Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka

Zmienne 2-wymiarowe

Definicja 1. *Dana jest 2-wymiarowa zmienna losowa (X,Y) o gęstości $f(x,y)$, zaś gęstości brzegowe to $f_1(x), f_2(y)$. Gęstościami warunkowymi nazywamy funkcje*

$$f_{X|Y}(x) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)} \quad \text{oraz} \quad f_{Y|X}(y) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)}. \tag{1}$$

W wypadku dyskretnym mamy wzory

$$p_{i \leftarrow j} \equiv p_{x_i|y_j} = \frac{p_{ij}}{p_{\bullet j}} \quad \text{oraz} \quad p_{i \mapsto j} \equiv p_{y_j|x_i} = \frac{p_{ij}}{p_{i\bullet}}. \tag{2}$$

Przykład:
Wracamy do (lekko zmienionego) przykładu z poprzedniej notatki.
(i) Gęstość dwuwymiarowa i gęstości brzegowe są następujące.

$(X,Y) =$

X/Y	2	3	5	$p_{i\bullet}$
−2	0.10	0.05	0.07	0.22
0	0.05	0.03	0.08	0.16
1	0.01	0.07	0.15	0.23
3	0.38	0.00	0.01	0.39
$p_{\bullet j}$	0.54	0.15	0.31	1.00

Zmienne X, Y mają zatem rozkłady brzegowe:

$$X = \begin{array}{c|cccc} x_i & -2 & 0 & 1 & 3 \\ \hline p_{i\bullet} & 0.22 & 0.16 & 0.23 & 0.39 \end{array}, \qquad Y = \begin{array}{c|ccc} y_j & 2 & 3 & 5 \\ \hline p_{\bullet j} & 0.54 & 0.15 & 0.31 \end{array}$$

(ii) Gęstości warunkowe $p_{X|Y}$ są następujące. Dla każdej z kolumn powyższej tabeli obliczamy ilorazy $p_{x_i|y_j} = \dfrac{p_{ij}}{p_{\bullet j}}$ po to, aby wartości w kolumnach sumowały się do 1. Mówimy, że w kolumnie j-tej znajdują się ppb wartości x_i pod warunkiem iż $Y = y_j$.

$(X|Y = y_j) =$

X/Y	2	3	5
−2	$^{10}/_{54}$	$^{5}/_{15}$	$^{7}/_{31}$
0	$^{5}/_{54}$	$^{3}/_{15}$	$^{8}/_{31}$
1	$^{1}/_{54}$	$^{7}/_{15}$	$^{15}/_{31}$
3	$^{38}/_{54}$	0	$^{1}/_{31}$
	1	1	1

Podobnie jest dla gęstości warunkowych $p_{Y|X}$. Dla każdego wiersza powyższej tabeli obliczamy ilorazy $p_{x_i|y_j} = \dfrac{p_{ij}}{p_{i\bullet}}$ po to, aby wartości w wierszach sumowały się do 1. Mówimy, że w wierszu

i-tym znajdują się ppb wartości y_j pod warunkiem iż $X = x_i$.

$$(Y|X = x_i) = \begin{array}{r|ccc|c} X/Y & 2 & 3 & 5 & \\ \hline -2 & {}^{10}\!/_{22} & {}^{5}\!/_{22} & {}^{7}\!/_{22} & 1 \\ 0 & {}^{5}\!/_{16} & {}^{3}\!/_{16} & {}^{8}\!/_{16} & 1 \\ 1 & {}^{1}\!/_{23} & {}^{7}\!/_{23} & {}^{15}\!/_{23} & 1 \\ 3 & {}^{38}\!/_{39} & 0 & {}^{1}\!/_{39} & 1 \\ \hline \end{array}$$

Ponieważ kolumny (*respective* wiersze) powyższych tabeli opisują zmienne losowe ma sens zwrot "wartość oczekiwana warunkowa", dla przykładu

$$\mathrm{E}(X|Y = 2) = -2 \cdot {}^{10}\!/_{54} + 0 \cdot {}^{5}\!/_{54} + 1 \cdot {}^{1}\!/_{54} + 3 \cdot {}^{38}\!/_{54} = \frac{95}{54}.$$

(iii) Przejdźmy teraz do wyznaczenia rozkładu zmiennej losowe $Z = X + Y$. W lewym górnym

rogu każdego elementu tabeli znajduje się wartość zmiennej Z, poniżej prawdopodobieństwo takiej wartości.

$$Z = X + Y = \begin{array}{r|ccc|} X/Y & 2 & 3 & 5 \\ \hline -2 & {}^{0}\!/_{0.10} & {}^{1}\!/_{0.05} & {}^{3}\!/_{0.07} \\ 0 & {}^{2}\!/_{0.05} & {}^{3}\!/_{0.03} & {}^{5}\!/_{0.08} \\ 1 & {}^{3}\!/_{0.01} & {}^{4}\!/_{0.07} & {}^{6}\!/_{0.15} \\ 3 & {}^{5}\!/_{0.38} & {}^{6}\!/_{0.00} & {}^{8}\!/_{0.01} \\ \hline \end{array}$$

Po uporządkowaniu otrzymujemy następujący rozkład zmiennej Z:

$$Z = \begin{array}{c|cccccccc} z_i & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 8 \\ \hline p_i & 0.10 & 0.05 & 0.05 & 0.11 & 0.07 & 0.46 & 0.15 & 0.01 \end{array}.$$

Zauważmy, na zakończenie przykładu, że $4.04 = \mathrm{E}(X + Y) = 0.96 + 3.08 = \mathrm{E}(X) + \mathrm{E}(Y)$.

Twierdzenie 1. *Niech (X, Y) będzie 2-wymiarową zmienną losową. Wówczas wartość oczekiwana sumy zmiennych losowych X, Y jest równa sumie wartości oczekiwanych tych zmiennych: $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.*

Dowód. Niech (X, Y) będzie zmienną losową typu dyskretnego. Jest wówczas:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X+Y) &= \sum_i \sum_j (x_i + y_j) \cdot p_{ij} = \sum_i \sum_j x_i p_{ij} + \sum_j \sum_i y_j p_{ij} = \\ &= \sum_i \left(x_i \sum_j p_{ij} \right) + \sum_j \left(y_j \sum_i p_{ij} \right) = \sum_i x_i \cdot p_{i\bullet} + \sum_j y_j \cdot p_{\bullet j} = \mathrm{E}(X) + \mathrm{E}(Y) \end{aligned} \tag{3}$$

W wypadku ciągłym jest:

$$\begin{aligned} &\mathrm{E}(X+Y) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} (x+y) f(x,y)\, dy\, dx = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} x f(x,y)\, dy\, dx + \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} y f(x,y)\, dx\, dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(x \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\, dy \right) dx + \int_{\mathbb{R}} \left(y \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\, dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}} x f_1(x)\, dx + \int_{\mathbb{R}} y f_2(y)\, dy = \mathrm{E}(X) + \mathrm{E}(Y). \end{aligned} \tag{4}$$

□

Przypomnijmy, że kowariancją zmiennych X, Y nazywamy wartość wyrażenia $\mu_{11} \equiv \mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{E}\left[(X - \mathrm{E}X) \cdot (Y - \mathrm{E}Y)\right]$. Dla zmiennych dyskretnych $\mathrm{Cov}(X,Y) = \sum_i \sum_j (x_i - \mathrm{E}X) \cdot (y_j - \mathrm{E}Y)\, p_{ij}$, dla zmiennych typu ciągłego $\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} (x - \mathrm{E}X)(y - \mathrm{E}Y)\, f(x,y)\, dy\, dx$. Poniższe twierdzenie podaje związek między niezależnością zmiennych i ich kowariancją.

Twierdzenie 2. *Dana jest zmienna (X,Y) której zmienne brzegowe X,Y są niezależne. Wówczas $Cov(X,Y)=0$.*

Dowód. (Dla zmiennych typu dyskretnego).

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X,Y) &= \sum_i\sum_j (x_i-\mathrm{E}X)\cdot(y_j-\mathrm{E}Y)\,p_{ij} = \\ &= \sum_i\sum_j x_iy_jp_{ij} - \mathrm{E}Y\sum_i\sum_j x_ip_{ij} - \mathrm{E}X\sum_i\sum_j y_jp_{ij} + \mathrm{E}X\cdot\mathrm{E}Y\sum_i\sum_j p_{ij} = \\ &= \sum_i x_i\left(\sum_j y_jp_{i\bullet}p_{\bullet j}\right) - \mathrm{E}Y\sum_i\left(x_i\sum_j p_{ij}\right) - \mathrm{E}X\left(\sum_j y_j\sum_i p_{ij}\right) + \mathrm{E}X\cdot\mathrm{E}Y = \\ &= \left(\sum_i x_ip_{i\bullet}\right)\left(\sum_j y_jp_{\bullet j}\right) - \mathrm{E}Y\sum_i x_ip_{i\bullet} - \mathrm{E}X\sum_j y_jp_{\bullet j} + \mathrm{E}X\cdot\mathrm{E}Y = 0.\end{aligned}$$

□

UWAGI:

1. Jeżeli zmienne są niezależne, to $\mathrm{E}(X\cdot Y)=\mathrm{E}X\cdot\mathrm{E}Y$ (por. zadanie L1.7b).
2. Odwrócenie twierdzenia 2 nie jest prawdziwe.
3. Zadanie 1.7a to szczególny przypadek twierdzenia $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-(\mathrm{E}X)^2$

Przykład:

(Kontynuacja przykładu z notatki 2. ze strony 2.)

Rozważamy funkcję $f(x,y)=\dfrac{3xy}{16}$ określoną na obszarze ograniczonym prostymi $y=0$, $x=2$ oraz krzywą $y=x^2$.

2-wymiarową dystrybuantą jest $F(s,t)\equiv F_{XY}(x,y)=\int_{-\infty}^{s}\int_{-\infty}^{t} f(x,y)\,dy\,dx$. Niestety, przy obliczaniu dystrybuanty powinniśmy określić precyzyjnie przedziały całkowania.

(i) Niech A oznacza (w terminologii geometrycznej ≡ licealnej) II, II i IV "ćwiartkę" płaszczyzny. Jeżeli $(s,t)\in A$ to oczywiście $F(s,t)\equiv F_{XY}(x,y)=\int_{-\infty}^{s}\int_{-\infty}^{t} f(x,y)\,dy\,dx=0$.

(ii) Niech B oznacza obszar ograniczony prostymi $y=0$, $x=2$ oraz krzywą $y=x^2$. Jest teraz:

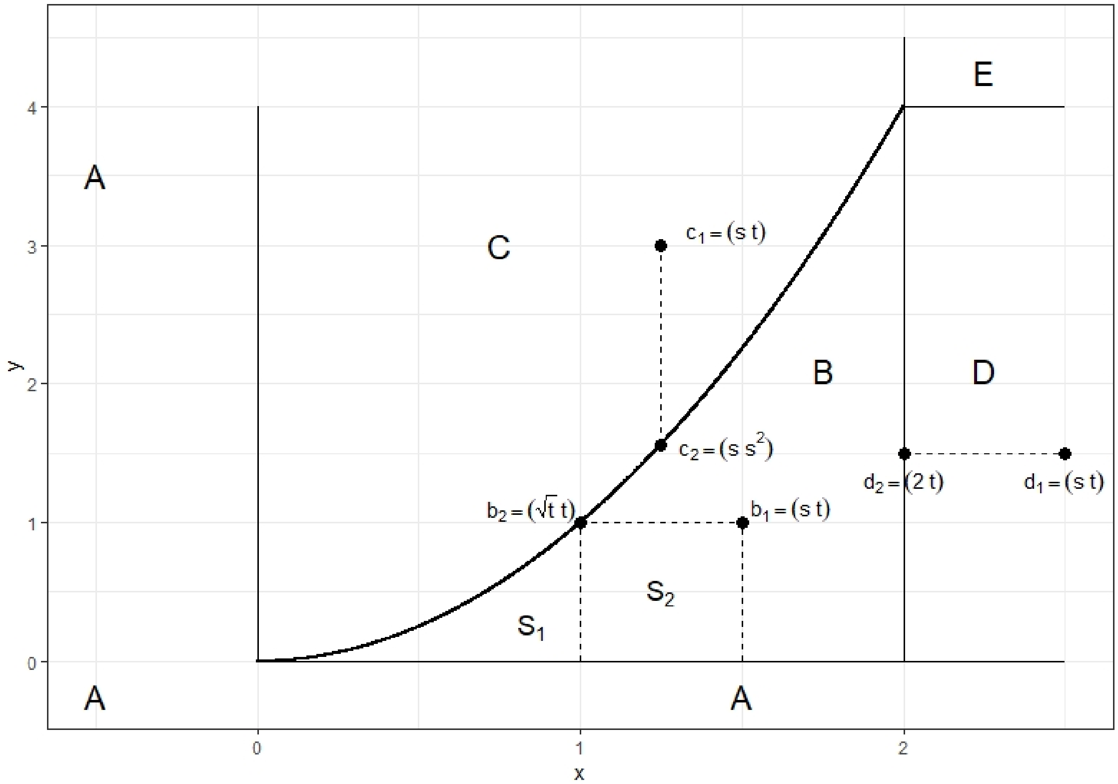
$$\begin{aligned}F(s,t) &= \int_{-\infty}^{s}\int_{-\infty}^{t} f(x,y)\,dy\,dx = \\ &= \int_0^{\sqrt{t}}\int_0^{x^2} f(x,y)\,dy\,dx + \int_{\sqrt{t}}^{s}\int_0^{t} f(x,y)\,dy\,dx\,.\end{aligned}$$

Intuicja: najpierw liczymy pole (całkę, ppb) pod krzywą $y=x^2$, dla $x\in(0,\sqrt{t})$ (obszar S_1) i dodajemy pole (całkę, ppb) pod prostą $y=t$ dla $x\in(\sqrt{t},s)$ (obszar S_2). W pierwszej całce y zmienia się (dla ustalonego x) od 0 do x^2, w drugiej – (również dla ustalonego x) od 0 do t. Obszar B będzie też użyteczny w punkcie (iii) i kolejnych.

(iii) Obszar $C=[0,2]\times[x^2,\infty)$. Jest teraz $F(s,t)\equiv F_{XY}(x,y)=\int_{-\infty}^{s}\int_{-\infty}^{t} f(x,y)\,dy\,dx=F(s,s^2)$. Intuicyjnie: obszar na lewo i poniżej punktu $c_1=(s,t)$ z uwzględnieniem nośnika funkcji $f(x,y)$ jest taki sam jak obszar wyznaczony przez punkt $c_2=(s,s^2)$. Można zatem odwołać się do wzoru z punktu (ii).

(iv) Obszar $D=[2,\infty)\times[0,4]$. Tutaj $F(s,t)=F(2,t)$. Proszę porównać przecięcie zbioru $(-\infty,s]\times(-\infty,t]$ z obszarem na którym $f(x,y)$ jest różne od 0. Graficznie: zamiast punktu

$d_1 = (s,t)$ trzeba wziąć do obliczeń punkt $d_2 = (2,t)$. Tutaj również zastosowanie ma wynik z punktu (ii).



(v) Obszar $E = [2,\infty) \times [4,\infty)$. To, na równi z obszarem A, najprostszy wypadek. Jest tutaj $F(s,t) = 1$, ponieważ całkujemy gęstość po całym obszarze "niezerowości".

Ostatecznie, wzór na dystrybuantę to:

$$F(s,t) = \begin{cases} 0, & \text{dla } (s,t) \in A, \\ \dfrac{3s^2t^2}{64} - \dfrac{t^3}{96}, & \text{dla } (s,t) \in B, \\ \dfrac{s^6}{64}, & \text{dla } (s,t) \in C, \\ \dfrac{3t^2}{16} - \dfrac{t^3}{96}, & \text{dla } (s,t) \in D, \\ 1, & \text{dla } (s,t) \in E. \end{cases}$$

Kolejny przykład ilustrujący wyznaczanie sumy zmiennych losowych.

Przykład:

Zmienna losowa (X,Y) ma rozkład o gęstości $f(x,y) = 3x\sqrt{y}$ na obszarze $[0,1] \times [0,1]$. Wyznaczyć rozkład zmiennej $Z = X + Y$.

Rozpoczynamy od przejścia $(X,Y) \mapsto (Z,T)$. Niech $Z = X + Y$, $T = Y$ (wzór na T może być inny). Najpierw odwracamy przekształcenie i otrzymujemy $X = Z - T$, $Y = T$. Wyznaczamy Jacobian odwrócenia:

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial z} & \dfrac{\partial x}{\partial t} \\ & \\ \dfrac{\partial y}{\partial z} & \dfrac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ & \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Kolejny krok to wstawienie odwrócenia do gęstości $f(x,y)$ i pomnożenie przez moduł Jacobianu: $g(z,t) = f(x(z,t), y(z,t)) \cdot |J| = 3(z-t)\sqrt{t}$.

Kluczowe zdanie: rozkład zmiennej Z to jeden z rozkładów brzegowych 2-wymiarowej zmiennej (Z,T). Należy zatem scałkować funkcję $g(z,t)$ po zmiennej t. Dla ustalonego z ($z \in [0,2]$) należy wyznaczyć obszar zmienności zmiennej t.

$$\begin{cases} 0 < x < 1 \\ 0 < y < 1 \end{cases} \begin{cases} 0 < z-t < 1 \\ 0 < t < 1 \end{cases} \begin{cases} z-1 < t < z \\ 0 < t < 1 \end{cases}.$$

Przedział całkowania dla zmiennej t to $[\max\{0, z-1\}, \min\{1, z\}]$. Dla $z \in [1,2]$ mamy $t \in [0,z]$; dla $z \in [1,2]$ mamy $t \in [z-1,1]$.

Obliczamy całkę nieoznaczoną

$$\int g(z,t)\,dt = \int 3\left(z\sqrt{t} - t\sqrt{t}\right)dt = t\sqrt{t}\left(2z - {}^{6}\!/\!{}_{5}\,t + C\right).$$

Ostatecznie

$$g_1(z) = \begin{cases} t\sqrt{t}\left(2z - {}^{6}\!/\!{}_{5}\,t\right)\Big|_{t=0}^{z}, & z \in [0,1], \\ & \\ t\sqrt{t}\left(2z - {}^{6}\!/\!{}_{5}\,t\right)\Big|_{t=z-1}^{1}, & z \in [1,2]. \end{cases}$$

↤

Witold Karczewski