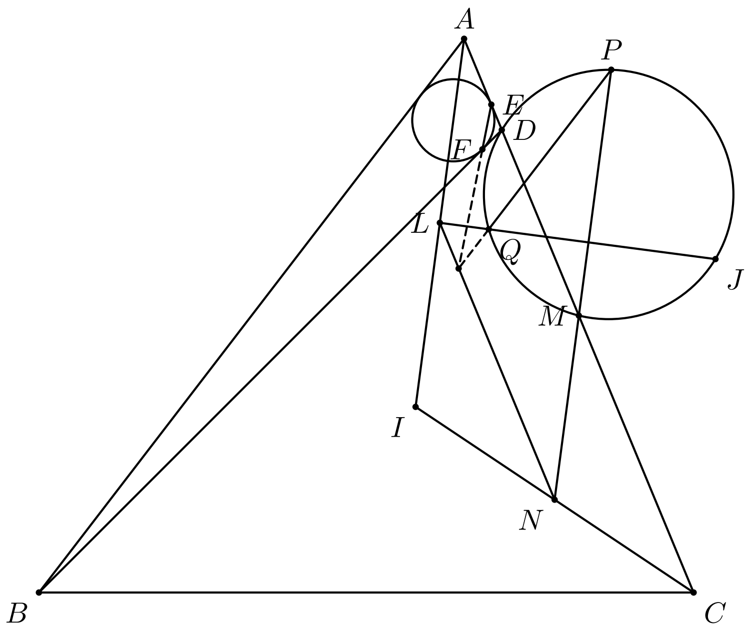
China MO 2024/2

王介哲

2024 年 12 月 17 日

题目. 在 $\triangle ABC$ 中，I 为内心，L、M、N 分别是 AI、AC、CI 的中点. 点 D 在线段 AM 上，满足 $BC = BD$，$\triangle ABD$ 的内切圆分别切 AD、BD 于点 E、F. J 为 $\triangle AIC$ 的外心，ω 为 $\triangle JMD$ 的外接圆，直线 MN 另交圆 ω 于点 P，JL 另交圆 ω 于点 Q. 证明：PQ、LN、EF 三线共点.



设 $AB = c$，$BC = a$，$CA = b$，$AD = d$，则由 $BD = BC$ 可知：

结论 1 —

$$b \cdot d = c^2 - a^2$$

证明. 对 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ABD$ 应用余弦定理：

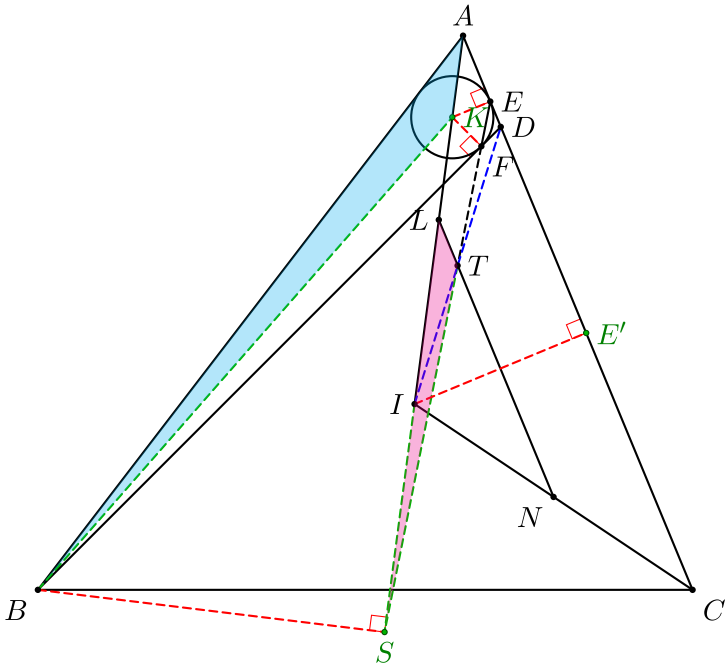
$$b^2 + c^2 - a^2 = 2bc\cos\angle BAC$$

$$d^2 + c^2 - a^2 = 2dc\cos\angle BAC$$

因此 b、d 是方程 $x^2-2c\cos A\cdot x+c^2-a^2=0$ 的两个根，由韦达定理可知

$$b\cdot d=c^2-a^2$$

□



我们先考虑 LN 和直线 EF 的交点，设为 T. 设直线 EF 和直线 AI 交于点 S，易知：

结论 2 — B、K、F、S 共圆.

证明.

$$\begin{aligned}\angle BKS&=\angle BAK+\angle ABK\\&=\frac{1}{2}\angle BAD+\frac{1}{2}\angle ABD\\&=\frac{1}{2}\left(180^\circ-\angle ADB\right)\\&=\angle DFE\\&=\angle BFS\end{aligned}$$

因此 B、K、F、S 共圆. □

由此可知 $\angle LST=\angle KBF=\angle ABK$，$\angle SLT=\angle KAC=\angle BAK$，因此 $\triangle LST\sim\triangle ABK$，于是有

$$\frac{LT}{AK}=\frac{LS}{AB}$$

接下来证明：

结论 3 —

$$LT = \frac{1}{2}AD$$

证明. 注意到 $\angle BSK = \angle BFK = 90^\circ$，因此

$$LS = AS - AL = c \cdot \cos\frac{1}{2}\angle BAC - \frac{1}{2}AI$$

可得

$$\begin{aligned} LT &= LS \cdot \frac{AK}{AB} \\ &= \left(c \cdot \cos\frac{1}{2}\angle BAC - \frac{1}{2}AI\right) \cdot \frac{AK}{c} \\ &= AK \cdot \cos\frac{1}{2}\angle BAC - \frac{1}{2c}AI \cdot AK \\ &= AE - \frac{1}{2c}AI \cdot AK \end{aligned}$$

其中

$$AE = \frac{c+d-a}{2}$$

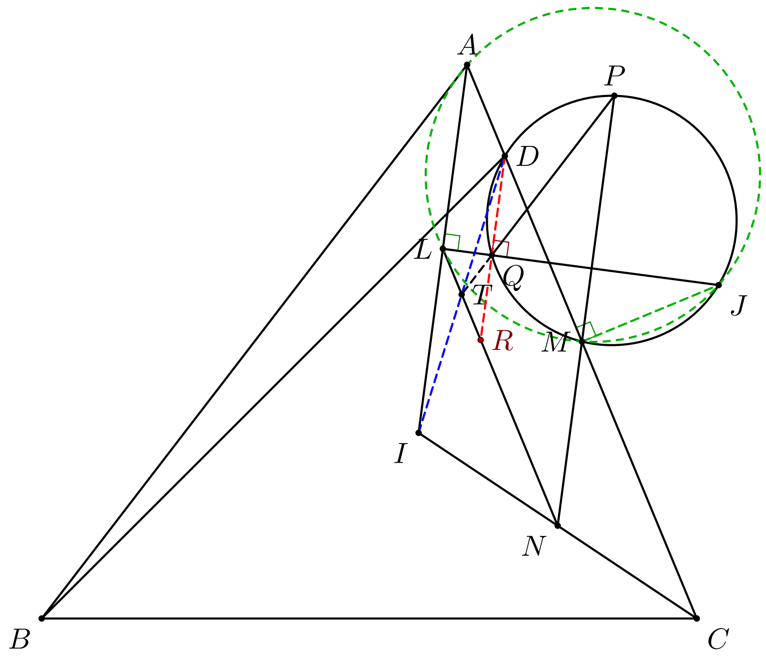
$$\begin{aligned} AI \cdot AK &= \frac{AE'}{\cos\frac{1}{2}\angle BAC} \cdot \frac{AE}{\cos\frac{1}{2}\angle BAC} \\ &= \frac{\frac{b+c-a}{2} \cdot \frac{d+c-a}{2}}{\frac{1+\cos\angle BAC}{2}} \\ &= \frac{(b+c-a)\left(\frac{c^2-a^2}{b} + c - a\right)}{2\left(1 + \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)} \\ &= \frac{(b+c-a) \cdot \frac{(c-a)(c+a+b)}{b}}{\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{bc}} \\ &= c \cdot (c-a) \end{aligned}$$

因此

$$LT = \frac{c+d-a}{2} - \frac{1}{2c} \cdot c \cdot (c-a) = \frac{d}{2} = \frac{1}{2}AD$$

□

因此 I、T、D 共线，且 T 是 ID 的中点.



接下来，只需要证明 T、P、Q 共线即可.

结论 4 — $PQ \parallel AB$.

证明. 由 J 是 $\triangle AIC$ 的外心可知 $\angle AMJ = \angle ALJ = 90°$，因此 A、L、M、J 共圆. 因此

$$\begin{aligned}\measuredangle(PQ, MN) &= \measuredangle QPM = \measuredangle QJM = \measuredangle LJM \\ &= \measuredangle LAM = \measuredangle BAI \\ &= \measuredangle(AB, AI)\end{aligned}$$

由 $MN \parallel AI$，可得 $PQ \parallel AB$. □

结论 5 — $TQ \parallel AB$.

证明. 设直线 DQ 和 LN 交于 R，则 $\angle DQJ = \angle DMJ = \angle ALJ$，因此 $DQ \parallel AL$，可知四边形 $ALRD$ 是平行四边形，因此 $LT = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}LR$，可知 T 是 LR 的中点.

又 $\angle LQR = \angle DQJ = \angle DMJ = 90°$，因此 $TQ = \frac{1}{2}LR = LT$，故

$$\begin{aligned}\measuredangle(TQ, LN) &= \measuredangle QTL = 2\measuredangle QLT \\ &= 2(\measuredangle QLI + \measuredangle ILT) = 2\measuredangle ILT \\ &= 2\measuredangle IAC = \measuredangle BAC \\ &= \measuredangle(AB, AC)\end{aligned}$$

由 $LN \parallel AC$，可得 $TQ \parallel AB$. □

由结论 4 和结论 5 可知 T、P、Q 共线，命题得证.