L10

16 December, 2023 20:22

L10 zad.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	suma
pkt.	1	1	1	1	1	1	1			
max pkt.	1	1	1	1	1	1	1	2	1	10

Zajęcia 19 grudnia 2023 r.
Zaliczenie listy **od 5 pkt.**

L10.1. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Niech dane będą parami różne punkty $\mathcal{X} := \{x_0, x_1, \ldots, x_N\}$ i funkcja p o własności $p(x) > 0$ dla $x \in \mathcal{X}$. Udowodnij, że wzór

$$||f|| := \sqrt{\sum_{k=0}^{N} p(x_k) f(x_k)^2}$$

określa normę na zbiorze dyskretnym $\mathcal{X}$.

L10.2. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Wyznacz funkcję postaci $y(x) = (x-1)(2023x + a) - 2024x$ najlepiej dopasowaną w sensie aproksymacji średniokwadratowej do danych

x_k	x_0	x_1	$\ldots$	x_n
y_k	y_0	y_1	$\ldots$	y_n

L10.3. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Dla jakiej stałej a wyrażenie

$$\sum_{k=0}^{r} \frac{e^{2x_k}}{2 + \sin(2023x)} \left[y_k - a\left(\ln(2022x_k^4 + 3) + 4x_k^5\right)\right]^2$$

przyjmuje najmniejszą możliwą wartość?

L10.4. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Wiadomo, że napięcie powierzchniowe cieczy S jest funkcją liniową temperatury T:

$$S = aT + b.$$

Dla konkretnej cieczy wykonano pomiary S w pewnych temperaturach, otrzymując następujące wyniki:

T	0	10	20	30	40	80	90	95
S	68.0	67.1	66.4	65.6	64.6	61.8	61.0	60.0

Wyznacz prawdopodobne wartości stałych a i b.

L10.5. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Pomiary (t_k, C_k) $(0 \le k \le N;\ t_k, C_k > 0)$ pewnej zależnej od czasu wielkości fizycznej C sugerują, że wyraża się ona wzorem

$$C(t) = 5 + \frac{\sin\left(1977t^4\right) + 2}{A\cos\left(2t - 1\right) + Be^{1-2t} + 2023t^2 + 3}.$$

Stosując aproksymację średniokwadratową, wyznacz prawdopodobne wartości stałych A i B.

L10.6. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Punkty (x_k, y_k) $(k = 0, 1, \ldots, r)$ otrzymano jako wyniki pomiarów. Po ich zaznaczeniu na papierze z *siatką półlogarytmiczną*[1] okazało się, że leżą one prawie na linii prostej, co sugeruje, iż $y \approx e^{ax+b}$. Zaproponuj prosty sposób wyznaczenia prawdopodobnych wartości parametrów a i b.

L10.7. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Poziom wody w Morzu Północnym zależy głównie od tzw. *pływu* M_2 o okresie ok. 2π i równaniu

$$H(t) = h_0 + a_1 \sin\frac{2\pi t}{12} + a_2 \cos\frac{2\pi t}{12} \qquad (t \text{ mierzone w godzinach}).$$

Zrobiono następujące pomiary:

t	0	2	4	6	8	10	godz.
$H(t)$	1	1.6	1.4	0.6	0.2	0.8	m

Wykorzystaj aproksymację średniokwadratową do wyznaczenia prawdopodobnych wartości stałych h_0, a_1, a_2.

L10.8. $\boxed{\text{2 punkty}}$ Niech dane będą: $x_0 < x_1 < \ldots < x_N$, $y_k \in \mathbb{R}$ $(0 \le k \le N)$ oraz wielomian $w_n^*(x) := \sum_{k=0}^{n} A_k^* x^k$, gdzie $n < N$. Podaj **jawną postać** układu równań, który muszą spełniać współczynniki $A_0^*, A_1^*, \ldots, A_n^*$, aby zachodziło

$$||f - w_n^*||_2 = \min_{w_n \in \Pi_n} ||f - w_n||_2,$$

gdzie f jest taką funkcją, że $f(x_k) = y_k$ dla $k = 0, 1, \ldots, N$, natomiast

$$||g||_2 := \sqrt{\sum_{k=0}^{N} (g(x_k))^2}.$$

L10.9. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Niech dane będą parami różne liczby $x_0, x_1, \ldots, x_N$. Niech $y_0, y_1, \ldots, y_N \in \mathbb{R}$. Jakim wzorem wyraża się wielomian $w_N^* \in \Pi_N$, dla którego

$$||f - w_N^*||_2 = \min_{w_N \in \Pi_N} ||f - w_N||_2$$

(f oraz $||\cdot||_2$ mają znaczenie, jak w zadaniu poprzednim)?

(–) Paweł Woźny

Aproksymacja średniokwadratowa - teoria

18 December, 2023 12:05

Dla ustalonych $x_0, x_1, \dots, x_N$:
Mamy funkcję f określoną na tych punktach.
Normę dyskretną śr□ funkcji f oznaczamy $\|f\|_2$

$$\|f\|_2 = \sqrt{\sum_{k=0}^{N} (f(x_k))^2}$$

Własności:

1° $\|f\|_2 \geq 0$, $\|f\|_2 = 0 \Leftrightarrow \forall_k \ f(x_k) = 0$

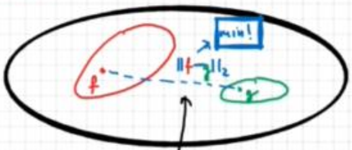
2° $\|\alpha f\|_2 = |\alpha| \cdot \|f\|_2$ $(\alpha \in \mathbb{R})$

3° $\|f+g\|_2 \leq \|f\|_2 + \|g\|_2$ (nierówność trójkąta)

Odległość dwóch funkcji:

$$\|f-g\|_2 = \sqrt{\sum_{k=0}^{N} (f(x_k) - g(x_k))^2}$$

Intuicja aproksymacji śrkw



$\mathcal{F}$ - zbiór funkcji zawierający m.in. funkcje „trudne" oraz „proste"

te funkcje są najbliżej siebie w sensie odległości śrkw
f - ustalona
g - tak dobrana, aby $\|f-g\|_2$ było jak najmniejsze

Zadanie aproksymacji śrkw

Dla danej (ustalonej) funkcji f („trudna") określonej w punktach $x_0 < x_1 < \dots < x_N$ i dla ustalonego zbioru $\mathcal{X}$ („proste") znaleźć taki element $w^* \in \mathcal{X}$, dla którego

$$\|f - w^*\|_2 = \min_{w \in \mathcal{X}} \|f - w\|_2 \equiv \min_{w \in \mathcal{X}} \sqrt{\sum_{k=0}^{N} (f(x_k) - w(x_k))^2}$$

„najlepsza" z „prostych" funkcji (tzn. najlepiej dopasowana w sensie aproksymacji śrkw)

Model postaci $\mathcal{X} := \{a : a \in \mathbb{R}\}$ (funkcje stałe, Π_0)

(x_k, y_k)

$w(x) = a$ $(a = \text{const.})$

$$\|f - w^*\|_2 = \min_{w \in \Pi_0} \|f - w\|_2 = \min_{a \in \mathbb{R}} \underbrace{\sqrt{\sum_{k=0}^{N} (\underset{y_k}{f(x_k)} - \underset{a}{w(x_k)})^2}}_{E(a) \text{ - funkcja błędu}}$$

Szukamy minimum funkcji błędu E (ze względu na parametr a):

$$E'(a) = 0 \quad \leftarrow \text{warunek konieczny ekstremum}$$

$$\sum_{k=0}^{N} 2(f(x_k) - a)^1 \cdot (-1) = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\sum^{N} f(x_k) - \sum^{N} a = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\sum_{k=0}^{N} f(x_k) - \underbrace{\sum_{k=0}^{N} a}_{(N+1)a} = 0$$

$$\boxed{a = \frac{\sum_{k=0}^{N} f(x_k)}{N+1} = \frac{\sum_{k=0}^{N} y_k}{N+1}} \leftarrow \text{średnia arytmetyczna obserwacji}$$

$y_0, y_1, \ldots, y_N$

$w^* \in \Pi_0 \equiv \mathcal{X}$

Element optymalny (najlepiej dopasowany) w sensie aproksymacji się do danych postaci

x_0	x_1	x_2	...	x_N
y_0	y_1	y_2	...	y_N
$= f(x_0)$	$= f(x_1)$	$= f(x_2)$		$= f(x_N)$

$(x_k, f(x_k))$, $f(x_k) = y_k$ – wartości pomiarów

jest element

$$\boxed{w^*(x) = \frac{\sum_{k=0}^{N} y_k}{N+1}}$$

1 (done)

16 December, 2023 20:23

L10.1. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Niech dane będą parami różne punkty $\mathcal{X} := \{x_0, x_1, \ldots, x_N\}$ i funkcja p o własności $p(x) > 0$ dla $x \in \mathcal{X}$. Udowodnij, że wzór

$$\|f\| := \sqrt{\sum_{k=0}^{N} p(x_k) f(x_k)^2}$$

określa normę na zbiorze dyskretnym $\mathcal{X}$.

Aby udowodnić ten fakt pokażemy że zachodzą trzy własności normy z wykładu.

1° $\|f\| \geq 0 \wedge \|f\| = 0 \iff f = 0$

$$\|f\| := \sqrt{\sum_{k=0}^{N} p(x_k) f(x_k)^2}$$

$p(x_k) > 0$ z zał.

$(f(x_k))^2 \geq 0$ z kwadratu.

$>0 \cdot \geq 0 = \geq 0$ ✓

$\|f\| = \sqrt{p(x_k) \cdot f(x_k)^2}$

$p(x_k) > 0 \Rightarrow \|f\| = 0 \iff f(x_k)^2 = 0 \iff f(x_k) = 0$ ✓

2° $\|\alpha f\| = |\alpha| \cdot \|f\|$

$$\|\alpha f\| = \sqrt{\sum_{k=0}^{n} p(x_k)(\alpha \cdot f(x_k))^2} = |\alpha| \sqrt{\sum_{k=0}^{n} p(x_k) f(x_k)^2} = |\alpha| \cdot \|f\|$$ ✓

$P = \|f\|^2 + \|g\|^2 + 2\|f\| \cdot \|g\|$

3° $\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$ $|^2$

$$L = \|f+g\|^2 = p(x_k) \sum_{k=0}^{N} \left[f(x_k)^2 + 2f(x_k)g(x_k) + g(x_k)^2 \right] =$$

$$\sum_{k=0}^{N} p(x_k) f(x_k)^2 + \sum_{k=0}^{N} p(x_k) g(x_k) + \sum_{k=0}^{N} p(x_k) 2f(x_k) g(x_k) =$$

$$\|f\|^2 + \|g\|^2 + 2\underbrace{\sum_{k=0}^{N} p(x_k) f(x_k) g(x_k)}$$ a to jest iloczyn skalarny $2\langle f, g\rangle$

Korzystamy z tw. Cauchego-Schwartza i początkowe równanie do kw.
$$\left(\begin{array}{l} |\langle u,v\rangle|^2 \leq \langle u,u\rangle \cdot \langle v,v\rangle \\ \langle u,v\rangle \leq |\langle u,v\rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\| \end{array} \right)$$

$$\|f\|^2 + \|g\|^2 \cdot 2\langle f,g\rangle \leq \|f\|^2 + \|g\|^2 + 2\|f\|\|g\|$$

$\|f\|^2 + \|g\|^2 + 2\langle f, g\rangle \leq \|f\|^2 + \|g\|^2 + 2\|f\|\,\|g\|$

$\|f+g\|^2 \leq (\|f\| + \|g\|)^2$

$\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$

2 (done)

16 December, 2023 20:23

L10.2. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Wyznacz funkcję postaci $y(x) = (x-1)(2023x+a) - 2024x$ najlepiej dopasowaną w sensie aproksymacji średniokwadratowej do danych

x_k	x_0	x_1	...	x_n
y_k	y_0	y_1	...	y_n

← to jest jakieś ustalone $f(x_k)$

- Zacznijmy od przekształcenia $y(x)$

$$y(x) = (x-1)(2023x+a) - 2024x = 2023x^2 - 2023x + ax - a - 2024x =$$
$$2023x^2 - 4047x + ax - a = \underline{a(x-1) + 2023x^2 - 4047x}$$

- Wyznaczmy funkcję błędu:

gdzie to są pochodne po a

$$E(a) = \sum_{k=0}^{n} \left[f(x_k) - y(x_k)\right]^2 \qquad E'(a) = 2\sum \left[f(x_k) - y(x_k)\right]\left[f'(x_k) - y'(x_k)\right]$$

$$\frac{d}{da} f(x_k) = 0$$

$$\frac{d}{da} y(x_k) = x-1$$

$$E'(a) = -2\sum \left[f(x_k) - y(x_k)\right](x-1) =$$

$$-2\sum f(x_k)(x-1) + 2\sum y(x_k)(x-1) = 0 \Rightarrow \sum f(x_k) = \sum y(x_k)$$

$$\sum f(x_k) = \sum a(x-1) + 2023x^2 - 4047x$$

$$\boxed{a = \sum_{k=0}^{n} \frac{f(x_k) - 2023x^2 + 4047x}{x-1}}$$

3 (done)

16 December, 2023 20:23

L10.3. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Dla jakiej stałej a wyrażenie

$$\sum_{k=0}^{r} \frac{e^{2x_k}}{2+\sin(2023x)}\left[y_k - a\left(\ln(2022x_k^4+3)+4x_k^5\right)\right]^2$$

przyjmuje najmniejszą możliwą wartość?

Podstawmy:

$$b_k = \frac{e^{2x_k}}{2+\sin 2023x} \qquad c_k = \ln(2022x_k^4+3)+4x_k^5$$

Wtedy:

$$E(a) = \sum_{k=0}^{r} b_k (y_k - a \cdot c_k)^2$$

$$E'(a) = -2\sum b_k (y_k - a c_k) c_k = 0$$

$$\sum b_k y_k c_k - \sum b_k c_k^2 a = 0$$

$$a = \frac{\sum b_k y_k c_k}{\sum b_k c_k^2} \Rightarrow a = \sum_{k=0}^{r} \frac{y_k}{c_k}$$

Odp.

$$a = \sum_{k=0}^{r} \frac{y_k}{\ln(2022x_k^4+3)+4x_k^5}$$

4 (done)

16 December, 2023 20:23

L10.4. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Wiadomo, że napięcie powierzchniowe cieczy S jest funkcją liniową temperatury T:

$$S = aT + b.$$

Dla konkretnej cieczy wykonano pomiary S w pewnych temperaturach, otrzymując następujące wyniki:

	0	1	2	3	4	5	6	7
T	0	10	20	30	40	80	90	95
S	68.0	67.1	66.4	65.6	64.6	61.8	61.0	60.0

$N = 7$

Wyznacz prawdopodobne wartości stałych a i b.

Z wykładu wiemy, że musi zachodzić:

a) $\dfrac{\partial E(a,b)}{\partial a} = 0$ b) $\dfrac{\partial E(a,b)}{\partial b} = 0$ (pochodne cząstkowe po odp. a i b)

ogólnie to całe to przepisanie wykładu, tylko na koniec podst. pod wzór sami

$$\begin{cases} a) \sum_{k=0}^{7} 2(f(x_k) - a x_k - b)(-x_k) = 0 \\ b) \sum_{k=0}^{7} 2(f(x_k - a x_k - b)(-1) = 0 \end{cases}$$

By rozwiązać ten układ równań korzystamy ze wzorów z wykładu.

$$\begin{cases} a = \dfrac{(N+1)S_4 - S_1 S_3}{(N+1) S_2 - S_1^2} \\ b = \dfrac{S_2 S_3 - S_1 S_4}{(N+1) S_2 - S_1^2} \end{cases}$$

$$S_i = \sum_{k=0}^{N} x_k^i \qquad i = 1, 2$$

$$S_3 = \sum_{k=0}^{N} f(x_k)$$

$$S_4 = \sum_{k=0}^{N} f(x_k) x_k$$

Podstawiamy:

$N+1 = 8$

$S_1 = 365$ $S_2 = 26\,525$

$S_3 = 514{,}5$ $S_4 = 22\,685$

$$a = \frac{-6312{,}5}{78975} \approx -0{,}07993$$

$$b = \frac{5367087{,}5}{78975} \approx 67{,}95932$$

5 (done)

16 December, 2023 20:23

L10.5. 1 punkt Pomiary (t_k, C_k) $(0 \le k \le N;\ t_k, C_k > 0)$ pewnej zależnej od czasu wielkości fizycznej C sugerują, że wyraża się ona wzorem

$$C(t) = 5 + \frac{\sin(1977t^4) + 2}{A\cos(2t-1) + Be^{1-2t} + 2023t^2 + 3}.$$ ozn jako α

Stosując aproksymację średniokwadratową, wyznacz prawdopodobne wartości stałych A i B.

główny problem - nasza funkcja nie jest liniowa.

Mamy dane

$$\begin{array}{l|lllll} t_k & t_0 & t_1 & t_2 & \dots & t_N \\ C_k & C_0 & C_1 & C_2 & \dots & C_N \end{array}$$ i wzór funkcji $C(t)$

$$C(t) - 5 = \frac{\sin(1977 \cdot t^4) + 2}{\alpha}$$

$$\alpha = \frac{\sin(1977 \cdot t^4) + 2}{C(t) - 5}$$

rozpiszmy alfę

$$A\cos(2t-1) + Be^{1-2t} + 2023t^2 + 3 = \frac{\sin(1977 \cdot t^4) + 2}{C(t) - 5}$$

$$A\cos(2t-1) + Be^{1-2t} = \underbrace{\frac{\sin(1977 \cdot t^4) + 2}{C(t) - 5} - 2023t^2 - 3}_{y(t)}$$

Żeby znaleźć wartości A i B musimy rozwiązać układ równań postaci:

$$\begin{bmatrix} \cos(2t_0 - 1) & e^{1-2t_0} \\ \cos(2t_1 - 1) & e^{1-2t_1} \\ \vdots & \vdots \\ \cos(2t_k - 1) & e^{1-2t_k} \\ \vdots & \vdots \\ \cos(2t_N - 1) & e^{1-2t_N} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(t_0) \\ y(t_1) \\ \vdots \\ y(t_k) \\ \vdots \\ y(t_N) \end{bmatrix}$$

co rozwiążemy metodą z repet

$$\begin{cases} F_1(t) = \cos(2t-1) \\ F_2(t) = e^{1-2t} \\ y(t) = y(t) \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \underbrace{\langle \cos(2t-1), \cos(2t-1) \rangle}_{r_1} & \underbrace{\langle \cos(2t-1), e^{1-2t} \rangle}_{r_2} \\ \underbrace{\langle e^{1-2t}, \cos(2t-1) \rangle}_{r_2} & \underbrace{\langle e^{1-2t}, e^{1-2t} \rangle}_{r_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underbrace{\langle \cos(2t-1), y(t) \rangle}_{w_1} \\ \underbrace{\langle e^{1-2t}, y(t) \rangle}_{w_2} \end{bmatrix}$$

$$b = \frac{w_2 - r_2 a}{r_3}$$

$$w_1 - r_2 b \qquad w_1 - r_2 \frac{w_2 - r_2 a}{r_3}$$

$$a = \frac{w_1 - r_2 b}{r_1} = \frac{w_1 - r_2 \frac{w_2 - r_2 a}{r_3}}{r_1} \quad \Big/ \cdot r_1 r_3$$

$$a(r_1 r_3) = w_1 r_3 - r_2 w + r_2^2 a$$

$$a(r_1 r_3) - r_2^2 a = w_1 r_3 - r_2 w$$

$$a(r_1 r_3 - r_2^2) = w_1 r_3 - r_2 w$$

$$\boxed{a = \frac{w_1 r_3 - r_2 w}{r_1 r_3 - r_2^2}}$$

$$b = \frac{w_2 - r_2 \frac{w_1 r_3 - r_2 w_2}{r_1 r_3 - r_2^2}}{r_3} =$$

$$\frac{\frac{r_1 r_3 w_2 - r_2^2 w_2 - r_2 r_3 w_1 + r_2^2 w_2}{r_1 r_3 - r_2^2}}{r_3} = \boxed{\frac{r_1 r_3 w_2 - r_2 r_3 w_1}{r_1 r_3^2 - r_3 r_2^2}}$$

6 (done)

16 December, 2023 20:23

L10.6. [1 punkt] Punkty (x_k, y_k) $(k = 0, 1, \ldots, r)$ otrzymano jako wyniki pomiarów. Po ich zaznaczeniu na papierze z *siatką półlogarytmiczną*[1] okazało się, że leżą one prawie na linii prostej, co sugeruje, iż $y \approx e^{ax+b}$. Zaproponuj prosty sposób wyznaczenia prawdopodobnych wartości parametrów a i b.

Siatka półlogarytmiczna - wykres, w którym jedna oś jest w skali liniowej, a druga w skali logarytmicznej

nasze zadanie

$$\begin{cases} f_1 = x \\ f_2 = 1 \\ y = \ln y \end{cases}$$

$$y \approx e^{ax+b} \qquad \ln y \approx ax+b$$

$$E(a,b) = \sum_{k=0}^{r} \left[\ln(y_k) - (ax_k+b)\right]^2$$

$$\frac{\partial E(a,b)}{\partial a} = \sum_{k=0}^{r} 2\cdot\left[\ln(x_k) - (ax_k+b)\right](-x_k) = 0$$

$$\sum_{k=0}^{r} \ln(y_k)x_k - ax_k^2 + bx_k = 0$$

$$a\sum_{k=0}^{r} x_k^2 + b\sum_{k=0}^{r} x_k = \sum_{k=0}^{r} \ln(y_k)x_k$$

$$\overset{r_1}{\langle x,x\rangle} \qquad \overset{r_2}{\langle x,1\rangle} \qquad \overset{w_1}{\langle \ln(y),x\rangle}$$

$$\frac{\partial E(a,b)}{\partial b} = \sum_{k=0}^{r} 2\left(\ln(y_k) - (ax_k+b)\right)(-1) = 0$$

$$a\sum_{k=0}^{r} x_k + b\sum_{k=0}^{r} 1 = \sum_{k=0}^{r} \ln(y_k)$$

$$\overset{r_2}{\langle x,1\rangle} \qquad \overset{r_3}{\langle 1,1\rangle} \qquad \overset{w_2}{\langle 1,\ln(y)\rangle}$$

$$\begin{bmatrix} \overset{r_1}{\langle x,x\rangle} & \overset{r_2}{\langle x,1\rangle} \\ \overset{r_2}{\langle 1,x\rangle} & \overset{r_3}{\langle 1,1\rangle} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overset{w_1}{\langle x,\ln(y)\rangle} \\ \overset{w_2}{\langle 1,\ln(y)\rangle} \end{bmatrix}$$

$$b = \frac{w_2 - r_2 a}{r_3} \qquad a = \frac{w_1 - r_2 b}{r_1}$$

$$b = \frac{\langle 1,\ln(y)\rangle - a\langle 1,x\rangle}{\langle 1,1\rangle}$$

$$a = \frac{\langle w_1, \ln(y)\rangle - \langle 1,x\rangle b}{\langle x, x\rangle}$$

$$a = \frac{\langle w_1, \ln(y)\rangle - \langle 1, x\rangle b}{\langle x, x\rangle}$$

$$b = \frac{\langle 1, \ln(y)\rangle - \frac{\langle w_1, \ln(y)\rangle - \langle 1, x\rangle b}{\langle x, x\rangle}}{\langle 1, 1\rangle} \quad \Big| \cdot \langle x, x\rangle \langle 1, 1\rangle$$

$$b\langle x, x\rangle\langle 1, 1\rangle = \langle 1, \ln(y)\rangle\langle x, x\rangle - \langle w_1, \ln(y)\rangle + \langle 1, x\rangle b$$

$$b\left(\langle x, x\rangle\langle 1, 1\rangle - \langle 1, x\rangle\right) = \langle 1, \ln(y)\rangle\langle x, x\rangle - \langle w_1, \ln y\rangle$$

$$b = \frac{\langle 1, \ln y\rangle\langle x, x\rangle - \langle w_1, \ln y\rangle}{\langle x, x\rangle\langle 1, 1\rangle - \langle 1, x\rangle}$$

a liczymy analogicznie i dostajemy:

$$a = \frac{\langle 1, 1\rangle\langle x, \ln y\rangle - \langle x, 1\rangle\langle 1, \ln y\rangle}{\langle x, x\rangle\langle 1, 1\rangle - \langle 1, x\rangle^2}$$

7 (done)

16 December, 2023 20:23

L10.7. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Poziom wody w Morzu Północnym zależy głównie od tzw. *pływu* M_2 o okresie ok. 2π i równaniu

$$H(t) = h_0 + a_1 \sin\frac{2\pi t}{12} + a_2 \cos\frac{2\pi t}{12} \qquad (t \text{ mierzone w godzinach}).$$

Zrobiono następujące pomiary:

t	0	2	4	6	8	10	godz.
$H(t)$	1	1.6	1.4	0.6	0.2	0.8	m

Wykorzystaj aproksymację średniokwadratową do wyznaczenia prawdopodobnych wartości stałych h_0, a_1, a_2.

$$f_1 = 1 \quad f_2 = \sin\frac{2\pi t}{12} \quad f_3 = \cos\frac{2\pi t}{12}$$

$$\begin{bmatrix} \langle 1,1\rangle & \langle 1, \sin\frac{2\pi t}{12}\rangle & \langle 1, \cos\frac{2\pi t}{12}\rangle \\ \langle \sin\frac{2\pi t}{12}, 1\rangle & \langle \sin\frac{2\pi t}{12}, \sin\frac{2\pi t}{12}\rangle & \langle \sin\frac{2\pi t}{12}, \cos\frac{2\pi t}{12}\rangle \\ \langle \cos\frac{2\pi t}{12}, 1\rangle & \langle \cos\frac{2\pi t}{12}, \cos\frac{2\pi t}{12}\rangle & \langle \cos\frac{2\pi t}{12}, \cos\frac{2\pi t}{18}\rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle 1, H(t)\rangle \\ \langle \sin\frac{2\pi t}{12}, H(t)\rangle \\ \langle \cos\frac{2\pi t}{12}, H(t)\rangle \end{bmatrix}$$

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$
$\sin x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$\langle 1,1\rangle = 6 \quad \langle 1, H(t)\rangle = 5{,}6 \quad \langle 1, \sin(x)\rangle = 0 \quad \langle 1, \cos(x)\rangle = 0$

$\langle \cos x, \sin x\rangle = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} = 0$

$\langle \sin x, \sin x\rangle = 3 \quad \langle \cos x, \cos x\rangle = 3$

Nasza macierz po podstawieniu danych to

$$\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5{,}6 \\ \sqrt{3} \\ 0{,}8 \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \end{bmatrix}$

$$h_0 = \frac{5{,}6}{6} = \frac{56}{60} = \frac{14}{15} \qquad a_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} \qquad a_2 = \frac{0{,}8}{3} = \frac{4}{15}$$

8

16 December, 2023 20:23

L10.8. $\boxed{\text{2 punkty}}$ Niech dane będą: $x_0 < x_1 < \ldots < x_N$, $y_k \in \mathbb{R}$ $(0 \leq k \leq N)$ oraz wielomian $w_n^*(x) := \sum_{k=0}^{n} A_k^* x^k$, gdzie $n < N$. Podaj **jawną postać** układu równań, który muszą spełniać współczynniki $A_0^*, A_1^*, \ldots, A_n^*$, aby zachodziło

$$||f - w_n^*||_2 = \min_{w_n \in \Pi_n} ||f - w_n||_2,$$

gdzie f jest taką funkcją, że $f(x_k) = y_k$ dla $k = 0, 1, \ldots, N$, natomiast

$$||g||_2 := \sqrt{\sum_{k=0}^{N} (g(x_k))^2}.$$

9

16 December, 2023 20:23

L10.9. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Niech dane będą parami różne liczby $x_0, x_1, \ldots, x_N$. Niech $y_0, y_1, \ldots, y_N \in \mathbb{R}$. Jakim wzorem wyraża się wielomian $w_N^\star \in \Pi_N$, dla którego

$$||f - w_N^\star||_2 = \min_{w_N \in \Pi_N} ||f - w_N||_2$$

(f oraz $||\cdot||_2$ mają znaczenie, jak w zadaniu poprzednim)?