Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka

Niezależność $\bar{X}$ i S^2

Załóżmy, że zmienne losowe $X_1, \ldots, X_n$ są niezależne i podlegają rozkładowi $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ każda. Określmy dwie nowe zmienne losowe $\bar{X}, S^2$ jako

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k, \quad S^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(X_k - \bar{X}\right)^2. \tag{1}$$

Używając funkcji generujących momentów (MGFs-ów), stwierdzamy iż

Twierdzenie 1. $\bar{X} \sim N\left(\mu, {}^{\sigma^2}\!/_{n}\right)$.

Dowód. Z notatki 5, tw. 1 wynika, że:

$$M_{\bar{X}}(t) = \prod_{k=1}^{n} M_{X_k}\left(\frac{t}{n}\right) = \exp\left(n\mu u + \frac{n\sigma^2 u^2}{2}\right)\Bigg|_{u={}^{t}\!/_{n}} = \exp\left(t\mu + \frac{\sigma^2 t^2}{2n}\right) \sim \mathrm{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

□

Zanim zajmiemy się zmienną S^2, wprowadźmy nową zmienną losową $S_\mu^2 = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(X_k - \mu\right)^2$. Po niewielkim przekształceniu, znajdujemy iż $\dfrac{nS_\mu^2}{\sigma^2} = \sum_{k=1}^{n}\left(\dfrac{X_k - \mu}{\sigma}\right)^2 \equiv \chi^2(n)$ [1]. Znajdziemy teraz związek pomiędzy S_μ^2 a S^2.

Twierdzenie 2.

$$S_\mu^2 = S^2 + \left(\bar{X} - \mu\right)^2. \tag{2}$$

Dowód.

$$\begin{aligned} n \cdot S_\mu^2 &= \sum_{k=1}^{n}\left(X_k - \mu\right)^2 = \sum_{k=1}^{n}\left(X_k - \bar{X} + \bar{X} - \mu\right)^2 = \\ &= \sum_{k=1}^{n}\left(X_k - \bar{X}\right)^2 + n \cdot \left(\bar{X} - \mu\right)^2 + 2 \cdot \sum_{k=1}^{n}\left(\bar{X} - \mu\right)\left(X_k - \bar{X}\right). \end{aligned}$$

Sprawdzamy, że

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\bar{X} - \mu\right)\left(X_k - \bar{X}\right) = \left(\bar{X} - \mu\right) \cdot \sum_{k=1}^{n}\left(X_k - \bar{X}\right) = \left(\bar{X} - \mu\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} X_k - n \cdot \bar{X}\right) = 0,$$

co kończy dowód twierdzenia. □

Uwaga: Nieformalnie możemy zapisać twierdzenie 1 w postaci $\chi^2(n) \equiv (\text{pewien\_rozkład}) + \chi^2(1)$. Gdyby pewien_rozkład i $\chi^2(1)$ były niezależne, to moglibyśmy powiedzieć coś o pewnym rozkładzie – czyli o rozkładzie S^2 (Twierdzenie 1. z notatki 5.) Twierdzenie 1. z bieżącej notatki można bowiem przepisać w postaci

$$\frac{nS_\mu^2}{\sigma^2} = \frac{nS^2}{\sigma^2} + \left(\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)^2. \tag{3}$$

Po lewej stronie powyższego równania rozpoznajemy rozkład $\chi^2(n)$, drugi składnik prawej strony podlega rozkładowi $\chi^2(1)$.

[1] Lista 6., zadanie 8.

Niezależność $\bar{X}$ oraz S^2

Wprowadzamy nowe zmienne Y_k następująco:

$$Y_1 = \bar{X}, \;\; Y_k = X_k - \bar{X}, \; (k = 2, \ldots .n). \tag{4}$$

Ponieważ zmienne $X_1, \ldots, X_n$ są niezależne więc n-wymiarowa gęstość $f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n)$ wyraża się wzorem

$$f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n) = (2\pi)^{-n/2}\, \sigma^{-n} \prod_{k=1}^{n} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_k - \mu}{\sigma}\right)^2\right\} = (2\pi)^{-n/2}\, \sigma^{-n} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{x_k - \mu}{\sigma}\right)^2\right\}. \tag{5}$$

Odwrócenie wzorów (**??**) daje

$$\begin{aligned} &X_k = \bar{X} + Y_k = Y_1 + Y_k \quad (k = 2, \ldots, n), \\ &nY_1 = X_1 + \ldots + X_n = X_1 + (Y_1 + Y_2) + \ldots + (Y_1 + Y_{n-1}) + (Y_1 + Y_n), \text{ czyli} \\ &X_1 = Y_1 - Y_2 - \ldots - Y_n. \end{aligned} \tag{6}$$

Wyznacznik Jacobianu odwrócenia (**??**) daje wartość n.[2] Wzór (**??**) można zatem przepisać, – w nowym układzie współrzędnych – w postaci

$$g_{Y_1,\ldots,Y_n}(y_1, \ldots, y_n) = n \cdot (2\pi)^{-n/2}\, \sigma^{-n} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{x_k - \mu}{\sigma}\right)^2\right\}, \tag{7}$$

gdzie w miejsce x_k należy podstawić wzory (**??**). Tymczasowo, nie dokonujemy tego podstawienia, wzory byłyby nazbyt złożone. Zajmiemy się tylko wykładnikiem wzoru (**??**), bez czynnika $-1/2$. Uwzględniając wzór (**??**) możemy wspomniany wykładnik przedstawić w postaci

$$\frac{nS_\mu^2}{\sigma^2} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{X_k - \mu}{\sigma}\right)^2 = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{X_k - \bar{X}}{\sigma}\right)^2 + \left(\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)^2 = \frac{nS^2}{\sigma} + \chi^2(1). \tag{8}$$

Drugi składnik po prawej stronie jest zapisany <u>nieformalnie</u>.[3]

S^2 jest funkcją $Y_2, \ldots, Y_n$.

Rozpatrzmy $nS^2 = \sum_{k=1}^{n}(X_k - \bar{X})^2 = (X_1 - \bar{X})^2 + \sum_{k=2}^{n}(X_k - \bar{X})^2$. Uwzględniając wzory (**??**) można je (to równanie) przepisać w postaci

$$nS^2 = \sum_{k=1}^{n}(X_k - \bar{X})^2 = \left(\sum_{k=2}^{n} Y_k\right)^2 + \sum_{k=2}^{n} Y_k^2. \tag{9}$$

S^2 oraz $\bar{X}$ są niezależne.

Pamiętając o tym, że $Y_1 \equiv \bar{X}$ i podstawiając równość (**??**) do równania (**??**) otrzymujemy

$$\begin{aligned} &K = n \cdot (2\pi)^{-n/2}\, \sigma^{-n}, \\ &g_{Y_1,\ldots,Y_n}(y_1, \ldots, y_n) = K \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{x_k - \mu}{\sigma}\right)^2\right\} \overset{(8)}{=} \\ &\overset{(8)}{=} K \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{nS_\mu^2}{\sigma^2}\right)\right\} = K \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{nS^2}{\sigma^2}\right)\right\} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)^2\right\}. \end{aligned} \tag{10}$$

To dowodzi następującego twierdzenia

[2] *Por.* zadanie 5. z listy 1.

[3] *Por.* twierdzenie **??**.

Twierdzenie 3. *Zmienne losowe $\bar{X}$ oraz S^2 są niezależne. Inaczej: zmienne losowe Y_1 oraz $(Y_2, \ldots, Y_n)$ są niezależne.*

Równanie (**??**) można przepisać – w języku funkcji tworzących momenty – następująco:

$$(1-2t)^{-n/2} = M_{\frac{nS_\mu^2}{\sigma^2}}(t) = M_{\frac{nS^2}{\sigma^2}}(t) \cdot (1-2t)^{-1/2}.$$

Stąd wynika

Twierdzenie 4. $\dfrac{n\,S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1) \equiv \mathrm{Gamma}\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{n-1}{2}\right)$.

Oczywiście, twierdzenia **??** oraz **??** są prawdziwe przy założeniu, że zmienne losowe $X_1, \ldots, X_n$ są niezależne i podlegają rozkładowi $\mathrm{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$ każda.

Wielowymiarowy rozkład normalny.

Definicja 1. *Mówimy, że zmienna losowa $(X_1, \ldots, X_n)^T$ podlega n-wymiarowemu rozkładowi normalnemu – w skrócie $X \sim N(\mu, \Sigma)$ – wtedy i tylko wtedy gdy*

$$f_X(x) = f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\,|\Sigma|^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}(X-\mu)^T \Sigma^{-1}(X-\mu)\right]. \qquad (11)$$

Uwagi:

1. Wektor $\mu = [\mu_1, \ldots, \mu_n]^T \in \mathbb{R}^n$. Liczbę μ_k nazywamy wartością oczekiwaną jednowymiarowej zmiennej brzegowej X_k.
2. Symetryczną, dodatnio określoną macierz $\Sigma = (s_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ nazywamy macierzą wariancji-kowariancji. Liczbę s_{ii} nazywamy wariancją zmiennej X_i, liczbę s_{ij} – kowariancją zmiennych X_i, X_j.
3. Symbol $|\Sigma|$ oznacza wyznacznik macierzy Σ.
4. Dla $n = 1$ wzór (**??**) upraszcza się do postaci
$$f_X(x) = f_{X_1(x_1)} = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)\sigma_1} \exp\left[-\frac{1}{2}(X_1-\mu_1)^T \left(\sigma_1^2\right)^{-1}(X_1-\mu_1)\right].$$
5. Wzór (3) z notatki 5. ilustruje wypadek $n = 2$.
6. Symetryczna macierz $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ jest nazywana macierzą dodatnio określoną jedynie wtedy gdy $\forall x \in \mathbb{R}^n\ x^T M x \geq 0$, natomiast równość zachodzi jedynie dla $x = \mathbb{O}$. Macierz dodatnio określona ma n wartości własnych $\lambda_k > 0$, w szczególności jest to macierz odwracalna.

Niech macierz $A \in \mathbb{R}^n$ będzie macierzą odwracalną, a zmienna losowa X niech ma rozkład $N(\mu, \Sigma)$. Rozważmy zmienną losową $Y = AX$, to znaczy Y jest obrazem zmiennej losowej X względem przekształcenia liniowego A. Przy tych założeniach prawdziwe jest poniższe

Twierdzenie 5.
$$Y \sim N\left(A\mu, A\Sigma A^T\right).$$

Dowód. Zajmijmy się wykładnikiem wzoru (**??**), bez czynnika -1/2. Ponieważ macierz jest odwracalna, więc $X = A^{-1}Y$, co podstawieniu do wykładnika daje

$$(X-\mu)^T\Sigma^{-1}(X-\mu) = (A^{-1}Y-\mu)^T\Sigma^{-1}(A^{-1}Y-\mu) = \left(A^{-1}(Y-A\mu)\right)^T \Sigma^{-1}\left(A^{-1}(Y-A\mu)\right) = (*)$$

Korzystając z zależności $(SU)^T = U^T S^T$ oraz $(SU)^{-1} = U^{-1} S^{-1}$ mamy

$$(*) = (Y - A\mu)^T (A^{-1})^T \Sigma^{-1} A^{-1} (Y - A\mu) = (Y - A\mu)^T \left((A\Sigma A^T)\right)^{-1} (Y - A\mu).$$

Zauważamy podobieństwo otrzymanego wzoru do wykładnika wzoru (**??**). Obydwa wzory mają postać $z^T M^{-1} z$.
Przejdźmy teraz do Jacobianu przekształcenia $X = A^{-1}Y$. Jeżeli elementy macierzy A^{-1} oznaczymy symbolem b_{ij}, to $X_i = \sum_{k=1}^{n} b_{ik} Y_k$. Stąd $\dfrac{\partial X_i}{\partial Y_j} = b_{ij}$, czyli $J = \left|A^{-1}\right| = \dfrac{1}{|A|}$. Przejście do zmiennej Y we wzorze (**??**) daje

$$f_Y(y) = f_{Y_1,\ldots,Y_n}(y_1,\ldots,y_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |\Sigma|^{1/2} |A|} \exp\left[-\frac{1}{2}(Y - A\mu)^T \left((A\Sigma A^T)\right)^{-1} (Y - A\mu)\right].$$

Uwzględniając równość $\left|A\Sigma A^T\right| = |A|\,|\Sigma|\,|A^T| = |\Sigma|\,|A|^2$ otrzymujemy tezę twierdzenia.

$\square$

↤

Witold Karczewski