Karlsruher Institut für Technologie

Tutorium 1

Algorithmen I SS 14

Institut für Theoretische Informatik

Vorstellung

- Name?
- Studiengang?
- Semester?
- . . .

Organisatorisches

Folien `https://github.com/vincent23/algo1-tut-ss14`

Mail v.schuessler@gmail.com

- E-Mail an mich für Liste
- Tutorium ersetzt nicht Vorlesung oder Übung

Übungsbetrieb

- Jeweils Mittwoch bis Freitag der folgenden Woche ein Übungsblatt
- Abgabe zu zweit möglich
- Tutoriumsnummer groß in die rechte obere Ecke
- Pseudocode gut dokumentieren und verständlich halten
- Programmieraufgaben (später im Semester)
- Mittsemesterklausur
- Nichts verpflichtend, insgesamt 3 Bonuspunkte möglich

Laufzeitanalyse

Karlsruher Institut für Technologie

Best Case	Meistens eher uninteressant
Average Case	Am interessantesten, aber schwierig zu berechnen
Worst Case	Relativ interessant und gleichzeitig einfach abschätzbar, für uns am relevantesten

Nicht verwechseln mit Ω, $\mathcal{O}$ und Θ!

Schleifeninvarianten

Karlsruher Institut für Technologie

- Gilt zu Beginn
- und nach jedem Durchlauf der Schleife
- Beweis funktioniert wie bei vollständiger Induktion
- Geschickte Wahl der Invariante zum Beweis der Korrektheit

Beispiel: Maximum finden

Eingabe : Ein Array a der Länge n
Ausgabe: Index der größten Zahl in a

```
max_index = -1
max = −∞
for i = 0 to n − 1 do
    if max < a[i] then
        max_index = i
        max = a[i]
    end
end
```

Beispiel: Binäre Suche

Eingabe : sortiertes (!) Array a der Länge n, gesuchtes Element x
Ausgabe: Index von x oder -1, falls Element nicht gefunden wurde

```
min_index = 0
max_index = n − 1
while min_index ≤ max_index do
    mid_index = min_index + ⌊(max_index − min_index)/2⌋
    if a[mid_index] == x then
        return mid_index
    else if a[mid_index] < x then
        min_index = mid_index + 1
    else
        max_index = mid_index − 1
    end
end
return -1
```

Beispiel: Binäre Suche

Eingabe : sortiertes (!) Array *a* der Länge *n*, gesuchtes Element *x*
Ausgabe: Index von *x* oder -1, falls Element nicht gefunden wurde

```
min_index = 0
max_index = n − 1
while min_index ≤ max_index do
    mid_index = min_index + ⌊(max_index − min_index)/2⌋
    if a[mid_index] == x then
        return mid_index
    else if a[mid_index] < x then
        min_index = mid_index + 1
    else
        max_index = mid_index − 1
    end
end
return -1
```

O-Kalkül

Formale Definition

$$
\begin{aligned}
\mathcal{O}(f(n)) &= \{g(n) : \exists c > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : g(n) \leq c \cdot f(n)\} \\
\Omega(f(n)) &= \{g(n) : \exists c > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : g(n) \geq c \cdot f(n)\} \\
\Theta(f(n)) &= \mathcal{O}(f(n)) \cap \Omega(f(n)) \\
o(f(n)) &= \{g(n) : \forall c > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : g(n) \leq c \cdot f(n)\} \\
\omega(f(n)) &= \{g(n) : \forall c > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : g(n) \geq c \cdot f(n)\}
\end{aligned}
$$

Aufgaben

1. $n^2 \in \mathcal{O}(n^3)$
2. $2^n \in \mathcal{O}(3^n)$
3. $3n^2 + \sqrt{n} \in \mathcal{O}(n^2)$
4. $n! \in \mathcal{O}(n^n)$

Noch *mehr* Aufgaben

$\mathcal{O}$, Ω oder Θ

1. $f(n) = \log n^2; g(n) = \log n + 5$
2. $f(n) = n \log n + n; g(n) = \log n$

Beweise

1. $f(n) + g(n) \in \mathcal{O}(max(f(n), g(n)))$
2. Auf der Menge der asymptotisch positiven Funktionen ist

$$f \sim_{\Theta} g :\Leftrightarrow f \in \Theta(g)$$

   eine Äquivalenzrelation.

(Vereinfachtes) Master-Theorem

Für positive Konstanten a, b, c, d, sei $n = b^k$ für ein $k \in \mathbb{N}$

$$T(n) = \begin{cases} a, & \text{falls } n = 1 \\ cn + dT(\frac{n}{b}), & \text{falls } n > 1 \end{cases}$$

Es gilt dann

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(n), & \text{falls } d < b \\ \Theta(n \log(n)), & \text{falls } d = b \\ \Theta(n^{\log_b d}), & \text{falls } d > b \end{cases}$$

Aufgaben zum Master-Theorem

- $A(1) = 1$ und für $n = 2^k, k \in \mathbb{N} : A(n) = A(n/2) + cn$
- $B(1) = 1$ und für $n = 3^k, k \in \mathbb{N} : B(n) = 4B(n/3) + 4n$
- $C(1) = 1$ und für $n = 6^k, k \in \mathbb{N} : C(n) = 3C(n/6) + n + 7$
- $D(1) = 1$ und für $n = 6^k, k \in \mathbb{N} : D(n) = 6D(n/6) + C(n)$

Wahr oder Falsch?

- $7n + 4 \in \mathcal{O}(n)$
- $n \log n \in \mathcal{O}(n)$
- $n(n+1) \in \Theta(n^3)$
- $n^n + n^5 \in \Omega(n)$
- $n + n! \in \Omega(n^n)$
- $n + 10 \in o(n)$
- $\log_n n \in \mathcal{O}(1)$
- $n^2 \in \omega(n^2)$

Wahr oder Falsch?

- $7n + 4 \in \mathcal{O}(n)$
- $n \log n \in \mathcal{O}(n)$
- $n(n+1) \in \Theta(n^3)$
- $n^n + n^5 \in \Omega(n)$
- $n + n! \in \Omega(n^n)$
- $n + 10 \in o(n)$
- $\log_n n \in \mathcal{O}(1)$
- $n^2 \in \omega(n^2)$

Wahr oder Falsch?

Karlsruher Institut für Technologie

- $7n + 4 \in \mathcal{O}(n)$
- $n \log n \in \mathcal{O}(n)$
- $n(n+1) \in \Theta(n^3)$
- $n^n + n^5 \in \Omega(n)$
- $n + n! \in \Omega(n^n)$
- $n + 10 \in o(n)$
- $\log_n n \in \mathcal{O}(1)$
- $n^2 \in \omega(n^2)$

Wahr oder Falsch?

- $7n + 4 \in \mathcal{O}(n)$
- $n \log n \in \mathcal{O}(n)$
- $n(n+1) \in \Theta(n^3)$
- $n^n + n^5 \in \Omega(n)$
- $n + n! \in \Omega(n^n)$
- $n + 10 \in o(n)$
- $\log_n n \in \mathcal{O}(1)$
- $n^2 \in \omega(n^2)$

Wahr oder Falsch?

- $7n + 4 \in \mathcal{O}(n)$
- $n \log n \in \mathcal{O}(n)$
- $n(n+1) \in \Theta(n^3)$
- $n^n + n^5 \in \Omega(n)$
- $n + n! \in \Omega(n^n)$
- $n + 10 \in o(n)$
- $\log_n n \in \mathcal{O}(1)$
- $n^2 \in \omega(n^2)$

Wahr oder Falsch?

- $7n + 4 \in \mathcal{O}(n)$
- $n \log n \in \mathcal{O}(n)$
- $n(n+1) \in \Theta(n^3)$
- $n^n + n^5 \in \Omega(n)$
- $n + n! \in \Omega(n^n)$
- $n + 10 \in o(n)$
- $\log_n n \in \mathcal{O}(1)$
- $n^2 \in \omega(n^2)$

Wahr oder Falsch?

Karlsruher Institut für Technologie

- $7n + 4 \in \mathcal{O}(n)$
- $n \log n \in \mathcal{O}(n)$
- $n(n+1) \in \Theta(n^3)$
- $n^n + n^5 \in \Omega(n)$
- $n + n! \in \Omega(n^n)$
- $n + 10 \in o(n)$
- $\log_n n \in \mathcal{O}(1)$
- $n^2 \in \omega(n^2)$

Wahr oder Falsch?

- $7n + 4 \in \mathcal{O}(n)$
- $n \log n \in \mathcal{O}(n)$
- $n(n+1) \in \Theta(n^3)$
- $n^n + n^5 \in \Omega(n)$
- $n + n! \in \Omega(n^n)$
- $n + 10 \in o(n)$
- $\log_n n \in \mathcal{O}(1)$
- $n^2 \in \omega(n^2)$

Wahr oder Falsch?

- $7n + 4 \in \mathcal{O}(n)$
- $n \log n \in \mathcal{O}(n)$
- $n(n+1) \in \Theta(n^3)$
- $n^n + n^5 \in \Omega(n)$
- $n + n! \in \Omega(n^n)$
- $n + 10 \in o(n)$
- $\log_n n \in \mathcal{O}(1)$
- $n^2 \in \omega(n^2)$

Fragen?

Bis zum nächsten Mal