Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka

Lista zadań nr 3. 18. marca i później

Zadania

1. (a) Zmienna losowa X ma gęstość $f(x) = 2x$ dla $x \in [0, 1]$. Obliczyć gęstość zmiennej $Y = X^2$.
   (b) Zmienna losowa X ma gęstość $f(x) = 1.5 \cdot \sqrt{x}$ dla $x \in [0, 1]$. Wyznaczyć gęstość zmiennej $Y = X^2$.
   (c) Niech $X \sim U[-2, 2]$. Znaleźć rozkład (gęstość) zmiennej $Y = |X|$.
   (d) Dla $X \sim U[-1, 1]$ wyznaczyć rozkłady zmiennych $Y = X^3$, $Z = X^2$.
2. Czy prawdą jest, że 13. dzień miesiąca powiązany jest z piątkiem? (1 stycznia 1601 – 31 grudnia 2000)
   Założenia: rok numer n jest jest przestępny jeżeli $n \equiv_4 0$, pod warunkiem, że $n \not\equiv_{100} 0$; dodatkowo – jeżeli $n \equiv_{400} 0$ (czyli rok 2000), to wcześniejszy warunek jest nieważny. Ile razy w 400-letnim cyklu 13-tym dniem miesiąca był poniedziałek, wtorek, ..., niedziela?

   Mówimy, że zmienne X, Y są niezależne, wtedy gdy – w wypadku dyskretnym – spełniony jest warunek $P(X = x_i, Y = y_k) = P(X = x_i) \cdot P(Y = y_k)$. W wypadku ciągłym warunek jest następujący: $\forall x, y \in \mathbf{R} \;\; f(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$.

3. Zmienna X ma rozkład $B(n_1, p)$ a zmienna Y rozkład $B(n_2, p)$. Zmienne są niezależne. Wykazać, że zmienna $Z = X + Y$ ma rozkład $B(n_1 + n_2, p)$.

4. Niezależne zmienne losowe X, Y mają rozkład Poissona z parametrami λ_1 i λ_2. Wykazać, że zmienna $Z = X + Y$ ma rozkład Poissona z parametrem $\lambda_1 + \lambda_2$.

5. $\Omega = (0, 5)$. $\mathcal{F}$ (σ-ciało zdarzeń) jest takie, że $(1, 3) \in \mathcal{F}, (2, 4) \in \mathcal{F}$. Wymienić (wyznaczyć) wszystkie elementy rodziny $\mathcal{F}$.

6. $\Omega, \mathcal{F}$ - jak w zadaniu 5. Podać przykład funkcji $X : \Omega \to \mathbf{R}$, która nie jest zmienną losową.

7. Zmienna losowa (X, Y) ma gęstość postaci $f(x, y) = 15\, x^2 y$ na obszarze ograniczonym prostymi $y = 0$, $x = 0$, $y = 2 - 2x$. Wyznaczyć gęstość brzegową $f_1(x)$ oraz wartość oczekiwaną EX.

8. Dwuwymiarowa gęstość zmiennej (X, Y) to $f(x, y) = 6xy$, dla $0 < x < 2$, $0 < y < 1 - \frac{1}{2}x$. Znaleźć gęstości brzegowe $f_1(x), f_2(y)$ zmiennych X, Y.

9. Czytelnie i starannie - bez korzystania z notatek - napisać wielkie i małe greckie litery: alfę α, betę β, (d)zetę ζ, etę η, lambdę λ, chi χ, ksi ξ, fi ϕ, rho ρ, sigmę σ.

10. Niech X będzie zmienną o rozkładzie geometrycznym ($X \sim \mathrm{Geom}(p)$). Udowodnić, że $\mathrm{E}(X) = \dfrac{1}{p}$, $\mathrm{V}(X) = \dfrac{1-p}{p^2}$.

11. Na obszarze $[0, 2] \times [0, 1]$ określona jest zmienna losowa o gęstości $f(x, y = x\, y$. Czy zmienne brzegowe X, Y są niezależne?

12. Na obszarze ograniczonym punktami $(0, 0), (0, 1), (1, 0)$ określona jest zmienna losowa o gęstości $f(x, y = 24\, xy$. Czy zmienne brzegowe X, Y są niezależne?

Witold Karczewski