

19 zad.	1	1	3	4	5	6	7	8	9	10	some
plt.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

morf.	1	1	1	1	2	1	1	1	1	1	1
-------	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

- ✓ 1. Pokaż, że jeśli w grafie G istnieje marszruta z u do v , to istnieje też ścieżka z u do v .
- ✓ 2. Udowodnij następujące twierdzenie:

Niech G będzie grafem prostym, w którym każdy wierzchołek ma stopień przynajmniej k . Wówczas G zawiera ścieżkę o długości k . Jeśli $k \geq 2$, to G zawiera cykl o długości przynajmniej $k + 1$.

- ✓ 3. Niech t_i oznacza liczbę wierzchołków stopnia i w drzewie. Wyprowadź dokładny wzór na t_1 , liczbę liści w dowolnym drzewie. Dlaczego ta liczba nie zależy od t_2 ?
- ✓ 4. Pokaż, że graf G jest drzewem wtedy i tylko wtedy gdy dla dowolnej pary wierzchołków $u, v \in G$ w G istnieje dokładnie jedna ścieżka je łącząca.

- ✓ 5. (+) (2 punkty) Niech $d(u, v)$ oznacza odległość wierzchołków u i v , czyli długość najkrótszej ścieżki łączącej u i v . Dla każdego wierzchołka v w grafu G definiujemy $r(v) = \max\{d(v, u) : u \in V(G)\}$. Wierzchołek w , dla którego $r(w) = \min\{r(v) : v \in V(G)\}$ nazywa się *wierzchołkiem centralnym* grafu G , a liczba $r(G) = r(w) - \text{promieniem}$ grafu G .

- (a) (Jordan) Wykaż, że zbiór wierzchołków centralnych drzewa składa się z jednego wierzchołka albo z pary wierzchołków sąsiednich.
 (b) Podaj algorytm znajdowania wierzchołków centralnych w drzewie, działający w czasie $O(m + n)$.

- ✓ 6. (+) Niech $d = (d_1, d_2, \dots, d_n)$ będzie ciągiem liczb naturalnych większych od zera. Wykaż, że d jest ciągiem stopni wierzchołków pewnego drzewa o n wierzchołkach wtedy i tylko wtedy, gdy $\sum_{i=1}^n d_i = 2(n-1)$.
Uwaga: w zadaniu tym trzeba pokazać implikację w obie strony.

7. Niech Q_k oznacza graf k -wymiarowej kostki, tzn. zbiór wierzchołków tego grafu tworzą wszystkie k -elementowe ciągi zer i jedynek i dwa wierzchołki są sąsiednie wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiadające im ciągi różnią się dokładnie jedną współrzędną. Wykaż, że jest to graf dwudzielny.

- ✓ 8. Przedstaw algorytm, służący do sprawdzania, czy dany graf jest dwudzielny, korzystający z przeglądania grafu metodą w głąb. Złożoność Twojego algorytmu powinna być $O(m + n)$.
- ✓ 9. (+) Pokaż, że jeśli każdy wierzchołek w grafie $G = (V, E)$ ma stopień przynajmniej k , to G zawiera każde drzewo k -krawędziowe.
- ✓ 10. Pokaż, że graf $G = (V, E)$, w którym każdy wierzchołek ma stopień 3 zawiera cykl o parzystej długości.

1. Pokaż, że jeśli w grafie G istnieje marszruta z u do v , to istnieje też ścieżka z u do v .

Zał. $u \neq v$ bo powtarzałby się wierzchołek o to wtedy nie jest ścieżką.

Intuicyjnie bardzo proste - jeśli istnieje marszruta w której jakiś wierzchołek się powtarza, to można "wyciąć" ten powtarzający fragment. Wyjęte powtórzenia \Rightarrow jest to ścieżka

Przykładowo z marszrutą

$$v, v_1, \dots, v_k, v_m, v_{m+1}, \dots, v_l, \dots, u$$

"wycinamy" ten fragment

Zakładając że żadne wierzchołki się już nie powtarzają otrzymujemy ścieżkę.

Formalnie:

Niech $M = v, v_1, v_2, \dots, u$ będzie marszrutą między v_i i u

* Mówiąc że jest to marszruta, istnieją takie i, j w M że $v_i = v_j$

Mozemy "wyciąć" $v_{i+1}, v_{i+2}, \dots, v_j$

jeśli to nadal marszrute to znów *

w.p.p. mamy ścieżkę $u-v$ co chcieliśmy osiągnąć!

$$0 \leq i < j \leq \text{len}(M)$$

Udowodnij następujące twierdzenie:

a) Niech G będzie grafem prostym, w którym każdy wierzchołek ma stopień przynajmniej k . Wówczas G zawiera ścieżkę o długości k . Jeśli $k \geq 2$, to G zawiera cykl o długości przynajmniej $k+1$.

b) Niech $P = (V_0, V_1, \dots, V_{k-l}, V_k)$ będzie najdłuższą ścieżką w G

długość $P = l$

* $\deg(V_k) \leq k$ bo minimalny stopień wierzchołka to k

Wszystcy sąsiadzi V_k muszą być na ścieżce - w.p.p. moglibyśmy przedłużyć najdłuższą ścieżkę dodającą sąsiada który nie jest na koniec

sprzec�oś!

D) Bierzemy jednego z sąsiadów z powyżej ścieżki, np. V_i
ścieżka zmienia się w

$V_0, V_1, \dots, V_i, \dots, V_k, V_l$

co można też zapisać jako:

$V_l, V_{l+1}, \dots, V_k, V_i, V_{i-1}, \dots, V_1, V_0$

mamy cykl długości $k+l$ ✓

3. Niech t_i oznacza liczbę wierzchołków stopnia i w drzewie. Wyprowadź dokładny wzór na t_1 , liczbę liści w dowolnym drzewie. Dlaczego ta liczba nie zależy od t_2 ?

Mamy wy prowadzić wzór na liczbę wierzchołków stopnia l (z jednej krawędzią incidentną) i postawić, że nie zależy ona od wierzchołków stopnia 2.

Bogus! - przygotowujemy dwa wzory na ilość krawędzi i rozpisujemy sumę

Izłożenie o uściskach altoni

$$\sum_{i=1}^n \deg(v_i) = 2m = \sum_{i=1}^n (i \cdot t_i) \Rightarrow m = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (i \cdot t_i)$$

$$\text{II) Z wykłodu: } m = n - l = \sum_{i=1}^l (t_i) - l$$

priorytetujemy

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n i \cdot t_i = \sum_{i=1}^l t_i - l \quad // \text{na jedną stronę}$$

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^l i \cdot t_i - \sum_{i=1}^l t_i + l = 0 \quad // 2$$

$$\sum_{i=1}^l i \cdot t_i - \sum_{i=1}^l 2t_i + 2 = 0 \quad // \text{w jedną stronę}$$

$$\sum_{i=1}^l (i-2)t_i + 2 = 0$$

// wyjmujemy dwie pierwsze wyrazy

$$(l-2)t_1 + (2-2)t_2 + \sum_{i=3}^l (i-2)t_i + 2 = 0 \quad // t_2 się zeruje$$

$$-t_1 + \sum_{i=3}^l (i-2)t_i + 2 = 0 \quad // \text{wyznaczamy } t_1$$

$$t_1 = \sum_{i=3}^l (i-2)t_i + 2$$

Wyznaczyliśmy wzór na t_1 , jak widać nie zależy on od t_2 .

Kilka wzorów z wikipedia i jeden z wykładek

Graf prosty - graf bez pętli własnych i krawędzi wielokrotnych. Często określenie graf (bez przymiotników) oznacza graf prosty.

Dany jest graf prosty G o n wierzchołkach (v_1, v_2, \dots, v_n) i m krawędziach. Na mocy lematu o uściskach dloni spełniona jest następująca własność:

$$\sum_{i=1}^n \deg(v_i) = 2m = \sum_{i=1}^n (i \cdot t_i) \quad (\text{ilość krawędzi} \cdot \text{ilość wierzchołków tego stopnia})$$

Powyższą własność nietrudno jest zrozumieć intuicyjnie: każda krawędź łączy dwa wierzchołki, a zatem dodając do siebie stopnie sąsiadujących wierzchołków (czyli liczby krawędzi wychodzących z nich), liczymy każdą z krawędzi dwukrotnie, co potwierdza prawdziwość powyższej własności. Wynika z tego również fakt, że w dowolnym grafie liczba wierzchołków o nieparzystych stopniach jest parzysta.

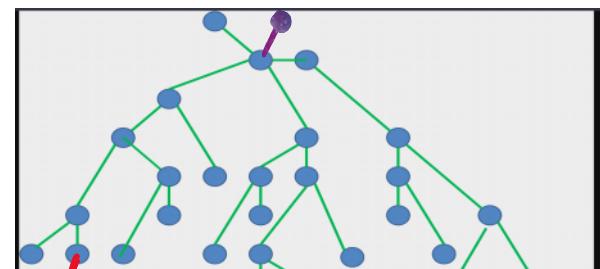
The degree sum formula states that, given a graph $G = (V, E)$,

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|.$$

Charakteryzacja drzewa

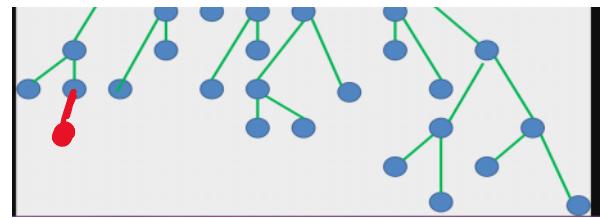
Niech $G = (V, E)$ będzie n -wierzchołkowym grafem nieskierowanym ($n \geq 1$). Wówczas następujące stwierdzenia są równoważne:

- ① G jest spójny i acykliczny (G jest drzewem),
- ② G jest spójny i ma $n - 1$ krawędzi.
- ③ G jest acykliczny i ma $n - 1$ krawędzi.
- ④ $\forall_{u,v \in V} G$ zawiera dokładnie jedną $u - v$ -ścieżkę.



U

tworzymy t2 dolaczajac do t1. Nie zmienia sie ilosc liisci bo nie tworzy sie nowy liisc tylk stary sie przedluza.



4. Pokaż, że graf G jest drzewem wtedy i tylko wtedy gdy dla dowolnej pary wierzchołków $u, v \in G$ w G istnieje dokładnie jedna ścieżka łącząca.

Musimy udowodnić implikację w obiektach stronie
To drzewo \Rightarrow jest dokładnie jedna ścieżka
między w. u i v w G
dowolnymi

$\text{a)} L \Rightarrow P$

Zakładamy że G jest drzewem, więc prawą stroną implikacji wynika z definicji drzewa - nie ma żadnych cykli, więc może istnieć tylko jedna ścieżka

$b) P \Rightarrow L$

Z założeniu wynika że graf jest spójny.

Dodatekowo:
I) Jeśli istnieje więcej niż jedna ścieżka między u i v
 \Rightarrow to można połączyc je w cykl \Rightarrow nie drzewo

II) Jeśli nie istnieje chociaż jedna ścieżka między u i v
to graf nie jest spójny - sprzeczność z założeniem

Oprócz tego bardzo łatwo pokazać równoważne definicje

Definicja i przykłady

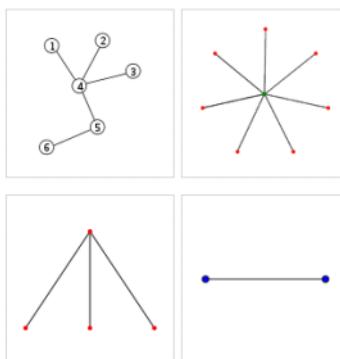
Drzewo – graf nieskierowany, który jest acykliczny^[1] i spójny^{[2][1]}, czyli taki graf, że z każdego wierzchołka drzewa można dotrzeć do każdego innego wierzchołka (spójność) i tylko jednym sposobem (acykliczność, brak możliwości chodzenia „w kółko”)^[3].

Równoważne definicje [edytuj | edytuj kod]

Graf prosty G jest drzewem jedynie, jeśli spełnia jeden z warunków^[3]:

- dowolne dwa wierzchołki łączy dokładnie jedna ścieżka prosta
- G jest acykliczny i dodanie krawędzi łączącej dowolne dwa wierzchołki utworzy cykl
- G jest spójny i usunięcie dowolnej krawędzi spowoduje, że G przestanie być spójny

Przykłady drzew [edytuj | edytuj kod]



+5 (2pkt)

1 December, 2023 20:06

...
...

5. (+) (2 punkty) Niech $d(u, v)$ oznacza odległość wierzchołków u i v , czyli długość najkrótszej ścieżki łączącej u i v . Dla każdego wierzchołka v grafu G definiujemy $r(v) = \max\{d(v, u) : u \in V(G)\}$. Wierzchołek w , dla którego $r(w) = \min\{r(v) : v \in V(G)\}$ nazywa się *wierzchołkiem centralnym* grafu G , a liczba $r(G) = r(w)$ – *promieniem* grafu G .
- (Jordan) Wykaż, że zbiór wierzchołków centralnych drzewa składa się z jednego wierzchołka albo z pary wierzchołków sąsiednich.
 - Podaj algorytm znajdowania wierzchołków centralnych w drzewie, działający w czasie $O(m + n)$.

6. (+) Niech $d = (d_1, d_2, \dots, d_n)$ będzie ciągiem liczb naturalnych większych od zera. Wykaż, że d jest ciągiem stopni wierzchołków pewnego drzewa o n wierzchołkach wtedy i tylko wtedy, gdy $\sum_{i=1}^n d_i = 2(n-1)$.

Uwaga: w zadaniu tym trzeba pokazać implikację w obie strony.

$$d \text{ jest ciągiem stopni} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n d_i = 2(n-1)$$

w dwie strony

I) $P \Rightarrow Q$ Złożymy, że d jest ciągiem stopni drzewa o n wierzchołkach.

Z teoretycznego uściszenia dowiadujemy się

$$\deg(v_1) + \deg(v_2) + \dots + \deg(v_n) = \sum_{i=1}^n \deg(v_i) = 2m$$

Widzimy też, że drzewo ma $n-1$ krawędzi.

$$\sum_{i=1}^n \deg(v_i) = 2m = 2(n-1) \quad \text{c.o.n.w.}$$

II) $P \Rightarrow Q$ Złożymy, że $\sum_{i=1}^n d_i = 2(n-1)$, dowodząc, że d jest ciągiem stopni drzewa. Udoskonalijmy to indukcyjnie

a) Podstawa

$$n=1 \quad \sum_{i=1}^1 d_i = d_1 = 2(1-1) = 0$$

(Mledon wierzchołek, zero krawędzi)
więc się zgadza

b) Zakończenie indukcyjne

Złożymy, że dla dowolnego n dla którego zachodzi $\sum_{i=1}^n d_i = 2(n-1)$

istnieje taka para d_1, d_2, \dots, d_n taka, że d jest ciągiem stopni wierzchołków drzewa

c)

Musimy pokazać, że jeśli $\sum_{i=1}^{n+1} d'_i = 2(n+1)-1$ to $d'_1, d'_2, \dots, d'_{n+1}$ jest ciągiem stopni wierzchołków drzewa

\rightarrow M-1 na zakończenie P

7)
Mówiąc to zrobimy?

Dotóżmy jeden wierzchołek i dotóżmy go do pionowego drzewa jednego

krawędzią wierzchołka d_j^o . Mamy wtedy ciąg

Zauważmy że odstęp wierzchołek będzie stopień l, o wierzchołek d_j^o to d_j^o zwiększone o l

$$d_j^o' = d_j^o + l \quad d_{n+l} = l$$

$d_1, d_2, \dots, d_j, \dots, d_n, d_{n+l}$

$d_1', d_2', \dots, d_j', \dots, d_n', d_{n+l}'$

Rozpiszmy ciąg wierzchołków o stopniu n+l

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n d_i^o + d_j^o + d_{n+l} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n d_i^o + d_j^o + l + l = \sum_{i=1}^n d_i^o + 2l = 2(n-l) + 2 = 2n - 2(l+l-1)$$

c.n.w.

7. Niech Q_k oznacza graf k -wymiarowej kostki, tzn. zbiór wierzchołków tego grafu tworzą wszystkie k -elementowe ciągi zer i jedynek i dwa wierzchołki są sąsiednie wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiadające im ciągi różnią się dokładnie jedną współrzędną. Wykaż, że jest to graf dwudzielny.

8. Przedstaw algorytm, służący do sprawdzania, czy dany graf jest dwudzielny, korzystający z przeglądania grafu metodą w głąb. Złożoność Twojego algorytmu powinna być $O(m + n)$.

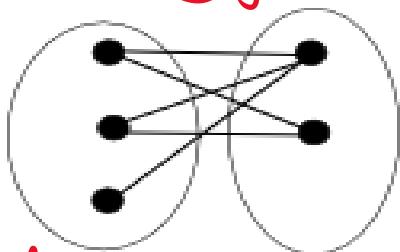
Najpierw definicja grafu dwudzielnego

Graf dwudzielny to graf którego wierzchołki można podzielić na dwa rozłączne zbior, tak by żaden krawędź nie łączyła dwóch wierzchołków z tej samej grupy

lub równoważnie

Graf który nie zawiera cykli nieparzystej długości

Pozostały graf dwudzienny



Idea: Pomalujmy wierzchołki na dwa kolory podczas przemierzania grafu DFSem. Jeśli wierzchołek jest pomalowany na zły kolor, to nie będzie dwudzienny.

```
/**  
 * Funkcja isBipartite sprawdza czy graf jest dwudzielny  
 * @param {Number[][]} graph - Graf w postaci tablicy list sąsiedztwa  
 * @param {number} v - Wierzchołek startowy - może być dowolny  
 * @param {boolean[]} visited - Tablica odwiedzonych wierzchołków  
 * @param {number[]} color - Tablica kolorów wierzchołków  
 * @returns {boolean} - Zwraca true jeśli graf jest dwudzielny, false w przeciwnym wypadku  
 */  
const isBipartite = (graph, v, visited, color) => {  
    visited[v] = true; // Oznaczamy wierzchołek jako odwiedzony  
    // Przeglądamy wszystkie wierzchołki sąsiadujące z wierzchołkiem v  
    for (const u of graph[v]) {  
        // Jeśli wierzchołek nie był odwiedzony to go odwiedzamy i nadajemy mu przeciwny kolor  
        // po czym wywołujemy rekurencyjnie funkcję isBipartite dla wierzchołka u (DFS)  
        if (!visited[u]) {  
            color[u] = !color[v];  
            if (!isBipartite(graph, u, visited, color)) {  
                return false;  
            }  
            // Jeśli wierzchołek był odwiedzony to sprawdzamy czy ma przeciwny kolor  
            // Jeśli nie ma to zwracamy false  
            } else if (color[u] === color[v]) {  
                return false;  
            }  
    }  
    return true;  
}
```

+9

1 December, 2023 20:06

9. (+) Pokaż, że jeśli każdy wierzcholek w grafie $G = (V, E)$ ma stopień przynajmniej k , to G zawiera każde drzewo k -krawędziowe.

10. Pokaż, że graf $G = (V, E)$, w którym każdy wierzchołek ma stopień 3 zawiera cykl o parzystej długości.

Zadanko na Pidgeonhole Principle

Podobnie jak w poprzednich zadaniach bierzemy najkrótszą ścieżkę w grafie. Nazwijmy ją P .

$$P = v_0, v_1, \dots, v_k$$

Weśmy v_0 , którego sąsiadami są v_i, v_j, v^o

• W zadaniu 2e udowodniliśmy, że nasz v_0 nie może być na ścieżce, bo innego P nie byłby najkrótszą ścieżką

*)) Jeśli i jest nieparzyste to cykl (analogicznie dla j)

$v_0, v_{i+1}, \dots, v_j, v_0$ ma $i+1$ krawędzi - cykl parzysty

**)) Jeśli i, j są parzyste

$v_0, v_i, v_{i+1}, \dots, v_j, v_0$ ma $j-i+2$ krawędzi - cykl parzysty