

Lista nr 2 z matematyki dyskretnej



1. Na kartce w kratkę zaznaczono 5 punktów kratowych (czyli punktów o obu współrzędnych całkowitoliczbowych). Wykaż, że środek odcinka łączącego pewne dwa spośród tych punktów jest także punktem kratowym.

- ✓ 2. (+) Dany jest ciąg liczb naturalnych a_1, a_2, \dots, a_n . Pokaż, że istnieją takie i oraz j , $i \leq j$, że suma $a_i + a_{i+1} + \dots + a_j$ jest podzielna przez n .

- ✓ 3. Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n istnieje liczba podzielna przez n , której zapis dziesiętny złożony jest tylko z zer i jedynek.

- ✓ 4. Wybieramy 55 liczb naturalnych takich, że: $1 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_{55} \leq 100$. Pokaż, że jakkolwiek byśmy je nie wybrali, jakieś dwie będą różnić się o 9.

- ✓ 5. Pokaż, że spośród dowolnych trzech liczb całkowitych potrafimy wybrać dwie a i b takie, że $a^3b - ab^3$ jest podzielne przez 10.

- ✓ 6. (-) W każe pole szachownicy $n \times n$ wpisujemy jedną z liczb: $-1, 0, 1$. Następnie dodajemy do siebie liczby stojące w tej samej kolumnie, w tym samym wierszu i na tej samej przekątnej. Udowodnij, że wśród otrzymanych sum co najmniej dwie sły r one.

- ✓ 7. (-) Na okręgu zapisujemy w dowolnej kolejności liczby naturalne od 1 do 10. Pok z, że zawsze znajd a się trzy sąsiednie, których suma wynosi przynajmniej 18.

8. Podaj interpretacj  następującej tożsamości w terminach zbiorów:

$$\binom{n}{k} \binom{k}{m} = \binom{n}{m} \binom{n-m}{k-m}$$

- ✓ 9. (+) Wykaż prawdziwo to samo ci Cauchy'ego:

$$\binom{m+n}{r} = \sum_{i=0}^r \binom{m}{i} \binom{n}{r-i}.$$

1

L	1	2	3/4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
w	1	1	1	1	1	0,5	0,5	1	1?	1	1	1	1	1

Czy potrafisz udowodni  ją kombinatorycznie? ✓

- ✓ 10. Na ile sposob  3n dzieci może uformowa  trzy równoliczne koła g mie? (Dwie formacje są r one jes  istnieje dziecko, które kogo innego trzyma lewą ręk  w obu układach lub kogo innego prawą ręk .)

- ✓ 11. Niech n b e dzie liczb  naturalną. Na ile sposob  można pokolorowa  pola tablicy $n \times n$ na dwa kolory (każde pole jednym kolorem) tak, by liczba p o  jednego koloru nie przewy szala liczby p o  drugiego koloru o wiecej ni  1?

- ✓ 12. Udowodnij przez indukcj , że dla każdego naturalnego n zachodzi:

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^i b^{n-i}.$$

- ✓ 13. (2p) (+) Oblicz liczb  funkcji niemalejących postaci
 $f: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$

- ✓ 14. Na ile sposob  można wrzuci  2n kulek do k szuflad tak, by w ka ej szufladzie znalazła się parzysta liczba kulek? A na ile sposob  można wrzuci  2n + 1 kulek do 2k + 1 szuflad tak, by w ka ej szufladzie znalazła się nieparzysta liczba kulek?

Zad 2 pkt

1. Na kartce w kratkę zaznaczono 5 punktów kratowych (czyli punktów o obu współrzędnych całkowitoliczbowych). Wykaż, że środek odcinka łączącego pewne dwa spośród tych punktów jest także punktem kratowym.

Mamy cztery możliwości wyboru
 (P,P) , (N,N) , (P,N) , (N,P)

Wybieramy więc punktów, w jednym „koszyku” będą więc
 co najmniej dwa punkty \Leftrightarrow dwa punkty będą miały też same porządkość
 obu współrzędnych.

porządko + porządko = całkowite
2

punktel (według porządkości).

nieporządko + nieporządko = całkowite
2

Musimy otrzymać więc min. jeden punkt kratowy

2. (+) Dany jest ciąg liczb naturalnych a_1, a_2, \dots, a_n . Pokaż, że istnieją takie i oraz j , $i \leq j$, że suma $a_i + a_{i+1} + \dots + a_j$ jest podzielna przez n .

$$S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, \dots, S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

Istnieje n takich sum

Udowodnijmy problem nie w prost

*możliwe że będą z te razem

Mamy dwie opcje:

I) Które z tych sum różni się modulo n :
- Mamy więc n różnych grup modulo $n \Rightarrow$ mamy grupy \mathbb{O} , sprzecznosc'

II) Dwie sumy z różnych samym modulo n

$S_i \equiv S_j \pmod{n} \Leftrightarrow S_j - S_i \equiv 0 \pmod{n}$

i równocześnie $S_j - S_i = a_{i+1} + a_{i+2} + \dots + a_j$ sprzecznosc'

Muszą więc istnieć takie i oraz j

3. Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n istnieje liczba podzielna przez n , której zapis dziesiętny składa się tylko z zer i jedynek.

Dla każdego n możemy wziąć $n+1$ liczb z siedmiu jedynek
 $(1, 11, 111, \dots, 11\dots1)$

Liczymy modulo n każdego z tych liczb

Jesli którakolwiek $x \bmod n = 0$ konczymy dowód
 Przypuśćmy dwa reszty będące równe, liczby z których te reszty liczymy oznaczmy jako a i b
 (odejmując jedynki od jedynek dostajemy 0)

Wtedy $(b-a) \bmod n = 0$ (o ile odejmując jedynki od jedynek dostajemy 0)

$$\begin{aligned} & \text{Np. } \\ & n=3 \\ & 1, 11, 111, 1111 \\ & 111 \bmod 3 = 0 \quad \checkmark \\ & \text{ew. } 111 \% 3 = 111 \% 3 \\ & 1111 - 1 = 1110 \end{aligned}$$

4 (done)

15 October, 2023 09:18

4. Wybieramy 55 liczb naturalnych takich, że: $1 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_{55} \leq 100$. Pokaż, że jakkolwiek byśmy je nie wybrali, jakieś dwie będą różnić się o 9.

Dzielić grup modulo $(0 - 8)$

1, 10, 19, 28, 37, 46, 55, 64, 73, 82, 91, 100
2, 11, 20, 29, 38, 47, 56, 65, 74, 83, 92

9, - - - - - , - , 99

w kolidę z grupą mały ilość 12 elementów
(w 8 il., w 12)

Do rozdzielenia 55 liczb $(55-1)/9 = 6$
w jednej 7, reszta 6

7 cyfr na 12 miejsc = przynajmniej dwie będą ze sobą graniczące
a więc będą oddalone o 9

(podzielność
przez 2 i 5)

5. Pokaż, że spośród dowolnych trzech liczb całkowitych potrafimy wybrać dwie a i b takie, że $a^3b - ab^3$ jest podzielne przez 10.

$$a^3b - ab^3 = ab(a^2 - b^2) = ab(a-b)(a+b)$$

Wów. $ab(a-b)(a+b) \equiv 0 \pmod{5}$

jeśli którakolwiek jest mod 0 lub są równe to wów. spełnione. Pozostałe opcje:

$$\{a, b, c\} = \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}$$

Dla każdego przypadku mamy $1+4$ lub $2+3 \equiv 0 \pmod{5}$

Jest więc podzielne przez 5

dla podz. przez 2 analogicznie

Podz. przez 2 i 5 \Rightarrow podz. przez 10 c.n.u.

6. (-) W każde pole szachownicy $n \times n$ wpisujemy jedną z liczb: $-1, 0, 1$.

Następnie dodajemy do siebie liczby stojące w tej samej kolumnie, w tym samym wierszu i na tej samej przekątnej. Udowodnij, że wśród otrzymanych sum co najmniej dwie są równe.

$\forall n \in \mathbb{N}$ mamy $2n+1$ sum (podteki)
(n w kolumnach i zero)

$\forall n \in \mathbb{N}$ mamy $2n+2$ sumy
(n kolumn, n wierszy, 2 przekątne)

wykazujemy $2n+2$ do $2n+1 \Rightarrow$ min. 1 podwójne (równe) c.n.u.

7. (-) Na okręgu zapisujemy w dowolnej kolejności liczby naturalne od 1 do 10. Pokaż, że zawsze znajdą się trzy sąsiednie, których suma wynosi przynajmniej 18.

wykresujemy jedynkę - zostają nam 3 grupy po trzy liczby
 $1+2+\dots+10 = 55$
 $55-1=54$
 $54/3=18$

jeśli podzielimy po równo, to mamy 3×18
 jeśli jakkolwiek grupa będzie mniejsza,
 to inna „przejmie nadmiar”

8. Podaj interpretację następującej tożsamości w terminach zbiorów:

$$\binom{n}{k} \binom{k}{m} = \binom{n}{m} \binom{n-m}{k-m}$$

9. (+) Wykaż prawdziwość tożsamości Cauchy'ego:

$$\binom{m+n}{r} = \sum_{i=0}^r \binom{m}{i} \binom{n}{r-i}.$$

Czy potrafisz udowodnić ją kombinatorycznie? \downarrow

Każdy dowód indukcyjny:



$$(0) \quad \binom{m+n}{r} = \sum_{i=0}^r \binom{m}{i} \binom{n}{r-i}.$$

Indukcja względem m :

$\prod_{m=0} \text{* dla } i \neq 0 \text{ mamy } \binom{0}{i} = 0, \text{ mamy więc}$

$$\binom{0}{r} = \binom{0}{0} \binom{n}{r-0} \quad (\text{oczywiście prawda})$$

$\prod_{m=0} \text{zatem dla pewnego } m \text{ i dowolnych } n, k, l,$
położmy \forall :

$$\binom{m+n+l}{r} = \sum_{i=0}^r \binom{m+i}{i} \binom{n}{r-i}$$

Wybieramy tyle samo osób z takiej samej ilości osób - zbiory będą więc równe

Dowód kombinatoryczny (na odtłuski razem):

$$\binom{m+k}{n} = \sum_{i=0}^n \binom{m}{i} \binom{k}{n-i}$$

Chcemy wybrać n ludzi z m mężczyzn i k kobiet

Mozemy po prostu wybrać n na $\binom{m+k}{n}$ sposobów

Ale mozymy też wybrać najpierw i mężczyzn w m sposobach, a następnie $n-i$ kobiet na k sposobów

Wybieramy tyle samo osób z takiej samej ilości osób - zbiory będą więc równe

rozbijamy $\binom{m+l}{i}$ na dwa symbole

$$P = \sum_{i=0}^r \binom{m+l}{i} \binom{n}{r-i} = \sum_{i=0}^r \left(\binom{m}{i} + \binom{m}{i-1} \right) \binom{n}{r-i} =$$

$$\sum_{i=0}^r \binom{m}{i} \binom{n}{r-i} + \sum_{i=0}^r \binom{m}{i-1} \binom{n}{r-i} = \quad \begin{array}{l} \text{rozłączamy sumę} \\ \text{wyliczamy jedną sumę, przekształcamy drugą} \end{array}$$

$$\binom{m+n}{r} + \sum_{i=0}^r \binom{m}{i} \binom{n}{r-i-1} = \quad \begin{array}{l} \text{wyliczamy drugą sumę: zwiążamy} \\ \text{wyliczamy drugą sumę: zwiążamy} \end{array}$$

10. Na ile sposobów $3n$ dzieci może uformować trzy równoliczne kola gra-niste? (Dwie formacje są różne jeśli istnieje dziecko, które kogo innego trzyma lewą ręką w obu układach lub kogo innego prawą ręką.)

$$\frac{\binom{3n}{n} n! \cdot \binom{2n}{n} n! \cdot n!}{\cancel{n! 2n!}} = 3n!$$

Tak czy gat
Uproszczając do jednego ciągu $3n!$

Wybierając najpierw z $3n$ dzieci uproszcza się dalego samego więc chyba gat

11. Niech n będzie liczbą naturalną. Na ile sposobów można pokolorować pola tablicy $n \times n$ na dwa kolory (każde pole jednym kolorem) tak, by liczba pól jednego koloru nie przewyższała liczby pól drugiego koloru o więcej niż 1?

n	pola	opcje
1	1	2
2	4	$\begin{matrix} B & C \\ C & B \end{matrix}$
3	9	$\begin{matrix} B & B & C \\ B & C & C \\ C & C & C \end{matrix}$
4	16	$\begin{matrix} B & B & B & B \\ B & C & C & C \\ C & C & C & C \\ C & C & C & C \end{matrix}$
5		

będę dla uproszczenia pisać czarne / białe (C/B)

Zauważmy że dla:
 - porzystych rozważamy tylko równą ilość
 - nieporzystych tylko różnicę o 1

No ile sposobów możemy wybrać
 $\frac{n^2}{2}$ pól z n^2 pól?

$$2^n \binom{n^2}{\frac{n^2}{2}} \text{ dla } n \text{ parzystych}$$

bo dwa kolory

$$2^n \binom{n^2}{\frac{n^2}{2} - 1} \text{ dla } n \text{ nieparzystych}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

12. Udowodnij przez indukcję, że dla każdego naturalnego n zachodzi: $\binom{n}{k} = 1$ dla $k=0 \cup k=n$

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^i b^{n-i}.$$

$$\text{I } \sum_0^n \binom{n}{i} a^i b^{n-i} + \binom{n}{0} a^0 b^{n-0} = b + a = a + b = (a+b)^n \quad \checkmark$$

II zat. dla n ud. dla $n+1$:

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n = (a+b) \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^i b^{n-i} = \text{wychodzimy od lewej i rozpisujemy}$$

$$a \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^i b^{n-i} + b \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^i b^{n-i} = \text{rozbijamy sumy na } a \text{ i } b$$

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^{i+1} b^{n-i} + \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^i b^{n-i+1} = +1 \text{ do odpowiednich potęg}$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} a^{i+1} b^{n-i} + \binom{n}{n} a^{n+1} + \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} a^i b^{n-i+1} + \binom{n}{0} b^{n+1} = \text{wyjmujemy po wiazie z Newtona i sum}$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} a^{i+1} b^{n-i} + \binom{n}{n} a^{n+1} + \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} a^i b^{n-i+1} + \binom{n}{0} b^{n+1} = \text{przesuwamy pierwszą sumę a i b i symbole Newtona przy zmiennej}$$

$$\binom{n+1}{n-1} a^{n+1} + \sum_{i=1}^n \left[\binom{n}{i-1} + \binom{n}{i} \right] a^i b^{n-i+1} + \binom{n+1}{0} b^{n+1} = \text{Łączymy sumy}$$

$$\binom{n+1}{n-1} a^{n+1} + \sum_{i=1}^n \binom{n+1}{i} a^i b^{n-i+1} + \binom{n+1}{0} b^{n+1} = \text{zwijamy symbol Newtona przy sumie}$$

$$\sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} a^i b^{n+1-i} \text{ suma start o jeden w dół i odp. potęga przy } b$$

Doprowadzone do postaci c prawej strony. Dowód skończony

+13

15 October, 2023 09:19

13. (2p) (+) Oblicz liczbę funkcji niemalejących postaci
 $f : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$.

14 (done)

15 October, 2023 09:19



14. Na ile sposobów można wrzucić $2n$ kulek do k szuflad tak, by w każdej szufladzie znalazła się parzysta liczba kulek? A na ile sposobów można wrzucić $2n+1$ kulek do $2k+1$ szuflad tak, by w każdej szufladzie znalazła się nieparzysta liczba kulek?

b)

- a) $\binom{1_k}{n}$ (rozważamy parzyste po dwie rzucone po dwoje chyle) (końce kuli ale w tej samej ilości to samo chyle)
- b) Nieporzyste w środku - wszędzie co najmniej jedna
Musimy roznieść np. pierw $2k+1$ kul (po środku)
 $2n+1 - 2k-1 = 2n-2k = 2(n-k)$
resztę roznieśmy parami jak w
- $$\binom{2k+1}{n-k}$$