

Tutorium 10

Algorithmen I SS 14

Institut für Theoretische Informatik



Kürzeste Wege

- Wie Dijkstra: Finden der kürzesten Wege vom Startknoten zu allen anderen Knoten (single-source shortest paths)
- auch mit negativen Kantengewichten
- insbesondere Finden von negativen Kreisen im Graphen

- kürzeste Wege können maximal die Länge $|V| - 1$ haben
- die kürzesten Wege mit Länge $k+1$ sind aus denen der Länge k berechenbar

- ➊ Initialisiere die Knotendistanz d des Startknotens mit 0 alle anderen mit ∞ .
- ➋ Iteriere $|V| - 1$ -mal über alle Kanten:
 - Ist $d_v > d_u + \text{Kantengewicht } e_{(u,v)}$, dann aktualisiere d_v
- ➌ Iteriere noch einmal über die Kanten. Ändern sich Werte so gibt es einen negativen Kreis

⇒ Laufzeit $O(|V||E|)$

- Bessere Algorithmen für Spezialfälle?
- DAG: gerichteter, azyklischer Graph \Rightarrow keine Kreise (insbesondere keine negativen kreise)
- Frage: Wie kann man das für eine bessere Laufzeit nutzen?

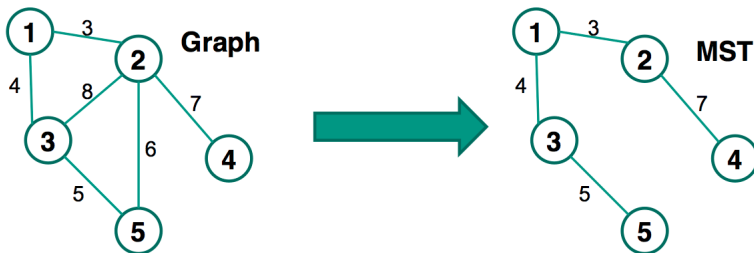
- Berechne topologische Sortierung ($\mathcal{O}(n + m)$)
- Relaxiere ausgehende Kanten der Knoten in der sortierten Reihenfolge (beginnend mit dem Startknoten)
- Gleicher Effekt wie bei Dijkstra: Nur Kanten von Knoten mit minimaler Entfernung werden Relaxiert
- Insgesamt Laufzeit $\mathcal{O}(n + m)$

Minimale Spannbäume

Minimale Spannbäume (MST)

Gegeben: Ungerichteter Graph mit Knotenmenge V , Kantenmenge E und einer Gewichtsfunktion c

Gesucht: Baum mit Knotenmenge V , Kantenmenge F , $F \subseteq E$ mit minimaler $\sum_{e \in F} c(e)$, der alle Knoten verbindet



- Für eine beliebige Knotenmenge $S \subseteq V$ sei C die Schnittkantenmenge:

$$C := \{\{u, v\} \in E : u \in S, v \in V \setminus S\}$$

- Die Kante mit dem geringsten Gewicht aus C ist im MST enthalten.
- Intuitiv klar, Teilmengen müssen irgendwo verbunden sein (formaler Beweis über Kreis in alternativem MST)

- In einem Kreis in dem Graphen ist die schwerste Kante nicht im MST enthalten.
- Auch intuitiv klar, man kann die Kante einfach weglassen

Gegeben sei ein Graph $G = (V, E)$ mit Kantengewichten $\in \mathbb{N}$, die paarweise verschieden sind.

Aufgabe: Zeige, dass der MST eindeutig bestimmt ist.

- Beginne MST beginnend bei einem Startknoten schrittweise auf
- Nutze die Schnitteigenschaft: Wähle immer die minimale Kante zwischen dem (wachsenden) MST und dem Restgraph
- Speichere zu jedem Knoten die Entfernung zum MST (Knoten im MST haben Entfernung 0)
- Zusätzlich verwalte Knoten in Priority-Queue, mit dem Gewicht der leichtesten Kante zwischen dem MST und dem Knoten
- Fast wie Dijkstra, also Laufzeit $\mathcal{O}((m + n) \log n)$ bzw. $\mathcal{O}(m + n \log n)$ mit Fib. Heaps

- 1 Füge Startknoten in Priority-Queue Q ein
- 2 Solange Q Elemente enthält:
 - 1 Nimm minimalen Knoten u aus Q und füge ihn in den MST ein.
 - 2 Betrachte alle Kanten (u, v) des Knotens.
 - 3 Für „bessere“ Kanten füge v in Q ein oder aktualisiere die Priorität (Kantengewicht).

- 1 Sortiere die Kanten aufsteigend nach Gewicht
- 2 Für jede Kante
 - 1 Überprüfe, ob die Kante zwei Knoten verbindet, die schon im MST liegen
 - 2 Wenn nicht, füge die Kante zum MST hinzu

- Benutzt sowohl Kreis- als auch Schnitteigenschaft
- Entscheidend: Verwaltung der Teilmengen mit geeigneter Datenstruktur
- \Rightarrow **Union-Find**
- Laufzeit: $\mathcal{O}(m \log m)$ (beschränkt durch Sortieren)

Gegeben ist eine Menge von Städten, die alle durch ein Netzwerk verbunden werden sollen. Zu jeder Stadt sind die Koordinaten gegeben, die Kosten um zwei Städte zu verbinden entsprechen dem Abstand. Zusätzlich existiert aber schon eine kleine Menge (≤ 8) von bereits vorhandenen Netzwerken, die gekauft werden können.

Aufgabe: Wie kann möglichst effizient berechnet werden, wie hoch die Kosten sind um alle Städte zu verbinden? (Zunächst: wie kann die Aufgabe durch Graphen dargestellt werden?)