مقدار باشد.

فرض کنید  $D$  حوزه همبند ساده ای باشد که در آن جریان غیر دورانی است. بنابراین از  $(4)$  در سراسر  $D$  داریم  $p_y = q_x$ . این رابطه بین مشتقات جزئی ایجاب می کند که انتگرال روی خط

$$\int_C p(s, t) ds + q(s, t) dt$$

عملأً مستقل از مسیر باشد هرگاه مسیر  $C$  تمامًا در  $D$  واقع باشد و دو نقطه دلخواه  $(x_0, y_0)$  و  $(x, y)$  از  $D$  را به هم وصل کند. بنابراین اگر  $(x_0, y_0)$  نقطه مشخصی در  $D$  باشد، تابع

$$\phi(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} p(s, t) ds + q(s, t) dt \quad (5)$$

روی  $D$  خوشنعیری است و با مشتق جزئی گرفتن از طرفین این رابطه، در می‌یابیم که

$$\phi_x(x, y) = p(x, y), \quad \phi_y(x, y) = q(x, y). \quad (6)$$

از روابط (۶) می‌بینیم که بردار سرعت  $V = p + iq$  گرادیان  $\phi$  است و مشتق جهتی  $\phi$  در هر جهت مؤلفه سرعت جریان در آن جهت را نمایش می‌دهد.

تابع  $\phi(x, y)$  را پتانسیل سرعت می‌نامند. از رابطه (۵) واضح است که وقتی نقطه مرجع  $(x_0, y_0)$  تغییر کند،  $\phi(x, y)$  با یک ثابت جمعی تغییر می‌کند. منحنیهای تراز  $\phi(x, y) = c_1$  منحنیهای همپتانسیل نامیده می‌شوند. چون بردار سرعت  $V$  گرادیان  $\phi(x, y)$  است، در هر نقطه‌ای که  $V$  بردار صفر نباشد بر یک منحنی همپتانسیل عمود است.

درست مثل حالت جریان گرما، این شرط که سیال غیرقابل تراکم فقط با جریان یافتن در سراسر مرز یک عنصر حجم، به آن داخل یا از آن خارج می‌شود مستلزم این است که  $\phi(x, y)$  در معادله لابلانس

$$\phi_{xx}(x, y) + \phi_{yy}(x, y) = 0$$

در حوزه‌ای که سیال عاری از چشممه یا چاهک است، صدق کند. با توجه به روابط (۶) و پیوستگی توابع  $p$  و  $q$  و مشتقات جزئی مرتبه اول آنها، نتیجه می‌شود که مشتقات مرتبه دوم  $\phi$  در چنین حوزه‌ای پیوسته‌اند. بنابراین پتانسیل سرعت  $\phi$  در آن حوزه، تابعی همساز است.

## ۱۰۷. تابع جریان

بنابر بخش ۱۰۶، بردار سرعت

$$V = p(x, y) + iq(x, y) \quad (1)$$

را برای یک حوزه همبند ساده که جریان در آن غیر دورانی است، می‌توان چنین نوشت

$$V = \phi_x(x, y) + i\phi_y(x, y) = \text{grad } \phi(x, y) \quad (2)$$

که در آن  $\phi$  پتانسیل سرعت است. درصورتی که بردار سرعت، بردار صفر نباشد، بر منحنی همپتانسیلی که از نقطه  $(x, y)$  می‌گذرد عمود است. اگر به علاوه  $\psi(x, y)$  نمایش یک مزدوج همساز  $\phi(x, y)$  باشد (بخش ۹۷ را ببینید)، بردار سرعت بر منحنی  $\psi(x, y) = c_2$  مماس است.

منحنیهای  $c_2 = \psi(x, y) = c$  را خطوط جریان می‌نامند و تابع  $\psi$  تابع جریان است. به خصوص مرزی که سیال نمی‌تواند از آن عبور کند یک خط جریان است.

تابع تحلیلی

$$F(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$$

پتانسیل مختلط جریان نامیده می‌شود. توجه کنید که

$$F'(z) = \phi_x(x, y) + i\psi_x(x, y)$$

یا بنابر معادلات کوشی-ریمان داریم

$$F'(z) = \phi_x(x, y) - i\phi_y(x, y).$$

در نتیجه عبارت (۲) برای سرعت چنین خواهد شد

$$V = \overline{F'(z)} \quad (3)$$

تندی، یا اندازه سرعت، با فرمول زیر داده می‌شود

$$|V| = |F'(z)|.$$

بنابر رابطه (۵) بخش ۹۷، اگر  $\phi$  در حوزه همبند ساده  $D$  همساز باشد، یک مزدوج همساز در آن را می‌توان چنین نوشت

$$\psi(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} -\phi_t(s, t)ds + \phi_s(s, t)dt$$

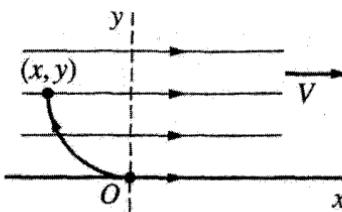
که در آن انتگرالگیری مستقل از مسیر است. بنابراین به کمک روابط (۶) بخش ۱۰۶ می‌توانیم بنویسیم

$$\psi(x, y) = \int_C -q(s, t)ds + p(s, t)dt \quad (4)$$

که در آن  $C$  مسیری است در  $D$  از  $(x_0, y_0)$  تا  $(x, y)$ .

در حسابان پیشرفته نشان داده شده است که سمت راست رابطه (۴) نمایش انتگرال مؤلفه نرمال  $V_N(x, y)$  نسبت به طول قوس  $\sigma$  روی  $C$  است که مؤلفه‌های  $x$  و  $y$  بردار  $V$ ، به ترتیب عبارت‌اند از  $p(x, y)$  و  $q(x, y)$ . بنابراین فرمول (۴) را می‌توان چنین نوشت

$$\psi(x, y) = \int_C V_N(s, t)d\sigma. \quad (5)$$



شکل ۱۵۲

بدین ترتیب از نظر فیزیکی،  $\psi(x, y)$  نمایش نرخ زمانی جریان سیال در عرض  $C$  است. به عبارت دقیقتر،  $\psi(x, y)$  معرف نرخ جریان بر حجم، در عرض سطحی به ارتفاع واحد است که روی منحنی  $C$  عمود بر صفحه  $xy$  قرار دارد.

مثال. درصورتی که تابع

$$F(z) = Az \quad (6)$$

پتانسیل مختلطی باشد که در آن  $A$  عدد ثابت حقیقی مثبتی است.

$$\phi(x, y) = Ax, \quad \psi(x, y) = Ay. \quad (7)$$

خطوط جریان  $\psi(x, y) = c_2$  عبارت‌اند از خطوط افقی  $y = c_2/A$  و سرعت در هر نقطه برابر است با

$$V = \overline{F'(z)} = A.$$

در اینجا نقطه  $(x_0, y_0)$  که در آن  $\psi(x_0, y_0) = 0$  نقطه دلخواهی روی محور  $x$  است. اگر نقطه  $(x_0, y_0)$  در مبدأ گرفته شود، آنگاه  $\psi(x, y)$  نرخ جریان روی هر مسیری است که از مبدأ به نقطه  $(x, y)$  کشیده شود (شکل ۱۵۲). جریان یکنواخت و به سمت راست است. می‌توان آن را به عنوان جریان یکنواخت در نیم صفحه بالایی محدود به محور  $x$ ، که یک خط جریان است، یا جریان یکنواخت بین دو خط موازی  $y_1 = y$  و  $y_2 = y$  تعبیر کرد.

تابع  $\psi$  جریان معینی در ناحیه را مشخص می‌سازد. این سؤال را که آیا متناظر با یک ناحیه مفروض، درست یک چنین تابعی، جز محتملاً با یک ضریب ثابت یا یک ثابت جمعی، موجود است یا نه، در اینجا بررسی نخواهیم کرد. در بعضی مثالهای آنی، که در آنها سرعت در نقاط دور از مانع، یکنواخت است، یا در فصل ۱۱، که چشمی و چاهک در کارند، وضعیت فیزیکی نشان می‌دهد که جریان با شرایط مفروض مسئله به طور یکتا معین می‌شود.

همیشه به صرف دانستن مقادیر تابعی همساز بر مرز یک ناحیه، نمی‌توان آن را به صورتی یکتا، حتی با تقریب یک عامل ثابت، تعیین کرد. در مثال بالا دیدیم که تابع  $Ay = \psi(x, y)$  در نیم صفحه  $y > 0$  همساز و بر مرز آن دارای مقادیر صفر است. تابع  $\psi_1(x, y) = Be^x \sin y$  نیز در آن شرایط صدق می‌کند. مع‌هذا، خط جریان  $\psi_1(x, y) = 0$  نه فقط شامل خط  $y = 0$  است بلکه خطوط  $y = n\pi$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) را نیز دربر می‌گیرد. در اینجا تابع  $F_1(z) = Be^z$  پتانسیل مختلط برای جریان در نوار بین خطوط  $y = 0$  و  $y = \pi$  است، این دو خط، خط جریان  $\psi_1(x, y) = 0$  را تشکیل می‌دهند؛ اگر  $B$ ، سیال در امتداد خط پایینی به راست و در امتداد خط بالایی به چپ جریان می‌یابد.

## ۱۰۸. جریان حول یک گوشه و حول یک استوانه

برای تحلیل جریان در صفحه  $xy$  یا  $z$  اغلب مناسبتر است که جریان متناظری در صفحه  $uv$  یا  $w$  را در نظر بگیریم. در این صورت اگر  $\phi$  پتانسیل سرعت و  $\psi$  تابع جریان برای جریانی در صفحه  $uv$  باشد، می‌توان نتایج بخش‌های ۹۸ و ۹۹ را برای این توابع همساز به کار برد. یعنی، در صورتی که حوزه جریان  $D_w$  در صفحه  $uv$  تصویر حوزه  $D_z$  تحت تبدیل

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

باشد، که در آن  $f$  تحلیلی است، تابع

$$\psi[u(x, y), v(x, y)] \quad \text{و} \quad \phi[u(x, y), v(x, y)],$$

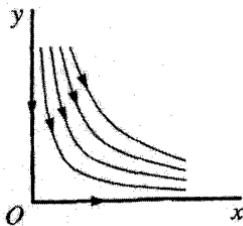
در حوزه  $D_z$  همسازند. این توابع جدید را ممکن است به ترتیب، پتانسیل سرعت و تابع جریان در صفحه  $xy$  تعییر کرد. خط جریان یا مرز طبیعی  $c_2(u, v) = \psi(u, v)$  در صفحه  $uv$  با خط جریان یا مرز طبیعی  $c_2[u(x, y), v(x, y)] = \psi[u(x, y), v(x, y)]$  در صفحه  $xy$  متناظر است.

برای استفاده از این روش، معمولاً مؤثرترين کار اين است که ابتدا تابع پتانسیل مختلط را برای ناحیه صفحه  $w$  بنویسیم و سپس از روی آن پتانسیل سرعت و تابع جریان را برای ناحیه نظیر در صفحه  $xy$  به دست آوریم. به عبارت دقیقتر، اگر تابع پتانسیل در صفحه  $uv$  تابع

$$F(w) = \phi(u, v) + i\psi(u, v)$$

باشد، آنگاه تابع مرکب

$$F[f(z)] = \phi[u(x, y), v(x, y)] + i\psi[u(x, y), v(x, y)]$$



شکل ۱۵۳

پتانسیل مختلط مطلوب در صفحه  $xy$  است. برای اجتناب از افراط در نمادگذاری از همان نمادهای  $F$ ,  $\phi$  و  $\psi$  برای پتانسیل مختلط و غیره در هر دو صفحه  $xy$  و  $uv$  استفاده می‌کنیم.

مثال ۱. یک جریان در ربع اول  $x > 0, y > 0$  را در نظر می‌گیریم که در امتداد موازی محور  $u$  پایین می‌آید اما همان طور که در شکل ۱۵۳ نشان داده شده است اجباراً گوشاهی در نزدیکی مبدأ را دور می‌زند. برای تعیین جریان، به خاطر می‌آوریم (مثال ۳، بخش ۱۲) که تبدیل

$$w = z^2 = x^2 - y^2 + i2xy$$

ربع اول را به روی نیمة بالایی صفحه  $uv$  و مرز ربع را به روی تمام محور  $u$  می‌نگارد. از مثال بخش ۱۰۷، پی می‌بریم که پتانسیل مختلط برای جریان یکنواخت به طرف راست در نیمة بالایی صفحه  $w$  عبارت است از  $F = Aw$ , که در آن  $A$  عدد ثابت حقیقی مثبتی است. بنابراین پتانسیل در ربع اول عبارت است از

$$F = Az^2 = A(x^2 - y^2) + i2Axy; \quad (1)$$

و در نتیجه تابع جریان برای جریان در ربع صفحه عبارت است از

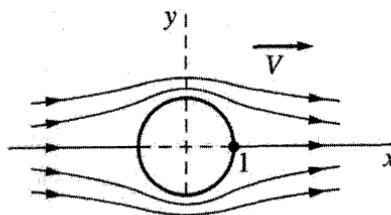
$$\psi = 2Axy. \quad (2)$$

البته این تابع جریان در ربع اول همساز است و روی مرز صفر می‌شود. خطوط جریان عبارت‌اند از شاخه‌های هذلولی متساوی‌الساقین

$$2Axy = c_2.$$

بنابراین (۳)، بخش ۱۰۷، سرعت سیال عبارت است از

$$V = \overline{2Az} = 2A(x - iy).$$



شکل ۱۵۴

ملاحظه کنید که تندی ذره،

$$|V| = 2A\sqrt{x^2 + y^2}$$

با فاصله ذره تا مبدأ نسبت مستقیم دارد. مقدار تابع چریان (۲) در نقطه  $(x, y)$  را می‌توان نزد چریان در روی پاره خطی تعبیر کرد که از مبدأ تا آن نقطه امتداد دارد.

مثال ۲. فرض کنید استوانه مستبدیر و درازی به شاعع واحد در مقدار زیادی از سیال که با سرعت یکنواخت چریان دارد قرار گرفته باشد، محور استوانه بر جهت چریان عمود است. برای معین کردن چریان پایا حول استوانه، استوانه را با دایره  $x^2 + y^2 = 1$  نمایش می‌دهیم و فرض می‌کنیم چریان دور از آن موازی محور  $x$  و به سمت راست باشد (شکل ۱۵۴). تقارن نشان می‌دهد که نقاط روی محور  $x$  ها را که در خارج دایره است می‌توان نقاط مرزی تلقی کرد، ولذا لازم است که فقط قسمت بالایی شکل را ناحیه چریان در نظر بگیریم.

مرز این ناحیه چریان، مشکل از نیمداire بالایی و قسمتهای محور  $x$  ها در خارج دایره، به وسیله تبدیل زیر به روی تمام محور  $w$  ها نگاشته می‌شود

$$w = z + \frac{1}{z}.$$

همچنان که در شکل ۱۷ پیوست ۲ نشان داده شده است، این ناحیه به روی نیم صفحه  $\theta \geq \pi$  نگاشته می‌شود. پتانسیل مختلط برای چریان یکنواخت در آن نیم صفحه عبارت است از  $F = Aw$ ، که در آن  $A$  عدد حقیقی ثابتی است. بنابراین پتانسیل مختلط برای ناحیه خارج دایره و بالای محور  $x$  ها عبارت است از

$$F = A \left( z + \frac{1}{z} \right). \quad (3)$$

وقتی  $|z|$  افزایش یابد سرعت

$$V = A \left( 1 - \frac{1}{\bar{z}^2} \right) \quad (4)$$

به  $A$  نزدیک می‌شود؛ بنابراین همان‌طور که انتظار داشتیم، در نقاط دور از دایره، جریان تقریباً یکنواخت و موازی محور  $x$ ‌ها است. بنابر فرمول (۴)، داریم  $V(z) = \bar{V}(\bar{z})$ ، لذا همان فرمول، سرعتهای جریان در ناحیه پایینی را نیز نمایش می‌دهد، نیمدایره پایینی یک خط جریان است. بنابر فرمول (۳)،تابع جریان برای مسئله مفروض در مختصات قطبی عبارت است از

$$\psi = A \left( r - \frac{1}{r} \right) \sin \theta. \quad (5)$$

خطوط جریان

$$A \left( r - \frac{1}{r} \right) \sin \theta = c_2$$

نسبت به محور  $y$  متقارن و دارای مجانبیایی به موازات محور  $x$ ‌هایند. توجه کنید که وقتی  $\theta = 0^\circ$  خط جریان مشکل است از دایره  $r = 1$  و قسمت‌هایی از محور  $x$  که در خارج دایره‌اند.

### تمرینها

۱. بیان کنید چرا مؤلفه‌های سرعت را می‌توان از تابع جریان به وسیله فرمولهای زیر به دست آورد

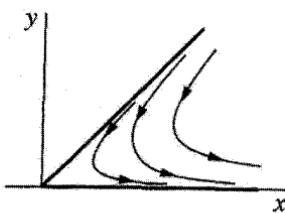
$$p(x, y) = \psi_y(x, y), \quad q(x, y) = -\psi_x(x, y).$$

۲. در یک نقطه داخلی ناحیه جریان، تحت شرایطی که فرض کردی‌ایم، فشار سیال نمی‌تواند از فشار در هر نقطه دیگر همسایگی از آن نقطه کمتر باشد. صحبت این مطلب را به کمک احکام بخش‌های  $106$ ،  $107$  و  $5^\circ$  تحقیق کنید.

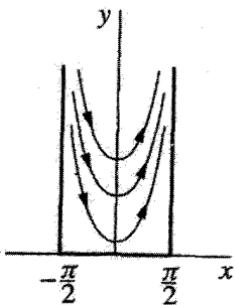
۳. برای جریان حول یک گوشه که در مثال ۱ بخش  $108$  تشریح شد، در چه نقطه‌ای از ناحیه  $x \geq 0$ ،  $y$  فشار سیال بیشترین مقدار را دارد؟

۴. نشان دهید که تندی سیال در نقاط روی سطح استوانه‌یی، در مثال ۲، بخش  $108$ ، عبارت است از  $|A| \sin \theta$  و فشار سیال روی استوانه در نقاط  $1 \pm z = \pm i$  بیشترین مقدار و در نقاط  $z = \pm i$  کمترین مقدار را دارد.

۵. پتانسیل مختلط برای جریان حول استوانه  $r = r_0$  را چنان بنویسید که اگر نقطه از استوانه دور شود سرعت  $V$  به عدد حقیقی و ثابت  $A$  نزدیک شود.



شکل ۱۵۵



شکل ۱۵۶

## ۶. تابع جریان

$$\psi = Ar^{\frac{1}{2}} \sin \theta$$

را برای سیال در ناحیه زاویه‌بی  $0^\circ \leq \theta \leq \pi/4$ ,  $r \geq 0$  به دست آورید (شکل ۱۵۵) و چند خط جریان در داخل این ناحیه رارسم کنید.

۷. پتانسیل مختلط  $F = A \sin z$  را برای جریانی در درون ناحیه نیمه نامتناهی  $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$ ,  $y \geq 0$  به دست آورید (شکل ۱۵۶). معادلات خطوط جریان را بنویسید.

۸. نشان دهید که اگر  $\phi = A \ln r + \psi$  ( $A > 0$ ), پتانسیل سرعت برای جریان در ناحیه  $r \geq r_0$  باشد خطوط جریان عبارت‌اند از نیم خط‌های  $\theta = c$  ( $r \geq r_0$ ), و متناظر با چشمه‌ای به قدرت  $2\pi A$  در مبدأ، نز جریان به خارج از هر دایره کامل حول مبدأ برابر  $2\pi A$  است.

## ۹. پتانسیل مختلط

$$F = A \left( z^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{z^{\frac{1}{2}}} \right)$$

را برای جریانی در ناحیه  $1^\circ \leq \theta \leq \pi/2$ ,  $r \geq 0$  به دست آورید. فرمولهایی برای  $V$  و  $\psi$  بنویسید. به چگونگی تغییر تندی  $|V|$  در امتداد مرز ناحیه توجه و تحقیق کنید که روی مرز  $\psi(x, y) = 0$ .

۱۰. فرض کنید که جریان در فاصله بین نهایت دور از استوانه به شعاع واحد، مربوط به مثال ۲، بخش ۱۰۸، درجه‌ی که با محور  $x$ ‌ها زاویه  $\alpha$  می‌سازد یکنواخت باشد، یعنی

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} V = Ae^{i\alpha} \quad (A > 0).$$

پتانسیل مختلط را پیدا کنید.

$$F = A[ze^{-i\alpha} + \frac{1}{z}e^{i\alpha}] \quad \text{جواب:}$$

۱۱. قرار می‌دهیم

$$z - 2 = r_1 \exp(i\theta_1), \quad z + 2 = r_2 \exp(i\theta_2)$$

$$(z^2 - 4)^{1/2} = \sqrt{r_1 r_2} \exp\left(i\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right),$$

که در آن

$$0^\circ \leq \theta_2 < 2\pi \quad \text{و} \quad 0^\circ \leq \theta_1 < 2\pi$$

در این صورت تابع  $(z^2 - 4)^{1/2}$  تک مقداری و همه جا تحلیلی است بجز روی بریدگی شاخه متتشکل از قطعه خط بین نقاط  $\pm 2 = z$  از محور  $x$ ‌ها. به علاوه از تمرین ۱۳ بخش ۸۵ پی می‌بریم که تبدیل

$$z = w + \frac{1}{w}$$

دایره  $|w| = 1$  را بر روی پاره خط از  $-2 = z$  تا  $2 = z$  می‌نگارد و حوزه خارج این دایره را به روی مابقی صفحه می‌نگارد. با استفاده از همه ملاحظات فوق نشان دهید که وارون تبدیل فوق را، در آن به ازای هر نقطه  $z$  که روی بریدگی شاخه نباشد  $> |w|$ ، می‌توان چنین نوشت

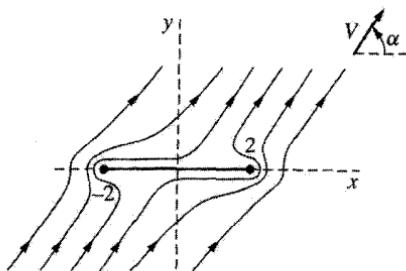
$$w = \frac{1}{2}[z + (z^2 - 4)^{1/2}] = \frac{1}{2} \left( \sqrt{r_1} \exp \frac{i\theta_1}{2} + \sqrt{r_2} \exp \frac{i\theta_2}{2} \right).$$

بدین ترتیب تبدیل بالا و این وارون، تناظری یک‌به‌یک بین نقاط دو حوزه برقرار می‌کنند.

۱۲. به کمک نتایج تمرینهای ۱۰ و ۱۱ فرمول زیر را به دست آورید

$$F = A[z \cos \alpha - i(z^2 - 4)^{1/2} \sin \alpha]$$

که عبارت از پتانسیل مختلط برای جریان پایا حول ورق درازی است که پهنای آن ۴ و مقطع



شکل ۱۵۷

عرضی آن پاره خط واصل بین دو نقطه  $z = \pm 2$  است، با این فرض که سرعت سیال در فاصله بی‌نهایت از ورق عبارت باشد از  $A \exp(i\alpha)$ . شاخه  $(z^2 - 4)^{1/2}$  شاخه بی‌نهایت است که در تمرین ۱۱ مشخص شد و  $\alpha > 0$ .

۱۳. نشان دهید که اگر در تمرین ۱۲ داشته باشیم  $\sin \alpha \neq 0$ ، تندی سیال در امتداد پاره خط واصل بین نقاط  $z = \pm 2$  در نقاط انتهایی بی‌نهایت است و در نقطه وسط آن  $|A| \cos \alpha$ .

۱۴. برای سهولت، فرض کنید که در تمرین ۱۲،  $\alpha \leq \pi/2$  است. سپس نشان دهید که سرعت سیال در سمت بالای پاره خطی که نمایش ورق در شکل ۱۵۷ است، در نقطه  $x = 2 \cos \alpha$ ،  $y = 2 \sin \alpha$  و در سمت پایین پاره خط در نقطه  $x = -2 \cos \alpha$ ،  $y = -2 \sin \alpha$  صفر است.

۱۵. یک دایره به مرکز  $x_0$  و رادیوس  $r_0$  را روی محور  $x$  مارب نقطه  $-1 = z$ ، تحت تبدیل

$$w = z + \frac{1}{z}$$

قرار دارد. تصویر تک تک نقاط ناصرف  $z$  را به طور هندسی می‌توان با جمع کردن بردارها

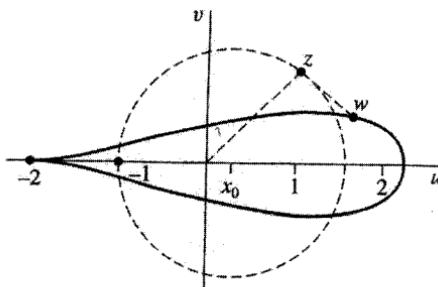
$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r} e^{-i\theta} \quad \text{و} \quad z = r e^{i\theta}$$

به دست آورد. با نگاشتن بعضی نقاط نشان دهید که تصویر دایره، مقطعی از نوع نشان داده شده در شکل ۱۵۸ است و نقاط خارج دایره به روی نقاط خارج مقطع نگاشته می‌شوند. این حالت خاصی است از طرح هواشکن زوکوفسکی.<sup>۱</sup> (تمرینهای ۱۶ و ۱۷ را نیز ببینید).

۱۶. (الف) نشان دهید که نگاشت دایره در تمرین ۱۵ همدیس است بجز در نقطه  $-1 = z$ .

(ب) فرض کنید اعداد مختلط

$$t = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{|\Delta z|}, \quad \tau = \lim_{\Delta w \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{|\Delta w|}$$



شکل ۱۵۸

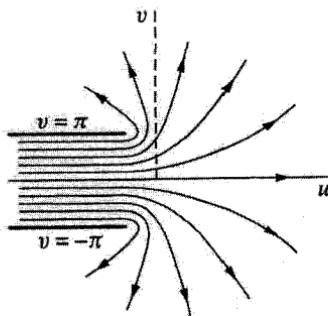
نمایش بردارهای واحدی باشند که به ترتیب بر یک قوس جهت‌دار در  $-z = 1$  و تصویر آن قوس تحت تبدیل  $w = z + 1/z$  مماس‌اند. نشان دهید که  $\tau = -t^2$  و بنابراین طرح ژوکوفسکی شکل ۱۵۸ در نقطه  $-2 = w$  دارای یک نقطه بازگشت است. زاویه بین مماسها در نقطه بازگشت صفر است.

۱۷. وارون تبدیل

$$w = z + \frac{1}{z}$$

که در تمرین ۱۵ به کار رفت، با تعویض  $z$  و  $w$ ، در تمرین ۱۱ داده شده است. مطلوب است، پتانسیل مختلط برای جریان حول هواشکن، که در تمرین ۱۵ معرفی شد، به شرطی که  $V$  سرعت سیال در فاصله بی‌نهایت دور از مبدأ، عدد حقیقی و ثابت  $A$  باشد.

۱۸. توجه کنید که تحت تبدیل  $w = e^z + z$  هر یک از نیم خطهای  $x \geq 0^\circ$  از خط  $y = \pi$  به روی نیم خط  $v = \pi$  (و  $u \leq -1$ ) و از نیم خطهای  $x \leq 0^\circ$  از خط  $y = -\pi$  به روی نیم خط  $v = -\pi$  نگاشته می‌شود. همین‌طور،



شکل ۱۵۹

( $u \leq -\pi$  و  $y \leq \pi$ ) نگاشته می‌شود و نوار  $w$  به روی صفحه  $w$ . همچنین توجه کنید که وقتی  $x$  به  $-\infty$  میل کند تغییر جهتها،  $\arg(dw/dz)$  تحت این تبدیل به صفر میل می‌کند. نشان دهید که خطوط جریان یک سیال که از مجرای باز مشتمل از نیم خطهای صفحه  $w$  جریان دارد (شکل ۱۵۹) عبارت‌اند از تصاویر خطوط  $y = c_2$  در این نوار. این خطوط جریان، منحنیهای هم‌پتانسیل میدان الکترواستاتیکی در نزدیکی لبه حازنی با صفحات موازی را نیز نمایش می‌دهند.

## تبدیل شوارتس-کریستوفل

در این فصل تبدیل می‌سازیم، معروف به تبدیل شوارتس-کریستوفل، که محور  $x$ ‌ها و نیمة بالایی صفحه  $z$  را به روی یک چندضلعی بسته ساده و داخل آن در صفحه  $w$ ، می‌نگارد. کاربردهای این تبدیل، در حل مسائل جریان سیال و نظریه پتانسیل الکترواستاتیکی مطرح شده است.

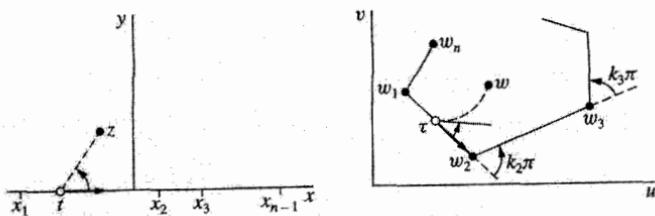
### ۱۰۹. نگاشت محور حقیقی به روی یک چندضلعی

بردار واحد مماس بر قوس هموار  $C$  در نقطه  $z$  را با عدد مختلط  $t$  نمایش می‌دهیم و فرض می‌کنیم عدد  $\tau$  بردار واحد مماس بر  $\Gamma$ ، تصویر  $C$  تحت تبدیل  $w = f(z)$  در نقطه متناظر  $w$  باشد. فرض می‌کنیم که  $f$  در  $z$  تحلیلی باشد و  $f'(z_0) \neq 0$ . بنابر بخش ۹۴ داریم

$$\arg \tau = \arg f'(z_0) + \arg t. \quad (1)$$

به خصوص اگر  $C$  قطعه‌ای از محور  $x$ ‌ها با جهت مثبت به راست باشد، در هر نقطه  $x_0 = z_0$  روی  $C$ ،  $\arg t = 0$ . در این حالت رابطه (۱) تبدیل می‌شود به

$$\arg \tau = \arg f'(x). \quad (2)$$



شکل ۱۶۰

اگر  $f'(z)$  در امتداد آن قطعه دارای آوند ثابتی باشد، نتیجه می‌شود که  $\arg \tau$  ثابت است. بنابراین  $\Gamma$ ، تصویر  $C$ ، نیز قطعه‌ای از یک خط راست است.

حال تبدیلی مانند  $(z) = f(w)$  می‌سازیم که کل محورها را به روی یک  $n$ -ضلعی بگارد که در آن  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$  و  $\infty$  نقاطی بر آن محورند که تصاویرشان رؤوس آن چندضلعی است و

$$x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1}.$$

این رؤوس عبارت‌اند از نقاط  $f(x_j) = f(\infty)$  ( $j = 1, 2, \dots, n-1$ ) و  $w_j = f(x_j)$ . تابع  $f$  باید به قسمی باشد که وقتی نقطه  $z$  محور  $x$  را می‌پیماید،  $\arg f'(z)$  در نقطه  $z = x_j$  از یک مقدار ثابت به مقدار ثابت دیگری جهش کند (شکل ۱۶۰).

اگر تابع  $f$  به قسمی اختیار شود که

$$f'(z) = A(z - x_1)^{-k_1}(z - x_2)^{-k_2} \cdots (z - x_{n-1})^{-k_{n-1}} \quad (3)$$

که در آن  $A$  یک عدد مختلط ثابت و هر  $k_j$  عدد حقیقی ثابتی است، آنگاه وقتی  $z$  محور  $x$  را می‌پیماید آوند  $f'(z)$  به نحوی که از قبل تعیین شده است تغییر می‌نماید؛ زیرا آوند مشتق (۳) را می‌توان چنین نوشت

$$\arg f'(z) = \arg A - k_1 \arg(z - x_1) \quad (4)$$

$$- k_2 \arg(z - x_2) - \cdots - k_{n-1} \arg(z - x_{n-1}).$$

هنگامی که  $x < x_1$  و  $z = x$  داریم

$$\arg(z - x_1) = \arg(z - x_2) = \cdots = \arg(z - x_{n-1}) = \pi.$$

هنگامی که  $x_1 < x_2 < x$ ، داریم  $\arg(z - x_1) = \pi$  و هر یک از آوندهای دیگر،  $\pi$  است. پس، بنابر رابطه (۴)، وقتی  $z$  از نقطه  $x_1$  به سمت راست حرکت کند،  $\arg f'(z)$  به طور ناگهانی به اندازه زاویه  $k_1\pi$  افزایش می‌یابد. مجددًا وقتی  $z$  از نقطه  $x_2$  می‌گذرد مقدار  $\arg f'(z)$  به اندازه  $k_2\pi$  جهش می‌کند وغیره.

با توجه به رابطه (۲)، وقتی  $z$  از  $-x_j$  به  $x_j$  تغییر مکان می‌دهد جهت بردار واحد  $\tau$  ثابت است، پس  $w$  در آن جهت مشخص در امتداد خط راستی حرکت می‌کند. همان‌طور که در شکل ۱۶۰ نشان داده است، جهت  $\tau$  در نقطه  $w_j$  تصویر  $x_j$ ، به طور ناگهانی به اندازه زاویه  $k_j\pi$  تغییر می‌کند. زوایای  $k_j\pi$  عبارت‌اند از زوایای خارجی چندضلعی که به‌وسیله نقطه  $w$  پیموده می‌شود.

این زوایای خارجی را می‌توان به زوایایی بین  $-\pi$  و  $\pi$  محدود کرد؛ یعنی،  $-1 < k_j < 1$ . فرض می‌کنیم که اضلاع چندضلعی هیچ‌گاه یکدیگر را قطع نکنند و به چندضلعی جهت مثبت، یا عکس حرکت عقربه‌های ساعت، داده شده باشد. در این صورت مجموع زوایای خارجی یک چندضلعی بسته  $2\pi$  است و زاویه خارجی در رأس  $w_n$  را، که تصویر نقطه  $\infty = z$  است، می‌توان چنین نوشت

$$k_n\pi = 2\pi - (k_1 + k_2 + \cdots + k_{n-1})\pi.$$

بنابراین اعداد  $k_j$  باید لزوماً در شرایط زیر صدق کنند

$$k_1 + k_2 + \cdots + k_{n-1} + k_n = 2, \quad -1 < k_j < 1 \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (5)$$

توجه کنید که اگر

$$k_1 + k_2 + \cdots + k_{n-1} = 2 \quad (6)$$

آنگاه  $k_n = 0$ . در این حالت جهت  $\tau$  در نقطه  $w_n$  تغییر نمی‌کند، لذا  $w_n$  یک رأس نیست و چندضلعی  $n-1$  ضلع دارد.

وجودتابع نگاشت  $f$ ، که مشتق آن با فرمول (۳) معین می‌شود، در بخش بعد ثابت خواهد شد.

## ۱۱۰. تبدیل شوارتس-کریستوفل

در عبارت (۱۰۹) (بخش ۱۰۹)

$$f'(z) = A(z - x_1)^{-k_1}(z - x_2)^{-k_2} \cdots (z - x_{n-1})^{-k_{n-1}} \quad (1)$$

برای مشتق تابعی که باید محور  $x$  را به روی چندضلعی بینگارد، فرض کنید عوامل  $(z - x_j)^{-k_j}$  نمایش شاخه‌هایی از توابع توانی باشند که بریدگیهای شاخه‌یی آنها در زیر آن محور واقع است. به عبارت دقیق‌تر می‌نویسیم

$$(z - x_j)^{-k_j} = |z - x_j|^{-k_j} \exp(-ik_j\theta_j) \quad \left( \frac{-\pi}{2} < \theta_j < \frac{3\pi}{2} \right) \quad (2)$$

که در آن  $\theta_j = \arg(z - x_j)$  و  $\theta_j = 1, 2, \dots, n - 1$ . پس  $f'(z)$  همه‌جا در نیم‌صفحهٔ  $y \geq 0$  بجز در  $1 - n$  نقطهٔ شاخه‌یی  $x_j$ ، تحلیلی است.

اگر  $z$  نقطه‌ای در آن ناحیهٔ تحلیلی، که در اینجا با  $R$  نمایش می‌دهیم، باشد آن‌گاه تابع

$$F(z) = \int_{z_0}^z f'(s) ds \quad (3)$$

در سراسر همان ناحیهٔ تک‌مقداری و تحلیلی است، که در آن مسیر انتگرال‌گیری از  $z$  تا  $z$  مسیری دلخواه واقع در درون  $R$  است. به علاوه،  $F'(z) = f'(z)$  (بخش ۴۲ را ببینید).

برای تعریف تابع  $F$  در نقطهٔ  $x_1$  که در آن نقطهٔ پیوسته باشد، توجه داریم که  $(z - x_1)^{-k_1}$  تنها عامل عبارت (۱) است که در آن  $x_1$  تحلیلی نیست. بنابراین اگر  $\phi(z)$  معرف حاصلضرب بقیهٔ عوامل آن عبارت باشد،  $\phi(x_1)$  در  $x_1$  تحلیلی است و در سراسر قرص بازی مانند  $|z - x_1| < R_1$  به‌وسیلهٔ سری تیلر آن حول  $x_1$  نمایش داده می‌شود. بنابراین می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} f'(z) &= (z - x_1)^{-k_1} \phi(z) \\ &= (z - x_1)^{-k_1} \left[ \phi(x_1) + \frac{\phi'(x_1)}{1!}(z - x_1) + \frac{\phi''(x_1)}{2!}(z - x_1)^2 + \dots \right] \end{aligned} \quad (4)$$

یا

$$f'(z) = \phi(x_1)(z - x_1)^{-k_1} + (z - x_1)^{1-k_1} \psi(z) \quad (4)$$

که در آن  $\psi$  در سراسر قرص باز تحلیلی، و بنابراین پیوسته است. چون  $1 - k_1 > 0$ ، اگر به جمله آخر سمت راست رابطه (۴) در  $z = x_1$  مقدار صفر را تخصیص دهیم، آن جمله معرف یک تابع پیوسته از  $z$  در سراسر نیمةٔ بالایی قرص است، که در آن  $\text{Im } z \geq 0$ . از اینجا نتیجه می‌شود که انتگرال جملهٔ آخری در امتداد مسیری از  $Z_1$  به  $z$ ،

$$\int_{Z_1}^z (s - x_1)^{1-k_1} \psi(s) ds,$$

که  $Z_1$  و مسیر در آن نیم قرص واقع‌اند، در  $x_1 = z$  تابع پیوسته‌ای از  $z$  است. انتگرال

$$\int_{Z_1}^z (s - x_1)^{-k_1} ds = \frac{1}{1 - k_1} [(z - x_1)^{1 - k_1} - (Z_1 - x_1)^{1 - k_1}]$$

در امتداد همان مسیر نیز در  $x_1 = z$  تابع پیوسته‌ای از  $z$  را نمایش می‌دهد هرگاه مقدار انتگرال را در  $x_1$  مساوی حدش، وقتی که  $z$  به  $x_1$  در نیم قرص میل کند، تعریف کنیم. بنابراین، انتگرال تابع (۴) در امتداد مسیر تعیین شده از  $Z_1$  تا  $z$  در  $x_1 = z$  پیوسته است، پس انتگرال (۳) نیز چنین است، زیرا می‌توان آن را به عنوان انتگرالی در امتداد یک مسیر در  $R$  از  $z_1$  تا  $z$ ، بعلاوه انتگرال از  $Z_1$  تا  $z$  نوشت.

استدلال بالا در مورد هر یک از  $1 - n$  نقطه  $x_j$  اعمال می‌شود تا  $F$  در سراسر ناحیه  $\circ \geq y$  پیوسته شود.

بنابرایط (۱)، می‌توان نشان داد که به‌ازای عدد ثابت و به‌قدر کافی بزرگ  $R$  عدد ثابت و مثبتی مانند  $M$  هست به قسمی که اگر  $\circ \geq Im z$  آنگاه

$$. |z| > R \quad \text{هرگاه} \quad |f'(z)| < \frac{M}{|z|^{2-k_n}} \quad (5)$$

چون  $1 - k_n > 2$ ، این ویژگی ترتیبی انتگرال‌ده در رایطه (۳)، نشان می‌دهد که وقتی  $z$  به بینهایت میل کند، حد انتگرال موجود است؛ یعنی، عددی مانند  $W_n$  وجود دارد به قسمی که

$$\lim_{z \rightarrow \infty} F(z) = W_n \quad (Im z \geq \circ). \quad (6)$$

جزئیات استدلال را در تمرینهای ۱ و ۲ به‌عهده خواننده گذاشته‌ایم.

تابع نگاشتی را که مشتق آن با فرمول (۱) معین شده است، می‌توان چنین نوشت تابع  $f(z) = F(z) + B$ ، که در آن  $B$  عدد مختلط ثابتی است. تبدیل حاصل، یعنی

$$w = A \int_{z_0}^z (s - x_1)^{-k_1} (s - x_2)^{-k_2} \dots (s - x_{n-1})^{-k_{n-1}} ds + B \quad (7)$$

تبدیل شوارتس-کریستوفل نام دارد که به افتخار دو ریاضیدان آلمانی شوارتس<sup>۱</sup> (۱۸۴۳-۱۹۲۱) و کریستوفل<sup>۲</sup> (۱۸۰۰-۱۸۲۹)، که مستقلان آن را پیدا کرده‌اند، نامگذاری شده است.

تبدیل (۷) در سراسر نیم صفحه  $\circ \geq y$  پیوسته است و این تبدیل در آن نیم صفحه، بجز در نقاط  $x_j$ ، هم‌دیس است. فرض کردایم که اعداد  $k_j$  در شرایط (۵) بخش ۱۰۹ صدق کنند.

1. H. A. Schwarz    2. E. B. Christoffel

به علاوه فرض می‌کنیم که اعداد ثابت  $x_j$  و  $k_j$  به قسمی باشند که اضلاع چندضلعی یکدیگر را قطع نکنند، بنابراین چندضلعی یک مسیر ساده بسته است. بدین ترتیب، بنابر بخش ۱۰۹، وقتی نقطه  $z$  محور  $x$ ‌ها را در جهت مثبت بپیماید، تصویرش یعنی  $w$  چندضلعی  $P$  را در جهت مثبت خواهد پیمود و تناظری یک‌به‌یک بین نقاط روی آن محور و نقاط روی  $P$  موجود است. بنابر شرط (۶)،  $w_n = W_n + B$  موجود است و  $z = \infty$ ، تصویر نقطه  $\infty$  است.

اگر  $z$  یک نقطه داخلی نیم‌صفحه بالایی  ${}^+y$  و  ${}^+x$  نقطه‌ای به غیر از  $x_j$ ‌ها روی محور  $x$  باشد، آن‌گاه زاویه از بردار  $t$  در  ${}^+x$  تا پاره خط واصل بین  ${}^+x$  و  ${}^+z$ ، مثبت و کوچکتر از  $\pi$  است (شکل ۱۶۰). در  $w$ ، تصویر  $x$ ، زاویه متناظر از بردار  $\tau$  تا تصویر پاره خط واصل بین  $w$  و  $z$ ، دارای همان مقدار است. بنابراین تصاویر نقاط داخلی نیم‌صفحه در سمت چپ اضلاع چندضلعی واقع‌اند، وقتی اضلاع در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت پیموده شوند. اثبات این مطلب که این تبدیل تناظری یک‌به‌یک بین نقاط داخلی نیم‌صفحه و نقاط درون چندضلعی برقرار می‌کند جزو تمرینات گذاشته شده است (تمرین ۳).

چندضلعی معین  $P$  مفروض است، تعداد اعداد ثابت در تبدیل شوارتس-کریستوفل را که می‌باید تعیین کرد تا محور  $x$ ‌ها را به روی  $P$  بنگارد، بررسی می‌کنیم. برای این منظور می‌توان نوشت،  $A = {}^+z$  و  $B = {}^+A$  و فقط خواست که محور  $x$ ‌ها به روی یک چندضلعی  $P'$  مشابه  $P$  نگاشته شود. با معرفی اعداد ثابت  $A$  و  $B$  مناسب می‌توان اندازه و مکان  $P'$  را تنظیم کرد تا با اندازه و مکان  $P$  یکی شود.

همه اعداد  $k_j$  از روی زوایای خارجی در رؤوس  $P$  تعیین می‌شوند. حال آنچه باقی می‌ماند انتخاب  $n - 1$  عدد ثابت  $x_j$  است. تصویر محور  $x$ ‌ها، چندضلعی مانند  $P'$  است که دارای همان زوایای  $P$  است. اما اگر  $P'$  بخواهد مشابه با  $P$  باشد آن‌گاه  $n - 1$  ضلع همبند باید نسبت مشترکی با اضلاع متناظر  $P$  داشته باشند. این شرط به وسیله  $n - 1$  معادله بر حسب  $n - 1$  مجھول حقیقی  $x_j$  بیان می‌شود. بنابراین دو تا از اعداد  $x_j$ ، یا دو رابطه بین آنها، را می‌توان به دلخواه انتخاب کرد، مشروط بر اینکه آن  $n - 3$  معادله بر حسب مابقی  $n - 3$  مجھول دارای ریشه‌های حقیقی باشند. وقتی نقطه متناهی  $x_n = z$  بر محور  $x$ ، به جای نقطه در بین نهایت، نقطه‌ای را نمایش دهد که تصویرش رأس  $w_n$  است، بنابر بخش ۱۰۹، نتیجه می‌شود که تبدیل شوارتس-کریستوفل به صورت زیر در می‌آید

$$w = A \int_{z_0}^z (s - x_1)^{-k_1} (s - x_2)^{-k_2} \cdots (s - x_n)^{-k_n} ds + B \quad (8)$$

که در آن  $2 = k_1 + \dots + k_n$ . نمایهای  $k_j$  از روی زوایای خارجی چندضلعی تعیین می‌شوند. اما در این حالت  $n$  عدد ثابت حقیقی  $x_j$  وجود دارند که باید در  $n - 3$  معادله بالا صدق کنند. بنابراین، در تبدیل (۸) از محور  $x$ ‌ها به روی چندضلعی مفروض، سه تا از اعداد  $x_j$  یا سه شرط بر آن  $n$  عدد، را می‌توان به دلخواه انتخاب کرد.

### تمرینها

۱. نامساوی (۵)، بخش  $11^\circ$  را به دست آورید.

راهنمایی: فرض کنید  $R$  از هر یک از اعداد  $|x_j - 1|$  ( $j = 1, 2, \dots, n - 1$ ) بزرگتر باشد. توجه کنید که برای  $R$  به قدر کافی بزرگ در صورتی که  $|z| > R$ ، بازی هر  $x_j$  نابرابری‌های  $|z| < |z - x_j| < 2|z|/2$  برقرارند. سپس از رابطه (۱)، بخش  $11^\circ$ ، با شرایط (۵)، بخش  $10^\circ$ ، استفاده کنید.

۲. با استفاده از شرط (۵)، بخش  $11^\circ$ ، و شرایط کافی برای وجود انتگرالهای ناسرة تابع حقیقی مقدار، نشان دهید که وقتی  $x$  به بی‌نهایت میل کند ( $F(x)$  دارای حدی مانند  $W_n$  است، که در آن  $F(z)$  با رابطه (۳) آن بخش تعریف شده است. همچنین، نشان دهید که وقتی  $R$  به  $\infty$  میل کند، انتگرال  $f'(z)$  بر هر کمانی از نیم‌دایره  $|z| = R$  به  $0^\circ$  میل می‌کند. سپس، همچنان‌که در رابطه (۶)، بخش  $11^\circ$ ، بیان شد، نتیجه بگیرید که

$$\lim_{z \rightarrow \infty} F(z) = W_n \quad (\operatorname{Im} z \geq 0).$$

۳. بنابر بخش ۷۹، فرمول

$$N = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{g'(z)}{g(z)} dz$$

را می‌توان برای تعیین ( $N$ ) تعداد صفرهایی از تابع  $g$  به کار برد که در داخل مسیر ساده و بسته و به طور مثبت جهت‌دار شده  $C$  واقع‌اند، در صورتی که روی  $C$ ،  $g(z) \neq 0$  در حوزه همبند ساده  $D$  واقع و  $g$  در سراسر آن تحلیلی باشد و  $g'(z) \neq 0$  هیچ‌گاه بر  $D$  صفر نشود. در این فرمول قرار می‌دهیم  $w = f(z) - g(z)$ ، که در آن  $f$  عبارت است از تابع نگاشت شوارتس-کریستوفل (۷) بخش  $11^\circ$ ، نقطه  $w$  یا در داخل و یا در خارج چندضلعی  $P$  است، که تصویر محور  $x$  است، بنابراین  $w \neq f(z)$ . فرض کنید مسیر  $C$  متشکل باشد از نیمه بالایی دایره  $|z| = R$  و پاره خط  $R < x < -R$  از محور  $x$  که شامل هر  $1 - n$  نقطه  $x_j$  است، بجز اینکه حول هر

نقطه  $x_j$  به جای یک پاره خط کوچک نیمة بالایی دایره  $\rho_j = |z - x_j|$  را، که آن پاره خط قطر این دایره است، قرار داده ایم. پس تعداد نقاط  $z$  در داخل  $C$  که  $f(z) = w_0$  برابر است با

$$N_C = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z) - w_0} dz.$$

توجه کنید که وقتی  $R = |z|$  و  $R = f(z) - w_0$  به بی‌نهایت میل کند،  $f'(z)$  به نقطه ناصفر  $w_0$  میل می‌کند و ویژگی ترتیبی (۵)، بخش ۱۱° در مورد  $|f'(z)|$  را به یاد بیاورید. فرض کنید  $j$  به صفر میل کند و ثابت کنید که تعداد نقاط در نیمة بالایی صفحه  $z$  که در آنها  $f(z) = w_0$  مساوی است با

$$N = \frac{1}{2\pi i} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{f'(x)}{f(x) - w_0} dx.$$

نتیجه بگیرید که چون

$$\int_P \frac{dw}{w - w_0} = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{f'(x)}{f(x) - w_0} dx,$$

$N = 1$  هرگاه  $w_0$  نقطه داخلی  $P$  باشد و  $w_0$  نقطه خارجی  $P$  باشد. بدین طریق نشان دهید که نگاشت نیم صفحه  $\text{Im } z > 0$  به روی داخل  $P$  یک به یک است.

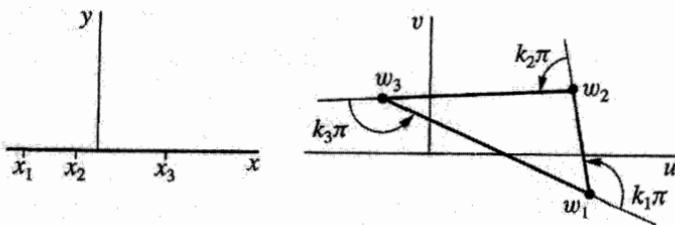
## ۱۱۱. مثلث و مستطیل

تبديل شوارتش-کریستوفل، بر حسب نقاط  $x_j$  نوشته می‌شود نه بر حسب تصاویرشان، یعنی رؤوس چندضلعی. بیش از سه تا از آن نقاط را نمی‌توان به دلخواه انتخاب کرد، بنابراین وقتی چندضلعی مفروض بیش از سه ضلع دارد، برای اینکه این چندضلعی، یا هر چندضلعی مشابه آن را تصویر محور  $x$  ها سازیم باید بعضی از نقاط  $x_j$  را تعیین کنیم. انتخاب شرایط برای تعیین این اعداد ثابت، شرایطی که به کار بردن آنها راحت باشد، اغلب احتیاج به ابتکار دارد.

محدودیت دیگر استفاده از این تبدیل به دلیل انتگرالگیری مربوط به آن است. اغلب نمی‌توان انتگرال را بر حسب تعدادی متاتابی تابع مقدماتی محاسبه کرد. در چنین حالاتی جواب مسائل به وسیله این تبدیل ممکن است بسیار پیچیده شود.

اگر این چندضلعی، مثلثی با رؤوس  $w_1, w_2$  و  $w_3$  باشد (شکل ۱۶۱)، تبدیل را می‌توان چنین نوشت

$$w = A \int_{z_0}^z (s - x_1)^{-k_1} (s - x_2)^{-k_2} (s - x_3)^{-k_3} ds + B \quad (1)$$



شکل ۱۶۱

که در آن  $2 = k_1 + k_2 + k_3$ . بحسب زوایای داخلی  $j$  داریم

$$k_j = 1 - \frac{1}{\pi} \theta_j \quad (j = 1, 2, 3).$$

در اینجا هر سه نقطه  $x_j$  را نقاطی متناهی بر محور  $x$  ها گرفته‌ایم. به هر یک از آنها می‌توان مقادیر دلخواهی نسبت داد. اعداد مختلط ثابت  $A$  و  $B$ , مربوط به اندازه و مکان مثلث، را می‌توان به قسمی انتخاب کرد که نیم‌صفحه بالایی به روی ناحیه مثبتی مفروض نگاشته شود.

اگر رأس  $w_3$  را تصویر نقطه در بی‌نهایت بگیریم، تبدیل چنین می‌شود

$$w = A \int_{z_0}^z (s - x_1)^{-k_1} (s - x_2)^{-k_2} ds + B \quad (2)$$

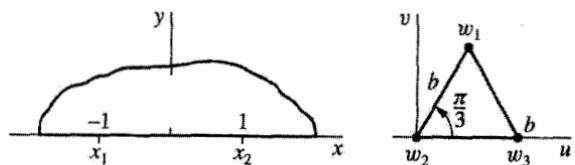
که در آن مقادیر حقیقی دلخواهی را می‌توان به  $x_1$  و  $x_2$  نسبت داد.  
انتگرال‌های روابط (۱) و (۲) نمایش تابع مقدماتی نیستند مگر اینکه مثلث با یک یا دو رأسش در بی‌نهایت تباہیده شود. در صورتی که مثلث متساوی‌الاضلاع یا مثلث قائم‌الزاویه با یک زاویه مساوی  $\pi/3$  یا  $\pi/4$  باشد، انتگرال رابطه (۲) یک انتگرال بیضوی می‌شود.

مثال ۱. برای مثلث متساوی‌الاضلاع داریم  $k_1 = k_2 = k_3 = 2/3$ . راحت‌تر این است که قرار دهیم  $-1 = x_1 = x_2 = x_3 = \infty$  و از رابطه (۲) که در آن  $1 = z_0 = A$  و  $0 = B$  استفاده کنیم. در این صورت تبدیل چنین می‌شود

$$w = \int_1^z (s + 1)^{-2/3} (s - 1)^{-2/3} ds. \quad (3)$$

واضح است که تصویر نقطه  $z = 1$  نقطه  $w = w_2$  است؛ یعنی در انتگرال  $-1 = z$ ، می‌توانیم بنویسیم  $s = x$ ، که در آن  $1 < x < -1$ . پس

$$\arg(x + 1) = 0 \quad \text{و} \quad x + 1 > 0$$



شکل ۱۶۲

در حالی که

$$\arg(x - 1) = \pi \quad \text{و} \quad |x - 1| = 1 - x$$

بنابراین

$$\begin{aligned} w &= \int_1^{-1} (x + 1)^{-1/3} (1 - x)^{-1/3} \exp\left(-\frac{2\pi i}{3}\right) dx \\ &= \exp\left(\frac{\pi i}{3}\right) \int_0^1 \frac{2dx}{(1 - x^2)^{2/3}}. \end{aligned} \quad (4)$$

با قرار دادن  $x = \sqrt{t} = \sqrt{t}$ , این انتگرال آخر به حالت خاصی از انتگرالی تبدیل می‌شود که در تعریف تابع بتا بکار رفته است (تمرین ۷ بخش ۷۷). فرض کنید  $b$  معرف مقدار این انتگرال باشد، که مثبت است:

$$b = \int_0^1 \frac{2dx}{(1 - x^2)^{2/3}} = \int_0^1 t^{-1/2} (1 - t)^{-1/3} dt = B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right). \quad (5)$$

بنابراین، رأس  $w_1$  نقطه زیر است (شکل ۱۶۲)

$$w_1 = b \exp\left(\frac{\pi i}{3}\right). \quad (6)$$

رأس  $w_2$  بر محور  $u$  مثبت قرار دارد، زیرا

$$w_2 = \int_1^\infty (x + 1)^{-1/3} (x - 1)^{-1/3} dx = \int_1^\infty \frac{dx}{(x^2 - 1)^{2/3}}.$$

اما در صورتی که  $z$  در امتداد محور  $x$  منفی به بی‌نهایت میل کند، مقدار  $w_2$  نیز با انتگرال (۳)

نمایش داده می‌شود یعنی

$$w_3 = \int_1^{-1} (|x+1||x-1|)^{-2/3} \exp\left(-\frac{4\pi i}{3}\right) dx \\ + \int_{-1}^{-\infty} (|x+1||x-1|)^{-2/3} \exp\left(-\frac{4\pi i}{3}\right) dx.$$

پس، با توجه به اولین رابطه از روابط (۴) برای  $w_1$  داریم

$$w_3 = w_1 + \exp\left(-\frac{4\pi i}{3}\right) \int_{-1}^{-\infty} (|x+1||x-1|)^{-2/3} dx \\ = b \exp\frac{\pi i}{3} + \exp\left(-\frac{\pi i}{3}\right) \int_1^{\infty} \frac{dx}{(x^2 - 1)^{2/3}},$$

با

$$w_3 = b \exp\frac{\pi i}{3} + w_1 \exp\left(-\frac{\pi i}{3}\right).$$

با حل این معادله نسبت به  $w_3$  در می‌یابیم که

$$(7) \quad w_3 = b.$$

بدین ترتیب تحقیق کردہ ایم که تصویر محور  $x$  ها، مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع  $b$  است که در شکل ۱۶۲ نشان داده شده است. همچنین می‌توان دید که

$$z = w = \frac{b}{2} \exp\frac{\pi i}{3}$$

در صورتی که چندضلعی مستطیل باشد، هرگاه  $w = \frac{b}{2} \exp\frac{\pi i}{3}$  تصویرشان رؤس مستطیل‌اند انتخاب کنیم و قرار دهیم

$$(8) \quad g(z) = (z+a)^{-1/2}(z+1)^{-1/2}(z-1)^{-1/2}(z-a)^{-1/2}$$

که در آن  $\arg(z-x_j) \leq \pi$  است. تبدیل شوارتس-کریستوفل، بجز تبدیل  $B$  که در آن  $W = Aw + B$  است، چنین می‌شود

$$(9) \quad w = - \int_0^z g(s) ds.$$

انتگرال (۹) عبارت است از حاصلضرب یک عدد ثابت در انتگرال بیضوی

$$\int_0^z (1-s^2)^{-1/2} (1-k^2 s^2)^{-1/2} ds \quad \left( k = \frac{1}{a} \right)$$

اما صورت (۸) انتگرالده با وضوح بیشتری، شاخه‌های توابع قوانی را نشان می‌دهد.

مثال ۲. حال در صورتی که  $a > 1$ ، روش مستطیل را مشخص می‌کنیم. همچنان‌که در شکل ۱۶۳ نشان داده شده است  $x_1 = -a$  و  $x_2 = 1$ ،  $x_3 = -1$  و  $x_4 = a$ . به روش زیر هر چهار رأس را می‌توان بر حسب دو عدد مثبت  $b$  و  $c$ ، که بستگی به مقدار  $a$  دارند، بیان کرد:

$$b = \int_0^1 |g(x)| dx = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(a^2-x^2)}}, \quad (10)$$

$$c = \int_{-1}^a |g(x)| dx = \int_{-1}^a \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(a^2-x^2)}}. \quad (11)$$

هرگاه  $-1 < x < 0$ ، آنگاه

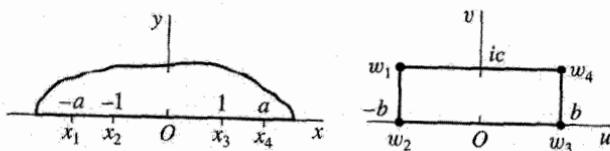
$$\arg(x-1) = \arg(x-a) = \pi \quad \text{و} \quad \arg(x+a) = \arg(x+1) = 0$$

بنابراین

$$g(x) = \left[ \exp\left(-\frac{\pi i}{2}\right) \right]^r |g(x)| = -|g(x)|.$$

اگر  $-a < x < -1$

$$g(x) = \left[ \exp\left(-\frac{\pi i}{2}\right) \right]^r |g(x)| = i|g(x)|.$$



شکل ۱۶۳

در نتیجه

$$\begin{aligned} w_1 &= - \int_0^{-a} g(x) dx = - \int_0^{-1} g(x) dx - \int_{-1}^{-a} g(x) dx \\ &= \int_0^{-1} |g(x)| dx - i \int_{-1}^{-a} |g(x)| dx = -b + ic. \end{aligned}$$

این را جزو تمرینها می‌گذاریم تا نشان دهید که

$$w_2 = -b, \quad w_3 = b, \quad w_4 = b + ic. \quad (12)$$

مکان و ابعاد مستطیل در شکل ۱۶۳ نشان داده شده‌اند.

## ۱۱۲. چند ضلعیهای تباهیده

حال تبدیل شوارتس-کریستوفل را برای بعضی از چند ضلعیهای تباهیده که انتگرال مربوط به آنها توابع مقدماتی هستند به کار می‌بریم. با مثالهایی از تبدیلهای فصل ۸ که قبلاً دیده‌ایم به توضیح این مطلب می‌پردازیم.

مثال ۱. نیم صفحه  $y \geq 0$  را به روی نوار نیمه نامتناهی زیر می‌نگاریم

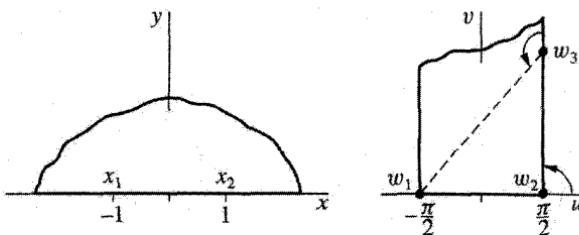
$$-\frac{\pi}{2} \leq u \leq \frac{\pi}{2}, \quad v \geq 0.$$

این نوار را به عنوان صورت حدی مثلثی با رؤوس  $w_1, w_2$  و  $w_3$  در نظر می‌گیریم (شکل ۱۶۴)

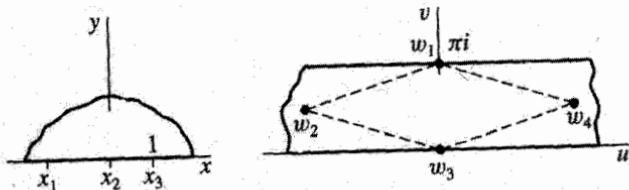
وقتی که قسمت موهومی  $w_3$  به بی‌نهایت میل کند.

مقادیر حدی زوایای خارجی عبارت‌اند از

$$k_3\pi = \pi \quad \text{و} \quad k_1\pi = k_2\pi = \frac{\pi}{2}$$



شکل ۱۶۴



شکل ۱۶۵

نقاط  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = 1$ ,  $x_3 = \infty$  و  $x_4 = 0$  را نقاطی انتخاب می‌کنیم که تصاویرشان رؤس چندضلعی باشند. پس مشتق تابع نگاشت را می‌توان چنین نوشت

$$\frac{dw}{dz} = A(z+1)^{-1/2}(z-1)^{-1/2} = A'(1-z^2)^{-1/2}.$$

بنابراین  $B = b/a$ ,  $A' = 1/a$ ,  $w = A'\sin^{-1}z + B$ . اگر قرار دهیم  $w = A'\sin^{-1}z + B$  نتیجه می‌شود که

$$z = \sin(aw - b).$$

این تبدیل از صفحه  $w$  به صفحه  $z$  در این شرایط صدق می‌کند که اگر  $a = 1$  و  $b = 0$  در صورتی که  $w = -\pi/2$ ,  $z = -1$ ,  $w = \pi/2$ ,  $z = 1$ ,  $w = \pi$ ,  $z = 0$  باشد. تبدیل حاصل عبارت است از

$$z = \sin w$$

که در بخش ۸۹ درستی آن را، به عنوان تبدیلی که نوار مذکور را به روی نیم‌صفحه می‌نگارد تحقیق کردیم.

مثال ۲. نوار  $\pi < w < 0$  را به عنوان صورت حدی لوزی با رؤس  $w_1 = \pi i$ ,  $w_2 = 0$ ,  $w_3 = -\pi i$  و  $w_4 = \infty$  در نظر می‌گیریم وقتی که نقطه  $w_2$  بی‌نهایت به چپ برود و نقطه  $w_4$  بی‌نهایت به راست (شکل ۱۶۵). در حد، زوایای خارجی چنین می‌شوند

$$k_1\pi = 0, \quad k_2\pi = \pi, \quad k_3\pi = 0, \quad k_4\pi = \pi.$$

$x_1 = x_3 = 1$ ,  $x_2 = \infty$  و  $x_4 = 0$  را انتخاب می‌کنیم. پس مشتق تابع نگاشت شوارتس-کریستوفل چنین می‌شود

$$\frac{dw}{dz} = A(z-x_1)^\circ z^{-1}(z-1)^\circ = \frac{A}{z};$$

در نتیجه

$$w = A \operatorname{Log} z + B.$$

حال  $w = B = 0$ , زیرا در صورتی که  $z = 0$ , داریم  $w = 0$ . عدد ثابت  $A$  باید حقیقی باشد زیرا در صورتی که  $x = z = 0$  نقطه  $w$  روی محور حقیقی واقع است. نقطه  $w = \pi i$  تصویر نقطه  $z = x_1$  است, که در آن  $x_1$  یک عدد منفی است, بنابراین

$$\pi i = A \operatorname{Log} x_1 = A \ln |x_1| + A \pi i.$$

در اینجا با متحدد قراردادن قسمتهای حقیقی و موهومی, می‌بینیم که  $|x_1| = 1$  و  $A = 1$ . بنابراین, تبدیل چنین می‌شود

$$w = \operatorname{Log} z;$$

همچنین  $-x_1 = 1$ . ما قبلاً از مثال ۳ بخش ۸۸, می‌دانیم که این تبدیل نیم‌صفحه را به روی این فوار می‌نگارد.

روشی که در این دو مثال بهکار رفت دقیق نیست زیرا مقادیر حدی زوایا و مختصات به طریقی منظم معرفی نشده‌اند. مقادیر حدی, هر جا که مقتضی بوده, مورد استفاده واقع شده است. اما اگر درستی نگاشت حاصل را نشان دهیم, لازم نیست مراحلی را که در استنتاج تابع نگاشت طی کردیم توجیه نماییم. روشی صوری که در اینجا بهکار بردیم کوتاه‌تر و کم‌زحمت‌تر از روش‌های دقیق است.

### تمرینها

۱. در تبدیل (۱۱)، بخش ۱۱۱، قرار دهید  $w = z = 0$  و  $B = 0$ .

$$A = \exp \frac{\pi \pi i}{4}, \quad x_1 = -1, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 1,$$

$$k_1 = \frac{3}{4}, \quad k_2 = \frac{1}{2}, \quad k_3 = \frac{3}{4}$$

تا تبدیل حاصل محور  $x$ ‌ها را به روی یک مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین بنگارد. نشان دهید که رئوس آن مثلث عبارت‌اند از نقاط

$$w_1 = bi, \quad w_2 = 0, \quad w_3 = b$$

که در آن  $b$  عدد ثابت مثبت زیر است

$$b = \int_0^1 (1-x^2)^{-3/4} x^{-1/2} dx.$$

همچنین نشان دهید که

$$2b = B\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$$

که در آن  $B$  تابع بتاست.

۲. فرمولهای (۱۲)، بخش ۱۱۱، را برای بقیه رؤوس مستطیلی که در شکل ۱۶۳ نشان داده شده است به دست آورید.

۳. نشان دهید که اگر در فرمولهای (۸) و (۹)، بخش ۱۱۱، داشته باشیم  $1 < a < 0$ ، رؤوس مستطیل، نقاط نشان داده شده در شکل ۱۶۳ هستند که در آن  $b$  و  $c$  اکنون دارای مقادیر زیرند

$$b = \int_0^a |g(x)| dx, \quad c = \int_a^1 |g(x)| dx.$$

۴. نشان دهید که حالت خاص

$$w = i \int_0^z (s+1)^{-1/2} (s-1)^{-1/2} s^{-1/2} ds$$

از تبدیل شوارتس-کریستوفل (۷)، بخش ۱۱۰، محور  $x$ ‌ها را به روی مربعی با رؤوس زیر می‌نگارد

$$w_1 = bi, \quad w_2 = 0, \quad w_3 = b, \quad w_4 = b + ib$$

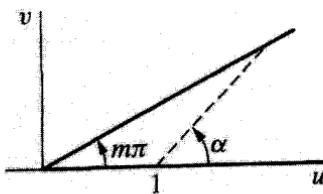
که در آنها عدد مثبت  $b$  بحسب تابع بتا چنین داده می‌شود:

$$b = \frac{1}{4} B\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right).$$

۵. با استفاده از تبدیل شوارتس-کریستوفل، تبدیل

$$w = z^m (0 < m < 1)$$

را نتیجه بگیرید که نیم صفحه  $y \geq 0$  را به روی ناحیه زاویه‌یی  $|w| \geq m\pi$  می‌نگارد و نقطه  $z = w$  را به روی نقطه  $1 = e^{i\alpha}$  نسبت دهد. ناحیه زاویه‌یی را به عنوان حالت حدی مثلثی در نظر بگیرید که در شکل ۱۶۶ نشان داده شده است، وقتی زاویه  $\alpha$  به  $0^\circ$  میل کند.



شکل ۱۶۶

۶. شکل ۲۶، پیوست ۲ را در نظر بگیرید. وقتی نقطه  $z$  در امتداد محور حقیقی منفی به سمت راست حرکت کند،  $w$ ، تصویرش، در امتداد تمامی محور  $u$  به سمت راست حرکت می‌کند. وقتی  $z$  پاره خط  $1 \leq x \leq 0$  از محور حقیقی را بیماید،  $w$  تصویرش در امتداد نیم خط  $v = \pi i$  ( $u \geq 1$ ) به سمت چپ حرکت می‌کند؛ وقتی  $z$  در امتداد آن قسمت از محور حقیقی مثبت که  $x \geq 1$  حرکت کند،  $w$  تصویرش در امتداد همان نیم خط  $v = \pi i$  ( $u \geq 1$ ) به سمت راست حرکت می‌کند. به تغییرات جهت حرکت  $w$  در تصاویر نقاط  $z = 1$  و  $z = 0$  توجه کنید. این تغییرات این فکر را ایجاد می‌کند که مشتق تابع نگاشت باید عبارت باشد از

$$f'(z) = A(z - 0)^{-1}(z - 1),$$

که در آن  $A$  عدد ثابتی است، بدین ترتیب، به طور صوری تابع نگاشت

$$w = \pi i + z - \operatorname{Log} z,$$

را به دست آورید که می‌توان درستی آن را به عنوان نگاشتی که نیم صفحه  $\operatorname{Re} z > 0$  را به صورت نشان داده شده در شکل می‌نگارد نشان داد.

۷. وقتی نقطه  $z$  در امتداد آن قسمت از محور حقیقی منفی که  $-1 \leq x$ ، به سمت راست حرکت کند، تصویرش در امتداد محور حقیقی منفی صفحه  $w$  به سمت راست حرکت می‌کند. وقتی  $z$  روی محور حقیقی در امتداد پاره خط  $0 \leq x \leq -1$  و سپس در امتداد پاره خط  $1 \leq x \leq v$  از محور  $w$  و در جهت افزایش  $w$  حرکت می‌کند و سپس در امتداد همان پاره خط در جهت کاهش  $w$  حرکت می‌نماید. بالاخره، اگر  $z$  در امتداد آن قسمت از محور حقیقی مثبت که  $x \geq 1$ ، به سمت راست حرکت کند، تصویرش در امتداد محور حقیقی مثبت صفحه  $w$  به سمت راست حرکت می‌کند. به تغییرات جهت حرکت  $w$  در تصاویر نقاط  $z = 0$  و  $z = -1$  توجه کنید. بدین ترتیب تابع نگاشتی

که مشتق آن عبارت باشد از

$$f'(z) = A(z+1)^{-1/2}(z-\circ)^1(z-1)^{-1/2},$$

که در آن  $A$  عدد ثابتی است، مطرح می‌شود.تابع نگاشت

$$w = \sqrt{z^2 - 1}$$

را که در آن  $\pi < \arg \sqrt{z^2 - 1} < 0$ ، به طور صوری به دست آورید. با در نظر گرفتن نگاشتهای متوالی

$$w = \sqrt{W} \quad \text{و} \quad W = Z - 1, Z = z^2$$

تحقیق کنید که تبدیل حاصل نیم صفحه  $\operatorname{Re} z > 0$  را به روی نیم صفحه  $v < 0$  با بریدگی در امتداد پاره خط  $1 \leq v \leq 0$  از محور  $v$  می‌نگارد.

۸. وارون تبدیل خطی کسری

$$Z = \frac{i-z}{i+z}$$

قرص واحد  $1 \leq |Z|$  را به طور همدیس، بجز در نقطه  $-1 = Z = 0$ ، به روی نیم صفحه  $\operatorname{Im} z \geq 0$  می‌نگارد. (شکل ۱۳ پیوست ۲ را ببینید) فرض کنید  $Z_j$  ها نقاطی روی دایره  $|Z| = 1$  باشند که تصویرشان نقاط  $x_j = x_j (j = 1, 2, \dots, n)$  باشند که در تبدیل شوارتس-کریستوفل (۸)، بخش ۱۱، به کار رفته است. به طور صوری بدون تعیین شاخه‌های توابع توانی نشان دهید که

$$\frac{dw}{dZ} = A'(Z - Z_1)^{-k_1}(Z - Z_2)^{-k_2} \cdots (Z - Z_n)^{-k_n}$$

که در آن  $A'$  عدد ثابتی است. بدین ترتیب نشان دهید که تبدیل

$$w = A' \int_0^Z (S - Z_1)^{-k_1}(S - Z_2)^{-k_2} \cdots (S - Z_n)^{-k_n} dS + B$$

داخل دایره  $|Z| = 1$  را به روی داخل یک چندضلعی می‌نگارد، رؤوس چندضلعی تصاویر نقاط روی این دایره هستند.  $Z_j$

۹. در انتگرال تمرین ۸، فرض کنید اعداد  $Z_j = x_j + iy_j$  (جایگزین  $n$  باشند). قرار دهید  $(Z_n = \omega^{n-1}, \dots, Z_2 = \omega, Z_1 = 1)$  و  $w = \exp(2\pi i/n)$ . فرض کنید هر یک از اعداد  $k_j$  (جایگزین  $n/2$  باشد). در این صورت انتگرال تمرین ۸ چنین می‌شود

$$w = A' \int_0^Z \frac{ds}{(S^n - 1)^{1/n}} + B.$$

نشان دهید که وقتی  $A' = 1$  و  $B = 0$ , این تبدیل داخل دایره واحد  $|Z| = 1$  را به روی داخل یک  $n$ -ضلعی منتظم می‌نگارد و مرکز چندضلعی نقطه  $w = 0$  است.  
راهنمایی: تصویر هر یک از نقاط  $Z_j = 1, 2, \dots, n$  در آن رأس  $j$  را بجهت خارجی  $2\pi/n$  در آن رأس است. قرار دهید

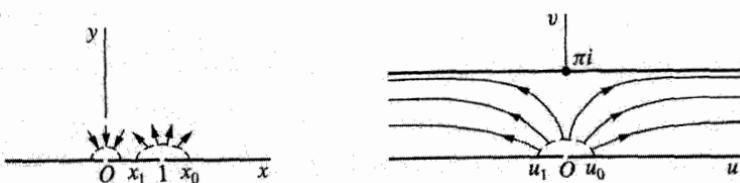
$$w_1 = \int_0^1 \frac{dS}{(S^n - 1)^{2/n}},$$

که در آن مسیر انتگرالگیری در امتداد محور حقیقی مثبت از  $0 = Z$  تا  $1 = Z$  است و مقدار اصلی ریشه  $n$ ام  $(S^n - 1)^{1/2}$  گرفته شده است. سپس نشان دهید که تصاویر نقاط  $Z_2, Z_3, \dots, Z_n = \omega^{n-1} w_1, \omega w_1, \dots, \omega^{n-1} w_1$  بدین ترتیب به ترتیب عبارت‌اند از نقاط  $\omega w_1, \dots, \omega^{n-1} w_1$ . بدین ترتیب تحقیق کنید که چندضلعی منتظم و مرکزش در  $w = 0$  است.

### ۱۱۳. جریان سیال از شکافی به درون یک کانال

حال مثال دیگری از جریان پایا و بی‌نقصی را ارائه می‌دهیم که در فصل ۱۰ بررسی شده است، مثالی که به ما کمک می‌کند تا نشان دهیم که چگونه چشمها و چاهکها را می‌توان در مسائل جریان سیال به حساب آورد. در این بخش و دو بخش آتی مسائل در صفحه  $uv$  طرح شده‌اند و نه در صفحه  $xy$ . بدین ترتیب می‌توانیم بدون تعویض صفحات مستقیماً به نتایج قبلی این فصل استناد کنیم.

جریان پایای دو بعدی سیال بین دو صفحه موازی  $v = \pi$  و  $v = u$  را در نظر می‌گیریم وقتی که سیال از شکاف باریکی در امتداد خطی از صفحه اول وارد می‌شود که در مبدأ بر صفحه  $uv$  عمود است (شکل ۱۶۷). فرض کنید نزخ جریان سیالی که از شکاف به کanal وارد می‌شود به بازی هر واحد عمق کanal برابر با  $Q$  واحد حجم در واحد زمان باشد، که در آن عمق عمود بر صفحه  $uv$  اندازه‌گیری می‌شود. پس در هر انتهای نزخ جریان خارج شده  $Q/2$  است.



شکل ۱۶۷

تبدیل  $z = w$  نگاشتی یک به یک از نیمة بالایی  $\pi < v < \infty$  به روی نوار صفحه  $z$  است. (مثال ۲، بخش ۱۱۲ را ببینید). تبدیل وارون

$$z = e^w = e^u e^{iv} \quad (1)$$

این نوار را به روی نیم صفحه می نگارد (مثال ۳، بخش ۱۳ را ببینید). تحت تبدیل (۱) تصویر محور  $u$  نیمة مثبت محور  $x$  است و تصویر خط  $v = \pi$  نیمة منفی محور  $x$ . بنابراین مرز نوار به مرز نیم صفحه تبدیل می شود.

تصویر نقطه  $w = z = 1$  است. تصویر نقطه  $w = u$  که در آن  $u > 0$  نقطه‌ای است مانند  $x = z = 1$  که در آن  $x > 1$ . نخ جریان سیال در امتداد منحنی که نقطه  $w = u$  را به نقطه  $(u, v)$  درون نوار وصل می کند یک تابع جریان  $\psi(u, v)$  است (بخش ۱۰۷). اگر یک عدد حقیقی منفی باشد آنگاه نخ جریان از شکاف به کanal را می توان چنین نوشت

$$\psi(u_1, 0) = Q.$$

حال تحت یک تبدیل همدیس تابع  $\psi$  به تابعی از  $x$  و  $y$  تبدیل می شود که تابع جریان در ناحیه متناظر صفحه  $z$  را نمایش می دهد؛ یعنی، نخ جریان در امتداد منحنیهای متناظر در دو صفحه یکی است. مانند فصل ۱۰، همان نماد  $\psi$  برای نمایش توابع جریان مختلف در دو صفحه به کار رفته است. چون تصویر نقطه  $u_1 = w$  نقطه‌ای است مانند  $x_1 = z$  که در آن  $x_1 < 0$ ، نخ جریان در امتداد هر منحنی که نقاط  $x = z = x_1$  را به هم وصل کند و در نیمة بالایی صفحه  $z$  واقع باشد نیز مساوی  $Q$  است. بنابراین در نقطه  $z = 1$  چشممهای موجود است مساوی با چشممه موجود در  $w = 0$ .

استدلال بالا به طور کلی برای نشان دادن این مطلب به کار می رود که تحت یک تبدیل همدیس چشممه یا چاهک در نقطه مفروضی متناظر است با چشممه یا چاهک مساوی با آن در تصویر آن نقطه. وقتی  $Re w = -\infty$  میل کند، تصویر  $w$  به نقطه  $z = 0$  میل می کند. چاهکی به قدرت  $Q/2$  در نقطه  $z = 0$  با چاهکی بی نهایت دور در سمت چپ نوار متناظر است. برای به کار بردن استدلال بالا در این حالت، نخ جریان در امتداد منحنی که مرزهای  $v = \pi$  و  $v = 0$  قسمت سمت چپ نوار را به هم وصل می کند، و نخ جریان در امتداد تصویر آن منحنی در صفحه  $z$  را در نظر می گیریم.

چاهک در انتهای سمت راست نوار به چاهکی در بی نهایت در صفحه  $z$  تبدیل می شود.

تابع جریان  $\psi$  برای جریانی در نیمۀ بالایی صفحه  $z$  در این حالت باید تابعی باشد که مقادیرش در امتداد هر یک از سه قسمت محور  $x$  ثابت است. به علاوه، وقتی نقطه  $z$  حول نقطه  $1 = z$  از وضعیت  $z = x_1$  به وضعیت  $z = x$  حرکت می‌کند، مقدارش باید به اندازه  $Q$  افزایش یابد و وقتی  $z$  حول مبدأ به نحو متناظری حرکت کند مقدارش باید به اندازه  $Q/2$  کاهش یابد. می‌بینیم که تابع

$$\psi = \frac{Q}{\pi} \left[ \operatorname{Arg}(z - 1) - \frac{1}{2} \operatorname{Arg} z \right]$$

در این شرایط صدق می‌کند. علاوه بر این، این تابع در نیم صفحه  $0 > \operatorname{Im} z$  همساز است زیرا قسمت موهومی تابع زیر است

$$F = \frac{Q}{\pi} \left[ \operatorname{Log}(z - 1) - \frac{1}{2} \operatorname{Log} z \right] = \frac{Q}{\pi} \operatorname{Log}(z^{1/2} - z^{-1/2}).$$

تابع  $F$  یک تابع پتانسیل مختلط برای جریان در نیمۀ بالایی صفحه  $z$  است. چون  $z = e^w$  تابع پتانسیل مختلط  $F(w)$  برای جریان در کانال عبارت است از

$$F(w) = \frac{Q}{\pi} \operatorname{Log}(e^{w/2} - e^{-w/2}).$$

با حذف یک ثابت جمعی می‌توان نوشت

$$F(w) = \frac{Q}{\pi} \operatorname{Log} \left( \sinh \frac{w}{2} \right). \quad (2)$$

یک نماد  $F$  را برای نمایش سه تابع متمایز به کار بردہ ایم، یکبار در صفحه  $z$  و دوبار در صفحه  $w$ . بردار سرعت  $\overline{F'(w)}$ ، با معادله زیر معین می‌شود

$$V = \frac{Q}{2\pi} \coth \frac{\overline{w}}{2}. \quad (3)$$

بنابراین فرمول، می‌توان ثابت کرد که

$$\lim_{|u| \rightarrow \infty} V = \frac{Q}{2\pi}.$$

همچنین نقطه  $\pi i = w$  یک نقطه توقف است؛ یعنی، سرعت در آن نقطه صفر است. بنابراین فشار سیال در امتداد دیوار  $\pi = v$  کانال در نقاطی که مقابل شکاف‌اند دارای بیشترین مقدار است.

تابع جریان  $(u, v)$  برای کanal عبارت است از قسمت موهومی تابع  $F(w)$  که با رابطه (۲) داده شد. بنابراین، خطوط جریان  $c_2 = \psi(u, v)$  عبارت اند از منحنیهای

$$\frac{Q}{\pi} \operatorname{Arg} \left( \sinh \frac{w}{2} \right) = c_2.$$

این معادله به معادله زیر تبدیل می‌شود

$$\tan \frac{v}{2} = c \tanh \frac{u}{2}, \quad (4)$$

که در آن  $c$  عدد حقیقی ثابتی است. بعضی از این خطوط جریان در شکل ۱۶۷ نشان داده شده‌اند.

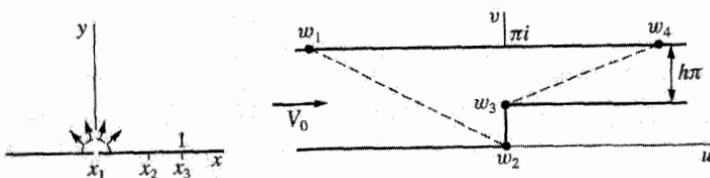
## ۱۱۴. جریان در کanalی با یک زانو

به منظور تشریح بیشتر موارد تبدیل استعمال شوارتس-کریستوفل، پتانسیل مختلط جریان یک سیال در کanalی را پیدا می‌کنیم که پهناش به طور ناگهانی تغییر می‌کند (شکل ۱۶۸). واحد اندازه‌گیری را طوری اختیار می‌کنیم که پهناش قسمت گشاد کanal  $\pi$  واحد باشد؛ پس  $h\pi$ ، که در آن  $1 < h < \infty$ ، پهناش قسمت باریک را نمایش می‌دهد. فرض کنید عدد حقیقی و ثابت  $V$  معرف سرعت سیال در قسمت گشاد و دور از زانو باشد؛ یعنی،

$$\lim_{u \rightarrow -\infty} V = V_0.$$

که در آن متغیر مختلط  $V$  بردار سرعت را نمایش می‌دهد. پس نخ جریان در واحد عمق کanal، یا قدرت چشمۀ سمت چپ و قدرت چاهک سمت راست، عبارت است از

$$Q = \pi V_0. \quad (1)$$



شکل ۱۶۸

مقطع کanal را می‌توان به عنوان حالت حدی یک چهارضلعی با رؤوس  $w_1, w_2, w_3$  و  $w_4$  در نظر گرفت، که در شکل ۱۶۸ نشان داده شده‌اند، وقتی که اولین رأس، بینهایت به چپ برود و آخرین رأس بینهایت به راست. زوایای خارجی در حد چنین می‌شوند

$$k_1\pi = \pi, \quad k_2\pi = \frac{\pi}{2}, \quad k_3\pi = -\frac{\pi}{2}, \quad k_4\pi = \pi.$$

مثل قبل به طور صوری عمل می‌کنیم و هر وقت مناسب باشد از مقادیر حدی استفاده می‌کنیم. اگر قرار دهیم  $x_1 = 1, x_2 = \infty, x_3 = \infty, x_4 = 0$  را کمیتی بگیریم که باید تعیین شود، که در آن  $x_2 < x_1 < 1 < x_4$ ، مشتق تابع نگاشت چنین می‌شود

$$\frac{dw}{dz} = Az^{-1}(z - x_2)^{-1/2}(z - 1)^{1/2}. \quad (2)$$

در اینجا برای آنکه تعیین ثابت‌های  $A$  و  $x_2$  ساده باشد، بی‌درنگ به استفاده از پتانسیل مختلط جریان مبادرت می‌ورزیم. چشمۀ جریان در فاصلۀ بینهایت دور سمت چپ کanal با چشمۀ ای مساوی در  $z = 0$  متناظر است (بخش ۱۱۳). تمام مرز مقطع عرضی کanal، تصویر محور  $x$  است. پس با توجه به رابطه (۱)، تابع

$$F = V_\circ \operatorname{Log} z = V_\circ \ln r + iV_\circ \theta \quad (3)$$

پتانسیل جریان در نیمه بالایی صفحۀ  $z$ ، با چشمۀ مورد نظر در مبدأ است. در اینجا تابع جریان عبارت است از  $V_\circ \theta = \psi$ . مقدار آن روی هر نیمداire  $\leq \theta \leq \pi$ )  $= Re^{i\theta}z = R e^{i\theta}$ ، که در آن  $\theta = 0$  از  $R$ ، از  $\pi$  تا  $0$  افزایش پیدا می‌کند، هرگاه  $\theta$  از  $0$  تا  $\pi$  تغییر کند. [با رابطه (۵) بخش ۱۰۷ و تمرین ۸، بخش ۱۰۸، مقایسه کنید].

مزدوج مختلط سرعت  $V$  در صفحۀ  $w$  را می‌توان چنین نوشت

$$\overline{V(w)} = \frac{dF}{dw} = \frac{dF}{dz} \frac{dz}{dw}.$$

بنابراین، با توجه به روابط (۲) و (۳)، می‌توان نوشت

$$\overline{V(w)} = \frac{V_\circ}{A} \left( \frac{z - x_2}{z - 1} \right)^{1/2}. \quad (4)$$

در وضعیت حدی نقطۀ  $w_1$ ، که با  $z = 0$  متناظر است، سرعت عبارت است از عدد حقیقی  $V_\circ$ . بدین ترتیب از رابطه (۴) نتیجه می‌شود که

$$V_\circ = \frac{V_\circ}{A} \sqrt{x_2}.$$

در وضعيت حدی  $w_4 = \infty$ , که با  $z = \infty$  متناظر است، فرض کنيد عدد حقيقي  $V_4$  معرف سرعت باشد. حال موجه به نظر مى رسد که اگر پاره خطی عمودی که قسمت باريک کanal را مى پیماید بی نهايیت به راست برود، در هر نقطه آن پاره خط،  $V$  به  $V_4$  ميل نماید. اگر ابتدا  $w$  را از روی رابطه (۲) به عنوان تابعی از  $z$  پیدا مى کردیم می توانستیم این حدس را به عنوان يك حقیقت ثابت کنیم، اما برای اينکه بحث را کوتاه کرده باشیم، فرض مى کنیم که این حدس درست باشد. پس، چون جريان پایاست، داريم

$$\pi h V_4 = \pi V_0 = Q$$

يا  $V_0/h = V_4$ . فرض کنیم در رابطه (۴) متغير  $z$  به بی نهايیت ميل کند، بنابراین در می يابیم که

$$\frac{V_0}{h} = \frac{V_0}{A}.$$

پس،

$$A = h, \quad x_2 = h^{\frac{1}{2}} \quad (5)$$

و

$$\overline{V(w)} = \frac{V_0}{h} \left( \frac{z - h^{\frac{1}{2}}}{z - 1} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (6)$$

بنابر رابطه (۶) می توان ثابت کرد که قدر مطلق  $|V|$  سرعت در گوش  $w_3$  زانو بی نهايیت می شود زیرا تصویر نقطه  $1 = z$  است. همچنین گوش  $w_2$  يك نقطه توقف است، نقطه ای که در آن  $V = 0$ . بنابراین در امتداد کرانه کanal فشار سیال در  $w_2$  بیشترین و در  $w_3$  کمترین است. برای نوشتan رابطه بین پتانسیل و متغير  $w$  باید از رابطه (۲)، که حال می توان آن را به صورت

$$\frac{dw}{dz} = \frac{h}{z} \left( \frac{z - 1}{z - h^{\frac{1}{2}}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (7)$$

نوشت، انتگرال بگیریم. در اینجا با قرار دادن متغير جدید  $s$ ، که

$$\frac{z - h^{\frac{1}{2}}}{z - 1} = s^2,$$

می توان نشان داد که رابطه (۷) به رابطه زیر تبدیل می شود

$$\frac{dw}{ds} = 2h \left( \frac{1}{1 - s^2} - \frac{1}{h^{\frac{1}{2}} - s^2} \right).$$

بنابراین

$$w = h \operatorname{Log} \frac{1+s}{1-s} - \operatorname{Log} \frac{h+s}{h-s}. \quad (8)$$

ثابت انتگرالگیری در اینجا صفر است، زیرا در صورتی که  $s = z = h^2$  صفر و در نتیجه  $w$  صفر است.

پتانسیل  $F$  رابطه (۳) بر حسب  $s$  چنین می‌شود

$$F = V_0 \operatorname{Log} \frac{h^2 - s^2}{1 - s^2};$$

و در نتیجه

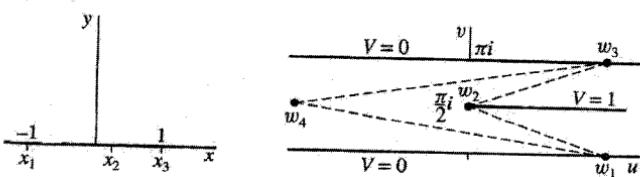
$$s^2 = \frac{\exp(F/V_0) - h^2}{\exp(F/V_0) - 1}. \quad (9)$$

با قرار دادن  $s$  از این رابطه در رابطه (۸)، یک رابطه ضمنی به دست می‌آوریم که پتانسیل  $F$  را به عنوان تابعی از  $w$  تعریف می‌کند.

## ۱۱۵. پتانسیل الکترواستاتیکی حول لبه‌ای از یک ورقه هادی

دو ورقه هادی موازی با وسعت نامتناهی در پتانسیل الکترواستاتیکی  $V = 0$  نگداشته می‌شوند و یک ورقه موازی نیمه نامتناهی، که در وسط راه بین آنها قرار گرفته، در پتانسیل  $V = 1$  نگداشته می‌شود. دستگاه مختصات واحد طول را به قسمی انتخاب می‌کنیم که ورقه‌ها در صفحات می‌شود. حال تابع پتانسیل  $V(u, v)$  در ناحیه  $v = \pi/2$  و  $u = \pi/2$  واقع باشند (شکل ۱۶۹). حال تابع پتانسیل  $(u, v)$  در ناحیه بین این ورقه‌ها را معین می‌کنیم.

قطع عرضی این ناحیه در صفحه  $uv$  دارای صورت حدی چهارضلعی محدود به خطوط خط چین آن شکل است، وقتی که نقاط  $w_1$  و  $w_3$  به سمت راست و  $w_4$  به سمت چپ حرکت



شکل ۱۶۹

کنند. در بهکاربردن تبدیل شوارتس-کریستوفل، فرض می‌کنیم نقطه  $x_4$ ، متناظر با رأس  $w_4$ ، نقطه در بی نهایت باشد. نقاط  $-1 = x_3 = 1, x_1 = x_2$  را انتخاب می‌کنیم و  $x_2$  را کمیتی در نظر می‌گیریم که باید تعیین شود. مقادیر حدی زوایای خارجی چهارضلعی عبارت‌اند از

$$k_1\pi = \pi, \quad k_2\pi = -\pi, \quad k_3\pi = k_4\pi = \pi.$$

بدین ترتیب

$$\frac{dw}{dz} = A(z+1)^{-1}(z-x_2)(z-1)^{-1} = A \left( \frac{z-x_2}{z^2-1} \right) = \frac{A}{2} \left( \frac{1+x_2}{z+1} + \frac{1-x_2}{z-1} \right)$$

ولذا تبدیل نیمة بالایی صفحه  $z$  به توی نوار تقسیم شده صفحه  $w$  دارای شکل زیر است

$$w = \frac{A}{2}[(1+x_2)\text{Log}(z+1) + (1-x_2)\text{Log}(z-1)] + B. \quad (1)$$

فرض کنیم  $A_1, A_2, B_1, B_2$  معرف قسمتهای حقیقی و موهومی اعداد ثابت  $A$  و  $B$  باشند. در صورتی که  $z = x$ ، نقطه  $w$  بر مز نوار تقسیم شده واقع است و بنابر رابطه (1) داریم

$$u + iv = \frac{A_1 + iA_2}{2} \{ (1+x_2)[\ln|x+1| + i\arg(x+1)] \} \quad (2)$$

$$+ (1-x_2)[\ln|x-1| + i\arg(x-1)] \} + B_1 + iB_2.$$

برای تعیین این اعداد ثابت، ابتدا توجه می‌کنیم که وضعیت حدی پاره خط واصل بین نقاط  $w_1$  و  $w_4$ ، محور  $u$  است. این خط تصویر قسمتی از محور  $x$  است که در سمت چپ نقطه  $x_1 = -1$  واقع است، این بدان جهت است که پاره خط واصل بین  $w_3$  و  $w_4$  تصویر قسمتی از محور  $x$  است که در سمت راست  $x_2 = 1$  واقع است و دو ضلع دیگر چهارضلعی تصاویر دو پاره خط باقیمانده محور  $x$  اند. بنابراین، وقتی  $v = 0$  و  $u$  با مقادیر مثبت به بی نهایت میل کند نقطه متناظر  $x$  از سمت چپ به نقطه  $-1 = z$  میل می‌کند. بدین ترتیب

$$\arg(x+1) = \pi, \quad \arg(x-1) = \pi$$

و  $|x+1| = \infty$  میل می‌کند. همچنین، نظر به اینکه  $1 < x_2 < x_1 < -1$ ، قسمت حقیقی مقدار داخل ابرو در رابطه (2) به  $\infty - \infty$  میل می‌کند. چون  $v = 0$  نتیجه می‌شود که  $A_2 = 0$ ؛

در غیر این صورت، قسمت موهومی سمت راست بی نهایت خواهد شد. با مساوی گرفتن قسمتهای موهومی دو طرف، می بینیم که

$$\circ = \frac{A_1}{2}[(1+x_2)\pi + (1-x_2)\pi] + B_2.$$

بنابراین

$$-\pi A_1 = B_2, \quad A_2 = \circ. \quad (3)$$

وضعیت حدی پاره خط واصل بین نقاط  $w_1$  و  $w_2$  عبارت است از نیم خط نقاط روی این خط تصاویر نقاط  $x = z$  اند که در آن  $x_2 \leq x \leq -1$ ، در نتیجه

$$\arg(x+1) = \circ, \quad \arg(x-1) = \pi.$$

لذا با مساوی گرفتن قسمتهای موهومی دو طرف رابطه (2) به رابطه زیر می رسیم

$$\frac{\pi}{2} = \frac{A_1}{2}(1-x_2)\pi + B_2. \quad (4)$$

بالاخره، اوضاع حدی نقاط روی پاره خط واصل بین  $w_3$  و  $w_4$  عبارت اند از نقاط  $u + \pi i$  که تصاویر نقاط  $x$  اند هرگاه  $1 < x$ . با مساوی گرفتن قسمتهای موهومی رابطه (2) برای این نقاط، چنین پیدا می کنیم که

$$\pi = B_2.$$

پس، با توجه به روابط (3) و (4) داریم

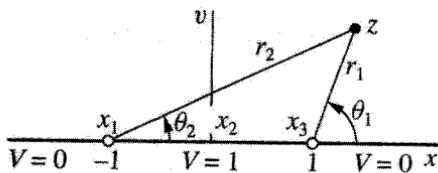
$$A_1 = -1, \quad x_2 = \circ.$$

در نتیجه  $x = 0$  نقطه ای است که تصویرش رأس  $\pi i/2 = w$  است و با قرار دادن این مقادیر در رابطه (2) و مساوی گرفتن قسمتهای حقیقی می بینیم که  $B_1 = \circ$ . حال تبدیل (1) چنین می شود

$$w = \frac{-1}{2}[\operatorname{Log}(z+1) + \operatorname{Log}(z-1)] + \pi i \quad (5)$$

یا

$$z^{\frac{1}{2}} = 1 + e^{-\pi i w}. \quad (6)$$



شکل ۱۷۰

تحت این تبدیل، تابع همساز مطلوب  $(u, v), V$ ، تبدیل به تابع همسازی از  $x$  و  $y$  در نیم صفحه  $y > 0$  می‌شود که در شرایط مرزی تعیین شده در شکل ۱۷۰ صدق می‌کند. توجه کنید که اکنون  $x_2 = 0$ . تابعی که در این نیم صفحه همساز باشد و آن مقادیر را در مرز اختیار کند عبارت است از مؤلفه موهومنی تابع تحلیلی

$$\frac{1}{\pi} \operatorname{Log} \frac{z-1}{z+1} = \frac{1}{\pi} \ln \frac{r_1}{r_2} + \frac{i}{\pi} (\theta_1 - \theta_2),$$

که در آن  $\theta_1$  و  $\theta_2$  از صفر تا  $\pi$  تغییر می‌کنند. اگر تانژانتهای این زوایا را به صورت توابعی از  $x$  و  $y$  بنویسیم و خلاصه کنیم، می‌بینیم که

$$\tan \pi V = \tan(\theta_1 - \theta_2) = \frac{2y}{x^2 + y^2 - 1}. \quad (7)$$

از رابطه (۶) عبارت‌هایی برای  $x^2 + y^2$  و  $x^2 - y^2$  بر حسب  $u$  و  $v$  به دست می‌آید. بدین ترتیب با توجه به فرمول (۷) در می‌باییم که رابطه بین پتانسیل  $V$  و مختصات  $u$  و  $v$  را می‌توان چنین نوشت

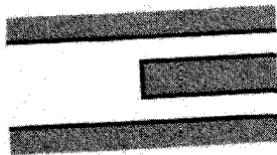
$$\tan \pi V = \frac{1}{s} \sqrt{e^{-4u} - s^2} \quad (8)$$

که در آن

$$s = -1 + \sqrt{1 + 2e^{-2u} \cos 2v + e^{-4u}}$$

## تمرینها

۱. با استفاده از تبدیل شوارتس-کریستوفل، تابع نگاشتی را که با شکل ۲۲، پیوست ۲، داده شده است به طور صوری به دست آورید.
۲. بیان کنید چرا جواب مسئله جریان در کانالی با یک مانع مستطیلی نیمه نامتناهی (شکل ۱۷۱) در جواب مسئله‌ای که در بخش ۱۱۴ بررسی کردیم مستتر است.



شکل ۱۷۱

۳. به شکل ۲۹، پیوست ۲، رجوع کنید. وقتی نقطه  $z$  در امتداد آن قسمت از محور حقیقی منفی  $x \leq -1$  به سمت راست حرکت کند،  $w$  تصویرش در امتداد نیم خط  $v = h$  به سمت راست حرکت می‌کند. وقتی نقطه  $z$  در امتداد پاره خط  $1 \leq x \leq v$  از محور  $x$  به سمت راست حرکت کند،  $w$  تصویرش باید در امتداد پاره خط  $1 \leq v \leq h$  از محور  $v$  در جهت کاهش  $v$  حرکت کند. بالاخره، وقتی  $z$  در امتداد آن قسمت از محور حقیقی مثبت که  $1 \geq x \geq -1$  به سمت راست حرکت کند،  $w$  تصویرش باید در امتداد محور حقیقی مثبت به سمت راست حرکت کند. به تغییرات جهت حرکت  $w$  در تصاویر نقاط  $-1 = z$  و  $1 = z$  توجه کنید. این تغییرات نشان می‌دهند که مشتق تابع نگاشت احتمالاً عبارت است از

$$\frac{dw}{dz} = A \left( \frac{z+1}{z-1} \right)^{1/2},$$

که در آن  $A$  عددی ثابت است. بدین ترتیب تبدیلی را که با آن شکل داده شده است به طور صوری به دست آورید. تحقیق کنید تبدیلی که به صورت

$$w = \frac{h}{\pi} \{ (z+1)^{1/2} (z-1)^{1/2} + \operatorname{Log} [z + (z+1)^{1/2} (z-1)^{1/2}] \}$$

نوشته شده است و در آن  $\arg(z \pm 1) \leq \pi$ ، مرز را به صورتی که در شکل تعیین شده است می‌نگارد.

۴. فرض کنید  $T(u, v)$  معرف دمای حالت پایای کراندار در ناحیه هاشورزده صفحه  $w$  در شکل ۲۹، پیوست ۲، با این شرایط مرزی باشد که وقتی  $u < 0$ ،  $T(u, h) = 1$  و بر بقیه  $T(u, h) = 0$  از مرز،  $T = 0$ . بر حسب پارامتر حقیقی  $\alpha < \pi/2$ ،  $\alpha < \pi/2$ ، نشان دهید که تصویر هر نقطه  $z = i \tan \alpha$  بر محور  $u$  های مثبت، عبارت است از نقطه

$$w = \frac{h}{\pi} \left[ \ln(\tan \alpha + \sec \alpha) + i \left( \frac{\pi}{2} + \sec \alpha \right) \right]$$

(تمرین ۳ را ببینید) و نشان دهید که دما در آن نقطه  $w$  عبارت است از

$$T(u, v) = \frac{\alpha}{\pi} \quad \left( 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \right).$$

۵. فرض کنید  $F(w)$  معرف تابع پتانسیل مختلط برای جریان یک سیال بر پله‌ای در بستر یک جریان عمیق باشد که با ناحیه هاشورزده صفحه  $w$  در شکل ۲۹، پیوست ۲، نمایش داده شده است، که در آن سرعت سیال  $V$  به عدد حقیقی و ثابت  $V_0$  می‌کند وقتی که  $|w|$  در آن ناحیه به بی‌نهایت میل کند. تبدیلی که نیمة بالایی صفحه  $z$  را به روی آن ناحیه می‌نگارد در تمرین ۳ ملاحظه شد. با استفاده از قاعدة زنجیری

$$\frac{dF}{dw} = \frac{dF}{dz} \frac{dz}{dw}$$

نشان دهید که

$$\overline{V(w)} = V_0(z - 1)^{1/2}(z + 1)^{-1/2};$$

و بر حسب نقاط  $x = z$  که تصاویرشان در امتداد بستر جریان‌اند، نشان دهید که

$$|V| = |V_0| \sqrt{\left| \frac{x - 1}{x + 1} \right|}.$$

توجه کنید که تندی، از  $|V_0|$  در امتداد  $A'B'$  تا  $|V|$  در امتداد  $C'D'$  به سمت  $D'$  افزایش می‌یابد، سپس در  $C'$  به صفر می‌رسد و از  $C'$  تا  $B'$  افزایش می‌یابد؛ همچنین توجه کنید که تندی در نقطه

$$w = i \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \right) h,$$

بین  $|V_0|$  و  $|V'|$  برابر است با

# ۱۲

## فرمولهای انتگرال از نوع انتگرال پواسون

در این فصل نظریه‌ای را شرح می‌دهیم که به ما امکان می‌دهد برای مسائل با مقدار مرزی گوناگون جوابهایی، که بر حسب انتگرالهای معین یا ناسره بیان می‌شوند، به دست آوریم. سپس می‌توانیم بسیاری از این انتگرالها را به سهولت محاسبه کنیم.

### ۱۱۶. فرمول انتگرال پواسون

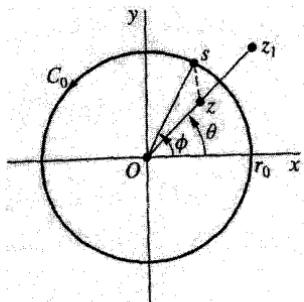
فرض می‌کنیم  $C$  معرف دایری به مرکز مبدأ در جهت مثبت باشد و تابع  $f$  در درون و روی  $C$  تحلیلی باشد. فرمول انتگرال کوشی (بخش ۴۷)

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(s)}{s - z} ds \quad (1)$$

مقدار  $f$  در هر نقطه  $z$  در داخل  $C$  را بر حسب مقادیر  $f$  در نقاط  $s$  روی  $C$  بیان می‌کند. در این بخش از فرمول (۱)، فرمول متناظری برای قسمت حقیقی  $f$  به دست می‌آوریم و در بخش ۱۱۷

با استفاده از آن مسئله دیریکله برای قرص محدود به  $C$  را حل می‌کنیم (بخش ۹۸).

فرض می‌کنیم  $C$  شاعر  $r$  باشد و قرار می‌دهیم  $(i\theta) = r \exp(i\theta)$ ، که در آن  $r < r < r$  (شکل ۱۷۲). معکوس نقطه ناصفر  $z$  نسبت به دایره عبارت است از نقطه  $z_1$  که با  $z$  روی یک



شکل ۱۷۲

پرتو مار بر مبدأ واقع است و در شرط  $r = |z_1| |z|$  صدق می‌کند؛ بنابراین اگر  $s$  نقطه‌ای روی  $C_0$  باشد،

$$z_1 = \frac{r_0^2}{r} \exp(i\theta) = \frac{r_0^2}{\bar{z}} = \frac{s\bar{s}}{\bar{z}}. \quad (2)$$

چون  $z$  در خارج دایره  $C_0$  است، از قضیه کوشی-گورسا نتیجه می‌شود که وقتی در انتگرالده به جای  $z$ ،  $z_1$  را قرار دهیم مقدار انتگرال (۱) صفر می‌شود. بنابراین

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} \left( \frac{1}{s-z} - \frac{1}{s-z_1} \right) f(s) ds;$$

و با استفاده از نمایش پارامتری  $(\phi) \leq \phi \leq 2\pi$   $s = r_0 \exp(i\phi)$  برای  $C_0$  می‌توان نوشت

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \frac{s}{s-z} - \frac{s}{s-z_1} \right) f(s) d\phi$$

که در آن برای سهولت به جای  $r_0 \exp(i\phi)$  همان  $s$  را نگه می‌داریم. توجه کنید که بنابر آخرین عبارت از عبارات (۲) برای  $z_1$ ، در اینجا ضریب داخل پرانتز را می‌توان چنین نوشت

$$\frac{s}{s-z} - \frac{1}{1 - (\bar{s}/\bar{z})} = \frac{s}{s-z} + \frac{\bar{z}}{\bar{s}-\bar{z}} = \frac{r_0^2 - r^2}{|s-z|^2}. \quad (3)$$

بنابراین صورت دیگری از فرمول انتگرال کوشی (۱)، در صورتی که  $r < r_0$  عبارت است از

$$f(re^{i\theta}) = \frac{r_0^2 - r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(r_0 e^{i\phi})}{|s-z|^2} d\phi. \quad (4)$$

این صورت برای  $r = r_0$  نیز برقرار است؛ در این حالت این صورت مستقیماً به

$$f(r_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(r_0 e^{i\phi}) d\phi$$

تبديل می‌شود، که صرفاً صورت پارامتری رابطه (۱۱) با  $z = z$  است.

کمیت  $|s - z|$  فاصله بین نقاط  $s$  و  $z$  است و با استفاده از قانون کسینوسها می‌توان نوشت  
(شکل ۱۷۲ را ببینید)

$$|s - z|^2 = r_0^2 - 2r_0 r \cos(\phi - \theta) + r^2. \quad (5)$$

بنابراین اگر  $u$  قسمت حقیقی تابع  $f$  باشد، از فرمول (۴) نتیجه می‌شود که

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(r_0^2 - r^2) u(r_0, \phi)}{r_0^2 - 2r_0 r \cos(\phi - \theta) + r^2} d\phi \quad (r < r_0). \quad (6)$$

این فرمول انتگرال پواسون برای تابع همساز  $u$  در قرص باز محدود به دایره  $r = r_0$  است.  
فرمول (۶) تبدیل انتگرال خطی از  $u(r_0, \phi)$  به  $u(r, \theta)$  را تعریف می‌کند. هسته تبدیل،  
جز ضریب  $(1/(2\pi))$ ، عبارت است از تابع حقیقی مقدار

$$P(r_0, r, \phi - \theta) = \frac{r_0^2 - r^2}{r_0^2 - 2r_0 r \cos(\phi - \theta) + r^2}, \quad (7)$$

که به هسته پواسون مشهور است. بنابر رابطه (۵) می‌توانیم چنین نیز بنویسیم

$$P(r_0, r, \phi - \theta) = \frac{r_0^2 - r^2}{|s - z|^2}; \quad (8)$$

و چون  $r_0 < r$ ، بوضوح  $P$  تابعی مثبت است. بعلاوه، چون  $(\bar{s} - \bar{z})/(\bar{s} - \bar{z})$  و مزدوج مختلط آن  $(s - z)/z$  دارای یک قسمت حقیقی هستند از دومین معادله (۳) به دست می‌آوریم

$$P(r_0, r, \phi - \theta) = \operatorname{Re} \left( \frac{s}{s - z} + \frac{z}{s - z} \right) = \operatorname{Re} \left( \frac{s + z}{s - z} \right). \quad (9)$$

بنابراین بهازای هر  $s$  مشخص بر  $r_0$ ، تابع  $P(r_0, r, \phi - \theta)$  در داخل  $C$  تابع همسازی از  $r$  و  $\theta$  است. از رابطه (۷) می‌بینیم که  $P(r_0, r, \phi - \theta)$  یک تابع متناوب زوج از  $\theta - \phi$  با دوره متناوب  $2\pi$  است و وقتی  $r = r_0$  مقدارش ۱ است.

حال می‌توان فرمول انتگرال پواسون (۶) را چنین نوشت

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(r_0, r, \phi - \theta) u(r_0, \phi) d\phi \quad (r < r_0). \quad (10)$$

در صورتی که  $1 = f(z)$  رابطه (۱۰) نشان می‌دهد که  $P$  دارای خاصیت زیر است

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(r_0, r, \phi - \theta) d\phi = 1 \quad (r < r_0). \quad (11)$$

فرض کرده‌ایم که نه تنها  $f$  در داخل  $C$  بلکه روی خود  $C$  تحلیلی است و بنابراین  $u$  در حوزه‌ای که شامل همه نقاط آن دایره باشد همساز است. به خصوص،  $u$  بر  $C$  پیوسته است. حالا این شرایط تعدیل خواهد شد.

## ۱۱۷. مسئله دیریکله برای قرص

فرض می‌کنیم  $F$  تابعی تکیه از  $\theta$  روی بازه  $2\pi \leq \theta \leq 0$  باشد. تبدیل انتگرال پواسون بر حسب هسته پواسون  $P(r_0, r, \phi - \theta)$  که در بخش ۱۱۶ معرفی شد، با ضابطه زیر تعریف می‌شود

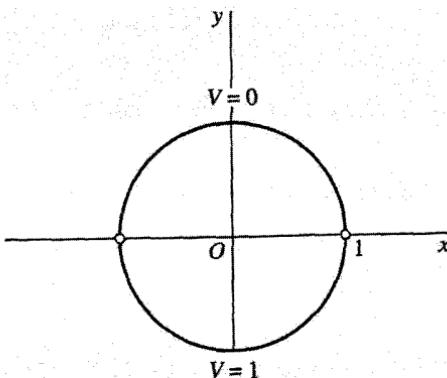
$$U(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(r_0, r, \phi - \theta) F(\phi) d\phi \quad (r < r_0). \quad (1)$$

در این بخش ثابت می‌کنیم که تابع  $U(r, \theta)$  در داخل دایره  $r = r_0$  همساز است و به ازای هر  $\theta$  ثابت که  $F$  در آن پیوسته باشد داریم

$$\lim_{\substack{r \rightarrow r_0 \\ r < r_0}} U(r, \theta) = F(\theta). \quad (2)$$

بدین ترتیب  $U$  یک جواب مسئله دیریکله برای قرص  $r < r_0$  است به این معنی که وقتی نقطه  $(r, \theta)$  در امتداد یک شعاع به سمت  $(r_0, \theta)$  میل کند، بجز در تعدادی متناهی نقطه  $(r_0, \theta)$  که ممکن است  $F$  در آنها نایوسته باشد،  $U(r, \theta)$  به مقدار مرزی  $F(\theta)$  میل می‌کند.

مثال. قبل از اثبات حکم بالا، آن را برای یافتن پتانسیل  $V(r, \theta)$  در درون استوانه مستدير تو خالی و درازی به شعاع واحد به کار می‌بریم که آن را از طول به دو قسمت مساوی تقسیم کرده‌اند و روی یکی از قسمتها  $V = 1$  و روی دیگری  $V = 0$ . این مسئله بهوسیله نگاشت همدیس



شکل ۱۷۳

در بخش ۵، حل شد و یادآوری می‌کنیم که چگونه آن را به عنوان مسئله دیریکله برای قرص  $V < r$  تعبیر کردیم، که در آن روی نیمه بالایی مرز  $V = 0$  و روی نیمه پائینی  $V = 1$  (شکل ۱۷۳ را ببینید).

در رابطه (۱) به جای  $U$  نماد  $V$  را قرار می‌دهیم و  $r$  را مساوی ۱ می‌گیریم و فرض می‌کنیم هرگاه  $F(\phi) = 1 < \phi < \pi$  تا رابطه زیر به دست آید

$$V(r, \theta) = \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} P(1, r, \phi - \theta) d\phi \quad (3)$$

که در آن

$$P(1, r, \phi - \theta) = \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos(\phi - \theta)}.$$

یک تابع اولیه  $P(1, r, \psi)$  عبارت است از

$$\int P(1, r, \psi) d\psi = 2 \arctan \left( \frac{1+r}{1-r} \tan \frac{\psi}{2} \right), \quad (4)$$

این انتگرالده مشتق تابع سمت راست نسبت به  $\psi$  است. بنابراین از عبارت (۳) نتیجه می‌شود که

$$\pi V(r, \theta) = \arctan \left( \frac{1+r}{1-r} \tan \frac{2\pi - \theta}{2} \right) - \arctan \left( \frac{1+r}{1-r} \tan \frac{\pi - \theta}{2} \right).$$

پس از ساده کردن عبارت حاصل از این رابطه آخر برای  $\tan[\pi V(r, \theta)]$  (تمرین ۳، بخش ۱۱۸)

را ببینید)، به دست می‌آوریم

$$V(r, \theta) = \frac{1}{\pi} \arctan \left( \frac{1 - r^2}{2r \sin \theta} \right) \quad (0^\circ \leq \arctan t \leq \pi) \quad (5)$$

که در آن محدودیت مذکور برای مقادیر تابع آرکتانزان از نظر فیزیکی بدیهی است. در صورتی که این جواب را بر حسب مختصات قائم بیان کنیم همان جواب (۵) بخش ۱۰۵ حاصل می‌شود.

حال به اثبات این مطلب باز می‌گردیم که تابع  $U$  که با رابطه (۱) تعریف شد در مسئلهٔ دیریکله برای قرص  $r < r_0$  که درست قبل از این مثال بیان شد صدق می‌کند. قبل از هر چیز  $U$  در داخل دایره  $r = r_0$  همساز است زیرا  $P$  در آنجا تابعی است همساز از  $r$  و  $\theta$ . به عبارت دقیقتر، توجه می‌کنیم که چون  $F$  تکه‌یی پیوسته است، انتگرال (۱) را می‌توان به صورت مجموع تعدادی متناهی انتگرال معین نوشت که هر یک از آنها دارای انتگرال‌دهی پیوسته نسبت به  $r$ ,  $\theta$  و  $\phi$  است. مشتقات جزئی این انتگرال‌دها نسبت به  $r$  و  $\theta$  نیز پیوسته‌اند. چون بدین ترتیب می‌توان ترتیب انتگرال‌گیری و مشتقگیری نسبت به  $r$  و  $\theta$  را عوض کرد و چون  $P$  در معادلهٔ لaplas

$$r^2 P_{rr} + r P_r + P_{\theta\theta} = 0$$

در مختصات قطبی  $r$  و  $\theta$  صدق می‌کند (تمرین ۵، بخش ۲۵) در نتیجهٔ  $U$  نیز در این معادله صدق می‌کند.

برای تحقیق درستی حد (۲)، لازم است نشان دهیم که اگر  $F$  در  $\theta$  پیوسته باشد، متناظر با هر عدد مثبت  $\varepsilon$ ، عدد مثبتی مانند  $\delta$  هست به قسمی که

$$0^\circ < r_0 - r < \delta \quad \text{هرگاه} \quad |U(r, \theta) - F(\theta)| < \varepsilon \quad (6)$$

از آنجا شروع می‌کنیم که با توجه به ویژگی (۱۱) هستهٔ بواسون در بخش ۱۱۶، می‌توان نوشت

$$U(r, \theta) - F(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(r_0, r, \phi - \theta) [F(\phi) - F(\theta)] d\phi.$$

برای سهولت فرض می‌کنیم  $F$  به طور دوره‌یی با دورهٔ تناوب  $2\pi$  توسعه یافته تا انتگرال‌ده نسبت به  $\phi$  دوره‌یی و با همان دورهٔ تناوب باشد. همچنین به دلیل ماهیت حدی که باید ثابت شود می‌توان فرض کرد که  $0^\circ < r < r_0$ .

اکنون ملاحظه می‌کنیم که چون  $F$  در  $\theta$  پیوسته است، عدد مثبت و کوچکی مانند  $\alpha$  هست که

$$|\phi - \theta| \leq \alpha \quad \text{هرگاه} \quad |F(\phi) - F(\theta)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (7)$$

بهوضوح

$$U(r, \theta) - F(\theta) = I_1(r) + I_2(r) \quad (8)$$

که در آن

$$I_1(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta-\alpha}^{\theta+\alpha} P(r_0, r, \phi - \theta) [F(\phi) - F(\theta)] d\phi,$$

$$I_2(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta+\alpha}^{\theta-\alpha+2\pi} P(r_0, r, \phi - \theta) [F(\phi) - F(\theta)] d\phi.$$

بنابر مثبت بودن تابع  $P$  (بخش ۱۱۶)، و اولین نابرابری (7) بالا و ویژگی (۱۱) آن تابع در بخش ۱۱۶، می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} |I_1(r)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\theta-\alpha}^{\theta+\alpha} P(r_0, r, \phi - \theta) |F(\phi) - F(\theta)| d\phi \\ &< \frac{\varepsilon}{4\pi} \int_0^{2\pi} P(r_0, r, \phi - \theta) d\phi = \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

همین طور برای انتگرال  $I_2(r)$  از شکل ۱۷۲، بخش ۱۱۶، می‌توان دید که مخرج  $|s - z|^2$  در عبارت (8) آن بخش برای  $P(r_0, r, \phi - \theta)$  دارای مقدار مینیممی (مثبت) مانند  $m$  است وقتی  $\phi$ ، آوند  $s$ ، در بازه بسته

$$\theta + \alpha \leq \phi \leq \theta - \alpha + 2\pi$$

تعییر کند. بنابراین اگر  $M$  معرف کران بالایی برای تابع تکه‌بی پیوسته  $|F(\phi) - F(\theta)|$  در بازه  $r_0 - r < \delta < \delta$  باشد، نتیجه می‌شود که اگر  $\theta \leq \phi \leq 2\pi$

$$|I_2(r)| \leq \frac{(r_0^\gamma - r^\gamma)M}{2\pi m} 2\pi < \frac{2Mr_0}{m} (r_0 - r) < \frac{2Mr_0}{m} \delta = \frac{\varepsilon}{2}$$

که در آن

$$\delta = \frac{m\varepsilon}{4Mr_0}. \quad (9)$$

بالاخره بنابر نتایج دو پاراگراف قبل می‌توان گفت که اگر  $\delta < r_0$ , آن‌گاه

$$|U(r, \theta) - F(\theta)| \leq |I_1(r)| + |I_2(r)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

که در آن  $\delta$  عدد مثبتی است که با رابطه (۶) تعریف شده است. یعنی اگر آن انتخاب  $\delta$  صورت گیرد، حکم (۶) برقرار است.

بنابر فرمول (۱)، مقدار  $U$  در  $r = r_0$  عبارت است از

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\phi) d\phi.$$

بنابراین، مقدار تابع همساز در مرکز دایره  $r = r_0$  عبارت است از میانگین مقادیر مرزی روی دایره. به عنوان تمرین ثابت کنید که  $P$  و  $U$  را می‌توان به وسیله سریهایی شامل توابع مقدماتی همساز  $r^n \sin n\theta$  و  $r^n \cos n\theta$  به صورت زیر نمایش داد:

$$P(r_0, r, \phi - \theta) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{r}{r_0} \right)^n \cos n(\phi - \theta) \quad (r < r_0) \quad (10)$$

$$U(r, \theta) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{r}{r_0} \right)^n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \quad (r < r_0) \quad (11)$$

که در آن

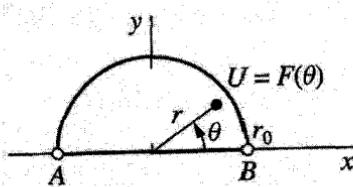
$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(\phi) \cos n\phi d\phi, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(\phi) \sin n\phi d\phi. \quad (12)$$

## ۱۱۸. مسائل مقدار مرزی مربوطه

جزئیات اثبات نتایج زیر را جزو تمرینها می‌گذاریم. فرض می‌کنیم تابع  $F$  که معرف مقادیر مرزی بر دایره  $r = r_0$  است تکه‌بی پیوسته باشد.

فرض می‌کنیم که  $(F(\theta) - F(\theta + 2\pi)) = -F(\theta - 2\pi)$ . در این صورت فرمول انتگرال پواسون (۱) بخش ۱۱۷، چنین می‌شود

$$U(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi [P(r_0, r, \phi - \theta) - P(r_0, r, \phi + \theta)] F(\phi) d\phi. \quad (1)$$



شکل ۱۷۴

مقادیر این تابع  $U$  بر شعاعهای افقی  $\theta = \pi$  و  $\theta = 0$  از دایره، همان‌طور که در صورت تعییر  $U$  به عنوان دمای پایا انتظار می‌رود صفر است. بنابراین، فرمول (۱۱) مسئلهٔ دیریکله برای ناحیهٔ نیم‌دایره‌یی  $0 < r < R < \theta < \pi$  را حل می‌کند، که بر قطر  $AB$ ، در شکل ۱۷۴،  $U = 0$  و به‌ازای هر  $\theta$  ثابت که  $F$  در آن پیوسته باشد

$$\lim_{\substack{r \rightarrow r_0 \\ r < r_0}} U(r, \theta) = F(\theta) \quad (0 < \theta < \pi). \quad (2)$$

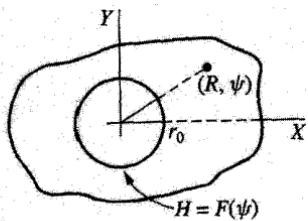
اگر  $F(2\pi - \theta) = F(\theta)$

$$U(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi [P(r_0, r, \phi - \theta) + P(r_0, r, \phi + \theta)] F(\phi) d\phi \quad (3)$$

و  $U_\theta(r, \theta) = 0$  در صورتی که  $\theta = 0$  یا  $\theta = \pi$ . در نتیجهٔ فرمول (۳) تابعی مانند  $U$  را ارائه می‌دهد که در ناحیهٔ نیم‌دایره‌یی  $0 < r < R < \theta < \pi$  همساز است و در شرط (۲) و شرط صفر بودن مشتق نرمال آن بر قطر  $AB$ ، که در شکل ۱۷۴ نشان داده شده است، صدق می‌کند. تابع تحلیلی  $Z = r^{1/2} e^{i\theta}$  را به روی دایره  $|z| = r$  در صفحهٔ  $z$ ، دایره  $|Z| = r^{1/2}$  در صفحهٔ  $Z$  را به روی دایره  $|z| = r$  در صفحهٔ  $z$ ، و خارج دایرة اولی را به روی داخل دایرة دومی می‌نگارد. با قرار دادن  $(i\theta)$  و  $(i\psi)$  در  $U(r, \theta) = R \exp(i\psi)$ ، توجه می‌کنیم که  $r = r_0^{1/2}/R$  و  $\psi = 2\pi - \theta$ . پس تابع همساز  $U(r, \theta)$  که با فرمول (۱۱) بخش ۱۱۷ نمایش داده شد، به تابع زیر که در حوزه  $R > r > r_0$  همساز است، تبدیل می‌شود

$$U\left(\frac{r_0^{1/2}}{R}, 2\pi - \psi\right) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r_0^{1/2} - R^{1/2}}{r_0^{1/2} - 2r_0 R \cos(\phi + \psi) + R^{1/2}} F(\phi) d\phi.$$

حال، به‌طور کلی، اگر  $u(r, \theta)$  همساز باشد،  $u(r, -\theta)$  نیز همساز است (تمرین ۱۱ را ببینید).



شکل ۱۷۵

بنابراین تابع  $H(R, \psi) = U(r_0^2/R, \psi - 2\pi)$  یا

$$H(R, \psi) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(r_0, R, \phi - \psi) F(\phi) d\phi \quad (R > r_0) \quad (4)$$

نیز همسار است. به ازای هر  $\psi$  ثابت که در آن  $F(\psi)$  پیوسته باشد از شرط (۲) بخش ۱۱۷ به دست می‌آوریم

$$\lim_{\substack{R \rightarrow r_0 \\ R > r_0}} H(R, \psi) = F(\psi). \quad (5)$$

بدین ترتیب فرمول (۴) مسئلهٔ دیریکله برای ناحیهٔ خارجی دایرهٔ  $r_0 < R$  را در صفحهٔ  $Z$  حل می‌کند (شکل ۱۷۵). از عبارت (۸) بخش ۱۱۶، متوجه می‌شویم که هستهٔ پواسون  $P(r_0, R, \phi - \psi)$  وقتی  $R > r_0$  منفی است. همچنین

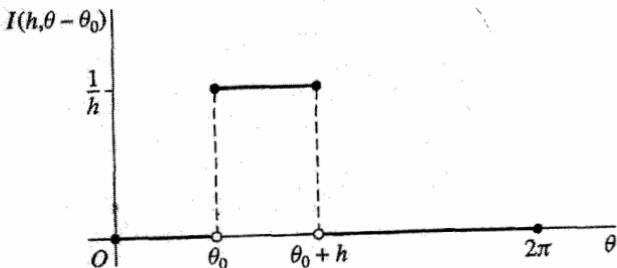
$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(r_0, R, \phi - \psi) d\phi = -1 \quad (R > r_0) \quad (6)$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} H(R, \psi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\phi) d\phi. \quad (7)$$

## تمرینها

۱. با استفاده از فرمول انتگرال پواسون (۱) بخش ۱۱۷، فرمول

$$V(x, y) = \frac{1}{\pi} \arctan \left[ \frac{1 - x^2 - y^2}{(x - 1)^2 + (y - 1)^2 - 1} \right] \quad (\arctan t \leq \pi) \quad (8)$$



شکل ۱۷۶

برای پتانسیل الکترواستاتیکی در داخل استوانه  $x^2 + y^2 = 1$  را نتیجه بگیرید هرگاه بر ربع اول ( $y > 0$ ) سطح استوانه‌یی،  $V = 0$  و بر بقیه سطح  $V = 1$ . همچنین بیان کنید چرا  $V = 1$  جواب تمرین ۸، بخش ۱۰۵ است.

۲. فرض کنید  $T$  معرف دمای پایا در قرص  $1 \leq r \leq 1$  با وجود عایق باشد در صورتی که بر قوس  $\theta$  از لبه  $r = 1$  داشته باشیم  $T = 0$  و بر بقیه لبه  $0 < \theta < 2\pi$ . با استفاده از فرمول انتگرال پواسون نشان دهید که

$$T(x, y) = \frac{1}{\pi} \arctan \left[ \frac{(1-x^2-y^2)y_0}{(x-1)^2+(y-y_0)^2-y_0^2} \right] \quad (0 \leq \arctan t \leq \pi)$$

که در آن  $y_0 = \tan \theta$ . تحقیق کنید که این تابع  $T$  در شرایط مرزی صدق می‌کند.  
۳. به کمک اتحادهای مثلثاتی

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}, \quad \tan \alpha + \cot \alpha = \frac{2}{\sin 2\alpha}$$

نشان دهید چگونه در مثال بخش ۱۱۷، از روی فرمول  $V(r, \theta) = \pi \int_{\theta_0}^{\theta} f(\theta') d\theta'$  که درست قبل از جواب آمده است جواب (۵) به دست می‌آید.

۴. فرض کنید  $I$  معرف تابع ضربه یکه متناهی زیر باشد (شکل ۱۷۶):

$$I(h, \theta - \theta_0) = \begin{cases} 1/h, & \theta_0 \leq \theta \leq \theta_0 + h \\ 0, & \theta_0 + h < \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

که در آن  $h$  یک عدد مثبت است و  $2\pi \leq \theta_0 + h < \theta_0$ . توجه کنید که

$$\int_{\theta_0}^{\theta_0 + h} I(h, \theta - \theta_0) d\theta = 1.$$

به کمک قضیه مقدار میانگین برای انتگرالهای معین، نشان دهید که

$$\int_0^{2\pi} P(r_0, r, \phi - \theta) I(h, \phi - \theta_0) d\phi = P(r_0, r, c - \theta_0) \int_{\theta_0}^{\theta_0 + h} I(h, \phi - \theta_0) d\phi$$

که در آن  $\theta_0 \leq c \leq \theta_0 + h$  و بنابراین

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \int_0^{2\pi} P(r_0, r, \phi - \theta) I(h, \phi - \theta_0) d\phi = P(r_0, r, \theta - \theta_0) \quad (r < r_0).$$

بنابراین هسته پواسون  $P(r_0, r, \theta - \theta_0)$  حد تابعی است که در داخل دایره  $r = r_0$  همساز است و مقادیر مرزی آن بهوسیله تابع ضربه  $2\pi I(h, \theta - \theta_0)$  نمایش داده می‌شود، وقتی که  $h$  با مقادیر مثبت به صفر میل کند.

۵. نشان دهید که فرمول تمرین ۸ (ب) بخش ۵۶، در مورد مجموع یک سری کسینوسی را می‌توان چنین نوشت

$$1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos n\theta = \frac{1 - a^2}{1 - 2a \cos \theta + a^2} \quad (-1 < a < 1).$$

سپس نشان دهید که هسته پواسون دارای نمایش سری  $(10)$  بخش ۱۱۷ است.

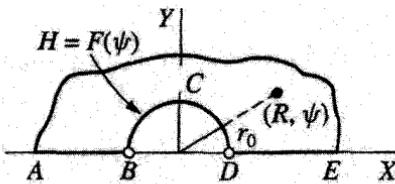
۶. نشان دهید که در نمایش  $(10)$  بخش ۱۱۷ برای هسته پواسون، سری نسبت به  $\phi$  همگرایی یکنواخت است. سپس از فرمول  $(1)$  آن بخش نمایش سری  $(11)$  همان بخش را برای  $U(r, \theta)$  به دست آورید.\*

۷. با استفاده از فرمولهای  $(11)$  و  $(12)$  بخش ۱۱۷، دمای پایای  $T(r, \theta)$  در استوانه توپر  $r \leq r_0$  به طول نامتناهی را پیدا کنید اگر  $y = T(r_0, \theta) = A \cos \theta$ . نشان دهید که در عرض صفحه  $\theta = 0$  هیچ گرمایی جریان نمی‌یابد.

$.T = A(r/r_0) \cos \theta = Ax/r_0$  جواب:

---

\* در بخش ۴۸ کتاب "سریهای فوریه و مسائل مقدار مرزی" (Fourier Series and Boundary Value Problems) از همین مؤلفان این نتیجه برای  $\theta = 0$  به روشن جدا سازی متغیرها به دست آمده است، چاپ ششم ۲۰۰۱.



شکل ۱۷۷

۸. حالت خاص

$$H(R, \psi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi [P(r_0, R, \phi + \psi) - P(r_0, R, \phi - \psi)] F(\phi) d\phi \quad (\text{الف})$$

$$H(R, \psi) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi [P(r_0, R, \phi + \psi) + P(r_0, R, \phi - \psi)] F(\phi) d\phi \quad (\text{ب})$$

از فرمول (۴) بخش ۱۱۸، رابطه تابع همساز  $H$  در ناحیه بیکران  $r > r_0 < \psi < \pi$ ، که در شکل ۱۷۷ نشان داده شده، به دست آورید به شرط آنکه تابع روی نیمداire، در شرط مرزی زیر صدق کند

$$\lim_{\substack{R \rightarrow r_0 \\ R > r_0}} H(R, \psi) = F(\psi) \quad (0 < \psi < \pi)$$

و (الف) برپرتوهای  $DE$  و  $BA$  صفر باشد؛ (ب) برپرتوهای  $DE$  و  $BA$  مشتق نرمال آن صفر باشد.

۹. در اثبات فرمول (۱) بخش ۱۱۸، به عنوان جواب مسئله دیریکله که در آنجا برای ناحیه نشان داده شده در شکل ۱۷۴ بیان شده است جزئیات لازم را ارائه دهد.

۱۰. در اثبات فرمول (۳)، بخش ۱۱۸، به عنوان جواب مسئله مقدار مرزی که در آنجا بیان شده است جزئیات لازم را ارائه دهد.

۱۱. فرمول (۴) بخش ۱۱۸ را به عنوان جواب مسئله دیریکله برای ناحیه خارجی یک دایره (شکل ۱۷۵) به دست آورید. نشان دهید که  $u(r, -\theta)$  در صورتی همساز است که  $u(r, \theta)$  همساز باشد، از صورت قطبی معادله لاپلاس، یعنی

$$r^4 u_{rrr}(r, \theta) + r u_{rr}(r, \theta) + u_{\theta\theta}(r, \theta) = 0$$

استفاده کنید.

۱۲. بیان کنید چرا فرمول (۶) بخش ۱۱۸، برقرار است.

۱۳. رابطه (۷) بخش ۱۱۸ را ثابت کنید.

## ۱۱۹. فرمول انتگرال شوارتس

فرض کنید  $f$  در سراسر نیم صفحه  $\text{Im } z \geq 0$  تابعی تحلیلی از  $z$  باشد به قسمی که، به ازای اعداد ثابت و مثبت  $a$  و  $M$ ، تابع  $f$  در ویژگی ترتیبی زیر صدق کند

$$(1) \quad |z^a f(z)| < M \quad (\text{Im } z \geq 0).$$

برای نقطه ثابت  $z$  واقع در بالای محور حقیقی، فرض کنید  $C_R$  معرف نیمة بالایی دایره به شعاع  $R$  و مرکز مبدأ باشد که در جهت مثبت گرفته شده است، که در آن  $|z| > R$  (شکل ۱۷۸). پس، بنابر فرمول انتگرال کوشی داریم

$$(2) \quad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{f(s)ds}{s-z} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-R}^R \frac{f(t)dt}{t-z}.$$

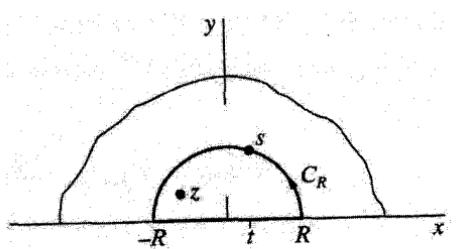
می بینیم که وقتی  $R$  به  $\infty$  میل کند اولین این انتگرالها به صفر میل می کند، زیرا بنابر شرط (۱)،

$$\left| \int_{C_R} \frac{f(s)ds}{s-z} \right| < \frac{M}{R^a(R-|z|)} \pi R = \frac{\pi M}{R^a(1-|z|/R)}.$$

در نتیجه

$$(3) \quad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)dt}{t-z} \quad (\text{Im } z > 0).$$

بنابر شرط (۱)، این انتگرال ناسره همگراست\*. عددی که به آن همگرا می شود همان مقدار اصلی کوشی آن خواهد بود (بخش ۷۱ را ببینید) و نمایش (۳) یک فرمول انتگرال کوشی برای نیم صفحه است.  $\text{Im } z > 0$ .



شکل ۱۷۸

\* برای مثال، فصل ۲۲ از کتاب زیر را ببینید

در صورتی که  $z$  در زیر محور حقیقی واقع باشد، سمت راست رابطه (۲) صفر است، بنابراین انتگرال (۳) برای چنین نقطه‌ای صفر است. در نتیجه وقتی  $z$  در بالای محور حقیقی است، فرمول زیر را داریم که در آن  $c$  یک ثابت مختلط دلخواه است:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{t-z} + \frac{c}{t-\bar{z}} \right) f(t) dt \quad (\operatorname{Im} z > 0). \quad (4)$$

در دو حالت  $1 - c = 1$  و  $c = 1$ ، به ترتیب، این فرمول به فرمولهای زیر تبدیل می‌شود

$$f(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y f(t)}{|t-z|^2} dt \quad (y > 0) \quad (5)$$

$$f(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(t-x)f(t)}{|t-z|^2} dt \quad (y > 0). \quad (6)$$

اگر  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ، از فرمولهای (۵) و (۶) نتیجه می‌شود که توابع همساز  $u$  و  $v$  در نیم صفحه  $y > 0$  بر حسب مقادیر مرزی  $u$ ، با فرمولهای زیر نمایش داده می‌شوند

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{yu(t, 0)}{|t-z|^2} dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{yu(t, 0)}{(t-x)^2 + y^2} dt \quad (y > 0) \quad (7)$$

$$v(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-t)u(t, 0)}{(t-x)^2 + y^2} dt \quad (y > 0). \quad (8)$$

فرمول (۷) به فرمول انتگرال پواسون برای نیم صفحه، یا فرمول انتگرال شوارتس، معروف است. در بخش بعد برای برقراری فرمولهای (۷) و (۸) شرایط را تعدیل خواهیم کرد.

## ۱۲۰. مسئله دیریکله برای نیم صفحه

فرض می‌کنیم  $F$  تابعی حقیقی مقدار از  $x$  باشد که به ازای هر  $x$  کراندار است و، به استثنای حداقل تعدادی متناهی نقطه که در آنها جهشی محدود دارد، پیوسته است. وقتی که  $\epsilon \leq |x|$  و  $y \geq 1/\epsilon$  باشد، انتگرال که در آن عدد ثابت مثبت دلخواهی است، انتگرال

$$I(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(t)dt}{(t-x)^2 + y^2}$$

نسبت به  $x$  و  $y$  همگرای یکنواخت است، انتگرال‌های مشتقات جزئی انتگرال‌ده نسبت به  $x$  و  $y$  نیز همگرای یکنواخت هستند. هر یک از این انتگرال‌ها، مجموع تعدادی متناهی انتگرال ناسره یا معین بر بازه‌هایی است که  $F$  در آنها پیوسته است؛ بنابراین وقتی  $\varepsilon \geq 0$ ، انتگرال‌ده هر انتگرال مؤلفه‌یی، تابعی پیوسته از  $t$ ،  $x$  و  $y$  است. در نتیجه، هرگاه  $0 < y$ ، هر مشتق جزئی  $I(x, y)$  با انتگرال مشتق نظری این انتگرال‌ده نمایش داده می‌شود.

قرار می‌دهیم  $U(x, y) = yI(x, y)/\pi$ . بنابراین،  $U$  تبدیل انتگرال شوارتس  $F$  است، که از دومین فرمول (۷)، بخش ۱۱۹ به ذهن القا می‌شود.

$$U(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{yF(t)}{(t-x)^2 + y^2} dt \quad (y > 0). \quad (1)$$

جز ضریب  $1/\pi$ ، هسته در اینجا عبارت است از  $|z|/|t-z|$ . این هسته، مؤلفهٔ موهومی تابع  $(t-z)/|t-z|$  است که نسبت به  $z$  تحلیلی است هرگاه  $0 < y$ . در نتیجه هسته همساز است و بنابراین در معادله لaplس بر حسب  $x$  و  $y$  صدق می‌کند. چون ترتیب مشتقگیری و انتگرالگیری را می‌توان عوض کرد، پس تابع (۱) در معادله لaplس صدق می‌کند. در نتیجه،  $U$  همساز است هرگاه  $0 < y$ .

برای اینکه ثابت کنیم به‌ازای هر  $x$  مشخص که  $F$  در آن پیوسته است

$$\lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ y > 0}} U(x, y) = F(x) \quad (2)$$

در فرمول (۱) تغییر متغیر  $t = x + y \tan \tau$  را انجام می‌دهیم و می‌نویسیم

$$U(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} F(x + y \tan \tau) d\tau \quad (y > 0). \quad (3)$$

پس اگر

$$G(x, y, \tau) = F(x + y \tan \tau) - F(x)$$

و  $\alpha$  عدد ثابت مثبت و کوچکی باشد، آنگاه

$$\pi[U(x, y) - F(x)] = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} G(x, y, \tau) d\tau = I_1(y) + I_2(y) + I_3(y) \quad (4)$$

که در آن

$$I_1(y) = \int_{-\pi/2}^{(-\pi/2)+\alpha} G(x, y, \tau) d\tau, \quad I_2(y) = \int_{(-\pi/2)+\alpha}^{(\pi/2)-\alpha} G(x, y, \tau) d\tau,$$

$$I_3(y) = \int_{(\pi/2)-\alpha}^{\pi/2} G(x, y, \tau) d\tau.$$

اگر  $M$  معرف کران بالایی برای  $|F(x)|$  باشد آنگاه  $|G(x, y, \tau)| \leq 2M$  بازای عدد مثبت مفروض  $\varepsilon$ ، عدد  $\alpha$  را به قسمی انتخاب می‌کنیم که  $\varepsilon < 6M\alpha$ ؛ در این صورت

$$|I_3(y)| \leq 2M\alpha < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{و} \quad |I_1(y)| \leq 2M\alpha < \frac{\varepsilon}{3}$$

حال نشان می‌دهیم که متناظر با  $\varepsilon$  عدد مثبتی مانند  $\delta$  هست به قسمی که

$$\circ < y < \delta \quad \text{هرگاه} \quad |I_2(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

برای انجام این کار ملاحظه می‌کنیم که چون  $F$  در  $x$  پیوسته است، عدد مثبتی مانند  $\gamma$  هست که

$$\circ < y |\tan \tau| < \gamma \quad \text{هرگاه} \quad |G(x, y, \tau)| < \frac{\varepsilon}{3\pi}$$

حال مقدار ماکسیمم  $|\tan \tau|$ ، وقتی  $\tau$  بین  $(\pi/2) - \alpha$  و  $(\pi/2) + \alpha$  تغییر کند، عبارت است از  $\tan \alpha = \cot \alpha$ . بنابراین اگر بنویسیم  $\tan(\pi/2 - \alpha) = \cot \alpha$ ، نتیجه می‌شود که

$$\circ < y < \delta \quad \text{هرگاه} \quad |I_2(y)| < \frac{\varepsilon}{3\pi}(\pi - 2\alpha) < \frac{\varepsilon}{3}$$

بدین ترتیب نشان داده ایم که

$$\circ < y < \delta \quad \text{هرگاه} \quad |I_1(y)| + |I_2(y)| + |I_3(y)| < \varepsilon$$

حال از این نتیجه و رابطه (۴)، شرط (۲) به دست می‌آید.

بنابراین، فرمول (۱) مسئله دیریکله برای نیم صفحه  $y > 0$  باشرط مرزی (۲) را حل می‌کند. از صورت (۳) فرمول (۱) واضح است که در این نیم صفحه  $|U(x, y)| \leq M$ ، که در آن  $M$  یک کران بالای  $|F(x)|$  است؛ یعنی  $U$  کراندار است. توجه می‌کنیم که وقتی  $x = F$ ، داریم  $F(x) = F$ ، که در آن  $F$  یک عدد ثابت است.

بنابر فرمول (۸) بخش ۱۱۹، تحت برخی شرایط برای  $F$ ، تابع

$$V(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-t)F(t)}{(t-x)^2 + y^2} dt \quad (y > 0) \quad (5)$$

یک مزدوج همساز همان تابع  $U$  است که با فرمول (۱) تعریف شده است. علاوه بر این فرمول (۵) یک مزدوج همساز  $U$  را به ما می‌دهد اگر  $F$  همه جا، به استثنای حداقل تعدادی متناهی نقطه که در آنها جهشی محدود دارد، پیوسته باشد و در ویرگی ترتیبی

$$|x^a F(x)| < M \quad (a > 0)$$

صدق کند. زیرا تحت این شرایط می‌بینیم که هرگاه  $y > 0$  و  $V$  در معادلات کوشی-ریمان صدق می‌کنند.

حالتهای خاص فرمول (۱) را، وقتی که  $F$  تابعی فرد یا زوج باشد، جزو تمرینها گذاشتیم.

### تمرینها

۱. به عنوان حالت خاصی از فرمول (۱)، بخش ۱۲۰، عبارت

$$U(x, y) = \frac{y}{\pi} \int_0^{\infty} \left[ \frac{1}{(t-x)^2 + y^2} - \frac{1}{(t+x)^2 + y^2} \right] F(t) dt \quad (x > 0, y > 0)$$

را برای تابع کراندار  $U$  به دست آورید که در ربع اول همساز است و در شرایط مرزی زیر صدق می‌کند

$$U(0, y) = 0 \quad (y > 0),$$

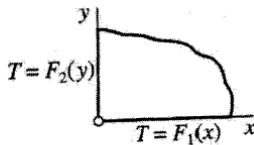
$$\lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ y > 0}} U(x, y) = F(x) \quad (x > 0, x \neq x_j)$$

که در آن  $F$  به ازای همه  $x$  های مثبت کراندار و بجز حداقل تعدادی متناهی نقطه  $x_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) که در آنها جهشی محدود دارد، پیوسته است.

۲. فرض کنید  $T(x, y)$  معرف دمای ایاضی و کراندار در ورق  $x > 0$  با وجود عایق باشد به شرطی که

$$\lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ y > 0}} T(x, y) = F_1(x) \quad (x > 0),$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} T(x, y) = F_2(y) \quad (y > 0)$$



شکل ۱۷۹

(شکل ۱۷۹). در اینجا  $F_1$  و  $F_2$  کراندار و پیوسته‌اند بجز اینکه حد اکثر تعدادی متناهی جهش محدود دارند. قرار دهید  $z = x + iy$  و به کمک فرمول حاصل در تمرین ۱ نشان دهید که

$$T(x, y) = T_1(x, y) + T_2(x, y) \quad (x > 0, y > 0)$$

که در آن

$$T_1(x, y) = \frac{y}{\pi} \int_0^\infty \left( \frac{1}{|t - z|^2} - \frac{1}{|t + z|^2} \right) F_1(t) dt,$$

$$T_2(x, y) = \frac{y}{\pi} \int_0^\infty \left( \frac{1}{|it - z|^2} - \frac{1}{|it + z|^2} \right) F_2(t) dt.$$

۳. حالت خاص فرمول (۱)، بخش ۱۲°

$$U(x, y) = \frac{y}{\pi} \int_0^\infty \left[ \frac{1}{(t-x)^2 + y^2} + \frac{1}{(t+x)^2 + y^2} \right] F(t) dt \quad (x > 0, y > 0)$$

را برای تابع کراندار  $U$  به دست آورید که در ربع اول همساز است و در شرایط مرزی زیر صدق می‌کند

$$U_x(0, y) = 0 \quad (y > 0),$$

$$\lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ y > 0}} U(x, y) = F(x) \quad (x > 0, x \neq x_j)$$

که در آن  $F$  به ازای همه  $x$ ‌های مشیت کراندار و، بجز محتملاً تعدادی متناهی از نقاط  $x = x_j$  که در آنها جهشی محدود دارد، پیوسته است.

۴. با تعویض محورهای  $x$  و  $y$  در بخش ۱۲° جواب

$$U(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x F(t)}{(t - y)^2 + x^2} dt \quad (x > 0)$$

مسئله دیریکله برای نیم صفحه  $x > 0$  را بنویسید. سپس قرار دهید

$$F(y) = \begin{cases} 1, & -1 < y < 1 \\ 0, & |y| > 1 \end{cases}$$

و این فرمولها را برای  $U$  و مزدوج همسازش  $V$  به دست آورید:

$$U(x, y) = \frac{1}{\pi} \left( \arctan \frac{y+1}{x} - \arctan \frac{y-1}{x} \right), V(x, y) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{x^2 + (y+1)^2}{x^2 + (y-1)^2}$$

که همچنین نشان دهید که  $-\pi/2 \leq \arctan t \leq \pi/2$

$$V(x, y) + iU(x, y) = \frac{1}{\pi} [\operatorname{Log}(z+i) - \operatorname{Log}(z-i)]$$

که در آن  $z = x + iy$

## ۱۲۱. مسائل نویمان

مانند بخش ۱۱۶ و شکل ۱۷۲ قرار می‌دهیم  $s = r \exp(i\theta)$  و  $z = r \exp(i\phi)$  که در آنها  $r < r_0$  در صورتی که  $s$  ثابت باشد، تابع

$$Q(r_0, r, \phi - \theta) = -2r_0 \ln |s - z| = -r_0 \ln [r_0^2 - 2r_0 r \cos(\phi - \theta) + r^2] \quad (1)$$

در داخل دایره  $|z| = r_0$  همساز است، زیرا مؤلفه حقیقی  $\log(z - s) - 2r_0$  است که در آن بریدگی شاخه‌یی  $\log(z - s)$  پرتوی از نقطه  $s$  به سمت خارج است. اگر، بعلاوه،  $r \neq r_0$  داریم

$$\begin{aligned} Q_r(r_0, r, \phi - \theta) &= -\frac{r_0}{r} \left[ \frac{2r^2 - 2r_0 r \cos(\phi - \theta)}{r_0^2 - 2r_0 r \cos(\phi - \theta) + r^2} \right] \\ &= \frac{r_0}{r} [P(r_0, r, \phi - \theta) - 1] \end{aligned} \quad (2)$$

که در آن  $P$  همان هسته پواسون (۷)، بخش ۱۱۶، است.

با توجه به این نکات، برای نوشتن نمایش انتگرالی تابع همساز  $U_r$  که مشتق نرمال آن بر دایره  $r = r_0$  مقادیر از قبل تعیین شده  $G(\theta)$  را می‌گیرد، می‌توان از تابع  $Q$  استفاده کرد.

اگر  $G$  تکه‌یی پیوسته و  $U$  ثابتی دلخواه باشد، تابع

$$U(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} Q(r_0, r, \phi - \theta) G(\phi) d\phi + U_0 \quad (r < r_0) \quad (3)$$

همساز است زیرا انتگرال‌ده تابعی همساز از  $r$  و  $\theta$  است. اگر مقدار میانگین  $G$  بر دایره  $r = r_0$  صفر باشد، یا

$$\int_0^{\pi} G(\phi) d\phi = 0, \quad (4)$$

آن‌گاه با توجه به رابطه (۲) داریم

$$\begin{aligned} U_r(r, \theta) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{r_0}{r} [P(r_0, r, \phi - \theta) - 1] G(\phi) d\phi \\ &= \frac{r_0}{r} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} P(r_0, r, \phi - \theta) G(\phi) d\phi. \end{aligned}$$

حال بنابر روابط (۱) و (۲) بخش ۱۱۷

$$\lim_{\substack{r \rightarrow r_0 \\ r < r_0}} \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} P(r_0, r, \phi - \theta) G(\phi) d\phi = G(\theta).$$

بنابراین به‌ازای هر مقدار  $\theta$  که  $G$  در آن پیوسته باشد

$$\lim_{\substack{r \rightarrow r_0 \\ r < r_0}} U_r(r, \theta) = G(\theta). \quad (5)$$

پس اگر  $G$  تکه‌یی پیوسته باشد و در شرط (۴) صدق کند، فرمول

$$U(r, \theta) = -\frac{r_0}{2\pi} \int_0^{\pi} \ln[r_0^2 - 2r_0 r \cos(\phi - \theta) + r^2] G(\phi) d\phi + U_0. \quad (r < r_0) \quad (6)$$

مسئله نوبمان برای ناحیه داخلی دایره  $r = r_0$  را حل می‌کند که در آن  $G(\theta)$  به همان مفهوم شرط (۵) مشتق نرمال تابع همساز  $U(r, \theta)$  در مرز است. توجه کنید که چگونه از روابط (۴) و (۶) نتیجه می‌شود که به دلیل ثابت بودن  $\ln r$  عدد  $U$  مقدار  $U$  در مرکز دایره  $r = r_0$  است. مقادیر  $U(r, \theta)$  ممکن است نمایش دماهای پایا در قرص  $r < r_0$  با وجود عایق باشد.

در آن حالت شرط (۵) بیان می‌کند که شارگرما به داخل قرص، در امتداد لبه‌اش، متناسب است با  $G(\theta)$ . چون دما با زمان تغییر نمی‌کند، شرط (۴) شرط فیزیکی متعارفی است که نزد کل جریان گرما به داخل قرص باید صفر باشد.

می‌توان برای تابع همساز  $H$ ، در ناحیه خارجی دایره  $r = r_0$ ، فرمولی متناظر برحسب  $Q$  به صورت زیر نوشت

$$H(R, \psi) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Q(r_0, R, \phi - \psi) G(\phi) d\phi + H_0 \quad (R > r_0) \quad (7)$$

که در آن  $H$  عددی ثابت است. مثل قبل، فرض می‌کنیم که  $G$  تک‌بی پیوسته و شرط (۴) برقرار باشد. در این صورت

$$H_0 = \lim_{R \rightarrow \infty} H(R, \psi)$$

و به ازای هر  $\psi$  که  $G$  در آن پیوسته باشد،

$$\lim_{\substack{R \rightarrow r_0 \\ R > r_0}} H_R(R, \psi) = G(\psi). \quad (8)$$

تحقیق درستی فرمول (۷) و حالات خاص فرمول (۳) را، که برای نواحی نیمدایره‌بی به کار برده می‌شوند، جزو تمرینها می‌گذاریم.

حال به نیم‌صفحه باز می‌گردیم، فرض می‌کنیم  $G(x)$  به ازای همه  $x$ ‌های حقیقی، بجز حداقل تعدادی متناهی نقطه که در آنها جهشی محدود دارد، پیوسته باشد و در ویژگی ترتیبی زیر صدق کند

$$|x^a G(x)| < M \quad (a > 1) \quad (9)$$

هرگاه  $x < \infty$  و  $t < \infty$ . به ازای هر عدد حقیقی و ثابت  $t$  تابع  $\log |z - t|$  در نیم‌صفحه  $\text{Im } z > 0$  همساز است. در نتیجه، تابع

$$U(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln |z - t| G(t) dt + U_0 \quad (10)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln [(t - x)^2 + y^2] G(t) dt + U_0. \quad (y > 0)$$

که در آن  $U_0$  یک عدد ثابت حقیقی است، در آن نیم‌صفحه همساز است.

فرمول (۱۰) با درنظرداشتن تبدیل انتگرال شوارتس (۱) بخش  $12^{\circ}$ ، نوشته شد؛ زیرا از فرمول

(۱۰) نتیجه می‌شود که

$$U_y(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{yG(t)}{(t-x)^2 + y^2} dt \quad (y > 0). \quad (11)$$

پس با توجه به روابط (۱) و (۲) بخش  $12^{\circ}$ ، در هر نقطه  $x$  که  $G$  در آن پیوسته باشد داریم

$$\lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ y > 0}} U_y(x, y) = G(x). \quad (12)$$

بنابراین، فرمول انتگرال (۱۰)، مسئله نویمان برای نیم صفحه  $y > 0$  با شرط مرزی (۱۲) را حل می‌کند. اما روی  $G$  شرایطی نگذاشته‌ایم که برای اطمینان از کرانداربودن تابع همساز  $U$ ، وقتی  $|z|$  افزایش می‌یابد، کافی باشند.

در صورتی که  $G$  یک تابع فرد باشد، فرمول (۱۰) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$U(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \ln \left[ \frac{(t-x)^2 + y^2}{(t+x)^2 + y^2} \right] G(t) dt \quad (x > 0, y > 0). \quad (13)$$

این فرمول نمایش دهنده تابعی است که در ربع اول  $x > 0, y > 0$  همساز است و در شرایط مرزی زیر صدق می‌کند.

$$U(0, y) = 0 \quad (y > 0), \quad (14)$$

$$\lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ y > 0}} U_y(x, y) = G(x) \quad (x > 0). \quad (15)$$

### تمرینها

۱. فرمول (۷)، بخش  $121$  را با استفاده از نتایج قبلی آن بخش، به عنوان جواب مسئله نویمان برای ناحیه خارجی دایره  $r = r_0$  ثابت کنید.

۲. حالت خاص فرمول (۳)، بخش  $121$ ،

$$U(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi [Q(r_0, r, \phi - \theta) - Q(r_0, r, \phi + \theta)] G(\phi) d\phi$$

را برای تابع  $U$  به دست آورید که در ناحیه نیم‌دایره‌بی  $r < r_0, \theta < \pi$  همساز است و در شرایط مرزی زیر صدق می‌کند

$$U(r, 0) = U(r, \pi) = 0 \quad (r < r_0)$$

و به ازای هر  $\theta$  که  $G$  در آن پیوسته است

$$\lim_{\substack{r \rightarrow r_0 \\ r < r_0}} U_r(r, \theta) = G(\theta) \quad (\circ < \theta < \pi).$$

۳. حالت خاص فرمول (۳)، بخش ۱۲۱

$$U(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi [Q(r_0, r, \phi - \theta) + Q(r_0, r, \phi + \theta)] G(\phi) d\phi + U.$$

را برای تابع  $U$  به دست آورید که در ناحیه نیمداگیری  $r < r_0$  همساز است و در شرایط مرزی زیر صدق می‌کند

$$U_\theta(r, \circ) = U_\theta(r, \pi) = \circ \quad (r < r_0)$$

و به ازای هر  $\theta$  که  $G$  در آن پیوسته است

$$\lim_{\substack{r \rightarrow r_0 \\ r < r_0}} U_r(r, \theta) = G(\theta) \quad (\circ < \theta < \pi)$$

به شرط اینکه

$$\int_0^\pi G(\phi) d\phi = \circ.$$

۴. فرض کنید  $T(x, y)$  معرف دمای اپیا در ورق  $x \geq \circ, y \geq \circ$  باشد. وجوده ورق عایق‌اند و روی لبه  $x = \circ$  داریم  $T = \circ$ . شار گرمای  $(100)$  به داخل ورق در امتداد قطعه  $x < \circ$  از لبه  $y = \circ$  عبارت است از ثابت  $A$  و بقیه آن لبه عایق است. با استفاده از فرمول (۱۳)، بخش ۱۲۱، نشان دهید که شار خارج شده از ورق در امتداد لبه  $x = \circ$  عبارت است از

$$\frac{A}{\pi} \ln \left( 1 + \frac{1}{y^2} \right).$$

## پیوست ۱

### کتابنامه

فهرست کتابهای تکمیلی زیر، فهرستی جامع نیست. در بسیاری از کتابهای این فهرست مراجع دیگری را می‌توان یافت.

#### نظریه

- Ahlfors, L. V.: "Complex Analysis," 3d ed., McGraw-Hill Higher Education, Burr Ridge, IL, 1979.
- Antimirov, M. Ya., A. A. Kolyshkin, and R. Vaillancourt: "Complex Variables," Academic Press, San Diego, 1998.
- Bak, J., and D. J. Newman: "Complex Analysis," 2d ed., Springer-Verlag, New York, 1997.
- Bieberbach, L.: "Conformal Mapping," American Mathematical Society, Providence, RI, 2000.
- Boas, R. P. : "Invitation to Complex Analysis," The McGraw-Hill Companies, New York, 1987.
- \_\_\_\_\_: "Yet Another Proof of the Fundamental Theorem of Algebra," *Amer. Math. Monthly*, Vol. 71, No. 2, p. 180, 1964.
- Carathéodory, C.: "Conformal Representation," Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 1952.
- \_\_\_\_\_: "Theory of Functions of a Complex Variable," American Mathematical Society, Providence, RI, 1954.
- Conway, J. B.: "Functions of One Complex Variable," 2d ed., 6th Printing, Springer-Verlag, New York, 1997.
- Copson, E. T.: "Theory of Functions of a Complex Variable," Oxford University Press, London, 1962.
- Evans, G. C.: "The Logarithmic Potential, Discontinuous Dirichlet and Neumann Problems," American Mathematical Society, Providence, RI, 1927.
- Fisher, S. D.: "Complex Variables," 2d ed., Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 1990.

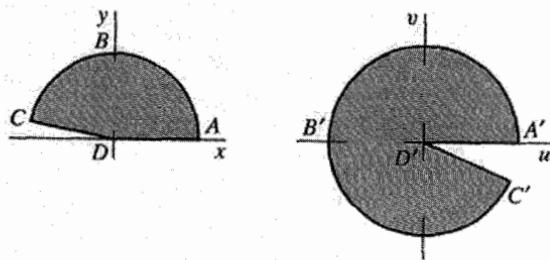
- Flanigan, F. J.: "Complex Variables: Harmonic and Analytic Functions," Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 1983.
- Hille, E.: "Analytic Function Theory," Vols. 1 and 2, 2d ed., Chelsea Publishing Co., New York, 1973.
- Kaplan, W.: "Advanced Calculus," 5th ed., Addison-Wesley Higher Mathematics, Boston, MA, 2003.
- : "Advanced Mathematics for Engineers," TechBooks, Marietta, OH, 1992.
- Kellogg, O. D.: "Foundations of Potential Theory," Dover Publications, Inc., New York, 1953.
- Knopp, K.: "Elements of the Theory of Functions," translated by F. Bagemihl, Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 1952.
- : "Problem Book in the Theory of Functions," Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 2000.
- Krantz, S. G.: "Complex Analysis: The Geometric Viewpoint," Carus Mathematical Monograph Series, The Mathematical Association of America, Washington, DC, 1990.
- : "Handbook of Complex Variables," Birkhäuser Boston, Cambridge, MA, 2000.
- Krzyż, J. G.: "Problems in Complex Variable Theory," Elsevier Science, New York, 1972.
- Lang, S.: "Complex Analysis," 3d ed., Springer-Verlag, New York, 1993.
- Levinson, N., and R. M. Redheffer: "Complex Variables," The McGraw-Hill Companies, Inc., New York, 1988.
- Markushevich, A. I.: "Theory of Functions of a Complex Variable," 3 vols. in one, 2d ed., American Mathematical Society, Providence, RI, 1977.
- Marsden, J. E., and M. J. Hoffman: "Basic Complex Analysis," 2d ed., W. H. Freeman & Company, New York, 1987.
- Mathews, J. H., and R. W. Howell: "Complex Analysis for Mathematics and Engineering," 4th ed., Jones and Bartlett Publishers, Sudbury, MA, 2001.
- Mitrinović, D. S.: "Calculus of Residues," P. Noordhoff, Ltd., Groningen, 1966.
- Nahin, P. J.: "An Imaginary Tale: The Story of  $\sqrt{-1}$ ," Princeton University Press, Princeton, NJ, 1998.
- Nehari, Z.: "Conformal Mapping," Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 1975.
- Newman, M. H. A.: "Elements of the Topology of Plane Sets of Points," 2d ed., Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 1999.
- Pennisi, L. L.: "Elements of Complex Variables," 2d ed., Holt, Rinehart & Winston, Inc., Austin, TX, 1976.
- Rubenfeld, L. A.: "A First Course in Applied Complex Variables," John Wiley & Sons, Inc., New York, 1985.
- Saff, E. B., and A. D. Snider: "Fundamentals of Complex Analysis," 3d ed., Prentice-Hall PTR, Paramus, NJ, 2001.
- Silverman, R. A.: "Complex Analysis with Applications," Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 1984.
- Springer, G.: "Introduction to Riemann Surfaces," 2d ed., American Mathematical Society, Providence, RI, 1981.
- Taylor, A. E., and W. R. Mann: "Advanced Calculus," 3d ed., John Wiley & Sons, Inc., New York, 1983.
- Thron, W. J.: "Introduction to the Theory of Functions of a Complex Variable," John Wiley & Sons, Inc., New York, 1953.
- Titchmarsh, E. C.: "Theory of Functions," 2d ed., Oxford University Press, Inc., New York, 1976.
- Volkovyskii, L. I., G. L. Lunts, and I. G. Aramanovich: "A Collection of Problems on Complex Analysis," Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 1992.
- Whittaker, E. T., and G. N. Watson: "A Course of Modern Analysis," 4th ed., Cambridge University Press, New York, 1996.

- Bowman, F.: "Introduction to Elliptic Functions, with Applications," English Universities Press, London, 1953.
- Brown, G. H., C. N. Hoyler, and R. A. Bierwirth: "Theory and Application of Radio-Frequency Heating," D. Van Nostrand Company, Inc., New York, 1947.
- Brown, J. W., and R. V. Churchill: "Fourier Series and Boundary Value Problems," 6th ed., McGraw-Hill Higher Education, Burr Ridge, IL, 2001.
- Churchill, R. V.: "Operational Mathematics," 3d ed., McGraw-Hill Higher Education, Burr Ridge, IL, 1972.
- Dettman, J. W.: "Applied Complex Variables," Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 1984.
- Fourier, J.: "The Analytical Theory of Heat," translated by A. Freeman, Dover Publications, Inc., New York, 1955.
- Hayt, W. H., Jr. and J. A. Buck: "Engineering Electromagnetics," 6th ed., McGraw-Hill Higher Education, Burr Ridge, IL, 2000.
- Henrici, P.: "Applied and Computational Complex Analysis," Vols. 1, 2, and 3, John Wiley & Sons, Inc., 1988, 1991, and 1993.
- Jeffrey, A.: "Complex Analysis and Applications," CRC Press, Boca Raton, FL, 1992.
- Kober, H.: "Dictionary of Conformal Representations," Dover Publications, Inc., New York, 1952.
- Lebedev, N. N.: "Special Functions and Their Applications," rev. ed., translated by R. Silverman, Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 1972.
- Love, A. E.: "Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity," 4th ed., Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 1944.
- Milne-Thomson, L. M.: "Theoretical Hydrodynamics," 5th ed., Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 1996.
- Oppenheim, A. V., R. W. Schafer, and J. R. Buck: "Discrete-Time Signal Processing," 2d ed., Prentice-Hall PTR, Paramus, NJ, 1999.
- Sokolnikoff, I. S.: "Mathematical Theory of Elasticity," 2d ed., Krieger Publishing Company, Melbourne, FL, 1983.
- Streeter, V. L., E. B. Wylie, and K. W. Bedford: "Fluid Mechanics," 9th ed., McGraw-Hill Higher Education, Burr Ridge, IL, 1997.
- Timoshenko, S. P., and J. N. Goodier: "Theory of Elasticity," 3d ed., The McGraw-Hill Companies, New York, 1970.
- Wen, G.-C.: "Conformal Mappings and Boundary Value Problems," Translations of Mathematical Monographs, Vol. 106, American Mathematical Society, Providence, RI, 1992.

## پیوست ۲

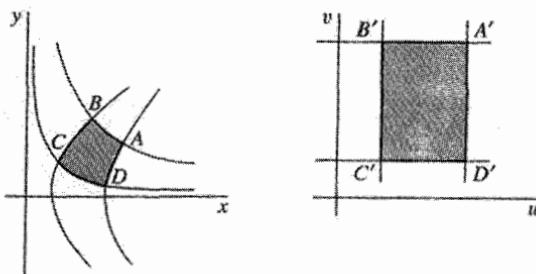
### جدول تبدیلهای نواحی

(فصل ۸ را ببینید)



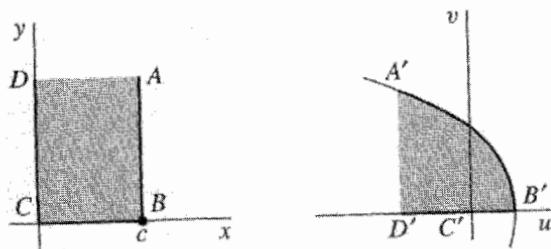
شکل ۱

$$w = z^*$$



شکل ۲

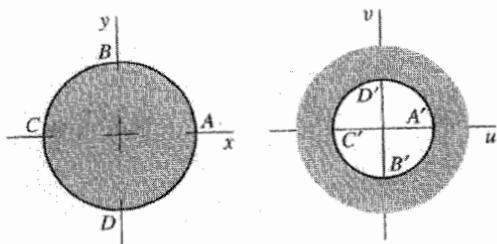
$$w = z^r$$



شکل ۳

$$w = z^r$$

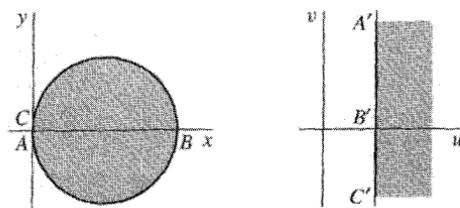
$$v^r = -4c^r(u - c^r) \text{ روی سهمی } A'B'$$



شکل ۴

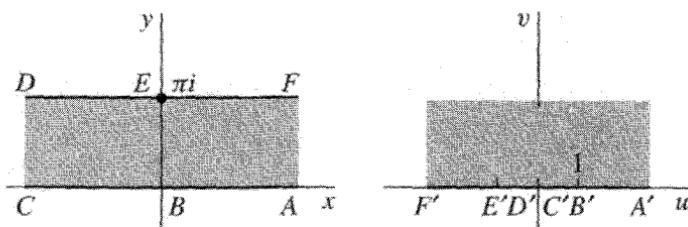
$$w = \frac{1}{z}$$

جدول تبدیلهای نواحی ۵۱۹



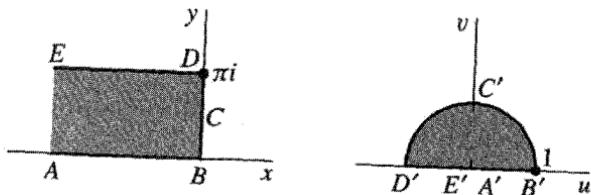
شکل ۵

$$w = \frac{1}{z}$$



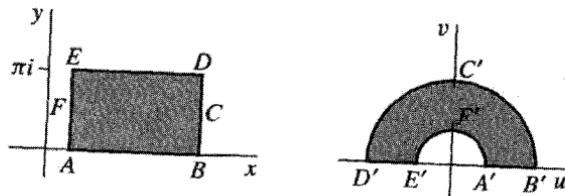
شکل ۶

$$w = \exp z$$



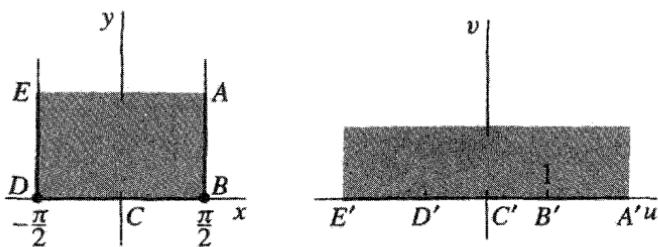
شکل ۷

$$w = \exp z$$



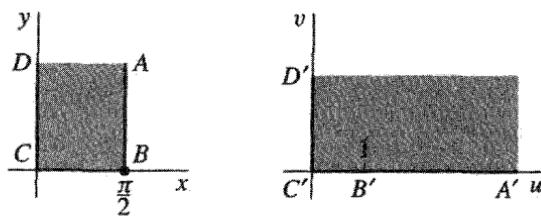
شکل ۸

$$w = \exp z$$



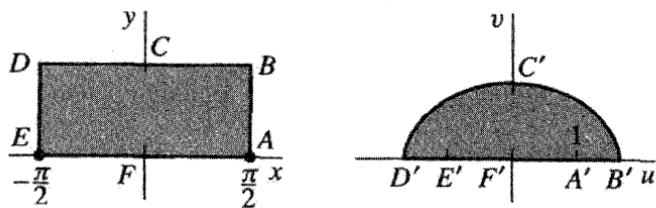
شکل ۹

$$w = \sin z$$



شکل ۱۰

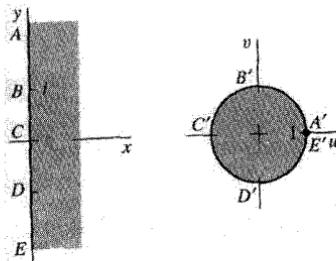
$$w = \sin z$$



شکل ۱۱

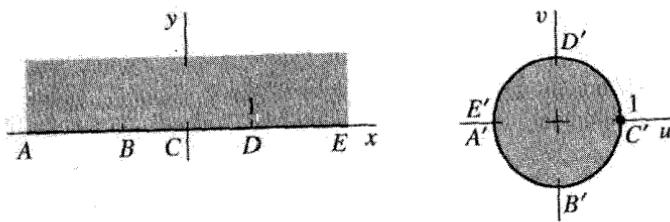
$B'C'D'$  (ب  $> 0$ )  $y = b$  روی خط  $BCD$   $w = \sin z$

$$\frac{u}{\cosh^2 b} + \frac{v}{\sinh^2 b} = 1$$



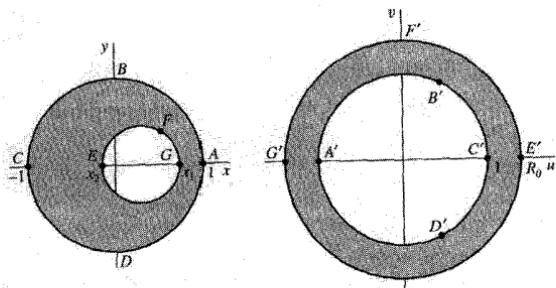
شکل ۱۲

$$w = \frac{z - 1}{z + 1}$$



شکل ۱۳

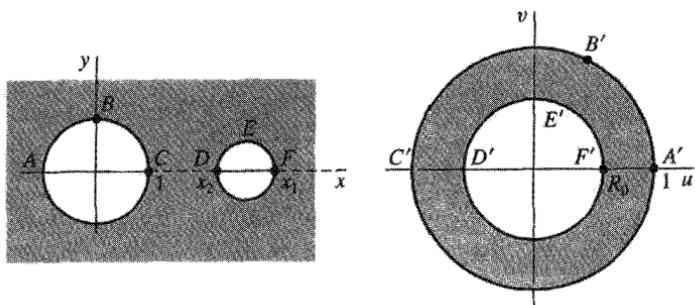
$$w = \frac{i - z}{i + z}$$



شکل ۱۴

$$a = \frac{1 + x_1 x_2 + \sqrt{(1 - x_1^2)(1 - x_2^2)}}{x_1 + x_2} \quad w = \frac{z - a}{az - 1}$$

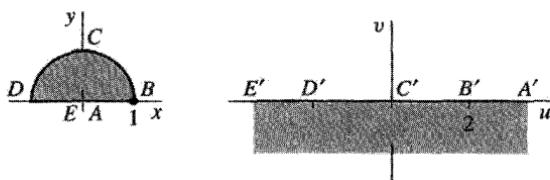
$$(-1 < x_2 < x_1 < 1 \text{ و } R_0 > 1 \text{ و } a > 1) \quad R_0 = \frac{1 - x_1 x_2 + \sqrt{(1 - x_1^2)(1 - x_2^2)}}{x_1 - x_2}$$



شکل ۱۵

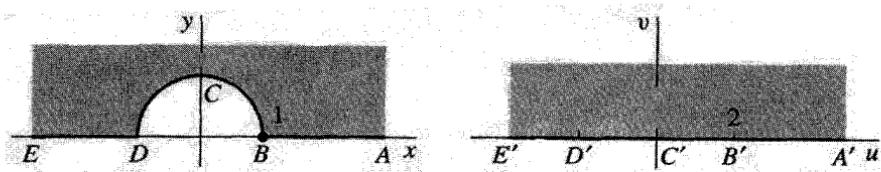
$$a = \frac{1 + x_1 x_1 + \sqrt{(x_1^2 - 1)(x_1^2 - 1)}}{x_1 + x_1} \quad w = \frac{z - a}{az - 1}$$

$$(1 < x_1 < x_1) < R_0 < 1 \text{ و } x_1 < a < x_1 \quad R_0 = \frac{x_1 x_1 - 1 + \sqrt{(x_1^2 - 1)(x_1^2 - 1)}}{x_1 - x_1}$$



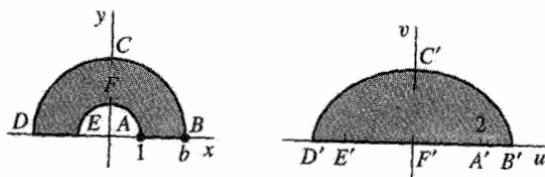
شکل ۱۶

$$w = z + \frac{1}{z}$$



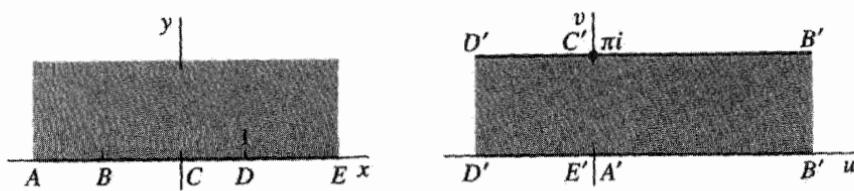
شکل ۱۷

$$w = z + \frac{1}{z}$$



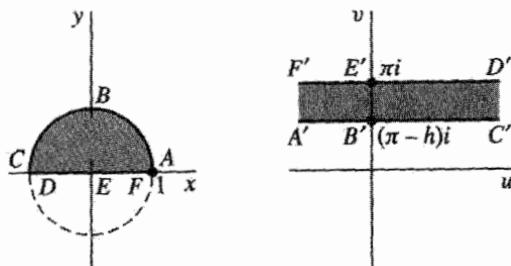
شکل ۱۸

$$\frac{u^r}{(b+1/b)^r} + \frac{v^r}{(b-1/b)^r} = 1 \text{ رعایتی بیضی } B'C'D' \text{ با } w = z + \frac{1}{z}$$



شکل ۱۹

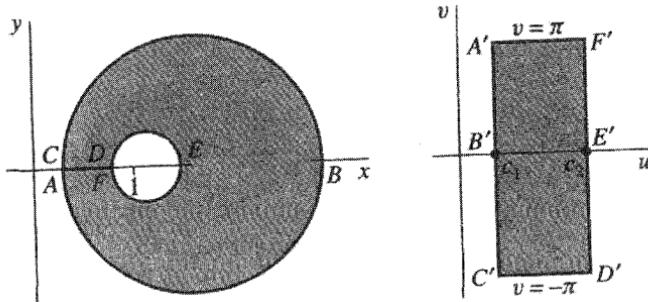
$$z = -\coth \frac{w}{\sqrt{1}} \text{ با } w = \operatorname{Log} \frac{z-1}{z+1}$$



شکل ۲۰

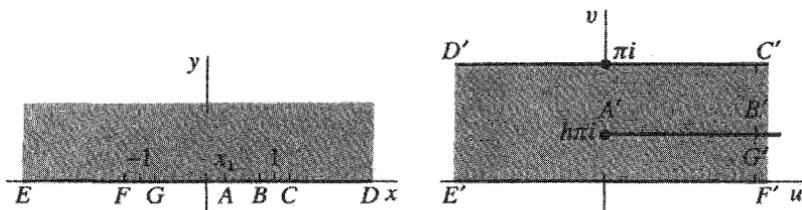
$$w = \operatorname{Log} \frac{z-1}{z+1}$$

$(-\pi < h < \pi)$   $x^r + (y + \cot h)^r = \csc^r h$  رعایتی دایره  $ABC$



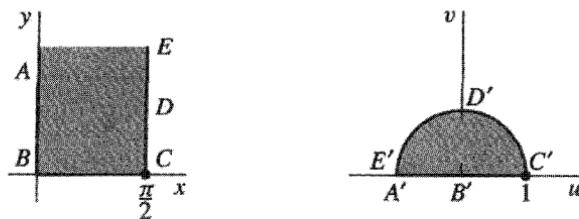
شکل ۲۱

$(n = 1, 2) \operatorname{csch} c_n$  مراکز دوایر در  $z$  شعاعها:  $z = \coth c_n$  :  $w = \operatorname{Log} \frac{z+1}{z-1}$



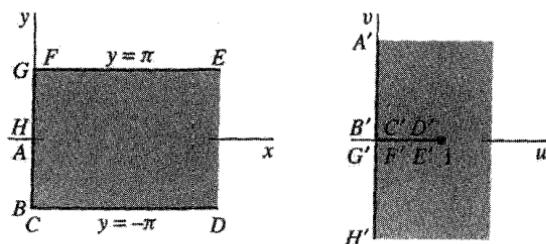
شکل ۲۲

$x_1 = \sqrt{h-1}$  :  $w = h \ln \frac{h}{\sqrt{h-1}} + \ln 2(1-h) + i\pi - h \operatorname{Log}(z+1) - (1-h) \operatorname{Log}(z-1)$



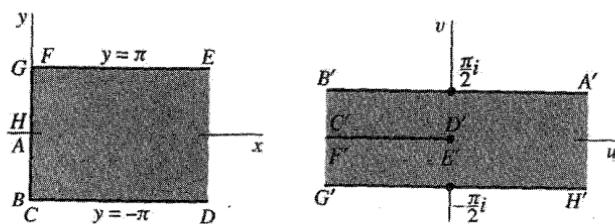
شکل ۲۳

$$w = \left(\tan \frac{z}{2}\right)^i = \frac{1 - \cos z}{1 + \cos z}$$



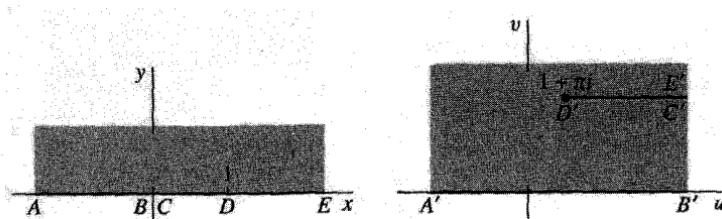
شکل ۲۴

$$w = \coth \frac{z}{2} = \frac{e^z + 1}{e^z - 1}$$



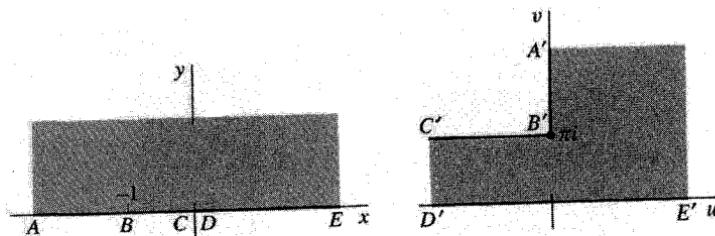
شکل ۲۵

$$w = \text{Log} \left( \coth \frac{z}{2} \right)$$



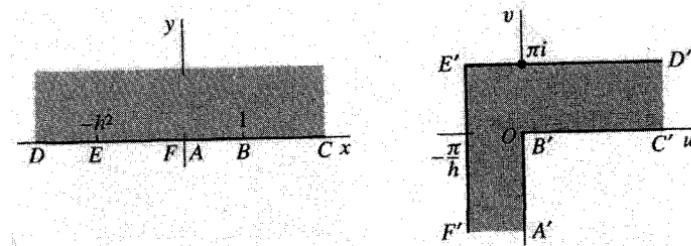
شکل ۲۶

$$w = \pi i + z - \text{Log} z$$



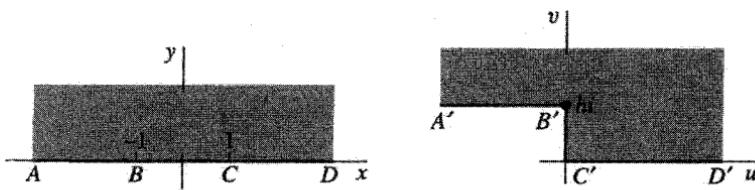
شکل ۲۷

$$w = \sqrt{(z+1)^{1/2} + 1} + \operatorname{Log} \frac{(z+1)^{1/2} - 1}{(z+1)^{1/2} + 1}$$



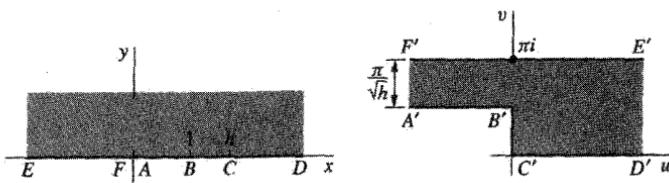
شکل ۲۸

$$w = \frac{i}{h} \operatorname{Log} \frac{1+iht}{1-iht} + \operatorname{Log} \frac{1+t}{1-t}; \quad t = \left( \frac{z-1}{z+h^2} \right)^{1/2}$$



شکل ۲۹

$$w = \frac{h}{\pi} [(z^2 - 1)^{1/2} + \cosh^{-1} z]^*$$



شکل ۳۰

$$w = \cosh^{-1} \left( \frac{\gamma z - h - 1}{h - 1} \right) - \frac{1}{\sqrt{h}} \cosh^{-1} \left[ \frac{(h+1)z - \gamma h}{(h-1)z} \right]$$

## واژه‌نامه

|                         |                      |
|-------------------------|----------------------|
| argument                | آوند                 |
| reflection Principle    | اصل بازتابی          |
| line integral           | انتگرال روی خط       |
| magnitude               | اندازه               |
| cut branch              | بریدگی شاخه‌ی        |
| invariant, steady       | پایا                 |
| electrostatic potential | پتانسیل الکتروستاتیک |
| function                | تابع                 |
| increasing -            | - افزایشی            |
| multiple -valued -      | - چندمقداری          |
| double -valued -        | - دو مقداری          |
| impulse -               | - ضربه               |
| logarithmic -           | - لگاریتمی           |
| hyperbolic -            | - هذلولوی            |
| antiderivative          | تابع اولیه           |

|                           |                        |
|---------------------------|------------------------|
| transformation            | تبديل                  |
| integral -                | - انتگرال              |
| linear fractional -       | - خطی کسری             |
| stereographic projection  | - گنجنگاشتی            |
| singularity               | تکینی                  |
| multiply connected domain | حوزه همبند چندگانه     |
| simply connected domain - | حوزه همبند ساده        |
| extended complex plane    | صفحة مختلط توسعه یافته |
| solid scale factor        | ضریب مقیاس صلب         |
| residue theorem           | قضیه مانده             |
| bound                     | کران                   |
| upper -                   | - بالایی               |
| lower -                   | - پایینی               |
| sheet                     | لایه                   |
| nested squares            | مربعات تو در تو        |
| contour                   | مسیر                   |
| normal derivative         | مشتق نرمال             |
| reciprocal                | معکوس                  |
| indefinite                | نامعین                 |
| point                     | نقطه                   |
| stagnation -              | - توقف                 |
| exterior -                | - خارجی                |
| interior -                | - داخلی                |
| branch -                  | - شاخه‌یی              |
| singular point            | نقطه تکین              |
| essential -               | - اساسی                |

|                      |               |
|----------------------|---------------|
| removable -          | - برداشتنی    |
| isolated -           | - تنها        |
| isotherm             | همدمما        |
| deleted neighborhood | همسایگی محدود |
| confocal             | همکانون       |
| uniform convergent   | یکنواخت-همگرا |

## نمايه

|                       |             |
|-----------------------|-------------|
| آژودینامیک            | ۴۴۵         |
| آوند                  | ۲۰          |
| اتحاد مثلثاتی لاگرانژ | ۲۸          |
| اجتماع دامنه‌ها       | ۱۰۰         |
| ادامه تحلیلی          | ۱۰۳، ۹۹-۱۰۰ |
| اصل                   |             |
| آوند                  | ۳۲۷-۳۳۱     |
| بازتابی               | ۱۰۰-۱۰۳     |
| تغییر شکل مسیرها      | ۱۸۳         |
| ماکسیمم قدرمطلق       | ۲۰۱-۲۰۶     |
| اصل آوند              | ۳۲۷-۳۳۱     |
| اصل بازتابی           | ۱۰۰-۱۰۳     |
| اصل ماکسیمم قدرمطلق   | ۲۰۳         |
| اعداد اویلر           | ۲۶۰         |
| اعداد مختلف           | ۳           |
| آوند                  | ۲۰          |
| بهصورت قطبی           | ۲۰          |
| توانهای               | ۱۱۸-۱۲۱، ۲۶ |
| ریشه‌های              | ۱۱۷، ۲۹-۳۱  |
| صورت‌نمایی            | ۱۹-۲۲       |
| قدر مطلقها            | ۱۱-۱۵       |
| قسمتهای حقیقی         | ۴           |
| قسمتهای موهومی        | ۴           |
| مزدوجهای              | ۱۶          |
| ویژگیهای جبری         | ۵-۱۰        |
| اعداد موهومی محض      | ۳           |
| انبساط                | ۴۰۶، ۳۵۰    |
| انتقال                | ۳۵۰، ۴۵     |
| انتگرال               |             |
| برامویج               | ۲۳۶         |
| بیضوی                 | ۴۶۸         |
| حقیقی ناسره           | ۲۹۵-۳۲۲     |
| روی خط                | ۴۱۳، ۱۴۸    |
| روی مسیر              | ۱۴۸-۱۵۱     |
| فرنل                  | ۳۱۱         |
| فوریه                 | ۳۱۴، ۳۰۵    |

- |                                      |                  |
|--------------------------------------|------------------|
| قدرمطلق، ۱۳۹-۱۶۱                     | ۱۵۸-۱۶۱          |
| معین                                 | ۱۳۷-۱۴۱          |
| مقدار اصلی کوشی                      | ۲۹۶-۲۹۷          |
| انتگرال براموج                       | ۳۳۶              |
| انتگرال بیضوی                        | ۴۶۸              |
| انتگرال حقیقی ناسره                  | ۲۹۵-۳۲۲          |
| انتگرال روی خط                       | ۴۱۲، ۱۴۸         |
| انتگرال روی مسیر                     | ۱۴۸-۱۵۱          |
| انتگرال فرنل                         | ۲۱۱              |
| انتگرال فوریه                        | ۳۱۴، ۳۰۵         |
| انتگرال‌های معین                     | ۳۲۵-۳۲۷، ۱۳۷-۱۴۱ |
| اعکاس                                | ۳۵۲              |
| اقباض                                | ۴۰۶، ۳۵۰         |
| بازتاب                               | ۳۵۲، ۱۰۰، ۴۵     |
| باشهای تورتو                         | ۱۸۸              |
| باقیمانده سریها                      | ۲۱۴-۲۱۵          |
| برد تابع                             | ۴۵               |
| بردارها                              | ۱۱-۱۲            |
| بریدگی شاخه‌یی                       | ۱۱۳، ۱۱۴-۴۰۰     |
| انتگرال‌گیری در امتداد یک            | ۳۱۹-۳۲۲          |
| بستار مجموعه                         | ۳۸               |
| بی‌نهایت                             |                  |
| مانده‌ها در                          | ۲۶۸              |
| نقطه در                              | ۶۰               |
| پتانسیل                              |                  |
| الکترواستاتیکی (نگاه کنید به پتانسیل |                  |
| الکترواستاتیکی)                      |                  |
| سرعت                                 | ۴۴۸              |
| مختلط                                | ۴۴۹              |
| پتانسیل الکترواستاتیکی               | ۴۳۸-۴۳۹          |
| استوانه                              | ۴۳۹-۴۴۱          |

- نگاشت با ۴۹-۵۲  
وارون ۴۰۹-۴۱۰  
تابع هولومورف ۸۵  
تابعی زوج ۲۹۶-۲۹۷، ۱۴۱  
تبديلات خطی ۳۴۹-۳۵۱  
تبديل ۴۹۳  
انتگرال ۴۹۳  
انتگرال پواسون ۴۹۳  
انتگرال شوارتس ۵۰۵  
تابع همساز ۴۱۵-۴۱۷  
جدول ۵۱۷-۵۲۷  
خطی ۳۴۹-۳۵۱  
خطی کسری ۳۵۸-۳۶۴  
دوخطی ۳۵۸  
شرایط مرزی ۴۱۷-۴۲۰  
شوارتس-کریستوفل ۴۶۰-۴۸۷  
لاپلاس ۳۳۶  
متوالی ۳۵۲، ۳۵۸-۳۵۹، ۳۶۸-۳۷۱  
 نقطه بحرانی ۴۰۵  
وارون ۳۳۶-۳۳۹  
همدیس ۴۰۲-۴۱۰  
تبديل انتگرال ۴۹۳  
تبديل انتگرال پواسون ۴۹۲  
تبديل انتگرال شوارتس ۵۰۵  
تبديل خطی کسری ۳۵۸-۳۶۰  
تبديل دوخطی ۳۵۸  
تبديل شوارتس-کریستوفل ۴۶۰-۴۸۷  
در چندضلعیهای تباهیده ۴۷۲-۴۷۴  
در مثلث ۴۶۷-۴۷۱  
در مستطیل ۴۷۲  
کراندار ۲۹۲، ۶۴  
گاما ۳۱۹  
گویا ۲۹۷، ۴۳  
مشتق ۶۷-۷۰  
مشتقپذیر ۶۷  
مقدار ۴۱  
منظم ۸۵  
وارون ۳۶۰  
وارون موضعی ۹۶  
هذلولی (نگاه کنید به تابع هذلولی)  
همساز (نگاه کنید به تابع همساز)  
هولومورف ۸۵  
تابع اولیه ۱۸۱، ۱۶۳-۱۶۷  
تابع بتا ۴۶۹، ۳۲۳  
تابع برخه ریخت ۳۲۷-۳۲۹  
تابع پیوسنه ۶۳  
تابع تام ۱۹۹-۲۰۰  
تابع جریان ۴۴۸-۴۵۱  
تابع حقیقی مقدار ۱۵۹، ۱۳۷، ۱۳۵، ۴۲  
تابع ضربه ۵۰۰-۵۰۱  
تابع فرد ۱۴۱  
تابع گاما ۳۱۹  
تابع لگاریتمی ۱۰۹-۱۱۳  
سطوح ریمان ۲۹۳-۳۹۵  
شاخه ۱۱۳  
شاخه اصلی ۱۱۳  
مقدار اصلی ۱۱۱  
نگاشت به وسیله ۳۷۱، ۳۷۰  
تابع مشتقپذیر ۶۷  
تابع منظم ۸۵  
تابع نمایی ۱۲۰، ۱۰۵-۱۰۸

- تبديل متالی ۳۵۲، ۳۵۹، ۳۵۸-۳۷۱، ۳۶۸-۳۷۱  
 تبدیل همدیس ۴۰۲-۴۱۰  
 زاویه دوران ۴۰۳  
 ضریب مقیاس ۴۰۶  
 وارونهای موضعی ۴۰۸  
 تبدیل ۲۳۷  
 تبدیلهای لاپلاس ۳۳۶  
 وارون ۳۳۶-۳۳۹  
 ترکیب تابع پیوسته ۸۶، ۶۳  
 ترکیب خطی ۹۰  
 تشدید ۲۴۸  
 تصویرگنگاری ۶۰  
 تصویر نقطه ۴۴  
 وارون ۴۵  
 تغییر شکل مسیرها ۱۸۳  
 تقسیم برای سری توانی ۲۵۷-۲۵۸  
 تکدما ۴۲۶  
 تکیه‌بی پیوسته ۱۴۸، ۱۳۸  
 توابع بسل ۲۳۷  
 توابع تحلیلی ۸۵-۸۸  
 ترکیب ۸۶  
 حاصلضرب ۸۷  
 خارج قسمت ۲۸۵-۲۸۶، ۸۶  
 صفرهای ۲۹۰-۲۹۱، ۲۸۱-۲۸۵  
 مجموع ۸۶  
 مشتق ۱۹۱-۱۹۵  
 توابع چندمقداری ۳۹۳، ۴۳  
 توابع گویا ۲۹۷، ۴۳  
 توابع مثالثاتی ۱۲۲-۱۳۵  
 اتحادهای ۱۲۲-۱۲۳
- صفرهای ۱۲۳-۱۲۴  
 معکوس ۱۳۱-۱۳۳  
 نگاشت ۳۷۲-۳۷۷  
 توابع هذلولی ۱۲۷-۱۲۹  
 معکوس ۱۳۲-۱۳۳  
 توابع همساز ۴۴۸، ۹۱-۹۶  
 تبدیلهای ۴۱۵-۴۱۷  
 ربع ۵۱۲  
 مزدوج ۴۱۲-۴۱۴، ۹۴  
 مقادیر ماکسیمم و مینیمم ۴۳۸، ۲۰۳-۲۰۵  
 ناحیه نیدایریه‌بی ۵۱۳، ۴۹۸-۴۹۹  
 توابع یک متغیره مختلط ۴۱-۴۳  
 توانهای اعداد مختلط ۱۱۸-۱۲۱، ۲۶  
 جدول تبدیلهای نواحی ۵۱۷-۵۲۷  
 جریان سیال ۴۸۹  
 بستر عمیق ۴۴۹  
 پتانسیل مختلط ۴۵۶  
 حول ورق ۴۵۶  
 حول هواشکن ۴۵۸  
 حول یک استوانه ۴۵۱-۴۵۴  
 حول یک گوشه ۴۵۱-۴۵۳  
 ربع ۴۵۲-۴۵۳  
 غیردورانی ۴۴۷  
 کanal ۴۷۸-۴۸۴  
 گردش ۴۴۶  
 ناحیه زاویه‌بی ۴۵۵  
 نوار نیمه‌نامتناهی ۴۵۵  
 جریان سیال دو بعدی ۴۴۵-۴۴۸  
 چاهک ۴۷۹، ۴۷۸  
 چسبندگی ۴۴۷  
 چشمde ۴۷۹، ۴۷۸

|                      |                |                                  |
|----------------------|----------------|----------------------------------|
| در ورق نیمدايره بی   | ۴۳۷            | چندجمله يهای (ای)                |
| گوشه استوانه بی      | ۴۳۵-۴۳۶        | چبیشف ۲۹                         |
| نیمپیسوسی            | ۴۳۸            | صفرهای ۱۹۹، ۲۰۶، ۳۳۶-۳۳۳         |
| دبباله ها            | ۲۰۹-۲۱۲        | لزاندر ۱۹۷، ۱۴۱                  |
| حد در                | ۲۰۹            | چندجمله يهای چبیشف ۲۹            |
| دوران                | ۳۵۰-۳۵۱، ۴۵    | چندجمله يهای لزاندر ۱۹۷، ۱۴۱     |
| زاویه                | ۴۰۳            | حاصلضرب کوشی ۲۵۵                 |
| سیال                 | ۴۴۷            | حد                               |
| روش جدادسازی متغیرها | ۴۴۴، ۴۳۲       | تابع ۵۳-۵۶                       |
| ریشه خاص             | ۳۲             | مشتمل بر نقطه در بینهایت ۶۰-۶۲   |
| ریشه های اعداد مختلط | ۱۱۶-۱۱۷، ۲۹-۳۱ | دبباله ۲۰۹                       |
| ریمان                | ۷۶             | قضایای درباره ۵۶-۵۹              |
| سطوح                 | ۳۹۳-۴۰۰        | حرارت دادن با فرکانس رادیویی ۳۰۰ |
| قضیه                 | ۲۹۲            | حوزه ۳۸                          |
| کره                  | ۶۰             | اجتماع ۱۰۰                       |
| زاویه                |                | اشتراك ۹۹                        |
| دوران                | ۴۰۳            | تعريف تابع ۴۱                    |
| شیب                  | ۴۰۳، ۱۴۵       | همیند چندگانه ۱۸۰-۱۸۲            |
| ژاکوبی               | ۴۰۹            | همیند ساده ۴۱۳، ۱۸۰-۱۸۱          |
| نوردان               | ۱۴۲            | حوزه اشتراك ۹۹                   |
| ثوزف فوريه           | ۴۲۴            | حوزه همیند چندگانه ۱۸۰-۱۸۳       |
| سرعت سیال            | ۴۴۵            | حوزه همیند ساده ۴۱۳، ۱۸۰-۱۸۲     |
| سری                  | ۲۰۹-۲۶۰        | خطوط جريان ۴۴۹، ۴۲۶              |
| باقيمانده            | ۲۱۴            | خطوط شار ۴۳۹                     |
| تبler                | ۲۱۷-۲۲۰        | دایرة همگرایی ۲۴۰                |
| فوريه                | ۲۳۸            | دستور دوجمله بی ۱۰               |
| لوران                | ۲۲۷-۲۳۲        | دماي پايا ۴۲۴-۴۲۶                |
| مجموع                | ۲۱۲            | در ربع صفحه ۴۳۲-۴۳۴              |
| مجموعه های جزئی      | ۲۱۲            | در نوار نامتناهی ۴۳۶-۴۳۸         |
| مکلورون              | ۲۱۸            | در نوار نيمه نامتناهی ۴۲۹-۴۳۰    |
| هندسي                | ۲۲۳            | در نيم صفحه ۴۲۶-۴۲۹              |

|                                    |              |                    |                  |
|------------------------------------|--------------|--------------------|------------------|
| نواحی در                           | ۳۷-۳۹        | سری تیلر           | ۲۱۷-۲۲۰          |
| صفحهٔ مختلط توسعه‌یافته            | ۳۶۰، ۳۵۲، ۶۰ | سری فوریه          | ۲۳۸              |
| صفر تابع                           | ۲۰۰، ۱۲۴     | سری لوران          | ۲۲۷-۲۲۲          |
| تعداد                              | ۳۳۱-۳۳۶، ۳۲۹ | سری مکلورن         | ۲۱۸              |
| نها                                | ۲۸۳          | سری هندسی          | ۲۲۳              |
| مرتبهٔ                             | ۲۸۵، ۲۸۱     | سریهای توانی       | ۲۱۴              |
| صفرهای توابع تحلیلی نقاط           | نها ۲۸۳      | انتگرال            | ۲۴۵              |
| صورت قطبی                          |              | تقسیم              | ۲۵۴-۲۵۸          |
| عدد مختلط                          | ۱۹           | حاصلضرب کوشی       | ۲۵۵              |
| معادلات کوشی-ریمان                 | ۸۰-۸۳        | ضرب                | ۲۵۴-۲۵۶          |
| صورت مختلط برای معادلات کوشی-ریمان | ۸۵           | مشتق               | ۲۴۷              |
| صورت نمایی اعداد مختلط             | ۱۹-۲۲        | همگرایی            | ۲۳۸-۲۴۲          |
| ضرب سریهای توانی                   | ۲۵۴-۲۵۶      | یکتایی             | ۲۴۸              |
| ضریب مقیاس                         | ۴۰۶          | سیال               |                  |
| عدد                                |              | دوران              | ۴۴۷              |
| پیچش                               | ۳۲۸          | سرعت               | ۴۴۵              |
| مختلط                              | ۳            | غیرقابل تراکم      | ۴۴۷              |
| عدد پیچش                           | ۳۲۸          | فشار               | ۴۴۷              |
| عناصر تابع                         | ۱۰۰          | گردش               | ۴۴۶              |
| فرمول                              |              | سیال غیردورانی     | ۴۴۷              |
| انتگرال پواسون                     | ۴۹۰-۵۱۲      | سیال غیرقابل تراکم | ۴۴۷              |
| انتگرال شوارتس                     | ۵۰۳-۵۰۴      | شاخص اصلی تابع     | ۳۸۱، ۱۲۰، ۱۱۳    |
| انتگرال کوشی                       | ۱۸۹-۱۹۱      | شاخص تابع          | ۱۱۳              |
| اویلر                              | ۲۱           | اصلی               | ۳۸۱، ۱۱۳، ۱۲۰    |
| د موآور                            | ۲۶           | شارگرما            | ۴۴۴              |
| درجة دوم                           | ۳۶           | شدت میدان          | ۴۳۸              |
| دوجمله‌یی                          | ۱۰           | شریط مرزی          | ۴۱۵              |
| فرمول انتگرال پواسون               | ۴۹۰-۵۱۳      | تبديل              | ۴۱۷-۴۲۰          |
| برای قرص                           | ۴۹۳          | شوارتس             | ۴۶۴              |
| برای نیم صفحه                      | ۵۰۳          | صفحةٌ مختلط        | ۳                |
| فرمول انتگرال شوارتس               | ۵۰۳-۵۰۴      | توسعهٔ یافته       | ۳۵۹-۳۶۰، ۳۵۲، ۶۰ |

|                   |                        |                          |               |
|-------------------|------------------------|--------------------------|---------------|
| قضیهٔ موررا       | ۱۹۵                    | فرمول انتگرال کوشی       | ۱۸۹-۱۹۱       |
| قضیه‌های مانده‌ها | ۲۶۸، ۲۶۱               | نیم صفحه ۳               | ۵۰۳           |
| قطب               |                        | فرمول اویلر              | ۲۱            |
| تعداد             | ۳۲۹، ۲۹۱               | فرمول د موآور            | ۲۶            |
| ساده              | ۳۱۲، ۲۸۶، ۲۷۳          | فرمولهای مشتقگیری        | ۷۰-۷۲         |
| مانده در          | ۲۸۶، ۲۷۶-۲۷۷           | فشار سیال                | ۴۴۷           |
| مرتبه             | ۲۷۳، ۲۷۶، ۲۸۰، ۲۸۵-۲۸۶ | قانون فوریه              | ۴۲۴           |
|                   | ۲۹۰                    | قدرمطلق                  | ۱۲-۱۳، ۱۱-۱۳  |
|                   | ۳۲۹                    | تابع                     | ۴۱            |
| قطب ساده          | ۳۱۲، ۲۸۶، ۲۷۳          | قدرمطلقها                | ۱۱-۱۶         |
| قوس               | ۱۴۲                    | انتگرال                  | ۱۵۸-۱۶۱، ۱۳۹  |
| ساده              | ۱۴۲                    | قرص محذوف                | ۲۶۳، ۲۵۷، ۲۲۸ |
| مشتقپذیر          | ۱۴۴                    | قسمت اصلی تابع           | ۲۷۲           |
| هموار             | ۱۴۵                    | قضیه اساسی               |               |
| قوس ساده          | ۱۴۲                    | جبر                      | ۱۹۹           |
| قوس هموار         | ۱۴۵                    | حسابان                   | ۱۶۳، ۱۳۸      |
| قوسی مشتقپذیر     | ۱۴۴                    | قضیه بولسانو-ایشتراوس    | ۲۹۱           |
| کتابنامه          | ۵۱۴-۵۱۶                | قضیه پیکار               | ۲۹۳، ۲۷۴      |
| کراندار           |                        | قضیهٔ تیلر               | ۲۱۷           |
| تابع              | ۲۹۲، ۶۴                | قضیه روشه                | ۳۳۱-۳۳۶       |
| مجموعه            | ۳۸                     | قضیه کازوراتی-ایشتراوس   | ۲۹۳           |
| کریستوفل          | ۴۶۴                    | قضیه کوشی-گورسا          | ۱۷۲-۱۷۴       |
| کوشی              | ۷۶                     | برهان                    | ۱۷۵-۱۸۰       |
| گرادیان           | ۴۲۲-۴۲۳، ۴۱۸-۴۱۹       | تعیین                    | ۱۸۰-۱۸۳       |
| گردش سیال         | ۴۴۶                    | عکس                      | ۱۹۵           |
| گورسا             | ۱۷۵                    | قضیه گرین                | ۴۴۶، ۱۷۳      |
| لم ثوردان         | ۳۰۷-۳۱۰                | قضیه لوران               | ۲۲۷           |
| مانده‌ها          | ۲۶۱-۲۶۶                | قضیهٔ لیوپول             | ۱۹۸-۱۹۹       |
| در بی‌نهایت       | ۲۶۸                    | قضیه مانده کوشی          | ۲۶۶           |
| در قطب            | ۲۸۶، ۲۷۶-۲۷۷           | قضیهٔ مقدار میانگین گاوس | ۲۰۲           |
| کاربردهای         | ۲۹۵-۳۴۸                | قضیهٔ منحنی ثوردان       | ۱۴۵           |
| مجموع سریها       | ۲۱۲                    |                          |               |

- مجموعه باز ۳۸  
 مجموعه بازهمبند ۳۸  
 مجموعه بسته ۳۸  
 مجموعه بیکران ۳۸  
 مجموعه‌های جزئی از سریها ۲۱۲  
 محور حقیقی ۳  
 محور موهومی ۳  
 مختصات  
 قائم ۳  
 قطبی ۸۰-۸۳، ۴۸، ۴۲، ۱۹  
 مختصات دکارتی ۱۱  
 عدد مختلط ۱۱  
 معادلات کوشی-ریمان ۷۶  
 مختصات قطبی ۸۰-۸۳، ۴۸، ۴۲، ۱۹  
 مرعبهای تودرتو ۱۸۸، ۱۷۶  
 مزدوج  
 مختارط ۱۶  
 همساز ۴۱۲-۴۱۷، ۹۴  
 مزدوجهای مختلط ۱۶-۱۷  
 مسیر ۱۴۱-۱۴۵  
 بسته ۱۸۰، ۱۶۴  
 دندانه‌دار ۳۱۲  
 ساده بسته ۱۸۲، ۱۷۲، ۱۴۵  
 مسیر بسته ۱۸۰، ۱۶۴  
 ساده ۱۸۲، ۱۷۲، ۱۴۵  
 مسیر ساده بسته ۱۸۲، ۱۷۲، ۱۴۵  
 مسیرهای دندانه‌دار ۳۱۲-۳۱۶  
 مسئله دیریکله ۴۱۵  
 برای ربع ۵۰۷  
 برای قرص ۴۹۳-۴۹۷  
 برای مستطیل ۴۴۴  
 برای ناحیه خارجی دایره ۴۹۹  
 برای ناحیه نیم‌دایره‌ای ۴۹۸  
 برای نوار نیمه نامتناهی ۴۳۰  
 برای نیم صفحه ۴۲۷، ۵۰۴-۵۰۷، ۵۰۹  
 مسئله مقدار مرزی ۴۱۷، ۴۱۵-۴۹۰  
 مسئله نویمان ۴۱۵  
 برای ناحیه داخلی دایره ۵۱۰  
 برای ناحیه نیم‌دایره‌بی ۵۱۲  
 برای نیم صفحه ۵۱۲  
 قرص ۵۱۰-۵۱۱  
 مشتق ۶۷-۷۰  
 جهتی ۴۲۰، ۸۷  
 وجود ۷۶-۷۷  
 مشتق جهتی ۴۲۰، ۸۷  
 معادلات کوشی-ریمان ۷۴-۷۷  
 در شکل قطبی ۸۰-۸۳  
 شرایط کافی ۷۸-۸۳  
 شرایط لازم ۷۶  
 صورت مختلط ۸۵  
 معادله برنولی ۴۴۷  
 معادله پواسون ۴۲۲  
 معادله درجه دوم ۳۷  
 معادله لاپلاس ۴۴۸، ۴۲۶، ۹۶، ۹۱  
 مقادیر اصلی  
 آوند ۲۰  
 توانهای ۱۲۰  
 کوشی ۲۹۶-۲۹۷  
 لگاریتم ۱۱۱  
 مقادیر ماکسیمم و مینیمم ۱۵۹، ۲۰۳-۲۰۵  
 مقدار اصلی کوشی ۲۹۶-۲۹۷

|                        |                              |                   |
|------------------------|------------------------------|-------------------|
| منحنی                  | ۹۶-۹۷                        | تراز              |
| ۱۴۲                    | ۹۶-۹۸                        | ژوردان            |
| ۱۴۲                    | ۱۴۲                          | ساده بسته         |
| ۱۴۲                    | ۱۴۲                          | منحنی ژوردان      |
| ۱۷۲                    | ۱۷۲                          | جهت مثبت          |
| ۹۶-۹۸                  | ۹۶-۹۸                        | منحنیهای تراز     |
| ۱۹۵                    | ۱۹۵                          | مورا              |
| ۳۴۸                    | ۳۴۸                          | مؤلفه ناپایدار    |
| ۵۳                     | ۵۳                           | میدان برداری      |
| نابرابری               | ۳۰۸                          | ژوردان            |
| کوشی                   | ۱۹۸                          | نابرابری          |
| ۱۹، ۱۳                 | ۱۹، ۱۳                       | مثلثی             |
| نابرابری ژوردان        | ۳۰۸                          | نابرابری          |
| نابرابری کوشی          | ۱۹۸                          | نابرابری          |
| نابرابری مثلثی         | ۱۹، ۱۳                       | نابرابری          |
| نسبت ناهمساز           | ۳۶۲                          | نقطه ایناشتگی     |
| ۳۹                     | ۴۰۵                          | نقطه بحرانی       |
| ۸۶                     | ۱۱۸-۱۲۱                      | نقطه تکین         |
| ۲۹۳-۲۹۴، ۲۷۴           | ۳۷-۳۹                        | اساسی             |
| ۲۹۲، ۲۷۳               | ۱۶۳، ۱۵۴                     | برداشتی           |
| ۲۶۱                    | وارون                        | نها               |
| ۲۷۴                    | تابع                         | نقطه تکین اساسی   |
| ۲۹۳، ۲۷۴               | تبديل $\approx$              | رفتار در نزدیکی   |
| ۲۹۲، ۲۷۳               | ۳۳۶-۳۳۹                      | نقطه تکین برداشتی |
| ۲۶۱                    | تصویر نقطه                   | نقطه تکین中华       |
| ۴۸۰                    | ۴۰۸                          | نقطه توقف         |
| ۳۶۴                    | ۴۹۰، ۳۵۲                     | نقطه ثابت         |
| ۳۶۹                    | به وسیله تابع لگاریتمی       |                   |
| ۳۷۲-۳۷۷                | به وسیله تابع مثلثاتی        |                   |
| ۴۹-۵۲                  | تابع نمایی                   |                   |
| ۴۰۵                    | حافظ                         |                   |
| ۴۶۰-۴۶۲                | محور حقیقی به روی یک چندضلعی |                   |
| ۴۰۵                    | نگاشت حافظ                   |                   |
| ۴۲۴-۴۳۲، ۴۰۲-۴۲۴       | نگاشت همدیس                  |                   |
| ۴۲۴-۴۵۴                | کاربردهای                    |                   |
| ۴۱۰                    | ویژگیهای                     |                   |
| ۳۶۹، ۳۶۰، ۳۵۲، ۴۵-۴۹   | نگاشت یک به یک               |                   |
| ۳۹۵، ۳۹۰، ۳۸۱، ۳۷۳-۳۷۶ |                              |                   |
|                        | نمای مختلط                   |                   |
|                        | ۱۱۸-۱۲۱                      |                   |
|                        | نواحی در صفحه مختلط          |                   |
|                        | ۳۷-۳۹                        |                   |
|                        | وابسته به مسیر               |                   |
|                        | ۱۶۳، ۱۵۴                     |                   |
|                        | وارون                        |                   |
|                        | ۳۵۹                          |                   |
|                        | تابع                         |                   |
|                        | ۲۳۷ $\approx$                |                   |
|                        | تبديل $\approx$              |                   |
|                        | ۳۳۶-۳۳۹                      |                   |
|                        | تب diligهای لایپلش           |                   |
|                        | ۴۵                           |                   |
|                        | تصویر نقطه                   |                   |
|                        | ۴۰۸                          |                   |
|                        | موقعی                        |                   |
|                        | ۴۹۰، ۳۵۲                     |                   |

|                   |              |                       |          |
|-------------------|--------------|-----------------------|----------|
| همگرایی دنباله‌ها | ۲۰۹-۲۱۲      | وارونهای موضعی        | ۴۰۸      |
| همگرایی سریها     | ۲۱۲-۲۱۵      | هدایت گرمایی          | ۴۲۴      |
| دایره             | ۲۴۰          | هسته پواسن            | ۴۹۲      |
| مطلق، ۲۱۴         | ۲۳۸-۲۴۰      | همپتانسیل             | ۴۴۸، ۴۳۹ |
| یکنواخت           | ۲۴۰          | همسایگی               | ۳۷-۳۸    |
| همگرایی مطلق      | ۲۳۸-۲۴۰، ۲۱۴ | محذوف                 | ۳۷       |
| همگرایی یکنواخت   | ۲۴۰          | نقشه در بینهایت       | ۶۰       |
| هواشکن ژوکوفسکی   | ۴۵۷          | همسایگی محذوف         | ۳۹       |
| هیدرودینامیک      | ۴۴۵          | همگرایی انتگرال ناسره | ۲۹۵-۲۹۷  |