# L5

31 October, 2023 16:45

| zad | -1 | 2 | -3 | 4 | -5 | 6 | +7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | suma |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| pkt | ? | 2 | | 1 | ,5 | 1 | | 1 | 1 | 1 | | | |
| max | ,5 | 2 | ,5 | 1 | ,5 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 10 (11,5) |

?

1. (-) Podwójna wieża Hanoi składa się z $2n$ krążków $n$ różnych rozmiarów, po 2 krążki każdego rozmiaru. W jednym kroku przenosimy dokładnie jeden krążek i nie możemy kłaść większego krążka na mniejszym. Ile kroków jest potrzebnych, aby przenieść wieżę z pręta $A$ na pręt $B$, posługując się przy tym prętem $C$?

2. (2p) Na ile maksymalnie obszarów można podzielić trójwymiarową przestrzeń za pomocą $n$ płaszczyzn? Wyprowadź rozwiązanie za pomocą odpowiedniej zależności rekurencyjnej.

3. (-) Stosując metodę anihilatorów rozwiąż następujące zależności rekurencyjne

   (a) $t_n = t_{n-1} + 3^n$ dla $n > 1$ i $t_1 = 3$.

   (b) $h_n = h_{n-1} + (-1)^{n+1} n$ dla $n > 1$ i $h_1 = 1$.

4. Rozwiąż następujące zależności rekurencyjne:

   (a) $a_{n+1} = \left\lfloor \sqrt{a_n^2 + a_{n-1}^2} \right\rfloor$, $a_0 = a_1 = 1$,

   (b) $b_{n+1} = \left\lfloor \sqrt{b_n^2 + 3} \right\rfloor$, $b_0 = 8$,

   (c) $c_{n+1} = (n+1)c_n + (n^2 + n)c_{n-1}$, $c_0 = 0$, $c_1 = 1$.

5. (-) Rozwiąż zależności rekurencyjne:

   (a) $c_0 = 1, c_n = c_0 + c_1 + \ldots, c_{n-1}$

   (b) $d_0 = 1, d_1 = 2, d_n = d_{n-1}^2 / d_{n-2}$.

6. Wykaż, że iloczyn dowolnych kolejnych $k$ liczb naturalnych jest podzielny przez $k!$.

7. (+) Wyprowadź zależność rekurencyjną dla liczby nieporządków: $d_{n+1} = n(d_n + d_{n-1})$. Jakie należy przyjąć warunki początkowe dla tej zależności? W zadaniu tym nie można korzystać ze wzoru wyprowadzonego na jednej z poprzednich list.

8. Rozwiąż zależność rekurencyjną
   $a_n^2 = 2a_{n-1}^2 + 1$ z warunkiem początkowym $a_0 = 2$ i założeniem, że $a_n > 0$ dla każdego naturalnego $n$.

9. Ile jest wyrazów złożonych z $n$ liter należących do 25-literowego alfabetu łacińskiego, zawierających parzystą liczbę liter $a$?

10. Znajdź ogólną postać rozwiązań następujących równań rekurencyjnych za pomocą anihilatorów i rozwiąż jedno z równań do końca:

    (a) $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 3^n - 1$, gdy $a_0 = a_1 = 0$.

    (b) $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n + n2^{n+1}$, gdy $a_0 = a_1 = 1$.

    (c) $a_{n+2} = \frac{1}{2^{n+1}} - 2a_{n+1} - a_n$, gdy $a_0 = a_1 = 1$.

11. Niech $c_n$ oznacza liczbę ciągów długości $n$ złożonych z $n$ cyfr ze zbioru $\{0, 1, 2\}$, nie zawierających dwóch następujących po sobie zer i dwóch następujących po sobie jedynek. Wyprowadź zależność rekurencyjną, jaką spełniają liczby $c_n$ przyjmując $c_0 = 1$. Rozwiąż otrzymaną zależność rekurencyjną.

12. Na ile sposobów można rozdać $n$ różnych nagród wśród czterech osób $A, B, C, D$ tak, aby:

    (a) $A$ dostała przynajmniej jedną nagrodę?

    (b) $A$ lub $B$ nie dostała nic?

    (c) Zarówno $A$ jak i $B$ dostała przynajmniej jedną nagrodę?

    (d) Przynajmniej jedna spośród $A$, $B$, $C$ nic nie dostała?

    (e) Każda z 4 osób coś dostała?

-1 (?)

31 October, 2023 16:47

1. (-) Podwójna wieża Hanoi składa się z $2n$ krążków $n$ różnych rozmiarów, po 2 krążki każdego rozmiaru. W jednym kroku przenosimy dokadnie jeden krążek i nie możemy kłaść większego krążka na mniejszym. Ile kroków jest potrzebnych, aby przenieść wieżę z pręta $A$ na pręt $B$, posługując się przy tym prętem $C$?

?

Jak zwykłe Hanoi tylko dwa razy więcej (bo zawsze po dwa)

$$2 \cdot (2^n - 1)$$

## (2p.) 2 (done)

31 October, 2023 16:47

2. (2p) Na ile maksymalnie obszarów można podzielić trójwymiarową przestrzeń za pomocą $n$ płaszczyzn? Wyprowadź rozwiązanie za pomocą odpowiedniej zależności rekurencyjnej.

By zobaczyć intuicję rozważmy najpierw płaszczyznę dwuwymiarową dzieloną n prostymi.

$p_0 = 1 \quad p_1 = 2 \quad p_2 = 4$

Każda prosta przecina każdą poprzednią w dokładnie 1 miejscu n-ta linia ≡ n-1 punktów tworząc n części - i w optymalnym przypadku n nowych wycinków. Zapisując jako zależność rekurencyjną:

$$p_n = \begin{cases} 1 & ; n=0 \\ p_{n-1}+n & ; n>0 \end{cases}$$

$$p_n = p_{n-1} + n = p_{n-2} + (n-1) + n = \ldots = p_0 + 1 + 1 + 1 + \ldots + n-1+n =$$

$$\sum_{i=1}^{n} i + 1 = \frac{n^2+n}{2} + 1$$

Przejdźmy teraz w trzeci wymiar. Zauważmy, że dwie płaszczyzny mogą się przeciąć tylko w jednej linii. Znowu rozważmy dla małych n.

$q_0 = 1 \quad q_1 = 2 \quad q_2 = 4 \quad q_3 = 8$

Tak samo jak wcześniej n-ta płaszczyzna przecina n-1 płaszczyzn. Przy okazji tworzy też n-1 linii. Będą nam się więc kumulowały przestrzenie z $\mathbb{R}^2$ z nowo wyznaczonymi, tzn:

$$q_n = \begin{cases} 1 & ; n=0 \\ q_{n-1} + p_{n-1} = q_{n-1} + \frac{n^2+n}{2} + 1 & ; n>0 \end{cases}$$

Na koniec wyprowadźmy jeszcze wzór jawny

$$q_n = q_{n-1} + p_{n-1} = q_{n-1} + 1 + \frac{n^2+n}{2} =$$

$$q_{n-2} + 1 + \frac{n^2+n}{2} + 1 + \frac{(n-1)(n-2)}{2} = \ldots =$$

$$q_0 + \sum_{i=0}^{n-1} 1 + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i(i+1)}{2} =$$

$$(n-1)n(n+1) =$$

$$\varphi_0 + \sum_{i=0} 1 + \sum_{i=0} \frac{\quad}{2}$$

$$1 + n + \frac{(n-1)n(n+1)}{6} =$$

$$1 + n + \frac{n^3 - n}{6} = \frac{n^3 + 5n + 6}{6}, \quad n \in \mathbb{N}$$

# -3

31 October, 2023 16:47

3. (-) Stosując metodę anihilatorów rozwiąż następujące zależności rekurencyjne

   (a) $t_n = t_{n-1} + 3^n$ dla $n > 1$ i $t_1 = 3$.

   (b) $h_n = h_{n-1} + (-1)^{n+1} n$ dla $n > 1$ i $h_1 = 1$.

(a) $t_n = t_{n-1} + 3^n$ dla $n > 1$ i $t_1 = 3$.

$t_{n+1} = t_n + 3^{n+1}$ $\qquad$ $t_{n+1} - t_n - 3^{n+1} = 0$

# 4 (done)

31 October, 2023 16:47

4. Rozwiąż następujące zależności rekurencyjne:

(a) $a_{n+1} = \left|\sqrt{a_n^2 + a_{n-1}^2}\right|$, $a_0 = a_1 = 1$,

(b) $b_{n+1} = \left|\sqrt{b_n^2 + 3}\right|$, $b_0 = 8$,

(c) $c_{n+1} = (n+1)c_n + (n^2+n)c_{n-1}$, $c_0 = 0$, $c_1 = 1$.

a) (a) $a_{n+1} = \left|\sqrt{a_n^2 + a_{n-1}^2}\right|$, $a_0 = a_1 = 1$,

Spróbujmy podnieść wyrazy tego ciągu do kwadratu by zgadnąć

$a_{n+1}^2 = a_n^2 + a_{n-1}^2$ intuicja podpowiada Fibonacciego, spróbujmy rozpisać

$a_{n+1} = \left|\sqrt{a_n^2 + a_{n-1}^2}\right| = \left|\sqrt{a_{n-1}^2 + a_{n-1}^2 + a_{n-2}^2}\right| = \left|\sqrt{2a_{n-1}^2 + a_{n-2}^2}\right| =$

$\left|\sqrt{2\left|\sqrt{a_{n-2}^2 + a_{n-3}^2}\right| + a_{n-2}^2}\right| = \ldots = \left|\sqrt{13a_{n-5}^2 + 8a_{n-6}^2}\right| =$ ← to już widać dokładnie że Fibonacci (wyrazy $a$ zredukują się do zera)

$\left|\sqrt{F_n + F_{n-1}}\right| = \left|\sqrt{F_{n+1}}\right| = \sqrt{F_{n+1}}$ kolejny wyraz ciągu = kolejny pierwiastek wyrazu ciągu Fibonacciego

b) (b) $b_{n+1} = \left|\sqrt{b_n^2 + 3}\right|$, $b_0 = 8$,

$b_{n+1} = \left|\sqrt{b_n^2 + 3}\right| = \left|\sqrt{\left|\sqrt{b_{n-1}^2 + 3}\right|^2 + 3}\right| = \left|\sqrt{b_{n-1}^2 + 3 + 3}\right| = \ldots =$

$\left|\sqrt{b_0^2 + 3n}\right| = \left|\sqrt{64 + 3n}\right|$

c) (c) $c_{n+1} = (n+1)c_n + (n^2+n)c_{n-1}$, $c_0 = 0$, $c_1 = 1$.

$c_0 = 0 \qquad = 0! \cdot 0$

$c_1 = 1 \qquad = 1! \cdot 1$

$c_2 = 2 \qquad = 2! \cdot 1$

$c_3 = 12 \qquad = 3! \cdot 2$

$c_4 = 72 \qquad = 4! \cdot 3$

$c_5 = 600 \qquad = 5! \cdot 5$

$c_6 = 5760 \qquad = 6! \cdot 8$

$\vdots$

$c_n = n! \cdot F_n$ trzeba to jeszcze udowodnić indukcyjnie

I $n=0$ $c_0=0$

Zał. dla $n$

II $n+1$ $c_{n+1}=(n+1)!\cdot F_{n+1}$

$$c_{n+1}=(n+1)!\cdot F_{n+1}=(n+1)\cdot n!\cdot(F_n+F_{n-1})=$$
$$(n+1)n!\,F_n+(n+1)n!\,F_{n-1}=$$
$$(n+1)c_n+n(n+1)c_{n-1}=(n+1)c_n+(n^2+n)c_{n-1}$$

# -5 (done)

31 October, 2023 16:47

5. (-) Rozwiąż zależności rekurencyjne:

   (a) $c_0 = 1, c_n = c_0 + c_1 + \ldots, c_{n-1}$
   (b) $d_0 = 1, d_1 = 2, d_n = d_{n-1}^2 / d_{n-2}$.

a (a) $c_0 = 1, c_n = c_0 + c_1 + \ldots, c_{n-1}$

$c_0 = 1 \quad c_1 = 1 \quad c_2 = 2 \quad c_3 = 4 \quad c_4 = 8 \quad c_5 = 16$

Zgadujemy $2^{n-1}$ dla $n \geq 1$

Dowód indukcyjny:

I $c_1 = 1 = 2^{1-1} = 2^{n-1}$ ✓

II Zał. $c_n = 2^{n-1}$ działa, chcemy udowodnić że dla $n+1$ działa $c_{n+1} = 2^n$

$$c_{n+1} = c_0 + c_1 + c_2 + \ldots + c_{n-1} + c_n =$$
$$1 + 1 + 2 + \ldots + 2^{n-2} + 2^{n-1} =$$
$$2 + 2 + 4 + \ldots + 2^{n-2} + 2^{n-1} =$$
$$4 + 4 + \ldots + 2^{n-2} + 2^{n-1} =$$
$$2^{n-2} + 2^{n-2} + 2^{n-1} =$$
$$2^{n-1} + 2^{n-1} =$$
$$2 \cdot 2^{n-1} = 2^n \quad ✓$$

b (b) $d_0 = 1, d_1 = 2, d_n = d_{n-1}^2 / d_{n-2}$.

$d_0 = 1 \quad d_1 = 2 \quad d_2 = 4 \quad d_3 = 8 \quad d_4 = 16$

Zgaduję: $d_n = 2^n \quad n \in \mathbb{N}$

I $n = 0 \quad d_0 = 2^0 = 1$ ✓

I $n=0$ $\quad d_0 = 2^0 = 1$ ✓

II $n$ ✓ $\;n+1$ $\quad d_{n+1} = \dfrac{d_n^2}{d_{n-1}} = \dfrac{(2^n)^2}{2^{n-1}} = 2^{2n-(n-1)} = 2^{n+1}$ ✓

# 6 (done)

31 October, 2023 16:47

Wykaż, że iloczyn dowolnych kolejnych $k$ liczb naturalnych jest podzielny przez $k!$.

V1

Dla 1,2,3,….,k trywialne.
w.p.p. zauważamy że w k! mamy dokładnie k grup modulo k (0 ---- k-1)
Tyle samo grup modulo k będzie w k kolejnych liczb naturalnych
Jeśli zapiszemy pierwszą jako n, mamy ciąg n, n+1, n+2, …., n+k-1

Idziemy po kolei, grupy się zapętlają - dla każdego wyrazu z n * (n+1) * … * (n + k - 1) będziemy mieli element z k! z takim samym modulo k

Np.

1,2,3,4,5 mod k = 1,2,3,4,0

7,8,9,10,11 mod k = 2,3,4,0,1

W szczegolnosci, mamy po jednym elemencie w liczniku i mianowniku takim ze x mod k === y mod k === 0 c.k.d.

V2

Jeśli zapiszemy w drugą stronę, czyli:

$$\frac{n\cdot(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}$$

to możemy teraz pomnożyć przez $\frac{(n-k)!}{(n-k)!}$

$$\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}\cdot\frac{(n-k)!}{(n-k)!} =$$

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k} \in \mathbb{N} \quad \text{c.k.d.}$$

# +7

31 October, 2023 16:47

7. (+) Wyprowadź zależność rekurencyjną dla liczby nieporządków: $d_{n+1} = n(d_n + d_{n-1})$. Jakie należy przyjąć warunki początkowe dla tej zależności? W zadaniu tym nie można korzystać ze wzoru wyprowadzonego na jednej z poprzednich list.

# 8 (done)

31 October, 2023 16:47

8. Rozwiąż zależność rekurencyjną

$a_n^2 = 2a_{n-1}^2 + 1$ z warunkiem początkowym $a_0 = 2$ i założeniem, że $a_n > 0$ dla każdego naturalnego $n$.

$a_n^2 = 2a_{n-1}^2 + 1$ $\quad b_n = a_n^2$

$b_n = 2b_{n-1} + 1$

$b_{n+1} = 2b_n + 1$ $\quad b_{n+1} - 2b_n - 1 = 0$ teraz anihilatory

$b_{n+1} - 2b_n \longrightarrow (E-2)$

$-1 \longrightarrow (E-1)$

$(E-2)(E-1)\langle a_n \rangle = 0$

$b_n = \alpha \cdot 2^n + \beta$

$b_0 = a_0^2 = 4 = \alpha + \beta$

$b_1 = 2 \cdot 4 + 1 = 9 = 2\alpha + \beta$

$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = 5 \\ \beta = -1 \end{cases}$

$b_n = 5 \cdot 2^n - 1 \Rightarrow a_n = \sqrt{5 \cdot 2^n - 1}$

9 (done)

31 October, 2023 16:47

9. Ile jest wyrazów złożonych z $n$ liter należących do 25-literowego alfabetu łacińskiego, zawierających parzystą liczbę liter $a$?

Uogólnijmy: dla dowolnego r-literowego alfabetu

$a_0 = 1$ (0-literowe : 1 kombinacja)

$a_1 = r-1$ (wszystkie litery oprócz $a$)

i rekurencja:

Rekurencja powstaje przez połączenie dwóch opcji:

a) $a$ umieszczony na dowolnym miejscu poza ostatnim

b) $a$ na ostatnim = bierzemy ciągi o nieparzystej ilości wystąpień $a$

$$a_n = \underbrace{(r-1)a_{n-1}}_{a} + \underbrace{r^{n-1} - a_{n-1}}_{b} = r^{n-1} + (r-2)a_{n-1}$$

$$a_n = (r-2)\cdot a_{n-1} + r^{n-1} \Rightarrow a_{n+1} = (r-2)a_n + r^n \Rightarrow a_{n+1} - (r-2)a_n - r^n = 0$$

i teraz anihilatory

$a_{n+1} - (r-2)a_n \rightarrow (E - (r-2))$

$-r^n \rightarrow (E - r)$

$$(E-(r-2))(E-r)\langle a_n \rangle = 0 \Rightarrow a_n = \alpha(r-2)^n + \beta\cdot r^n$$

$$\begin{cases} a_0 = 1 = \alpha + \beta \\ a_1 = (r-1) = \alpha(r-2)^n + r\beta \end{cases} \Rightarrow \dots \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{2} \\ \beta = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$a_n = \frac{1}{2}(r-2)^n + \frac{1}{2}r^n$$

czyli w naszym przypadku

$a_n = \frac{1}{2}\cdot 23^n + \frac{1}{2}\cdot 25^n$ ułożeń

10 (done)

31 October, 2023 16:47

10. Znajdź ogólną postać rozwiązań następujących równań rekurencyjnych za pomocą anihilatorów i rozwiąż jedno z równań do końca:

(a) $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 3^n - 1$, gdy $a_0 = a_1 = 0$.
(b) $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n + n2^{n+1}$, gdy $a_0 = a_1 = 1$.
(c) $a_{n+2} = \frac{1}{2^{n+1}} - 2a_{n+1} - a_n$, gdy $a_0 = a_1 = 1$.

(a) $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 3^n - 1$, gdy $a_0 = a_1 = 0$.

$a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 3^n - 1 \Rightarrow a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n - 3^n - 1 = 0$

$a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n \rightarrow (E^2 - 2E + 1) = (E-1)^2$

$-3^n \rightarrow (E-3)$

$1 \rightarrow (E-1)$

$(E^2 - 2E + 1)(E-3)(E-1)\langle a_n \rangle = (E-1)^3(E- \ )\langle a_n \rangle = 0$

a) $a_n = \alpha \cdot 1^n + \beta \cdot n \cdot 1^n + \gamma \cdot n^2 \cdot 1^n + \delta \cdot 3^n$

(b) $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n + n2^{n+1}$, gdy $a_0 = a_1 = 1$.

$a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n + n2^{n+1} \Rightarrow a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n - n2^{n+1} = 0$

$a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n \rightarrow (E^2 - 4E + 4) = (E-2)^2$

$-n(2^{n+1}) \rightarrow (E-2)^2$

mamy więc $(E-2)^4\langle a_n \rangle = 0$

b) $a_n = \alpha \cdot 2^n + \beta \cdot n \cdot 2^n + \gamma \cdot n^2 \cdot 2^n + \delta \cdot n^3 \cdot 2^n$

(c) $a_{n+2} = \frac{1}{2^{n+1}} - 2a_{n+1} - a_n$, gdy $a_0 = a_1 = 1$.

$a_{n+2} = \frac{1}{2^{n+1}} - 2a_{n+1} - a_n \Rightarrow a_{n+2} - \frac{1}{2^{n+1}} + 2a_{n+1} + a_n = 0$

$a_{n+2} + 2a_{n+1} + a_n \rightarrow (E^2 + 2E + E) \rightarrow (E+1)^2$

$\frac{1}{\ldots} \rightarrow (E \ \frac{1}{\ldots})$

$a_{n+2} + 2a_{n+1} + a_n$

$$-\frac{1}{2^{n+1}} \longrightarrow \left(E - \frac{1}{2}\right)$$

$$(E+1)^2\left(E - \frac{1}{2}\right)\langle a_n \rangle = 0$$

$$a_n = \alpha \cdot (-1)^n + \beta \cdot (-1)^n \cdot n + \gamma \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

i ten przykład dokończę

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 = \alpha + \gamma \\ a_1 &= 1 = -\alpha - \beta + \frac{1}{2}\gamma \\ a_2 &= -\frac{5}{2} = \alpha + 2\beta + \frac{1}{4}\gamma \end{aligned} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{7}{9} \\ \beta = -\frac{5}{3} \\ \gamma = \frac{2}{9} \end{cases}$$

$$a_n = \frac{7}{9} \cdot (-1)^n - \frac{5}{3} \cdot (-1)^n \cdot n + \frac{2}{9} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

# 11

31 October, 2023 16:47

11. Niech $c_n$ oznacza liczbę ciągów długości $n$ złożonych z $n$ cyfr ze zbioru $\{0, 1, 2\}$, nie zawierających dwóch następujących po sobie zer i dwóch następujących po sobie jedynek. Wyprowadź zależność rekurencyjną, jaką spełniają liczby $c_n$ przyjmując $c_0 = 1$. Rozwiąż otrzymaną zależność rekurencyjną.

# 12

31 October, 2023 16:47

12. Na ile sposobów można rozdać $n$ różnych nagród wśród czterech osób $A, B, C, D$ tak, aby:

    (a) $A$ dostała przynajmniej jedną nagrodę?

    (b) $A$ lub $B$ nie dostała nic?

    (c) Zarówno $A$ jak i $B$ dostała przynajmniej jedną nagrodę?

    (d) Przynajmniej jedna spośród $A$, $B$, $C$ nic nie dostała?

    (e) Każda z 4 osób coś dostała?

(a) $A$ dostała przynajmniej jedną nagrodę?

Osoba A dostaje 1 z n nagród, pozostałe n-1 rozdzielamy dowolnie
C(n,1) * 4^(n-1)

(b) $A$ lub $B$ nie dostała nic?

2 * 3^n

(c) Zarówno $A$ jak i $B$ dostała przynajmniej jedną nagrodę?

Wybieramy 2 nagrody z n, mnozymy * 2 bo kazda osoba może dostac jedna z tych dwoch, reszta jak w a
2* C(n,2) * 4^(n-2)