Resumo: Conectividade em Grafos Direcionados e Não-Direcionados e Componentes Fortemente Conexos

Fechos Transitivos

- De $v \in V$:
  - Direto:
    - Vértices alcançáveis de v, com caminho maior ou igual a zero (quem o v chega).
  - Inverso:
    - Vértices que alcançam v, com caminho maior ou igual a zero (quem chega em v).
- De $X \subseteq V$:
  - Direto:
    - Vértices alcançáveis de cada vértice de X, com caminho maior ou igual a zero.
  - Inverso:
    - Vértices que alcançam algum vértice de X, com caminho maior ou igual a zero.

Conectividade

- Definição:
  - Um grafo é dito **conexo** se **existe um caminho entre todo par de vértices**.
    - *Formalmente*: $\forall\, u, v \in V, \exists\, \mathrm{path}(u, v)$.
  - Um grafo é dito **não conexo** (ou **desconexo**) se **existe pelo menos um par de vértices** entre os quais **não existe caminho**.
    - - *Formalmente*: $\exists\, u, v \in V,\ \nexists\, \mathrm{caminho}(u, v)$.
- Grafo Não-Direcionado:
  - Conexo:
    - Se **existe um caminho entre todo par de vértices**.
  - Não-Conexo:
    - Se **existe pelo menos um par de vértices** entre os quais **não existe caminho**.
- Grafo Direcionado:
  - Fortemente Conexo:
    - Para todo par de vértice u, v existe um caminho de u para v **E** de v para u.

        - *Formalmente*: $\forall\, u, v \in V \mid \exists\, \text{path}(u, v) \text{ e path}(v, u)$.
    - Semi-Fortemente Conexo:
        - Para todo par de vértice u, v existe um caminho de u para v **OU** de v para u.
        - *Formalmente*: $\forall\, u, v \in V \mid \exists\, \text{path}(u, v) \text{ ou path}(v, u)$.
    - Fracamente Conexo:
        - Existe pelo menos um par de vértice u, v no qual não existe um caminho de u para v e nem de v para u.
        - *Formalmente*: $\exists\, u, v \in V \mid \nexists\, \text{path}(u, v) \text{ e } \nexists\, \text{path}(v, u)$.

            > $\exists\, u, v \in V \mid v \notin \Gamma^+(u) \text{ e } u \notin \Gamma^+(v)$.

        - Também é possível pegar o grafo associado, isto é o **grafo obtido desconsiderando a orientação de G**, e verificar se este é conexo:
            - Se o grafo associado for conexo, então o grafo original é fracamente conexo.

Atingibilidade

- Base:
    - Um base B de um grafo $G = (V, E)$ é um subconjunto $B \subseteq V$ se:
        1. Não há caminho entre vértices de B.
        2. Todo vértice não pertencente a B pode ser **atingido** por algum vértice de B.
- Anti-Base:
    - Uma anti-base A de um grafo $G = (V, E)$ é um subconjunto $A \subseteq V$ se:
        1. Não há caminho entre vértices de A.
        2. Todo vértice não pertencente a A pode atingir A por um caminho.
- Raíz:
    - Sendo B uma base de G, se B for um **conjunto unitário**, então dizemos que B **é a raíz** de G.
- Anti-Raíz:
    - Sendo A uma anti-base de G, se A for um **conjunto unitário**, então dizemos que A **é a anti-raíz** de G.

Componentes Fortemente Conexos (Strongly Connected Components - SCC)

A **partição** de um conjunto finito V é um conjunto P de subconjuntos disjuntos não vazios de V, cuja união é V, isto é:

$$P = \{S_1, S_2, \cdots, S_k\} \mid \cup_{i=1}^{k} S_i = V \text{ e } S_i \cap S_j = \emptyset\, \forall\, i \neq j$$

Onde cada subconjunto Si é uma região da partição e, também, um **componente fortemente conexo**.

Como Encontrar Componentes Fortemente Conexos (Algoritmo de Kosaraju)

Seja $G = (V, E)$ um grafo direcionado. Para identificar as **componentes fortemente conexas** de G:

1. Realizar uma busca em profundidade (**DFS**) a partir de um vértice arbitrário, registrando os **tempos de descoberta** e os **tempos de finalização** de cada vértice.
2. Construir o **grafo transposto** $G^- = (V, E')$, no qual, para cada aresta $e = (u, v) \in E$, adiciona-se a aresta reversa $e' = (v, u)$ em E'.
3. Realizar uma nova busca em profundidade sobre o grafo G^-, explorando os vértices na **ordem decrescente dos tempos de finalização** obtidos na primeira DFS.
    1. A cada nova chamada recursiva da DFS no grafo transposto, atribuir um **rótulo** ou identificador ao componente que está sendo explorada. Todos os vértices visitados nessa chamada pertencem ao **mesmo componente fortemente conexo**.
4. Ao final, o número total de componentes fortemente conexas corresponde ao **número de rótulos diferentes** atribuídos.

Observação

Se o número de componentes fortemente conexas for igual ao número de vértices de G, então o grafo é acíclico.