# Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka

## Lista zadań nr 1. Tydzień rozpoczynający się 3. marca 2025

## Zadania

1. Sprawdzić, że:
   (a) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = 1,$
   (b) $\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = np.$

2. Sprawdzić, że
   (a) $\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = 1,$
   (b) $\sum_{k=0}^{\infty} k \cdot e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = \lambda.$

3. **Funkcją Γ-Eulera** nazywamy wartość całki:
$$\Gamma(p) = \int_0^\infty t^{p-1}\, \mathrm{e}^{-t}\, dt, \quad p > 0.$$
   Wykazać, że $\Gamma(p) = (p-1)\,\Gamma(p-1), \quad p \in \mathbb{R}_+$, w szczególności $\Gamma(n) = (n-1)!, \quad n \in \mathbb{N}$.
   Uwaga: nie dowodzimy istnienia całek, tylko formalne przekształcenia.

4. Niech $f(x) = \lambda \exp(-\lambda x)$, gdzie $\lambda > 0$. Obliczyć wartości całek:
   (a) $\int_0^\infty f(x)\, dx,$
   (b) $\int_0^\infty x\, f(x)\, dx.$

5. Wykazać, że $D_n = n$, gdzie
$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 1 & 1 & & & \\ 1 & & 1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 1 & & & & 1 \end{vmatrix}.$$

6. **(2p.)** Niech $I = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\} dx$. Mamy $I^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{x^2+y^2}{2}\right\} dy\, dx$. Stosując podstawienie $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, wykazać, że $I^2 = 2\pi$.

7. Symbol $\bar{s}$ oznacza srednią ciągu $s_1, \dots, s_n$. Udowodnić, że:
   (a) $\sum_{k=1}^{n} (x_k - \bar{x})^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 - n \cdot \bar{x}^2,$
   (b) $\sum_{k=1}^{n} (x_k - \bar{x})(y_k - \bar{y}) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k - n\bar{x}\bar{y}.$

8. **(2p.)** Dane są wektory $\vec{\mu}, X \in \mathbb{R}^n$ oraz macierz $\Sigma \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Niech $S = (X-\vec{\mu})^T\Sigma^{-1}(X-\vec{\mu})$ oraz $Y = A\cdot X$, gdzie macierz $A$ jest odwracalna. Sprawdzić, że $S = (Y - A\vec{\mu})^T(A\Sigma A^T)^{-1}(Y - A\vec{\mu})$.

9. Udowodnić, że $\int_0^\infty x^k \, \lambda \exp(-\lambda x)\, dx = \frac{k!}{\lambda^k}, \quad k = 0, 1, \ldots, \quad \lambda > 0.$

10. Obliczyć całkę nieoznaczoną $\int x \; exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx$

Witold Karczewski