

# Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka

## Lista zadań № 5. 1. kwietnia i później

### Zadania

1. Zmienne losowe  $X, Y$  są niezależne. Udowodnić, że  $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$ .
2. Zmienna losowa podlega standardowemu rozkładowi normalnemu, tzn. gęstość określona jest wzorem  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$ , gdzie  $x \in \mathbb{R}$ . (Skrótowo:  $X \sim N(0, 1)$ ). Znaleźć gęstość  $f_Y(y)$  zmiennej  $Y = X^2$ .
3. Wykazać, że  $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ . (Wsk.: Podstawienie  $t = x^2/2$ )
4. Mówimy, że zmienna losowa  $X$  podlega rozkładowi Gamma z parametrami  $b, p > 0$  jedynie wtedy gdy  $f(x) = \frac{b^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} \exp(-bx)$ , dla  $x \in (0, \infty)$ . (Krótko:  $X \sim \text{Gamma}(b, p)$ ). Czy  $Y$  z zadania 2. ma rozkład Gamma? Jeżeli tak, podać wartości parametrów  $b, p$ .
5. **2p.** Niech  $X \sim N(0, 1)$ .
  - (a) Wyznaczyć funkcję tworzącą momenty  $M_X(t)$ .
  - (b) Obliczyć  $M_Y(t)$ , gdzie  $Y = \sigma \cdot X + \mu$ .
  - (c) Znaleźć wartości  $E(X), V(X)$ .
6. **2p.** Zmienna  $(X, Y)$  ma rozkład o gęstości  $f(x, y) = xy$ , na obszarze  $[0, 1] \times [0, 2]$ . Wyznaczyć rozkład zmiennej  $Z = X/Y$ . Obliczyć wartość oczekiwaną  $E(Z)$ .
7.  $X \sim \text{Gamma}(b, p)$ . Wykazać, że  $M_X(t) = \left(1 - \frac{t}{b}\right)^{-p}$
8.  $X_i \sim \text{Gamma}(b, p_i)$ , zmienne losowe  $X_1, X_2, \dots, X_n$  są niezależne,  $S = \sum_{i=1}^n X_i$ . Wykazać, że zachodzi  $S \sim \text{Gamma}(b, \sum p_i)$ . Jaki jest rozkład zmiennej  $T = \sum_{i=1}^n Y_i^2$ , gdzie  $Y_i \sim N(0, 1)$ ?
9. Niezależne zmienne losowe  $X, Y$  mają rozkład  $U[0, 1]$  każda. Wyznaczyć gęstość zmiennych  $S = \min(X, Y), T = \max(X, Y)$ .
10. Niezależne zmienne losowe  $X, Y$  mają rozkład  $\text{Exp}(\lambda)$ . Znaleźć rozkład zmiennej  $S = X + Y$ .

Λακεδαιμων  $\equiv$  This is Sparta

Witold Karczewski