Lista 2

15 October, 2023 09:17

Lista nr 2 z matematyki dyskretnej

1. Na kartce w kratkę zaznaczono 5 punktów kratowych (czyli punktów o obu współrzędnych całkowitoliczbowych). Wykaż, że środek odcinka łączącego pewne dwa spośród tych punktów jest także punktem kratowym.

2. (+) Dany jest ciąg liczb naturalnych $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Pokaż, że istnieją takie i oraz j, $i \leq j$, że suma $a_i + a_{i+1} + \ldots + a_j$ jest podzielna przez n.

3. Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n istnieje liczba podzielna przez n, której zapis dziesiętny złożony jest tylko z zer i jedynek.

4. Wybieramy 55 liczb naturalnych takich, że: $1 \leq x_1 < x_2 < \ldots x_{55} \leq 100$. Pokaż, że jakkolwiek byśmy je nie wybrali, jakieś dwie będą różnić się o 9.

5. Pokaż, że spośród dowolnych trzech liczb całkowitych potrafimy wybrać dwie a i b takie, że $a^3b - ab^3$ jest podzielne przez 10.

6. (-) W każde pole szachownicy $n \times n$ wpisujemy jedną z liczb: $-1, 0, 1$. Następnie dodajemy do siebie liczby stojące w tej samej kolumnie, w tym samym wierszu i na tej samej przekątnej. Udowodnij, że wśród otrzymanych sum co najmniej dwie są równe.

7. (-) Na okręgu zapisujemy w dowolnej kolejności liczby naturalne od 1 do 10. Pokaż, że zawsze znajdą się trzy sąsiednie, których suma wynosi przynajmniej 18.

8. Podaj interpretację następującej tożsamości w terminach zbiorów:

$$\binom{n}{k}\binom{k}{m} = \binom{n}{m}\binom{n-m}{k-m}$$

.

9. (+) Wykaż prawdziwość tożsamości Cauchy'ego:

$$\binom{m+n}{r} = \sum_{i=0}^{r} \binom{m}{i}\binom{n}{r-i}.$$

1

Czy potrafisz udowodnić ją kombinatorycznie? √

10. Na ile sposobów $3n$ dzieci może uformować trzy równoliczne koła graniaste? (Dwie formacje są różne jeśli istnieje dziecko, które kogo innego trzyma lewą ręką w obu układach lub kogo innego prawą ręką.)

11. Niech n będzie liczbą naturalną. Na ile sposobów można pokolorować pola tablicy $n \times n$ na dwa kolory (każde pole jednym kolorem) tak, by liczba pól jednego koloru nie przewyższała liczby pól drugiego koloru o więcej niż 1?

12. Udowodnij przez indukcję, że dla każdego naturalnego n zachodzi:

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}.$$

13. (2p) (+) Oblicz liczbę funkcji niemalejących postaci $f : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$.

14. Na ile sposobów można wrzucić $2n$ kulek do k szuflad tak, by w każdej szufladzie znalazła się parzysta liczba kulek? A na ile sposobów można wrzucić $2n+1$ kulek do $2k+1$ szuflad tak, by w każdej szufladzie znalazła się nieparzysta liczba kulek?

L	1	+2	3	4	5	~~6~~	~~7~~	8	+9	10	11	12	+13	14	suma
W	1	1	1	1	1	0,5	0,5	1	1	1?	1	1	2	1	14/14p

za 2 pkt

1 (done)

15 October, 2023 09:18

1. Na kartce w kratkę zaznaczono 5 punktów kratowych (czyli punktów o obu współrzędnych całkowitoliczbowych). Wykaż, że środek odcinka łączącego pewne dwa spośród tych punktów jest także punktem kratowym.

Mamy cztery możliwości wyboru punktu (według parzystości):

(P, P); (N, N); (P, N); (N, P)

Wybieramy pięć punktów, w jednym „koszyku" będą więc conajmniej dwa punkty $\iff$ min. dwa punkty będą miały taką samą parzystość obu współrzędnych.

$$\frac{\text{parzysta} + \text{parzysta}}{2} = \text{całkowita} \qquad \frac{\text{nieparzysta} + \text{nieparzysta}}{2} = \text{całkowita}$$

Musimy otrzymać więc min. jeden punkt kratowy

+2 (done)

15 October, 2023 09:18

2. (+) Dany jest ciąg liczb naturalnych $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Pokaż, że istnieją takie i oraz j, $i \leq j$, że suma $a_i + a_{i+1} + \ldots + a_j$ jest podzielna przez n.

$S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2$, ..., $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$

Istnieje n takich sum

Udowodnimy problem nie wprost

*możliwe że będą złe nazwy

Mamy dwie opcje:

I) Każda z tych sum różni się modulo n: - Mamy więc n różnych grup mod n ⇒ mamy grupę 0, sprzeczność

II) Dwie sumy z takim samym modulo n

$S_i \equiv S_j \pmod{n} \iff S_j - S_i \equiv 0 \pmod{n}$

i równocześnie $S_j - S_i = a_{i+1} + a_{i+2} + \ldots + a_j$ sprzeczność

Muszą więc istnieć takie i oraz j

3 (done)

15 October, 2023 09:18

3. Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n istnieje liczba podzielna przez n, której zapis dziesiętny złożony jest tylko z zer i jedynek.

Dla każdego n możemy wziąć $n+1$ liczb z samych jedynek

$(1, 11, 111, \ldots, \underbrace{11\ldots1}_{n+1 \text{ cyfr}})$

Liczymy modulo n każdej z tych liczb

Jeśli którekolwiek $x \bmod n = 0$ kończymy dowód

Przynajmniej dwie reszty będą równe, liczby z których te reszty liczymy oznaczmy jako a i b, $a<b$

(a odejmując jedynki od jedynek dostajemy 0)

Wtedy $(b-a) \bmod n = 0$

np. $n=3$ 1, 11, 111, 1111

$111 \bmod 3 = 0$ ✓

ew. $1 \% 3 = 1111 \% 3$

$1111 - 1 = 1110$

$1110 \% 3 = 0$ ✓

4 (done)

15 October, 2023 09:18

4. Wybieramy 55 liczb naturalnych takich, że: $1 \leq x_1 < x_2 < \ldots x_{55} \leq 100$. Pokaż, że jakkolwiek byśmy je nie wybrali, jakieś dwie będą różnić się o 9.

Dziewięć grup modulo (0 - 8)

1, 10, 19, 28, 37, 46, 55, 64, 73, 82, 91, 100

2, 11, 20, 29, 38, 47, 56, 65, 74, 83, 92

9, ... 99

w każdej z grup mamy 11 lub 12 elementów (w 8 11, w 1 12)

Do rozdzielenia 55 liczb (55-1)/9 = 6

w jednej 7, reszta 6

7 cyfr na 12 miejsc = przynajmniej dwie będą ze sobą "graniczyć" a więc będą oddalone o 9

5 (done)

15 October, 2023 09:18

(podzielność przez 2 i 5)

5. Pokaż, że spośród dowolnych trzech liczb całkowitych potrafimy wybrać dwie a i b takie, że $a^3b - ab^3$ jest podzielne przez 10.

$$a^3b - ab^3 = ab(a^2-b^2) = ab(a-b)(a+b)$$

War.: $ab(a-b)(a+b) \equiv 0 \pmod 5$

jeśli którekolwiek jest mod 0 lub są równe to war. spełniony. Pozostałe opcje:

$\{a,b,c\} = \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}$

Dla każdego przypadku mamy $1+4$ lub $2+3 \equiv 0 \pmod 5$

Jest więc podzielne przez 5

dla podz. przez 2 analogicznie

Podz. przez 2 i 5 $\Leftrightarrow$ podz. przez 10 c.n.u.

-6 (done)

15 October, 2023 09:19

6. (-) W każde pole szachownicy $n \times n$ wpisujemy jedną z liczb: $-1, 0, 1$. Następnie dodajemy do siebie liczby stojące w tej samej kolumnie, w tym samym wierszu i na tej samej przekątnej. Udowodnij, że wśród otrzymanych sum co najmniej dwie są równe.

$\forall n \in \mathbb{N}$ mamy $2n+1$ sum (pudełek)
(n w każdą stronę i zero)

$\forall n \in \mathbb{N}$ mamy $2n+2$ sumy
(n kolumn, n wierszy, 2 przekątne)

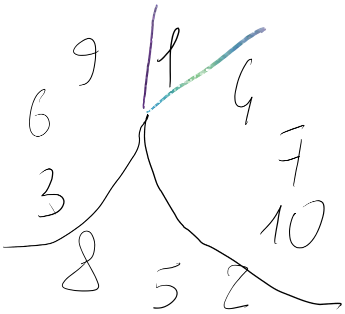
wkładamy $2n+2$ do $2n+1$ $\Rightarrow$ min. 1 podwojone (równe) c.n.u.

-7 (done)

15 October, 2023 09:19

7. (-) Na okręgu zapisujemy w dowolnej kolejności liczby naturalne od 1 do 10. Pokaż, że zawsze znajdą się trzy sąsiednie, których suma wynosi przynajmniej 18.

wykreślamy jedynkę - zostają nam 3 grupy po trzy liczby



$1+2+\ldots+10=55$

$55-1=54$

$54/3=18$

jeśli podzielimy po równo, to mamy 3×18

jeśli jakakolwiek grupa będzie mniejsza, to inne „przejmie nadmiar”

8 (done)

15 October, 2023 09:19

8. Podaj interpretację następującej tożsamości w terminach zbiorów:

$$\binom{n}{k}\binom{k}{m} = \binom{n}{m}\binom{n-m}{k-m}$$

na logikę + rysunek

k z n, m z k

m z n, $k-m$ wokół ~~m~~ z $n-m$

+9 (done)
15 October, 2023 09:19

9. (+) Wykaż prawdziwość tożsamości Cauchy'ego:

$$\binom{m+n}{r} = \sum_{i=0}^{r} \binom{m}{i}\binom{n}{r-i}.$$

Czy potrafisz udowodnić ją kombinatorycznie? idk

Ładny dowód indukcyjny:

(ω)

$$\binom{m+n}{r} = \sum_{i=0}^{r} \binom{m}{i}\binom{n}{r-i}.$$

Indukcja względem m:

I $m=0$ *dla $i \neq 0$ mamy $\binom{0}{i}=0$, mamy więc

$$\binom{n}{r} = \binom{0}{0}\binom{n}{r-0} \quad \text{(oczywista prawda)}$$

II Załóżmy (ω) dla pewnego m i dowolnych $n, k \in \mathbb{N}$, pokażmy że:

$$\binom{m+n+1}{r} = \sum_{i=0}^{r} \binom{m+1}{i}\binom{n}{r-i}$$

$$P = \sum_{i=0}^{r} \binom{m+1}{i}\binom{n}{r-i} = \sum_{i=0}^{r}\left(\binom{m}{i}+\binom{m}{i-1}\right)\binom{n}{r-i} =$$

rozbijamy $\binom{m+1}{i}$ na dwa symbole

$$\sum_{i=0}^{r}\binom{m}{i}\binom{n}{r-i} + \sum_{i=0}^{r}\binom{m}{i-1}\binom{n}{r-i} =$$

rozłączamy sumę

wyliczamy jedną sumę, przekształcamy drugą

$$\binom{m+n}{r} + \sum_{i=0}^{r}\binom{m}{i}\binom{n}{r-i-1} =$$

$$\binom{m+n}{r} + \binom{m+n}{r-1} = \binom{m+n+1}{r} = L \quad \text{c.n.d.}$$

wyliczamy drugą sumę i zwijamy

Dowód kombinatoryczny (na chłopski rozum):

$$\binom{m+k}{n} = \sum_{i=0}^{n}\binom{m}{i}\binom{k}{n-i}$$

Chcemy wybrać n ludzi z m mężczyzn i k kobiet

Możemy po prostu wybrać n na $\binom{m+k}{n}$ sposobów

Ale możemy też wybrać najpierw i mężczyzn na m sposobów, a następnie $n-i$ kobiet na k sposobów

Wybieramy tyle samo osób z (k/m) takiej samej ilości osób - zbiory będą więc równe

10 (chyba)

15 October, 2023 09:19

10. Na ile sposobów $3n$ dzieci może uformować trzy równoliczne koła graniaste? (Dwie formacje są różne jeśli istnieje dziecko, które kogo innego trzyma lewą ręką w obu układach lub kogo innego prawą ręką.)

Idk czy git

Upraszczając do jednego ciągu 3n!

$$\binom{3n}{n} n! \cdot \binom{2n}{n} n! \cdot n! =$$

$$\frac{(3n)!}{\cancel{n!}\,\cancel{2n!}} \cancel{n!} \cdot \frac{\cancel{2n!}}{\cancel{n!}\,\cancel{n!}} \cdot \cancel{n!} \cdot \cancel{n!} = 3n!$$

Wybierając najpierw n z 3n dzieci upraszcza się do tego samego więc chyba git

jednak $(n-1)!$ bo różne ustawienia tego samego koła

np. 1 2 3 2 3 1

11 (done)

15 October, 2023 09:19

11. Niech n będzie liczbą naturalną. Na ile sposobów można pokolorować pola tablicy $n \times n$ na dwa kolory (każde pole jednym kolorem) tak, by liczba pól jednego koloru nie przewyższała liczby pól drugiego koloru o więcej niż 1?

będę dla uproszczenia pisał czarny / biały (C/B)

n	pola	opcje
1	1	2
2	4	
3	9	
4	16	

B	C
C	B

B	B	B
C	C	C
B	B	C

B	B	B	B
C	C	C	C
B	B	B	B
C	C	C	C

Zauważmy że dla:
- n parzystych rozważamy tylko równą ilość
- n nieparzystych tylko różnicę o 1

Na ile sposobów możemy wybrać $\frac{n^2}{2}$ pól z n^2 pól?

(a tu symetria) $\binom{n^2}{\frac{n^2}{2}}$ dla n parzystych

bo dwa kolory $2 \cdot \binom{n^2}{\frac{n^2}{2} - 1}$ dla n nieparzystych

12 (done)

15 October, 2023 09:19

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

12. Udowodnij przez indukcję, że dla każdego naturalnego n zachodzi:

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}.$$

$\binom{n}{k} = 1$ dla $k=0 \vee k=n$

I $n=1$

$\sum_{0}^{1} \binom{1}{0} a^0 b^1 + \binom{1}{1} a^1 b^0 = b+a = a+b = (a+b)^1$ ✓

II zał. dla n, ud. dla $n+1$:

$(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n = (a+b)\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^i b^{n-i} =$ wychodzimy od lewej i rozpisujemy

$a\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^i b^{n-i} + b\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^i b^{n-i} =$ rozbijamy sumy z a i b

$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^{i+1}b^{n-i} + \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^i b^{n-i+1} =$ +1 do odpowiednich potęg

$\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n}{i}a^{i+1}b^{n-i} + \binom{n}{n}a^{i+1} + \sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}a^i b^{n-i+1} + \binom{n}{0}b^{n+1} =$ wyjmujemy po wyrazie z newtona i sum

$\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i-1}a^i b^{n-i+1} + \binom{n+1}{n+1}a^{i+1} + \sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}a^i b^{n-i+1} + \binom{n+1}{0}b^{n+1} =$ przesuwamy pierwszą sumę a i b i symbole Newtona przy samotnych

$\binom{n+1}{n+1}a^{i+1} + \sum_{i=1}^{n}\left[\binom{n}{i-1} + \binom{n}{i}\right]a^i b^{n-i+1} + \binom{n+1}{0}b^{n+1} =$ łączymy sumy

$\binom{n+1}{n+1}a^{i+1} + \sum_{i=1}^{n}\binom{n+1}{i}a^i b^{n-i+1} + \binom{n+1}{0}b^{n+1} =$ zwijamy symbol Newtona przy sumie

$\sum_{i=0}^{n+1}\binom{n+1}{i}a^i b^{n+1-i}$ suma start o jeden w dół i odp. potęga przy b

Doprowadzone do postaci z prawej strony. Dowód skończony

Znalazlem ladniej rozpisana wersje:
https://proofwiki.org/wiki/Binomial_Theorem/Integral_Index

+13 (done)

15 October, 2023 09:19

13. (2p) (+) Oblicz liczbę funkcji niemalejących postaci
$f : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$.

sticks and stars - rozpisane na papierze

14 (done)

15 October, 2023 09:19

a)

14. Na ile sposobów można wrzucić $2n$ kulek do k szuflad tak, by w każdej szufladzie znalazła się parzysta liczba kulek? A na ile sposobów można wrzucić $2n + 1$ kulek do $2k + 1$ szuflad tak, by w każdej szufladzie znalazła się nieparzysta liczba kulek? b)

a) $\binom{k}{n}$ (rozważamy pary, zawsze po dwie rzucimy, no bo różne ~~kulki~~ ale w tej samej ilości to to samo chyba)

b) Nieparzysta w każdej - wszędzie conajmniej jedna
Musimy rozmieścić najpierw $2k+1$ kul (po 1 wszędzie)

$2n+1-2k-1 = 2n-2k = 2(n-k)$

resztę rozmieszczamy parami jak w a)

$\binom{2k+1}{n-k}$

trochę inaczej
pomysł dobry ale
na koniec stars & sticks