Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka

Lista zadań nr 2. 11. marca i później

Zadania

1. Niech Σ będzie σ-ciałem zbiorów.
   (a) Sprawdzić, że $\emptyset \in \Sigma$.
   (b) Załóżmy, że $A_k \in \Sigma$, dla $k = 1, 2, 3, \ldots$. Wykazać, że $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k \in \Sigma$.

2. Niech $\Omega = \{\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3\}$.
   (a) Opisać σ-ciała zbiorów tej przestrzeni zdarzeń.
   (b) Podać przykład funkcji X, Y takich, że X jest zmienną losową, a Y nie jest zmienną losową.

3. Ω to zbiór przeliczalny; $\mathcal{F}_1$ – rodzina skończonych podzbiorów Ω; $\mathcal{F}_2$ – rodzina takich podzbiorów które są skończone lub mają skończone dopełnienie; $\mathcal{F}_3$ – rodzina takich podzbiorów które są przeliczalne lub mają przeliczalne dopełnienie. Która z wymienionych rodzin jest σ-algebrą zbiorów?

4. (a) Wyznaczyć dystrybuantę i obliczyć wartość oczekiwaną zmiennej X o rozkładzie

x_i	2	3	4	5
p_i	0.2	0.4	0.1	0.3

   (b) Dystrybuanta F zmiennej losowej X określona jest następująco:

x	$(-\infty; -2)$	$[-2; 1)$	$[1; 4)$	$[4; \infty)$
$F(x)$	0	0.2	0.7	1

   Podać postać funkcji gęstości $f(x)$.

5. (a) Niech X będzie zmienną losową typu dyskretnego. Udowodnić, że $\mathrm{E}(aX + b) = a\,\mathrm{E}(X) + b$.
   (b) Niech Z będzie zmienną losową typu ciągłego. Udowodnić, że $\mathrm{E}(aZ + b) = a\,\mathrm{E}(Z) + b$.

6. **2p.** Udowodnić, że $\Gamma(p)\,\Gamma(q) = \Gamma(p+q)\,B(p,q)$, gdzie $p, q \in \mathbb{R}^+$ (czyli wszystkie potrzebne całki istnieją).
   Wsk: $\Gamma(p) \cdot \Gamma(q) = \int_0^\infty x^{p-1}\, \mathrm{e}^{-x}\, dx \cdot \int_0^\infty y^{p-1}\, \mathrm{e}^{-y}\, dy$. Zamienić na całkę podwójną i zastosować podstawienie $u = x + y, s = \frac{x}{x+y}$. Całkę podwójną zamienić na iloczyn całek pojedynczych.

7. (a) Wiadomo, że $X \sim \mathrm{B}(n, p)$. Z poniższych prawdopodobieństw wyznaczyć n, p.

x_i	0	1	2	$\ldots$	n
p_i	0.028	0.121	0.233	$\ldots$	$\ldots$

   (b) Wiadomo, że $X \sim \mathrm{Poisson}(\lambda)$. Znaleźć wartość λ.

x_i	0	1	$\ldots$
p_i	0.1353	0.2707	$\ldots$

8. **2p.** **(Erdős–Rényi)** $G(n, p)$ oznacza graf o n wierzchołkach, dowolna krawędź istnieje z ppb p. Dla grafu $G(4, p)$ znaleźć ppb zdarzenia, że istnieje wierzchołek izolowany.
   Wsk: Niech A_i oznacza zdarzenie, że i-ty wierzchołek jest izolowany. Zastosować zasadę włączania-wyłączania.

9. Niech $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ będą σ-ciałami podzbiorów Ω.
   (a) Czy $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ jest σ-ciałem zbiorów?
   (b) Czy $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ jest σ-ciałem zbiorów?

Def. **Funkcją beta** nazywamy wartość całki

$$B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}\,(1-t)^{q-1}\,dt, \;\; p>0, \; q>0.$$

Witold Karczewski