物理人的入门级群论

喂喂喂企鹅哦

2023 年 8 月 29 日

目录

1 预备知识及一些碎碎念

1.1 唠唠叨叨

我想，大家作为对于物理学有一定了解的人，对于“对称性”这个词一定不会陌生。“对称性”意味着美、简洁，是物理的一种追求，也进而作为一种约束。大家一定听说过诺特定理与对称变换，大抵也有所耳闻其在粒子物理中的应用；什么是规范对称性，超弦理论的宇宙为什么是十维的...... 我想我不用对这个词多加解释，各位在自己学习物理的过程中自会领略。群论正是分析对称性的一种有力的数学工具。通过群论的分析，我们可以深入理解物理系统的性质，并推导出许多重要的、与现实正好相符的物理结论。随着学习的深入，我愈发感觉到对称性在物理中的微妙作用，因此我学习群论，并写下这样一份书稿，期望对那些学识尚浅但有心观赏一番对称性之美的物理人提供一些微薄的帮助。也许我能传达的不到十分之一的美，足以吸引你走下去。

1.2 一个小小的声明

由于这样一篇文章不过是出自一位物理系学生之手，我无意在此使用很严格的数学。在我看来，关于数学，适度的严谨性是必要的，但是推导或是对为什么如此的解释往往比严谨的证明更加重要。同时，我也先在此致歉，本人同样学识尚浅，难免犯错，恳请指正。以及我的排版会比较随意。

1.3 预备知识

我想大家应该都学过线性代数。所谓代数，即研究一种数学结构及其运算规律的一般性理论。线性代数所研究的数学结构是线性空间，线性空间中的对象是广义的“向量”。群论正与此相似。群论研究集合中的元素之间的运算规律和对称性，而群由一个集合以及在这个集合上定义的一个二元运算组成。如果在读下去之前，各位好好复习一遍线性代数，对学习群论将会大有裨益。（当然，这里不是指那些无聊的能用电脑解决的矩阵运算，而是像行列式及其性质之类的东西，尤其是关于特征值的知识。）

在下面将列出一些重要的知识与结论。我无意在此争抢线性代数教材的工作，所以有什么不熟悉的自己去翻书吧（嗯嗯）。

1.3.1 关于矩阵

矩阵乘法怎么算不用我说了吧。注意没有交换律哦。转置的性质大家都知道吧。还有一个，矩阵的逆也要会哦。厄米 $M^\dagger$ 就是共轭 + 转置。

1.3.2 关于行列式与迹

行列式的定义和展开我就不写了（比较长嘛）, 还有那些交换两行变号、格莱姆法则什么的。这里只列几个用的多的。

$$\begin{aligned}
det(AB) &= det(A)det(B) \\
trAB &= trBA = trA \cdot trB \\
trlogM &= trLog\Lambda = \sum_a \lambda_a = log_a \prod \lambda_a \quad (\Lambda\text{是 M 对角化之后的矩阵}) \\
det(e^A) &= e^{trA} \Leftrightarrow det(A) = e^{trlogA} \quad (\text{这里可以去看看矩阵指数的知识}) \\
\frac{\partial\ det(A)}{\partial A_{ij}} &= det(A)(A^{-1})_{ij}
\end{aligned}$$

1.3.3 关于特征值

def: $M\vec{\psi} = \lambda\vec{\psi}$

求法: $det(M - \lambda I) = 0$

若 $M = M^\dagger$, $i.e.\ MM^\dagger = I$, 则 M 的本征值是实的，存在一组相互正交（归一）的本征矢 [谱定理]，一定可对角化。

若 $[A, B]$(对易子) $\equiv AB - BA = 0$, 则 A, B 可同时对角化。

相似变换 $A \to B = SAS^{-1}$ 不会改变矩阵特征值。

2 群基础

2.1 群的定义

一个群 G 由群元构成的集合 $\{g_\alpha\}$ 组成。这些群元具有唯一性（集合的元素当然具有唯一性）。任两个群元间定义有运算群乘法：$g_\alpha \cdot g_\beta = g_\gamma$。需要注意的是，群乘法是封闭的（也就是乘出来的结果仍属于这个群）。群乘法具有结合律，一般没有交换律。如果一个群的群乘法具有交换律，则这个群称为“阿贝尔群”。

群中存在单位元，$s.t.\ Ig_a = g_a I = g_a$.

任意群元 g 存在逆元 $g^{-1} \in G\ s.t.\ g^{-1}g = gg^{-1} = I$($I$ 有时记作 e 或 g_0).

2.2 子群

设集合 $\{g_a\}$ 构成群 G, 集合 $\{h_a\} \subseteq \{g_a\}$ 构成群 H, 则称 H 为 G 的子群，记作 $H \subset G$.

2.2.1 循环子群

2.2.2 拉格朗日定理

设群 G 有 n 个群元，其子群 H 有 m 个群元，则 $n/m =$ 整数.

证明. 记子群 H 中元素为 $\{h_1, ..., h_m\}$, 取 $g_1 \in G$, 但 $g_1 \notin H$.

考虑集合 $\{h_1 g_1, ..., h_m g_1\} \equiv \{h_1, ..., h_m\} g_1, g_1 \in G$(该集合不构成群，因为没有单位元). 可以发现，该集合中每个元素都不相同，因为假如 $\exists\, a \neq b\ s.t.\ h_a g_1 = h_b g_1$, 则有 $h_a = h_b$, 与子群中元素的唯一性矛盾。而且，集合中 $\{h_1, ..., h_m\} g_1$ 与 $\{h_1, ..., h_m\}$ 中元素均不相同，因为假如 $\exists\, a \neq b\ s.t.\ h_a g_1 = h_b$, 则有 $g_1 = h_a^{-1} h_b \in H$，与 $g_1 \notin H$ 矛盾。

接下来，我们考虑 $\{h_1, ..., h_m\} g_2$, 同理可得该集合中元素与前面提到的两个集合元素均不相同。

重复上述过程，最终我们可以划分出 k 个不同的集合，即 $\{h_1, ..., h_m\} g_j$, $j = 0, 1, ..., k (g_0 = I)$. 于是 $n = mk$, k 是整数。 $\square$

2.3 直和与直积

直积：群 F 和 G，群元记作 f, g. 可以定义两个群的直积 $H \equiv F \otimes G$. H 的群元记作 (f, g), 满足 $(f, g)(f', g') = (ff', gg')$.

2.4 群乘法表（有限、离散群）

2.5 对称群（置换群）

2.6 等价类

2.6.1 不变子群、陪集与商群

2.6.2 诱导群

2.7 旋转群与李群、李代数

3 群表示论

在这里，我们主要讨论群的矩阵表示。为什么要研究群表示论呢？最初群的定义就只有一个集合和一个二元运算法则。单单这样是很抽象的嘛，你都不知道这个集合里的东西能拿来干什么。群广泛地被用以描述群元在对象上的作用。比如 $SO(3)$，就可以描述三维欧式空间中刚体的转动。所以通过把群元表示成矩阵，就可以把其具体作用在一些对象上。通过群元在对象上的作用，我们可以探索群的子群、正规子群、同态和同构等性质。正如史诗生物所说，群表示也比群本身更丰富，因为被作用的对象可以具有丰富的额外结构（度规结构、线性结构、内积结构等），群对这些结构的不同作用效果就带来无穷的可能性。[1]

[1]见史诗生物在知乎上的回答：我们为什么要研究群表示。

3.1 群的矩阵表示

3.1.1 可约与不可约表示

量子力学中的能级简并正对应着不可约表示。

3.1.2 酉表示

如果 $D(g)D(g)^\dagger = D(g)D(g)^\dagger = I$, 则称 $D(g)$ 为群 G 的酉表示。在这里，我们不加证明地说，群的表示可以通过选择合适的基变换为酉表示。（或许有空了我会把证明补上，但它有点长 orz）.

此后，我们默认选用的群表示均为酉表示。

3.2 特征标

特征标 $\chi(c) = trD(g)$.c 表示中的一个等价类，$g \in c$,$D(g)$ 指群元 g 的矩阵表示。（因为相似变换不会改变矩阵的迹，所以同一等价类中的群元所对应的矩阵表示，特征标都是一样的）。于是我们可以声称，特征标是类的函数。

3.3 舒尔引理

引理 3.1 (舒尔引理). *如果 $D(g)$ 是群 G 的不可约酉表示，有 $D(g)H = HD(g)$, 则有 $H = \lambda I$, 也即 H 正比于单位阵。*

3.4 正交定理

3.5 特征标表

3.6 一些好玩的

3.6.1 晶体的对称性

3.6.2 费马小定理与威尔逊定理

我们先来介绍一个群 G_n:

n 为正整数，$G_n = \{m \in N^* | 1 \le m \le n-1,\ s.t.\ m, n$最大公约数为 $1\}$.

也就是说，集合中的 m 和 n 是互质的。在群乘法为 $a \times b = ab(mod\, n),\ a, b \in G_n$ 时，G_n 构成群。

也许这需要一点说明：单位元和结合律是显然的。对于群乘法的封闭性，我们只需证明 $ab(mod\ n)$ 与 n 依旧互质就行了。用反证法。取 $a, b \in G_n$, 显然 ab 与 n 的最大公约数也是 1. 假设 ab 与 n 有大于 1 的公约数 d，也即 $n = kd, ab(mod\ n) = jd,\ k, j \in N^*$. 于是 $ab = jd + ln = (j + lk)d,\ l \in N^*$. 这说明 ab 与 n 有大于 1 的公约数，ab 和 n 的最大公约数是 1 矛盾。对于逆元的存在性，需要借用一个引理。

引理 3.2. *a,b 互质，则 $\exists x, y\ s.t.\ xa + yb = 1$,$x, y$ 为整数.*

由此可得 $\exists\ x, y\ s.t.\ xm + yn = 1$，于是 $xm(mod\ n) = 1$. 因此逆元 $m^{-1} = x$. 所以上面介绍的 G_n 确实是一个群。

定理 3.3 (费马小定理,the Fermit little theorem)**.** .
对于任意的素数 p 及整数 $1 < a < p-1$, 有 $a^{p-1} \equiv 1\ (mod\ p)$.

证明. 对于素数 p,G_p 阶数为 p-1. 由拉格朗日定理，子群的阶整除群的阶。于是考虑子群 $H = \{h_1, ..., h_m\}$ 中的一个元素 h_1, 必有 $h_1^{p-1/k} = 1$. $(p-1/k)$ 是整数哦. 显然有 $a = b(mod\ n) \Rightarrow a^k = b^k(mod\ n)$. 利用这个，即得 $a^{p-1} = 1$. □

4 量子力学中的群论

4.1 对称性、能量简并与不可约表示

量子力学中的对称性通常有两种：

一种是系统的哈密顿算符 $\hat{H}$ 具有对称性。存在对称变换群 $G = \{\hat{S}_1, \hat{S}_2, ..., \hat{S}_n\}$，使得 $\hat{H} \to \hat{S}^{-1}\hat{H}\hat{S} = \hat{H}$ 在变换下不变，也即 $\hat{H}\hat{S} = \hat{S}\hat{H}$，其中 $\hat{S} \in G,\ \hat{S}\hat{S}^\dagger = I$. 这种对称性意味着时间演化的对称性 (因为 $\hat{S}^{-1}\hat{H}\hat{S} = \hat{H} \Rightarrow \hat{S}^{-1}e^{-i\hat{H}t}\hat{S} = e^{-i\hat{H}t}$), 与物理定律的对称性。

另一种是系统的特定状态具有对称性，满足 $\hat{S}\psi = \psi$,ψ 为某波函数。比如 $\psi = \psi(r)$ 具有中心对称性，$\hat{S} \in G = SO(3)$, 有 $\hat{S}\psi = \psi$.

一般第一种对称性较为常见。

参考文献

[1] A.Zee Group Theory for Physicist in a Nutshell[M]. Princeton University Press, 2016.