Disclaimer

Aufgaben aus dieser Vorlage stammen aus der Vorlesung *Algorithmen, Sprachen und Komplexität* und wurden zu Übungszwecken verändert oder anders formuliert! Für die Korrektheit der Lösungen wird keine Gewähr gegeben.

1. Definitionen der Automatentheorie. Vervollständige die folgenden Definitionen:
   (a) Eine Regel $(l \to r)$ einer Grammatik $G = (V, \sum, P, S)$ heißt rechtslinear, falls ...

   Solution:

   (b) Ein NFA ist ein Tupel $M = (...)$

   Solution:

   (c) Die von einem PDA $M = (Z, \sum, \Gamma, \delta, z_0, \#)$ akzeptierten Sprache ist $L(M) = ...$

   Solution:

   (d) Sei $M = (Z, \sum, z_0, \delta, E)$ ein DFA. Die Zustände $z, z' \in Z$ heißen erkennungsäquivalent, wenn

   Solution:

2. Sätze und Lemmas aus der Automatentheorie. Vervollständige die folgenden Aussagen:
   (a) Sei $L \supseteq \sum^*$ eine Sprache. Dann sind äquivalent: 1) L ist regulär (d.h. wird von einem DFA akzeptiert), 2)..., 3)...

   Solution:

   (b) Der Satz von Myhill-Nerode besagt,...

   Solution:

   (c) Das Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen ...

   Solution:

3. Konstruktionen der Automatentheorie
   (a) Betrachte den NFA X (Bild wird noch erstellt). Berechne einen DFA Y mit $L(X) = L(Y)$.

   Solution:

   (b) Betrachte den DFA X (Bild wird noch erstellt). Berechne den minimalen DFA Y mit $L(X) = L(Y)$.

   Solution:

4. Algorithmen für reguläre Sprachen. Sei $\sum = \{a, b, c\}$. Gebe einen Algorithmus an, der bei Eingabe eines NFA X entscheidet, ob alle Wörter $\omega \in L(X)$ ungerade Länge besitzen und abc als Infix enthalten.

   Solution:

5. Kontextfreie Sprachen: Sei $\sum = \{a, b, c\}$. Betrachte die Sprache $K = \{a^k b^l c^m | k \leq l \text{ oder } k \leq m\}$.
   (a) Zeige, dass K eine kontextfreie Sprache ist.

   Solution:

   (b) Zeige, dass $L = \sum^* \setminus K$ (Komplement von L) nicht kontextfrei ist.

   Solution:

   (c) Begründe warum K deterministisch kontextfrei ist oder warum nicht.

   Solution:

6. Kontextfreie Grammatiken: Sei $\sum = \{a, b, c, \}$

(a) Sei G die kontextfreie Grammatik mit Startsymbol S und der Regelmenge $S \to AB$, $A \to aBS|a$ und $B \to bBa|b|\epsilon$. Überführe G in eine äquivalente Grammatik in Chomsky Normalform.

Solution:

(b) Sei G' die kontextfreie Grammatik mit Startsymbol S und der Regelmenge $S \to AB$, $A \to CD|CF$, $F \to AD$, $B \to c|EB$, $C \to a$, $D \to b$, $E \to c$. Entscheide mit dem CYK-Algorithmus, ob die Wörter $w_1 = aaabbbcc$ oder $w_2 = aaabbccc$ von G' erzeugt werden.

Solution:

(c) Gebe für die Wörter aus b), die von G' erzeugt werden, den Ableitungsbaum an.

Solution:

7. Definitionen der Berechnbarkeitstheorie. Verfollständige die Definitionen

(a) Ein While Programm ist von der Form...

Solution:

(b) Die von einer Turingmaschine M akzeptierte Sprache ist $L(M) = ...$

Solution:

(c) Eine Sprache L heißt rekursiv aufzählbar, falls ...

Solution:

8. Sätze der Berechnbarkeitstheorie: Vervollständige die folgenden Aussagen

(a) Sei $L \subseteq \sum^*$ eine Sprache. Sind L und $\sum^* \setminus L$ semi-entscheidbar, dann...

Solution:

(b) Der Satz von Rice lautet...

Solution:

9. Berechnungsmodelle

(a) Gebe ein Loop-Programm an, das die Funktion $n \to n^2 - n$ berechnet

Solution:

(b) Gebe eine deterministische Turingmaschine M für das Eingabealphabet $\{0, 1\}$ an, das folgende Funktion berechnet: Für Eingabe $a_1a_2...a_{n-1}a_n$ berechnet M die Ausgabe $a_na_1...a_{n-1}$ (letzte Symbol der Eingabe an erste Stelle).

Solution:

10. Reduktionen

(a) Seien $A, L \subseteq \sum^*$ nichtleere Sprachen und A entscheidbar. Gebe eine Reduktion von $L \cup A$ auf L an.

Solution:

(b) Gebe eine Bedingung für A an, sodass $L \cup A \leq_p L$ für alle nichtleeren Sprachen $L \subseteq \sum^*$ gilt. Begründe.

Solution:

11. Komplexitätsklassen. Ergänze zu den Paaren von Komplexitätsklassen das Relationssymbol zur Teilmengenbeziehung.

(a) EXPSPACE ? EXPTIME

Solution:

(b) NP ? P

Solution:

(c) NPSPACE ? EXPTIME

Solution:

(d) NP ? NPSPACE

Solution:

(e) NPSPACE ? PSPACE

Solution:

12. NP-vollständiges Problem: Gebe zwei NP-vollständige Probleme an (als Menge oder Eingabe-Frage-Paar).

Solution: