

MGFy rozkład normalny

Definicja 1. Funkcją tworzącą momenty zmiennej losowej X nazywamy

$$M_X(t) = E(e^{tX}). \quad (1)$$

W wypadku dyskretnym

$$M_X(t) = \sum_k \exp(tx_k) \cdot p_k,$$

natomiast w wypadku ciągłym

$$M_X(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{tx} \cdot f(x) dx.$$

Uzasadnienie nazwy: Ponieważ $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^k}{k!} + \dots$. Jest zatem (przynajmniej formalnie): $e^{tX} = 1 + tX + \frac{t^2 X^2}{2!} + \dots + \frac{t^k X^k}{k!} + \dots$. Moment zwykły zmiennej losowej X to $m_k = E(X^k)$. Stąd $M_X(t) = 1 + m_1 t + m_2 \frac{t^2}{2} + \dots$. Można sprawdzić – dla przykładu – że $m_1 = EX = M'_X(0)$ oraz $m_2 = E(X^2) = M''_X(0)$. Stąd już $Var X = M''_X(0) - (M'_X(0))^2$.

Twierdzenie 1. Załóżmy, że zmienne X, Y są niezależne. Niech $V = aX + b$, $Z = X + Y$, gdzie $a \neq 0$. Jest wówczas $M_V(t) = e^{tb} \cdot M_X(at)$ oraz $M_Z(t) = M_X(t) \cdot M_Y(t)$.

Dowód.

$$\begin{aligned} M_V(t) &= E(e^{t(aX+b)}) = E(e^{tb} e^{(at)X}) = e^{tb} \cdot M_X(at), \\ M_Z(t) &= E(e^{t(X+Y)}) = E(e^{tX} e^{tY}) \stackrel{(a)}{=} E(e^{tX}) \cdot E(e^{tY}) = M_X(t) \cdot M_Y(t). \end{aligned}$$

(a) Ponieważ zmienne X, Y są niezależne, to niezależne są też zmienne e^{tX}, e^{tY} . □

Kilka przykładów “MGF-ów”

Przykłady:

(i) Niech $X \sim B(n, p)$. Prawdopodobieństwa p_k są dane wzorem $p_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$. Stąd

$$M_X(t) = \sum_{k=0}^n e^{tk} p_k = \sum_{k=0}^n e^{tk} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (p \cdot e^t)^k (1-p)^{n-k} \stackrel{(b)}{=} (p \cdot e^t + q)^n.$$

(b) Wzór dwumianowy: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

(ii) Niech $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$. Teraz $p_k = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$. Ponieważ w rozwinięciu e^x w szereg nieskończony

$$(c): e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \text{ więc wynika stąd, że } M_X(t) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{tk} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda \cdot e^t)^k}{k!} \stackrel{(c)}{=} e^{\lambda(e^t-1)}.$$

(iii) Rozkład $B(n, p)$ jako suma rozkładów “0-1”. Przeprowadzamy n niezależnych prób z ppb sukcesu p w każdej próbie. Jeżeli X_k oznacza zmienną losową zliczającą sukcesy w k -tej próbie, to rozkład zmiennej X_k nazywamy rozkładem “0-1”.

$$\begin{array}{c|cc} X_k & 0 & 1 \\ \hline p_k & 1-p & p \end{array}.$$

Dla funkcji tworzącej momenty zmiennej X_k mamy proste wyrażenie

$$M_{X_k}(t) = E(e^{tX_k}) = (1-p) \cdot e^0 + p \cdot e^t = p \cdot e^t + q.$$

Ponieważ $X = X_1 + \dots + X_n$, a zmienne X_k są niezależne, więc^a

$$M_X(t) = \prod_{k=1}^n M_{X_k}(t) = (p \cdot e^t + q)^n.$$

(iv) Rozkład Gamma(b,p). Gęstość $f(x) = \frac{b^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-bx}$, dla $x \in (0, \infty)$, parametry $b, p \in \mathbb{R}$.

$$M_X(t) = \frac{b^p}{\Gamma(p)} \int_0^\infty e^{tx} x^{p-1} e^{-bx} dx = \left| \begin{array}{l} u = (b-t)x \\ du = (b-t) dx \end{array} \right|^\uparrow = (*).$$

Dla $t \in (-\infty, b)$ jest dalej (granice całkowania)

$$(*) = \frac{b^p}{\Gamma(p)} \cdot \frac{1}{(b-t)^p} \int_0^\infty e^{-u} u^{p-1} du = \left(\frac{b}{b-t}\right)^p = \left(1 - \frac{t}{b}\right)^{-p}.$$

(v) Znajdziemy teraz funkcję tworzącą momenty dla rozkładu $N(0,1)$. Gęstość tego rozkładu to $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-x^2/2}$, gdzie $x \in \mathbb{R}$. Funkcja tworząca momenty to:

$$\begin{aligned} M_X(t) &= E(e^{tX}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{tx} e^{-x^2/2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left[-\frac{x^2 - 2xt}{2}\right] dx = \\ &= \exp\left(\frac{t^2}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left[-\frac{(x-t)^2}{2}\right] dx = \left| \begin{array}{l} u = x-t \\ du = dx \end{array} \right| = \\ &= \exp\left(\frac{t^2}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-u^2/2} du = e^{t^2/2}. \end{aligned}$$

^aMGF sumy niezależnych zmiennych to iloczyn ich MGFs-ów.

Rozkład normalny

Definicja 2. Mówimy, że zmienna losowa X podlega rozkładowi normalnemu z parametrami μ, σ^2 ($X \sim N(\mu, \sigma^2)$) jedynie wtedy gdy gęstość jest określona wzorem

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), \text{ dla } x \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Twierdzenie 2. Niech $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ i niech $Y = \frac{X-\mu}{\sigma}$, gdzie $\sigma > 0$. Wówczas $Y \sim N(0,1)$.

Dowód. Udowodnimy twierdzenie klasycznym sposobem: od dystrybuanty do gęstości.

$$F_Y(t) = P(Y \leq t) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq t\right) = P(X \leq \sigma t + \mu) = F_X(\sigma t + \mu).$$

Różniczkując powyższe równanie obustronnie względem zmiennej t otrzymujemy

$$f_Y(t) = f_X(\sigma t + \mu) \cdot \sigma = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \sim N(0,1).$$

□

Definicja 3. Niech zmienne losowe X_1, \dots, X_n będą niezależne i podlegają rozkładowi $N(0, 1)$. Rozkład zmiennej losowej $Z = \sum_{k=1}^n X_k^2$ nazywamy rozkładem chi-kwadrat z n stopniami swobody i oznaczamy symbolem $Z \sim \chi^2(n)$.

Wnioski (część z nich będzie treścią zadań na ćwiczeniach)

1. “Odwrócenie” twierdzenia jest następujące: Jeżeli $S \sim N(0, 1)$ i $T = \sigma S + \mu$, to $T \sim N(\mu, \sigma^2)$.
2. Wiemy, że dla rozkładu $U \sim N(0, 1)$ jest $M_U(t) = \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$. Korzystając z tw. 1 (pierwszy wzór) otrzymujemy MGF dla rozkładu $N(\mu, \sigma^2)$

$$M_U(t) = \exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right).$$

3. Jeżeli $U \sim N(0, 1)$, to $U^2 \sim \text{Gamma}(1/2, 1/2) \equiv \chi^2(1)$.
4. Niech U_1, \dots, U_n będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie $N(0, 1)$ każda. Niech, oprócz tego, $Z = \sum_{k=1}^n U_k^2$. Wówczas $Z \sim \text{Gamma}(1/2, n/2) \equiv \chi^2(n)$.
5. Niech U_1, \dots, U_n będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach (odpowiednio) $N(\mu_k, \sigma_k^2)$. Niech, dodatkowo, $Z = \sum_{k=1}^n \alpha_k U_k$. Wówczas $Z \sim N\left(\sum_{k=1}^n \alpha_k \mu_k, \sum_{k=1}^n \alpha_k^2 \sigma_k^2\right)$.
6. Jeżeli U_1, \dots, U_n są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie $N(\mu, \sigma^2)$ każda, oraz $S^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n (U_k - \mu)^2$, to $\frac{nS^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n)$.
7. $\mapsto \infty$. Pozostałe uwagi...

Uwaga (o rozkładzie normalnym 2-wymiarowym)

Poniżej, nieformalne określenie 2-wymiarowego rozkładu normalnego. Nieformalne, ponieważ można podać zwarty wzór na gęstość n -wymiarowego rozkładu normalnego (co nastąpi w niedalekiej przyszłości).

Dany jest wektor $\mu = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix}$ oraz macierz $\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$. O macierzy Σ zakładamy też, że jest nieosobliwa (odwracalna). Funkcją gęstości $f(x, y)$ zmiennej losowej (X, Y) nazywamy

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} - \frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}\right]\right). \quad (3)$$

Z powyższego wzoru można wyliczyć, że zmienne brzegowe X, Y mają rozkłady $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$. Oprócz tego współczynnik kowariancji zmiennych X, Y to $\rho\sigma_1\sigma_2$.

Trójwymiarowa zmienna o rozkładzie normalnym: wzór zajmuje 3–4 wiersze. W podsumowaniu: jeżeli na muralu zobaczymy wzór (3) to można przejść obok napisu bez żadnych emocji, jest to po prostu **normalny** rozkład.

Rozpatrzmy 2-wymiarową zmienną $(X, Y) \sim N(\mu, \Sigma)$. Jeżeli kowariancja $\text{Cov}(X, Y) = 0$, to wynika stąd, że $\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$, czyli $\rho = 0$. Wzór (3) można przepisać jako

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right). \quad (4)$$

Wnioskujemy stąd, że zmienne brzegowe X, Y są niezależne; dodatkowo $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, a także $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$. Mamy zatem szczególny wypadek, kiedy tw. 2 z notatki 4. można odwrócić, a mianowicie

Twierdzenie 3. *Dana jest zmienna losowa $(X, Y) \sim N(\mu, \Sigma^2)$. Jeżeli $\text{Cov}(X, Y) = 0$, to zmienne brzegowe X, Y są niezależne*

←

Witold Karczewski