فصل ۱۵

نوسان

۱۵-۱ حرکت هماهنگ ساده

هدف‌های یادگیری

پس از خواندن این واحد، باید بتوانید...

۱۵-۰۱ حرکت هماهنگ ساده را از دیگر انواع حرکت‌های دوره‌ای تمیز دهید.

۱۵-۰۲ برای هر نوسانگر هماهنگ ساده، با استفاده از رابطهٔ بین مکان x و زمان t، هر یک از این دو کمیت را با در دست داشتن کمیت دیگر به‌دست آورید.

۱۵-۰۳ رابطهٔ میان دورهٔ حرکت T، بسامد f، و بسامد زاویه‌ای ω را به‌دست آورید.

۱۵-۰۴ دامنهٔ (جابه‌جایی) x_m، ثابت فاز (یا زاویهٔ فاز) ϕ، و فاز $\omega t+\phi$ را شناسایی کنید.

۱۵-۰۵ با ترسیم طرح ساده‌ای از نمودار مکان x نوسانگر برحسب زمان t، دامنهٔ x_m و دورهٔ حرکت T را مشخص کنید.

۱۵-۰۶ از روی نمودار مکان برحسب زمان، سرعت برحسب زمان، یا شتاب برحسب زمان، دامنهٔ حرکت و اندازهٔ ثابت فاز ϕ را به‌دست آورید.

۱۵-۰۷ روی نمودار مکان x برحسب زمان t، اثرات تغییر دورهٔ حرکت T، تغییر بسامد f، تغییر دامنهٔ x_m، یا تغییر ثابت فاز ϕ را توضیح دهید.

۱۵-۰۸ تشخیص بدهید که ثابت فاز ϕ متناظر با مبدأ زمان $(t=0)$ برای حرکت هماهنگ سادهٔ یک ذره در وقتی است که ذره دارای بیشترین فاصله از وضعیت تعادل است یا وقتی که ذره از نقطهٔ مرکزی می‌گذرد.

۱۵-۰۹ با در دست داشتن مکان $x(t)$ یک نوسانگر به‌صورت تابعی از زمان، سرعت $v(t)$ آن را برحسب زمان پیدا کنید، دامنهٔ سرعت v_m را درنتیجهٔ حاصل شناسایی کنید، و سرعت را در هر لحظهٔ دلخواه به‌دست آورید.

۱۵-۱۰ با ترسیم طرح ساده‌ای از نمودار سرعت v یک نوسانگر برحسب زمان t، دامنهٔ سرعت v_m را مشخص کنید.

۱۵-۱۱ از رابطهٔ میان دامنهٔ سرعت v_m، بسامد زاویه‌ای ω، و دامنهٔ جابه‌جایی x_m استفاده کنید.

۱۵-۱۲ با در دست داشتن سرعت $v(t)$ یک نوسانگر به‌صورت تابعی از زمان، شتاب $a(t)$ آن را به‌عنوان تابعی از زمان محاسبه کنید، دامنهٔ a_m شتاب را در نتیجه مشخص کنید، و شتاب را در هر زمان دلخواه به‌دست آورید.

۱۵-۱۳ طرح ساده‌ای از نمودار شتاب a نوسانگر را برحسب زمان t رسم کنید، و دامنهٔ a_m شتاب را مشخص کنید.

۱۵-۱۴ نشان دهید که برای هر نوسانگر هماهنگ ساده، شتاب a در هر لحظه همواره به‌صورت حاصل‌ضرب یک ضریب ثابت منفی و جابه‌جایی x در آن لحظه داده می‌شود.

۱۵-۱۵ در هر لحظهٔ دلخواه از نوسان، رابطهٔ میان شتاب a، بسامد زاویه‌ای ω، و جابه‌جایی x را به‌کار ببرید.

۱۵-۱۶ با در دست داشتن مکان x و سرعت v در یک لحظه، فاز $\omega t+\phi$ و ثابت فاز ϕ را به‌دست آورید.

۱۵-۱۷ برای نوسانگر قطعه-فنر، رابطهٔ میان ثابت فنر k و جرم m و یکی از دو کمیت دورهٔ حرکت T یا بسامد زاویه‌ای ω را به‌کار بگیرید.

۱۵-۱۸ با استفاده از قانون هوک، ارتباط میان نیروی F وارد بر نوسانگر هماهنگ ساده در هر لحظه و جابه‌جایی x نوسانگر در همان لحظه را مشخص کنید.

نکته‌های اصلی

● بسامد f حرکت دوره‌ای یا نوسانی همان تعداد نوسان‌ها در هر ثانیه است. در دستگاه یکاهای SI، بسامد برحسب هرتز اندازه‌گیری می‌شود. $1\ \text{Hz} = 1\ \text{s}^{-1}$.

● دورهٔ حرکت T، مدت زمان لازم برای تحقق یک نوسان کامل یا چرخهٔ کامل است. دورهٔ حرکت با معادلهٔ $T = 1/f$ با بسامد در ارتباط است.

● در حرکت هماهنگ ساده (SHM)، جابه‌جایی $x(t)$ ذره از مکان تعادلی‌اش با معادلهٔ زیر داده می‌شود

$$x = x_m \cos(\omega t + \phi) \quad \text{(جابه‌جایی)}$$

که در آن x_m دامنهٔ جابه‌جایی، $\omega t + \phi$ فاز حرکت، و ϕ ثابت فاز است. بسامد زاویه‌ای ω طبق معادلهٔ $\omega = 2\pi/T = 2\pi f$ با دورهٔ حرکت و بسامد حرکت در ارتباط است.

● مشتق‌گیری از $x(t)$ به معادله‌هایی برای سرعت و شتاب حرکت هماهنگ سادهٔ ذرهٔ موردنظر برحسب زمان می‌انجامد:

$$v = -\omega x_m \sin(\omega t + \phi) \quad \text{(سرعت)}$$

و

$$a = -\omega^2 x_m \cos(\omega t + \phi) \quad \text{(شتاب)}$$

در تابع سرعت، کمیت مثبت ωx_m دامنهٔ سرعت یعنی v_m است. در تابع شتاب، کمیت مثبت $\omega^2 x_m$ دامنهٔ شتاب یعنی a_m است.

● هر ذره‌ای به جرم m که تحت تأثیر نیروی بازگردانندهٔ قانون هوک در حرکت باشد، یعنی $F = -kx$، یک نوسانگر هماهنگ سادهٔ خطی است که بسامد و دورهٔ حرکت آن عبارت‌اند از

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{(بسامد زاویه‌ای)}$$

و

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad \text{(دوره)}$$

فیزیک مورد بحث

دنیای ما سرشار از نوسان‌هایی است که در آن‌ها اجسام به‌طور پی‌درپی حرکت رفت و برگشت دارند. بسیاری از این نوسان‌ها فقط سرگرم‌کننده یا آزار دهنده‌اند، اما بسیاری دیگر هم به‌لحاظ مالی مورد توجه یا خطرناک‌اند. چند نمونه را در این‌جا نام می‌بریم: هنگامی که چوب بیسبال به توپ آن ضربه می‌زند، چوب بیسبال ممکن است آن‌چنان شدید به نوسان درآید که دست‌های بازی‌کن را به درد آورد یا حتی باعث شکسته شدن چوب شود. خط هوایی انتقال برق وقتی با وزش باد روبه‌رو می‌شود، نوسان‌های پدید آمده در آن ممکن است آن‌چنان شدید باشد که پاره شدن سیم‌ها و قطع برق منطقه‌ای مسکونی را در پی داشته باشد. بال‌های هواپیمای در حال پرواز هم بر اثر تلاطم هوای در حال عبور به نوسان درمی‌آیند، و همین نوسان‌ها هستند که سرانجام به خستگی فلز به‌کار رفته در بال و حتی از کار افتادگی بال منجر می‌شوند. هنگامی که قطاری پیچ جاده‌ای را دور می‌زند، چرخ‌های آن در حین تغییر جهت آن‌چنان به نوسان درمی‌آیند که صدای این نوسان‌ها قابل شنیدن می‌شود.

در زمان وقوع زمین لرزه در مجاورت شهرها، ارتعاش‌های ایجاد شده در ساختمان‌ها ممکن است به قدری شدید باشند که تخریب و فروریزی آن‌ها را در پی داشته باشند. هنگامی که پیکانی از کمانی پرتاب می‌شود، به دلیل نوسان‌های پیکان، پرهای انتهای پیکان بی هیچ برخوردی با آن به حرکت مارپیچی حول مسیر ادامه می‌دهند. وقتی که سکه‌ای را در کاسه‌ای فلزی می‌اندازیم، سکه با چنان زنگ شناخته‌شده‌ای به نوسان درمی‌آید که ارزش اسمی آن را از صدایش می‌توان تشخیص داد. در نمایش گاوچران‌ها،

هنگامی‌که گاوچرانی سوار یک گاوِ نر می‌شود، خودش همراه با جَست‌وخیز و پیچ‌وتاب گاو به نوسان درمی‌آید (یا دست‌کم انتظار دارد که به نوسان درآید).

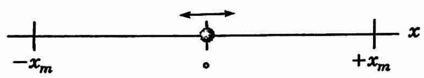
بررسی و کنترل نوسان‌ها را باید دو هدف اصلی فیزیک و مهندسی به‌شمار آورد. در این فصل یک نوع نوسان اساسی را، که حرکت هماهنگ ساده نامیده می‌شود، بررسی خواهیم کرد.

پیش‌آگاهی. این مبحث برای بیشتر دانشجویان چالش‌برانگیز است. یکی از دلایل آن این است که با خرواری از تعاریف و نمادها روبه‌رو می‌شوند که باید بیاموزند، اما دلیل اصلی این است که لازم است نوسان‌های هر جسم (که چیزی قابل مشاهده و حتی قابل تجربه است) با معادله‌ها و نمودارهاشان مرتبط شوند. ارتباط دادن حرکت واقعی و قابل مشاهده به موجودات انتزاعی مانند معادله‌ها و نمودارها به تلاش درخور توجهی نیاز دارد.

حرکت هماهنگ ساده

شکل ۱۵-۱، ذره‌ای را با حرکت نوسانی حول مبدأ محور x نشان می‌دهد که مدام به مقدار یکسان به‌چپ و راست این نقطه جابه‌جا می‌شود. بسامد f **حرکت نوسانی** تعداد چرخه‌ها یا نوسان‌های کامل آن در هر ثانیه است که یکای اندازه‌گیری آن در دستگاه SI هرتز (Hz) است:

$$1\ \text{هرتز} = 1\ \text{Hz} = \text{۱ نوسان در هر ثانیه} = 1\ \text{s}^{-1} \qquad (۱۵-۱)$$



شکل ۱۵-۱ ذره‌ای که بین دو نقطهٔ حدی x_m و $-x_m$ در امتداد محور x مدام به چپ و راست با حرکت تکراری در نوسان است.

مدت زمان لازم برای وقوع یک نوسان کامل (یا چرخه) را **دورهٔ حرکت**، T، می‌گویند که به‌صورت زیر با بسامد در ارتباط است

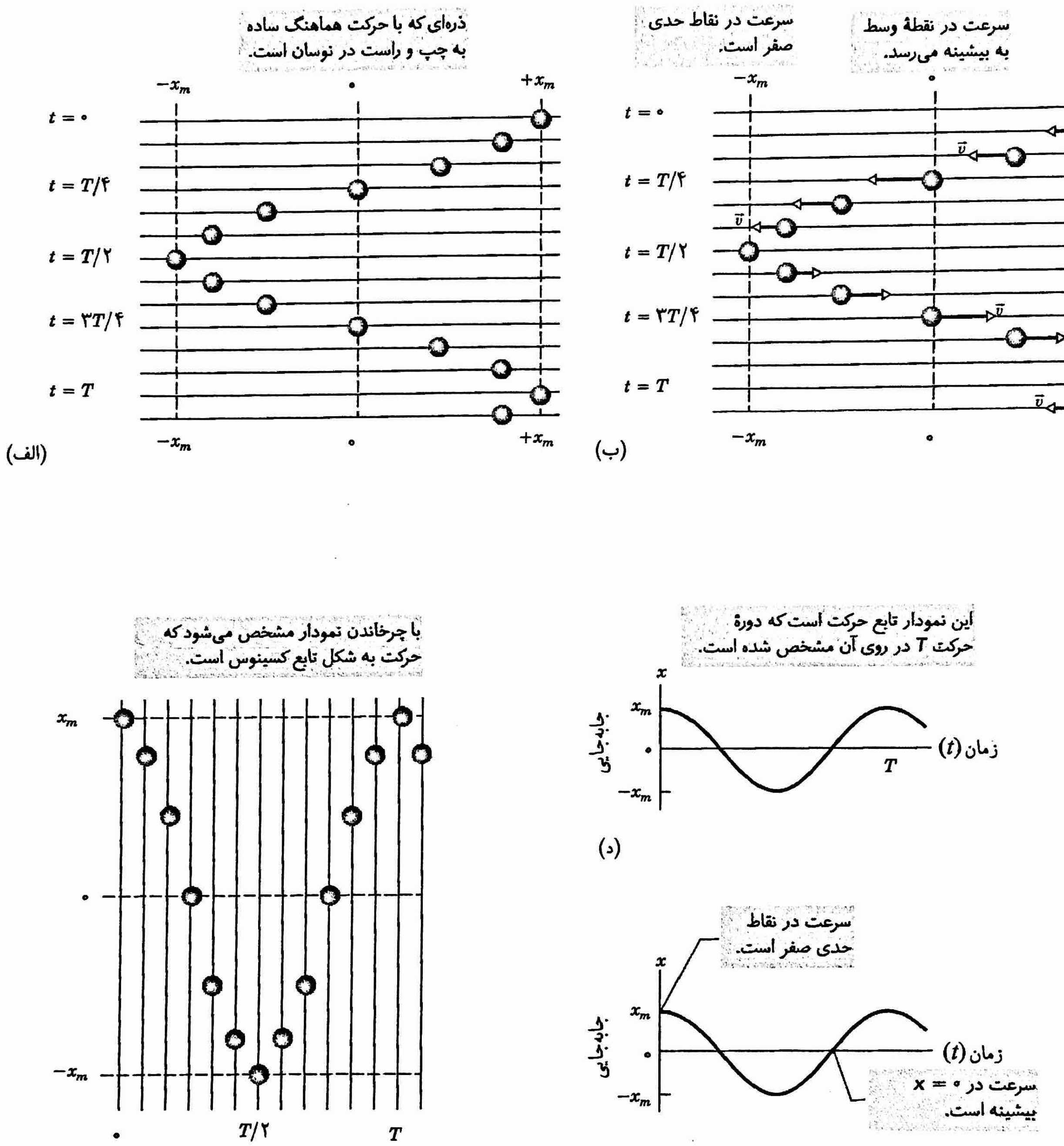
$$T = \frac{1}{f} \qquad (۱۵-۲)$$

هر نوع حرکتی که در فواصل زمانی منظم تکرارشونده باشد، حرکت دوره‌ای یا حرکت هماهنگ نامیده می‌شود. اما در این‌جا به نوع خاصی از حرکت دوره‌ای به‌نام **حرکت هماهنگ ساده** (SHM) علاقه داریم. چنین حرکتی با یک تابع سینوسی از زمان t قابل نمایش است. به‌عبارت دیگر، می‌توان آن را به‌صورت سینوس یا کسینوس زمان t نوشت. در این‌جا به‌طور دلخواه تابع کسینوس را انتخاب می‌کنیم و جابه‌جایی (یا مکان) ذره را در شکل ۱۵-۱ به این صورت می‌نویسیم

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \phi) \qquad \text{(جابه‌جایی)} \qquad (۱۵-۳)$$

که در آن x_m، ω، و ϕ کمیت‌هایی‌اند که تعریف خواهیم کرد.

عکس‌های متوالی. بیایید تعدادی از عکس‌های متوالی برداشته شده از حرکت را پشت سر هم روی صفحهٔ کاغذ قرار دهیم (شکل ۱۵-۲ الف). اولین عکس در $t = 0$



شکل ۱۵-۲ (الف) مجموعه‌ای از «عکس‌های» متوالی (در بازه‌های زمانی یکسان) که مکان ذرهٔ نوسان کننده را در حرکت رفت و برگشت حول مبدأ محور x، بین دو حد $+x_m$ و $-x_m$، نشان می‌دهد. (ب) پیکان‌های برداری با مقیاسی که معرف سرعت ذره است، رسم شده‌اند. مقدار سرعت وقتی ذره در مبدأ است به بیشینه می‌رسد، و وقتی در مکان $\pm x_m$ قرار می‌گیرد به صفر می‌رسد. اگر صفر زمان t را چنان برگزینیم که ذره در مکان $+x_m$ باشد، بازگشت ذره به $+x_m$ در زمان $t = T$ اتفاق می‌افتد، که در آن T دورهٔ حرکت است. در این صورت، حرکت تکرار شونده است. (ج) با چرخاندن نمودار تابع کسینوسی بودن حرکت آشکار می‌شود که آن را در شکل (د) به‌صورت تابعی از زمان می‌بینیم. (هـ) سرعت (یا شیب نمودار) تغییر می‌کند.

است، یعنی هنگامی‌که ذره در نقطهٔ حدی راست روی محور x قرار گرفته است. این نقطه را با x_m مشخص می‌کنیم (که در آن شاخص m نشانهٔ بیشینه است)؛ همین نماد x_m است که جلوی تابع کسینوس در معادلهٔ ۱۵-۳ قرار گرفته است. در عکس بعدی، ذره کمی به طرف چپ x_m جابه‌جا شده است. ذره به حرکت خود در جهت منفی x همچنان ادامه می‌دهد تا به نقطه‌ای می‌رسد که از همه بیشتر در طرف چپ یعنی در مختصهٔ $-x_m$ قرار می‌گیرد. به این ترتیب، با گذشت زمان، به عکس‌های متوالی بعدی می‌رسیم که ما را به پایین صفحه می‌کشاند. ذره به x_m برمی‌گردد و از این پس به‌طور مکرر بین x_m و $-x_m$ نوسان می‌کند. در معادلهٔ ۱۵-۳، خودِ تابع کسینوس بین ۱+ و ۱− نوسان می‌کند. مقدار x_m تعیین می‌کند که ذره در نوسان‌های خود تا چه حد حرکت می‌کند. x_m را **دامنهٔ نوسان** می‌گویند (که در نمودار راهنمای ۱۵-۳ آمده است).

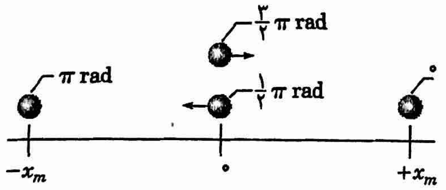
$$\overbrace{x(t)}^{\text{جابه‌جایی در زمان } t} = \underbrace{x_m}_{\text{دامنه}} \cos\overbrace{(\underbrace{\omega}_{\text{بسامد زاویه‌ای}} \underbrace{t}_{\text{زمان}} + \underbrace{\phi}_{\text{ثابت فاز یا زاویهٔ فاز}})}^{\text{فاز}}$$

شکل ۱۵-۳ نموداری راهنما که همهٔ کمیت‌های معادلهٔ ۱۵-۳ را در حرکت هماهنگ ساده نشان می‌دهد.

شکل ۱۵-۲ ب، سرعت ذره را برحسب زمان به همان صورت مجموعهٔ عکس‌های متوالی نشان می‌دهد. به‌زودی به تابع سرعت می‌رسیم، اما در این‌جا فقط باید توجه داشت که ذره به‌طور لحظه‌ای در نقطه‌های حدی می‌ایستد و بیشینهٔ سرعت خود را (یعنی درازترین بردار سرعت را) هنگام عبور از نقطهٔ وسط به‌دست می‌آورد.

حال، به‌طور ذهنی شکل ۱۵-۲ الف را به‌اندازهٔ °۹۰ درجهت پاد ساعتگرد می‌چرخانیم تا عکس‌های متوالی در طول زمان به طرف راست قرار بگیرند. زمان $t = 0$ را هنگامی درنظر می‌گیریم که ذره در x_m است. ذره در زمان $t = T$ دوباره به x_m برگشته است (که همان دورهٔ حرکت است)، و چرخهٔ بعدی نوسان را در این هنگام شروع می‌کند. اگر تعداد عکس‌های متوالی را بیشتر کنیم تا زمان‌های بیشتری را بپوشاند و سپس خطی را از موقعیت‌های مکانی بگذرانیم، منحنی کسینوس شکل ۱۵-۲ د به‌دست می‌آید. آنچه دربارهٔ سرعت گفته شد، در شکل ۱۵-۲ هـ نشان داده شده است. نمودارهای شکل ۱۵-۲، تبدیلی است از آنچه مشاهده می‌کنیم، یعنی واقعیت نوسان ذره را به شکل انتزاعی نمودار درآورده‌ایم. معادلهٔ ۱۵-۳، روشی دقیق برای تبدیل و تثبیت حرکت ذره در قالب انتزاعی یک معادله است.

باز هم کمیت‌های دیگر. شکل ۱۵-۳ نمودار راهنمایی است که کمیت‌های بیشتری از حرکت در آن تعریف شده‌اند. متغیر تابع کسینوس، **فاز** حرکت نام دارد. تغییرات آن در طول زمان، مقدار تابع کسینوس را تغییر می‌دهد. ثابت ϕ **زاویهٔ فاز** یا **ثابت فاز** نام دارد و به این دلیل قسمتی از متغیر تابع کسینوس است که می‌خواهیم حرکت ذره را مستقل از موقعیت مکانی ذره هنگامی‌که زمان را صفر می‌گیریم، با معادلهٔ ۱۵-۳ توصیف کنیم. در شکل ۱۵-۲، مبدأ زمان یعنی $t = 0$ را هنگامی درنظر گرفته‌ایم که ذره در x_m است. برای این انتخاب، معادلهٔ ۱۵-۳ به‌ازای $\phi = 0$ برقرار می‌شود. اما اگر $t = 0$ را برای هنگامی که ذره در مکانی دیگر است انتخاب کنیم، به مقدار دیگری از ϕ نیاز خواهیم داشت. در شکل ۱۵-۴، چند مقدار نشان داده شده‌اند. مثلاً اگر مبدأ



شکل ۱۵-۴ مقادیر ϕ متناظر با موقعیت مکانی ذره در زمان $t = 0$.

زمان و راه‌اندازی ساعت در $t = ۰$ را چنان درنظر بگیریم که ذره در نقطهٔ حدی‌اش در طرف چپ قرار داشته باشد، معادلهٔ ۱۵-۳حرکت را به‌ازای $\phi = \pi$ rad توصیف می‌کند. برای امتحان، کافی است $t = ۰$ و $\phi = \pi$ rad را در معادلهٔ ۱۵-۳ جاگذاری کنیم و ببینیم آیا $x = -x_m$ حاصل می‌شود یا نه. حال مقادیر دیگری را که در شکل ۱۵-۴ آمده‌اند، خودتان بررسی کنید.

کمیت ω در معادلهٔ ۱۵-۳ **بسامد زاویه‌ای حرکت** نامیده می‌شود. برای یافتن ارتباط آن با بسامد f و دورهٔ حرکت T، ابتدا توجه می‌کنیم که مکان $x(t)$ ذره می‌بایست (طبق تعریف) در انتهای دورهٔ حرکت به مقدار اولیه‌اش برگردد. به‌عبارت دیگر، اگر $x(t)$ مکان ذره در زمان انتخابی t باشد، ذره می‌بایست در زمان $t + T$ به همان موقعیت مکانی‌اش بازگشته باشد. بگذارید با استفاده از معادلهٔ ۱۵-۳ این شرط را برقرار کنیم، و درضمن از $\phi = ۰$ استفاده می‌کنیم تا دیگر با وابستگی به ϕ سروکار نداشته باشیم. در این صورت، بازگشت به موقعیت مکانی اولیه را می‌توان چنین نوشت:

$$x_m \cos \omega t = x_m \cos \omega (t + T) \qquad (۱۵\text{-}۴)$$

اولین دفعه‌ای که تابع کسینوس خودش را تکرار می‌کند هنگامی است که متغیر (یا فاز) آن به مقدار ۲π rad افزایش یافته است. پس طبق معادلهٔ ۱۵-۴، داریم

$$\omega(t + T) = \omega t + ۲\pi$$

یا

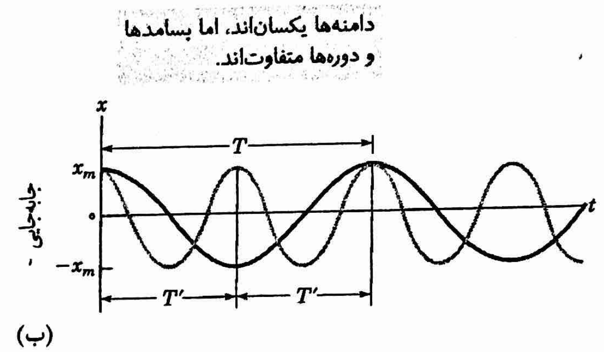
$$\omega T = ۲\pi$$

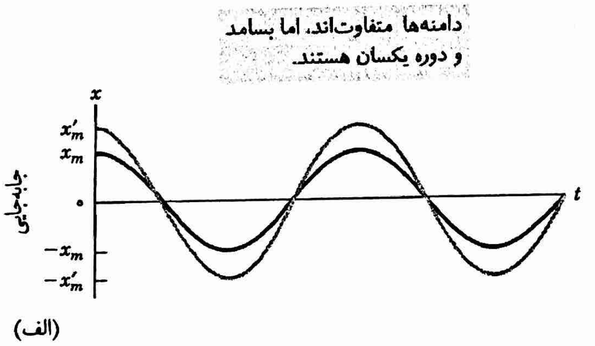
به این ترتیب، با استفاده از معادلهٔ ۱۵-۲، ارتباط بسامد زاویه‌ای با بسامد را چنین می‌یابیم

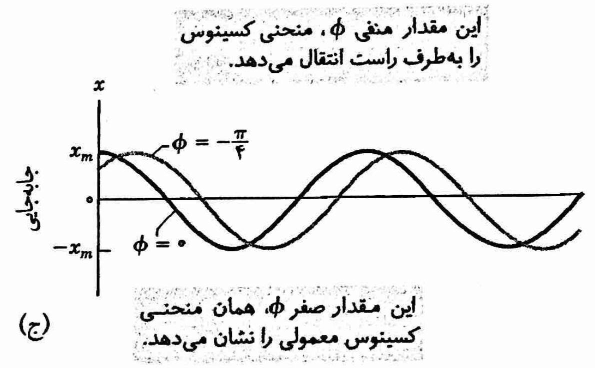
$$\omega = \frac{۲\pi}{T} = ۲\pi f \qquad (۱۵\text{-}۵)$$

یکای بسامد زاویه‌ای در دستگاه SI رادیان بر ثانیه است.

تا این‌جا با کمیت‌های زیادی سروکار داشته‌ایم، کمیت‌هایی که به‌طور آزمایشی می‌توان آن‌ها را تغییر داد تا نتیجهٔ تغییرات‌شان را در حرکت هماهنگ سادهٔ ذره مشاهده کنیم. شکل ۱۵-۵، چند نمونه را نشان می‌دهد. منحنی‌های شکل ۱۵-۵الف، نتیجه‌های تغییر دامنه را نشان می‌دهند. هر دو منحنی دورهٔ حرکت یکسان دارند. (دقت کنید که «قله‌ها» چگونه با هم و همزمان رخ می‌دهند.) هر دو منحنی هم به‌ازای $\phi = ۰$ رسم شده‌اند. (توجه کنید که بیشینه‌های هر دو منحنی در $t = ۰$ قرار دارند.) در شکل ۱۵-۵ب، هر دو منحنی دارای دامنهٔ یکسان x_m هستند اما دورهٔ حرکت یکی دو برابر دورهٔ حرکت دیگری است (و بنابراین بسامدش نصف می‌شود). فهمیدن شکل ۱۵-۵ج احتمالاً دشوارتر است. هر دو منحنی دامنه‌های یکسان و دوره‌های یکسان دارند، اما یکی نسبت به دیگری انتقال یافته است و این به‌خاطر مقادیر مختلف ϕ است. دقت کنید







شکل ۱۵-۵ در هر سه حالت، منحنی کم‌رنگ از معادلهٔ ۱۵-۳ و با قرار دادن $\phi = ۰$ به‌دست می‌آید. (الف) تنها تفاوت منحنی پررنگ با منحنی کم‌رنگ این است که دامنهٔ x'_m منحنی پررنگ بزرگ‌تر است (حدهای بالا و پایین جابه‌جایی منحنی پررنگ بالاتر و پایین‌ترند). (ب) تنها تفاوت منحنی پررنگ با منحنی کم‌رنگ این است که دورهٔ منحنی پررنگ برابر است با $T' = T/۲$ (منحنی پررنگ در راستای افقی فشرده شده است). (ج) تنها تفاوت منحنی پررنگ با منحنی کم‌رنگ این است که ثابت فاز منحنی پررنگ، به‌جای آن‌که صفر باشد، برابر $\phi = -\pi/۴$ rad است (مقدار منفی ϕ منحنی پررنگ را به طرف راست انتقال داده است).

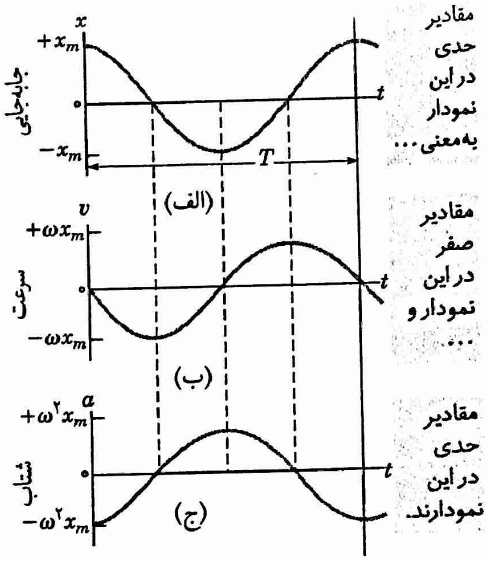
که منحنی با $\phi = ۰$ صرفاً همان منحنی کسینوس معمولی است؛ منحنی با ϕ منفی نسبت به آن به طرف راست منتقل شده است. این نتیجهٔ کلی است: مقادیر منفی ϕ منحنی کسینوس معمولی را به‌طرف راست و مقادیر مثبت ϕ آن را به‌طرف چپ منتقل می‌کنند. (می‌توانید این نتیجه را با استفاده از ماشین حسابی که منحنی هم رسم می‌کند، بیازمایید.)

☑ خودآزمایی ۱

ذره‌ای که دارای نوسان هماهنگ ساده با دورهٔ T است (مانند شکل ۱۵-۲)، در زمان $t = ۰$ در مکان $-x_m$ قرار دارد. آیا این ذره در زمان (الف) $t = ۲{,}۰۰T$، (ب) $t = ۳{,}۵۰T$، و (ج) $t = ۵{,}۲۵T$ در مکان $-x_m$، در $+x_m$، در مبدأ $x = ۰$، بین $-x_m$ و مبدأ، یا بین مبدأ و $+x_m$ قرار می‌گیرد؟

سرعت در حرکت هماهنگ ساده

دربارهٔ سرعت در شکل ۱۵-۲ ب به‌طور مختصر بحث کردیم و دریافتیم که اندازه و جهت آن با حرکت ذره بین نقاط حدی تغییر می‌کند؛ سرعت در این نقاط به‌طور لحظه‌ای صفر می‌شود و این در حالی است که هنگام گذر ذره از نقطهٔ وسط به بیشینه



شکل ۱۵-۶ (الف) نمودار جابه‌جایی $x(t)$ ذرهٔ نوسان‌کننده با حرکت هماهنگ ساده در حالتی که زاویهٔ فاز ϕ برابر صفر است. دورهٔ T حاکی از تحقق یک نوسان کامل است. (ب) نمودار سرعت $v(t)$ همان ذرهٔ نوسان‌کننده. (ج) نمودار شتاب $a(t)$ همان ذره.

بیشینه می‌رسد. برای پیدا کردن سرعت $v(t)$ به‌صورت تابعی از زمان، از تابع مکان $x(t)$ که با معادلهٔ ۱۵-۳ داده شده است نسبت به زمان مشتق می‌گیریم:

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \frac{d}{dt}[x_m \cos(\omega t + \phi)]$$

یا

$$v(t) = -\omega x_m \sin(\omega t + \phi) \quad \text{(سرعت)} \qquad (۱۵-۶)$$

چون تابع سینوسی در طول زمان بین مقادیر ۱+ تا ۱- تغییر می‌کند، سرعت به زمان بستگی دارد. کمیت‌های جلوی تابع سینوسی میزان این تغییرات سرعت را بین $+\omega x_m$ و $-\omega x_m$ به‌دست می‌دهند. ωx_m را **دامنهٔ سرعت** v_m در تغییرات سرعت می‌نامیم. هنگامی‌که ذره درگذر از $x = 0$ به سمت راست در حرکت است، سرعتش مثبت و اندازهٔ سرعتش برابر مقدار بیشینه است. هنگامی‌که ذره در عبور از $x = 0$ به طرف چپ در حرکت است، سرعتش منفی است و اندازهٔ سرعتش دوباره برابر مقدار بیشینه است. این تغییرات زمانی (یک تابع سینوسی منفی) در نمودار شکل ۱۵-۶ب به‌ازای ثابت فاز $\phi = 0$ نشان داده شده است، و این متناظر است با تابع کسینوسی برای جابه‌جایی برحسب زمان که در شکل ۱۵-۶ الف آمده است.

یادآور می‌شویم که صرف‌نظر از مکان ذره در $t = 0$، از تابع کسینوسی برای نمایش $x(t)$ استفاده می‌کنیم. برای آن که معادلهٔ ۱۵-۳ مکان صحیح ذره را در $t = 0$ به‌دست بدهد، کافی است از مقدار مناسبی برای ϕ استفاده کنیم. تصمیم به استفاده از تابع کسینوسی برای مکان، به تابع سینوسی منفی برای سرعت می‌انجامد که در معادلهٔ ۱۵-۶ آمده است، و مقدار ϕ اکنون منجر به سرعت صحیح در $t = 0$ می‌شود.

شتاب در حرکت هماهنگ ساده

بیایید گامی دیگر به پیش برویم و از تابع سرعت که در معادلهٔ ۱۵-۶ آمده است، نسبت به زمان مشتق‌گیری کنیم تا به تابع شتاب ذره در حرکت هماهنگ ساده برسیم:

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d}{dt}[-\omega x_m \sin(\omega t + \phi)]$$

یا

$$a(t) = -\omega^2 x_m \cos(\omega t + \phi) \quad \text{(شتاب)} \qquad (۱۵-۷)$$

دوباره به تابع کسینوسی رسیده‌ایم، اما این بار با یک علامت منفی در جلوی آن. از این به بعدش را دیگر می‌دانیم. شتاب به این دلیل متغیر است که تابع کسینوسی با زمان، بین ۱+ و ۱-، تغییر می‌کند. تغییرات اندازهٔ شتاب با **دامنهٔ شتاب** a_m تعیین می‌شود که برابر است با حاصل‌ضرب دو کمیت به‌صورت $\omega^2 x_m$ و خود ضریبی برای تابع کسینوسی است.

شکل ۱۵-۶ ج، معادلهٔ ۱۵-۷ را به‌ازای ثابت فازه $= \phi$ نشان می‌دهد که با شکل‌های ۱۵-۶ الف و ۱۵-۶ ب سازگاری دارد. توجه کنید که کسینوس وقتی صفر می‌شود که ذره در $x = ۰$ باشد و در همین وضعیت است که اندازهٔ شتاب برابر صفر است. اندازهٔ شتاب هنگامی به بیشینه می‌رسد که اندازهٔ کسینوس بیشینه شود، و این هم هنگامی است که ذره در نقطهٔ حدی قرار بگیرد که در این وضعیت به توقف درمی‌آید تا جهت حرکتش عوض شود. درواقع، از مقایسهٔ معادله‌های ۱۵-۳ و ۱۵-۷ به معادلهٔ بسیار تروتمیزی می‌رسیم:

$$a(t) = -\omega^2 x(t) \qquad (۱۵\text{-}۸)$$

این همان شاخص اصلی حرکت هماهنگ ساده (SHM) است: (۱) شتاب ذره همواره در جهت مخالف جابه‌جایی ذره است (که همان معنی علامت منفی است)، و (۲) این دو کمیت جابه‌جایی و شتاب همیشه با ضریب ثابتی(ω^2) به هم مربوط‌اند. هر وقت با چنین رابطه‌ای در یک وضعیت نوسانی (مثل جریان در مدار الکتریکی یا بالا و پایین رفتن آب در جزر و مد دریا)، روبه‌رو شدید، می‌توانید بی‌درنگ بگویید حرکت از نوع هماهنگ ساده است و بی‌درنگ بسامد زاویه‌ای ω را هم مشخص کنید. لُب کلام این که:

در حرکت هماهنگ ساده، شتاب a با جابه‌جایی x متناسب است اما جهت مخالف آن دارد، و ضریب تناسب این دو کمیت مجذور بسامد زاویه‌ای ω است.

خودآزمایی ۲

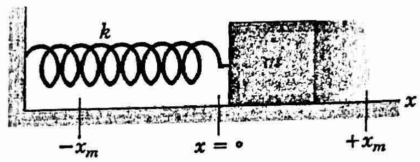
کدام یک از این رابطه‌ها بین شتاب a ذره و جابه‌جایی x آن نشان‌دهندهٔ نوسان هماهنگ ساده است: (الف) $a = ۳x^2$، (ب) $a = ۵x$، (ج) $a = -۴x$، (د) $a = -۲/x$؟ در این نمونهٔ حرکت هماهنگ ساده، بسامد زاویه‌ای چقدر است (یکای آن را rad/s درنظر بگیرید)؟

قانون نیرو در حرکت هماهنگ ساده

هنگامی که تغییرات شتاب یک ذره را در طول زمان در دست داشته باشیم، با استفاده از قانون دوم نیوتون می‌توان فهمید که برای تحقق این شتاب چه نیرویی باید بر ذره وارد شده باشد. برای حرکت هماهنگ ساده، از ترکیب قانون نیوتون با معادلهٔ ۱۵-۸، به‌دست می‌آید

$$F = ma = m(-\omega^2 x) = -(m\omega^2)x \qquad (۱۵\text{-}۹)$$

علامت منفی به این معنی است که جهت نیروی وارد بر ذره مخالف جهت جابه‌جایی ذره است. به‌عبارت دیگر، در حرکت هماهنگ ساده نیرو یک نیروی بازگرداننده است؛ یعنی با جابه‌جایی مقابله می‌کند و در تلاش است که ذره را به نقطهٔ وسط در $x = ۰$



شکل ۱۵-۷ نوسانگر خطی هماهنگ ساده. سطح اتکای قطعه را بدون اصطکاک گرفته‌ایم. مانند شکل ۱۵-۲، این قطعه وقتی دارای حرکت هماهنگ ساده می‌شود که، با کشیدن یا فشردن فنر، قطعه را از مکان $x = ۰$ دور و سپس آن را آزادانه رها کنیم. در این صورت، جابه‌جایی قطعه از معادلهٔ ۱۵-۳ پیروی می‌کند.

بازگرداند. صورت کلی معادلهٔ ۱۵-۹ را در فصل ۸، هنگامی‌که دربارهٔ قطعهٔ متصل به فنر مثل شکل ۱۵-۷ بحث می‌کردیم، دیده‌ایم. در آن جا قانون هوک را چنین نوشتیم

$$F = -kx \qquad (۱۵-۱۰)$$

که در آن F نیرویی است که بر قطعه وارد می‌شود. اینک از مقایسهٔ معادله‌های ۱۵-۹ و ۱۵-۱۰ می‌توانیم رابطهٔ میان ثابت فنر k (که معیاری برای سفتی فنر است) و جرم قطعه و بسامد زاویه‌ای حرکت هماهنگ سادهٔ حاصل را چنین به‌دست آوریم

$$k = m\omega^۲ \qquad (۱۵-۱۱)$$

معادلهٔ ۱۵-۱۰ را می‌توان به‌عنوان شکل دیگری از معادلهٔ مشخصهٔ حرکت هماهنگ ساده پذیرفت.

حرکت هماهنگ ساده، حرکت ذره‌ای است که بر آن یک نیروی متناسب با جابه‌جایی اما در جهت مخالف وارد می‌شود.

سیستم قطعه- فنر در شکل ۱۵-۷ نشان دهندهٔ یک **نوسانگر خطی هماهنگ ساده** (یا به‌طور خلاصه، نوسانگر خطی) است، که در آن «خطی» به این معنی است که F متناسب با x است نه توان‌های دیگر آن.

هر وقت با وضعیتی سروکار داشته باشید که در آن نوسان همواره متناسب با جابه‌جایی اما در جهت مخالف آن باشد، بی‌درنگ می‌توانید بگویید نوسان از نوع حرکت هماهنگ ساده است. همچنین بی‌درنگ می‌توانید ثابت فنر k متناظر با آن را به دست بیاورید. اگر جرم نوسان‌کننده در دست باشد، بسامد زاویه‌ای حرکت را می‌توان از طریق بازنویسی معادلهٔ ۱۵-۱۱ به‌صورت زیر به‌دست آورد

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{(بسامد زاویه‌ای)} \qquad (۱۵-۱۲)$$

(این کمیت معمولاً از مقدار k مهم‌تر است.) علاوه بر این، دورهٔ حرکت را هم می‌توان با ترکیب معادله‌های ۱۵-۵ و ۱۵-۱۲ به‌دست آورد

$$T = ۲\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad \text{(دورهٔ حرکت)} \qquad (۱۵-۱۳)$$

بیایید از معنی فیزیکی معادله‌های ۱۵-۱۲ و ۱۵-۱۳ هم سردرآوریم. همچنان که می‌بینیم، فنر سفت (با k بزرگ) بسامد ω بزرگ‌تری (یا نوسان‌های تندی) دارد و درنتیجه دورهٔ T کوچکی خواهد داشت. همچنین می‌بینیم که جرم بزرگ m دارای ω کوچک‌تر یا (نوسان‌های کند) است، و به این ترتیب دورهٔ T بزرگی خواهد داشت.

هر سیستم نوسانی، چه تختهٔ پرش (شیرجه) باشد چه تار ویولن، هم ویژگی «فنریت» دارد و هم ویژگی «لَختی» یا جرم، و از این‌رو همچون نوسانگری خطی عمل می‌کند. این ویژگی‌ها در نوسانگر خطی شکل ۱۵-۷ در قسمت‌های جداگانهٔ سیستم قرار دارند:

فنریت تماماً به فنر که بدون جرم در نظر گرفته می‌شود، و لَختی تماماً به قطعه که صُلب پنداشته می‌شود، اختصاص داده شده است. اما در تار ویولن، چنان که در فصل ۱۶ خواهیم دید، هر دو ویژگی را در همان تار می‌بینیم.

خودآزمایی ۳

در رابطه‌های زیر، که برای نیروی F وارد بر ذره و جابه‌جایی x ذره نوشته شده‌اند، کدام‌یک معرف نوسان هماهنگ ساده است: (الف) $F = -5x$، (ب) $F = -400x^2$، (ج) $F = 10x$، (د) $F = 3x^2$؟

نمونه مسئلهٔ ۱۵-۰۱ حرکت هماهنگ سادهٔ قطعه-فنر، دامنه، شتاب، ثابت فاز

قطعه‌ای به جرم $m = 680$ g را به فنری با ثابت فنر $k = 65$ N/m بسته‌ایم. این قطعه را، که روی سطحی بدون اصطکاک قرار دارد، به فاصلهٔ $x = 11$ cm از وضعیت تعادل $x = 0$ می‌کشیم و در لحظهٔ $t = 0$ از حالت سکون رها می‌کنیم.

(الف) بسامد زاویه‌ای، بسامد، و دورهٔ حرکت پدید آمده چقدرند؟

نکته

این سیستم قطعه-فنر، نوسانگر خطی هماهنگ ساده‌ای را تشکیل می‌دهد که در آن قطعه دارای حرکت هماهنگ ساده است.

محاسبات: بسامد زاویه‌ای، بنابر معادلهٔ ۱۵-۱۲، چنین می‌شود

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{65 \text{ N/m}}{0.65 \text{ kg}}} = 9.78 \text{ rad/s} \approx 9.8 \text{ rad/s} \quad \text{(پاسخ)}$$

بسامد را می‌توان از معادلهٔ ۱۵-۵ به‌دست آورد

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{9.78 \text{ rad/s}}{2\pi \text{ rad}} = 1.56 \text{ Hz} \approx 1.6 \text{ Hz} \quad \text{(پاسخ)}$$

دوره را می‌توان با استفاده از معادلهٔ ۱۵-۲ محاسبه کرد

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{1.56 \text{ Hz}} = 0.64 \text{ s} = 640 \text{ ms} \quad \text{(پاسخ)}$$

(ب) دامنهٔ نوسان چقدر است؟

نکته

در نبود اصطکاک، انرژی مکانیکی سیستم قطعه-فنر پایسته می‌ماند.

استدلال: این قطعه در فاصلهٔ ۱۱ cm از موقعیت تعادل خود در شرایطی از حال سکون رها می‌شود که انرژی جنبشی صفر دارد و انرژی پتانسیل کشسانی سیستم دارای مقدار بیشینه است. به این ترتیب، هر وقت که قطعه مجدداً به فاصلهٔ ۱۱ cm از موقعیت تعادل خود برسد انرژی جنبشی صفر خواهد داشت؛ این بدان معنی است که قطعه هرگز از ۱۱ سانتی‌متری این موقعیت دورتر نخواهد رفت. پس، جابه‌جایی بیشینه برابر ۱۱ cm است:

$$x_m = 11 \text{ cm} \quad \text{(پاسخ)}$$

(ج) سرعت بیشینهٔ v_m قطعهٔ در حال نوسان چقدر است، و قطعه با این سرعت در کجا قرار می‌گیرد؟

نکته

سرعت بیشینهٔ v_m همان دامنهٔ سرعت ωx_m در معادلهٔ ۱۵-۶ است.

محاسبه: پس، داریم

$$v_m = \omega x_m = (9.78 \text{ rad/s})(0.11 \text{ m}) = 1.1 \text{ m/s} \quad \text{(پاسخ)}$$

این سرعت بیشینه وقتی حاصل می‌شود که قطعهٔ نوسان‌کننده از وضعیت تعادل مبدأ در حال عبور است؛ با مقایسهٔ شکل‌های ۱۵-۶الف و ۱۵-۶ب معلوم می‌شود که سرعت وقتی بیشینه است که $x = 0$ باشد.

(د) اندازهٔ شتاب بیشینهٔ a_m این قطعه چقدر است؟

نکته

اندازهٔ شتاب بیشینهٔ a_m همان دامنهٔ شتاب $\omega^2 x_m$ در معادلهٔ ۱۵-۷ است.

محاسبه: پس، داریم

$$a_m = \omega^2 x_m = (۹{,}۷۸\ \text{rad/s})^2(۰{,}۱۱\ \text{m})$$

$$= ۱۱\ \text{m/s}^2 \qquad \text{(پاسخ)}$$

این شتاب بیشینه وقتی حاصل می‌شود که قطعه به هر یک از دو سر مسیرش می‌رسد. در این نقاط، نیروی وارد بر قطعه دارای مقدار بیشینه است؛ نگاه کنید به شکل‌های ۱۵-۶الف و۱۵-۶ج که در آن‌ها مقادیر جابه‌جایی و شتاب به‌طور همزمان به بیشینه می‌رسند و این هنگامی است که سرعت صفر است، همچنان که در شکل ۱۵-۶ ب دیده می‌شود.

(هـ) ثابت فاز ϕ در این حرکت چقدر است؟

محاسبات: معادلهٔ ۱۵-۳ جابه‌جایی ذره را به‌صورت تابعی از زمان نشان می‌دهد. می‌دانیم که در زمان $t = ۰$، قطعه در $x = x_m$ قرار دارد. با جاگذاری این شرایط اولیه، که عنوان اصطلاحی آن‌هاست، در معادلهٔ ۱۵-۳ و حذف x_m به‌دست می‌آید

$$۱ = \cos\phi \qquad (۱۵\text{-}۱۴)$$

با کسینوس وارون گرفتن به‌دست می‌آوریم

$$\phi = ۰\ \text{rad} \qquad \text{(پاسخ)}$$

(هر زاویه‌ای که مضرب درستی از ۲π rad باشد نیز پاسخ معادلهٔ ۱۵-۱۴ است؛ در این‌جا کوچک‌ترین زاویه انتخاب شده است.)

(و) تابع جابه‌جایی $x(t)$ را برای این سیستم قطعه-فنر معین کنید.

محاسبه: شکل کلی تابع $x(t)$ به‌صورت معادلهٔ ۱۵-۳ در دست است. با قرار دادن کمیت‌های معلوم در این معادله، به‌دست می‌آوریم

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \phi)$$

$$= (۰{,}۱۱\ \text{m})\cos[(۹{,}۸\ \text{rad/s})t + ۰]$$

$$= ۰{,}۱۱\cos(۹{,}۸t) \qquad \text{(پاسخ)}$$

که در آن x برحسب متر و t برحسب ثانیه است.

نمونه مسئلهٔ ۱۵-۲۰ یافتن ثابت فاز حرکت هماهنگ ساده با استفاده از جابه‌جایی و سرعت

در یک نوسانگر خطی، که مشابه شکل ۱۵-۷ است، جابه‌جایی $x(۰)$ قطعه در زمان $t = ۰$ برابر $-۸{,}۵۰$ cm است. (منظور از $x(۰)$، «جابه‌جایی x در زمان صفر» است.) در این زمان، سرعت قطعه برابر $v(۰) = -۰{,}۹۲۰$ m/s و شتاب آن برابر $a(۰) = +۴۷{,}۰\ \text{m/s}^2$ است.

(الف) بسامد زاویه‌ای ω این سیستم چقدر است؟

نکته

درحالتی که قطعه حرکت هماهنگ ساده داشته باشد، معادلات ۱۵-۳، ۱۵-۶، و۱۵-۷ به‌ترتیب جابه‌جایی، سرعت، و شتاب قطعه را به‌دست می‌دهند، و در همهٔ آن‌ها هم ω وجود دارد.

محاسبات: مقدار $t = ۰$ را در هر سه معادله قرار می‌دهیم تا ببینیم ω را از کدام‌یک می‌توان به‌دست آورد

$$x(۰) = x_m \cos\phi \qquad (۱۵\text{-}۱۵)$$

$$v(۰) = -\omega x_m \sin\phi \qquad (۱۵\text{-}۱۶)$$

$$a(۰) = -\omega^2 x_m \cos\phi \qquad (۱۵\text{-}۱۷)$$

در معادلهٔ ۱۵-۱۵، ω ناپدید شده است. در معادلات ۱۵-۱۶ و ۱۵-۱۷، مقادیر سمت چپ در دست‌اند، ولی x_m و ϕ معلوم نیستند. اما اگر معادلهٔ ۱۵-۱۷ را بر معادلهٔ ۱۵-۱۵ تقسیم کنیم، هر دو کمیت x_m و ϕ حذف می‌شوند و ω چنین به‌دست می‌آید

$$\omega = \sqrt{-\frac{a(۰)}{x(۰)}} = \sqrt{-\frac{۴۷{,}۰\ \text{m/s}^2}{-۰{,}۰۸۵۰\ \text{m}}}$$

$$= ۲۳{,}۵\ \text{rad/s} \qquad \text{(پاسخ)}$$

(ب) ثابت فاز ϕ و دامنهٔ x_m چقدرند؟

محاسبات: با در دست داشتن ω، می‌خواهیم ϕ و x_m را به‌دست آوریم. اگر معادلهٔ ۱۵-۱۶ را بر معادلهٔ ۱۵-۱۵ تقسیم کنیم، یکی از این مجهول‌ها حذف می‌شود و به‌دست می‌آید

$$\frac{v(۰)}{x(۰)} = \frac{-\omega x_m \sin\phi}{x_m \cos\phi} = -\omega\tan\phi$$

که از آن $\tan\phi$ را چنین می‌یابیم

$$\tan\phi = -\frac{v(۰)}{\omega x(۰)} = -\frac{-۰{,}۹۲۰\ \text{m/s}}{(۲۳{,}۵\ \text{rad/s})(-۰{,}۰۸۵۰\ \text{m})} = -۰{,}۴۶۱$$

این معادله دو جواب دارد:

$$\phi = -25^\circ \quad \text{و} \quad \phi = 180^\circ + (-25^\circ) = 155^\circ$$

ماشین‌حساب معمولاً فقط همان جواب اول را به‌دست می‌دهد که ممکن است جوابی نباشد که از نظر فیزیکی امکان‌پذیر است. برای آن‌که جواب مناسب را انتخاب کنیم، هردو مقدار را برای محاسبهٔ دامنهٔ x_m مورد آزمایش قرار می‌دهیم. اگر $\phi = -25^\circ$ باشد، از معادلهٔ ۱۵-۱۵ به‌دست می‌آید

$$x_m = \frac{x(0)}{\cos\phi} = \frac{-0.0850\ \text{m}}{\cos(-25^\circ)} = -0.094\ \text{m}$$

به‌همین ترتیب، اگر $\phi = 155^\circ$ باشد، به‌دست می‌آید $x_m = 0.094$ m. چون دامنهٔ حرکت هماهنگ ساده باید مقدار ثابت مثبتی باشد، در این‌جا ثابت فاز درست و دامنه عبارت‌اند از

$$\phi = 155^\circ \quad \text{و} \quad x_m = 0.094\ \text{m} = 9.4\ \text{cm} \qquad \text{(پاسخ)}$$

۱۵-۲ انرژی در حرکت هماهنگ ساده

هدف‌های یادگیری

پس از خواندن این واحد، باید بتوانید...

۱۵-۱۹ برای نوسانگر قطعه-فنر، انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل کشسانی را در هر لحظه‌ای از زمان به‌دست آورید.

۱۵-۲۰ با بهره‌گیری از پایستگی انرژی، رابطهٔ میان انرژی کل نوسانگر قطعه-فنر در یک لحظه و کل انرژی در لحظه‌ای دیگر را به‌دست آورید.

۱۵-۲۱ نمودارهای انرژی جنبشی، انرژی پتانسیل، و کل انرژی نوسانگر قطعه-فنر را هم به‌صورت تابعی از زمان و هم به‌صورت تابعی از مکان نوسانگر رسم کنید.

۱۵-۲۲ برای نوسانگر قطعه-فنر، مکان قطعه را در وقتی که انرژی کل تماماً به‌صورت انرژی جنبشی است و همچنین هنگامی‌که انرژی کل تماماً به‌صورت انرژی پتانسیل است، مشخص کنید.

نکته‌های اصلی

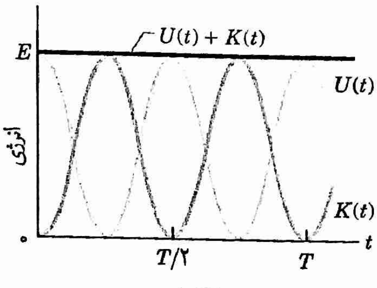
- ذره‌ای که حرکت هماهنگ ساده دارد، در هر لحظه دارای انرژی جنبشی $K = \frac{1}{2}mv^2$ و انرژی پتانسیل $U = \frac{1}{2}kx^2$ است. اگر اصطکاک در کار نباشد، انرژی مکانیکی $E = K + U$ ثابت می‌ماند، هرچند که انرژی‌های K و U تغییر می‌کنند.

انرژی در حرکت هماهنگ ساده

در فصل ۸ دیدیم که انرژی هر نوسانگر خطی به‌صورت دو طرفه بین انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل آن مبادله می‌شود، و این در حالی است که حاصل‌جمع این دو انرژی — انرژی مکانیکی E نوسانگر — ثابت می‌ماند. اکنون این وضعیت را به‌طور کمی بررسی می‌کنیم. انرژی پتانسیل نوسانگری خطی، مانند آنچه در شکل ۱۵-۷ نشان داده شده است، تماماً مربوط به فنر است. مقدار این انرژی به میزان کشیدگی یا فشردگی فنر — یعنی به $x(t)$ — بستگی دارد. با استفاده از معادلات ۸-۱۱ و ۱۵-۳، به‌دست می‌آید

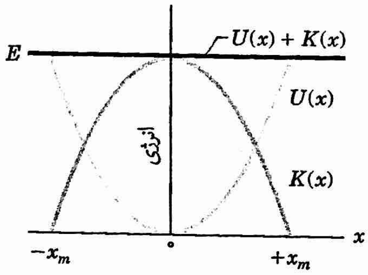
$$U(t) = \tfrac{1}{2}kx^2 = \tfrac{1}{2}kx_m^2\cos^2(\omega t + \phi) \qquad (۱۵\text{-}۱۸)$$

هشدار: تابعی که به‌صورت $\cos^2 A$ نوشته شده باشد (همانند آنچه در این‌جا آمده است)، به معنی $(\cos A)^2$ است و نه به معنی $\cos A^2$ که منظور از آن $\cos(A^2)$ است.



(الف)

با گذشت زمان، انرژی از نوعی به نوع دیگر تبدیل می‌شود، اما انرژی کل ثابت می‌ماند.



(ب)

با تغییر مکان، انرژی از نوعی به نوع دیگر تبدیل می‌شود، اما انرژی کل ثابت می‌ماند.

شکل ۱۵-۸ (الف) انرژی پتانسیل $U(t)$، انرژی جنبشی $K(t)$، و انرژی مکانیکی E به‌صورت تابع‌هایی از زمان t برای یک نوسانگر هماهنگ خطی. توجه داشته باشید که همهٔ انرژی‌ها مثبت‌اند، و هر دو انرژی پتانسیل و جنبشی در خلال هر دورهٔ حرکت دو بار به حداکثر مقدارشان می‌رسند. (ب) انرژی پتانسیل $U(x)$، انرژی جنبشی $K(x)$، و انرژی مکانیکی E به‌صورت تابع‌هایی از مکان x برای یک نوسانگر هماهنگ‌خطی با دامنهٔ x_m. در $x = 0$ انرژی تماماً از نوع جنبشی، و در $x = \pm x_m$ انرژی تماماً از نوع پتانسیل است.

انرژی جنبشی در سیستمی همانند شکل ۱۵-۷ تماماً مربوط به قطعه است. مقدار آن به سرعت حرکت این قطعه—یعنی به $v(t)$—بستگی دارد. با استفاده از معادلهٔ ۱۵-۶ می‌توان نوشت

$$K(t) = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 x_m^2 \sin^2(\omega t + \phi) \qquad (۱۹\text{-}۱۵)$$

این معادله را، با استفاده از معادلهٔ ۱۵-۱۲ و قرار دادن k/m به‌جای ω^2، می‌توان چنین نوشت

$$K(t) = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} kx_m^2 \sin^2(\omega t + \phi) \qquad (۲۰\text{-}۱۵)$$

انرژی مکانیکی سیستم، با توجه به معادلات ۱۵-۱۸ و ۱۵-۲۰، عبارت است از

$$\begin{aligned} E &= U + K \\ &= \frac{1}{2} kx_m^2 \cos^2(\omega t + \phi) + \frac{1}{2} kx_m^2 \sin^2(\omega t + \phi) \\ &= \frac{1}{2} kx_m^2 [\cos^2(\omega t + \phi) + \sin^2(\omega t + \phi)] \end{aligned}$$

برای هر زاویهٔ α، داریم

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

پس، کمیت درون کروشهٔ بالا برابر واحد است و داریم

$$E = U + K = \frac{1}{2} kx_m^2 \qquad (۲۱\text{-}۱۵)$$

انرژی مکانیکی هر نوسانگر خطی، در واقع، مقداری ثابت و مستقل از زمان است. انرژی‌های جنبشی و پتانسیل نوسانگر خطی را به‌صورت تابع‌هایی از زمان t در شکل ۱۵-۸الف، و به‌صورت تابع‌هایی از جابه‌جایی x در شکل ۱۵-۸ب نشان داده‌ایم. در هر سیستم نوسانی، به ویژگی فنریت نیاز است تا انرژی پتانسیل را در خود ذخیره کند و به ویژگی لَختی هم نیاز است تا انرژی جنبشی را در خود ذخیره کند.

خودآزمایی ۴

در شکل ۱۵-۷، هنگامی که قطعه در $x = +2{,}0$ cm قرار دارد، این قطعه دارای ۳ J انرژی جنبشی و فنر دارای ۲ J انرژی پتانسیل کشسانی است. (الف) وقتی قطعه در $x = 0$ قرار می‌گیرد، انرژی جنبشی آن چقدر می‌شود؟ وقتی قطعه در (ب) $x = -2{,}0$ cm و (ج) $x = -x_m$ قرار می‌گیرد، انرژی پتانسیل کشسانی فنر چقدر می‌شود؟

نمونه مسئلهٔ ۱۵-۰۳ حرکت هماهنگ ساده، انرژی پتانسیل، انرژی جنبشی، میرانندهای جرمی

در بسیاری از ساختمان‌های بلند از میرانندهای جرمی، که ابزارهایی برای جلوگیری از نوسان ساختمان به هنگام وزش باد هستند، استفاده می‌شود. این وسیله ممکن است قطعهٔ نوسان‌کننده‌ای باشد که روی مسیری روغنکاری شده قرار دارد و به انتهای فنری متصل شده است. اگر ساختمان مثلاً رو به شرق تاب بخورد، قطعه هم رو به شرق حرکت می‌کند ولی با چنان تأخیری که وقتی بالاخره شروع به حرکت می‌کند، ساختمان در راه حرکت به سمت غرب است. بدین‌ترتیب، حرکت نوسانگر با حرکت ساختمان ناهمفاز است.

فرض کنید جرم این قطعه برابر $m = ۲٫۷۲ \times ۱۰^۵$ kg است و چنان طراحی شده باشد که با بسامد $f = ۱۰٫۰$ Hz و دامنهٔ $x_m = ۲۰٫۰$ cm به نوسان درآید.

(الف) کل انرژی مکانیکی E این سیستم قطعه-فنر چقدر است؟

نکته

انرژی مکانیکی E (حاصل‌جمع انرژی جنبشی $K = \frac{1}{۲}mv^۲$ قطعه و انرژی پتانسیل $U = \frac{1}{۲}kx^۲$ فنر) در طول حرکت نوسانگر ثابت می‌ماند. پس، می‌توانیم انرژی E را در هر نقطه‌ای از حرکت محاسبه کنیم.

محاسبات: از آن‌جاکه دامنهٔ x_m نوسان در دست است، بهتر است E را در وقتی‌که قطعه در مکان $x = x_m$ است و سرعت $v = ۰$ دارد، محاسبه کنیم. اما برای محاسبهٔ U در این نقطه، نخست باید ثابت فنر k را به‌دست آوریم. با استفاده از معادلهٔ ۱۵-۱۲ $(\omega = \sqrt{k/\omega})$ و معادلهٔ ۱۵-۵ $(\omega = ۲\pi f)$، به‌دست می‌آید

$$k = m\omega^۲ = m(۲\pi f)^۲$$
$$= (۲٫۷۲ \times ۱۰^۵ \text{ kg})(۲\pi)^۲(۱۰٫۰ \text{ Hz})^۲$$
$$= ۱٫۰۷۳ \times ۱۰^۹ \text{ N/m}$$

اکنون می‌توان E را چنین محاسبه کرد

$$E = K + U = \tfrac{1}{۲}mv^۲ + \tfrac{1}{۲}kx^۲$$
$$= ۰ + \tfrac{1}{۲}(۱٫۰۷۳ \times ۱۰^۹ \text{ N/m})(۰٫۲۰ \text{ m})^۲$$
$$= ۲٫۱۴۷ \times ۱۰^۷ \text{ J} \approx ۲٫۱ \times ۱۰^۷ \text{ J} \quad \text{(پاسخ)}$$

(ب) سرعت این قطعه در حین عبور از نقطهٔ تعادل چقدر است؟

محاسبات: می‌خواهیم سرعت را در $x = ۰$، که در آن انرژی پتانسیل برابر $U = \frac{1}{۲}kx^۲ = ۰$ و انرژی مکانیکی تماماً به‌صورت انرژی جنبشی است، به‌دست آوریم. پس، می‌توانیم بنویسیم

$$E = K + U = \tfrac{1}{۲}mv^۲ + \tfrac{1}{۲}kx^۲$$
$$۲٫۱۴۷ \times ۱۰^۷ \text{ J} = \tfrac{1}{۲}(۲٫۷۲ \times ۱۰^۵ \text{ kg})v^۲ + ۰$$

یا

$$v = ۱۲٫۶ \text{ m/s} \quad \text{(پاسخ)}$$

با توجه به این‌که E تماماً به‌صورت انرژی جنبشی است، این نتیجه همان بیشینهٔ سرعت v_m است.

۱۵-۳ نوسانگر هماهنگ سادهٔ زاویه‌ای

هدف‌های یادگیری

پس از خواندن این واحد، باید بتوانید...

۱۵-۲۳ حرکت نوسانگر هماهنگ سادهٔ زاویه‌ای را توصیف کنید.

۱۵-۲۴ برای نوسانگر هماهنگ سادهٔ زاویه‌ای، رابطهٔ بین گشتاور نیروی τ و جابه‌جایی زاویه‌ای θ (از حالت تعادل) را به‌کار ببرید.

۱۵-۲۵ برای نوسانگر هماهنگ سادهٔ زاویه‌ای، رابطهٔ میان دورهٔ T (یا بسامد f)، لَختی چرخشی I، و ثابت پیچش κ را به‌کار ببرید.

۱۵-۲۶ برای نوسانگر هماهنگ سادهٔ زاویه‌ای در هر لحظه، رابطهٔ میان شتاب زاویه‌ای α، بسامد زاویه‌ای ω، و جابه‌جایی زاویه‌ای θ را به‌کار ببرید.

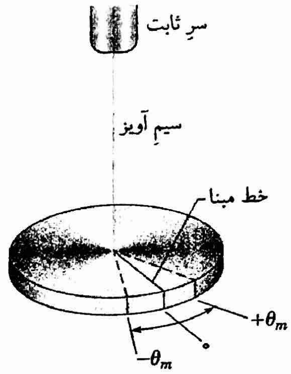
نکتهٔ اصلی

- هر آونگ پیچشی متشکل است از جسمی که از سیمی آویزان شده است. هرگاه این سیم پیچ بخورد و سپس به حال خود رها شود، جسم با حرکت هماهنگ سادهٔ زاویه‌ای به نوسان درمی‌آید و دورهٔ حرکت آن برابر می‌شود با

$$T = ۲\pi\sqrt{\frac{I}{\kappa}}$$

که در آن I لَختی چرخشی جسم حول محور چرخش و κ ثابت پیچش سیم است.

نوسانگر هماهنگ سادهٔ زاویه‌ای



شکل ۱۵-۹ آونگ پیچشی نوع زاویه‌ای نوسانگر هماهنگ ساده است. قرص در صفحه‌ای افقی به نوسان درمی‌آید؛ خط مبنا با دامنهٔ زاویه‌ای θ_m نوسان می‌کند. انرژی پتانسیل در پیچش سیمِ آویز ذخیره می‌شود، همان‌طور که در فنر ذخیره می‌شد و گشتاورنیرو را پدید می‌آورد.

شکل ۱۵-۹ نوعِ زاویه‌ای نوسانگری را نشان می‌دهد که حرکت هماهنگ ساده دارد؛ عنصر فنریت یا کشسانی در این نوعِ نوسانگر، به‌جای آن‌که به کشیدگی یا فشردگی فنر وابسته باشد، به پیچش سیمِ آویز بستگی دارد. این وسیله را **آونگ پیچشی** می‌گویند، که این پیچش همان پیچیدگیِ سیم آویز است.

اگر قرص شکل ۱۵-۹ را به اندازهٔ جابه‌جایی زاویه‌ای θ از وضعیت سکون (وضعیتی با خط مبنای $\theta = 0$) بچرخانیم و سپس آن را به حال خود رها کنیم، این قرص با **حرکت هماهنگ سادهٔ زاویه‌ای** حول آن وضعیت به نوسان درخواهد آمد. چرخاندن قرص به اندازهٔ زاویهٔ θ، در هر دو جهت، گشتاورنیروی بازگردانندهای به‌صورت زیر پدید می‌آورد

$$\tau = -\kappa\theta \qquad (۱۵-۲۲)$$

در این‌جا κ (کاپای یونانی) مقدار ثابتی به‌نام **ثابت پیچش** است، که اندازهٔ آن به طول، قطر، و جنس مادهٔ سیمِ آویز بستگی دارد.

مقایسهٔ معادلهٔ ۱۵-۲۲ با معادلهٔ ۱۵-۱۰، منجر به این تصور می‌شود که معادلهٔ ۱۵-۲۲ شکل زاویه‌ای قانون هوک است، و این‌که معادلهٔ دورهٔ حرکت خطی هماهنگ ساده (معادلهٔ ۱۵-۱۳) را می‌توانیم به معادلهٔ دورهٔ حرکت زاویه‌ای هماهنگ ساده تبدیل کنیم: در معادلهٔ ۱۵-۱۳، به‌جای ثابت فنر k کمیت معادل ثابت پیچش κ معادلهٔ ۱۵-۲۲ و به‌جای جرم m کمیت معادل لَختی چرخشی I قرص نوسان‌کننده را قرار می‌دهیم. با این جانشینی‌ها، خواهیم داشت

$$T = ۲\pi\sqrt{\frac{I}{\kappa}} \quad \text{(آونگ چرخشی)} \qquad (۱۵-۲۳)$$

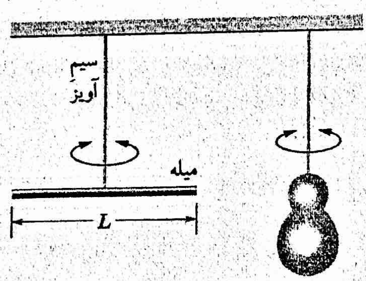
نمونه مسئلهٔ ۱۵-۰۴ نوسانگر هماهنگ سادهٔ زاویه‌ای، لَختی چرخشی، دورهٔ حرکت

شکل ۱۵-۱۰الف، میلهٔ نازکی به طول $L = ۱۲{,}۴\ \text{cm}$ و به جرم $m = ۱۳۵\ \text{g}$ را نشان می‌دهد که از نقطهٔ وسط به سیمی بلند آویزان شده است. دورهٔ حرکت هماهنگ سادهٔ زاویه‌ای، T_a، این میله را برابر $۲{,}۵۳\ \text{s}$ اندازه‌گیری کرده‌ایم. جسمی به شکل نامنظم، به‌نام جسم X، را در آزمایشی دیگر از همان سیم آویزان کرده‌ایم (شکل ۱۵-۱۰ب)، و دورهٔ حرکت آن را برابر $T_b = ۴{,}۷۶\ \text{s}$ اندازه گرفته‌ایم. لَختی چرخشی جسم X حول محورِ آویز چقدر است؟

نکته

لَختی چرخشی هر جسمی، چه آن میله چه جسم X، از طریق معادلهٔ ۱۵-۲۳ به دورهٔ حرکت هماهنگ آن بستگی دارد.

محاسبات: در جدول ۱۰-۲هـ، لَختی چرخشی هر میلهٔ نازک حول محور عمودیِ گذرنده از وسط آن را به‌صورت $\frac{۱}{۱۲}mL^۲$ مشخص



شکل ۱۵-۱۰ دو آونگ پیچشی متشکل از (الف) سیم و میله، و (ب) همان سیم و جسمی به‌شکل نامنظم.

کردیم. پس، برای میله‌ای که در شکل ۱۵-۱۰الف نشان داده شده است، داریم

$$I_a = \frac{1}{12}mL^2 = (\tfrac{1}{12})(0{,}135\ \text{kg})(0{,}124\ \text{m})^2$$
$$= 1{,}73\times 10^{-4}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$$

اکنون بگذارید معادلهٔ ۱۵-۲۳ را دو بار بنویسیم، یک‌بار برای میله و بار دیگر برای جسم X:

$$T_a = 2\pi\sqrt{\frac{I_a}{\kappa}} \quad \text{و} \quad T_b = 2\pi\sqrt{\frac{I_b}{\kappa}}$$

ثابت κ، که یکی از ویژگی‌های سیم است، در هر دو حالت یکسان است؛ فقط دوره‌ها و لَختی‌های چرخشی‌اند که با هم تفاوت دارند.

اکنون هر یک از این دو معادله را به توان ۲ می‌رسانیم، دومی را بر اولی تقسیم می‌کنیم، و نتیجه را برحسب I_b حل می‌کنیم. به این ترتیب، به‌دست می‌آید

$$I_b = I_a\frac{T_b^2}{T_a^2} = (1{,}73\times 10^{-4}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2)\frac{(4{,}76\ \text{s})^2}{(2{,}53\ \text{s})^2}$$
$$= 6{,}12\times 10^{-4}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2 \quad \text{(پاسخ)}$$

۴-۱۵ آونگ‌ها، حرکت دایره‌ای

هدف‌های یادگیری

پس از خواندن این واحد، باید بتوانید...

۱۵-۲۷ حرکت هر آونگ سادهٔ در حال نوسان را توصیف کنید.

۱۵-۲۸ نمودار جسم آزاد برای وزنهٔ آونگ را در حالی‌که آونگ نسبت به راستای قائم زاویهٔ θ می‌سازد، رسم کنید.

۱۵-۲۹ برای نوسان‌های با زاویهٔ کوچک آونگ ساده، رابطهٔ دورهٔ T (یا بسامد f) را با طول آونگ L به‌دست آورید.

۱۵-۳۰ آونگ ساده را از آونگ فیزیکی تمیز دهید.

۱۵-۳۱ برای نوسان‌های آونگ فیزیکی با زاویهٔ نوسان کوچک، میان‌دورهٔ تناوب T (یا بسامد f) و فاصلهٔ h بین نقطهٔ محوری و مرکز جرم رابطه برقرار کنید.

۱۵-۳۲ برای سیستم در حال نوسان زاویه‌ای، بسامد زاویه‌ای ω را یا با استفاده از معادلهٔ بین گشتاورنیروی τ و جابه‌جایی زاویه‌ای θ یا با استفاده از معادلهٔ بین شتاب زاویه‌ای α و جابه‌جایی زاویه‌ای θ به‌دست آورید.

۱۵-۳۳ بسامد زاویه‌ای ω آونگ (یا آهنگ کامل شدن دوره‌ها) را از $d\theta/dt$ (که آهنگ تغییر زاویه نسبت به راستای قائم است) تمیز دهید.

۱۵-۳۴ با در دست داشتن داده‌های مربوط به مکان زاویه‌ای θ و آهنگ تغییر $d\theta/dt$ آن در یک لحظه، ثابت فاز ϕ و دامنهٔ θ_m را به‌دست آورید.

۱۵-۳۵ توضیح دهید که چگونه می‌توان شتاب سقوط آزاد را به کمک آونگ ساده اندازه‌گیری کرد.

۱۵-۳۶ برای یک آونگ فیزیکی مشخص، موقعیت مکانی مرکز نوسان را معین کنید و ارتباط مفهومی آن را با آونگ ساده تشخیص بدهید.

۱۵-۳۷ توضیح دهید که حرکت هماهنگ ساده چگونه با حرکت دایره‌ای یکنواخت در ارتباط است.

نکته‌های اصلی

- هر آونگ ساده از میله‌ای به جرم ناچیز تشکیل می‌شود که حول نقطهٔ محوری‌اش که در سربالایی آن قرار دارد، نوسان می‌کند و این در حالی است که یک ذره (یا وزنهٔ آونگ) به سرپایینی میله متصل است. اگر تاب خوردن میله فقط با زاویه‌های کوچک باشد، این حرکت به تقریب همان حرکت هماهنگ ساده است که دورهٔ آن چنین است

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgL}} \quad \text{(آونگ ساده)}$$

که در آن I لَختی چرخشی ذره حول نقطهٔ محوری، m جرم ذره، و L طول میله است.

- آونگ فیزیکی، توزیع جرم پیچیده‌تری دارد. به‌ازای تاب‌خوردگی‌های

با زاویه‌های کوچک، حرکت آن حرکت هماهنگ ساده با دورهٔ زیر است

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgh}} \qquad \text{(آونگ فیزیکی)}$$

که در آن I لَختی چرخشی آونگ حول نقطهٔ محوری، m جرم آونگ، و h فاصلهٔ بین نقطهٔ محوری و مرکز جرم آونگ است.

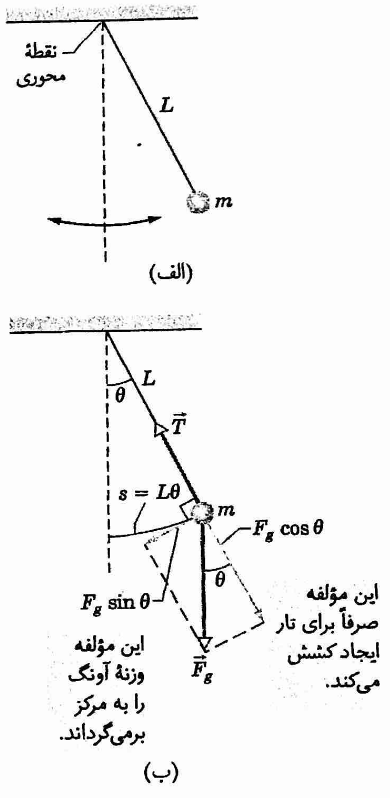
- حرکت هماهنگ ساده متناظر است با تصویر حرکت دایره‌ای یکنواخت برروی یکی از قطرهای دایرهٔ مسیر.

آونگ‌ها

اکنون در این‌جا به رده‌ای از نوسانگرهای هماهنگ ساده می‌پردازیم که در آن‌ها فنریت، به‌جای آن‌که به ویژگی‌های کشسانی سیم پیچیده شده یا فنر فشرده شده یا کشیده شده وابسته باشد، به نیروی گرانشی بستگی دارد.

آونگ ساده

آیا نوسان سیبی که به انتهای یک رشته نخ بلند بسته شده است، از نوع حرکت هماهنگ ساده است؟ اگر چنین باشد، دورهٔ آن چقدر است؟ برای پاسخ‌گویی به این پرسش‌ها، در این‌جا **آونگ ساده** را بررسی می‌کنیم. این آونگ متشکل است از ذره‌ای به جرم m (به‌نام وزنهٔ آونگ) که به انتهای یک رشته سیم یا تار کشیدگی ناپذیر و بدون جرم به طول L آویزان شده، و سر دیگر این رشته هم مطابق شکل ۱۵-۱۱الف در نقطه‌ای ثابت شده است. وزنهٔ آونگ می‌تواند، در صفحهٔ شکل، حول خط قائمی که از نقطهٔ محوری آونگ می‌گذرد، آزادانه به نوسان درآید و در دو طرف چپ و راست این خط حرکت رفت و برگشت داشته باشد.



شکل ۱۵-۱۱ (الف) آونگ ساده. (ب) نیروهای وارد بر وزنه، نیروی گرانشی $\vec{F}_g$ و نیروی $\vec{T}$ ناشی از کشش تار هستند. مؤلفهٔ مماسی نیروی گرانشی، $F_g \sin\theta$، نیروی بازگرداننده‌ای است که می‌خواهد وزنهٔ آونگ را به موقعیت مرکزی‌اش بازگرداند.

گشتاور نیروی بازگرداننده. نیروهای وارد بر وزنهٔ آونگ عبارت‌اند از نیروی $\vec{T}$ ناشی از کشش تار و نیروی گرانشی $\vec{F}_g$، که در شکل ۱۵-۱۱ب در حالتی نشان داده شده‌اند که راستای تار با راستای قائم زاویهٔ θ می‌سازد. نیروی $\vec{F}_g$ را به دو مؤلفه تجزیه می‌کنیم: یک مؤلفهٔ شعاعیِ $F_g \cos\theta$ و یک مؤلفهٔ $F_g \sin\theta$ که مماس بر مسیر وزنه است. همین مؤلفهٔ مماسی است که گشتاورنیروی بازگردانندهٔ حول نقطهٔ محوری آونگ را پدید می‌آورد، چرا که این مؤلفه همیشه در خلاف جهت جابه‌جایی وزنه بر آن وارد می‌شود تا آن را به موقعیت مرکزی‌اش بازگرداند. این موقعیت را وضعیت تعادل ($\theta = 0$) می‌گویند زیرا اگر آونگ در حال نوسان نمی‌بود در آن‌جا به سکون می‌رسید.

این گشتاورنیروی بازگرداننده را، با توجه به معادلهٔ ۱۰-۴۱ ($\tau = r_\perp F$)، می‌توانیم چنین بنویسیم

$$\tau = -L(F_g \sin\theta) \tag{۱۵-۲۴}$$

که در آن علامت منفی نشان می‌دهد که این گشتاورنیرو در جهت کاهش θ عمل می‌کند، و L هم بازوی گشتاوری مؤلفهٔ مماسی $F_g \sin\theta$ حول نقطهٔ محوری است. با جاگذاری

معادلهٔ ۱۵-۲۴ در معادلهٔ ۱۰-۴۴ ($\tau = I\alpha$) و قرار دادن mg به‌جای مقدار F_g، به‌دست می‌آوریم

$$-L(mg\sin\theta) = I\alpha \tag{۱۵-۲۵}$$

که در آن I لَختی چرخشی آونگ حول نقطهٔ محوری و α شتاب زاویه‌ای آونگ حول همان نقطه است.

اگر زاویهٔ θ را کوچک فرض کنیم، به‌طوری که بتوانیم $\sin\theta$ را به‌تقریب با θ (برحسب رادیان) برابر بگیریم، معادلهٔ ۱۵-۲۵ ساده‌تر می‌شود. (برای مثال، اگر $\theta = ۵{,}۰۰^\circ = ۰{,}۰۸۷۳\ \mathrm{rad}$ باشد، داریم $\sin\theta = ۰{,}۰۸۷۲$ که تفاوت این دو فقط درحدود ۰٫۱ درصد است.) با این تقریب و پس از اندکی باز آرایی، به‌دست می‌آید

$$\alpha = -\frac{mgL}{I}\theta \tag{۱۵-۲۶}$$

این معادله هم‌ارز زاویه‌ای معادلهٔ ۱۵-۸، شاخص استاندارد حرکت هماهنگ ساده، است. بنا بر این معادله، شتاب زاویه‌ای α آونگ متناسب است با جابه‌جایی زاویه‌ای θ با علامت مخالف. به این ترتیب، وقتی وزنهٔ آونگ همانند شکل ۱۵-۱۱الف به طرف راست حرکت می‌کند، شتاب رو به چپ آن افزایش می‌یابد تا آن‌که وزنه متوقف شود و سپس در جهت رو به چپ شروع به حرکت کند. آن‌گاه، در زمانی که وزنه در سمت چپ وضعیت تعادل قرار می‌گیرد، شتاب رو به راست در جهت بازگرداندن وزنه به طرف راست عمل می‌کند؛ این عملیات تا وقتی‌که نوسان رفت و برگشت حرکت هماهنگ ساده ادامه دارد تکرار می‌شوند. به سخن دقیق‌تر، حرکت آونگ ساده‌ای را که فقط با زاویه‌های کوچک در نوسان باشد به‌تقریب می‌توان حرکت هماهنگ ساده دانست. این محدودیت به زاویه‌های کوچک را به شیوهٔ دیگری می‌توان بیان کرد: **دامنهٔ زاویه‌ای** θ_m حرکت (زاویهٔ بیشینهٔ نوسان) باید کوچک باشد.

بسامد زاویه‌ای. در این‌جا هم با شگردی تر و تمیز سروکار داریم. چون معادلهٔ ۱۵-۲۶ به همان شکل معادلهٔ ۱۵-۸ برای حرکت هماهنگ ساده است، بسامد زاویه‌ای آونگ را بی‌درنگ می‌توان برابر با جذر ثابت‌های جلوی جابه‌جایی درنظر گرفت

$$\omega = \sqrt{\frac{mgL}{I}}$$

در مسئله‌های تکلیفی با سیستم‌های نوسانی‌ای روبه‌رو می‌شوید که شباهتی به آونگ‌ها ندارند. اما اگر بتوانید بین شتاب (خطی یا زاویه‌ای) و جابه‌جایی (خطی یا زاویه‌ای) رابطه برقرار کنید، بی‌درنگ می‌توانید بسامد زاویه‌ای را همچنان که در این‌جا دیده‌ایم تشخیص بدهید.

دوره. اکنون اگر این عبارت ω را در معادلهٔ ۱۵-۵ ($\omega = ۲\pi/T$) قرار دهیم، می‌بینیم که دورهٔ آونگ را می‌توان به شکل زیر نوشت

$$T = ۲\pi\sqrt{\frac{I}{mgL}} \tag{۱۵-۲۷}$$

تمام جرم هر آونگ ساده‌ای در جرم m وزنهٔ ذره‌گونهٔ آن، که به فاصلهٔ شعاعی L از نقطهٔ محوری قرار دارد، متمرکز شده است. به این ترتیب، لَختی چرخشی آونگ را با استفاده از معادلهٔ ۱۰–۳۳ ($I = mr^2$) می‌توان به‌صورت $I = mL^2$ نوشت. با قرار دادن این مقدار لَختی چرخشی در معادلهٔ ۱۵–۲۷، به‌دست می‌آید

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \quad \text{(آونگ ساده، دامنهٔ کوچک)} \qquad (۱۵\text{–}۲۸)$$

همهٔ نوسان‌های این فصل را نوسان با زاویهٔ کوچک در نظر می‌گیریم.

آونگ فیزیکی

هر آونگ واقعی، که معمولاً **آونگ فیزیکی** نامیده می‌شود، با توزیع جرم پیچیده‌ای که دارد ممکن است خیلی با آونگ ساده تفاوت داشته باشد. آیا آونگ فیزیکی هم حرکت هماهنگ ساده دارد؟ در صورتی که پاسخ مثبت باشد، دورهٔ حرکت آن چقدر است؟

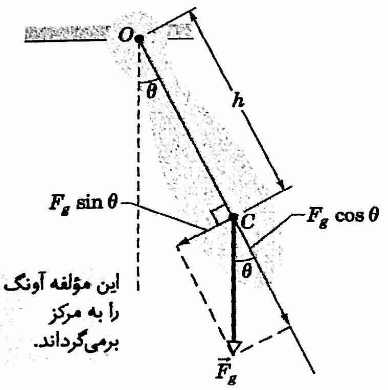
شکل ۱۵–۱۲، آونگ فیزیکی دلخواهی را نشان می‌دهد که به‌اندازهٔ زاویهٔ θ به یک طرف جابه‌جا شده است. نیروی گرانشیِ $\vec{F}_g$ بر مرکز جرم C آن، که به فاصلهٔ h از نقطهٔ محوری O قرار دارد، وارد می‌شود. مقایسهٔ شکل‌های ۱۵–۱۲ و ۱۵–۱۱ب، حاکی از یک تفاوت مهم بین آونگ فیزیکی و آونگ ساده است. مؤلفهٔ بازگردانندهٔ $F_g \sin\theta$ نیروی گرانشی در آونگ فیزیکی، به‌جای آن‌که بازوی گشتاوری به‌اندازهٔ طول تار L داشته باشد، دارای بازوی گشتاوری h از نقطهٔ محوری است. تحلیل آونگ فیزیکی، از هر جهت دیگری، عیناً همان تحلیل آونگ ساده است تا آن‌که به معادلهٔ ۱۵–۲۷ می‌رسیم. در این مورد هم (برای زاویه‌های کوچک θ_m)، معلوم می‌شود که حرکت را به‌تقریب می‌توان حرکت هماهنگ ساده در نظر گرفت.

اگر در معادلهٔ ۱۵–۲۷ فاصلهٔ h را جانشین طول L کنیم، دورهٔ حرکت این آونگ را می‌توانیم چنین بنویسیم

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgh}} \quad \text{(آونگ فیزیکی، دامنهٔ کوچک)} \qquad (۱۵\text{–}۲۹)$$

در این‌جا هم، مانند آونگ ساده، I لَختی چرخشی آونگ حول نقطهٔ O است. اما، اکنون I به‌سادگی برابر mL^2 نیست (مقدار آن بستگی به شکل آونگ فیزیکی دارد)؛ با وجود این، تناسب گشتاور لَختی با جرم m همچنان برقرار است.

آونگ فیزیکی در حالتی که از مرکز جرمش آویخته شده باشد، نوسان نخواهد کرد. این حالت، به‌طور رسمی، به این معنی است که در معادلهٔ ۱۵–۲۹ قرار داده باشیم $h = 0$. در این صورت، پیش‌بینی این معادله $T \to \infty$ خواهد بود، و این هم بدان معنی است که چنین آونگی هرگز یک نوسان کامل را به پایان نخواهد رساند.



شکل ۱۵–۱۲ آونگ فیزیکی. گشتاورنیروی بازگرداننده برابر $hF_g \sin\theta$ است. هنگامی‌که $\theta = 0$ است، مرکز جرم C مستقیماً در زیر نقطهٔ محوری O قرار می‌گیرد.

برای هر آونگ فیزیکی‌ای که با دورهٔ T حول نقطهٔ محوری معین O در نوسان باشد، یک آونگ سادهٔ متناظر به طول L_0 با همان دورهٔ T وجود دارد. طول L_0 این آونگ متناظر را به‌کمک معادلهٔ ۱۵–۲۸ می‌توان یافت. نقطه‌ای از آونگ فیزیکی را که به فاصلهٔ L_0 از نقطهٔ O قرار داشته باشد، مرکز نوسان آونگ فیزیکی برای آن نقطهٔ آویز معین می‌گویند.

اندازه‌گیری g

با استفاده از آونگ فیزیکی می‌توان شتاب سقوط آزاد g را در هر نقطه از سطح زمین اندازه گرفت. (این نوع اندازه‌گیری‌ها، که در جریان کاوش‌های ژئوفیزیکی انجام می‌شوند، از هزاران هزار هم پرشمارترند.)

برای تحلیل حالتی ساده، آونگی فیزیکی را به شکل میله‌ای یکنواخت به طول L در نظر می‌گیریم که از یک سرش آویزان شده است. برای چنین آونگی، فاصلهٔ بین نقطهٔ محوری و مرکز جرم در معادلهٔ ۱۵–۲۹ برابر $h = \frac{1}{2}L$ می‌شود. بنابر جدول ۱۰–۲ هـ، لَختی چرخشی این آونگ حول محور عمودی گذرنده از مرکز جرم برابر $\frac{1}{12}mL^2$ است. با توجه به قضیهٔ محور موازی، معادلهٔ ۱۰–۳۶ $(I = I_{com} + Mh^2)$، لَختی چرخشی آونگ حول محور عمودی گذرنده از یک سر میله را چنین خواهیم یافت

$$I = I_{com} + mh^2 = \frac{1}{12}mL^2 + m(\frac{1}{2}L)^2 = \frac{1}{3}mL^2 \qquad (۱۵\text{–}۳۰)$$

با قرار دادن $h = \frac{1}{2}L$ و $I = \frac{1}{3}mL^2$ در معادلهٔ ۱۵–۲۹، مقدار g را چنین به‌دست می‌آوریم

$$g = \frac{8\pi^2 L}{3T^2} \qquad (۱۵\text{–}۳۱)$$

پس، با اندازه‌گیری طول L و دورهٔ T، می‌توانیم مقدار g را در محل نوسان آونگ به‌دست آوریم. (اگر بخواهیم اندازه‌گیری‌های دقیقی انجام دهیم، ظریف‌کاری‌هایی را باید رعایت کنیم که یکی از آن‌ها به نوسان درآوردن آونگ در اتاقکی خالی از هواست.)

خودآزمایی ۵

سه آونگ فیزیکی به جرم‌های m_0، $2m_0$، و $3m_0$ را که شکل و اندازهٔ یکسان دارند، در سه نقطهٔ نزدیک به‌هم در سطح زمین آویزان کرده‌ایم. این جرم‌ها را برحسب دورهٔ آونگ، از زیاد به کم، مرتب کنید.

نمونه مسئلهٔ ۱۵-۰۵ آونگ فیزیکی، دوره و طول

در شکل ۱۵–۱۳الف، یک میلهٔ استاندارد اندازه‌گیری طول (به‌طول ۱۰۰ cm) را نشان داده‌ایم که حول نقطهٔ محوری یک سرش، که به فاصلهٔ h از مرکز جرم میله قرار دارد، نوسان می‌کند.

(الف) دورهٔ نوسان T برای این میله چقدر است؟

نکته

این میله را نمی‌توان آونگ ساده در نظر گرفت زیرا جرم آن در وزنه‌ای در انتهای طول و در نقطهٔ مقابل نقطهٔ محوری متمرکز نشده است—بنابراین، این میله آونگی فیزیکی است.

محاسبات: دورهٔ آونگ فیزیکی از معادلهٔ ۱۵-۲۹ به‌دست می‌آید، که برای محاسبهٔ آن به لَختی چرخشی I میله حول نقطهٔ محوری‌اش نیاز داریم. این میله را میله‌ای یکنواخت به طول L و به جرم m می‌گیریم. در این صورت، بنا بر معادلهٔ ۱۵-۳۰ داریم $I = \frac{1}{3}mL^2$، و فاصلهٔ h در معادلهٔ ۱۵-۲۹ هم برابر $\frac{1}{2}L$ است. با جاگذاری این کمیت‌ها در معادلهٔ ۱۵-۲۹، به‌دست می‌آوریم

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgh}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{3}mL^2}{mg(\frac{1}{2}L)}} \qquad (۱۵\text{-}۳۲)$$

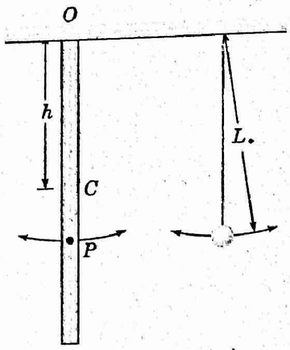
$$= 2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}} \qquad (۱۵\text{-}۳۳)$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{(2)(1.00\ \mathrm{m})}{(3)(9.8\ \mathrm{m/s^2})}} = 1.64\ \mathrm{s} \qquad (\text{پاسخ})$$

باید توجه داشت که این نتیجه مستقل از جرم آونگ است.

(ب) فاصلهٔ L_0 بین نقطهٔ محوری O این میله و مرکز نوسان آن چقدر است؟

محاسبات: در این‌جا طول L_0 آونگ ساده‌ای (به شکل ۱۵-۱۳ب) را باید محاسبه کنیم که دوره‌ای یکسان با دورهٔ آونگ فیزیکی (میله‌ای)



شکل ۱۵-۱۳ (الف) این میلهٔ استاندارد طول، در حالی‌که از یک سرش آویزان شده است، همانند آونگی فیزیکی به نوسان درمی‌آید. (ب) آونگ ساده‌ای به طول L_0 چنان برگزیده شده است که دورهٔ حرکت آن با آونگ فیزیکی (الف) برابر است. نقطهٔ P روی آونگ فیزیکی (الف) مرکز نوسان آن را نشان می‌دهد.

شکل ۱۵-۱۳الف داشته باشد. با مساوی گرفتن معادله‌های ۱۵-۲۸ و ۱۵-۳۳، داریم

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L_0}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}}$$

که از آن به‌دست می‌آید

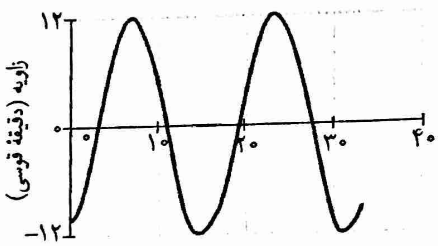
$$L_0 = \frac{2}{3}L \qquad (۱۵\text{-}۳۵)$$

$$= (\tfrac{2}{3})(100\ \mathrm{cm}) = 66.7\ \mathrm{cm} \qquad (\text{پاسخ})$$

در شکل ۱۵-۱۳الف، نقطهٔ P این فاصله را از نقطهٔ آویز O نشان می‌دهد. به این ترتیب، نقطهٔ P همان مرکز نوسان میله برای نقطهٔ آویز مورد نظر است. نقطهٔ P برای نقطهٔ آویزی دیگر، متفاوت خواهد بود.

حرکت هماهنگ ساده و حرکت دایره‌ای یکنواخت

گالیله در سال ۱۶۱۰ میلادی، با استفاده از تلسکوپ تازه‌ساخته‌اش، قمرهای اصلی چهارگانهٔ سیارهٔ مشتری را کشف کرد. وی، در رصدهای چندین هفته‌ای‌اش، متوجه شد که هریک از این قمرها نسبت به سیاره با حرکتی که امروزه آن را حرکت هماهنگ ساده می‌نامیم در حال رفت و برگشت است، و قرص سیاره در نقطهٔ وسط این حرکت قرار دارد. یادداشت رصدهای گالیله، با دست‌خط خودش، همچنان در دسترس است. اِی.پی.فرنچ از دانشگاه MIT، با استفاده از داده‌های گالیله، موقعیت مکانی قمر کالیستو را نسبت به مشتری محاسبه کرد. در شکل ۱۵-۱۴، منحنی رسم شده بهترین برازش را به داده‌های رصدی گالیله نشان می‌دهد. این منحنی قویاً حاکی از برقراری معادلهٔ ۱۵-۳،



شکل ۱۵-۱۴ زاویهٔ بین سیارهٔ مشتری و قمر کالیستوی آن از دید ناظر زمینی. این منحنی بر پایهٔ اندازه‌گیری‌های گالیله در سال ۱۶۱۰ رسم شده است، منحنی‌ای که بهترین برازش به این داده‌ها را نشان می‌دهد، و قویاً حاکی از وجود حرکت هماهنگ ساده است. با توجه به فاصلهٔ میانگینی که سیارهٔ مشتری از زمین دارد، هر ۱۰ دقیقهٔ قوسی متناظر با حدود 2×10^6 km می‌شود.

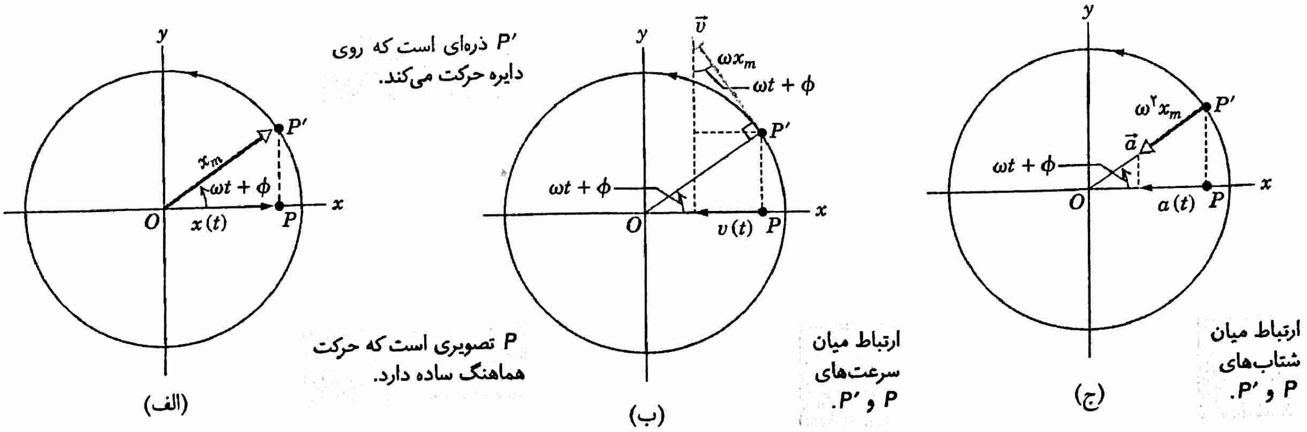
و وجود تابع جابه‌جایی خاص حرکت هماهنگ ساده، برای این داده‌هاست. با توجه به این نمودار، دورهٔ حرکت را درحدود ۱۶٫۸ روز به‌دست می‌آوریم. اما این دوره، دقیقاً دورهٔ حرکت چه چیزی است؟ هیچ قمری نمی‌تواند مانند قطعه‌ای که به انتهای یک فنر چسبیده است، حرکت نوسانی رفت و برگشتی داشته باشد. پس، معادلهٔ ۱۵-۳ چه ارتباطی ممکن است با قمر کالیستو داشته باشد؟

قمر کالیستو، در واقع، با مقدار سرعتی که اساساً ثابت است در مداری که اساساً دایره‌ای است به دور سیارهٔ مشتری در حرکت است. حرکت واقعی این قمر حرکت دایره‌ای یکنواخت است، که هیچ شباهتی به حرکت هماهنگ ساده ندارد. آنچه گالیله در رصدهای خود دید ــــ و ما هم به‌کمک یک دوربین دوچشمی خوب و با کمی حوصله و شکیبایی می‌توانیم ببینیم ــــ تصویر این حرکت دایره‌ای یکنواخت روی خطی است که در صفحهٔ این حرکت قرار دارد. با توجه به رصدهای فوق‌العادهٔ گالیله به این نتیجه می‌رسیم که حرکت هماهنگ ساده، حرکت دایره‌ای یکنواختی است که از پهلو یا از لبه به آن نگریسته شود (خط دید باید در صفحهٔ دایره قرار بگیرد). به زبان رسمی‌تر:

حرکت هماهنگ ساده، تصویر حرکت دایره‌ای یکنواخت روی یکی از قطرهای دایرهٔ مسیر است.

شکل ۱۵-۱۵الف نمونه‌ای از این حرکت و تصویر آن را نشان می‌دهد. این شکل ذرهٔ مرجع P' را نشان می‌دهد که، با سرعت زاویه‌ای (ثابت) ω، روی یک دایرهٔ مرجع به‌طور یکنواخت در حرکت است. شعاع x_m این دایره همان اندازهٔ بردار مکان این ذره است. در هر زمان t، موقعیت زاویه‌ای این ذره عبارت است از $\omega t + \phi$، که در آن ϕ موقعیت زاویه‌ای ذره در $t = 0$ است.

مکان. تصویر ذرهٔ P' در روی محور x نقطه‌ای به‌نام P است، که آن را به‌عنوان ذرهٔ دوم در نظر می‌گیریم. تصویر بردار مکان ذرهٔ P' در روی محور x موقعیت مکانی $x(t)$ نقطهٔ P را به‌دست می‌دهد. (آیا می‌توانید مؤلفهٔ x را در مثلث شکل ۱۵-۵الف تشخیص بدهید؟) به این ترتیب، داریم



شکل ۱۵-۱۵ (الف) ذرهٔ مرجع P' با حرکت دایره‌ای یکنواخت روی دایرهٔ مرجعی به شعاع x_m در حرکت است. تصویر P این ذره، روی محور x، حرکت هماهنگ ساده دارد. (ب) تصویر سرعت $\vec{v}$ ذرهٔ مرجع برابر است با سرعت حرکت هماهنگ ساده. (ج) تصویر شتاب شعاعی $\vec{a}$ ذرهٔ مرجع برابر است با شتاب حرکت هماهنگ ساده.

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \phi) \qquad (۱۵\text{–}۳۶)$$

که دقیقاً همان معادلهٔ ۱۵-۳ است. پس، نتیجه‌گیری ما درست است. اگر ذرهٔ مرجع P' حرکت دایره‌ای یکنواخت داشته باشد، ذرهٔ تصویریِ P آن در امتداد یکی از قطرهای دایرهٔ مسیر دارای حرکت هماهنگ ساده است.

سرعت. شکل ۱۵-۱۵ب سرعت $\vec{v}$ ذرهٔ مرجع را نشان می‌دهد. با توجه به معادلهٔ ۱۰-۱۸($v = \omega r$)، اندازهٔ این بردار سرعت برابر ωx_m است؛ تصویر این بردار سرعت در روی محور x عبارت است از

$$v(t) = -\omega x_m \sin(\omega t + \phi) \qquad (۱۵\text{–}۳۷)$$

که دقیقاً همان معادلهٔ ۱۵-۶ است. علامت منفی در این‌جا به این دلیل ظاهر شده است که مؤلفهٔ سرعت P در شکل ۱۵-۱۵ب در جهت رو به چپ، یعنی جهت منفی محور x، است. (علامت منفی با مشتق معادلهٔ ۱۵-۳۶ نسبت به زمان همخوانی دارد).

شتاب. شکل ۱۵-۱۵ج شتاب شعاعی $\vec{a}$ ذرهٔ مرجع را نشان می‌دهد. با توجه به معادلهٔ ۱۰-۲۳ ($a_r = \omega^2 r$)، اندازهٔ این بردار شتاب شعاعی برابر $\omega^2 x_m$ می‌شود؛ تصویر آن روی محور x عبارت است از

$$a(t) = -\omega^2 x_m \cos(\omega t + \phi) \qquad (۱۵\text{–}۳۸)$$

که دقیقاً همان معادلهٔ ۱۵-۷ است. به این ترتیب، با نگاه کردن به هر یک از کمیت‌های جابه‌جایی، سرعت، و شتاب می‌توان فهمید که تصویر حرکت دایره‌ای یکنواخت حتماً حرکتی از نوع هماهنگ ساده است.

✓

۵-۱۵ حرکت هماهنگ سادهٔ میرا

هدف‌های یادگیری

پس از خواندن این واحد، باید بتوانید...

۱۵-۳۸ حرکت نوسانگر هماهنگ سادهٔ میرا را توصیف کنید، و نمودار مکان این نوسانگر را برحسب زمان رسم کنید.

۱۵-۳۹ برای هر زمان داده شده‌ای، مکان نوسانگر هماهنگ سادهٔ میرا را به‌دست آورید.

۱۵-۴۰ برای هر زمان داده شده‌ای، دامنهٔ حرکت نوسانگر هماهنگ سادهٔ میرا را تعیین کنید.

۱۵-۴۱ بسامد زاویه‌ای نوسانگر هماهنگ سادهٔ میرا را برحسب ثابت فنر، ثابت میرایی، و جرم محاسبه کنید، و بسامد زاویه‌ای را در حالتی که ثابت میرایی کوچک است به تقریب به‌دست آورید.

۱۵-۴۲ معادله‌ای را که (به‌طور تقریبی) کل انرژی نوسانگر هماهنگ سادهٔ میرا را برحسب زمان تعیین می‌کند، به‌کار ببرید.

نکته‌های اصلی

● انرژی مکانیکی E در هر سیستم نوسانی واقعی با ادامهٔ نوسان کاهش می‌یابد زیرا نیروهای خارجی، مثل اصطکاک و پس‌کشی، با جلوگیری از نوسان‌ها انرژی مکانیکی را به انرژی گرمایی تبدیل می‌کنند. به این ترتیب، نوسانگر واقعی و حرکت آن میرا شونده‌اند.

● اگر نیروی میرانندهٔ به‌صورت $\vec{F}_d = -b\vec{v}$ باشد، که در آن $\vec{v}$ سرعت نوسانگر و b ثابت میرایی است، جابه‌جایی نوسانگر چنین خواهد بود

$$x(t) = x_m e^{-bt/2m}\cos(\omega' t + \phi)$$

که در آن ω' همان بسامد زاویه‌ای نوسانگر میراست و چنین داده می‌شود

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}$$

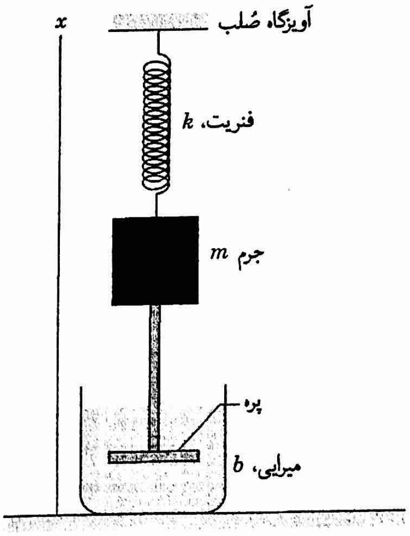
● اگر ثابت میرایی کوچک باشد ($b \ll \sqrt{km}$)، در این صورت داریم $\omega' \approx \omega$ که در آن ω بسامد زاویه‌ای نوسانگر درحالتی است که میرایی صفر است. به‌ازای b کوچک، انرژی مکانیکی E نوسانگر چنین است

$$E(t) \approx \tfrac{1}{2}kx_m^2 e^{-bt/m}$$

حرکت هماهنگ سادهٔ میرا

حرکت نوسانی آونگ در زیر آب دوام چندانی نخواهد داشت، زیرا نیروی پس‌کشی ناشی از آب حرکت آونگ را به سرعت مستهلک می‌کند. آونگی که در هوا نوسان می‌کند دوام بیشتری دارد، ولی حرکت این آونگ هم سرانجام از بین می‌رود زیرا بر اثر نیروی پس‌کشی‌ای که هوا بر آونگ وارد می‌کند (و نیروی اصطکاکی که در نقطهٔ آویز وارد می‌شود) انرژی مکانیکی آونگ متحرک تبدیل به گرما می‌شود.

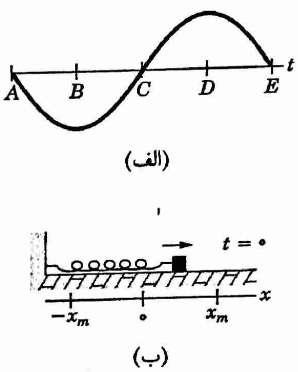
هنگامی که نیروی خارجی باعث استهلاک حرکت نوسانگر شود، نوسانگر و حرکت آن را **میرا** می‌نامند. نمونه‌ای آرمانی از یک نوسانگر میرا را در شکل ۱۵-۱۶ نشان داده‌ایم، که در آن قطعه‌ای به جرم m در حالت آویخته از فنری با ثابت فنر k در راستای قائم در نوسان است. میله‌ای متصل به یک پره هم (که هر دو بدون جرم در نظر گرفته می‌شوند)، در حالی که پره در مایعی غوطه‌ور است، از قطعه آویزان شده است. مایع موجود در اطراف پره، در حین بالا و پایین رفتن پره، بر آن و درنتیجه بر کل سیستم نوسان‌کننده نیروی پس‌کشی بازدارنده‌ای وارد می‌کند. به مرور زمان، از انرژی مکانیکی سیستم قطعه-فنر کاسته می‌شود، و انرژی کاهش یافته به انرژی گرمایی پره و مایع تبدیل می‌شود.



شکل ۱۵-۱۶ نوسانگر هماهنگ ساده و میرایی آرمانی آن. پره‌ای که در مایع غوطه‌ور شده است، در حالی‌که قطعه به موازات محور x در نوسان است، نیروی میرانندهٔ‌ای بر آن وارد می‌کند.

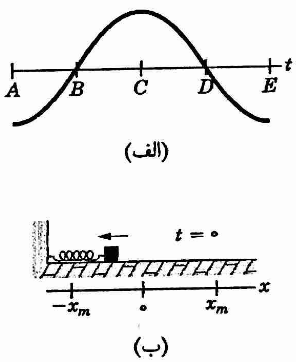
جابه‌جایی‌های زیر برای این ذره است: $-x_m$، $+x_m$، صفر، بین $-x_m$ و صفر، یا بین صفر و $+x_m$؟

۴ کدام‌یک از رابطه‌های زیر، که برای شتاب و جابه‌جایی یک ذره نوشته شده‌اند، مربوط به حرکت هماهنگ ساده است: (الف) $a = 0.5x$، (ب) $a = 400x^2$، (ج) $a = -20x$، (د) $a = -3x^2$؟



شکل ۱۵-۲۲ پرسش ۵.

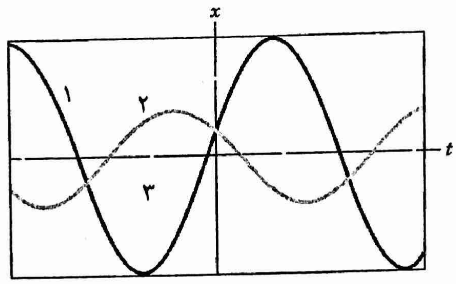
۵ می‌خواهیم شکل ۱۵-۲۲الف را چنان کامل کنیم که معرف سرعت v برحسب زمان t برای نوسانگر قطعه-فنری که در شکل ۱۵-۲۲ب نشان داده شده است، در زمان $t = 0$، باشد. (الف) در شکل ۱۵-۲۲الف، محور (قائم) v در کدام نقطهٔ علامت‌گذاری شده یا بین کدام دو نقطه باید رسم شود؟ (برای مثال، آیا این محور باید محور t را در نقطهٔ A قطع کند یا در فاصلهٔ بین A و B؟) (ب) اگر سرعت قطعه به‌صورت $v = -v_m \sin(\omega t + \phi)$ در دست باشد، اندازهٔ ϕ چقدر است؟ این ثابت فاز را مثبت در نظر بگیرید، و چنانچه مقدار مشخصی (مثل $+\pi/2$ رادیان) برای آن به‌دست نیامد، گسترهٔ مقادیر آن را (مثلاً به‌صورت بین صفر و $\pi/2$) معین کنید.



شکل ۱۵-۲۳ پرسش ۶.

۶ می‌خواهیم شکل ۱۵-۲۳الف را چنان تکمیل کنیم که نموداری از شتاب a برحسب زمان t برای نوسانگر قطعه-فنر شکل ۱۵-۲۳ب در زمان $t = 0$ باشد. (الف) در شکل ۱۵-۲۳الف، محور (قائم) شتاب a در کدام نقطهٔ علامت‌گذاری شده یا در کدام ناحیهٔ بین این نقاط باید محور t را قطع کند؟ (برای مثال، آیا محور a محور t را باید در نقطهٔ A قطع کند یا در ناحیهٔ بین نقاط A و B؟) (ب) اگر شتاب قطعه با عبارت $a = -a_m \cos(\omega t + \phi)$ داده شده باشد، اندازهٔ ϕ چقدر است؟ ثابت فاز را مثبت در نظر بگیرید، و اگر نمی‌توانید مقدار آن را (مثلاً به‌صورت $+\pi/2$ رادیان) به‌دست دهید، گسترهٔ مقادیر را (مثلاً به‌صورت بین صفر و $\pi/2$) مشخص کنید.

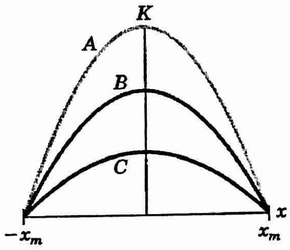
۷ منحنی‌های جابه‌جایی $x(t)$ سه آزمایش برای سیستم خاصی از قطعه-فنر را، که حرکت هماهنگ ساده دارد، در شکل ۱۵-۲۴ نشان داده‌ایم. این منحنی‌ها را برحسب کمیت‌های زیر، از زیاد به کم، مرتب



شکل ۱۵-۲۴ پرسش ۷.

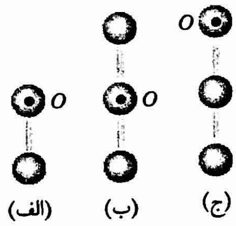
کنید: (الف) بسامد زاویه‌ای سیستم، (ب) انرژی پتانسیل فنر در زمان $t = 0$، (ج) انرژی جنبشی قطعه در $t = 0$، (د) مقدار سرعت قطعه در $t = 0$، و (هـ) بیشینهٔ انرژی جنبشی قطعه.

۸ شکل ۱۵-۲۵ نمودارهای انرژی جنبشی K برحسب موقعیت مکانی x را برای سه نوسانگر هماهنگ با جرم‌های یکسان نشان می‌دهد. این نمودارها را (الف) برحسب ثابت فنر و (ب) برحسب دورهٔ نوسان، از زیاد به کم، مرتب کنید.



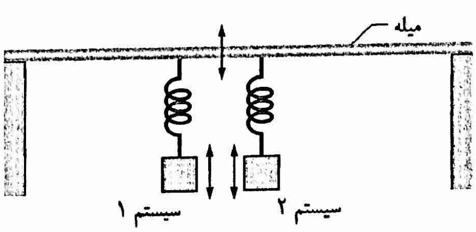
شکل ۱۵-۲۵ پرسش ۸.

۹ سه آونگ فیزیکی متشکل از کره‌های یکنواختِ یکسان و با جرم‌های یکسان را در شکل ۱۵-۲۶ نشان داده‌ایم که با میله‌های صُلب یکسان و به جرم ناچیز به هم متصل شده‌اند. هر یک از این آونگ‌ها به حالت قائم آویخته شده است و می‌تواند حول محوری که از O می‌گذرد، نوسان کند. این آونگ‌ها را برحسب دورهٔ نوسان، از زیاد به کم، مرتب کنید.



شکل ۱۵-۲۶ پرسش ۹.

۱۰ می‌خواهیم وسیلهٔ انتقال نوسان شکل ۱۵-۲۷ را بسازیم. این وسیله از دو سیستم قطعه-فنر تشکیل می‌شود که از میله‌ای انعطاف‌پذیر آویزان شده‌اند. هنگامی‌که فنر سیستم ۱ را می‌کشیم و سپس به حال خود رها می‌کنیم، حرکت هماهنگ ساده‌ای که پدید می‌آید میله را با بسامد f_1 به نوسان درمی‌آورد. در این صورت، میله هم نیروی وادارنده‌ای با همان بسامد f_1

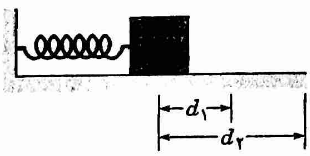


شکل ۱۵-۲۷ پرسش ۱۰.

بسامد زاویه‌ای ده

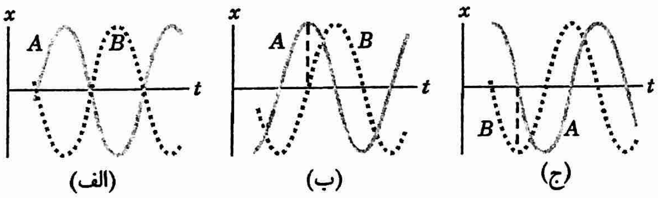
بر سیستم ۲ وارد می‌آورد. فرض کنید چهار فنر با ثابت‌های فنر $k=$ ۱۶۰۰، ۱۵۰۰، ۱۴۰۰، ۱۲۰۰ N/m، و چهار قطعه به جرم‌های $m =$ ۸۰۰، ۵۰۰، ۴۰۰، ۲۰۰ kg در اختیار داریم. به‌طور ذهنی مشخص کنید که کدام فنر را با کدام قطعه باید در این دو سیستم به‌کار برد تا دامنهٔ نوسان‌ها در سیستم ۲ به حداکثر برسد.

۱۱ در شکل ۱۵-۲۸، سیستم قطعه-فنری را نشان داده‌ایم که در دو آزمایش دارای حرکت هماهنگ ساده شده است. در آزمایش نخست، قطعه را پس از، کشیدگی و ایجاد جابه‌جایی d_1 از وضعیت تعادل به حال خود رها کرده‌ایم. در آزمایش دوم، این قطعه پس از کشیدگی و ایجاد جابه‌جایی بزرگ‌تر d_2 به حال خود رها شده است. آیا (الف) دامنه، (ب) دوره، (ج) بسامد، (د) بیشینهٔ انرژی جنبشی، و (هـ) بیشینهٔ انرژی پتانسیل در آزمایش دوم نسبت به همین کمیت‌ها در آزمایش اول بیشتر می‌شود، کمتر می‌شود، یا یکسان باقی می‌ماند؟



شکل ۱۵-۲۸ پرسش ۱۱.

۱۲ شکل ۱۵-۲۹، در سه حالت، جابه‌جایی‌های $x(t)$ یک جفت نوسانگر هماهنگ سادهٔ A و B را نشان می‌دهد که جز به‌لحاظ فاز اختلافی با هم ندارند. برای هر جفت، به چه تغییر فازی (برحسب رادیان و برحسب درجه) نیاز داریم تا منحنی A بر منحنی B منطبق شود؟ از میان پاسخ‌های پرشمار قابل قبول، تغییر فاز با کوچک‌ترین قدرمطلق را برگزینید.



شکل ۱۵-۲۹ پرسش ۱۲.

مسئله‌ها[1]

واحد ۱۵-۱ حرکت هماهنگ ساده

★۱ جسمی که حرکت هماهنگ ساده دارد، در طول مدت ۰٫۲۵ s از یک نقطهٔ با سرعت صفر به نقطهٔ بعدی با همین سرعت می‌رود. فاصلهٔ بین این دو نقطه برابر ۳۶ cm است. (الف) دوره، (ب) بسامد، و (ج) دامنهٔ این حرکت را به‌دست آورید.

★۲ جسمی به جرم ۰٫۱۲ kg را در نظر بگیرید که با دامنهٔ ۸٫۵ cm و دورهٔ ۰٫۲۰ s حرکت هماهنگ ساده دارد. (الف) اندازهٔ بیشینهٔ نیروی وارد بر آن چقدر است؟ (ب) اگر این نوسان‌ها را فنری پدید آورده باشد، ثابت فنر چقدر است؟

★۳ حداکثر شتاب سکویی که با دامنهٔ ۲٫۲۰ cm و بسامد ۶٫۶۰ Hz نوسان می‌کند، چقدر است؟

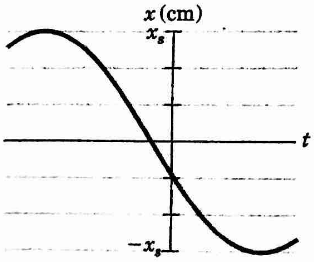
★۴ تا آنجا که به نوسان‌های قائم اتومبیل مربوط می‌شود، می‌توان آن را سوار بر چهار فنر یکسان در نظر گرفت. این فنرها را در اتومبیل معینی چنان تنظیم کرده‌اند که بسامد نوسان‌ها برابر ۳٫۰۰ Hz است. (الف) اگر جرم این اتومبیل برابر ۱۴۵۰ kg و توزیع جرم روی فنرها یکنواخت باشد، ثابت فنر هر فنر چقدر است؟ (ب) اگر پنج سرنشین، هریک به جرم متوسط ۷۳٫۰ kg و با توزیع جرم یکنواخت سوار این اتومبیل شده باشند، بسامد نوسان آن چقدر خواهد شد؟

★۵ تیغهٔ یک دستگاه ریش‌تراش برقی با حرکت هماهنگ ساده به بسامد ۱۲۰ Hz، در فاصله‌ای به‌اندازهٔ ۲٫۰ mm، جلو و عقب می‌رود. (الف) دامنهٔ حرکت، (ب) بیشینهٔ مقدار سرعت تیغه، و (ج) بیشینهٔ مقدار شتاب تیغه را به‌دست آورید.

★۶ ذره‌ای به جرم $1{,}00 \times 10^{-20}$ kg را در نظر بگیرید که با دورهٔ $1{,}00 \times 10^{-5}$ s و حداکثر مقدار سرعت $1{,}00 \times 10^{3}$ m/s حرکت هماهنگ ساده دارد. (الف) بسامد زاویه‌ای و (ب) بیشینهٔ جابه‌جایی این ذره را محاسبه کنید.

★۷ بلندگویی را در نظر بگیرید که صدای موسیقی را با نوسان‌های دیافراگمی، که دامنهٔ ارتعاش آن محدود به ۱٫۰۰ μm است، تولید می‌کند. (الف) در چه بسامدی اندازهٔ شتاب a دیافراگم برابر g می‌شود؟ (ب) در بسامدهای بالاتر، آیا مقدار a بیشتر از g می‌شود یا کمتر از آن؟

★۸ ثابت فاز نوسانگر هماهنگی را که تابع مکان $x(t)$ آن در شکل ۱۵-۳۰ نشان داده شده است، با فرض آنکه تابع مکان به‌صورت $x = x_m \cos(\omega t + \phi)$ باشد، به‌دست آورید. مقیاس محور قائم با $x_s = 6{,}0$ cm مشخص می‌شود.



شکل ۱۵-۳۰ مسئلهٔ ۸.

★۹ حرکت هماهنگ سادهٔ جسمی به‌صورت زیر در دست است:

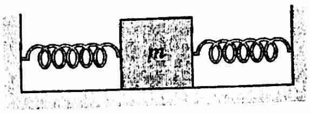
$$x = (6{,}0\ \text{m}) \cos[(3\pi\ \text{rad/s})t + \pi/3\ \text{rad}]$$

۱. تعداد ستاره‌هایی که در کنار هر مسئله آمده است، سطح دشواری آن را از کم به زیاد نشان می‌دهد.

در زمان $t = ۲٫۰\ s$، (الف) جابه‌جایی، (ب) سرعت، (ج) شتاب، و (د) فاز حرکت را به‌دست آورید. همچنین، (هـ) بسامد و (و) دورهٔ حرکت را معین کنید.

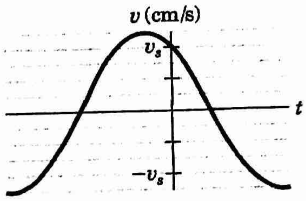
★۱۰ مدت زمان $۰٫۷۵\ s$ طول می‌کشد تا یک سیستم قطعه-فنرِ در حال نوسان شروع به تکرار حرکت خود کند. (الف) دورهٔ حرکت، (ب) بسامد برحسب هرتز، و (ج) بسامد زاویه‌ای آن را برحسب رادیان بر ثانیه به‌دست آورید.

★۱۱ در شکل ۱۵-۳۱، دو فنر یکسان با ثابت فنر $۷۵۸۰\ N/m$ به قطعه‌ای به جرم $۰٫۲۴۵\ kg$ متصل شده‌اند. بسامد نوسان را روی کف بدون اصطکاک به‌دست آورید.



شکل ۱۵-۳۱ مسئله‌های ۱۱ و ۲۱.

★۱۲ برای نوسانگر هماهنگی که تابع سرعت $v(t)$ آن در شکل ۱۵-۳۲ داده شده است، با فرض آن‌که تابع مکان $x(t)$ به‌صورت $x = x_m \cos(\omega t + \phi)$ باشد، ثابت فاز را به‌دست آورید. مقیاس محور قائم با $v_s = ۴٫۰\ cm/s$ مشخص می‌شود.



شکل ۱۵-۳۲ مسئلهٔ ۱۲.

★۱۳ نوسانگری را در نظر بگیرید که شامل قطعه‌ای به جرم $۰٫۵۰۰\ kg$ و فنری متصل به آن است. این نوسانگر وقتی با دامنهٔ $۳۵٫۰\ cm$ به نوسان درآورده می‌شود، حرکت آن در هر $۰٫۵۰۰\ s$ تکرار می‌شود. (الف) دورهٔ حرکت، (ب) بسامد نوسان، (ج) بسامد زاویه‌ای، (د) ثابت فنر، (هـ) بیشینهٔ مقدار سرعت، و (و) اندازهٔ بیشینهٔ نیروی وارد بر قطعه را که ناشی از فنر است، به‌دست آورید.

★★۱۴ نوسانگر هماهنگ ساده‌ای را در نظر بگیرید که از قطعه‌ای به جرم $۲٫۰۰\ kg$، که به فنری با ثابت فنر $۱۰۰\ N/m$ متصل شده است، تشکیل می‌شود. در زمان $t = ۱٫۰۰\ s$، موقعیت مکانی و سرعت قطعه عبارت‌اند از $x = ۰٫۱۲۹\ m$ و $v = ۳٫۴۱۵\ m/s$. (الف) دامنهٔ نوسان‌ها چقدر است؟ در زمان $t = ۰\ s$، (ب) موقعیت مکانی و (ج) سرعت قطعه چقدر بودند؟

★★۱۵ دو ذره در امتداد پاره‌خط واحدی به طول A، با حرکت هماهنگ ساده، نوسان می‌کنند. دورهٔ حرکت هریک از این دو ذره برابر $۱٫۵\ s$، و اختلاف فازشان برابر $\pi/۶$ رادیان است. (الف) فاصلهٔ بین این دو ذره در زمان $۰٫۵۰\ s$، بعد از آن‌که ذرهٔ مؤخّر یکی از دو سر مسیر حرکت را ترک کرده است، چقدر می‌شود (برحسب A)؟ (ب) آیا حرکت این دو ذره در این لحظه هم‌جهت است، به طرف یکدیگر است، یا در جهت دور شدن از هم است؟

★★۱۶ دو ذره را در نظر بگیرید که با دامنه و بسامد یکسان در امتداد دو خط موازی نزدیک به هم حرکت هماهنگ ساده دارند. این دو ذره، هر بار که از برابر هم می‌گذرند، با جابه‌جایی‌هایی برابر با نصف دامنه در جهت‌های مخالف هم در حرکت‌اند. اختلاف فاز بین این دو ذره چقدر است؟

★★۱۷ نوسانگری را در نظر بگیرید که از قطعه‌ای متصل به یک فنر ($k = ۴۰۰\ N/m$) تشکیل شده است. موقعیت مکانی این قطعه (نسبت به وضعیت تعادل)، سرعت، و شتاب آن، در زمان t، عبارت‌اند از $x = ۰٫۱۰۰\ m$، $v = -۱۳٫۶\ m/s$، و $a = -۱۲۳\ m/s^2$. (الف) بسامد نوسان، (ب) جرم قطعه، و (ج) دامنهٔ حرکت این نوسانگر را به‌دست آورید.

★★۱۸ در لنگرگاهی معین، امواج جزر و مد سبب می‌شوند که سطح آب اقیانوس به‌صورت حرکت هماهنگ ساده، با دوره‌ای به مدت $۱۲٫۵\ h$، در فاصلهٔ قائم d (از بالاترین سطح تا پایین‌ترین سطح) بالا و پایین برود. چه مدت زمانی طول می‌کشد تا آب از بالاترین سطح به اندازهٔ $۰٫۲۵۰d$ پایین‌تر بیاید؟

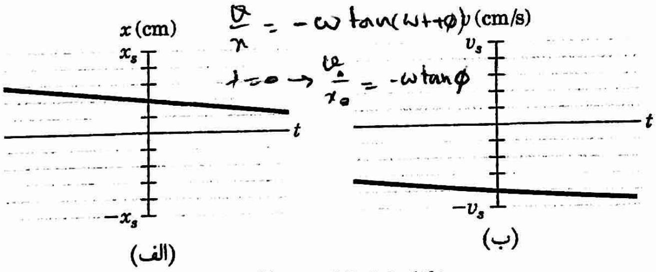
★★۱۹ قطعه‌ای را در نظر بگیرید که روی پیستون متحرکی، که در راستای قائم حرکت هماهنگ ساده دارد، قرار گرفته است. (الف) اگر دورهٔ این حرکت هماهنگ ساده برابر $۱٫۰\ s$ باشد، در چه دامنهٔ حرکتی قطعه و پیستون از هم جدا خواهند شد؟ (ب) اگر دامنهٔ حرکت پیستون برابر $۵٫۰\ cm$ باشد، بیشینهٔ بسامدی که قطعه را با پیستون پیوسته در تماس نگه‌می‌دارد چقدر است؟

★★۲۰ شکل ۱۵-۳۳الف بخشی از نمودار تابع مکان $x(t)$ برای یک نوسانگر هماهنگ ساده با بسامد زاویه‌ای $۱٫۲۰\ rad/s$ است؛ شکل ۱۵-۳۳ب هم بخشی از نمودار تابع سرعت $v(t)$ این نوسانگر است. مقیاس محورهای قائم را $x_s = ۵٫۰\ cm$ و $v_s = ۵٫۰\ cm/s$ مشخص می‌کنند. اگر تابع مکان به‌صورت $x = x_m \cos(\omega t + \phi)$ باشد، ثابت فاز این حرکت هماهنگ ساده چقدر است؟

$v = -x_m \omega \sin(\omega t + \phi)$

$\frac{v}{x} = -\omega \tan(\omega t + \phi)$

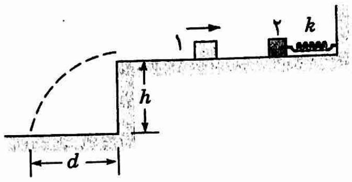
$t = 0 \rightarrow \frac{v_0}{x_0} = -\omega \tan\phi$



شکل ۱۵-۳۳ مسئلهٔ ۲۰.

★★۲۱ در شکل ۱۵-۳۱، دو فنر به قطعه‌ای که می‌تواند روی کف بدون اصطکاکی نوسان کند، متصل شده‌اند. اگر فنر سمت چپ را حذف کنیم، قطعه با بسامد $۳۰\ Hz$ نوسان می‌کند. اگر به‌جای آن فنر سمت راست را حذف کنیم، قطعه با بسامد $۴۵\ Hz$ نوسان می‌کند. در حالتی که هر دو فنر به قطعه متصل باشند، این قطعه با چه بسامدی به نوسان درمی‌آید؟

۲۲★★ شکل ۱۵-۳۴ قطعهٔ ۱ به جرم ۰٫۲۰۰ kg را نشان می‌دهد که با سرعت ۸٫۰۰ m/s در جهت رو به راست روی سطح مرتفع بدون اصطکاکی در حال لغزیدن است. این قطعه به‌طور کشسان با قطعهٔ در حال سکون ۲، که به فنری با ثابت فنر ۱۲۰۸٫۵ N/m متصل شده است، برخورد می‌کند. (وجود فنر را در این برخورد بی‌تأثیر در نظر بگیرید.) بعد از برخورد، قطعهٔ ۲ با حرکت هماهنگ ساده‌ای به دورهٔ ۰٫۱۴۰ s به نوسان درمی‌آید، و قطعهٔ ۱ در جهت مقابل سُر می‌خورد و پس از پرتاب از لبهٔ سطح مرتفع و سقوط از ارتفاع $h = ۴٫۹۰$ m در فاصلهٔ d از پای آن در سطح پایین‌تر فرود می‌آید. اندازهٔ d چقدر است؟

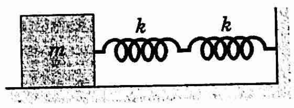


شکل ۱۵-۳۴ مسئلهٔ ۲۲.

۲۳★★ قطعه‌ای را روی سطح افقی میزی (میز لرزان)، که با حرکت هماهنگ ساده به بسامد ۲٫۰ Hz به‌طور افقی به جلو و عقب می‌رود، قرار داده‌ایم. ضریب اصطکاک ایستایی بین قطعه و سطح اتکای آن ۰٫۵۰ است. دامنهٔ این حرکت هماهنگ ساده را، پیش از آن‌که قطعه در روی سطح شروع به لغزش کند، تا چه حد می‌توان افزایش داد؟

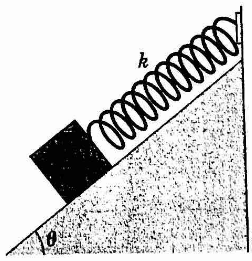
خود میز در حال حرکت هماهنگ است.

۲۴★★★ در شکل ۱۵-۳۵، دو فنر به‌هم بسته شده را به قطعه‌ای به جرم ۰٫۲۴۵ kg متصل کرده‌ایم و قطعه را روی کف بی‌اصطکاکی به نوسان درآورده‌ایم. ثابت فنر هریک از این فنرها برابر $k = ۶۴۳۰$ N/m است. بسامد این نوسان‌ها چقدر است؟



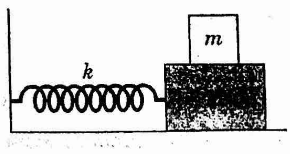
شکل ۱۵-۳۵ مسئلهٔ ۲۴.

۲۵★★★ در شکل ۱۵-۳۶، قطعه‌ای به وزن ۱۴٫۰ N را نشان داده‌ایم که، در حالی‌که به فنری بی‌جرم بسته شده است، می‌تواند بدون اصطکاک روی سطح شیبداری به زاویهٔ $\theta = ۴۰٫۰°$ سُر بخورد. طول فنر کشیده نشده ۰٫۴۵۰ m و ثابت فنر ۱۲۰ N/m است. (الف) نقطهٔ تعادل قطعه از بالاترین نقطهٔ سطح شیبدار چقدر فاصله دارد؟ (ب) اگر این قطعه را اندکی به طرف پایین بکشیم و سپس به حال خود رها کنیم، دورهٔ نوسان‌های حاصل چقدر می‌شود؟



شکل ۱۵-۳۶ مسئلهٔ ۲۵.

۲۶★★★ در شکل ۱۵-۳۷، مجموعه‌ای از دو قطعه ($M = ۱۰$ kg و $m = ۱٫۸$ kg) و یک فنر ($k = ۲۰۰$ N/m) را روی سطح افقی بدون اصطکاکی در نظر بگیرید. ضریب اصطکاک ایستایی بین دو قطعه برابر ۰٫۴۰ است. چه دامنه‌ای از حرکت هماهنگ ساده برای این مجموعهٔ قطعات-فنر، قطعهٔ کوچک‌تر را در آستانهٔ لغزش روی قطعهٔ بزرگ‌تر قرار می‌دهد؟

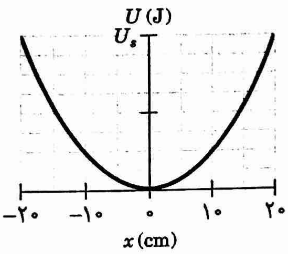


شکل ۱۵-۳۷ مسئلهٔ ۲۶.

واحد ۱۵-۲ انرژی در حرکت هماهنگ ساده

۲۷★ هنگامی‌که جابه‌جایی در حرکت هماهنگ ساده برابر نصف دامنهٔ حرکت می‌شود، چه کسری از انرژی کل به‌صورت (الف) انرژی جنبشی و (ب) انرژی پتانسیل است؟ (ج) انرژی سیستم در چه جابه‌جایی‌ای، برحسب دامنه، نیمی از نوع انرژی جنبشی و نیمی از نوع انرژی پتانسیل است؟

۲۸★ شکل ۱۵-۳۸ چاه انرژی پتانسیل یک‌بُعدی ذره‌ای به جرم ۲٫۰ kg را نشان می‌دهد [تابع $U(x)$ به شکل bx^2 است، و مقیاس محور قائم با $U_s = ۲٫۰$ J مشخص می‌شود]. (الف) اگر این ذره با سرعت ۸۵ cm/s از وضعیت تعادل بگذرد، آیا پیش از رسیدن به $x = ۱۵$ cm برگشت خواهد داشت؟ (ب) اگر آری، در چه مکانی، و اگر خیر، اندازهٔ سرعت ذره در $x = ۱۵$ cm چقدر است؟



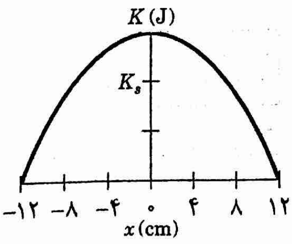
شکل ۱۵-۳۸ مسئلهٔ ۲۸.

۲۹★ انرژی مکانیکی سیستم قطعه-فنری، با ثابت فنر ۱٫۳ N/cm و دامنهٔ نوسان ۲٫۴ cm، را به‌دست آورید.

۳۰★ سیستم قطعه-فنری را با انرژی مکانیکی ۱٫۰۰ J، دامنهٔ ۱۰٫۰ cm، و بیشینهٔ مقدار سرعت ۱٫۲۰ m/s در نظر بگیرید. (الف) ثابت فنر، (ب) جرم قطعه، و (ج) بسامد نوسان را در این سیستم به‌دست آورید.

۳۱★ جسمی به جرم ۵٫۰۰ kg را روی سطح افقی بدون اصطکاکی در نظر بگیرید که به فنری با $k = ۱۰۰۰$ N/m متصل شده است. این جسم را به فاصلهٔ افقی ۵۰٫۰ cm از وضعیت تعادل دور و با سرعت اولیهٔ ۱۰٫۰ m/s در جهت برگشت به وضعیت تعادل رها کرده‌ایم. (الف) بسامد حرکت، (ب) انرژی پتانسیل اولیهٔ سیستم قطعه-فنر، (ج) انرژی جنبشی اولیه، و (د) دامنهٔ حرکت چقدرند؟

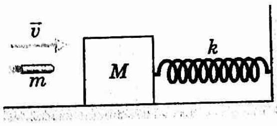
۳۲★ شکل ۱۵-۳۹ انرژی جنبشی K یک نوسانگر هماهنگ ساده را برحسب موقعیت مکانی x آن نشان می‌دهد. مقیاس محور قائم با $K_s = ۴٫۰$ J مشخص می‌شود. ثابت فنر در این نوسان چقدر است؟



شکل ۱۵-۳۹ مسئلهٔ ۳۲.

۳۳★★ قطعه‌ای به جرم $M = ۵٫۴$ kg را در حال سکون روی میز افقی بدون اصطکاکی چنان در نظر بگیرید که، از طریق فنری با ثابت

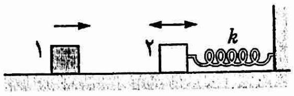
$k =$ ۶۰۰۰ N/m، به دیوارهٔ صُلبی متصل شده است. گلوله‌ای به جرم $m =$ ۹٫۵ g و به سرعت $\vec{v}$، با مقدار ۶۳۰ m/s، به این قطعه شلیک می‌شود و در آن جای می‌گیرد (شکل ۱۵-۴۰).



شکل ۱۵-۴۰ مسئلهٔ ۳۳.

با فرض ناچیز بودن فشردگی فنر تا زمان استقرار گلوله در قطعه، (الف) مقدار سرعت قطعه را بلافاصله بعد از برخورد و (ب) دامنهٔ حرکت هماهنگ سادهٔ حاصل را به‌دست آورید.

**۳۴ در شکل ۱۵-۴۱، قطعهٔ ۲ به جرم ۲٫۰ kg و به دورهٔ حرکت ۲۰ ms در انتهای فنری با حرکت هماهنگ ساده در حال نوسان است.



شکل ۱۵-۴۱ مسئلهٔ ۳۴.

موقعیت مکانی این قطعه به‌صورت $x = (۱٫۰\ \text{cm})\cos(\omega t + \pi/۲)$ در دست است. قطعهٔ ۱ به جرم ۴٫۰ kg در امتداد طول فنر به طرف قطعهٔ ۲ می‌لغزد و با سرعتی به مقدار ۶٫۰ m/s با آن برخورد می‌کند. برخورد این دو قطعه را کاملاً ناکشسان و زمان وقوع آن را در لحظهٔ $t =$ ۵٫۰ ms بگیرید. (طول مدت برخورد خیلی کمتر از دورهٔ حرکت است.) دامنهٔ حرکت هماهنگ ساده بعد از این برخورد چقدر است؟

**۳۵ ذره‌ای به جرم ۱۰ g را در نظر بگیرید که با دامنه‌ای برابر ۲٫۰ mm، بیشینهٔ شتابی به‌اندازهٔ $۸٫۰ \times ۱۰^۳\ \text{m/s}^۲$، و ثابت فاز مجهول ϕ دارای حرکت هماهنگ ساده است. (الف) دورهٔ حرکت، (ب) بیشینهٔ مقدار سرعت ذره، و (ج) انرژی مکانیکی کل نوسانگر چقدرند؟ هنگامی‌که این ذره در موقعیت (د) جابه‌جایی بیشینه و (هـ) نصف جابه‌جایی بیشینه قرار می‌گیرد، اندازهٔ نیروی وارد بر آن چقدر است؟

**۳۶ اگر زاویهٔ فاز یک سیستم قطعه-فنر در حرکت هماهنگ ساده برابر $\pi/۶$ rad و موقعیت مکانی قطعه به‌صورت $x = x_m \cos(\omega t + \phi)$ باشد، نسبت انرژی جنبشی به انرژی پتانسیل آن در زمان $t =$ ۰ چقدر است؟

***۳۷ فنر بدون جرمی، در حالی‌که جسم کوچکی به انتهای پایینی آن متصل شده، از سقفی آویزان شده است. این جسم را در آغاز در مکان y_i چنان در حال سکون نگه‌داشته‌ایم که طول فنر طول سکون (تعادلی) آن است. این جسم وقتی به حال خود رها می‌شود، به طرف پایین و بالا طوری به نوسان درمی‌آید که پایین‌ترین موقعیت آن ۱۰ cm در زیر y_i است. (الف) بسامد این نوسان چقدر است؟ (ب) اندازهٔ سرعت این جسم وقتی به موقعیت ۸٫۰ cm پایین‌تر از موقعیت اولیه می‌رسد، چقدر است؟ (ج) جسمی به جرم ۳۰۰ g را به جسم اول متصل می‌کنیم، که در این صورت بسامد نوسان سیستم به نصف بسامد اولیه کاهش می‌یابد. جرم جسم اول چقدر است؟ (د) در حالتی که هر دو جسم به انتهای فنر متصل شده‌اند، موقعیت تعادلی (سکون) جدید چقدر پایین‌تر از y_i قرار می‌گیرد؟ صلواتی

واحد ۱۵-۳ نوسانگر هماهنگ سادهٔ زاویه‌ای

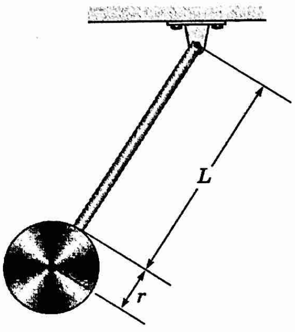
*۳۸ کرهٔ جامدی به جرم ۹۵ kg و شعاع ۱۵ cm را از سیم قائمی آویخته‌ایم. برای آن‌که این کره را با زاویه‌ای به‌اندازهٔ ۰٫۸۵ rad بچرخانیم و آن را در همان وضعیت نگه‌داریم، به گشتاورنیرویی معادل ۰٫۲۰ N·m نیاز داریم. دورهٔ نوسان‌هایی که پس از رهاسازی کره پدید می‌آیند، چقدر است؟

**۳۹ رقاصک یک ساعت‌مچی قدیمی با دامنهٔ زاویه‌ای π rad و دورهٔ ۰٫۵۰۰ s در حال نوسان است. (الف) بیشینهٔ مقدار سرعت زاویه‌ای این رقاصک، (ب) مقدار سرعت زاویه‌ای در جابه‌جایی $\pi/۲$ رادیان، و (ج) مقدار شتاب زاویه‌ای در جابه‌جایی $\pi/۴$ رادیان را به‌دست آورید.

واحد ۱۵-۴ آونگ‌ها، حرکت دایره‌ای

*۴۰ یک آونگ فیزیکی متشکل از میلهٔ یکنواختی به‌طول ۱۰۰ cm را در نظر بگیرید که نقطهٔ محوری آن در فاصلهٔ d از وسط آن قرار گرفته است. اگر دورهٔ نوسان این آونگ برابر ۲٫۵ s باشد، اندازهٔ d چقدر است؟

*۴۱ در شکل ۱۵-۴۲، آونگی را نشان داده‌ایم که متشکل است از یک قرص یکنواخت به شعاع $r =$ ۱۰٫۰ cm و جرم ۵۰۰ g که به میلهٔ یکنواختی به‌طول $L =$ ۵۰۰ mm و جرم ۲۷۰ g متصل شده است. (الف) لَختی چرخشی این آونگ را حول نقطهٔ آویز به‌دست آورید. (ب) فاصلهٔ بین نقطهٔ آویز و مرکز جرم آونگ چقدر است؟ (ج) دورهٔ نوسان را هم محاسبه کنید.



شکل ۱۵-۴۲ مسئلهٔ ۴۱.

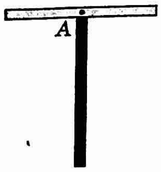
*۴۲ آونگ ساده‌ای، به‌صورت وزنه‌ای کوچک به جرم ۶۰٫۰ g، را در نظر بگیرید که به انتهای نخی به جرم ناچیز بسته شده است. اگر زاویهٔ θ بین این نخ و راستای قائم چنین داده شده باشد $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$

$$\theta = (۰٫۰۸۰۰\ \text{rad})\cos[(۴٫۴۳\ \text{rad/s})t + \phi]$$

(الف) طول این آونگ و (ب) بیشینهٔ انرژی جنبشی آن چقدرند؟

*۴۳ (الف) در صورتی که آونگ فیزیکی شکل ۱۵-۱۳ و نمونه مسئلهٔ مربوط به آن را وارونه کنیم و آن را از نقطهٔ P بیاویزیم، دورهٔ نوسان آن چقدر می‌شود؟ (ب) آیا این دوره نسبت به دورهٔ پیشین بزرگ‌تر شده است، کوچک‌تر شده است، یا مساوی مانده است؟

*۴۴ دو میلهٔ یکنواخت یک متری را به‌شکل ۱۵-۴۳ به یکدیگر متصل کرده‌ایم، و مجموعه را به‌عنوان آونگی فیزیکی مورد استفاده قرار می‌دهیم. اگر محور آویز را از نقطهٔ A که در وسط میلهٔ افقی قرار دارد بگذرانیم، دورهٔ نوسان این آونگ چقدر می‌شود؟

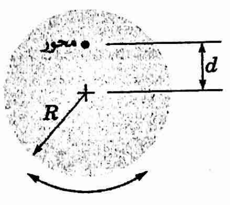


شکل ۱۵-۴۳ مسئلهٔ ۴۴.

★۴۵ بازیگری را در نظر بگیرید که روی تابی که با دورهٔ ۸٫۸۵ s به جلو و عقب نوسان می‌کند، نشسته است. اگر وی در همان حالت نوسانی بر پا بایستد، به‌طوری که مرکز جرم مجموعهٔ تاب + بازیگر به اندازهٔ ۳۵٫۰ cm بالاتر برود، دورهٔ نوسان جدید این سیستم چقدر خواهد شد؟ مجموعهٔ تاب + بازیگر را به مثابه آونگی ساده در نظر بگیرید.

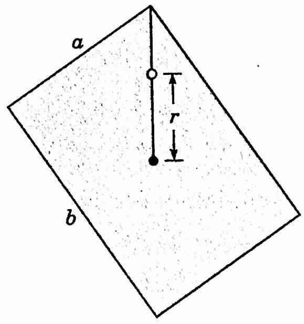
★۴۶ آونگ فیزیکی‌ای را در نظر بگیرید که در فاصلهٔ $2L/3$ از نقطهٔ آویزش یک مرکز نوسان دارد. نشان دهید که فاصلهٔ بین نقطهٔ آویز و مرکز نوسان برای هر آونگ فیزیکی با هر شکل برابر است با I/mh، که در آن I و h همان کمیت‌هایی‌اند که در معادلهٔ ۱۵-۲۹ مطرح شده‌اند و m هم جرم آونگ است.

★۴۷ در شکل ۱۵-۴۴، آونگی فیزیکی را نشان داده‌ایم که متشکل است از قرص جامد یکنواختی (به شعاع $R =$ ۲٫۳۵ cm) که حول محوری که به فاصلهٔ $d =$ ۱٫۷۵ cm از مرکز جرم آن قرار دارد، در صفحه‌ای قائم نگه‌داشته شده است. این قرص را با زاویهٔ کوچکی جابه‌جا و سپس به حال خود رها می‌کنیم. دورهٔ حرکت هماهنگ سادهٔ پدید آمده چقدر است؟



شکل ۱۵-۴۴ مسئلهٔ ۴۷.

★★۴۸ قطعه‌ای مستطیلی به ابعاد $a =$ ۳۵ cm و $b =$ ۴۵ cm را در نظر بگیرید که از میلهٔ افقی نازکی، که از سوراخ کوچکی در قطعه می‌گذرد، آویزان می‌شود. سپس این قطعه را مانند آونگی که حرکت هماهنگ ساده دارد حول این میله، با زاویه‌های کوچک، به نوسان درمی‌آوریم. شکل ۱۵-۴۵ یکی از موقعیت‌های مکانی سوراخ را، که در فاصلهٔ r از مرکز قطعه و روی خط واصل بین مرکز و یکی از گوشه‌ها قرار دارد، نشان می‌دهد. (الف) نمودار دورهٔ این آونگ برحسب فاصلهٔ r را در امتداد این خط واصل چنان رسم کنید که کمینهٔ منحنی در آن ظاهر شود. (ب) این مقدار کمینه به‌ازای چه مقداری از r اتفاق می‌افتد؟ در واقع، در اطراف مرکز این قطعه، خطی وجود دارد که شامل نقاطی است که برای آن‌ها دورهٔ نوسان دارای همان مقدار کمینه است. (ج) شکل هندسی این خط چیست؟

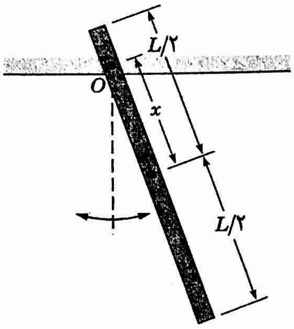


شکل ۱۵-۴۵ مسئلهٔ ۴۸.

★★۴۹ زاویهٔ آونگی که در شکل ۱۵-۱۱ب آمده است، به‌صورت $\theta = \theta_m \cos[(4.44\ \text{rad/s})t + \phi]$ دردست است. اگر در $t = 0$ داشته باشیم $\theta = 0.040$ rad و $d\theta/dt = -0.200$ rad/s، (الف) ثابت فاز ϕ و (ب) زاویهٔ بیشینهٔ θ_m چقدرند؟ (راهنمایی: آهنگ تغییر θ، $d\theta/dt$، را با بسامد زاویه‌ای حرکت هماهنگ ساده، ω، اشتباه نگیرید.)

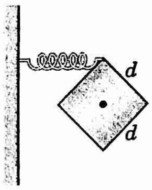
★★۵۰ میلهٔ نازک یکنواختی (به جرم ۰٫۵۰ kg) را در نظر بگیرید که حول محوری نوسان می‌کند که از یک سر آن می‌گذرد و بر صفحهٔ نوسان عمود است. دورهٔ نوسان این میله برابر ۱٫۵ s و دامنهٔ زاویه‌ای نوسان هم برابر ۱۰° است. (الف) طول این میله چقدر است؟ (ب) بیشینهٔ انرژی جنبشی این میلهٔ در حال نوسان چقدر است؟

★★۵۱ در شکل ۱۵-۴۶، چوب‌دستی به طول $L =$ ۱٫۸۵ m را نشان داده‌ایم که همچون آونگی فیزیکی در حال نوسان است. (الف) به‌ازای چه مقداری از فاصلهٔ x بین مرکز جرم چوب‌دستی و نقطهٔ محوری O آن، دورهٔ نوسان به حداقل می‌رسد؟ (ب) اندازهٔ این حداقل دوره چقدر است؟



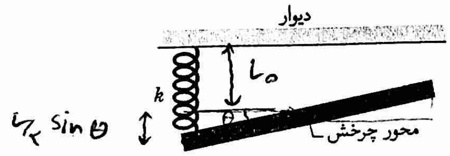
شکل ۱۵-۴۶ مسئلهٔ ۵۱.

★★۵۲ در شکل ۱۵-۴۷، مکعبی به جرم ۳٫۰۰ kg و به طول ضلع $d =$ ۶٫۰۰ cm را نشان داده‌ایم که روی محوری گذرنده از مرکزش نصب شده است. یک فنر ($k =$ ۱۲۰۰ N/m) گوشهٔ بالای این مکعب را به دیواری صُلب متصل کرده است. این فنر در آغاز دارای طول سکون بدون کشیدگی و بدون فشردگی است. اگر این مکعب را به اندازهٔ ۳° بچرخانیم و سپس به حال خود رها کنیم، دورهٔ حرکت هماهنگ سادهٔ حاصل چقدر می‌شود؟



شکل ۱۵-۴۷ مسئلهٔ ۵۲.

★★۵۳ در شکل ۱۵-۴۸، دید از بالا را برای میلهٔ یکنواخت درازی به جرم ۰٫۶۰۰ kg نشان داده‌ایم که می‌تواند حول محور قائمی که از مرکزش می‌گذرد در صفحه‌ای افقی آزادانه به چرخش درآید. فنری با ثابت نیروی $k =$ ۱۸۵۰ N/m، در همان صفحهٔ افقی، یک سر این میله را به دیواری متصل کرده است. این میله در حالت تعادل به موازات دیوار قرار می‌گیرد. دورهٔ نوسان‌های کوچک این میله، هنگامی‌که اندکی از وضعیت تعادل چرخانده و به حال خود رها شود، چقدر است؟



شکل ۱۵-۴۸ مسئلهٔ ۵۳.

★★۵۴ در شکل ۱۵-۴۹الف، ورقی فلزی را نشان داده‌ایم که روی محور گذرنده از مرکز جرمش نصب شده است. فنری به ثابت نیروی $k =$ ۲۰۰۰ N/m

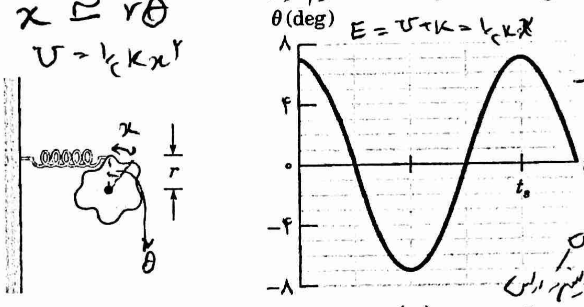
نقطه‌ای از لبهٔ این ورق را، که به فاصلهٔ $r = ۲٫۵$ cm از مرکز جرم قرار دارد، به دیواری متصل کرده است. فنر در آغاز دارای طول سکون است. اگر این ورق را به‌اندازهٔ °۷ بچرخانیم و سپس به حال خود بگذاریم، با حرکت هماهنگ ساده حول محور چنان به چرخش درمی‌آید که موقعیت زاویه‌ای آن مطابق شکل ۱۵-۴۹ب خواهد بود. مقیاس محور افقی با $t_s = ۲۰$ ms مشخص می‌شود. لَختی چرخشی این ورق حول مرکز جرم آن چقدر است؟

حالت ۱: زمانی که مرکز در x قرار دارد که می‌دانیم در این حالت $K = 0$ است پس

$x \simeq r\theta$

$U = \frac{1}{2}kx^2$

$E = U + K = \frac{1}{2}kx^2$



(الف) (ب)

حالت ۲: زمانی که مرکز از محل تعادل می‌گذرد می‌دانیم در این حالت چرخش به مرکز ... است و $U = 0$ است پس

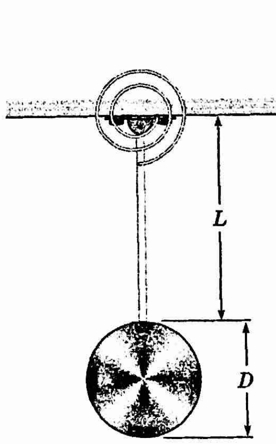
شکل ۱۵-۴۹ مسئلهٔ ۵۴.

$\omega_m^2 = \omega\theta_m$

$E = K + U = \frac{1}{2}I\omega_m^2$

۵۵★★★ آونگی را به‌صورت میلهٔ نازک بلندی در نظر بگیرید که حول محوری، که از یک نقطهٔ میله می‌گذرد، نوسان می‌کند. دورهٔ نوسان را، در تعدادی آزمایش، به‌صورت تابعی از فاصلهٔ x بین نقطهٔ محوری و مرکز میله اندازه‌گیری می‌کنیم. (الف) اگر طول میله برابر $L = ۲٫۲۰$ m و جرم آن برابر $m = ۲۲٫۱$ g باشد، کمینهٔ دورهٔ نوسان چقدر است؟ (ب) اگر x را چنان برگزینیم که دورهٔ نوسان کمینه شود و سپس L را افزایش دهیم، آیا این دوره افزایش می‌یابد، کاهش می‌یابد، یا ثابت می‌ماند؟ (ج) اگر بدون تغییر طول L جرم m را افزایش دهیم، آیا دورهٔ نوسان افزایش می‌یابد، کاهش می‌یابد، یا ثابت می‌ماند؟

۵۶★★★ در شکل ۱۵-۵۰، قرصی به جرم ۲٫۵۰ kg و قطر $D = ۴۲٫۰$ cm با میله‌ای به طول $L = ۷۶٫۰$ cm و جرم ناچیز، که از سر دیگرش آویزان شده است، نگه‌داری می‌شود. (الف) دورهٔ نوسان، در نبود فنر پیچشی، چقدر است؟ (ب) در حالتی که فنر پیچشی را به میله متصل کرده‌ایم، میله در وضعیت تعادل در راستای قائم قرار می‌گیرد. اگر دورهٔ نوسان در این حالت به‌اندازهٔ ۰٫۵۰۰ s کاهش یافته باشد، ثابت پیچشی این فنر چقدر است؟



شکل ۱۵-۵۰ مسئلهٔ ۵۶.

واحد ۱۵-۵ حرکت هماهنگ سادهٔ میرا

۵۷★ نوسانگری با میرایی کم را در نظر بگیرید که دامنه‌اش در هر چرخه به‌اندازهٔ ۳٫۰ درصد کاهش می‌یابد. چه درصدی از انرژی مکانیکی این نوسانگر در هر چرخه تلف می‌شود؟

۵۸★ برای نوسانگر میرایی که در شکل ۱۵-۱۶ نشان داده شده است و در آن $m = ۲۵۰$ g، $k = ۸۵$ N/m، و $b = ۷۰$ g/s است، در پایان ۲۰ چرخهٔ نوسان، نسبت دامنهٔ میرا شده به دامنهٔ اولیه چقدر است؟

۵۹★ در شکل ۱۵-۱۶، جرم قطعه برابر ۱٫۵۰ kg و ثابت فنر برابر ۸٫۰۰ N/m است. نیروی میرانده به‌صورت $-b(dx/dt)$ داده شده است، که در آن داریم $b = ۲۳۰$ g/s. این قطعه را به‌اندازهٔ ۱۲٫۰ cm به پایین می‌کشیم و سپس رها می‌کنیم. (الف) زمان لازم را برای کاهش دامنهٔ نوسان‌های حاصل به یک‌سوم مقدار اولیه محاسبه کنید. (ب) تا آن زمان، چه تعدادی نوسان انجام شده است؟

۶۰★★ سیستم تعلیق اتومبیلی به جرم ۲۰۰۰ kg، وقتی شاسی اتومبیل روی آن قرار می‌گیرد، به‌اندازهٔ ۱۰ cm «شکم می‌دهد». کاهش دامنهٔ نوسان هم در هر چرخه به‌اندازهٔ ۵۰ درصد است. با فرض آن‌که هر چرخ به‌اندازهٔ ۵۰۰ kg از جرم را نگه‌داری کند، (الف) ثابت فنر k و (ب) ثابت میرایی b را برای سیستم شاه‌فنر و کمک‌فنر هر چرخ برآورد کنید.

واحد ۱۵-۶ نوسان‌های واداشته و تشدید

۶۱★ دامنهٔ x_m معادلهٔ ۱۵-۴۵ را به‌صورت زیر در نظر بگیرید

$$x_m = \frac{F_m}{[m^2(\omega_d^2 - \omega^2)^2 + b^2\omega_d^2]^{\frac{1}{2}}}$$

که در آن F_m دامنهٔ (ثابت) نیروی نوسانی خارجی وارد بر فنر از طرف آویزگاه صُلب در شکل ۱۵-۱۶ است. در حالت تشدید، (الف) دامنهٔ حرکت و (ب) دامنهٔ سرعت جسم نوسان‌کننده چقدر می‌شوند؟

۶۲★ تعداد نُه آونگ ساده با طول‌هایی به شرح زیر را از یک تیر افقی آویزان کرده‌ایم: (الف) ۰٫۱۰، (ب) ۰٫۳۰، (ج) ۰٫۴۰، (د) ۰٫۸۰، (هـ) ۱٫۲، (و) ۲٫۸، (ز) ۳٫۵، (ح) ۵٫۰، و (ط) ۶٫۲ متر. فرض کنید این تیر با گستره‌ای از بسامدهای زاویه‌ای از ۲٫۰۰ rad/s تا ۴٫۰۰ rad/s به‌طور افقی به نوسان درآید. کدام‌یک از این آونگ‌ها (به‌شدت) به حرکت درخواهد آمد؟

۶۳★★ اتومبیلی به جرم ۱۰۰۰ kg را در نظر بگیرید که با چهار سرنشین، هر یک به جرم ۸۲ kg، در یک جادهٔ خاکی موجدار با موج‌هایی که ۴٫۰ m از همدیگر فاصله دارند در حرکت است. هنگامی‌که سرعت اتومبیل به ۱۶ km/h می‌رسد، با بیشینهٔ دامنه‌اش به بالا و پایین می‌جهد. پس از توقف اتومبیل و پیاده شدن سرنشینان، بدنهٔ آن روی سیستم تعلیق چقدر بالا می‌رود؟

مسئله‌های دیگر

۶۴ اگرچه کالیفرنیا را ایالتی زلزله‌خیز به‌شمار می‌آورند، ولی نواحی صخره‌ای زیادی را در آن می‌توان یافت که صخره‌هاشان توازن ناپایدار دارند و حتی با

زمین لرزهٔ خفیفی فرو می‌ریزند. این‌که این صخره‌ها برای هزاران سال به همین وضعیت بر جای مانده‌اند، حاکی از آن است که در این مدت زمین لرزه‌های شدیدی در آن نواحی اتفاق نیفتاده‌اند. اگر چنین صخره‌ای بر اثر زمین لرزه با بسامد ۲٫۲ Hz به‌طور سینوسی به نوسان (موازی با سطح زمین) درآید، دامنهٔ نوسانی به‌اندازهٔ ۱٫۰ cm منجر به فرو ریزی صخره خواهد شد. در این صورت، اندازهٔ شتاب بیشینهٔ نوسان برحسب g چقدر خواهد شد؟

۶۵ دیافراگم بلندگویی با بسامد ۴۴۰ Hz و با جابه‌جایی بیشینهٔ ۰٫۷۵ mm، با حرکت هماهنگ ساده، در حال نوسان است. در این نوسان، (الف) بسامد زاویه‌ای، (ب) بیشینهٔ مقدار سرعت، و (ج) اندازهٔ شتاب بیشینه چقدرند؟

۶۶ فنر یکنواختی با ثابت نیروی $k =$ ۸۶۰۰ N/m را به دو تکهٔ ۱ و ۲، با طول‌های کشیده نشدهٔ $L_1 =$ ۷٫۰ cm و $L_2 =$ ۱۰ cm، قسمت کرده‌ایم. ثابت‌های فنر (الف) k_1 و (ب) k_2 چقدرند؟ قطعه‌ای که همانند شکل ۱۵-۷ به فنر اولیه آویزان شده باشد، با بسامد ۲۰۰ Hz نوسان می‌کند. بسامد نوسان این قطعه، هنگامی که (ج) به تکهٔ ۱ و (د) به تکهٔ ۲ بسته شود، چقدر می‌شود؟

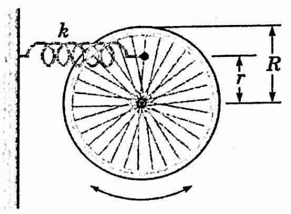
۶۷ در شکل ۱۵-۵۱، با استفاده از کابلی که موازی با خط آهن یک معدن به شیب $\theta =$ ۳۰° است، سه واگن ۱۰۰۰۰ کیلوگرمی محتوی سنگ معدن را در حال سکون نگه داشته‌ایم. این کابل، درست پیش از پاره شدن کابل اتصال بین دو واگن پایینی و رها شدن واگن آخری، به‌اندازهٔ ۱۵ cm کشیدگی و افزایش طول پیدا می‌کند. با فرض آن‌که این کابل از قانون هوک پیروی کند، کمیت‌های زیر را به‌دست آورید: (الف) بسامد و (ب) دامنهٔ نوسان‌های حاصل از دو واگن باقی مانده.

شکل ۱۵-۵۱ مسئلهٔ ۶۷.

۶۸ قطعه‌ای به جرم ۲٫۰۰ kg از فنری آویزان شده است. جسمی به جرم ۳۰۰ g وقتی‌که به زیر این قطعه آویزان می‌شود، کشیدگی فنر را به‌اندازهٔ ۲٫۰۰ cm افزایش می‌دهد. (الف) ثابت فنر چقدر است؟ (ب) اگر جسم ۳۰۰ گرمی را حذف کنیم و قطعه را به نوسان درآوریم، دورهٔ حرکت چقدر می‌شود؟

۶۹ پیستون درون سرسیلندر در یک لُکوموتیو دارای طول مسیری (با (دو برابر دامنه) به‌اندازهٔ ۰٫۷۶ m است. اگر این پیستون با بسامد زاویه‌ای ۱۸۰ rev/min حرکت هماهنگ ساده داشته باشد، اندازهٔ سرعت بیشینه‌اش چقدر می‌شود؟

۷۰ چرخی را در نظر بگیرید که می‌تواند آزادانه حول محور ثابت خود بچرخد. فنری را، مطابق شکل ۱۵-۵۲، به فاصلهٔ شعاعی r از محور به یکی از پره‌های چرخ متصل کرده‌ایم. (الف) با فرض آن‌که این چرخ حلقه‌ای به جرم m و شعاع R باشد، بسامد زاویه‌ای ω نوسان‌های کوچک این سیستم را برحسب m، R، r، و ثابت فنر k به‌دست آورید. مقدار ω را در حالت‌های (ب) $r = R$ و (ج) $r =$ ۰ مشخص کنید.



شکل ۱۵-۵۲ مسئلهٔ ۷۰.

۷۱ قلوه‌سنگی به جرم ۵۰٫۰ g را در انتهای فنری قائم در حال نوسان در نظر بگیرید. اگر مقدار سرعت بیشینهٔ این قلوه‌سنگ برابر ۱۵٫۰ cm/s و دورهٔ حرکت آن برابر ۰٫۵۰۰ s باشد، کمیت‌های زیر چقدرند: (الف) ثابت نیروی فنر، (ب) دامنهٔ حرکت، و (ج) بسامد نوسان؟

۷۲ قرص دایره‌ای یکنواختی به شعاع $R =$ ۱۲٫۶ cm را از نقطه‌ای از لبه‌اش، به‌عنوان آونگی فیزیکی، آویزان کرده‌ایم. (الف) دورهٔ نوسان آن چقدر است؟ (ب) در چه فاصلهٔ شعاعی $r < R$ نقطهٔ آویزی با همان دورهٔ نوسان را می‌توان یافت؟

۷۳ فنر قائمی را در نظر بگیرید که وقتی قطعه‌ای به جرم ۱٫۳ kg به انتهای آن آویزان می‌شود، ۹٫۶ cm کشیدگی طول پیدا می‌کند. (الف) ثابت فنر را محاسبه کنید. سپس، این قطعه را به‌اندازهٔ ۵٫۰ cm دیگر به طرف پایین می‌کشیم و به حال خود رها می‌کنیم. کمیت‌های زیر را در حرکت هماهنگ سادهٔ حاصل به‌دست آورید: (ب) دوره، (ج) بسامد، (د) دامنه، و (ه) بیشینهٔ مقدار سرعت.

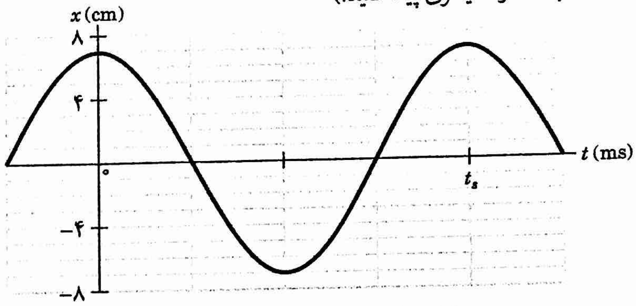
۷۴ فنری بدون جرم با ثابت فنر ۱۹ N/m را در نظر بگیرید که به‌طور قائم آویخته شده است. جسمی به جرم ۰٫۲۰ kg را به انتهای آزاد این فنر متصل و سپس به حال خود رها می‌کنیم. فرض می‌کنیم در لحظهٔ رها کردن جسم، فنر حالت کشیده شده ندارد. کمیت‌های زیر را به‌دست آورید: (الف) فاصله‌ای که جسم نسبت به موقعیت اولیه‌اش پایین می‌رود، (ب) بسامد نوسان حاصل، و (ج) دامنهٔ حرکت هماهنگ ساده.

۷۵ قطعه‌ای به جرم ۴٫۰۰ kg را از فنری با ثابت نیروی $k =$ ۵۰۰ N/m آویزان کرده‌ایم. گلوله‌ای به جرم ۵۰٫۰ g و به سرعت ۱۵۰ m/s را درست از زیر این قطعه به درون آن شلیک می‌کنیم. با فرض آن‌که گلوله در قطعه گیر کرده باشد، (الف) دامنهٔ حرکت هماهنگ حاصل چقدر است و (ب) چند درصد از انرژی جنبشی اولیهٔ گلوله به‌صورت انرژی مکانیکی نوسانگر درمی‌آید؟

۷۶ قطعه‌ای به جرم ۵۵٫۰ g در انتهای یک فنر به ثابت نیروی $k =$ ۱۵۰۰ N/m، با جابه‌جایی $x = x_m \cos(\omega t + \phi)$، حرکت هماهنگ ساده دارد. چقدر طول می‌کشد تا این قطعه از موقعیت مکانی $+$۰٫۸۰۰x_m به (الف) موقعیت $+$۰٫۶۰۰x_m و (ب) موقعیت $-$۰٫۸۰۰x_m برود؟

۷۷ شکل ۱۵-۵۳ تابع مکان قطعه‌ای به جرم ۲۰ g را نشان می‌دهد که در انتهای یک رشته نخ حرکت هماهنگ ساده دارد. مقیاس محور افقی با

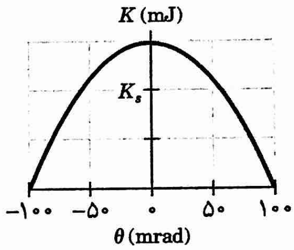
$t_s = ۴۰٫۰$ ms مشخص می‌شود. (الف) انرژی جنبشی بیشینهٔ این قطعه را و (ب) تعداد دفعاتی را که در هر ثانیه با این بیشینه روبه‌رو می‌شویم، به‌دست آورید. (راهنمایی: اندازه‌گیری شیب منحنی شاید چندان دقتی نداشته باشد. راه دیگری پیدا کنید.)



شکل ۱۵-۵۳ مسئله‌های ۷۷ و ۷۸.

۷۸ شکل ۱۵-۵۳ تابع $x(t)$ قطعه‌ای با حرکت هماهنگ ساده را در انتهای یک رشته نخ نشان می‌دهد ($t_s = ۴۰٫۰$ ms). (الف) اندازهٔ سرعت و (ب) اندازهٔ شتاب شعاعی برای ذره‌ای که متناظر با این قطعه حرکت دایره‌ای یکنواخت دارد، چقدر می‌شود؟

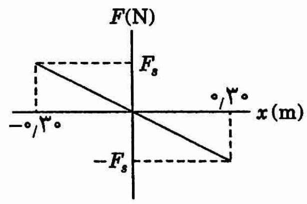
۷۹ شکل ۱۵-۵۴ انرژی جنبشی K آونگ ساده‌ای را برحسب زاویهٔ θ آن از راستای قائم نشان می‌دهد. مقیاس محور قائم با $K_s = ۱۰٫۰$ mJ مشخص می‌شود. وزنهٔ این آونگ ۰٫۲۰۰ kg جرم دارد. طول این آونگ چقدر است؟



شکل ۱۵-۵۴ مسئلهٔ ۷۹.

۸۰ قطعه‌ای در انتهای یک رشته نخ، با موقعیتی به‌صورت $x = x_m \cos(\omega t + \phi)$، حرکت هماهنگ ساده دارد. اگر $\phi = \pi/5$ rad باشد، در زمان $t = ۰$ چند درصد از انرژی مکانیکی کل به شکل انرژی پتانسیل است؟

۸۱ نوسانگر هماهنگ ساده‌ای را به‌صورت قطعه‌ای به جرم ۰٫۵۰ kg، که به فنری متصل شده است، درنظر بگیرید. این قطعه با نقطهٔ تعادل $x = ۰$ در امتداد پاره‌خطی، در روی سطحی بدون اصطکاک، به جلو و عقب می‌لغزد. فرض کنید این قطعه در زمان $t = ۰$ در مکان $x = ۰$ درجهت مثبت x در حرکت است. شکل ۱۵-۵۵ نمودار مقدار نیروی برایند $\vec{F}$ وارد بر این قطعه را به‌صورت تابعی از مکان آن نشان می‌دهد. مقیاس محور قائم با $F_s = ۷۵٫۰$ N مشخص می‌شود. (الف) دامنهٔ نوسان، (ب) دورهٔ حرکت، (ج) اندازهٔ شتاب بیشینه، و (د) بیشینهٔ انرژی جنبشی این نوسانگر چقدرند؟



شکل ۱۵-۵۵ مسئلهٔ ۸۱.

۸۲ آونگ ساده‌ای به طول ۲۰ cm و به جرم ۵٫۰ g را در نظر بگیرید که در اتومبیل مسابقه‌ای، که با مقدار سرعت ثابت ۷۰ m/s روی مسیری دایره‌ای به شعاع ۵۰ m در حرکت است، آویخته شده است. اگر این آونگ در راستای شعاعی حول وضعیت تعادل خود دارای نوسان‌های کوچک باشد، بسامد این نوسان چقدر است؟

۸۳ مقیاس مدرج یک ترازوی فنری، که از صفر تا ۱۵٫۰ kg را اندازه‌گیری می‌کند، ۱۲٫۰ cm طول دارد. بسته‌ای که از این ترازو آویخته شده است، با بسامد ۲٫۰۰ Hz در راستای قائم به نوسان درمی‌آید. (الف) ثابت فنر چقدر است؟ (ب) وزن بستهٔ آویخته شده چقدر است؟

۸۴ قطعه‌ای به جرم ۰٫۱۰ kg را در نظر بگیرید که روی سطح افقی بی‌اصطکاکی در امتداد خطی مستقیم به جلو و عقب نوسان می‌کند. جابه‌جایی آن از مبدأ به‌صورت زیر داده شده است

$$x = (۱۰ \text{ cm}) \cos[(۱۰ \text{ rad/s})t + \pi/۲ \text{ rad}]$$

(الف) بسامد این نوسان چقدر است؟ (ب) اندازهٔ سرعت بیشینهٔ این قطعه چقدر می‌شود؟ (ج) این مقدار سرعت بیشینه به‌ازای چه مقداری از x حاصل می‌شود؟ (د) اندازهٔ شتاب بیشینهٔ این قطعه چقدر است؟ (هـ) این مقدار شتاب بیشینه به‌ازای چه مقداری از x حاصل می‌شود؟ (و) برای برقراری این حرکت نوسانی، فنر چه نیرویی را باید بر این قطعه وارد آورد؟

۸۵ هنگامی‌که قطعه‌ای به جرم m را به انتهای فنری متصل می‌کنیم، نقطهٔ انتهایی فنر با دورهٔ ۲٫۰ s به نوسان درمی‌آید. هنگامی‌که جرم قطعه به اندازهٔ ۲٫۰ kg افزایش می‌یابد، دورهٔ نوسان برابر ۳٫۰ s می‌شود. مقدار جرم m را به‌دست آورید.

۸۶ دیاپازونی را در نظر بگیرید که نوک یک شاخهٔ آن با بسامد ۱۰۰۰ Hz و دامنهٔ ۰٫۴۰ mm حرکت هماهنگ ساده دارد. مقدار کمیت‌های زیر را برای این نوک شاخه به‌دست آورید: (الف) بیشینهٔ شتاب، (ب) بیشینهٔ سرعت، (ج) شتاب در وقتی‌که جابه‌جایی نوک برابر ۰٫۲۰ mm است، و (د) سرعت در وقتی‌که جابه‌جایی نوک برابر ۰٫۲۰ mm است.

۸۷ قرص یکنواخت تختی به جرم ۳٫۰۰ kg و شعاع ۷۰٫۰ cm را در نظر بگیرید. این قرص را با یک رشته سیم قائم که به مرکز آن متصل شده است، در صفحه‌ای افقی معلق نگه‌داشته‌ایم. اگر این قرص را به اندازهٔ ۲٫۵۰ rad حول سیم قائم بچرخانیم، برای نگه‌داری آن در این سمت‌گیری به گشتاور نیروی ۰٫۰۶۰۰ N·m نیاز داریم. کمیت‌های زیر را برای این آونگ پیچشی محاسبه کنید: (الف) لَختی چرخشی قرص حول سیم، (ب) ثابت پیچشی، و (ج) بسامد زاویه‌ای هنگامی‌که به نوسان درآمده باشد.

۸۸ قطعه‌ای به وزن ۲۰ N در یک انتهای فنری قائم، که در آن $k = ۱۰۰$ N/m است، نوسان می‌کند؛ انتهای دیگر این فنر به سقف متصل شده است. لحظهٔ معینی را در نظر بگیرید که در آن فنر به اندازهٔ ۰٫۳۰ m نسبت به طول واهلیده‌اش (طول آزاد فنر بی‌آن‌که جسمی به آن متصل شود)

کشیده شده است و قطعه هم در این حالت سرعت صفر دارد. (الف) نیروی برایند وارد بر قطعه در این لحظه چقدر است؟ (ب) دامنه و (ج) دورهٔ حرکت هماهنگ سادهٔ حاصل چقدر می‌شود؟ (د) انرژی جنبشی بیشینهٔ این قطعه در حین نوسان چقدر است؟

۸۹ ذره‌ای به جرم ۳٫۰ kg حرکت هماهنگ سادهٔ یک بُعدی دارد، و معادلهٔ حرکتش برحسب زمان t (به ثانیه) به‌صورت زیر است

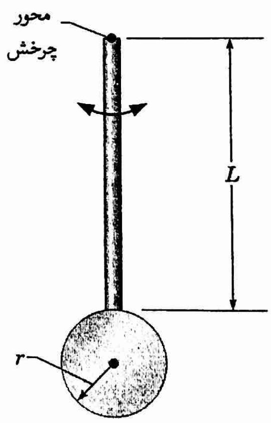
$$x = (۵٫۰\ \text{m})\cos[(\pi/۳\ \text{rad/s})t - \pi/۴\ \text{rad}]$$

(الف) به‌ازای چه مقداری از x انرژی پتانسیل این ذره برابر نصف انرژی کل می‌شود؟ (ب) چقدر طول می‌کشد تا ذره از وضعیت تعادل به این موقعیت x برسد؟

۹۰ ذره‌ای را در نظر بگیرید که با بسامد ۰٫۲۵ Hz حول نقطهٔ $x = ۰$ دارای حرکت خطی هماهنگ ساده است. این ذره در زمان $t = ۰$، جابه‌جایی $x = ۰٫۳۷$ cm و سرعت صفر دارد. کمیت‌های زیر را برای این حرکت به‌دست آورید: (الف) دوره، (ب) بسامد زاویه‌ای، (ج) دامنه، (د) جابه‌جایی $x(t)$، (هـ) سرعت $v(t)$، (و) مقدار سرعت بیشینه، (ز) مقدار شتاب بیشینه، (ح) جابه‌جایی در زمان $t = ۳٫۰$ s، و (ط) مقدار سرعت در زمان $t = ۳٫۰$ s.

۹۱ بسامد نوسان آونگ ساده‌ای به طول ۲٫۰ m در حالت‌های زیر چقدر است: (الف) در اتاق کار، (ب) در آسانسوری که با شتاب ۲٫۰ m/s² در حال بالا رفتن است، و (ج) در سقوط آزاد؟

۹۲ آونگ یک ساعت قدیمی را به‌صورت قرصی برنجی به شعاع $r = ۱۵٫۰۰$ cm و جرم ۱٫۰۰۰ kg، که به میلهٔ نازک بلندی به جرم ناچیز متصل شده است، در نظر بگیرید. این آونگ، مطابق شکل ۱۵-۵۶ حول محوری عمود بر طول میله که از انتهای دیگر آن می‌گذرد، آزادانه در حال نوسان است. اگر قرار باشد که این آونگ در مکانی که شتاب‌گرانی در آن برابر $g = ۹٫۸۰۰$ m/s² است برای نوسان‌های کوچک دوره‌ای معادل ۲٫۰۰۰ s داشته باشد، طول L با تقریب دهم میلی‌متر چقدر باید باشد؟



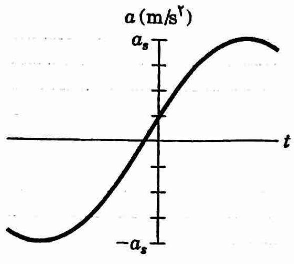
شکل ۱۵-۵۶ مسئلهٔ ۹۲.

۹۳ قطعه‌ای به جرم ۴٫۰۰ kg وقتی به فنری آویخته می‌شود، طول فنر را به اندازهٔ ۱۶٫۰ cm نسبت به وضعیت کشیده نشده افزایش می‌دهد. (الف) ثابت فنر چقدر است؟ (ب) به‌جای این قطعه، جسمی به جرم ۰٫۵۰۰ kg را از همان فنر می‌آویزیم. اگر این جسم را اندکی به طرف پایین بکشیم و سپس به حال خود رها کنیم، دورهٔ نوسان آن چقدر می‌شود؟

۹۴ شکل ۱۵-۵۷ نمودار شتاب حرکت $a(t)$ را برای حرکت هماهنگ ساده‌ای نشان می‌دهد که تابع مکان $x(t)$ آن چنین است:

$$x = x_m \cos(\omega t + \phi)$$

اگر $a_s = ۴٫۰$ m/s² باشد، ثابت فاز این حرکت چقدر است؟

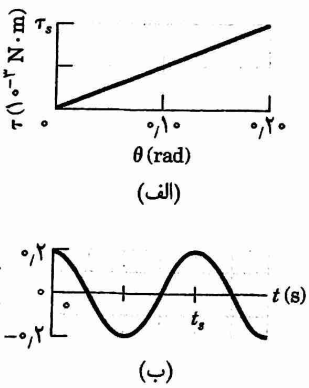


شکل ۱۵-۵۷ مسئلهٔ ۹۴.

۹۵ مهندسی یک جسم خاص به جرم ۱۰ kg در اختیار دارد و می‌خواهد لَختی چرخشی آن را حول محور گذرنده از مرکز جرم به‌دست آورد. این جسم روی سیمی که در امتداد محور مورد نظر کشیده شده است، نگه‌داری می‌شود. ثابت پیچشی این سیم برابر $\kappa = ۰٫۵۰$ N·m است. اگر این آونگ پیچشی در طول مدت ۵۰ s به تعداد ۲۰ بار نوسان کامل داشته باشد، لَختی چرخشی این جسم چقدر است؟

۹۶ عنکبوت به این دلیل متوجه گیرافتادن طعمه‌ای، مثل مگس، در شبکهٔ تارش می‌شود که دست‌وپا زدن مگس سبب نوسان تارهای شبکه می‌شود. عنکبوت، با توجه به بسامد این نوسان‌ها، حتی اندازهٔ مگس را هم می‌تواند حس کند. نوسان مگس در تارهای گیر اندازنده را همانند نوسان یک قطعه در انتهای فنر در نظر بگیرید. نسبت بسامد نوسان برای مگسی با جرم m به مگس دیگری با جرم ۲٫۵ m چقدر می‌شود؟

۹۷ یک آونگ پیچشی را به‌صورت قرصی فلزی در نظر بگیرید که از مرکز به رشته سیمی جوش داده شده است. این رشته سیم هم، پس از بسته شدن به گیره، در راستای قائم کاملاً کشیده شده است. شکل ۱۵-۵۸الف مقدار گشتاور نیروی لازم، τ، برای چرخاندن قرص حول مرکز (و درنتیجه پیچاندن سیم) را به‌صورت تابعی از زاویهٔ چرخش θ نشان می‌دهد.



شکل ۱۵-۵۸ مسئلهٔ ۹۷.

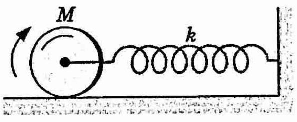
مقیاس محور قائم با $\tau_s = ۴٫۰ \times ۱۰^{-۳}$ N·m مشخص می‌شود. این قرص را به‌اندازهٔ $\theta = ۰٫۲۰۰$ rad می‌چرخانیم و سپس به حال خود رها می‌کنیم. شکل ۱۵-۵۸ب نمودار نوسان حاصل را به‌صورت موقعیت زاویه‌ای θ، که تابعی از زمان t است، نشان می‌دهد. مقیاس محور افقی با $t_s = ۰٫۴۰$ s مشخص می‌شود. (الف) لَختی چرخشی قرص حول مرکزش چقدر است؟ (ب) بیشینهٔ سرعت زاویه‌ای، $d\theta/dt$، قرص چقدر است؟ (هشدار: سرعت زاویه‌ای (متغیر) قرص چرخان را با بسامد زاویه‌ای (ثابت)

حرکت هماهنگ ساده اشتباه یا خَلط نکنید، هرچند که این دو کمیت معمولاً با نماد یکسان ω نشان داده می‌شوند. راهنمایی: انرژی پتانسیل U آونگ پیچشی، همانند انرژی $U = \frac{1}{2}kx^2$ فنر، برابر است با $U = \frac{1}{2}\kappa\theta^2$.)

۹۸ هنگامی‌که یک قوطی به وزن ۲۰ N را از انتهای فنری قائم می‌آویزیم، فنر به اندازهٔ ۲۰ cm کشیدگی پیدا می‌کند. (الف) ثابت فنر چقدر است؟ (ب) این فنر را پس از آن به‌طور افقی روی میز بدون اصطکاکی قرار می‌دهیم. در این حالت، یک سر فنر به نقطه‌ای ثابت شده و سر دیگرش به یک قوطی ۵٫۰ N متصل شده است. اکنون این قوطی را پس از کشیدن و افزایش طول فنر از حال سکون رها می‌کنیم. دورهٔ نوسان پدید آمده چقدر است؟

۹۹ دامنهٔ زاویه‌ای θ_m برای یک آونگ ساده چقدر باید باشد تا میزان انحراف گشتاورنیروی بازگردانندهٔ لازم برای حرکت هماهنگ ساده نسبت به گشتاورنیروی بازگردانندهٔ واقعی به ۱٫۰ درصد برسد؟ (نگاه کنید به «بسط‌های مثلثاتی» در پیوست ۵.)

۱۰۰ در شکل ۱۵-۵۹، استوانهٔ توپری را نشان داده‌ایم که در حالی‌که به فنری افقی ($k =$ ۳٫۰۰ N/m) متصل شده است، بدون لغزش روی یک سطح افقی می‌غلتد. اگر این سیستم را هنگامی‌که فنر به اندازهٔ ۰٫۲۵۰ m کشیدگی طول دارد از حالت سکون رها کنیم، (الف) انرژی جنبشی انتقالی و (ب) انرژی جنبشی چرخشی استوانه در لحظهٔ گذار از وضعیت تعادل چقدر می‌شوند؟ (ج) نشان دهید که مرکز جرم استوانه در این شرایط حرکت هماهنگ ساده دارد، و دورهٔ آن عبارت است از



شکل ۱۵-۵۹ مسئلهٔ ۱۰۰.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{3M}{2k}}$$

که در آن M جرم استوانه است. (راهنمایی: از انرژی مکانیکی کل نسبت به زمان مشتق بگیرید.)

۱۰۱ قطعه‌ای به جرم ۱٫۲ kg، در حالی‌که به انتهای فنری افقی به ثابت فنر $k =$ ۴۸۰ N/m متصل شده است، روی سطح افقی بدون اصطکاکی سُر می‌خورد. جابه‌جایی این قطعه را از موقعیتی که در آن فنر طول بدون کشیدگی دارد، با x نشان می‌دهیم. در زمان $t =$ ۰، قطعه با سرعت ۵٫۲ m/s در جهت مثبت x از $x =$ ۰ می‌گذرد. (الف) بسامد و (ب) دامنهٔ حرکت قطعه چقدرند؟ (ج) عبارت x را به‌صورت تابعی از زمان t بنویسید.

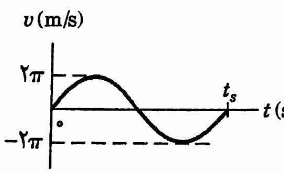
۱۰۲ نوسانگر هماهنگ ساده‌ای را به‌صورت قطعه‌ای به جرم ۰٫۸۰ kg، که به فنری ($k =$ ۲۰۰ N/m) متصل شده است، در نظر بگیرید. این قطعه در حالی‌که روی سطح افقی بدون اصطکاکی سُر می‌خورد، با انرژی مکانیکی کل ۴٫۰ J از نقطهٔ تعادل $x =$ ۰ عبور می‌کند. (الف) دامنهٔ این نوسان چقدر است؟ (ب) این قطعه در مدت زمان ۱۰ s چند بار به‌طور کامل نوسان می‌کند؟ (ج) انرژی جنبشی بیشینهٔ این قطعه چقدر است؟ (د) اندازهٔ سرعت قطعه در $x =$ ۰٫۱۵ m چقدر است؟

۱۰۳ قطعه‌ای را در حال لغزش روی یک سطح افقی بدون اصطکاک در نظر بگیرید که به انتهای فنری افقی با ثابت فنر ۶۰۰ N/m متصل شده است. این قطعه با دورهٔ ۰٫۴۰ s و دامنهٔ ۰٫۲۰ m حول وضعیت تعادل خود حرکت هماهنگ ساده دارد. در حالی‌که این قطعه از وضعیت تعادلش عبور می‌کند، یک گلوله بتونه به جرم ۰٫۵۰ kg به‌طور قائم به روی آن می‌افتد. اگر این گلوله بتونه به قطعهٔ در حال نوسان بچسبد، (الف) دورهٔ جدید حرکت و (ب) دامنهٔ جدید حرکت چقدر می‌شوند؟

۱۰۴ نوسانگر هماهنگ میرایی را که شامل یک قطعه ($m =$ ۲٫۰۰ kg)، یک فنر ($k =$ ۱۰٫۰ N/m)، و یک وسیلهٔ میرانده (با نیروی $F = -bv$) است، در نظر بگیرید. این نوسانگر در آغاز با دامنهٔ ۲۵٫۰ cm به نوسان درمی‌آید؛ بر اثر میرایی، این دامنه پس از تکمیل چهار نوسان به سه‌چهارم مقدار اولیه‌اش کاهش می‌یابد. (الف) اندازهٔ b چقدر است؟ (ب) در حین این چهار نوسان، چقدر انرژی «تلف» می‌شود؟

۱۰۵ قطعه‌ای به وزن ۱۰٫۰ N را به انتهای پایینی فنری قائم ($k =$ ۲۰۰٫۰ N/m) آویخته‌ایم، و انتهای دیگر فنر هم به سقف متصل شده است. این قطعه در راستای قائم نوسان می‌کند، و انرژی جنبشی‌اش در حالت گذر از نقطهٔ انتهایی بدون کشیدگی فنر برابر ۲٫۰۰ J است. (الف) دورهٔ نوسان چقدر است؟ (ب) با استفاده از قانون پایستگی انرژی، بیشینهٔ فاصله‌ای را به‌دست آورید که قطعه از نقطهٔ انتهایی فنر کشیده نشده بالاتر و پایین‌تر می‌رود. (این فاصله‌های بالاتر و پایین‌تر الزاماً با هم مساوی نیستند.) (ج) دامنهٔ این نوسان چقدر است؟ (د) بیشینهٔ انرژی جنبشی قطعهٔ در حال نوسان چقدر است؟

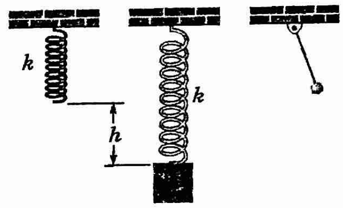
۱۰۶ نوسانگر هماهنگ ساده‌ای را در نظر بگیرید که از یک قطعهٔ متصل به فنری با $k =$ ۲۰۰ N/m تشکیل شده است. این قطعه، با نقطهٔ تعادل $x =$ ۰ و دامنهٔ ۰٫۲۰ m، روی سطح بدون اصطکاکی سُر می‌خورد. شکل ۱۵-۶۰ نمودار سرعت v این قطعه را به‌صورت تابعی از زمان نشان می‌دهد. مقیاس محور افقی با $t_s =$ ۰٫۲۰ s مشخص می‌شود. کمیت‌های زیر را به‌دست آورید: (الف) دورهٔ حرکت هماهنگ ساده، (ب) جرم قطعه، (ج) جابه‌جایی قطعه در $t =$ ۰، (د) شتاب قطعه در $t =$ ۰٫۱۰ s، و (هـ) بیشینهٔ انرژی جنبشی آن.



شکل ۱۵-۶۰ مسئلهٔ ۱۰۶.

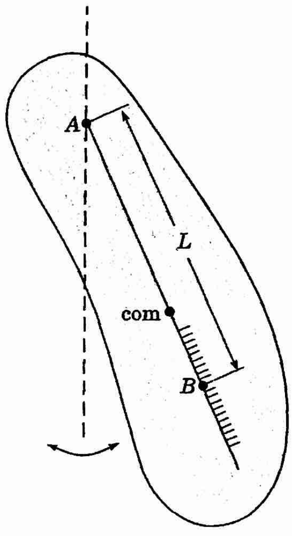
۱۰۷ در دمای معمولی، بسامد ارتعاش اتمها در جامدات از مرتبهٔ $۱۰^{۱۳}$ Hz است. فرض کنید اتمهای جسم جامد با فنرهایی به همدیگر متصل شده‌اند. تک اتمی از نقره را در نظر بگیرید که با بسامد یاد شده ارتعاش می‌کند، و همهٔ اتمهای دیگر در حال سکون‌اند. ثابت فنر مؤثر را در بلور نقره محاسبه کنید. جرم یک مول نقره ($۶٫۰۲ \times ۱۰^{۲۳}$ اتم) برابر ۱۰۸ g است.

۱۰۸ همان‌طور که در شکل ۱۵-۶۱ آمده است، آویختن وزنه‌ای به یک سر فنری با ثابت k سبب شده است که این فنر به اندازهٔ $h = ۲٫۰$ cm کشیده شود. اگر این وزنه را اندکی به پایین بکشیم و رها کنیم. این وزنه در راستای قائم با بسامد مشخصی به نوسان درمی‌آید. طول یک آونگ ساده چقدر باید باشد تا با همان بسامد به نوسان درآید؟



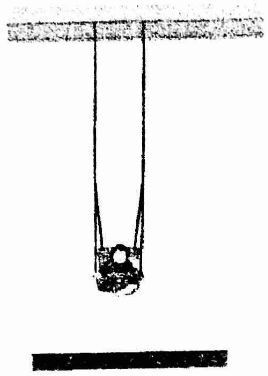
شکل ۱۵-۶۱ مسئلهٔ ۱۰۸.

۱۰۹ آونگ فیزیکی شکل ۱۵-۶۲ دارای دو نقطهٔ آویز A و B است. نقطهٔ A ثابت است ولی مکان نقطهٔ B را می‌توان در امتداد طول آونگ و در برابر مقیاس نشان داده شده، تغییر داد. هنگامی‌که A نقطهٔ آویز است، دورهٔ حرکت برابر $T = ۱٫۸۰$ s می‌شود. سپس B را نقطهٔ آویز می‌کنیم و آونگ را به حرکت درمی‌آوریم تا باز هم با همین دوره به نوسان درآید. فاصلهٔ L بین A و B چقدر است؟



شکل ۱۵-۶۲ مسئلهٔ ۱۰۹.

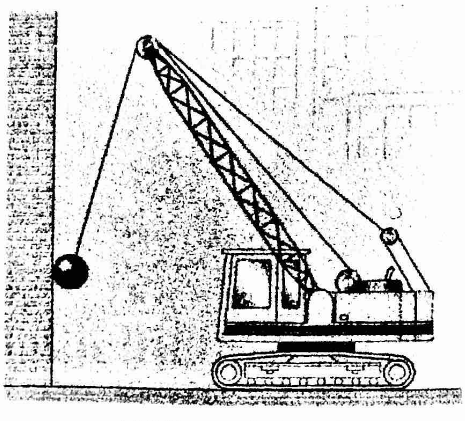
۱۱۰ یکی از وسیله‌های سرگرمی برای کودکان نوپا، نوعی صندلی تاشو است که آن را با رشته‌های کشسان از قسمت افقی بالایی چارچوب درمی‌آویزند (شکل ۱۵-۶۳). به‌جای وضعیت واقع‌بینانه‌تر نشان داده شده در شکل، فقط یک رشتهٔ کشسان را در هر طرف صندلی در نظر بگیرید. وقتی کودک را روی صندلی می‌نشانند، هر دو رشته بر اثر کشیدگی به اندازهٔ d_s افزایش طول می‌دهند (رشته‌ها را همچون فنر در نظر بگیرید). در این حالت، صندلی را به فاصلهٔ اضافی d_m به پایین می‌کشند و رها می‌کنند. به این ترتیب، کودک همانند قطعه‌ای که به انتهای فنری متصل شده است در راستای قائم به نوسان درمی‌آید. خودتان را به‌جای مهندس ایمنی کارخانهٔ سازندهٔ صندلی در نظر بگیرید. در این صورت، برای جلوگیری از هرگونه آسیب احتمالی به گردن کودک، اندازهٔ شتاب حرکت کودک نباید از $۰٫۲۰g$ تجاوز کند. اگر $d_m = ۱۰$ cm باشد، چه مقداری از d_s با اندازهٔ شتاب حرکت یاد شده متناظر می‌شود؟



شکل ۱۵-۶۳ مسئلهٔ ۱۱۰.

۱۱۱ قطعه‌ای به جرم ۲٫۰ kg، در حالی‌که به انتهای فنری افقی با ثابت فنر ۲۰۰ N/m متصل شده است، حرکت هماهنگ ساده دارد. مقدار سرعت بیشینهٔ این قطعه، در حالتی که روی سطح افقی بدون اصطکاکی می‌لغزد، برابر ۳٫۰ m/s است. (الف) دامنهٔ حرکت قطعه، (ب) اندازهٔ شتاب بیشینهٔ آن، و (ج) اندازهٔ شتاب کمینهٔ آن چقدرند؟ (د) چقدر طول می‌کشد تا این قطعه تعداد ۷٫۰ چرخه از حرکتش را تکمیل کند؟

۱۱۲ در شکل ۱۵-۶۴، یک گوی تخریب به جرم ۲۵۰۰ kg را در حال نوسان در انتهای کابل جرثقیلی نشان داده‌ایم. طول قسمت نوسان‌کنندهٔ کابل برابر ۱۷ m است. (الف) به فرض آن‌که این سیستم را بتوانیم آونگ ساده‌ای در نظر بگیریم، دورهٔ این نوسان را به‌دست آورید. (ب) آیا مقدار این دوره به جرم گوی بستگی دارد؟



شکل ۱۵-۶۴ مسئلهٔ ۱۱۲.

۱۱۳ مرکز نوسان هر آونگ فیزیکی از این ویژگی جالب توجه برخوردار است: ضربه‌ای که بر مرکز نوسان وارد شود (به فرض آن‌که راستای آن افقی و در صفحهٔ نوسان باشد)، هیچ نوسانی در نقطهٔ اتکا (یا محور چرخش) پدید نمی‌آورد. بازی‌کنان بیسبال (و بسیاری از ورزش‌های دیگر) می‌دانند که اگر توپ در نقطه‌ای جز این نقطه (که ورزش‌کاران آن را «نقطهٔ دوست‌داشتنی» می‌گویند) با چوب برخورد کند، بر اثر نوسان‌های ناشی از این برخورد، درد گزنده‌ای را در دستان‌شان احساس خواهند کرد. برای اثبات این ویژگی، میلهٔ شکل ۱۵-۱۳الف را به‌جای چوب بیسبال در نظر بگیرید. فرض کنید نیروی افقی $\vec{F}$ (که ناشی از برخورد با توپ است) در مرکز نوسان P و در جهت رو به راست بر چوب وارد شده باشد. فرض دیگر این است که چوب‌زن چوب را در نقطهٔ O، که نقطهٔ محوری میله است، در دست گرفته باشد. (الف) نقطهٔ O، بر اثر نیروی $\vec{F}$، چه شتابی پیدا می‌کند؟ (ب) شتاب زاویه‌ای ناشی از $\vec{F}$، حول مرکز جرم میله، چقدر است؟ (ج) شتاب خطی نقطهٔ O، بر اثر شتاب زاویه‌ای قسمت (ب)، چقدر می‌شود؟ (د) «دوست‌داشتنی» بودن نقطهٔ P را برای بازی‌کنان، با توجه به‌اندازه و جهت شتاب‌های به‌دست آمده در قسمت‌های (الف) و (ج)، توجیه کنید.

۱۱۴ یک فلاخن بزرگ (فرضی) را با کشیدن به اندازهٔ ۲٫۳۰ m افزایش طول داده‌ایم. تا پرتابه‌ای به جرم ۱۷۰ g را به آن چنان سرعتی برساند که بتواند از کرهٔ زمین فرار کند (این سرعت فرار برابر ۱۱٫۲ km/s است). فرض کنید بندِ کشسان فلاخن از قانون هوک پیروی می‌کند. (الف) اگر تمام انرژی پتانسیل کشسانی به انرژی جنبشی تبدیل شود، ثابت فنر فلاخن چقدر است؟ (ب) فرض کنید هر شخص عادی بتواند نیرویی برابر ۴۹۰ N وارد کند، در این صورت چند نفر باید این بند کشسان را بکشند تا به اندازهٔ کافی کشیده شود؟

۱۱۵ طول یک آونگ ساده چقدر باید باشد تا زمان نوسان کامل آن از چپ به راست و برگشت دوبارهٔ به نقطهٔ شروع حرکت برابر ۳٫۲ s شود؟

۱۱۶ قطعه‌ای به جرم ۲٫۰ kg را در انتهای فنری به ثابت فنر ۳۵۰ N/m در نظر بگیرید که با وارد آوردن نیروی $F = (15\ \mathrm{N})\sin(\omega_d t)$، که در آن $\omega_d = 35$ rad/s است، به نوسان واداشته شده است. ثابت میرایی در این‌جا برابر $b = 15$ kg/s است. در زمان $t = 0$، قطعه در حال سکون است و فنر هم طول سکون دارد. (الف) با استفاده از انتگرال‌گیری عددی، نمودار جابه‌جایی این قطعه را در طول ۱٫۰ ثانیهٔ اول رسم کنید. با توجه به حرکت قطعه در لحظات پایانی بازهٔ ۱٫۰ s، کمیت‌های دامنه، دوره، و بسامد زاویه‌ای را برآورد کنید. این محاسبات را برای حالت‌های زیر تکرار کنید: (ب) $\omega_d = \sqrt{k/m}$ و (ج) $\omega_d = 20$ rad/s.