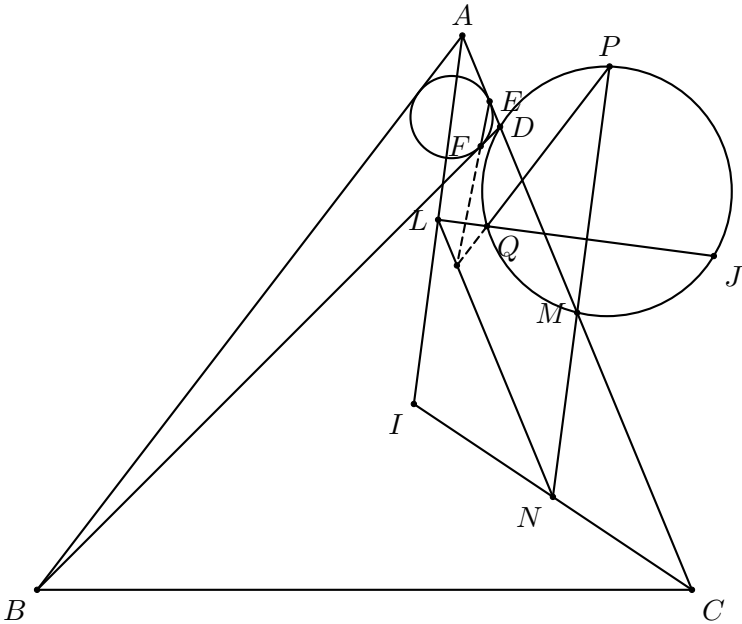


China MO 2024/2

西风冷香

2024 年 12 月 16 日

题目. 在 $\triangle ABC$ 中, I 为内心, L 、 M 、 N 分别是 AI 、 AC 、 CI 的中点. 点 D 在线段 AM 上, 满足 $BC = BD$, $\triangle ABD$ 的内切圆分别切 AD 、 BD 于点 E 、 F . J 为 $\triangle AIC$ 的外心, ω 为 $\triangle JMD$ 的外接圆, 直线 MN 另交圆 ω 于点 P , JL 另交圆 ω 于点 Q . 证明: PQ 、 LN 、 EF 三线共点.



设 $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$, $AD = d$, 则由 $BD = BC$ 可知:

结论 1 —

$$b \cdot d = c^2 - a^2$$

证明. 对 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ABD$ 应用余弦定理:

$$b^2 + c^2 - a^2 = 2bc \cos \angle BAC$$

$$d^2 + c^2 - a^2 = 2dc \cos \angle BAC$$

结论 3 —

$$LT = \frac{1}{2}AD$$

证明. 注意到 $\angle BSK = \angle BFK = 90^\circ$, 因此

$$LS = AS - AL = c \cdot \cos \angle BAC - \frac{1}{2}AI$$

可得

$$\begin{aligned} LT &= LS \cdot \frac{AK}{AB} \\ &= (c \cdot \cos \frac{1}{2}\angle BAC - \frac{1}{2}AI) \cdot \frac{AK}{c} \\ &= AK \cdot \cos \frac{1}{2}\angle BAC - \frac{1}{2c}AI \cdot AK \\ &= AE - \frac{1}{2c}AI \cdot AK \end{aligned}$$

其中

$$AE = \frac{c + d - a}{2}$$

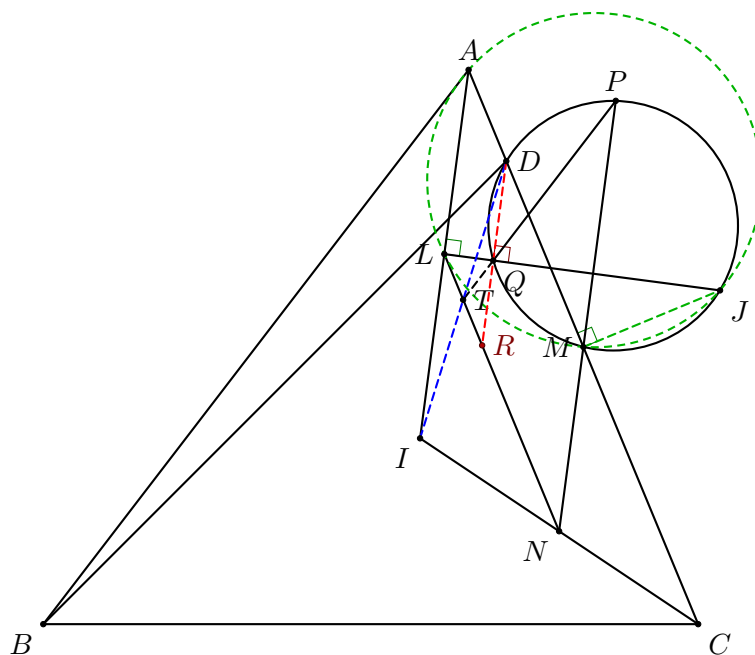
$$\begin{aligned} AI \cdot AK &= \frac{AE'}{\cos \frac{1}{2}\angle BAC} \cdot \frac{AE}{\cos \frac{1}{2}\angle BAC} \\ &= \frac{\frac{b+c-a}{2} \cdot \frac{d+c-a}{2}}{\frac{1+\cos \angle BAC}{2}} \\ &= \frac{(b+c-a)(\frac{c^2-a^2}{b} + c-a)}{2(1 + \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc})} \\ &= \frac{(b+c-a) \cdot \frac{(c-a)(c+a+b)}{b}}{\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{bc}} \\ &= c \cdot (c-a) \end{aligned}$$

因此

$$LT = \frac{c + d - a}{2} - \frac{1}{2c} \cdot c \cdot (c-a) = \frac{d}{2} = \frac{1}{2}AD$$

□

因此 I 、 T 、 D 共线, 且 T 是 ID 的中点.



接下来, 只需要证明 T 、 P 、 Q 共线即可.

结论 4 — $PQ \parallel AB$.

证明. 由 J 是 $\triangle AIC$ 的外心可知 $\angle AMJ = \angle ALJ = 90^\circ$, 因此 A 、 L 、 M 、 J 共圆. 因此

$$\begin{aligned}\angle(PQ, MN) &= \angle QPM = \angle QJM = \angle LJM \\ &= \angle LAM = \angle BAI \\ &= \angle(AB, AI)\end{aligned}$$

由 $MN \parallel AI$, 可得 $PQ \parallel AB$. □

结论 5 — $TQ \parallel AB$.

证明. 设直线 DQ 和 LN 交于 R , 则 $\angle DQJ = \angle DMJ = \angle ALJ$, 因此 $DQ \parallel AL$, 可知四边形 $ALRD$ 是平行四边形, 因此 $LT = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}LR$, 可知 T 是 LR 的中点.

又 $\angle LQR = \angle DQJ = \angle DMJ = 90^\circ$, 因此 $TQ = \frac{1}{2}LR = LT$, 故

$$\begin{aligned}\angle(TQ, LN) &= \angle QTL = 2\angle QLT \\ &= 2(\angle QLI + \angle ILT) = 2\angle ILT \\ &= 2\angle IAC = \angle BAC \\ &= \angle(AB, AC)\end{aligned}$$

由 $LN \parallel AC$, 可得 $TQ \parallel AB$. □

由结论 4 和结论 5 可知 T 、 P 、 Q 共线, 命题得证.