L3

21 October, 2023 11:49

L3 zad.	+1	2	3	4	5	6	+7	8	9	-10	11	12	suma
plkt.		1	?	1	?	1	1	1		0,5	1	1	—
maxpkt.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0,5	1	1	11,5

1. (+) ***Nieporządkiem*** nazywa się taką permutację elementów, w której żaden element nie znajduje się na swoim miejscu. Niech d_n oznacza liczbę nieporządków utworzonych z n kolejnych liczb naturalnych. Wyprowadź wzór na d_n stosując zasadę włączeń-wyłączeń.

2. Wśród liczb naturalnych $1, 2, \ldots, 800$, ile jest takich, które nie są podzielne przez 7, ale są podzielne przez 6 lub przez 8.

3. Korzystając z zasady włączeń-wyłączeń oblicz, ile jest sposobów ustawienia liter $a, a, a, a, b, b, b, c, c$ w taki sposób, aby takie same litery nie tworzyły jednego bloku, tzn. ustawienie $a, a, a, a, b, c, b, c, b$ jest zakazane, ale ustawienie $a, a, a, b, a, c, b, c, b$ jest dobre.

4. Baltazar Gąbka ma 7 przyjaciół. Określ, na ile sposobów może zapraszać po 3 z nich na kolację przez 7 kolejnych dni tak, aby każdy z nich został zaproszony co najmniej raz.

5. Udowodnij, że $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$ równa się liczbie dróg, po których wieża może przejść z lewego dolnego rogu do prawego górnego rogu szachownicy $(n+1) \times (n+1)$ poruszając się wyłącznie do góry lub na prawo.

   Czy potrafisz zwinąć tę sumę?

6. Każdy punkt płaszczyzny pomalowano na jeden z dwóch kolorów: szafirowy lub alabastrowy. Pokaż, że na tej płaszczyźnie istnieje prostokąt o wierzchołkach takiego samego koloru.

7. (+) Wykaż, że wśród $n+1$ różnych liczb wybranych spośród $2n$ kolejnych liczb naturalnych zaczynając od 1 istnieją dwie, w których jedna dzieli drugą.

8. Na ile sposobów można wybrać pewną liczbę z 50 nierozróżnialnych kulek i wrzucić je do 5 (rozróżnialnych) szuflad?

9. Ile rozwiązań wśród liczb naturalnych ma równanie $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 100$, jeśli dodatkowo wymagamy, aby $x_1, x_2 < 30$ oraz $x_3, x_4 < 40$?

10. (-) Określ liczbę podzielną przez 7, która leży najbliżej liczby 10^{100000}.

11. Udowodnij lub obal następujące stwierdzenie:

    Liczba naturalna a, której zapis w systemie dziesiętnym to $a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0$ dzieli się przez 11 wtw gdy liczba $\sum_{i=1}^{\lceil n/2 \rceil} a_{2i-1} - \sum_{i=0}^{\lceil n/2 \rceil} a_{2i}$ jest podzielna przez 11.

12. Oblicz dwie ostatnie cyfry w rozwinięciu dziesiętnym liczby 74^{74}.

+1

21 October, 2023 12:03

1. (+) *Nieporządkiem* nazywa się taką permutację elementów, w której żaden element nie znajduje się na swoim miejscu. Niech d_n oznacza liczbę nieporządków utworzonych z n kolejnych liczb naturalnych. Wyprowadź wzór na d_n stosując zasadę włączeń-wyłączeń.

Niech warunek P_i będzie spełniony, jeśli i-ty element permutacji znajduje się na poprawnym, i-tym miejscu. Szukamy permutacji niespełniających powyższego warunku dla każdego $i = 1, 2, \dots, n$

Oznaczmy liczbę wszystkich permutacji n-elementowych jako N. Wiemy że $N = n!$

2 (done)

21 October, 2023 12:03

2. Wśród liczb naturalnych $1, 2, \ldots, 800$, ile jest takich, które nie są podzielne przez 7, ale są podzielne przez 6 lub przez 8.

Dla dowolnego $n \in \mathbb{N}_+$ jest $\lfloor \frac{n}{a} \rfloor$ liczb podzielnych przez a.

Oznaczmy zbiór podzielnych przez 6 jako A, przez 8 jako B, przez 7 jako C. Wyznaczmy teraz wzór:

$$|(A \cup B) \setminus C| = |A \cup B| - |(A \cup B) \cap C| =$$

$$|A \cup B| - |(A \cap C) \cup (B \cap C)| = |A \cup B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

to będzie nasza odp.

$$|A \cup B| = \left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{8} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{nww(6,8)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{8} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{24} \right\rfloor \overset{n=800}{=} 133 + 100 - 33 = 200$$

$$|A \cap C| = \left\lfloor \frac{n}{nww(6,7)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{42} \right\rfloor \overset{n=800}{=} 19$$

$$|B \cap C| = \left\lfloor \frac{n}{nww(7,8)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{56} \right\rfloor \overset{n=800}{=} 14$$

$$|A \cap B \cap C| = \left\lfloor \frac{n}{nww(6,7,8)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{168} \right\rfloor = 4$$

Po podstawieniu we wzór ost. wynik to $200 + 4 - 14 - 19 = 171$

3 (chyba)

21 October, 2023 12:03

$|A_1 \cap A_2 \cap A_3|$: a,b,c a,c,b b,a,c b,c,a c,a,b c,b,a

3. Korzystając z zasady włączeń-wyłączeń oblicz, ile jest sposobów ustawienia liter $a, a, a, a, b, b, b, c, c$ w taki sposób, aby takie same litery nie tworzyły jednego bloku, tzn. ustawienie $a, a, a, a, b, c, b, c, b$ jest zakazane, ale ustawienie $a, a, a, b, a, c, b, c, b$ jest dobre.

5

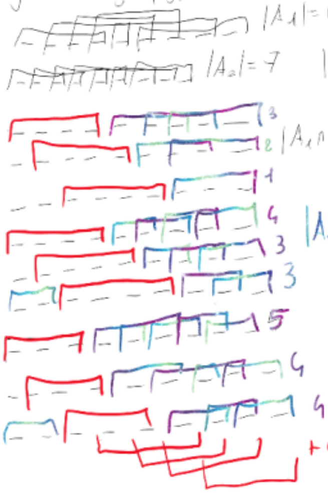
6 48 opcje licząc też nielegalne: $3^4 \cdot 2^3$

I tutaj screen bo miałem git jednak chyba

Z zasady włączeń-wyłączeń

$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$

podział naszym przypadku: A_1 - bloki a, A_2 - bloki b, A_3 - bloki c



$|A_1| = 6$ $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 6$

$|A_2| = 7$ $|A_3| = 8$

(bo lustrzane odb.)

3, 2, 1 $|A_1 \cap A_2| = 6 \cdot 2 = 12$

4, 3, 3 $|A_1 \cap A_3| = 10 \cdot 2 = 20$

5, 4, 4 $|A_2 \cap A_3| = 30$

$+4+4+4+5$

~~$|A_1 \cup A_2 \cup A_3|$~~

dla $|A_1|$ $|A_2|$ $|A_3|$ jeszcze wszystkie kombinacje innych

tj $|A_1| \cdot = 2^3 \Rightarrow |A_1| = 48$

$|A_2| \cdot = 2^4 \Rightarrow |A_2| = 112$

$|A_3| \cdot = 128$

$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| =$

$48 + 112 + 128$

$-12 - 20 - 30$

$+6$

$= 232$

$648 - 232 = 416$

raczej git ale lepiej

dopytać się jeszcze bo to trochę brute force

4 (done)

21 October, 2023 12:03

4. Baltazar Gąbka ma 7 przyjaciół. Określ, na ile sposobów może zapraszać po 3 z nich na kolację przez 7 kolejnych dni tak, aby każdy z nich został zaproszony co najmniej raz.

Jeśli ktoś nie jest zaproszony ani razu to tak jakbyśmy wybierali z sześciu osób. - główna myśl

(mniejsze już niemożliwe bo $\binom{\binom{4}{3}}{7} = \binom{4}{7} = \text{und.}$)

7 przyjaciół = $\binom{7}{3}$ możliwych grup

wybieramy 7 z $\binom{7}{3}$ grup i potem zasada włączeń i wyłączeń

$$S = \binom{\binom{7}{3}}{7} - 7 \cdot \binom{\binom{6}{3}}{7} + \binom{7}{2} \cdot \binom{\binom{5}{3}}{7} =$$

$$\binom{35}{7} - 7 \cdot \binom{20}{7} + 21 \cdot \binom{10}{7} =$$

$$6724520 - 7 \cdot 77520 + 21 \cdot 120 = 6184400$$

Jeśli rozróżniomy jeszcze kolejność zaproszeń to mnożymy jeszcze x 7!

$$= 31\,169\,376\,000$$

5 (chyba)

21 October, 2023 12:03

G - góra P prawo

5. Udowodnij, że $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2$ równa się liczbie dróg, po których wieża może przejść z lewego dolnego rogu do prawego górnego rogu szachownicy $(n+1)\times(n+1)$ poruszając się wyłącznie do góry lub na prawo.

   Czy potrafisz zwinąć tę sumę?

$n+1 \times n+1$

$n : n$

Wyobraźmy najpierw domyślną szachownicę 8x8.

Mamy do zrobienia 7 ruchów w prawo i 7 w górę.

Mamy więc ciąg stworzony z 7G i 7P łącznie 14 miejsc

$\binom{14}{7} = \frac{14!}{7!7!} = 3432$, lub ogólnie $\binom{2n}{n}$

wybieramy 7 z 14, pozostałe 7 pokryte drugą opcją

Dla przykładu $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 = 1 + 7^2 + 21^2 + 35^2 + 35^2 + 21^2 + 7^2 + 1 = 3432$. Wzór się zgadza

$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}^2 + \binom{n}{n}^2$

Mam pit zwinięty wzór ale idk jak zwinąć

1	8	36					3432
1	7	28					
1	6	21					
1	5	15	35	70			
1	4	10	20	35			
1	3	6	10	15	21	28	36
1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	1	1	1	1	1

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1

trójkąt pascala dla poprawnego n

6 (done)

21 October, 2023 12:03

1, S

6. Każdy punkt płaszczyzny pomalowano na jeden z dwóch kolorów: szafirowy lub alabastrowy. Pokaż, że na tej płaszczyźnie istnieje prostokąt o wierzchołkach takiego samego koloru.

1 A

Rozważmy siatkę na tej płaszczyźnie zawierającą trzy wiersze. Z zasady szufladkowej Dirchleta wiemy wtedy, że w każdej kolumnie powtórzy się conajmniej jeden kolor. Korzystamy z zasady szufladkowej Dirchleta.

Weźmy siatkę 9x3 na płaszczyźnie i mamy opcje

A	A	A	S	A	S	S	S
A	A	S	A	S	A	S	S
A	S	A	A	S	S	A	S

mamy 8 opcji, w każdej jeden z kolorów występuje min. 2 razy w każdej z nich. Zawsze możemy zestawić odp. kolory

+7 (done)

21 October, 2023 12:03

7. (+) Wykaż, że wśród $n+1$ różnych liczb wybranych spośród $2n$ kolejnych liczb naturalnych zaczynając od 1 istnieją dwie, w których jedna dzieli drugą.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

X X X X X X

Prosty sposób że albo będzie 1 albo dwie parzyste odpowiednie

Ładny dowód:

Każdą z liczb $n \in \mathbb{N}$ zapisać jako $n = 2^a b_n$, gdzie b jest największym nieparzystym dzielnikiem. Istnieje n nieparzystych liczb mniejszych niż 2n. Jako że bierzemy n+1 liczb, przynajmniej dwie będą miały ten sam współczynnik b.

$a, b, c \in \mathbb{N}^+$

$c \geq a$ wtedy $\frac{2^c b}{2^a b} = 2^{c-a}$; $c - a \geq 0$

a więc 2^{c-a} jest lb. $\mathbb{N}$, a więc te dwie liczby są podzielne c.n.d.

8 (done)

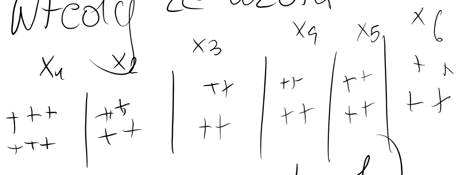
21 October, 2023 12:03

8. Na ile sposobów można wybrać pewną liczbę z 50 nierozróżnialnych kulek i wrzucić je do 5 (rozróżnialnych) szuflad?

5 szuflad + opcja zostawienia ich na zewnątrz bo wybieramy tylko pewną liczbę kul.

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=50$$

Wtedy ze wzoru stars & bars (dwa z końcowych zadań z poprzedniej listy)



umieszczamy 5 ścian w dowolnym miejscu między 50-cioma gwiazdkami

Wzór to $\binom{n+k-1}{k-1}$, gdzie w naszym przypadku $n=50$ $k=6$

← udowodnione przy zadaniu z niemalejącymi funkcjami z listy 2

$$\binom{50+6-1}{6-1} =$$

$$\binom{55}{5} = \frac{55!}{5!\,50!} = \frac{51\cdot 52\cdot 53\cdot 54\cdot 55}{120} = 3478761$$

$$\frac{11\cdot 51\cdot 52\cdot 53\cdot 54}{24} = \frac{11\cdot 27\cdot 51\cdot 52\cdot 53}{12} = \frac{11\cdot 26\cdot 27\cdot 51\cdot 53}{6} = \frac{11\cdot 13\cdot 27\cdot 51\cdot 53}{3} =$$

$$11\cdot 13\cdot 17\cdot 27\cdot 53$$

9

21 October, 2023 12:03

n=kule k=szuflady

9. Ile rozwiązań wśród liczb naturalnych ma równanie $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 100$, jeśli dodatkowo wymagamy, aby $x_1, x_2 < 30$ oraz $x_3, x_4 < 40$?

100 kul, 4 szuflady w pierwszych dwóch 0-29, w dwóch kolejnych 0-39

Bez limitów:

$\binom{n+k-1}{k-1} = \binom{103}{3} = 176\,851$

-10 (done)

21 October, 2023 12:03

dowód dlaczego to! w zad. 12

10. (-) Określ liczbę podzielną przez 7, która leży najbliżej liczby 10^{100000}.

wszędzie poniżej (mod 7)

① $10^1 \% 7 \equiv 3 \pmod 7$

$10^2 \% 7 \equiv 5 \pmod 7$

$10^4 \% 7 \equiv 25 \% 7 \equiv 4$

$10^8 \% 7 \equiv 4 \cdot 4 = 2$

$10^{16} \% 7 \equiv 2 \cdot 2 = 4$

$10^{32} \% 7 \equiv 4 \cdot 4 = 2$

$10^{64} \% 7 \equiv 2$

② $10^{100} \equiv 10^{32+64+4} \equiv$

$4 \bmod 7 \cdot 10^4 \bmod 7 \equiv$

$4 \bmod 7 \cdot 4 \bmod 7 =$

$2 \bmod 7$

③ $10^{10000} \equiv 10^{100} \cdot 10^{100} \pmod 7 \equiv$

$4 \bmod 7$

④ $10^{10} \equiv 10^8 \cdot 10^2 \equiv 10 \equiv 3$

⑤ $10^{100000} \bmod 7 \equiv$

$(3 \bmod 7 \cdot 4 \bmod 7) \bmod 7 = 12 \bmod 7 = 5 \bmod 7$

A więc odp: $10^{100000} + 2$

11 (done) (ale da się to lepiej zapisać)

21 October, 2023 12:03

11. Udowodnij lub obal następujące stwierdzenie:

Liczba naturalna a, której zapis w systemie dziesiętnym to $a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0$ dzieli się przez 11 wtw gdy liczba $\sum_{i=1}^{\lceil n/2 \rceil} a_{2i-1} - \sum_{i=0}^{\lceil n/2 \rceil} a_{2i}$ jest podzielna przez 11.

Liczbę a możemy zapisać jako $a = 10^n a_n + 10^{n-1} a_{n-1} + \dots + 10 a_1 + 10^0 a_0$ gdzie kolejne jej cyfry to

$a = \sum_{i=0}^{n} 10^i a_i$

Zauważamy, że:

$a: a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0$

$\sum_{i=1}^{\lceil n/2 \rceil} a_{2i-1} = a_1 + a_3 + a_5 + a_7 \dots$

a więc odejmujemy parzyste od nieparzystych

$\sum_{i=0}^{\lceil n/2 \rceil} a_{2i} = a_0 + a_2 + a_4 + a_6 \dots$

Mamy więc warunek: W $\sum_{i=0}^{n} (-1)^{i+1} a_i = 0$

Teraz musimy zauważyć że występuje zależność:

$10 \equiv -1 \bmod 11$ $100 \equiv 1 \bmod 11$ $1000 \equiv -1 \bmod 11$ $10000 \equiv 1 \bmod 11$

co pozwala nam zapisać

$0 = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{i+1} a_i \pmod{11}$

Wiemy że

Aby a była podzielna przez 11 $a \equiv 0 \pmod{11}$

$\sum_{i=0}^{n} (-1)^{i+1} a_i \pmod{11} \equiv 0$

A z tego miejsca już widać wprost że warunek zajdzie wtw. gdy W jest spełnione.

12 (done)

21 October, 2023 12:03

12. Oblicz dwie ostatnie cyfry w rozwinięciu dziesiętnym liczby 74^{74}.

Do obliczeń skorzystamy z zależności

$(a \cdot b) \bmod n = ((a \bmod n)(b \bmod n)) \bmod n$

nie musimy tak ale zwykle będzie najszybciej jak przy szybkim potęgowaniu

Rozpiszmy 74^{74} rozbijając wykładnik potęgi na kolejne potęgi dwójki *

$74 = 64 + 8 + 2$

$74^{74} = 74^{64+8+2}$

$74^1 \equiv 74 \bmod 100$

$74^2 \equiv 76 \bmod 100$

$74^4 \equiv 74^2 \bmod 100 \cdot 74^2 \bmod 100 \equiv 76 \bmod 100 \cdot 76 \bmod 100 \equiv 5776 \bmod 100 = 76 \bmod 100$

$74^8 \equiv 74^4 \bmod 100 \cdot 74^4 \bmod 100 = 76 \bmod 100 \cdot 76 \bmod 100 = 76 \bmod 100$

zauważmy też, że nam się to „zapętliło" więc

$74^2 \equiv 74^4 \equiv 74^8 \equiv 74^{16} \equiv 74^{32} \equiv 74^{64} \pmod{100} \equiv 76 \bmod 100$

Mając te wszystkie liczby, możemy zapisać

$74^{74} \bmod 100 \equiv 74^{64+8+2} \bmod 100 \equiv$

$74^{64} \cdot 74^8 \cdot 74^2 \bmod 100 \equiv$

$(((76 \bmod 100) \cdot (76 \bmod 100)) \bmod 100) \cdot 74^2 \bmod 100 \equiv$

$5776 \bmod 100 \cdot 74^2 \bmod 100 \equiv$

$76 \bmod 100 \cdot 5776 \bmod 100 \equiv$

$76 \bmod 100 \cdot 76 \bmod 100 \equiv$

$\underline{76} \bmod 100$

A więc dwoma ostatnimi cyframi będzie 76.

(można obliczyć dowolną ilość biorąc odp. wartość modulo)