L4

26 October, 2023 23:08

L4 zad.	+1	2	3	4	5	6	7	8	-9	-10	-11	-12	13	suma
pkt.	1	1	1	1	1	?	1	1	0,5	0,5	0,5	?	1	9,5 - 11 ? (8)
max pkt.	1	1	1	1	1	1	1	1	0,5	0,5	0,5	0,5	1	11 (9 na dekl.)

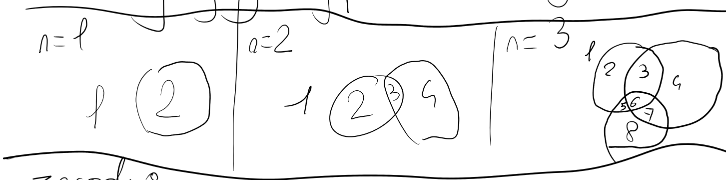
1. (+) Na płaszczyźnie danych jest n okręgów. Jaka jest maksymalna liczba obszarów, na które dzielą one płaszczyznę. Wyprowadź rozwiązanie za pomocą odpowiedniej zależności rekurencyjnej.
2. Ile jest różnych sposobów wejścia po schodach zbudowanych z n stopni, jeśli w każdym kroku można pokonać jeden lub dwa stopnie?
3. Z szachownicy 8×8 wyjmujemy jedno pole białe i jedno czarne. Czy w każdym wypadku pozostałą część szachownicy można pokryć kostkami domina?
4. Każde pole szachownicy 3×9 pomalowano na jeden z dwóch kolorów. Wiadomo, że na tej szachownicy istnieje prostokąt o polach wierzchołkowych takiego samego koloru. Czy dla szachownicy $3 \times k$ dla jakiegoś $k < 9$ własność ta jest zachowana?
5. Każde pole nieskończonej szachownicy pomalowano na jeden z dwóch kolorów. Czy można rozważyć jeszcze mniej pól niż w poprzednim zadaniu, by wsród wybranych pól istniał prostokąt o wierzchołkach tego samego koloru?
6. ? 13 dziewczyn i 13 chłopaków zasiada przy okrągłym stole. Pokaż, że w każdym przypadku jakaś osoba będzie mieć po obu stronach dziewczyny.
7. Spośród liczb naturalnych z przedziału $[1, 2n]$ wybrano $n+1$. Pokaż, że zawsze jakieś dwie wśród wybranych są względnie pierwsze. (Dwie liczby a i b są względnie pierwsze jeśli $NWD(a, b) = 1$.)
8. Udowodnij, że wśród dowolnych $n+2$ liczb całkowitych istnieją takie dwie, których suma lub różnica dzieli się przez $2n$.
9. (-) Stosując metodę podstawiania rozwiąż następujące zależności rekurencyjne
   (a) $t_n = t_{n-1} + 3^n$ dla $n > 1$ i $t_1 = 3$.
   (b) $h_n = h_{n-1} + (-1)^{n+1} n$ dla $n > 1$ i $h_1 = 1$.
10. (-) Wykaż, że jeśli $2^n - 1$ jest liczbą pierwszą, to n jest liczbą pierwszą.
11. (-) Wykaż, że jeśli $a^n - 1$ jest liczbą pierwszą, to $a = 2$.
12. ? (-) Wykaż, że jeśli $2^n + 1$ jest liczbą pierwszą, to n jest potęgą liczby 2.
13. Podaj dwie ostatnie cyfry liczby $9^{8^{7^{6^{5^{4^{3^{2^{1}}}}}}}}$ w rozwinięciu dziesiętnym.

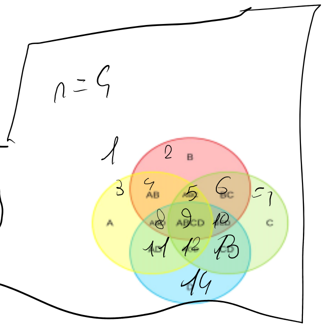
+1 (done)

26 October, 2023 23:13

1. (+) Na płaszczyźnie danych jest n okręgów. Jaka jest maksymalna liczba obszarów, na które dzielą one płaszczyznę. Wyprowadź rozwiązanie za pomocą odpowiedniej zależności rekurencyjnej.

Rozrysujmy najpierw dla małych n:





zasady:
- żaden okrąg nie leży wewnątrz innego okręgu
- jedyne legalne przecięcie - dokładnie dwa okręgi
- każdy okrąg powinien przecinać się z każdym innym okręgiem w dokładnie dwóch miejscach

każdy kolejny okrąg przecina się z poprzednim w 2 punktach. $2(n-1)$ nowych punktów $\Rightarrow$ $2(n-1)$ nowych łuków $\Rightarrow$ $2(n-1)$ nowych pól

Możemy zapisać:

$r_1 = 2 \quad r_2 = 4 \quad r_3 = 8 \quad r_4 = 14$

i uogólnić jako zależność rekurencyjną

$$r_n = \begin{cases} 2 & n = 1 \\ r_{n-1} + 2(n-1) & n > 1 \end{cases}$$

$$r_n = r_{n-1} + 2(n-1) = r_{n-2} + 2(n-2) + 2(n-1) = r_{n-3} + 2(n-3) + 2(n-2) + 2(n-1) = \ldots =$$

$$r_1 + \sum_{i=1}^{n-1} 2(n-i) = 2 + \underbrace{2\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)}_{} = 2 + \underbrace{2\,\frac{(n-1)\cdot n}{2}}_{} = n^2 - n + 2$$

wzorem na sumę ciągu arytmetycznego

Odp. $n^2 - n + 2$, $n \in \mathbb{N}^+$

2 (done)

26 October, 2023 23:13

2. Ile jest różnych sposobów wejścia po schodach zbudowanych z n stopni, jeśli w każdym kroku można pokonać jeden lub dwa stopnie?

Oczywiście będzie tu rekurencja. Rozważmy najpierw bazowe przypadki, a potem wyprowadźmy wzór rekurencyjny

$$r_n = \begin{cases} 0, & n=0 \\ 1, & n=1 \\ r_{n-1}+r_{n-2}, & n>1 \end{cases}$$

czyli Fibonacci

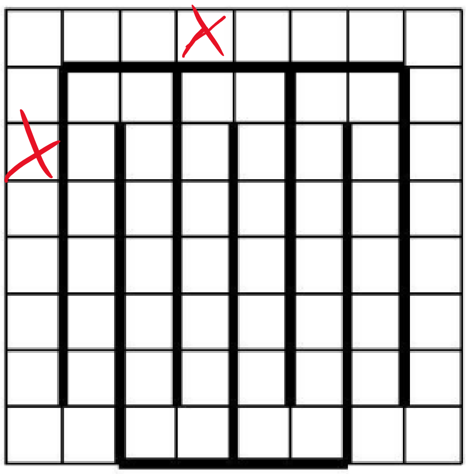
$$F_n \approx \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

3 (done)

26 October, 2023 23:13

3. Z szachownicy 8×8 wyjmujemy jedno pole białe i jedno czarne. Czy w każdym wypadku pozostałą część szachownicy można pokryć kostkami domina?

Tak. By to zwizualizować narysujmy ścianki tak, by można było przejść całą szachownicę dokładnie jedną drogą, np. jak po prawej. →

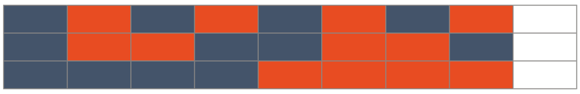


Dzięki temu że usuwamy pola różnych kolorów, to luki w szachownicy zawsze będą oddalone od siebie o parzystą ilość pól. → parzystą ilość pól które można zinterpretować jako ścieżkę o szerokości 1 zawsze można pokryć kostkami domino c.n.u.

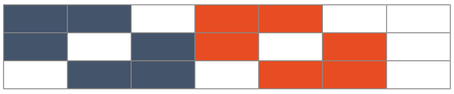
4 (done)

26 October, 2023 23:13

4. Każde pole szachownicy 3×9 pomalowano na jeden z dwóch kolorów. Wiadomo, że na tej szachownicy istnieje prostokąt o polach wierzchołkowych takiego samego koloru. Czy dla szachownicy $3 \times k$ dla jakiegoś $k < 9$ własność ta jest zachowana?



Dla 9 udowodniliśmy listę temu



Da się udowodnić dla 7

Potrzebujemy conajmniej dwóch pól tego samego koloru na kolumnę, kolumny C,C,C i N,N,N współgrają idealnie z każdym innym wariantem tego samego koloru

z pidgeonhole principle → działa dla $n=7$

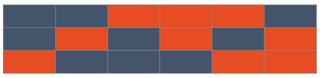
i przy okazji stworzyliśmy kontrprzykład dla $n=6$ (uzupełniamy naprzemiennymi kolorami)

5 (done)

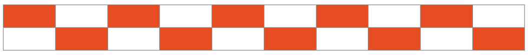
26 October, 2023 23:13

mamy dowód dla 21

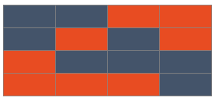
5. Każde pole nieskończonej szachownicy pomalowano na jeden z dwóch kolorów. Czy można rozważyć jeszcze mniej pól niż w poprzednim zadaniu, by wśród wybranych pól istniał prostokąt o wierzchołkach tego samego koloru?



kontrprzykład dla 3x6 (18 pól)

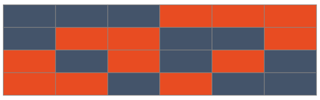


konieczne min. 3 wiersze



kontrprzykład dla 4x4

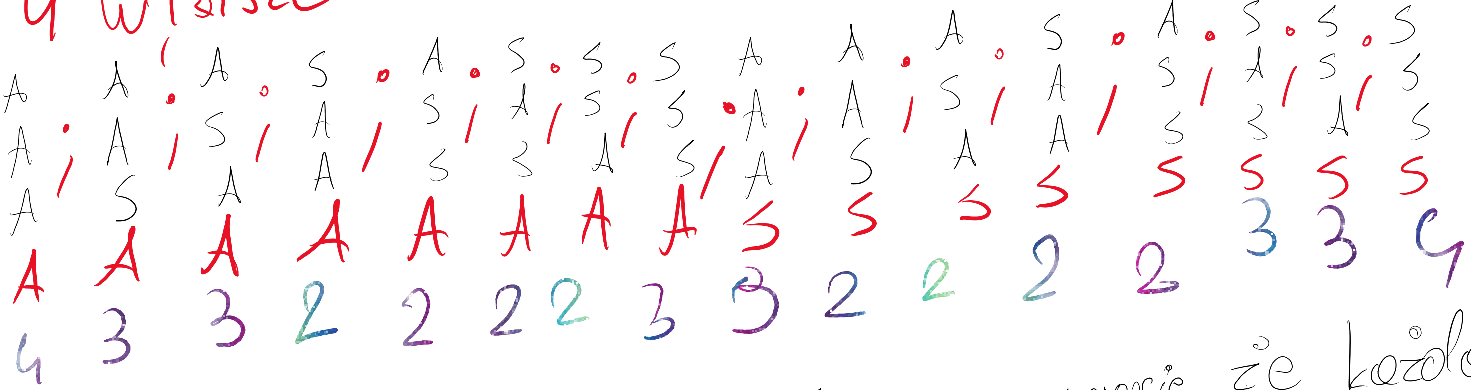
Ostatnia opcja: 4x5 (wszystkie inne za dużo pól)



a tu nawet dla 4x6 kontrprzykład

Nie jestem pewien czy czegoś nie przeoczyłem więc zostawiam wstępne rozpisanie dla 4x5

4 wiersze



2·4 takie same

6·3 -||-

8·2 -||-

biorąc 4x5 mamy gwarancję że każda kolumna zawiera min. 2 takie same kolory

6 (?)

26 October, 2023 23:13

6. **13** dziewczyn i **13** chłopaków zasiada przy okrągłym stole. Pokaż, że w każdym przypadku jakaś osoba będzie mieć po obu stronach dziewczyny.

Pamiętajmy że niktma nie mieć obok siebie dwóch dziewczyn nie tylko chłopaki. Rozmieszczając optymalnie:

M K M K M K MK MK MK

pary

pozostają dwa miejsca i się nie da

kk _ _ m m

pewnie da się to jakoś wzorem z pidgeonhole opisać

7 (done)

26 October, 2023 23:13

7. Spośród liczb naturalnych z przedziału $[1, 2n]$ wybrano $n + 1$. Pokaż, że zawsze jakieś dwie wśród wybranych są względnie pierwsze. (Dwie liczby a i b są względnie pierwsze jeśli $NWD(a, b) = 1$.)

a więc udowodnione

z Pidgeonhole Principle $\Rightarrow$ biorąc $n+1$ z $2n$

bierzemy conajmniej 2 następujące po sobie

$2k-1$ i $2k$ dla jakiegoś $k \in \mathbb{N}$ i $\leq n$

$\underset{x}{\overset{\parallel}{}}$ $\underset{x+1}{\overset{\parallel}{}}$ (zmiana dla prostszego zapisu)

$nwd(x, x+1) = y$

$x \mid y \wedge x+1 \mid y \Rightarrow x+1-x \mid y \Rightarrow 1 \mid y$

a więc jedynym wspólnym dzielnikiem dwóch następujących po sobie liczb jest 1

8 (done)

26 October, 2023 23:13

8. Udowodnij, że wśród dowolnych $n+2$ liczb całkowitych istnieją takie dwie, których suma lub różnica dzieli się przez $2n$.

mamy 2n grup mod 2n $\{0, 1, \dots, 2n-1\}$

0, n wyjmujemy, pozostałe grupujemy

$\underbrace{(1, 2n-1); (2, 2n-2); \dots (n-1, n+1)}_{\text{jest tego } n-1,\ z\ \{0\}, \{n\}\ n+1}$

mamy więc n+1 możliwości, wybieramy n+2 liczby ⟹

min. raz dostaniemy $a, b \in \mathbb{Z}$ t.ż. $a \equiv b \bmod 2n \Rightarrow a-b \equiv 0 \bmod 2n$ c.n.u.

-9 (done)

26 October, 2023 23:13

9. (-) Stosując metodę podstawiania rozwiąż następujące zależności rekurencyjne

   (a) $t_n = t_{n-1} + 3^n$ dla $n > 1$ i $t_1 = 3$.

   (b) $h_n = h_{n-1} + (-1)^{n+1} n$ dla $n > 1$ i $h_1 = 1$.

3^n $\quad 3^n + 3^{n-1}$ $\quad 3^n + 3^{n-1} + 3^{n-2}$

$t_1 = 3 \quad t_2 = 12 \quad t_3 = 39$

a) $t_n = t_{n-1} + 3^n =$

$t_{n-2} + 3^{n-1} + 3^n = \sum_{i=1}^{n} 3^n$

b) $h_1 = 1 \quad h_2 = 1 - 2 = -1 \quad h_3 = 1 - 2 + 3 = 2 \quad h_4 = -2 \quad h_5 = 3$

$\lceil \frac{n}{2} \rceil \cdot (-1)^{n+1}$

-10 (done)

26 October, 2023 23:13

a 2^n-1 jest pierwszą

10. (-) Wykaż, że jeśli $2^n - 1$ jest liczbą pierwszą, to n jest liczbą pierwszą.

Załóżmy, że n nie jest pierwszą $\Leftrightarrow \exists x, y \; n = xy, \; x, y \in \mathbb{N}^+$

$$2^n - 1 = 2^{xy} - 1 = (2^x)^y - 1^y = (2^x - 1)\left(2^{x(y-1)} + 2^{x(y-2)} + \ldots + 2^x + 1\right)$$

Znaleźliśmy dzielnik $2^n - 1$, sprzeczność

-11 (done)

26 October, 2023 23:13

11. (-) Wykaż, że jeśli $a^n - 1$ jest liczbą pierwszą, to $a = 2$.

$$a^n - 1^n = (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a + 1)$$

aby była pierwszą to $a-1 = 1$ (brak dzielnika $\neq 1$)

$\Downarrow$

$a = 2$

-12 (idk wsm)

26 October, 2023 23:13

$p=$

analogicznie do poprzednich

12. (-) Wykaż, że jeśli $2^n + 1$ jest liczbą pierwszą, to n jest potęgą liczby 2.

jeden nieparzysty (np. x)

n nie potęgą 2 $\Rightarrow n = xy$

$p = 2^{xy} + 1 \quad p = (2^y)^x + 1 \qquad a = 2^y \qquad p = a^x + 1 \Rightarrow p = a^x - (-1)^x$

dla parzystej nie działa

$a^x - (-1)^x = (a+1)(a^{x-1} - a^{x-2} + a^{x-3} + \dots - a + 1)$

a więc nie jest pierwszą

13 (done)

26 October, 2023 23:13

13. Podaj dwie ostatnie cyfry liczby $9^{8^{7^{6^{5^{4^{3^{2^{1}}}}}}}}$ w rozwinięciu dziesiętnym.

$3^{2^{1}} = 9$ $4^9 = 262144$ $n \geq 3$ $n \geq 4$

5^{262144} → dwie ostatnie zawsze 25 $n \geq 2$ 125 np. 625 p.

1 2 3 4 5 6

$6^{\dots 25}$ 6, 36, 16, 96, 76, 56, ... 36, 16, 96, 76, 56 zapętlenie co 5

$\sim \dots 76$

1 2 3 4 5 6 7 8

$7^{\dots 76}$ 7, 49, 43, 01, 07, 49, 43, 01 zapętlenie co 4

$\sim \dots 01$

1 2 3 4 5 6 7 8

$8^{\dots 01}$ 8, 4, 2, 6, 8, 4, 2, 6 co 4

$\sim \dots 8$

co 10

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11

$9^{\dots 8}$ 9, 81, 29, 61, 49, 41, 69, 21, 89, 01, 09, 81

Ostatnie dwie cyfry = 21