Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka

Lista zadań nr 7. 15. kwietnia i później

Zadania

1. Niujemne zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots, X_n$ są niezależne i mają ten sam rozkład. Znaleźć wartość oczekiwaną zmiennej $Y_k = \dfrac{\sum_{j=1}^{k} X_j}{\sum_{i=1}^{n} X_i}$.

2. **(2p.)** Wykazać, że założenie o niezależności zmiennych $X_1, X_2, \ldots, X_n$ z poprzedniego zadania jest istotne, tzn. podać (kontr)przykład.

3. Dane są niezależne zmienne losowe X, Y o rozkładzie $U[0, 1]$. Niech x, y będą wylosowanymi wartościami zmiennych X, Y. Odcinek $[0, 1]$ podzielony jest zatem na trzy części (być może jedna część ma długość 0). Jakie jest prawdopodobieństwo, że z tych trzech części można utworzyć trójkąt?

4. Dana jest n-wymiarowa zmienna losowa $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)^T$. Zmienną $\mathbf{Y} = (Y_1, \ldots, Y_n)^T$ określamy następująco:

   $$Y_1 = \bar{\mathbf{X}}, \quad Y_k = X_k - \bar{\mathbf{X}} \ \text{ dla } k = 2, \ldots, n.$$

   Znaleźć wartość Jacobianu

   $$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial x_1}{\partial y_2} & \cdots & \dfrac{\partial x_1}{\partial y_n} \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial y_2} & \cdots & \dfrac{\partial x_2}{\partial y_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial x_n}{\partial y_1} & \dfrac{\partial x_n}{\partial y_2} & \cdots & \dfrac{\partial x_n}{\partial y_n} \end{vmatrix}.$$

5. Zmienna (X_1, X_2) ma gęstość postaci $f(x_1, x_2) = \dfrac{1}{\pi}$, gdzie $0 < x_1^2 + x_2^2 < 1$. Niech $X_1 = Y_1 \cos Y_2$, $X_2 = Y_1 \sin Y_2$, gdzie $0 < Y_1 < 1$, $0 \leqslant Y_2 \leqslant 2\pi$. Znaleźć gęstość $g(y_1, y_2)$ zmiennej (Y_1, Y_2). Sprawdzić czy zmienne Y_1, Y_2 są niezależne.

6. **(2p.)** Zmienna losowa X_1 ma gęstość określoną funkcjami $f_1(x), f_2(x). \ldots, f_k(x)$ na przedziałach $[0, 1], [1, 2], \ldots, [k-1, k]$ odpowiednio. **Niezależna** zmienna X_2 ma gęstość $g(x)$ na przedziale $[0, 1]$. Podać nieformalny algorytm/sposób wyznaczania gęstości sumy zmiennych X_1, X_2: $S = X_1 + X_2$.

7. Niech (X, Y) oznacza wybrany losowo punkt na płaszczyźnie. Załóżmy, że współrzędne X i Y są niezależne i podlegają rozkładowi $N(0, 1)$. Od zmiennej (X, Y) przechodzimy do zmiennej (R, Θ), gdzie R i Θ są współrzędnymi biegunowymi punktu (X, Y).

Wykazać, że gęstość zmiennej (R, Θ) określona jest wzorem

$$g(r,\Theta) = \frac{1}{2\pi}\, r \cdot \exp\left\{-\frac{r^2}{2}\right\}, \quad \text{gdzie } \ 0 < \Theta < 2\pi,\ 0 < r < \infty.$$

[Do zadań 8–9] Boki prostokąta są niezależnymi zmiennymi losowymi X_1 i X_2 o rozkładzie $U[1,2]$. $Y_1 = 2X_1 + 2X_2$ jest obwodem tego prostokąta, $Y_2 = X_1 X_2$ oznacza pole tego prostokąta.

8. Znaleźć wartości oczekiwane i wariancje zmiennych Y_1, Y_2. (Odp.: 6, $2/3$ dla Y_1, $9/4$, $55/144$ dla Y_2).
9. Obliczyć wartość współczynnika korelacji ρ zmiennych Y_1, Y_2. (Odp.: $3\sqrt{330}/55$).

Witold Karczewski