Anihilatory

Jak rozwiązać każde zadanie z anihilatorów

Równanie ogólne

$$(E-a)^d \quad anihiluje \quad (\sum_{i=0}^{d-1} a_i x^i) a^n$$

Rozwiązywanie zadania

Zadania tego typu są na prawie każdym egzaminie z Dyskretnej. Jak to rozwiązać? Okazuje się że jest to całkiem proste - zobaczmy schemat na przykładzie (rozpisane zbyt dokładnie, podkreślając częste misconceptions):

Część rekurencyjna równania

Znajdź postać ogólną następującego równania korzystając z anihilatorów:

$$a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n - 1 + \frac{n}{(-3)^n}$$

Przerzucamy wyrazy rekurencyjne na lewo, całą resztę na prawo:

$$a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = -1 + \frac{n}{(-3)^n}$$

Przekształcamy lewą stronę korzystając z anihilatorów. (Przekształcamy to słowo klucz, nie jest to obustronne wymnożenie, zapisanie tych anihilatorów nie wpływa na nic innego, w szczególności jeśli dalej pojawi się taki sam dwumian dla prawej strony to na siebie nazwajem nie wpływają (zachowujemy obydwa, mamy go do kwadratu))

$$(E^2 - 5E + 6) < a_n >= -1 + \frac{n}{(-3)^n}$$

Od razu rozbijamy na iloczyn dwumianów

$$(E-2)(E-3) < a_n >= -1 + \frac{n}{(-3)^n}$$

Część "wolna" równania

Teraz zajmijmy się jego prawą stroną. Zawsze chcemy rozbić prawą stronę na sumę iloczynów które mogą być zanihilowane przez równanie ogólne (nie musimy zapisywać jawnie każdego elementu ale wiemy, że tam jest i pasuje do wzoru):

$$a \cdot \sum_{i=0}^{k} b_i n^i \cdot c^n$$

a to jakaś stała, suma to jakiś wielomian z potęgami n (np. jakieś $an^2 + bn + c$), a c to jakaś stała podniesiona do potęgi n. Zawsze możemy otrzymać taką postać. (Symbol Newtona rozbijamy, dziwne ułamki przekształcamy).

W naszym przypadku

$$-1 + \frac{n}{(-3)^n}$$

zapiszemy jako

$$-1 + n \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

Mamy dwa składniki. W pierwszym największa potęga "liniowego" n to 0, i jest to mnożone przez 1^n, natomiast w drugim odpowiednio 1 i $-1/3$ do n.

Korzystamy ze wzoru ogólnego:

$$(E-a)^d \quad anihiluje \quad (\sum_{i=0}^{d-1} a_i x^i) a^n$$

Pierwsze równanie to tylko stała * 1^n. Jest anihilowane przez $(E-1)$. Drugie wyrażenie jest anihilowane przez $(E+1/3)^2$.

Całość

Z obu stron mamy łącznie 4 dwumiany:

$$\left(E + \frac{1}{3}\right)^2 (E-1)(E-2)(E-3)$$

Korzystamy ze wzoru ogólnego w drugą stronę:

$$\left(E + \frac{1}{3}\right)^2 = (\alpha n + \beta) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^n, \quad (E-2) = \gamma \cdot 2^n, \quad (E-1) = \delta \cdot 1^n, \quad (E-3) = \zeta \cdot 3^n$$

A więc postać ogólna tekiego równania to:

$$(\alpha n + \beta) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^n + \gamma \cdot 2^n + \zeta \cdot 3^n + \delta$$