L9

1 December, 2023 20:05

L9

zad.	1	2	3	4	+5	+6	7	8	+9	10	suma
pkt.	1	1	1	1		1		1		1	7
max pkt.	1	1	1	1	2	1	1	1	1	1	11

1. Pokaż, że jeśli w grafie G istnieje marszruta z u do v, to istnieje też scieżka z u do v.
2. Udowodnij następujące twierdzenie:

   Niech G będzie grafem prostym, w którym każdy wierzchołek ma stopień przynajmniej k. Wówczas G zawiera scieżkę o długości k. Jeśli $k \geq 2$, to G zawiera cykl o długości przynajmniej $k+1$.
3. Niech t_i oznacza liczbę wierzchołków stopnia i w drzewie. Wyprowadź dokładny wzór na t_1, liczbę liści w dowolnym drzewie. Dlaczego ta liczba nie zależy od t_2?
4. Pokaż, że graf G jest drzewem wtedy i tylko wtedy gdy dla dowolnej pary wiezchołków $u, v \in G$ w G istnieje dokładnie jedna ścieżka je łącząca.
5. (+) (2 punkty) Niech $d(u, v)$ oznacza odległość wierzchołków u i v, czyli długość najkrótszej ścieżki łączącej u i v. Dla każdego wierzchołka v grafu G definiujemy $r(v) = \max\{d(v, u) : u \in V(G)\}$. Wierzchołek w, dla którego $r(w) = \min\{r(v) : v \in V(G)\}$ nazywa się *wierzchołkiem centralnym* grafu G, a liczba $r(G) = r(w)$ – *promieniem* grafu G.
   (a) (Jordan) Wykaż, że zbiór wierzchołków centralnych drzewa składa się z jednego wierzchołka albo z pary wierzchołków sąsiednich.
   (b) Podaj algorytm znajdowania wierzchołków centralnych w drzewie, działający w czasie $O(m+n)$.
6. (+) Niech $d = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$ będzie ciągiem liczb naturalnych większych od zera. Wykaż, że d jest ciągiem stopni wierzchołków pewnego drzewa o n wierzchołkach wtedy i tylko wtedy, gdy $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2(n-1)$. *Uwaga:* w zadaniu tym trzeba pokazać implikację w obie strony.
7. Niech Q_k oznacza graf k-wymiarowej kostki, tzn. zbiór wierzchołków tego grafu tworzą wszystkie k-elementowe ciągi zer i jedynek i dwa wierzchołki są sąsiednie wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiadające im ciągi różnią się dokładnie jedną współrzędną. Wykaż, że jest to graf dwudzielny.
8. Przedstaw algorytm, służący do sprawdzania, czy dany graf jest dwudzielny, korzystający z przeglądania grafu metodą w głąb. Złożoność Twojego algorytmu powinna być $O(m+n)$.
9. (+) Pokaż, że jeśli każdy wierzchołek w grafie $G = (V, E)$ ma stopień przynajmniej k, to G zawiera każde drzewo k-krawędziowe.
10. Pokaż, że graf $G = (V, E)$, w którym każdy wierzchołek ma stopień 3 zawiera cykl o parzystej długości.

1 (done)

1 December, 2023 20:06

1. Pokaż, że jeśli w grafie G istnieje marszruta z u do v, to istnieje też scieżka z u do v.

Marszrutą o długości k jest ciąg $(v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k)$ taki, że $\forall_{0 \le i < k} \{v_i, v_{i+1}\} \in E$.

Droga to marszruta, w której żadna krawędź nie występuje dwukrotnie, tzn. $\forall 1 \le i < j \le k-1$ krawędzie $\{v_i, v_{i+1}\}, \{v_j, v_{j+1}\}$ są różne.

Ścieżka to marszruta, w której żaden wierzchołek nie występuje dwukrotnie.

Zał. $u \neq v$ bo powtórzyłby się wierzchołek a to wtedy nie ścieżka.

Intuicyjnie bardzo proste - jeśli istnieje marszruta w którejś jakieś wierzchołki się powtarzają, to można „wyciąć" ten powtórzony fragment. Wycięte powtórzenia $\Rightarrow$ jest to ścieżka

Przykładowo z marszruty

$v, v_1, \ldots, \underbrace{v_k, v_m, v_{m+1}, \ldots\ldots,}_{\text{„wycinany" ten fragment}} v_k, \ldots, u$

Zakładając że żadne wierzchołki się już nie powtarzają otrzymaliśmy ścieżkę.

Formalnie:

Niech $M = v, v_1, v_2, \ldots, u$ będzie najkrótszą marszrutą między v i u

(*) Jako że jest to marszruta, istnieją takie i, j w M że $v_i = v_j$ $0 \le i < j \le len(M)$

Możemy „wyciąć" $\underline{v_{i+1}, v_{i+2}, \ldots, v_j}$

Jeśli to nadal marszruta to znów *

w.p.p. mamy ścieżkę u-v co chcieliśmy osiągnąć

2. Udowodnij następujące twierdzenie:

a) Niech G będzie grafem prostym, w którym każdy wierzchołek ma stopień przynajmniej k. Wówczas G zawiera ścieżkę o długości k. b) Jeśli $k \geq 2$, to G zawiera cykl o długości przynajmniej $k+1$.

bez problemu może być tylko v_0 jeśli to najdłuższa ścieżka

a) Niech $P = (v_0, v_1, \ldots, v_{k-1}, v_k)$ będzie najdłuższą ścieżką w G

długość $P = k$

* $\deg(v_k) \geq k$ bo minimalny stopień wierzchołka to k

sprzeczność

Wszyscy sąsiedzi v_k muszą być na ścieżce – w.p.p. moglibyśmy przedłużyć najdłuższą ścieżkę dodając sąsiada który nie jest na koniec

b) Bierzemy jednego z sąsiadów z powyższej ścieżki, np. v_i

i ścieżka zmienia się w

$v_0, v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_k, v_i$

co można też zapisać jako:

$v_i, v_{i+1}, \ldots, v_k, v_i, v_{i-1}, \ldots, v_1, v_0$

i mamy cykl długości $k+1$ ✓

3 (done)

1 December, 2023 20:06

3. Niech t_i oznacza liczbę wierzchołków stopnia i w drzewie. Wyprowadź dokładny wzór na t_1, liczbę liści w dowolnym drzewie. Dlaczego ta liczba nie zależy od t_2?

Mamy wyprowadzić wzór na liczbę wierzchołków stopnia 1 (z jedną krawędzią incydentną) i pokazać że nie zależy ona od wierzchołków stopnia 2.

Pomysł - przyrównajmy dwa wzory na ilość krawędzi i rozpiszmy sumę

I) Z lematu o uściskach dłoni

$$\sum_{i=1}^{n} \deg(v_i) = 2m = \sum_{i=1}^{n} (i \cdot t_i) \Rightarrow m = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(i \cdot t_i)$$

II) Z wykładu: $m = n - 1 = \sum_{i=1}^{n} (t_i) - 1$

Przyrównajmy

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} i \cdot t_i = \sum_{i=1}^{n} t_i - 1 \quad // \text{na jedną stronę}$$

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} i \cdot t_i - \sum_{i=1}^{n} t_i + 1 = 0 \quad | \cdot 2$$

$$\sum_{i=1}^{n} i \cdot t_i - \sum_{i=1}^{n} 2t_i + 2 = 0 \quad // \text{w jedną sumę}$$

$$\sum_{i=1}^{n} (i-2)t_i + 2 = 0 \quad // \text{wyjmujemy dwa pierwsze wyrazy}$$

$$(1-2)t_1 + (2-2)t_2 + \sum_{i=3}^{n} (i-2)t_i + 2 = 0 \quad // t_2 \text{ się zeruje}$$

$$-t_1 + \sum_{i=3}^{n} (i-2)t_i + 2 = 0 \quad // \text{wyznaczamy } t_1$$

$$\boxed{t_1 = \sum_{i=3}^{n} (i-2)t_i + 2}$$

Wyznaczyliśmy wzór na t_1, jak widać nie zależy on od t_2.

Kilka wzorów z wikipedii i jeden z wykładu

Graf prosty - graf bez pętli własnych i krawędzi wielokrotnych. Często określenie *graf* (bez przymiotników) oznacza graf prosty.

Dany jest graf prosty G o n wierzchołkach $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ i m krawędziach. Na mocy **lematu o uściskach dłoni** spełniona jest następująca własność:

$$\sum_{i=1}^{n} \deg(v_i) = 2m. = \sum_{i=1}^{n} (i \cdot t_i)$$ (ilość krawędzi · ilość wierzchołków tego stopnia)

Powyższą własność nietrudno jest zrozumieć intuicyjnie: każda krawędź łączy dwa wierzchołki, a zatem dodając do siebie stopnie sąsiadujących wierzchołków (czyli liczby krawędzi wychodzących z nich), liczymy każdą z krawędzi dwukrotnie, co potwierdza prawdziwość powyższej własności. Wynika z tego również fakt, że w dowolnym grafie liczba wierzchołków o nieparzystych stopniach jest parzysta.

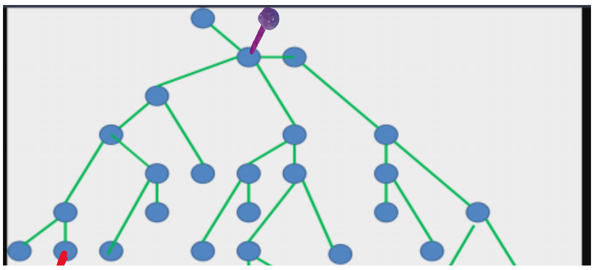
The **degree sum formula** states that, given a graph $G = (V, E)$,

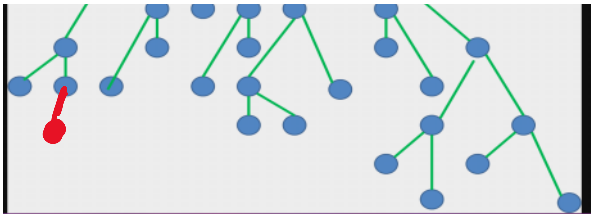
$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|.$$

Charakteryzacja drzewa

Niech $G = (V, E)$ będzie n-wierzchołkowym grafem nieskierowanym ($n \geq 1$). Wówczas następujące stwierdzenia są równoważne:

1. G jest spójny i acykliczny (G jest drzewem),
2. G jest spójny i ma $n-1$ krawędzi.
3. G jest acykliczny i ma $n-1$ krawedzi.
4. $\forall_{u,v \in V}$ G zawiera dokładnie jedną $u-v$-ścieżkę.





tworzymy t2 dolaczajac do t1. Nie zmienia się ilość liści bo nie tworzy się nowy liść tylko stary się przedłuża.

4 (done)

1 December, 2023 20:06

4. Pokaż, że graf G jest drzewem wtedy i tylko wtedy gdy dla dowolnej pary wiezchołków $u, v \in G$ w G istnieje dokładnie jedna ścieżka je łącząca.

Musimy udowodnić implikację w obydwie strony

G to drzewo $\Leftrightarrow$ Jest dokładnie jedna ścieżka między w. u i v w G
dowolnymi

a) L $\Rightarrow$ P

Zakładamy że G jest drzewem, więc prawa strona implikacji wynika z definicji drzewa - nie ma żadnych cykli, więc może istnieć tylko jedna ścieżka

b) P $\Rightarrow$ L

Z założenia wynika że graf jest spójny.
Dodatkowo:

I) Jeśli istnieje więcej niż jedna ścieżka między u i v to można połączyć je w cykl $\Rightarrow$ nie drzewo

II) Jeśli nie istnieje chociaż jedna ścieżka między u i v to graf nie jest spójny - sprzeczność z założeniem

Oprócz tego bardzo łatwo pokazać równoważne definicje

Definicja i przykłady

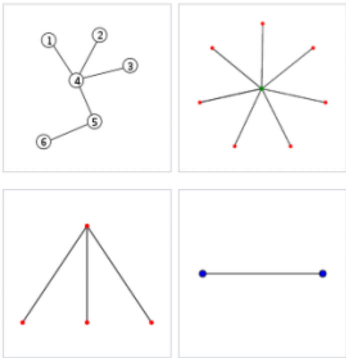
Drzewo – graf nieskierowany, który jest acykliczny[1] i spójny[2][1], czyli taki graf, że z każdego wierzchołka drzewa można dotrzeć do każdego innego wierzchołka (spójność) i tylko jednym sposobem (acykliczność, brak możliwości chodzenia „w kółko")[3].

Równoważne definicje [edytuj | edytuj kod]

Graf prosty **G** jest **drzewem** jedynie, jeśli spełnia jeden z warunków[3]:

- dowolne dwa wierzchołki łączy dokładnie jedna ścieżka prosta
- **G** jest acykliczny i dodanie krawędzi łączącej dowolne dwa wierzchołki utworzy cykl
- **G** jest spójny i usunięcie dowolnej krawędzi spowoduje, że **G** przestanie być spójny

Przykłady drzew [edytuj | edytuj kod]



+5 (2pkt)

1 December, 2023 20:06

łączącą.

5. (+) (2 punkty) Niech $d(u, v)$ oznacza odległość wierzchołków u i v, czyli długość najkrótszej ścieżki łączącej u i v. Dla każdego wierzchołka v grafu G definiujemy $r(v) = \max\{d(v, u) : u \in V(G)\}$. Wierzchołek w, dla którego $r(w) = \min\{r(v) : v \in V(G)\}$ nazywa się *wierzchołkiem centralnym* grafu G, a liczba $r(G) = r(w)$ – *promieniem* grafu G.

   (a) (Jordan) Wykaż, że zbiór wierzchołków centralnych drzewa składa się z jednego wierzchołka albo z pary wierzchołków sąsiednich.

   (b) Podaj algorytm znajdowania wierzchołków centralnych w drzewie, działający w czasie $O(m + n)$.

+6 (done)

1 December, 2023 20:06

6. (+) Niech $d = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$ będzie ciągiem liczb naturalnych większych od zera. Wykaż, że d jest ciągiem stopni wierzchołków pewnego drzewa o n wierzchołkach wtedy i tylko wtedy, gdy $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2(n-1)$.
Uwaga: w zadaniu tym trzeba pokazać implikację w obie strony.

d jest ciągiem stopni $\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} d_i = 2(n-1)$

W dwie strony

I) L=>P Załóżmy że d jest ciągiem stopni drzewa o n wierzchołkach.

Z lematu o uściskach dłoni wiemy że

$$\deg(V_1) + \deg(V_2) + \ldots + \deg(V_n) = \sum_{i=1}^{n} \deg(V_i) = 2m$$

Wiemy też że drzewo ma $n-1$ krawędzi.

$\sum_{i=1}^{n} \deg(V_i) = 2m = 2(n-1)$ c.n.w.

II) P=>L Załóżmy, że $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2(n-1)$. Udowodnijmy że d jest ciągiem stopni

Udowodnijmy to indukcyjnie

a) Podstawa

$n=1$ $\sum_{i=1}^{1} d_i = d_1 = 2(1-1) = 0$ (Jeden wierzchołek, zero krawędzi więc się zgadza)

Tu jednak indukcja od n = 2

b) Założenie indukcyjne

Załóżmy, że dla dowolnego n dla którego zachodzi $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2(n-1)$ istnieją takie $d_1, d_2, \ldots, d_n$ że są ciągiem stopni wierzchołków drzewa

c) Musimy pokazać że jeśli $\sum_{i=1}^{n+1} d_i' = 2((n+1)-1)$ to $d_1', d_2', \ldots, d_n'$ jest ciągiem wierzchołków drzewa

M.I to zrobimy ?

Jak to zrobimy?

Dołóżmy jeden wierzchołek i dołączmy go do powyższego drzewa jedną krawędzią do wierzchołka d_j. Mamy wtedy ciąg $d_1, d_2, \dots, d_j, \dots d_n, d_{n+1}$

Zauważmy że dodany wierzchołek będzie stopnia 1, a wierzchołek d_j' to d_j zwiększone o 1

$$d_1', d_2', \dots, d_j', \dots, d_n', d_{n+1}'$$

$d_j' = d_j + 1 \quad d_{n+1} = 1$

Rozpiszmy ciąg wierzchołków dla $n+1$

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} d_i + d_j' + d_{n+1} = \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} d_i + d_j + 1 + 1 = \sum_{i=1}^{n} d_i + 2 = 2(n-1) + 2 = 2n = 2((n+1)-1)$$

c.n.w.

7

1 December, 2023 20:06

7. Niech Q_k oznacza graf k-wymiarowej kostki, tzn. zbiór wierzchołków tego grafu tworzą wszystkie k-elementowe ciągi zer i jedynek i dwa wierzchołki są sąsiednie wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiadające im ciągi różnią się dokładnie jedną współrzędną. Wykaż, że jest to graf dwudzielny.

8 (done)

1 December, 2023 20:06

8. Przedstaw algorytm, służący do sprawdzania, czy dany graf jest dwudzielny, korzystający z przeglądania grafu metodą w głąb. Złożoność Twojego algorytmu powinna być $O(m+n)$.

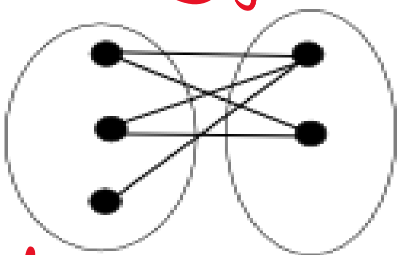
Najpierw definicja grafu dwudzielnego

Graf dwudzielny to graf którego wierzchołki można podzielić na dwa rozłączne zbiory, tak by żadna krawędź nie łączyła dwóch wierzchołków z tej samej grupy

lub równoważnie

Graf który nie zawiera cykli nieparzystej długości

Przykładowy graf dwudzielny



Idea: Pomalujmy wierzchołki na dwa kolory podczas przemierzenia grafu DFSem. Jeśli wierzchołek jest pomalowany na zły kolor, to nie będzie dwudzielny.

```javascript
/**
 * Funkcja isBipartite sprawdza czy graf jest dwudzielny
 * @param {Number[][]} graph - Graf w postaci tablicy list sąsiedztwa
 * @param {number} v - Wierzchołek startowy - może być dowolny
 * @param {boolean[]} visited - Tablica odwiedzonych wierzchołków
 * @param {number[]} color - Tablica kolorów wierzchołków
 * @returns {boolean} - Zwraca true jeśli graf jest dwudzielny, false w przeciwnym wypadku
 */
const isBipartite = (graph, v, visited, color) => {
    visited[v] = true; // Oznaczamy wierzchołek jako odwiedzony
    // Przeglądamy wszystkie wierzchołki sąsiadujące z wierzchołkiem v
    for (const u of graph[v]) {
        // Jeśli wierzchołek nie był odwiedzony to go odwiedzamy i nadajemy mu przeciwny kolor
        // po czym wywołujemy rekurencyjnie funkcję isBipartite dla wierzchołka u (DFS)
        if (!visited[u]) {
            color[u] = !color[v];
            if (!isBipartite(graph, u, visited, color)) {
                return false;
            }
        // Jeśli wierzchołek był odwiedzony to sprawdzamy czy ma przeciwny kolor
        // Jeśli nie ma to zwracamy false
        } else if (color[u] === color[v]) {
            return false;
        }
    }
    return true;
}
```

+9

1 December, 2023 20:06

9. (+) Pokaż, że jeśli każdy wierzchołek w grafie $G = (V, E)$ ma stopień przynajmniej k, to G zawiera każde drzewo k-krawędziowe.

10 (done)

1 December, 2023 20:06

10. Pokaż, że graf $G = (V, E)$, w którym każdy wierzchołek ma stopień 3 zawiera cykl o parzystej długości.

Podobnie jak w poprzednich zadaniach bierzemy najdłuższą ścieżkę w grafie. Nazwijmy ją P.

$P = v_0, v_1, \ldots, v_k$

Weźmy v_0, którego sąsiadami są v_1, v_i, v_j. W zadaniu 2a udowodniliśmy, że muszą one być na ścieżce bo inaczej P nie byłaby najdłuższą ścieżką

*) Jeśli i jest nieparzyste to cykl (analogicznie dla j)

$v_0, v_1, \ldots, v_i, v_0$ ma $i+1$ krawędzi - cykl parzysty

**) Jeśli i, j są parzyste

$v_0, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_j, v_0$ ma $j-i+2$ krawędzie - cykl parzysty