

## Lista nr 2 z matematyki dyskretnej



1. Na kartce w kratkę zaznaczono 5 punktów kratowych (czyli punktów o obu współrzędnych całkowitoliczbowych). Wykaż, że środek odcinka łączącego pewne dwa spośród tych punktów jest także punktem kratowym.

- ✓ 2. (+) Dany jest ciąg liczb naturalnych  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Pokaż, że istnieją takie  $i$  oraz  $j$ ,  $i \leq j$ , że suma  $a_i + a_{i+1} + \dots + a_j$  jest podzielna przez  $n$ .

- ✓ 3. Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej  $n$  istnieje liczba podzielną przez  $n$ , której zapis dziesiętny złożony jest tylko z zer i jedynek.

- ✓ 4. Wybieramy 55 liczb naturalnych takich, że:  $1 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_{55} \leq 100$ . Pokaż, że jakkolwiek byśmy je nie wybrali, jakieś dwie będą różnić się o 9.

- ✓ 5. Pokaż, że spośród dowolnych trzech liczb całkowitych potrafimy wybrać dwie  $a$  i  $b$  takie, że  $a^3b - ab^3$  jest podzielne przez 10.

- ✓ 6. (-) W każe pole szachownicy  $n \times n$  wpisujemy jedną z liczb:  $-1, 0, 1$ . Następnie dodajemy do siebie liczby stojące w tej samej kolumnie, w tym samym wierszu i na tej samej przekątnej. Udowodnij, że wśród otrzymanych sum co najmniej dwie sły r one.

- ✓ 7. (-) Na okręgu zapisujemy w dowolnej kolejności liczby naturalne od 1 do 10. Pok z, że zawsze znajd a się trzy sąsiednie, których suma wynosi przynajmniej 18.

8. Podaj interpretacj  następującej tożsamości w terminach zbiorów:

$$\binom{n}{k} \binom{k}{m} = \binom{n}{m} \binom{n-m}{k-m}$$

- ✓ 9. (+) Wykaż prawdziwo to samo ci Cauchy'ego:

$$\binom{m+n}{r} = \sum_{i=0}^r \binom{m}{i} \binom{n}{r-i}.$$

1

L	1	2	3/4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
w	1	1	1	1	1	0,5	0,5	1	1?	1	1	1	1	1

Czy potrafisz udowodni  ją kombinatorycznie? ✓

- ?
10. Na ile sposob  3n dzieci może uformowa  trzy równoliczne koła g mie? (Dwie formacje są r one jesli istnieje dziecko, które kogo innego trzyma lewą rek  w obu układach lub kogo innego prawą rek .)

11. Niech  $n$  b edzie liczb  naturalną. Na ile sposob  można pokolorowa  pola tablicy  $n \times n$  na dwa kolory (każde pole jednym kolorem) tak, by liczba p o jednego koloru nie przewy szala liczby p o drugiego koloru o wiecej ni  1?

12. Udowodnij przez indukcj , że dla każdego naturalnego  $n$  zachodzi:

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^i b^{n-i}.$$

13. (2p) (+) Oblicz liczb  funkcji niemalejących postaci

$$f: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$$

14. Na ile sposob  można wrzuci  2n kulek do  $k$  szuflad tak, by w każdej szufladzie znalazła się parzysta liczba kulek? A na ile sposob  można wrzuci  2n + 1 kulek do 2k + 1 szuflad tak, by w każdej szufladzie znalazła się nieparzysta liczba kulek?

1. Na kartce w kratkę zaznaczono 5 punktów kratowych (czyli punktów o obu współrzędnych całkowitoliczbowych). Wykaż, że środek odcinka łączącego pewne dwa spośród tych punktów jest także punktem kratowym.

Mamy cztery możliwości wyboru  
 $(P,P)$ ,  $(N,N)$ ,  $(P,N)$ ,  $(N,P)$

Wybieramy więc punktów, w jednym „koszyku” będą więc  
 co najmniej dwa punkty  $\Leftrightarrow$  dwa punkty będą miały taką samą porządkość  
 obu współrzędnych.

porządko + porządko = całkowite  
2

punktel (według porządkości).

nieporządko + nieporządko = całkowite  
2

Musimy otrzymać więc min. jeden punkt kratowy

2. (+) Dany jest ciąg liczb naturalnych  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Pokaż, że istnieją takie  $i$  oraz  $j$ ,  $i \leq j$ , że suma  $a_i + a_{i+1} + \dots + a_j$  jest podzielna przez  $n$ .

$$S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, \dots, S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

Istnieje n takich sum

Udowodnijmy problem nie w prost

Mamy dwie opcje:

I) Które z tych sum różni się modulo  $n$ :  
- Mamy więc  $n$  różnych grup modulo  $n \Rightarrow$  mamy grupy  $\mathbb{O}$ , sprzecznosci

II) Dwie sumy z różnią się modulo  $n$

$S_i \equiv S_j \pmod{n} \Leftrightarrow S_j - S_i \equiv 0 \pmod{n}$

i równocześnie  $S_j - S_i = a_{i+1} + a_{i+2} + \dots + a_j$  sprzecznosc

Muszą więc istnieć takie  $i$  oraz  $j$

\*możliwe że będą z te razem

3. Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej  $n$  istnieje liczba podzielna przez  $n$ , której zapis dziesiętny składa się tylko z zer i jedynek.

Dla każdego  $n$  możemy wziąć  $n+1$  liczb z siedmiu jedynek  
 $(1, 11, 111, \dots, 11\dots1)$

Liczymy modulo  $n$  każdego z tych liczb

Jesli którakolwiek  $x \bmod n = 0$  konczymy dowód  
 Przypuśćmy dwa reszty będące równe, liczby z których te reszty liczymy oznaczmy jako  $a$  i  $b$   
 (odejmując jedynki od jedynek dostajemy 0)

Wtedy  $(b-a) \bmod n = 0$  (o ile odejmując jedynki od jedynek dostajemy 0)

$$\begin{array}{l} \text{np. } \\ \begin{aligned} n=3 & \\ 1, & 11, 111, 1111 \\ 111 \bmod 3 = 0 & \checkmark \\ \text{ew. } 111 \% 3 = 111 \% 3 & \\ 1111 - 1 = 1110 & \end{aligned} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 1110 \% 3 = 0 \quad \checkmark \\ 11111 - 1 = 11110 \quad \checkmark \end{array}$$

4 (done)

15 October, 2023 09:18

4. Wybieramy 55 liczb naturalnych takich, że:  $1 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_{55} \leq 100$ . Pokaż, że jakkolwiek быśmy je nie wybrali, jakieś dwie będą różnić się o 9.

Dzięć grup modulo (0 - 8)

1, 10, 19, 28, 37, 46, 55, 64, 73, 82, 91, 100  
2, 11, 20, 29, 38, 47, 56, 65, 74, 83, 92

9, - - - - - , - , 99

w kolidę z grupą mały ilość 12 elementów  
(w 8 it, w 12)

Do rozdzielenia 55 liczb  $(55-1)/9 = 6$   
w jednej 7, reszta 6

7 cyfr na 12 miejsc = przynajmniej dwie będą ze sobą graniczące  
a więc będą oddalone o 9

(podzielność  
przez 2 i 5)

5. Pokaż, że spośród dowolnych trzech liczb całkowitych potrafimy wybrać dwie  $a$  i  $b$  takie, że  $a^3b - ab^3$  jest podzielne przez 10.

$$a^3b - ab^3 = ab(a^2 - b^2) = ab(a-b)(a+b)$$

Wów.  $ab(a-b)(a+b) \equiv 0 \pmod{5}$

jeśli którakolwiek jest mod 0 lub są równe to wów. spełnione. Pozostałe opcje:

$$\{a, b, c\} = \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}$$

Dla każdego przypadku mamy  $1+4$  lub  $2+3 \equiv 0 \pmod{5}$

Jest więc podzielne przez 5

dla podz. przez 2 analogicznie

Podz. przez 2 i 5  $\Rightarrow$  podz. przez 10 c.n.u.

6. (-) W każde pole szachownicy  $n \times n$  wpisujemy jedną z liczb:  $-1, 0, 1$ .

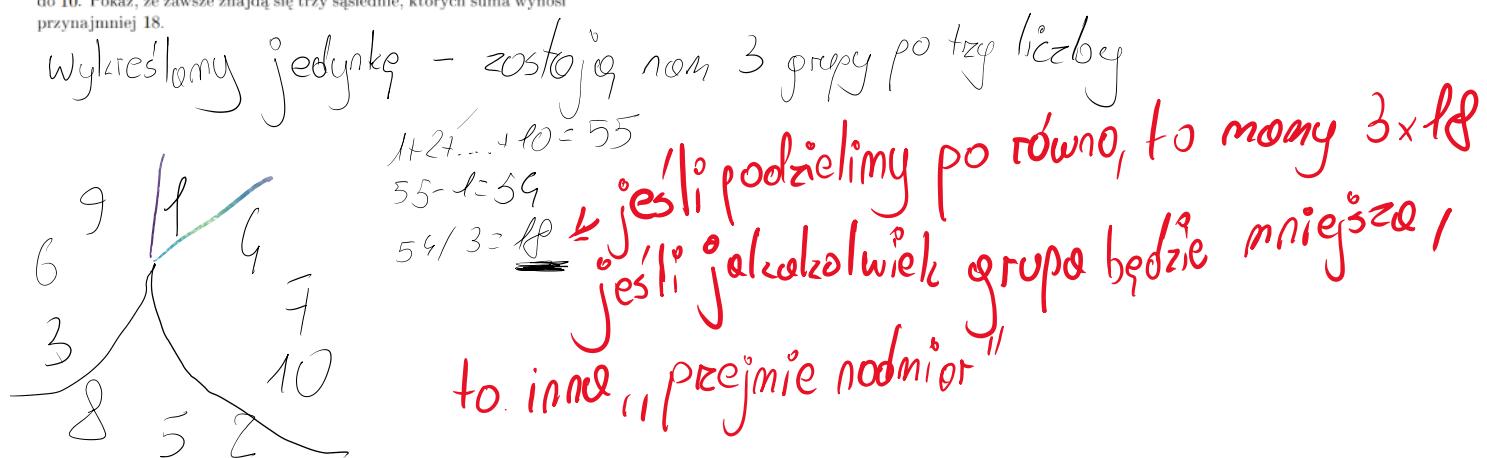
Następnie dodajemy do siebie liczby stojące w tej samej kolumnie, w tym samym wierszu i na tej samej przekątnej. Udowodnij, że wśród otrzymanych sum co najmniej dwie są równe.

$\forall n \in \mathbb{N}$  mamy  $2n+1$  sum (podteki)  
( $n$  w kolumnach i zero)

$\forall n \in \mathbb{N}$  mamy  $2n+2$  sumy  
( $n$  kolumn,  $n$  wierszy, 2 przekątne)

wykazujemy  $2n+2$  do  $2n+1 \Rightarrow$  min. 1 podwójne (równe) c.n.u.

7. (-) Na okręgu zapisujemy w dowolnej kolejności liczby naturalne od 1 do 10. Pokaż, że zawsze znajdą się trzy sąsiednie, których suma wynosi przynajmniej 18.



8. Podaj interpretację następującej tożsamości w terminach zbiorów:

$$\binom{n}{k} \binom{k}{m} = \binom{n}{m} \binom{n-m}{k-m}$$

9. (+) Wykaż prawdziwość tożsamości Cauchy'ego:

$$\binom{m+n}{r} = \sum_{i=0}^r \binom{m}{i} \binom{n}{r-i}.$$

Czy potrafisz udowodnić ją kombinatorycznie?  $\downarrow$

Każdy dowód indukcyjny:



$$(0) \quad \binom{m+n}{r} = \sum_{i=0}^r \binom{m}{i} \binom{n}{r-i}.$$

Indukcja względem  $m$ :

$\prod_{m=0} \text{* dla } i \neq 0 \text{ mamy } \binom{0}{i} = 0, \text{ mamy więc}$

$$\binom{0}{r} = \binom{0}{0} \binom{n}{r-0} \quad (\text{oczywiście prawda})$$

$\prod_{m=0} \text{zatem dla pewnego } m \text{ i dowolnych } n, k, l,$   
położmy  $\forall$ :

$$\binom{m+n+l}{r} = \sum_{i=0}^r \binom{m+i}{i} \binom{n}{r-i}$$

Wybieramy tyle samo osób z takiej samej ilości osób - zbiory będą więc równe

Dowód kombinatoryczny (na odtłuski razem):

$$\binom{m+k}{n} = \sum_{i=0}^n \binom{m}{i} \binom{k}{n-i}$$

Chcemy wybrać  $n$  ludzi z  $m$  mężczyzn i  $k$  kobiet

Mozemy po prostu wybrać  $n$  na  $\binom{m+k}{n}$  sposobów

Ale mozymy też wybrać najpierw  $i$  mężczyzn w  $m$  sposobach, a następnie  $n-i$  kobiet na  $k$  sposobów

Wybieramy tyle samo osób z takiej samej ilości osób - zbiory będą więc równe

rozbijamy  $\binom{m+l}{i}$  na dwa symbole

$$P = \sum_{i=0}^r \binom{m+l}{i} \binom{n}{r-i} = \sum_{i=0}^r \left( \binom{m}{i} + \binom{m}{i-1} \right) \binom{n}{r-i} =$$

$$\sum_{i=0}^r \binom{m}{i} \binom{n}{r-i} + \sum_{i=0}^r \binom{m}{i-1} \binom{n}{r-i} = \quad \begin{array}{l} \text{rozłączamy sumę} \\ \text{wyliczamy jedną sumę, przekształcamy drugą} \end{array}$$

$$\binom{m+n}{r} + \sum_{i=0}^r \binom{m}{i} \binom{n}{r-i-1} =$$

wyliczamy drugą sumę i zwijamy

$$\binom{m+n}{r} + \binom{m+n}{r-l} = \binom{m+n+l}{r} =$$

c.d.q.

10. Na ile sposobów  $3n$  dzieci może uformować trzy równoliczne kola gra-niste? (Dwie formacje są różne jeśli istnieje dziecko, które kogo innego trzyma lewą ręką w obu układach lub kogo innego prawą ręką.)

$$\frac{\binom{3n}{n} n! \cdot \binom{2n}{n} n! \cdot n!}{\cancel{n! 2n!}} = 3n!$$

Tak czy gat  
Uproszczając do jednego ciągu  $3n!$

Wybierając najpierw z  $3n$  dzieci uproszcza się dalego samego więc chyba gat

11. Niech  $n$  będzie liczbą naturalną. Na ile sposobów można pokolorować pola tablicy  $n \times n$  na dwa kolory (każde pole jednym kolorem) tak, by liczba pól jednego koloru nie przewyższała liczby pól drugiego koloru o więcej niż 1?

$n$	pola	opcje
1	1	<del>B/C</del>
2	4	<del>B/C</del>
3	9	<del>B/C</del> <del>B/B/C</del> <del>B/B/C</del>
4	16	<del>B/C</del> <del>B/B/C</del> <del>B/C/C/C</del> <del>B/B/B/B</del> <del>C/C/C/C</del>

będę dla uproszczenia pisać  
czarny / biały (C/B)

Zauważamy że dla:  

- > pozytywów rozważamy tylko różnicę o 1
- > niepozytywów tylko różnicę o 1

~~B/B B/B B/B B/B B/B B/B~~

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

12. Udowodnij przez indukcję, że dla każdego naturalnego  $n$  zachodzi:  $\binom{n}{k} = 1$  dla  $k=0 \cup k=n$

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^i b^{n-i}.$$

$$\text{I } \sum_0^n \binom{n}{i} a^i b^{n-i} + \binom{n}{0} a^0 b^{n-0} = b + a = a + b = (a+b)^n \quad \checkmark$$

II zat. dla  $n$  ud. dla  $n+1$ :

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n = (a+b) \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^i b^{n-i} = \text{wychodzimy od lewej i rozpisujemy}$$

$$a \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^i b^{n-i} + b \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^i b^{n-i} = \text{rozbijamy sumy na } a \text{ i } b$$

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^{i+1} b^{n-i} + \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^i b^{n-i+1} = +1 \text{ do odpowiednich potęg}$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} a^{i+1} b^{n-i} + \binom{n}{0} a^{n+1} + \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} a^i b^{n-i+1} + \binom{n}{0} b^{n+1} = \text{wyjmujemy po wiazie z Newtona i sum}$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} a^{i+1} b^{n-i} + \binom{n}{0} a^{n+1} + \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} a^i b^{n-i+1} + \binom{n}{0} b^{n+1} = \text{przesuwamy pierwszą sumę o } b \text{ i symbole Newtona przy zmiennej}$$

$$\binom{n+1}{n-1} a^{n+1} + \sum_{i=1}^n \left[ \binom{n}{i-1} + \binom{n}{i} \right] a^i b^{n-i+1} + \binom{n+1}{0} b^{n+1} = \text{Łączymy sumy}$$

$$\binom{n+1}{n-1} a^{n+1} + \sum_{i=1}^n \binom{n+1}{i} a^i b^{n-i+1} + \binom{n+1}{0} b^{n+1} = \text{zwijamy symbol Newtona przy sumie}$$

$$\sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} a^i b^{n+1-i} \text{ suma start o jeden w dół i odp. potęga przy } b$$

Doprowadzone do postaci c prawej strony. Dowód skończony

+13

15 October, 2023 09:19

13. (2p) (+) Oblicz liczbę funkcji niemalejących postaci  
 $f : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ .

14. Na ile sposobów można wrzucić  $2n$  kulek do  $k$  szuflad tak, by w każdej szufladzie znalazła się parzysta liczba kulek? A na ile sposobów można wrzucić  $2n + 1$  kulek do  $2k + 1$  szuflad tak, by w każdej szufladzie znalazła się nieparzysta liczba kulek?