Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka

Lista zadań nr 6. 8. kwietnia i później

Zadania

1. Starannie i bez korzystania z notatek napisać wielkie i małe litery: deltę, sigmę w trzech wersjach (wielką, małą, małą na końcu wyrazu), oraz gęstości rozkładów $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$, $\mathrm{Gamma}(b, p)$.
2. Zakładamy, że $X_1, X_2, \ldots, X_n$ są niezależne i mają ten sam rozkład, $f(x) > 0$ dla $x \in [0, 1]$. Obliczamy gęstość zmiennej $Y_1 = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$. Podać granice całkowania (układy nierówności) dla $Y_k = X_k,\ \ k = 2, \ldots, n$.
3. Dane są ciągłe, niezależne zmienne losowe X, Y. Udowodnić, że $\mathrm{E}(X \cdot Y) = \mathrm{E}(X) \cdot \mathrm{E}(Y)$.
4. Niech $f(x), F(x)$ będą odpowiednio gęstością i dystrybuantą zmiennej losowej określonej na $\mathbb{R}$. Wykazać, że $\int_{-\infty}^{t} f(x)\, F(x)\, dx = \frac{1}{2}[F(t)]^2$.
5. Zakładamy, że zmienne $X_1, X_2, \ldots, X_n,\ Y_1, Y_2, \ldots, Y_k$ są niezależne i podlegają rozkładowi $N(0, 1)$. W jaki sposób można utworzyć poniższe zmienne:
   (a) $U \sim \chi^2(k)$,
   (b) $T \sim \mathrm{t}(n)$,
6. Zmienna losowa X ma MGF o postaci $M_X(t)$. Zmienna losowa Y jest pewną funkcją zmiennej X. Co można powiedzieć o Y (założenia i od jakich **zmiennych** zależy Y) jeżeli:
   (a) $M_Y(t) = M_X(3t) \cdot M_X(4t)$,
   (b) $M_Y(t) = \mathrm{e}^{3t} M_X(2t)$,
   (c) $M_Y(t) = 4M_X(t)$.

[Z. 7–9] Zakładamy, że niezależne zmienne losowe X_k podlegają rozkładowi $\mathrm{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$.

$$\sum_{k=1}^{n} (X_k - \mu)^2 = \sum_{k=1}^{n} \left(X_k - \bar{\mathbf{X}}\right)^2 + n\,(\bar{\mathbf{X}} - \mu)^2. \tag{1}$$

7. **(2p.)** Znaleźć (wraz z uzasadnieniem) rozkład zmiennej $M = \frac{n}{\sigma^2} \cdot (\bar{\mathbf{X}} - \mu)^2$
8. Załóżmy, że zmienne $\bar{\mathbf{X}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k$ oraz $S^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(X_k - \bar{\mathbf{X}}\right)^2$ są niezależne. Korzystając z równania (1) udowodnić, że $\frac{nS^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1) \equiv \mathrm{Gamma}\left(\frac{1}{2}, \frac{n-1}{2}\right)$
9. Jaki rozkład ma zmienna $U = \frac{\bar{X} - \mu}{S}\sqrt{n-1}$.
10. Ciągłe zmienne losowe X, Y są niezależne. Funkcje $X = X(U),\ Y = Y(W)$ są odwracalne. Wykazać, że zmienne U, W są niezależne.

Witold Karczewski