Zadanie egzaminacyjne 2

Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka

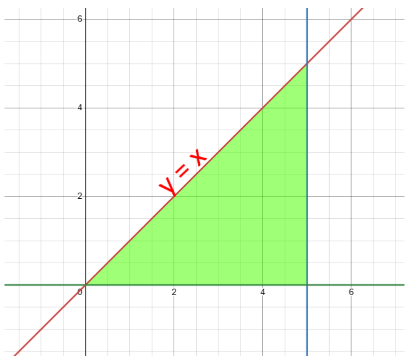
Wojciech Woźniak

Opis zadania

Mój numer indeksu kończy się 44, więc n = 5; m = 5.
Na trójkącie o wierzchołkach $(0,0), (5,0), (5,5)$ zmienna (X, Y) ma stałą gęstość $f(x, y) = C$. Mamy wyznaczyć gęstość zmiennej $T = X + 2Y$.

1 Rysunek poglądowy, wyznaczenie wartości C

Rysunek poglądowy początkowego trójkąta.
Trójkąt wyznaczony jest prostymi y = x, y = 0 i x = 5.
Pole tego trójkąta to $\frac{25}{2}$, więc C we wzorze na gęstość to $\frac{2}{25}$.
$f(x, y) = \frac{2}{25}$



2 Przejście do zmiennej (S, T), odwrócenie równania i obliczenie modułu Jakobianu

$$\begin{cases} T = X + 2Y \qquad \Rightarrow \qquad X = T - 2Y \\ S = Y \end{cases}$$

$$\begin{cases} X = T - 2S \\ Y = S \end{cases}$$

$$|J| = \det\left(\begin{bmatrix} \frac{\partial X}{\partial T} & \frac{\partial X}{\partial S} \\ \frac{\partial Y}{\partial T} & \frac{\partial Y}{\partial S} \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 1$$

3 Całka nieoznaczona z gęstości (wzór z s)

$g(t,s) = f_{X,Y}(x(t,s), y(t,s)) \times |J| = \frac{2}{25} * 1 = \frac{2}{25}$

$\int g(t,s)ds = \frac{2}{25}s + C$

4 Ograniczenia t

$t = x + 2y \qquad y = x \qquad t = x + 2x = 3x$

$x \in [0,5] \rightarrow t \in [0,15]$

5 Ograniczenia s przy zmieniającym się t

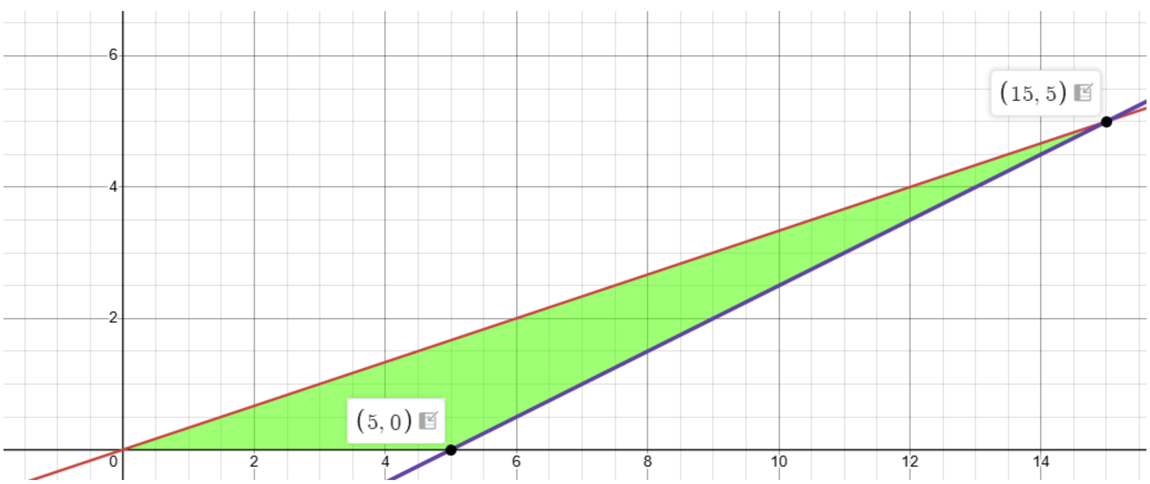
$0 \leq x \leq 5 \qquad 0 \leq y \leq x$
$0 \leq t - 2s \leq 5 \qquad 0 \leq s \leq t - 2s$

Rozwiązując te dwie podwójne nierówności otrzymujemy:

$\max(0, \frac{T-5}{2}) \leq s \leq \frac{T}{3}$

6 Wyznaczenie przedziałów dla funkcji gęstości

Proste s = 0 i $s = \frac{t-5}{2}$ przecinają się gdy $t = 5$ (najpierw większa jest pierwsza, potem druga). Mamy więc:
- $t \in [0,5] \rightarrow s \in [0, \frac{t}{3}]$
- $t \in [5,15] \rightarrow s \in [\frac{t-5}{2}, \frac{t}{3}]$



Rysunek poglądowy, zauważmy że $\frac{t-5}{2} \leq \frac{t}{3}$ dla $t \in [0,15]$

7 Wyznaczenie wzoru funkcji gęstości

Liczymy całki z g(t,s) ds na odpowiednich przedziałach. (Pierwsza od 0 do $\frac{t}{3}$, druga od $\frac{t-5}{2}$ do $\frac{t}{3}$). Otrzymujemy:

$$g_1(t) = \begin{cases} \frac{2}{75}t & \text{dla } t \in [0,5] \\ \\ \frac{15-t}{75} & \text{dla } t \in [5,15] \end{cases}$$

8 Sprawdzenie wyniku

$$\int_0^5 \frac{2}{75} t \, dt + \int_5^{15} \frac{15-t}{75} \, dt = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1, \quad \text{więc } g_1(t) \text{ jest gęstością.}$$