

1. (+) *Nieporządkiem* nazywa się taką permutację elementów, w której żaden element nie znajduje się na swoim miejscu. Niech d_n oznacza liczbę nieporządków utworzonych z n kolejnych liczb naturalnych. Wyprowadź wzór na d_n stosując zasadę włączeń-wyłączeń.

- ✓ 2. Wśród liczb naturalnych $1, 2, \dots, 800$, ile jest taki, które nie są podzielne przez 7, ale są podzielne przez 6 lub przez 8.

3. Korzystając z zasady włączeń-wyłączeń oblicz, ile jest sposobów ustawnienia liter $a, a, a, a, b, b, b, c, c$ w taki sposób, aby takie same litery nie tworzyły jednego bloku, tzn. ustawnienie $a, a, a, a, b, c, b, c, b$ jest zaakceptowane, ale ustawnienie $a, a, a, b, a, c, b, c, b$ jest dobре.

- ✓ 4. Baltazar Gąbka ma 7 przyjaciół. Określ, na ile sposobów może zapraszać po 3 z nich na kolację przez 7 kolejnych dni tak, aby każdy z nich został zaproszony co najmniej raz.

5. Udowodnij, że $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$ równa się liczbie dróg, po których wieża może przejść z lewego dolnego rogu do prawego górnego rogu szachownicy $(n+1) \times (n+1)$ poruszając się wyłącznie do góry lub na prawo.

Czy potrafisz zwinąć tę sumę?

- ✓ 6. Każdy punkt płaszczyzny pomalowano na jeden z dwóch kolorów: szafirowy lub alabastrowy. Pokaż, że na tej płaszczyźnie istnieje prostokąt o wierzchołkach takiego samego koloru.

- ✓ 7. (+) Wykaż, że wśród $n+1$ różnych liczb wybranych spośród $2n$ kolejnych liczb naturalnych zaczynając od 1 istnieją dwie, w których jedna dzieli drugą.

- ✓ 8. Na ile sposobów można wybrać pewną liczbę z 50 nieroróżniących kulek i wrzucić je do 5 (różnoróżniących) szuflad?

9. Ile rozwiązań wśród liczb naturalnych ma równanie $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 100$, jeśli dodatkowo wymagamy, aby $x_1, x_2 < 30$ oraz $x_3, x_4 < 40$?

- ✗ 10. (-) Określ liczbę podzielną przez 7, która leży najbliżej liczby 10^{100000} .

11. Udosowodnij lub obal następujące stwierdzenie:

Liczba naturalna a , której zapis w systemie dziesiętnym to $a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0$ dzieli się przez 11 wtedy i tylko wtedy gdy liczba $\sum_{i=1}^{\lceil n/2 \rceil} a_{2i-1} - \sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} a_{2i}$ jest podzielna przez 11.

- ✓ 12. Oblicz dwie ostatnie cyfry w rozwinięciu dziesiętnym liczby 74^{74} .

13 zad.	$+1$	2	3	4	5	6	$+7$	8	9	-10	11	12	suma
plkt.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0,5	1	1	1
nieplkt.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0,5	1	1	11,5

1. (+) Nieporządkiem nazywa się taką permutację elementów, w której żaden element nie znajduje się na swoim miejscu. Niech d_n oznacza liczbę nieporządków utworzonych z n kolejnych liczb naturalnych. Wyprowadź wzór na d_n stosując zasadę włączeń-wyłączeń.

Niech warunek P_i będzie spełniony, jeśli i -ty element permutacji znajduje się na poprawnym, i -tym miejscu. Szukamy permutacji nie spełniających powyższego warunku, tzn. $\{a_i\}_{i=1,2,\dots,n}$. Oznaczmy liczbę wszystkich permutacji n -elementowych jako N . Wiemy, że $N = n!$

2. Wśród liczb naturalnych $1, 2, \dots, 800$, ile jest takich, które nie są podzielne przez 7, ale są podzielne przez 6 lub przez 8.

Dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ jest $\left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor$ liczb podzielnych przez 6, $\left\lfloor \frac{n}{8} \right\rfloor$ liczb podzielnych przez 8, a $\left\lfloor \frac{n}{48} \right\rfloor$ liczb podzielnych przez 7.

Oznaczmy zbiór podzielnych przez 6 jako A , przez 8 jako B ,

przez 7 jako C . Wyznaczymy teraz wzór:

$$|(A \cup B) \setminus C| = |A \cup B| - |A \cap B \cap C| =$$

$$|A \cup B| - |(A \cap C) \cup (B \cap C)| = |A \cup B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

$$|A \cup B| = \left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{8} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{48} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{8} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{48} \right\rfloor \stackrel{n=800}{=} 133 + 100 - 33 = 200$$

$$|A \cap C| = \left\lfloor \frac{n}{42} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{42} \right\rfloor \stackrel{n=800}{=} 19$$

$$|B \cap C| = \left\lfloor \frac{n}{48} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{48} \right\rfloor \stackrel{n=800}{=} 16$$

$$|A \cap B \cap C| = \left\lfloor \frac{n}{168} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{168} \right\rfloor \stackrel{n=800}{=} 4$$

Po podstawieniu we wzór ostateczny wynik to $200 + 4 - 16 - 19 = 179$

to będzie nasza odp.

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = \begin{matrix} a, b, c \\ a, c, b \\ b, a, c \\ b, c, a \\ c, a, b \\ c, b, a \end{matrix}$$

3. Korzystając z zasady włączeń-wyłączeń oblicz, ile jest sposobów ustawnienia liter a, a, a, a, b, b, c, c w taki sposób, aby takie same litery nie tworzyły jednego bloku, tzn. ustawnienie a, a, a, a, b, c, b, c jest zakazane, ale ustawnienie a, a, a, b, a, c, b, c jest dobre.

Wszystkich ustawnień: $9! = 362880$

Zgodnie z zasadą włączeń-wyłączeń: $|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

poziew noszym przypadku: A_1 -bloki \circ , A_2 -bloki b , A_3 -bloki c

$$|A_1| = 6$$

$$|A_2| = 7$$

$$|A_3| = 8 \quad (\text{bez losowanej siedmiotki})$$

$$|A_1 \cap A_2| = 6 \cdot 2 = 12$$

$$|A_1 \cap A_3| = 10 \cdot 2 = 20$$

$$|A_2 \cap A_3| = 30$$

$$+ 4 + 4 + 4 + 5$$

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| =$$

4. Baltazar Gąbka ma 7 przyjaciół. Określ, na ile sposobów może zaproszać po 3 z nich na kolację przez 7 kolejnych dni tak, aby każdy z nich został zaproszony co najmniej raz.

Jeśli ktoś nie jest zaproszony ani razu - głośno myśl!

To też jakbyśmy wybrali z sześciu osób
 $\binom{6}{3}$ możliwości grup
 7 przyjaciół = 7 z $\binom{6}{3}$ grup potem
 wybieramy 7 z $\binom{6}{3}$ grup i wyciągamy
 z nich 6 wyciągnięć

$$120 \binom{\binom{6}{3}}{7} = \binom{6}{7} = \text{und.}$$

(mniejsze niż niemożliwe)

$$S = \binom{\binom{6}{3}}{7} = 7 \cdot \binom{\binom{6}{3}}{7} + \binom{7}{2} \cdot \binom{\binom{5}{3}}{7} =$$

$$\binom{35}{7} - 7 \cdot \binom{20}{7} + 21 \cdot \binom{10}{7} =$$

$$6789520 - 7 \cdot 17520 + 21 \cdot 120 = 6184400$$

to mamy jeszcze $\times 7!$

$$\text{jeżeli rozróżniamy kolejność zaproszeń} = 316937600$$

5. Udowodnij, że $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$ równa się liczbie dróg, po których wieża może przejść z lewego dolnego rogu do prawego górnego rogu szachownicy $(n+1) \times (n+1)$ poruszając się wyłącznie do góry lub na prawo.

Czy potrafisz zwinąć tę sumę?

,,
A
S

6. Każdy punkt płaszczyzny pomalowano na jeden z dwóch kolorów: szafirowy lub alabastrowy. Pokaż, że na tej płaszczyźnie istnieje prostokąt o wierzchołkach takiego samego koloru.

Rozważmy siatkę na tej płaszczyźnie z dwiema wierszami. Z zasad szuflekowej Dirichleta dowiemy się, że w każdej kolumnie powtarza się co najmniej jeden kolor. Korzystamy z zasad szuflekowej Dirichleta.

Weźmy siatkę 9×3 na płaszczyźnie i mamy opcje mamy 8 opcji, w każdej jeden z kolorów występuje min. 2 razy w każdej z nich. Zatem możemy zestawić op. kolory

A	A	A	S	A	S	S	S	S
A	A	A	S	A	S	A	S	A
A	S	A	A	S	A	S	A	S

7. (+) Wykaż, że wśród $n + 1$ różnych liczb wybranych spośród $2n$ kolejnych liczb naturalnych zaczynając od 1 istnieją dwie, w których jedna dzieli drugą.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
 X X X X X X X

Przestępny sposób: albo będzie 1 albo dwie parzyste są podzielne

Kolejny dowód:

Każda liczba $n \in \mathbb{N}$ zapisana jest $n = 2^{\alpha} b_n$, gdzie b_n jest największym nieparzystym dzielnikiem. Istnieje ona i nieparzystych liczb mniejszych niż $2n$. Jako że bierzemy n+1 liczb, przynajmniej dwie będą miały ten sam wspólny dzielnik b .

$$\alpha, b_n \in \mathbb{N}^+$$

$$\alpha > 0 \text{ wtedy } \frac{2^c b}{2^{\alpha} b} = 2^{c-\alpha} ; c-\alpha > 0$$

Wtedy $2^{c-\alpha}$ jest liczbą naturalną, więc te dwie liczby są podzielne.

8. Na ile sposobów można wybrać pewną liczbę z 50 nieroróżnicznych kulek i wrzucić je do 5 (różnicznych) szuflad?

5 szuflad + Opcja złożenia ich na zewnątrz bo wybieramy tylko pewną liczbę kul.

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 50$$

Wtedy ze wzoru stors & bars (dwa z końcowych zadań z poprzedniej listy)

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ \hline ++ & ++ & ++ & ++ & ++ & ++ \\ & & & & & & \end{array}$$

umieszczymy 5 ściań w dowolnym miejscu
między 50-toma gwiazdkami

Wzór to $\binom{n+l-1}{k-l}$, gdzie w naszym przypadku $n=50$ $k=6$

udowodnione przy zadaniu z niemalejącą funkcją z listy 2

$$\binom{50+6-1}{6-1} =$$

$$\binom{55}{5} = \frac{55!}{5!50!} = \frac{55 \cdot 52 \cdot 53 \cdot 54 \cdot 55}{120} = 3478760$$

$$\frac{11 \cdot 54 \cdot 52 \cdot 53 \cdot 54}{24} = \frac{11 \cdot 27 \cdot 51 \cdot 52 \cdot 53}{12} = \frac{11 \cdot 26 \cdot 27 \cdot 50 \cdot 53}{6} = \frac{11 \cdot 13 \cdot 27 \cdot 51 \cdot 53}{3} =$$

$$11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 27 \cdot 53$$

9. Ile rozwiązań wśród liczb naturalnych ma równanie $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 100$, jeśli dodatkowo wymagamy, aby $x_1, x_2 < 30$ oraz $x_3, x_4 < 40$?

lub, i szkoda w pierwszych dwóch C-29, w dwóch kolejnych 0-39

obwoół ollażego toż w zad. 12

10. (-) Określ liczbę podzielną przez 7, która leży najbliżej liczby 10^{100000} .

$$\textcircled{1} \quad 10^1 \% 7 \equiv 3 \pmod{7}$$

$$10^2 \% 7 \equiv 5 \pmod{7}$$

$$10^4 \% 7 = 25 \% 7 \equiv 4 \quad \text{K}$$

$$10^8 \% 7 = 4 \cdot 4 = 2$$

$$10^{16} \% 7 = 2 \cdot 2 = 4$$

$$10^{32} \% 7 = 4 \cdot 4 = 2$$

$$10^{64} \% 7 = 2$$

wszędzie poniżej $(\pmod{7})$

$$\textcircled{5} \quad 10^{160000} \% 7 \equiv (3 \pmod{7} \cdot 4 \pmod{7}) \pmod{7} = 12 \pmod{7} = 5 \pmod{7}$$

A więc odp: $10^{100000} + 2$

$$\textcircled{2} \quad 10^{100} = 10^{32+64+4} = 4 \pmod{7} \cdot 10^4 \pmod{7} \\ 4 \pmod{7} \cdot 4 \pmod{7} = 2 \pmod{7}$$

$$\textcircled{3} \quad 10^{10000} \leq 10^{100} \cdot 10^{100} \pmod{7}$$

$$\textcircled{4} \quad 10^{10} = 10^8 \cdot 10^2 \leq 10 \equiv 3$$

11. Udowodnij lub obal następujące stwierdzenie:

Liczba naturalna a , której zapis w systemie dziesiętnym to $a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0$ dzieli się przez 11 wtedy gdy liczba $\sum_{i=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} a_{2i-1} - \sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} a_{2i}$ jest podzielna przez 11.

12. Oblicz dwie ostatnie cyfry w rozwinięciu dziesiętnym liczby 74^{74} .

$$(a+b) \bmod n = ((a \bmod n)(b \bmod n)) \bmod n$$

Do obliczeń skorzystamy z zakonności

Korzystając z rozbięcia wykrochiku potęgi na kolejne potęgi dwójki

$$74 = 64 + 8 + 2$$

$$74^{74} = 74^{64+8+2}$$

$$74^1 \equiv 74 \bmod 100$$

$$74^2 \equiv 76 \bmod 100$$

$$74^4 \equiv 74^2 \bmod 100 \cdot 74^2 \bmod 100 \equiv 76 \bmod 100 \cdot 76 \bmod 100 \equiv 5776 \bmod 100 = 76 \bmod 100$$

$$74^8 \equiv 74^4 \bmod 100 \cdot 74^4 \bmod 100 \equiv 76 \bmod 100 \cdot 76 \bmod 100 = 76 \bmod 100$$

Zauważmy też, że non sieto "zapełnić" (mod 100) $\equiv 76 \bmod 100$

Mogące wszystkie liczby, możemy zapisać:

$$74^{94} \bmod 100 \equiv 74^{64+8+2} \bmod 100 \equiv$$

$$74^{64} \cdot 74^8 \cdot 74^2 \bmod 100 \equiv$$

$$\left((76 \bmod 100) \cdot (76 \bmod 100) \bmod 100 \right) \cdot 74^2 \bmod 100 \equiv$$

$$5776 \bmod 100 \cdot 74^2 \bmod 100 \equiv$$

$$76 \bmod 100 \cdot 5776 \bmod 100 \equiv$$

$$76 \bmod 100 \cdot 76 \bmod 100 \equiv$$

$$76 \bmod 100$$

A więc dwoma ostatnimi cyframi będzie 76.

(można obliczyć dowolną ilość biorec odp. wartość modulo)