正交多项式

喂喂喂企鹅哦

2022 年 10 月 19 日

目录

1 预备知识与一些“碎碎念”

1.1 写这篇文章的动机与一些声明

近日笔者在阅读各种数学物理方法的书籍时，无意间翻见某本书中曾专门讨论了一般正交多项式的理论。其一般性确实令人着迷，尽管它的繁杂不免令人心生退却。研读过程中，作者点到为止地介绍了正交多项式理论的精髓，但难免跳过了一些繁琐而不易一眼瞪出的过程，给数学水平不高的笔者带来了一些困难。笔者曾在互联网上尝试寻找一些详细的推导过程，但并无很好的结果，中文的相关资料尤其少。也许它们藏在某本相关专著之中，但是看懂这本专著的推导难免需要对符号体系和各种基本定义作重新了解，这意味着巨大的时间成本。最后笔者还是决定自己下笔推导略过的过程。

于是笔者写下这样一篇文章，也希望能够帮助到以后对一般正交多项式理论存在学习困难的人。在文章中，笔者尽可能地使用最常用的符号体系与习惯约定，以较低门槛的方式讨论正交多项式的理论。笔者会尽可能地写全一切不显然的推导过程，包括某些令人破防的复杂步骤。

由于这样一篇文章不过是出自一位物理系学生之手，笔者无意在此使用很严格的数学。在笔者看来，关于数学，适度的严谨性是必要的，但是推导或是对为什么如此的解释往往比严谨的证明更加重要。

另外，请包涵笔者可怜的排版水平。

1.2 一些基本定义与符号

表 1: **符号体系**

符号	意义
$\mathcal{H}$	希尔伯特空间，一个完备的内积空间
$\mathcal{L}_w^2(a,b)$	全体定义在区间 (a,b) 上的平方可积的连续函数的集合，w 表示权函数
$\|f\rangle$	向量空间中的元素
$\langle f\|g\rangle$	f 与 g 的内积
$\mathbf{I}$	单位映射
$p_{\leq m}(x)$	次数 <m 的多项式
$deg[p(x)]$	多项式 $p(x)$ 的次数

1.3 一些简单的预备知识

众所周知，在区间 [a,b] 上的所有连续函数的集合是一个无穷维的线性空间，不过它不是完备的（因为某些函数序列在取极限是可能会变成非连续函数，不过在这里不深究这个问题）。我们从中取这样一个子空间：定义在区间 (a,b) 上的全体平方可积的连续函数的集合 $\mathcal{L}_w^2(a,b)$，它是完备的。这个空间及里面的对象将是我们接下来研究的东西。

在无限维的线性空间中，可能出现一个不会在有限维空间中出现的问题：你选择了一组正交基底，在无限维空间中基底自然也有无限个。它们可能是可数的，也可能是不可数的。尽管它们的确两两正交，但是你却不能够保证每个空间内的函数都能展开成这组基底的线性组合，因为其中一些基底可能被抽掉了（尽管它仍然有无数个，你无法像在有限维空间一样用基底个数来判断这件事情），导致这组基底不完备。于是我们需要一些条件来保证基底的完备性——封闭性关系式。

由于本文着眼于正交多项式，故仅在希尔伯特空间上探讨所选基底为离散的（或者说，可数的）情形。不妨记所选择的基底为 $\{|e_i\rangle\}_{i=1}^{\infty}$。

$$\{|e_i\rangle\}_{i=1}^{\infty}\text{是完备的} \iff \forall\,|f\rangle\in\mathcal{H},\ |f\rangle=\sum_{i=1}^{\infty}|e_i\rangle\langle e_i|f\rangle \iff \sum_{i=1}^{\infty}|e_i\rangle\langle e_i|=\mathbf{I}$$

$\sum_{i=1}^{\infty} |e_i\rangle \langle e_i| = \mathbf{I}$ 即为所谓的“封闭性关系式”，也即保证基底完备性的充要条件。

有一条很厉害的定理（不过这里无法给出证明）：

定理 1.1. *所有的具有可数基的完备内积空间与* $\mathcal{L}_w^2(a,b)$ *同构.*

于是我们就可以名正言顺地把着眼点放在 $\mathcal{L}_w^2(a,b)$ 上了。（注意，现在这个空间只是一个普通的线性空间，还没有内积的概念。）接下来所使用的符号将会以一种更熟悉的形式展现。显然，$\{x^k\}_{k=0}^{\infty}$ 构成 $\mathcal{L}_w^2(a,b)$ 的一组基。通过格莱姆-施密特过程，我们可以把它正交化，把正交化后得到的这组基记作 $\{C_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$.

接着，我们定义这样一个内积（这也正是取平方可积函数的集合为研究空间的理由）：

定义 1.1.

$$\langle f|g\rangle = \int_a^b f^*(x)g(x)w(x)dx, \text{ 其中 } w(x) \text{ 是权函数.}$$

于是 $\mathcal{L}_w^2(a,b)$ 成为了一个内积空间，显然它是一个希尔伯特空间。由此我们可以把任意函数展开：

$$\forall f \in \mathcal{L}_w^2(a,b), \quad f = \sum_{k=0}^{n} a_k C_k(x), \quad a_k = \frac{\langle C_k|f\rangle}{\langle C_k|C_k\rangle} \tag{1}$$

另外,我们还可以得到一个很有用的性质(因为任意 $p_{\leq n-1}$ 可以通过 $\{C_k(x)\}_{k=0}^{n-1}$ 线性组合得到)：

命题 1.2. $\langle C_n(x)|p_{\leq n-1}(x)\rangle = \int_a^b C_n(x)p_{\leq n-1}(x)w(x)dx = 0$

接下来，我们将正式开启旅程。首先我们将探究一般正交多项式的相关理论。

2 一般正交多项式

表 2: **一些接下来会用到的符号**

符号	意义
$\{C_k(x)\}_{k=0}^n$	一组正交基（不一定是归一化了的）
$k_{n+1}^{(n)}, k_{n+1}^{(n+1)}$	分别表示 $C_{n+1}(x)$ 的 x^n 和 x^{n+1} 项的系数
h_n	$h_n = \langle C_n \vert C_n \rangle$
α_n	$\alpha_n = \frac{k_{n+1}^{(n+1)}}{k_n^{(n)}}$
β_n	$\beta_n = \alpha_n(\frac{k_{n+1}^{(n)}}{k_{n+1}^{(n+1)}} - \frac{k_{n-1}^{(n)}}{k_n^{(n)}})$
γ_n	$\gamma_n = -\frac{h_n \alpha_n}{h_{n-1}\alpha_{n-1}}$

我们来看看这样一个递推关系:

命题 2.1. $C_{n+1} = (\alpha_n x + \beta_n)C_n + \gamma_n C_{n-1}$

尽管第一次见到它，你可能会觉得它很抽象，不知道有什么用。我在这里先作一点简单的解释：仔细看这个递推式，要从 C_n 和 C_{n-1} 得到 C_{n+1}，你只需要知道 C_{n+1} 的 n+1 次项和 n 次项系数以及 $\int_a^b [C_n(x)]^2 w(x)dx$（也即 C_n 和自身的内积）。而这些需要知道的量，当你知道 C_n 的通项公式后将很容易获得。（注意，这里的通项公式当然不是指完全化简的形式，不然你都知道了还哪用算递推关系呢 (￣ △ ￣)。它可能只是具体到某个东西的 n 阶导数这样的形式，而这个递推关系正是拿来帮你不怎么费力地写出每个 $C_n(x)$ 的具体表达式的）.

证明. 显然 (因为 x^{n+1} 项被减掉了嘛)，$deg[C_{n+1}(x)-\alpha_n xC(x)]\leq n.$

把它以 $C_n(x)$ 为基底展开：

$$C_{n+1}(x)-\alpha_n xC(x)=\sum_{k=0}^{n}a_kC_k(x)$$

两边同时与 $C_m(x)$ $(m\leq n)$ 作内积，得到

$$\langle C_{n+1}|C_m\rangle-\alpha_n\langle C_n|xC_m\rangle=\sum_{k=0}^{n}a_k\langle C_k|C_m\rangle$$

由命题 1.2可知，左边第一项为 0. 又 $deg[xC_m(x)]\leq n-1$, 故在 $m\leq n-2$ 时左边第二项也为 0，因而 $a_m=0,\ m\leq n-2$，导致这时候右边也只能为 0。于是得到：

$$C_{n+1}(x)-\alpha_n xC(x)=a_{n-1}C_{n-1}(x)+a_nC_n(x) \tag{2}$$

对比两边 x^n 项的系数，可以得到 $k_{n+1}^{(n)}-\alpha_n k_n^{(n-1)}=a_nk_n^{(n)}$

可以解得 (注意分清楚 a 和 α，别眼花看错了哇)

$$a_n=\beta_n=\alpha_n(\frac{k_{n+1}^{(n)}}{k_{n+1}^{(n+1)}}-\frac{k_{n-1}^{(n)}}{k_n^{(n)}})\equiv\beta_n$$

把 (2) 式两边与 C_{n-1} 作内积，得到

$$a_{n-1}h_{n-1}+\alpha_n\langle xC_n|C_{n-1}\rangle$$

把 n 替换成 n-1 代入 (2) 式可以并两边与 C_n 作内积，得到

$$h_n=\alpha_{n-1}\langle xC_n|C_{n-1}\rangle=0$$

联立上面两条式子即可得到：

$$a_{n-1}=-\frac{h_n\alpha_n}{h_{n-1}\alpha_{n-1}}\equiv\gamma_n$$

把 a_n 和 a_{n-1} 代回 (2) 式就证完啦！ □

当然，我们也可以把这个递推关系写成另外一种形式（就是移项除一下而已）：

命题 2.2. $xC_n(x)=\dfrac{1}{\alpha_n}C_{n+1}(x)-\dfrac{\beta_n}{\alpha_n}-\dfrac{\gamma_n}{\alpha_n}C_{n-1}(x).$

3 经典正交多项式

3.1 经典正交多项式的基本介绍

原谅我在这里很冒昧地丢给你一个定理:

定理 3.1. *考虑函数* $F_n(x) = \dfrac{1}{w(x)}\dfrac{d^n}{dx^n}(w(x)s(x)^n), \quad n = 1, 2, ...$
当满足以下三个条件时, $deg[F_n(x)] = n$ *且* $\forall k < n, \quad \langle F_n(x)|p_k(x)\rangle = 0$ *:*
(a) $deg[F_1(x)] = 1.$
(b) s(x) 为次数 <2 且只有实根(若有根)的多项式.
(c) 在区间 (a,b) 上, $w(x) > 0$ *且可积,并满足* $w(a)s(a) = w(b)s(b) = 0.$

也许你不知道我想干什么,不过请你看下去。**上面定义的这个 $F_n(x)$ 叫经典正交多项式,它可以充当一组正交基**。接下来将证明定理 3.1。这需要用到两个引理。

引理 3.2. $\dfrac{d^m}{dx^m}(ws^np_{\leq k}) = ws^{n-m}p \leq k + m, \quad m \leq n.$

证明. 当 n=1 时:

$$F_1(x) = \frac{1}{w}\frac{d}{dx}(ws) = \frac{ds}{dx} + \frac{1}{w}s\frac{dw}{dx} \Rightarrow sw' = (F_1(x) - s')w$$

于是:

$$\begin{aligned}(ws^np_{\leq k})' &= w's^np_{\leq k} + ws'p_{\leq k} + wsp_{\leq k-1}\\ &= ws^{n-1}[(F_1(x) - s')p\leq k + ns'p_{\leq k} + sp_{\leq k-1}]\\ &= ws^{n-1}p_{\leq k+1}\end{aligned}$$

把上述操作重复 m $(m \leq n)$ 次即可证毕。 □

由上述引理,令 $k = 1$ 与 $w(a)s(a) = w(b)s(b) = 0$ 立刻可得:

引理 3.3. $\dfrac{d^m}{dx^m}(ws^n)$ *在* $x = a, x = b$ *处为 0,当* $m < n$

利用这两个引理,我们就可以证明定理 3.1.

证明.

$$
\begin{aligned}
\langle p_k|F_n\rangle &= \int_a^b p_k(x)\frac{d^n}{dx^n}(ws^n)dx \\
&= p_k(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(ws^n)|_a^b - \int_a^b \frac{dp_k}{dx} \\
&= ... \\
&= (-1)^k\int_a^b \frac{d^kp_k}{dx^k}(ws^n)dx \\
&\equiv C\int_a^b \frac{d}{dx}(\frac{d^{n-k-1}}{dx^{n-k-1}}(ws^n))dx \\
&= C\frac{d^{n-k-1}}{dx^{n-k-1}}(ws^n)|_a^b = 0, \quad k<n
\end{aligned}
$$

其中 $C := \dfrac{d^kp_k}{dx^k}$, 上面用了多次分部积分及引理 3.2. 接下来证明 $deg[F_n(x)] = n$.

令引理 3.2中 $k=0, m=n$ 得 $\dfrac{d^n}{dx^n}(ws^n) = wp_{\leq n}$
由此可得 $F_n(x) = \dfrac{1}{w}\dfrac{d^n}{dx^n}(ws^n) = p_{\leq n}$
又 $F_n(x) = p_{\leq n}(x) + k_n^{(n)}x^n$,
两边同时与 F_n 作内积得：$\langle F_n|F_n\rangle = \langle p_{n-1}|F_n\rangle + k_n^{(n)}\langle x^n|F_n\rangle$,
等式左边大于 0，右边第一项为 0，于是右边第二项不为 0
$\Rightarrow k_n^{(n)} \neq 0$. 也就是说 $F_n(x)$ 有 n 次项，证毕。 □

于是我们可以知道：$\{F_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ 可以作为一组正交基底，而且

$$\langle F_n|F_n\rangle = \left\langle F_n\middle|k_n^{(n)}x^n\right\rangle$$

当然，一般我们使用 $F_n(x)$ 时形式稍微有一点点差别（乘上一个常数而已，上述证明过程还是一样的）. 写作：

$$F_n(x) = \frac{1}{K_nw}\frac{d^n}{dx^n}(ws^n)$$

其中 K_n 叫做标准化常数（一个名字而已，其实也没什么意思）。接下来我告诉你一件激动人心的事情：**所有经典正交多项式都可以写作某个微分方程的解**。它们所

满足的微分方程长这个样子 (记 $s(x)$ 中 x^2 项的系数为 σ_2)：

$$\frac{d}{dx}(ws\frac{dF_n}{dx}) = w\lambda_n F_n(x), \quad \lambda_n = K_1 k_1^{(1)} n + \sigma_2 n(n-1) \tag{3}$$

嗯嗯，我承认这个方程式长得有点难看啦... 不过不要介意啦 QAQ。接下来我们就证明一下它（都长得这么奇怪了，不证一下你怎么信呢对吧！）

首先我们需要一个引理：

引理 3.4. $\int_a^b F_m(wsF_n')'dx = 0, \quad m < n$

这个证明也很简单：

证明.

$$\begin{aligned} I = \int_a^b F_m(wsF_n')'dx &= F_m wsF_n|_a^b - \int_a^b F_m' wsF_n' dx \quad \text{第一项为 0} \\ &= -F_n F_m' ws|_a^b + \int_a^b (F_m' ws)' F_n dx \\ &= \int_a^b wp_{\le m} F_n dx \quad (\text{由引理3.2}) \\ &= \int_a^b wp_{<n} F_n dx \\ &= \langle F_n | p_{<n} \rangle = 0 \end{aligned}$$

□

证明. 由于 $deg[F_n] = n$，故 $F_n'(x) = p_{\le n-1}(x)$.

由引理 3.2, 有

$$\frac{(wsF_n')'}{w} = p_{\le n}$$

.

于是可以把 $\frac{(wsF_n')'}{w}$ 展开成级数形式：

$$\frac{(wsF_n')'}{w} = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i F_i$$

不过嘛，由引理 3.4马上可以知道当 $i<n$ 时 $\lambda_i=0$

于是

$$\frac{(wsF_n')'}{w}=\lambda_n F_n.$$

把 w 乘到右边，两边同时乘以 F_n 并从 a 到 b 积分，右边化为 $\lambda_n h_n$. 而左边可以写作：

$$\begin{aligned}
\text{左边}&=\int_a^b F_n(wsF_n')'dx\\
&=\int_a^b F_n[(ws)'F_n'+wsF_n'']dx\\
&=\int_a^b wF_n(K_1F_1F_n'+sF_n'')dx \quad (\text{注意到}K_1F_1=(ws)'/w)\\
&=\int_a^b wF_n(K_1k_1^{(1)}xF_n'+\sigma_2x^2F_n'')dx \quad \text{因为经典正交多项式的正交性啦}\\
&=K_1k_1^{(1)}\left\langle F_n|xF_n'\right\rangle+\sigma_2\left\langle F_n\middle|x^2F_n''\right\rangle\\
&=K_1k_1^{(1)}\left\langle F_n\middle|x[k_n^{(n)}x^n+p_{\le n-1}]'\right\rangle+\sigma_2\left\langle F_n\middle|x^2[k_n^{(n)}x^n+p_{\le n}]''\right\rangle\\
&=K_1k_1^{(1)}\left\langle F_n\middle|k_n^{(n)}nx^n+p_{\le n-1}\right\rangle+\sigma_2\left\langle F_n\middle|n(n-1)k_n^{(n)}x^n+p_{\le n-1}\right\rangle\\
&=K_1k_1^{(1)}nh_n+k_n^{(n)}\sigma_2n(n-1)h_n \quad (\text{记不记得}\left\langle F_n|F_n\right\rangle=h_n=\left\langle F_n\middle|k_n^{(n)}x^n\right\rangle)
\end{aligned}$$

把左右两边对比一下，马上就可以得到 λ_n 咯，然后就证毕了。 □

看了前面水蛇春那么长一串的证明，你可以先摆一会放松一下脑袋（bushi）

3.2 不同 $s(x)$ 的情况

为了得到 $w(x)$ 的具体形式及 a,b 的值，我们可以对 $s(x)$ 进行一些分类。

当 n=1 时，

$$F_1(x)=\frac{1}{K_1w}\frac{d}{dx}(ws)$$

可得

$$ws=Ae^{\int\frac{K_1F_1(x)}{s}dx},\quad A=const.$$

3.2.1 s 为常数的情况

$$
\begin{aligned}
ws &= Aexp(\frac{K_1}{s}\int(k_1^{(0)}+k_1^{(1)}x)dx) \\
&= Aexp(\frac{K_1}{s}(k_1^{(0)}x+\frac{1}{2}k_1^{(1)}x^2+C)) \\
&= Be^{\alpha x^2+\beta x} \qquad (\text{合并常数项至}B,\alpha,\beta)
\end{aligned}
$$

这里说明一下，这些常数中含有 $K_1, k_1^{(0)}, k_1^{(1)}, s$. 通过选定这些量便可定下这几个常数。把常数合并是为了方便和简洁。当我们令这些常量为某些值时，便得以构造我们想要的形式。

由 $w(a)s(a) = Be^{\alpha a+\beta a^2} = 0 = w(b)s(b) = Be^{\alpha b+\beta b^2}$ 可知，当 $B \neq 0$ 时，$\alpha < 0, a = -\infty, b = \infty$. 如果我们人为让 $B = se^{\frac{\beta^2}{4\alpha}}, y = |\alpha|^{\frac{1}{2}}(x+\frac{\beta}{2\alpha}), s = 1$，则 $w(y) = e^{-y^2}$.

为什么要这么干呢？嘛，所谓的“人为”不过就是事先知道了某些东西（比如一些特殊的叫得出名字的多项式）的结构，可以把这个作为 $s = const$ 时的一个例子罢了。往后一点点就知道怎么回事了。

3.2.2 $deg[s] = 1,\ i.e. s(x) = \sigma_0 + \sigma_1 x$

类似地, 我们可以得到

$$
w(x)s(x) = B(\sigma_1 x+\sigma_0)^{\rho}e^{\gamma x} \quad (\text{已合并常数}).
$$

代入 $ws|_a = ws|_b = 0$ 得

$$
a = -\frac{\sigma_1}{\sigma_0}, b = \infty, \gamma < 0
$$

如果人为令 $\rho = v+1, y = s(x), B = e^{-\sigma_0}$ 得到 $w(y) = y^v w^{-y}$.

3.2.3 $deg(s) = 2,\ i.e. s = \sigma_0 + \sigma_1 x + \sigma_2 x^2$

(1) $s(x)$ 有两个不同实根 x_1, x_2:

类似地，可以得到 $a = x_1, b = x_2, w(x) = Q(x-x_1)^{\mu}(x-x_2)\nu$.

(2) $s(x)$ 有两个重根；(3) $s(x)$ 没有根；
以上这两种情况就交给你们自己了，道理都是一样的嘛。

3.2.4 做个小小的总结

表 3: **一些常用的特殊多项式**

$s(x)$	a	b	$w(x)$	参数要求	多项式
1	$-\infty$	$+\infty$	e^{-x^2}	无	Hermite 多项式 $H_n(x)$
x	0	$+\infty$	$x^v e^{-x}$	$v > -1$	Laguerre 多项式 $L_n^v(x)$
$1-x^2$	-1	+1	$(1+x)^\mu(1-x)^\nu$	$\mu,\nu > -1$	Jacobi 多项式 $P_n^{\mu,\nu}(x)$

表 4: **Jacobi 多项式的几种特殊情况**

μ	ν	$w(x)$	多项式
0	0	1	Legendre 多项式 $P_n(x)$
$\lambda-\frac{1}{2}$	$\lambda-\frac{1}{2}$	$(1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}$	Gegenbauer 多项式 $C_n^\lambda(x), \lambda > -\frac{1}{2}$
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$(1-x^2)^{-1/2}$	第一类 Chebyshev 多项式 $T_n(x)$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$(1-x^2)^{1/2}$	第二类 Chebyshev 多项式 $U_n(x)$

3.3 具体例子

通过上面的努力，我们以一种统一的形式给出了经典正交多项式的通项公式，以及一些相关的结论。不妨再在此唠叨一下为什么要这么做。之所以在那么多正交多项式中挑出上面定义的那种正交多项式作为探究重点，正是因为这样的多项式有许多美妙的性质。首先，经典正交多项式的定义便给出了其自身的通项公式 (在具体应用中，通过选定 $s(x), a, b$ 等参数, 我们可以得到 $w(x)$ 的形式；再选定 K_n，我们便可以确定其具体通项公式). 通项公式则给计算每一项提供了巨大的便利（尤其在利用计算机进行计算时）。而其中各个参数选定的自由性使经典正交多项式的形式仍然丰富多样。而通过 $k_n^{(n)}, k_n^{(n-1)}, h_n$ 参数的计算，我们可以得到关于

F_n, F_{n-1}, F_{n+1} 的递推关系，给手算或者迭代计算 $F_n(x)$ 每一项提供了很大便利。尽管这个普遍关系在形式上有一点复杂，但在具体应用中往往能很快地化简。毕竟，**形式复杂性是理论一般性的代价**。再者，一个很美妙的性质是它满足特定的微分方程。我们可以通过选定参数使这个微分方程具有某些特定的形式，$\{F_n(x)\}$ 则正是它的解集，这正可以运用于解决各种物理问题。另外，经典正交多项式还能在数值分析、积分等各个领域发挥作用。

怎么样，看到这里你应该已经跃跃欲试了吧！那我们就来拿一些具体例子开刀，让你体验一下这个正交多项式的一般性理论在实际运用中的美妙功效。

引理 3.5.

$$h_n = \frac{(-1)^n k_n^{(n)} n!}{K_n} \int_a^b w s^n dx$$

3.3.1 Hermite 多项式 $H_n(x)$

具体参数:$K_n = (-1)^n; s = 1, a = -\infty, b = +\infty; w(x) = e^{-x^2}$

$$\Rightarrow H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2}) \tag{4}$$

(4) 式正是厄米特多项式的通项公式。当然，通过上述具体参数，我们还可以确定出 $k_n^{(n)}$ 和 $k_n^{(n-1)}$, 进而得到 h_n, 最后求得 $H_n(x)$ 的一般递推关系。

对于 $k_n^{(n)}$，观察可知，每次对 e^{x^2} 求导时，我们会得到 $-2x$。仅当我们对 e^{x^2} 求 n 次导时，才能得到 x 的 n 次项。于是 $k_n^{(n)} = (-1)^n(-2)^n x^n / x^n = 2^n$.

至于 $k_n^{(n-1)}$，我们发现

$$H(-x) = (-1)^n e^{(-x)^2} \frac{d^n}{d(-x)^n} e^{-(-x)^2} = (-1)^n H_n(x)$$

n 为奇数时,$H_n(x)$ 为奇函数；n 为偶数时，$H_n(x)$ 为偶函数。所以 x^n 下一项应该是 x^{n-2}, 那 $k_n^{(n-1)} = 0$ 咯。又

$$\begin{aligned} h_n = h_n &= \frac{(-1)^n k_n^{(n)} n!}{K_n} \int_a^b w s^n dx \\ &= \frac{(-1)^n 2^n n!}{(-1)^n} \int_{-\infty}^{+\infty} e{-}x^2 dx \\ &= \sqrt{\pi} 2^n n! \quad \text{(那个积分就是高斯积分啦)} \end{aligned}$$

于是我们得到 $\alpha_n = 2, \beta_n = 0, \gamma_n = -2n$.

由此可知 Hermite 多项式满足的递推关系与微分方程为：

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)$$

;

$$\frac{d^2H_n}{dx^2} - 2x\frac{dH_n}{dx} + 2nH_n$$

.

参考文献

[1] Hassani S. Mathematical physics: a modern introduction to its foundations[M]. Springer Science and Business Media, 2013.