

19 zad.	1	1	3	4	5	6	7	8	9	10	some
plt.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

morf.	1	1	1	1	2	1	1	1	1	1	1
-------	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

- ✓ 1. Pokaż, że jeśli w grafie  $G$  istnieje marszruta z  $u$  do  $v$ , to istnieje też ścieżka z  $u$  do  $v$ .
- ✓ 2. Udowodnij następujące twierdzenie:

Niech  $G$  będzie grafem prostym, w którym każdy wierzchołek ma stopień przynajmniej  $k$ . Wówczas  $G$  zawiera ścieżkę o długości  $k$ . Jeśli  $k \geq 2$ , to  $G$  zawiera cykl o długości przynajmniej  $k + 1$ .

- ✓ 3. Niech  $t_i$  oznacza liczbę wierzchołków stopnia  $i$  w drzewie. Wyprowadź dokładny wzór na  $t_1$ , liczbę liści w dowolnym drzewie. Dlaczego ta liczba nie zależy od  $t_2$ ?
- ✓ 4. Pokaż, że graf  $G$  jest drzewem wtedy i tylko wtedy gdy dla dowolnej pary wierzchołków  $u, v \in G$  w  $G$  istnieje dokładnie jedna ścieżka je łącząca.

- ✓ 5. (+) (2 punkty) Niech  $d(u, v)$  oznacza odległość wierzchołków  $u$  i  $v$ , czyli długość najkrótszej ścieżki łączącej  $u$  i  $v$ . Dla każdego wierzchołka  $v$  w grafu  $G$  definiujemy  $r(v) = \max\{d(v, u) : u \in V(G)\}$ . Wierzchołek  $w$ , dla którego  $r(w) = \min\{r(v) : v \in V(G)\}$  nazywa się *wierzchołkiem centralnym* grafu  $G$ , a liczba  $r(G) = r(w) - \text{promieniem grafu } G$ .

- (a) (Jordan) Wykaż, że zbiór wierzchołków centralnych drzewa składa się z jednego wierzchołka albo z pary wierzchołków sąsiednich.  
 (b) Podaj algorytm znajdowania wierzchołków centralnych w drzewie, działający w czasie  $O(m + n)$ .

- ✓ 6. (+) Niech  $d = (d_1, d_2, \dots, d_n)$  będzie ciągiem liczb naturalnych większych od zera. Wykaż, że  $d$  jest ciągiem stopni wierzchołków pewnego drzewa o  $n$  wierzchołkach wtedy i tylko wtedy, gdy  $\sum_{i=1}^n d_i = 2(n-1)$ .  
*Uwaga:* w zadaniu tym trzeba pokazać implikację w obie strony.

7. Niech  $Q_k$  oznacza graf  $k$ -wymiarowej kostki, tzn. zbiór wierzchołków tego grafu tworzą wszystkie  $k$ -elementowe ciągi zer i jedynek i dwa wierzchołki są sąsiednie wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiadające im ciągi różnią się dokładnie jedną współrzędną. Wykaż, że jest to graf dwudzielny.

- ✓ 8. Przedstaw algorytm, służący do sprawdzania, czy dany graf jest dwudzielny, korzystający z przeglądania grafu metodą w głąb. Złożoność Twojego algorytmu powinna być  $O(m + n)$ .
9. (+) Pokaż, że jeśli każdy wierzchołek w grafie  $G = (V, E)$  ma stopień przynajmniej  $k$ , to  $G$  zawiera każde drzewo  $k$ -krawędziowe.
10. Pokaż, że graf  $G = (V, E)$ , w którym każdy wierzchołek ma stopień 3 zawiera cykl o parzystej długości.

1. Pokaż, że jeśli w grafie  $G$  istnieje marszruta z  $u$  do  $v$ , to istnieje też ścieżka z  $u$  do  $v$ .

Zał.  $u \neq v$  bo powtarzałby się wierzchołek o to wtedy nie jest ścieżką.

Intuicyjnie bardzo proste - jeśli istnieje marszruta w której jakiś wierzchołek się powtarza, to można "wyciąć" ten powtarzający fragment. Wyjęte powtórzenia  $\Rightarrow$  jest to ścieżka

Przykładowo z marszrutą

$$v, v_1, \dots, v_k, v_m, v_{m+1}, \dots, v_l, \dots, u$$

"wycinamy" ten fragment

Zakładając że żadne wierzchołki się już nie powtarzają otrzymujemy ścieżkę.

Formalnie:

Niech  $M = v, v_1, v_2, \dots, u$  będzie marszrutą między  $v_i$  i  $u$

\* Mówiąc że jest to marszruta, istnieją takie  $i, j$  w  $M$  że  $v_i = v_j$

Mozemy "wyciąć"  $v_{i+1}, v_{i+2}, \dots, v_j$

jeśli to nadal marszrute to znów \*

w.p.p. mamy ścieżkę  $u-v$  co chcieliśmy osiągnąć!

$$0 \leq i < j \leq \text{len}(M)$$

Udowodnij następujące twierdzenie:

a) Niech  $G$  będzie grafem prostym, w którym każdy wierzchołek ma stopień przynajmniej  $k$ . Wówczas  $G$  zawiera ścieżkę o długości  $k$ . Jeśli  $k \geq 2$ , to  $G$  zawiera cykl o długości przynajmniej  $k+1$ .

b) Niech  $P = (V_0, V_1, \dots, V_{k-l}, V_k)$  będzie najdłuższą ścieżką w  $G$

długość  $P = l$

\*  $\deg(V_k) \leq k$  bo minimalny stopień wierzchołka to  $k$

Wszystcy sąsiadzi  $V_k$  muszą być na ścieżce - w.p.p. moglibyśmy przedłużyć najdłuższą ścieżkę dodającą sąsiada który nie jest na koniec

sprzec�oś!

D) Bierzemy jednego z sąsiadów z powyżej ścieżki, np.  $V_i$   
ścieżka zmienia się w

$V_0, V_1, \dots, V_i, \dots, V_k, V_l$

co można też zapisać jako:

$V_l, V_{l+1}, \dots, V_k, V_i, V_{i-1}, \dots, V_1, V_0$

mamy cykl długości  $k+l$  ✓

3. Niech  $t_i$  oznacza liczbę wierzchołków stopnia  $i$  w drzewie. Wyprowadź dokładny wzór na  $t_1$ , liczbę liści w dowolnym drzewie. Dlaczego ta liczba nie zależy od  $t_2$ ?

Mamy wy prowadzić wzór na liczbę wierzchołków stopnia  $l$  (z jednej krawędzią incidentną) i postawić, że nie zależy ona od wierzchołków stopnia 2.

**Bogus!** - przygotowujemy dwa wzory na ilość krawędzi i rozpisujemy sumę

Izłożenie o uściskach altoni

$$\sum_{i=1}^n \deg(v_i) = 2m = \sum_{i=1}^n (i \cdot t_i) \Rightarrow m = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (i \cdot t_i)$$

$$\text{II) Z wykłodu: } m = n - l = \sum_{i=1}^l (t_i) - l$$

pzygotowujemy

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n i \cdot t_i = \sum_{i=1}^l t_i - l \quad // \text{na jedną stronę}$$

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^l i \cdot t_i - \sum_{i=1}^l t_i + l = 0 \quad | \cdot 2$$

$$\sum_{i=1}^l i \cdot t_i - \sum_{i=1}^l 2t_i + 2 = 0 \quad // \text{w jedną stronę}$$

$$\sum_{i=1}^l (i-2)t_i + 2 = 0$$

// wyjmujemy dwie pierwsze wyrazy

$$(l-2)t_1 + (2-2)t_2 + \sum_{i=3}^l (i-2)t_i + 2 = 0 \quad // t_2 się zeruje$$

$$-t_1 + \sum_{i=3}^l (i-2)t_i + 2 = 0 \quad // \text{wyznaczamy } t_1$$

$$t_1 = \sum_{i=3}^l (i-2)t_i + 2$$

Wyznaczyliśmy wzór na  $t_1$ , jak widać nie zależy on od  $t_2$ .

Kilka wzorów z wikipedia i jeden z wykładek

Graf prosty - graf bez pętli własnych i krawędzi wielokrotnych. Często określenie graf (bez przymiotników) oznacza graf prosty.

Dany jest graf prosty  $G$  o  $n$  wierzchołkach  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$  i  $m$  krawędziach. Na mocy lematu o uściskach dloni spełniona jest następująca własność:

$$\sum_{i=1}^n \deg(v_i) = 2m = \sum_{i=1}^n (i \cdot t_i) \quad (\text{ilość krawędzi} \cdot \text{ilość wierzchołków tego stopnia})$$

Powyższą własność nietrudno jest zrozumieć intuicyjnie: każda krawędź łączy dwa wierzchołki, a zatem dodając do siebie stopnie sąsiadujących wierzchołków (czyli liczby krawędzi wychodzących z nich), liczymy każdą z krawędzi dwukrotnie, co potwierdza prawdziwość powyższej własności. Wynika z tego również fakt, że w dowolnym grafie liczba wierzchołków o nieparzystych stopniach jest parzysta.

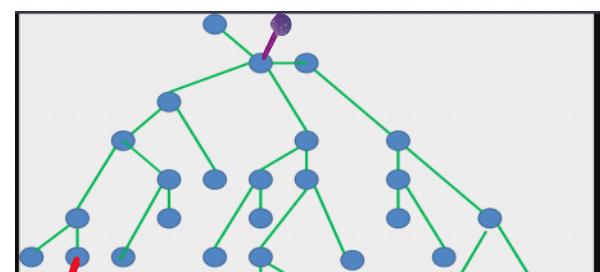
The degree sum formula states that, given a graph  $G = (V, E)$ ,

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|.$$

### Charakteryzacja drzewa

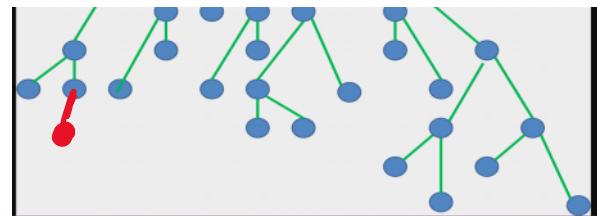
Niech  $G = (V, E)$  będzie  $n$ -wierzchołkowym grafem nieskierowanym ( $n \geq 1$ ). Wówczas następujące stwierdzenia są równoważne:

- ①  $G$  jest spójny i acykliczny ( $G$  jest drzewem),
- ②  $G$  jest spójny i ma  $n - 1$  krawędzi.
- ③  $G$  jest acykliczny i ma  $n - 1$  krawędzi.
- ④  $\forall_{u,v \in V} G$  zawiera dokładnie jedną  $u - v$ -ścieżkę.



U

tworzymy t2 dolaczajac do t1. Nie zmienia sie ilosc liisci bo nie tworzy sie nowy liisc tylk stary sie przedluza.



4. Pokaż, że graf  $G$  jest drzewem wtedy i tylko wtedy gdy dla dowolnej pary wierzchołków  $u, v \in G$  w  $G$  istnieje dokładnie jedna ścieżka łącząca.

Musimy udowodnić implikację w obiektach stronie  
To drzewo  $\Rightarrow$  jest dokładnie jedna ścieżka  
między w. u i v w G  
dowolnymi

$\text{a)} L \Rightarrow P$

Zakładamy że  $G$  jest drzewem, więc prawą stroną implikacji wynika z definicji drzewa - nie ma żadnych cykli, więc może istnieć tylko jedna ścieżka

$b) P \Rightarrow L$

Z założeniu wynika że graf jest spójny.

Dodatekowo:  
I) Jeśli istnieje więcej niż jedna ścieżka między  $u$  i  $v$   
 $\Rightarrow$  to można połączyc je węzłem  $\Rightarrow$  nie drzewo

II) Jeśli nie istnieje chociaż jedna ścieżka między  $u$  i  $v$   
to graf nie jest spójny - sprzeczność z założeniem

Oprócz tego bardzo łatwo pokazać równoważne definicje

## Definicja i przykłady

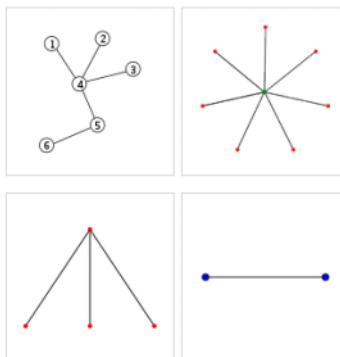
Drzewo – graf nieskierowany, który jest acykliczny<sup>[1]</sup> i spójny<sup>[2][1]</sup>, czyli taki graf, że z każdego wierzchołka drzewa można dotrzeć do każdego innego wierzchołka (spójność) i tylko jednym sposobem (acykliczność, brak możliwości chodzenia „w kółko”)<sup>[3]</sup>.

Równoważne definicje [edytuj | edytuj kod]

Graf prosty  $G$  jest drzewem jedynie, jeśli spełnia jeden z warunków<sup>[3]</sup>:

- dowolne dwa wierzchołki łączy dokładnie jedna ścieżka prosta
- $G$  jest acykliczny i dodanie krawędzi łączącej dowolne dwa wierzchołki utworzy cykl
- $G$  jest spójny i usunięcie dowolnej krawędzi spowoduje, że  $G$  przestanie być spójny

Przykłady drzew [edytuj | edytuj kod]



## +5 (2pkt)

1 December, 2023 20:06

...  
...

5. (+) (2 punkty) Niech  $d(u, v)$  oznacza odległość wierzchołków  $u$  i  $v$ , czyli długość najkrótszej ścieżki łączącej  $u$  i  $v$ . Dla każdego wierzchołka  $v$  grafu  $G$  definiujemy  $r(v) = \max\{d(v, u) : u \in V(G)\}$ . Wierzchołek  $w$ , dla którego  $r(w) = \min\{r(v) : v \in V(G)\}$  nazywa się *wierzchołkiem centralnym* grafu  $G$ , a liczba  $r(G) = r(w)$  – *promieniem* grafu  $G$ .
- (Jordan) Wykaż, że zbiór wierzchołków centralnych drzewa składa się z jednego wierzchołka albo z pary wierzchołków sąsiednich.
  - Podaj algorytm znajdowania wierzchołków centralnych w drzewie, działający w czasie  $O(m + n)$ .

6. (+) Niech  $d = (d_1, d_2, \dots, d_n)$  będzie ciągiem liczb naturalnych większych od zera. Wykaż, że  $d$  jest ciągiem stopni wierzchołków pewnego drzewa o  $n$  wierzchołkach wtedy i tylko wtedy, gdy  $\sum_{i=1}^n d_i = 2(n-1)$ .

*Uwaga:* w zadaniu tym trzeba pokazać implikację w obie strony.

$$d \text{ jest ciągiem stopni} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n d_i = 2(n-1)$$

w dwie strony

**I)  $P \Rightarrow Q$**  Złożymy, że  $d$  jest ciągiem stopni drzewa o  $n$  wierzchołkach.

Z teoretycznego uściszenia dowiadujemy się

$$\deg(v_1) + \deg(v_2) + \dots + \deg(v_n) = \sum_{i=1}^n \deg(v_i) = 2m$$

Widzimy też, że drzewo ma  $n-1$  krawędzi.

$$\sum_{i=1}^n \deg(v_i) = 2m = 2(n-1) \quad \text{c.o.n.w.}$$

**II)  $P \Rightarrow Q$**  Złożymy, że  $\sum_{i=1}^n d_i = 2(n-1)$ , dowodząc, że  $d$  jest ciągiem stopni drzewa.

Udowodnijmy to indukcyjnie

**a) Podstawa**

$$n=1 \quad \sum_{i=1}^1 d_i = d_1 = 2(1-1) = 0$$

(Mledon wierzchołek, zero krawędzi)  
więc się zgadza

**b) Zakończenie indukcyjne**

Złożymy, że dla dowolnego  $n$  dla którego zachodzi  $\sum_{i=1}^n d_i = 2(n-1)$

istnieje taka para  $d_1, d_2, \dots, d_n$  taka, że  $d$  jest ciągiem stopni wierzchołków drzewa

**c)**

Musimy pokazać, że jeśli  $\sum_{i=1}^{n+1} d'_i = 2(n+1)-1$  to  $d'_1, d'_2, \dots, d'_{n+1}$  jest ciągiem stopni wierzchołków drzewa

$\rightarrow$  M-1 na zakończenie P

7)  
Mówiąc to zrobimy?

Dotóżmy jeden wierzchołek i dotóżmy go do pionowego drzewa jednego

krawędzią wierzchołka  $d_j^o$ . Mamy wtedy ciąg

Zauważmy że odstęp wierzchołek będzie stopień l, o wierzchołek  $d_j^o$  to  $d_j^o$  zwiększone o l

$$d_j^o' = d_j^o + l \quad d_{n+l} = l$$

$d_1, d_2, \dots, d_j, \dots, d_n, d_{n+l}$

$d_1', d_2', \dots, d_j', \dots, d_n', d_{n+l}'$

Rozpiszmy ciąg wierzchołków o stopniu n+l

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n d_i^o + d_j^o + d_{n+l} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n d_i^o + d_j^o + l + l = \sum_{i=1}^n d_i^o + 2l = 2(n-l) + 2 = 2n - 2(l+l-1)$$

c.n.w.

7. Niech  $Q_k$  oznacza graf  $k$ -wymiarowej kostki, tzn. zbiór wierzchołków tego grafu tworzą wszystkie  $k$ -elementowe ciągi zer i jedynek i dwa wierzchołki są sąsiednie wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiadające im ciągi różnią się dokładnie jedną współrzędną. Wykaż, że jest to graf dwudzielny.

8. Przedstaw algorytm, służący do sprawdzania, czy dany graf jest dwudzielny, korzystający z przeglądania grafu metodą w głąb. Złożoność Twojego algorytmu powinna być  $O(m + n)$ .

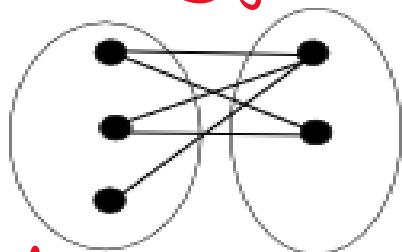
## Najpierw definicja grafu dwudzielnego

Graf dwudzielny to graf którego wierzchołki można podzielić na dwa rozłączne zbior, tak by żaden krawędź nie łączyła dwóch wierzchołków z tej samej grupy

**lub równoważnie**

Graf który nie zawiera cykli nieparzystej długości

**Pozostały graf dwudzielny**



Idea: Pomalujmy wierzchołki na dwa kolory podczas przemierzania grafu DFSem. Jeśli wierzchołek jest pomalowany na zły kolor, to nie będzie dwudzielny.

```
/**  
 * Funkcja isBipartite sprawdza czy graf jest dwudzielny  
 * @param {Number[][]} graph - Graf w postaci tablicy list sąsiedztwa  
 * @param {number} v - Wierzchołek startowy - może być dowolny  
 * @param {boolean[]} visited - Tablica odwiedzonych wierzchołków  
 * @param {number[]} color - Tablica kolorów wierzchołków  
 * @returns {boolean} - Zwraca true jeśli graf jest dwudzielny, false w przeciwnym wypadku  
 */  
const isBipartite = (graph, v, visited, color) => {  
    visited[v] = true; // Oznaczamy wierzchołek jako odwiedzony  
    // Przeglądamy wszystkie wierzchołki sąsiadujące z wierzchołkiem v  
    for (const u of graph[v]) {  
        // Jeśli wierzchołek nie był odwiedzony to go odwiedzamy i nadajemy mu przeciwny kolor  
        // po czym wywołujemy rekurencyjnie funkcję isBipartite dla wierzchołka u (DFS)  
        if (!visited[u]) {  
            color[u] = !color[v];  
            if (!isBipartite(graph, u, visited, color)) {  
                return false;  
            }  
            // Jeśli wierzchołek był odwiedzony to sprawdzamy czy ma przeciwny kolor  
            // Jeśli nie ma to zwracamy false  
            } else if (color[u] === color[v]) {  
                return false;  
            }  
    }  
    return true;  
}
```

+9

1 December, 2023 20:06

9. (+) Pokaż, że jeśli każdy wierzcholek w grafie  $G = (V, E)$  ma stopień przynajmniej  $k$ , to  $G$  zawiera każde drzewo  $k$ -krawędziowe.

10. Pokaż, że graf  $G = (V, E)$ , w którym każdy wierzchołek ma stopień 3 zawiera cykl o parzystej długości.

Pigeonhole Principle

Bierzemy najkrótszą ścieżkę w grafie jako w zad. 7

$v_0, v_1, \dots, v_k$

$v_k$  ma min 3 sąsiadów, miedzy nimi  $x_i, y_i, z$  (w kolejności ze ścieżki)