1. Sprawdzić, że:

(a) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = 1,$

(b) $\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = np.$

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

$$a)\ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \underbrace{p^k}_{y} \underbrace{(1-p)}_{x}{}^{n-k} = (1-p+p)^n = 1$$

$$b)\ \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} n \cdot \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k} =$$

$$= np \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-1-(k-1)} = np(1-p+p)^n = np \cdot 1 = np$$

$$k \cdot \binom{n}{k} = k \cdot \frac{n!}{k!\, n-k!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = n \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = n \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} = n \cdot \binom{n-1}{k-1}$$

2. Sprawdzić, że

(a) $$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = 1,$$

(b) $$\sum_{k=0}^{\infty} k \cdot e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = \lambda.$$

a) $$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}}_{} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = e^0 = 1$$

$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ ← szereg Maclaurina

b) $$\sum_{k=0}^{\infty} k \cdot e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} k\, e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} = \lambda \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}}_{\text{podpunkt a)}} = \lambda \cdot 1 = \lambda$$

3. **Funkcją Γ-Eulera** nazywamy wartość całki:

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty t^{p-1}\, e^{-t}\, dt, \quad p > 0.$$

Wykazać, że $\Gamma(p) = (p-1)\,\Gamma(p-1)$, $p \in \mathbb{R}_+$, w szczególności $\Gamma(n) = (n-1)!$, $n \in \mathbb{N}$.
UWAGA: nie dowodzimy istnienia całek, tylko formalne przekształcenia.

a) $$\Gamma(p) = \int_0^\infty t^{p-1} e^{-t} dt = -\frac{t^{p-1}}{e^t}\Big|_0^\infty - \int_0^\infty (p-1)\, t^{p-2} \cdot (-e^{-t})\, dt =$$

$$\left| \begin{array}{ll} f = t^{p-1} & g' = e^{-t} \\ f' = (p-1)t^{p-2} & g = -e^{-t} \end{array} \right|$$

$$\lim_{t \to \infty} \frac{t^{p-1}}{e^t} \overset{\text{l'Hopital}}{=} \lim_{t\to\infty} \frac{(p-1)t^{p-2}}{e^t} \overset{\text{l'Hopital}}{=} \lim_{t\to\infty} \frac{(p-1)(p-2)t^{p-3}}{e^t} \overset{\text{l'Hopital}}{=} \dots \overset{\text{l'Hopital}}{=} \lim_{t\to\infty} \frac{(p-1)!}{e^t} = 0$$

$$= (p-1) \int_0^\infty t^{p-2} e^{-t} dt = (p-1)\,\Gamma(p-1)$$

b) Wystarczy pokazać, że $\Gamma(1) = 1$

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty t^{1-1} e^{-t} dt = \int_0^\infty e^{-t} = -e^{-t}\Big|_0^\infty = 0 - (-1) = 1$$

4. Niech $f(x) = \lambda \exp(-\lambda x)$, gdzie $\lambda > 0$. Obliczyć wartości całek:

(a) $\int_0^\infty f(x)\,dx$,

(b) $\int_0^\infty x\,f(x)\,dx$.

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad , \quad \lambda > 0$$

a) $$\int_0^\infty f(x)\,dx = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \int_0^\infty \lambda \frac{e^{-t}}{\lambda}\,dt = \int_0^\infty e^{-t}\,dt = -e^{-t}\Big|_0^\infty = 0-(-1)=1$$

$$\left| \begin{array}{l} t = \lambda x \\ dt = \lambda\,dx \\ dx = \frac{1}{\lambda}\,dt \end{array} \right|$$

z podpunktu a)

b) $$\int_0^\infty x\,f(x)\,dx = \int_0^\infty x \lambda e^{-\lambda x}\,dx = -xe^{-\lambda x}\Big|_0^\infty + \underbrace{\int_0^\infty e^{-\lambda x}\,dx}_{} = 0 + \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}$$

$$\left| \begin{array}{ll} f(x) = x & g'(x) = \lambda e^{-\lambda x} \\ f'(x) = 1 & g(x) = -e^{-\lambda x} \end{array} \right|$$

$$\lim_{x\to\infty} -\frac{x}{e^{-\lambda x}} \overset{\text{l'Hopital}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{-\lambda e^{-\lambda x}} = 0$$

5. Wykazać, że $D_n = n$, gdzie

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 1 & 1 & & & \\ 1 & & 1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 1 & & & & 1 \end{vmatrix}.$$

Mamy pokazać, że wyznacznik macierzy $D_n = n$. Zastosujemy eliminację Gaussa

Chcemy przekształcić D_n do macierzy dolnotrójkątnej. Wtedy wyznacznikiem D_n będzie iloczyn wyrazów na przekątnej.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & \dots & \dots & -1 \\ 1 & 1 & & & & \\ 1 & & 1 & & & \\ \vdots & & & \ddots & & \\ \vdots & & & & \ddots & \\ 1 & & & & & 1 \end{vmatrix}$$

Będziemy eliminować elementy z pierwszego wiersza za pomocą kolejnych wierszy:

$R_1 + R_2$
$R_1 + R_3$
$\vdots$
$R_1 + R_n$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 1 & 1 & & & & \\ 1 & & 1 & & & \\ \vdots & & & \ddots & & \\ \vdots & & & & \ddots & \\ 1 & & & & & 1 \end{vmatrix}$$

każde odjęcie wiersza zwiększy element $d_{1,1}$ o 1, więc ostatecznie $d_{1,1} = n$, a D_n jest macierzą dolnotrójkątną, gdzie pozostałe elementy na przekątnej mają wartość 1 (nie wpływamy na wiersze $R_2 - R_n$)

$$\begin{vmatrix} n & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 1 & & & & \\ 1 & & 1 & & & \\ \vdots & & & \ddots & & \\ \vdots & & & & \ddots & \\ 1 & & & & & 1 \end{vmatrix}$$

6. **(2p.)** Niech $I = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\} dx$. Mamy $I^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{x^2+y^2}{2}\right\} dy\, dx$. Stosując podstawienie $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, wykazać, że $I^2 = 2\pi$.

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dy\, dx$$

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{dx}{dr} & \frac{dx}{d\theta} \\ \frac{dy}{dr} & \frac{dy}{d\theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin(\theta) \\ \sin\theta & r\cos(\theta) \end{vmatrix} = \underbrace{r\cos(\theta)^2 + r\sin(\theta)^2}_{\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2 = 1} = r$$

$$I^2 = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} |r| e^{-\frac{r^2\cos(\theta)^2 + r^2\sin(\theta)^2}{2}} dr\, d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} r e^{-\frac{r^2}{2}} dr\, d\theta = \int_0^{2\pi} -e^{-\frac{r^2}{2}}\Big|_0^{\infty} d\theta = \int_0^{2\pi} 1\, d\theta =$$

$$= \theta\Big|_0^{2\pi} = 2\pi$$

7. Symbol $\bar{s}$ oznacza srednią ciągu $s_1, \ldots, s_n$. Udowodnić, że:

(a) $\sum_{k=1}^{n}(x_k - \bar{x})^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 - n \cdot \bar{x}^2$,

(b) $\sum_{k=1}^{n}(x_k - \bar{x})(y_k - \bar{y}) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k - n\bar{x}\bar{y}$.

a) $\sum_{k=1}^{n} (x_k - \bar{x})^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 + \bar{x}^2 - 2 x_k \bar{x}^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 + \sum_{k=1}^{n} \bar{x}^2 - \sum_{k=1}^{n} 2 x_k \cdot \bar{x} =$

$= \sum_{k=1}^{n} x_k^2 + n\bar{x}^2 - 2\bar{x}\sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 + n\bar{x}^2 - 2\bar{x}(n\bar{x}) = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 + n\bar{x}^2 - 2n\bar{x}^2 =$

$= \sum_{k=1}^{n} x_k^2 - n\bar{x}^2$

b) $\sum_{k=1}^{n}(x_k - \bar{x})(y_k - \bar{y}) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k - \bar{y} x_k - \bar{x} y_k + \bar{x}\bar{y} = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k - \sum_{k=1}^{n} \bar{y} x_k - \sum_{k=1}^{n} \bar{x} y_k + \sum_{k=1}^{n} \bar{x}\bar{y} =$

$= \sum_{k=1}^{n} x_k y_k - \bar{y}\sum_{k=1}^{n} x_k - \bar{x}\sum_{k=1}^{n} y_k + n\bar{x}\bar{y} = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k - \bar{y} n\bar{x} - \bar{x} n\bar{y} + n\bar{x}\bar{y} = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k - n\bar{x}\bar{y}$

8. **(2p.)** Dane są wektory $\vec{\mu}, X \in \mathbb{R}^n$ oraz macierz $\Sigma \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Niech $S = (X-\vec{\mu})^T\Sigma^{-1}(X-\vec{\mu})$ oraz $Y = A\cdot X$, gdzie macierz A jest odwracalna. Sprawdzić, że $S = (Y - A\vec{\mu})^T(A\Sigma A^T)^{-1}(Y - A\vec{\mu})$.

$$S = (X - \vec{\mu})^T \Sigma^{-1} (X - \mu)$$

$$Y = AX$$

$$(Y - A\vec{\mu})^T (A\Sigma A^T)^{-1} (Y - A\mu) = (AX - A\vec{\mu})^T (A\Sigma A^T)^{-1} (AX - A\vec{\mu}) =$$

$$= (A(X - \vec{\mu}))^T (A\Sigma A^T)^{-1} (A(X - \vec{\mu})) = ((X - \vec{\mu})^T A^T)(A\Sigma A^T)^{-1}(A(X - \vec{\mu})) =$$

$$= ((X - \vec{\mu})^T A^T)(A^{T^{-1}} \Sigma^{-1} A^{-1})(A(X - \vec{\mu})) = (X - \vec{\mu})^T \, Id \, \Sigma^{-1} \, Id \, (X - \vec{\mu}) =$$

$$= (X - \vec{\mu})^T \Sigma^{-1} (X - \vec{\mu}) = S$$

9. Udowodnić, że $\int_0^\infty x^k \lambda \exp(-\lambda x)\, dx = \frac{k!}{\lambda^k}, \quad k = 0, 1, \ldots, \quad \lambda > 0.$

Dowód - Indukcja

Teza: Dla każdego $k \in \mathbb{N}$ zachodzi $\int_0^\infty x^k \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{k!}{\lambda^k}$

Podstawa - dla $k=0$

$$\int_0^\infty x^0 \lambda e^{-\lambda x} dx = \left| \begin{matrix} t = \lambda x & dx = \frac{1}{\lambda} dt \\ dt = \lambda dx & \end{matrix} \right| = \int_0^\infty e^{-t} dt = -e^{-t} \Big|_0^\infty = -e^{-\lambda x} \Big|_0^\infty = 0 - (-1) = 1 = \frac{0!}{\lambda^0}$$

Krok - załóżmy, że teza zachodzi dla k, pokażemy, że zachodzi dla $k+1$

$$\int_0^\infty x^{k+1} \lambda e^{-\lambda x} dx = \left| \begin{matrix} f(x) = x^{k+1} & g'(x) = \lambda e^{-\lambda x} \\ f'(x) = (k+1)x^k & g(x) = -e^{-\lambda x} \end{matrix} \right| = \overbrace{x^{k+1} e^{-\lambda x} \Big|_0^\infty}^{0} + \int_0^\infty (k+1) x^k e^{-\lambda x} dx = 0 + \int_0^\infty (k+1) x^k e^{-\lambda x} \frac{\lambda}{\lambda} dx =$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^{k+1}}{e^{\lambda x}} \overset{\text{l'Hopital}}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{(k+1) x^k}{\lambda e^{\lambda x}} \overset{\text{l.H}}{=} \ldots = \lim_{x \to \infty} \frac{(k+1)!}{\lambda^{k+1} e^{\lambda x}} = 0$$

$$= \frac{k+1}{\lambda} \int_0^\infty x^k \lambda e^{-\lambda x} dx \overset{\text{z założenia}}{=} \frac{k+1}{\lambda} \cdot \frac{k!}{\lambda^k} = \frac{(k+1)!}{\lambda^{k+1}} \quad \square$$

10. Obliczyć całkę nieoznaczoną $\int x \, exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx$

$$\int x e^{\left(\frac{-x^2}{2}\right)} dx = \left| \begin{array}{ll} t = \frac{x^2}{2} & dx = \frac{1}{x} dt \\ dt = x\,dx & \end{array} \right| = \int x e^{-t} \cdot \frac{1}{x} dt = \int e^{-t} dt = -e^{-t} + C = -e^{\frac{-x^2}{2}} + C$$