

Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka

Lista zadań nr 4. 25. marca i później

Zadania

1. Dana jest funkcja $f(x, y) = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2}(x^2 + 2xy + 7y^2) \right\}$ dla $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Wyznaczyć rozkłady brzegowe $f_X(x), f_Y(y)$.
2. Czy można tak dobrać stałą C , aby funkcja $f_{XY}(x, y) = Cxy + x + 2y$, dla $0 \leq x \leq 3$, $1 \leq y \leq 2$, była gęstością dwuwymiarowej zmiennej losowej?
3. Dana jest funkcja $f_{XY}(x, y) = \frac{4}{9}(-xy + x)$ dla $0 \leq x \leq 3$, $0 \leq y \leq 1$. Sprawdzić, czy zmienne X i Y są niezależne oraz obliczyć ppb $P(1 \leq X \leq 4, 0.5 \leq Y \leq 2)$.
4. (a) Załóżmy, że $X \sim U[0, 1]$ i niech $Y = X^n$. Udowodnić, że $f_Y(y) = \frac{y^{1/n-1}}{n}$, dla $0 \leq y \leq 1$.
(b) Niech $X \sim U[a, b]$. Obliczyć wartości $E(X), V(X)$.
5. Niech X będzie ciągłą zmienną losową i niech $Y = F_X(X)$. Udowodnić, że $Y \sim U[0; 1]$.
6. Niech $Y = X^2$ (X określona na \mathbb{R}). Wykazać, że

$$f_Y(y) = \frac{f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y})}{2\sqrt{y}}, \text{ dla } y > 0.$$

7. Zmienna losowa (X, Y) ma gęstość $f(x, y) = \frac{1}{6\pi}$ dla $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1$. Obliczyć wartości EX , EY , $E(X \cdot Y)$. Czy zmienne X, Y są niezależne?
8. Niech X podlega standardowemu rozkładowi Cauchy'ego, $f_X(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$, $x \in \mathbb{R}$. Udowodnić, że $Y = \frac{1}{X}$ ma również standardowy rozkład Cauchy'ego.
9. Niezależne zmienne losowe X, Y mają rozkłady $X \sim N(0, 1)$, $Y \sim N(0, 1)$. Znaleźć rozkład zmiennej $Z = X/Y$.
10. **Objaśnienia:** zmienna losowa X przyjmuje wartości x , zmienna losowa Θ – wartości θ .
Treść zadania: Z punktu $(0, 1)$ wychodzi półprosta, tworząca z osią OY kąt θ , $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.
Niech x będzie punktem przecięcia tej półprostej z osią OX . Załóżmy, że $\Theta \sim U\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
Jaki jest rozkład zmiennej X ?

Witold Karczewski