Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka

6. i 13. marca

Definicja 1. *Funkcję $f(x,y)$ nazywamy funkcją gęstości (gęstością) 2-wymiarowej zmiennej losowej (X,Y) iff*

1. $f(x,y) \geqslant 0$, *dla* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,
2. $\displaystyle\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dydx = 1$.

W wypadku dyskretnym funkcję $p(i,j)$ nazywamy gęstością (prawdopodobieństwem) iff

1. $P(X = x_i, Y = y_j) = p_{ij} \geqslant 0$, *dla* $(i,j) \in \mathbb{N}^2$,
2. $\displaystyle\sum_{i\in\mathbb{N}}\sum_{j\in\mathbb{N}} p_{ij} = 1$.

Definicja 2. *Gęstościami brzegowymi zmiennej losowej (X,Y) o gęstości $f(x,y)$ nazywamy funkcje* $f_1(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x,y)dy$ *oraz* $f_2(y) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x,y)dx$.
W wypadku dyskretnym używamy oznaczeń $p_{i\bullet} = \displaystyle\sum_{j\in\mathbb{N}} p_{ij}$ *oraz* $p_{\bullet j} = \displaystyle\sum_{i\in\mathbb{N}} p_{ij}$.

Definicja 3.

- *Momentem zwykłym rzędu k (k-tym momentem zwykłym) zmiennej losowej X nazywamy wartość* $m_k = E(X^k)$.
- *Momentem centralnym rzędu k (k-tym momentem centralnym) nazywamy wartość* $\mu_k = E\left[(X - EX)^k\right]$.
- *Dla 2-wymiarowej zmiennej losowej (X,Y) momentem mieszanym rzędu (k,l) nazywamy wartości* $m_{kl} = E\left(X^kY^l\right)$ *oraz* $\mu_{kl} = E\left[(X - EX)^k \cdot (Y - EY)^l\right]$.

Uwagi.

Rozkład ciągły	Rozkład dyskretny
$m_k = \int_{\mathbb{R}} x^k f(x)dx$	$m_k = \sum_{i\in\mathbb{N}} x_i^k p_i$
$\mu_k = \int_{\mathbb{R}} (x - \mathrm{E}X)^k f(x)dx$	$\mu_k = \sum_{i\in\mathbb{N}} (x_i - \mathrm{E}X)^k p_i$
$m_{kl} = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} x^k y^l f(x,y)dydx$	$m_{kl} = \sum_{i,j\in\mathbb{N}} x_i^k y_j^l p_{ij}$

Wartość oczekiwana $\mathrm{E}X$ to m_1, wariancja $\mathrm{V}X$ to μ_2, moment mieszany μ_{11} to kowariancja zmiennych X, Y, oznaczenie $\mathrm{Cov}(X,Y)$. Symbole $\mathrm{E}X$, $\mathrm{E}(X)$ oznaczają to samo (wartość oczekiwaną). Podobnie symbole $\mathrm{V}X$, $\mathrm{V}(X)$ oznaczają wariancję. Dla odróżnienia: $\mathrm{E}(X^2)$ oznacza wartość oczekiwaną zmiennej X^2, natomiast $\mathrm{E}^2(X)$ lub $[\mathrm{E}X]^2$ – kwadrat wartości oczekiwanej zmiennej X.

Definicja 4. *Dana jest 2-wymiarowa zmienna losowa (X,Y). Zmienne (1-wymiarowe) X, Y nazywamy niezależnymi iff*

- $\forall x,y \in \mathbb{R}\ \ f(x,y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$ (*vide* def. 2), lub
- $\forall i,j \in \mathbb{N}\ \ p_{ij} = p_{i\bullet} \cdot p_{\bullet j}$.

Przykład:

(i) Rozważamy funkcję $f(x,y) = \dfrac{3xy}{16}$ określoną na obszarze ograniczonym prostymi $y = 0$, $x = 2$ oraz krzywą $y = x^2$. Bezpośrednim rachunkiem sprawdzamy, że

$$\int_0^2 \int_0^{x^2} x \cdot y \, dy \, dx = \frac{16}{3}, \tag{1}$$

czyli nieujemna na wybranym obszarze funkcja $f(x,y)$ może być uważana za gęstość. Równanie (1) zapiszmy jako

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x,y) \, dy \, dx = 1,$$

gdzie domyślnie przyjmujemy, że $f(x,y) = 0$ wszędzie poza zdefiniowanym obszarem.

(ii) 2-wymiarową dystrybuantą jest $F(s,t) \equiv F_{XY}(x,y) = \displaystyle\int_{-\infty}^{s} \int_{-\infty}^{t} f(x,y) \, dy \, dx.$

(iii) Wyznaczmy gęstości brzegowe:

$$\begin{aligned} f_1(x) \equiv f_X(x) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{3xy}{16} dy = \int_0^{x^2} \frac{3xy}{16} dy = \frac{3x^5}{32}, \quad x \in [0,2]\,, \\ f_2(y) \equiv f_Y(y) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{3xy}{16} dx = \int_{\sqrt{y}}^{2} \frac{3xy}{16} dx = \frac{3\,(4-y)\,y}{32}, \quad y \in [0,4]\,. \end{aligned}$$

Zauważmy (w pierwszym równaniu), że dla ustalonego x jest $y \in [0, x^2]$. Podobnie, dla ustalonego y jest $x \in [\sqrt{y}, 2]$. Oprócz tego $f_1(x)$, $f_2(x)$ mogą być uważane za gęstości, bo są nieujemne (w zdefiniowanym obszarze) oraz

$$\int_0^2 f_1(x) \, dx = \int_0^2 \frac{3x^5}{32} dx = 1, \quad \int_0^4 f_2(y) \, dy = \int_0^4 \frac{3\,(4-y)\,y}{32} dx = 1.$$

Kolejne całkowania dają wyniki: $\mathrm{E}X = \displaystyle\int_0^2 x \cdot f_1(x) \, dx = \frac{12}{7}$ oraz $\mathrm{E}Y = \displaystyle\int_0^4 y \cdot f_2(y) \, dy = 2$ (ale to taki dodatek).

(iv) Sprawdźmy, czy zmienne X, Y są niezależne. Weźmy pod rozwagę punkt $(x,y) = (1, 1.5)$. Jest teraz

$$0 = f(1, 1.5) \neq f_1(1) \cdot f_2(1.5) = \frac{3}{32} \cdot \frac{45}{128}.$$

To oznacza, że zmienne X, Y nie są niezależne (krócej: są zależne).

Przykład:

Przykład kolejny pokazuje, że dla zmiennych dyskretnych jest o wiele prościej. Również **z tego powodu** (są też inne powody) będziemy tym zmiennym poświęcać mniej uwagi.

(i) Definiujemy zmienną losową (X,Y) następująco:

$$(X,Y) = \begin{array}{c|ccc|} & y_1 & y_2 & y_3 \\ \hline x_1 & p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ x_2 & p_{21} & p_{12} & p_{23} \\ x_3 & p_{31} & p_{32} & p_{33} \\ x_4 & p_{41} & p_{42} & p_{43} \end{array}$$

W powyższym wzorze $p_{ij} \geqslant 0$ oraz $\sum_{i,j} p_{ij} = 1$, czyli na przykład:

$$(X,Y) = \begin{array}{r|ccc|} X/Y & 2 & 3 & 5 \\ \hline -2 & 0.10 & 0.05 & 0.07 \\ 0 & 0.05 & 0.03 & 0.08 \\ 1 & 0.01 & 0.07 & 0.15 \\ \sqrt{2} & 0.38 & 0.00 & 0.01 \end{array}$$

(ii) Dystrybuanta $F(s,t) = \sum_{x_i \leqslant s,\, y_j \leqslant t} p_{ij}$.

(iii) Gęstości brzegowe:

$$(X,Y) = \begin{array}{r|ccc|c} X/Y & 2 & 3 & 5 & p_{1\bullet} \\ \hline -2 & 0.10 & 0.05 & 0.07 & 0.22 \\ 0 & 0.05 & 0.03 & 0.08 & 0.16 \\ 1 & 0.01 & 0.07 & 0.15 & 0.23 \\ \sqrt{2} & 0.38 & 0.00 & 0.01 & 0.39 \\ \hline p_{\bullet j} & 0.54 & 0.15 & 0.31 & 1.00 \end{array}$$

Zmienne X, Y mają zatem rozkłady brzegowe:

$$X = \begin{array}{c|cccc} x_i & -2 & 0 & 1 & \sqrt{2} \\ \hline p_{i\bullet} & 0.22 & 0.16 & 0.23 & 0.39 \end{array}, \qquad Y = \begin{array}{c|ccc} y_j & 2 & 3 & 5 \\ \hline p_{\bullet j} & 0.54 & 0.15 & 0.31 \end{array}$$

(iv) Niezależność zmiennych X, Y. Zmienne są zależne, ponieważ

$$0.01 = p_{31} = \mathrm{P}(X = 1, Y = 2) \neq \mathrm{P}(X = 1) \cdot \mathrm{P}(Y = 2) = p_{3\bullet}\, p_{\bullet 1} = 0.23 \cdot 0.54.$$

Witold Karczewski