

Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka

Lista zadań nr 6. 8. kwietnia i później

Zadania

1. Starannie i bez korzystania z notatek napisać wielkie i małe litery: psi, deltę, kappę, koppe, sigmę w trzech wersjach (wielką, małą, małą na końcu wyrazu), oraz gęstości rozkładów $N(\mu, \sigma^2)$, $\text{Gamma}(b, p)$.
2. Zakładamy, że X_1, X_2, \dots, X_n są niezależne i mają ten sam rozkład, $f(x) > 0$ dla $x \in [0, 1]$. Obliczamy gęstość zmiennej $Y_1 = X_1 + X_2 + \dots + X_n$. Podać granice całkowania (układy nierówności) dla $Y_k = X_k$, $k = 2, \dots, n$.
3. Dane są ciągłe, niezależne zmienne losowe X, Y . Udowodnić, że $E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$.
4. Niech $f(x), F(x)$ będą odpowiednio gęstością i dystrybuantą zmiennej losowej określonej na \mathbb{R} . Wykazać, że $\int_{-\infty}^t f(x) F(x) dx = \frac{1}{2}[F(t)]^2$.
5. Zakładamy, że zmienne $X_1, X_2, \dots, X_n, Y_1, Y_2, \dots, Y_k$ są niezależne i podlegają rozkładowi $N(0, 1)$. W jaki sposób można utworzyć poniższe zmienne:
 - (a) $U \sim \chi^2(k)$,
 - (b) $T \sim t(n)$,
6. Zmienna losowa X ma MGF o postaci $M_X(t)$. Zmienna losowa Y jest pewną funkcją zmiennej X . Co można powiedzieć o Y (założenia i od jakich **zmiennych** zależy Y) jeżeli:
 - (a) $M_Y(t) = M_X(3t) \cdot M_X(4t)$,
 - (b) $M_Y(t) = e^{3t} M_X(2t)$,
 - (c) $M_Y(t) = 4M_X(t)$.

[Z. 7–9] Zakładamy, że niezależne zmienne losowe X_k podlegają rozkładowi $N(\mu, \sigma^2)$.

$$\sum_{k=1}^n (X_k - \mu)^2 = \sum_{k=1}^n (X_k - \bar{\mathbf{X}})^2 + n(\bar{\mathbf{X}} - \mu)^2. \quad (1)$$

7. (**2p.**) Znaleźć (wraz z uzasadnieniem) rozkład zmiennej $M = \frac{n}{\sigma^2} \cdot (\bar{\mathbf{X}} - \mu)^2$
8. Załóżmy, że zmienne $\bar{\mathbf{X}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$ oraz $S^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (X_k - \bar{\mathbf{X}})^2$ są niezależne. Korzystając z równania (1) udowodnić, że $\frac{nS^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1) \equiv \text{Gamma}\left(\frac{1}{2}, \frac{n-1}{2}\right)$
9. Jaki rozkład ma zmienna $U = \frac{\bar{X} - \mu}{S} \sqrt{n-1}$.
10. Ciągłe zmienne losowe X, Y są niezależne. Funkcje $X = X(U)$, $Y = Y(W)$ są odwraćalne. Wykazać, że zmienne U, W są niezależne.