

Grado en Ingeniería Informática
2018-2019

Apuntes
Cálculo

Jorge Rodríguez Fraile¹



Esta obra se encuentra sujeta a la licencia Creative Commons
Reconocimiento - No Comercial - Sin Obra Derivada

¹Universidad: 100405951@alumnos.uc3m.es | Personal: jrf1616@gmail.com

ÍNDICE GENERAL

I	Tema 1. Números reales	3
II	Tema 2. Sucesiones	9
III	Tema 3. Series	17
IV	Tema 4. Funciones de variable real y Continuidad	27
V	Tema 5. Derivadas	35
VI	Tema 6. Teoremas sobre funciones derivables	47
VII	Tema 7. Polinomio de Taylor	57
VIII	Tema 8. Comportamiento local	63
IX	Tema 10. Teoremas fundamental del Calculo	69

Parte I

Tema 1. Números reales

FUNCIÓNES REALES DE VARIABLE REAL

$$\boxed{\begin{array}{l} f: D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) \end{array}}$$

función real de variable real

$$\begin{array}{ccc} f: D \subseteq \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \text{función de} & & \text{función} \\ \text{variable real} & & \text{real} \end{array}$$

$D :=$ dominio de la función $:=$ números reales " x " para los que tiene sentido el cálculo de $f(x)$

$$\begin{aligned} \text{Im}(f) &= \{y \in \mathbb{R} : y = f(x) \text{ para algún } x \in D\} \\ &= \text{números reales "y" que son de la forma} \\ &\quad y = f(x) \text{ para algún "x"}. \end{aligned}$$

Obs: Normalmente nos referiremos a una función a través de una expresión del tipo " $f(x)$ ". En estos casos asumiremos, implícitamente, que el dominio de f es el conjunto más grande en el que la fórmula " $f(x)$ " tenga sentido

Ejemplo: El dominio de $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ es el conjunto:

$$\begin{aligned} D &= \{x \in \mathbb{R} : 1-x^2 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 1\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq 1\} = [-1, 1] \end{aligned}$$

La imagen de $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ está formada por los $y \in \mathbb{R}$ tales que:

$$\begin{array}{l|l} y = \sqrt{1-x^2} & \Leftrightarrow y^2 = 1-x^2 \Rightarrow x^2 = 1-y^2 \\ \text{para algún } x \in [-1, 1] & x = \pm \sqrt{1-y^2} \\ \Rightarrow y = \sqrt{1-x^2} \geq 0 & \text{Por tanto } y \geq 0 \text{ \& } y \in [-1, 1] \\ & \Rightarrow \text{Im}(f) = [0, 1] \end{array}$$

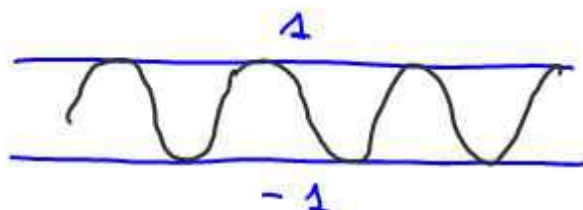
Ejemplos:

① $f(x) = x^n$ con $n = 0, 1, 2, \dots$

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} ; \quad \text{Im}(f) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } n \text{ impar} \\ [0, \infty) & \text{si } n \text{ par} \end{cases}$$

② $f(x) = \sin x$ ó $\cos x$

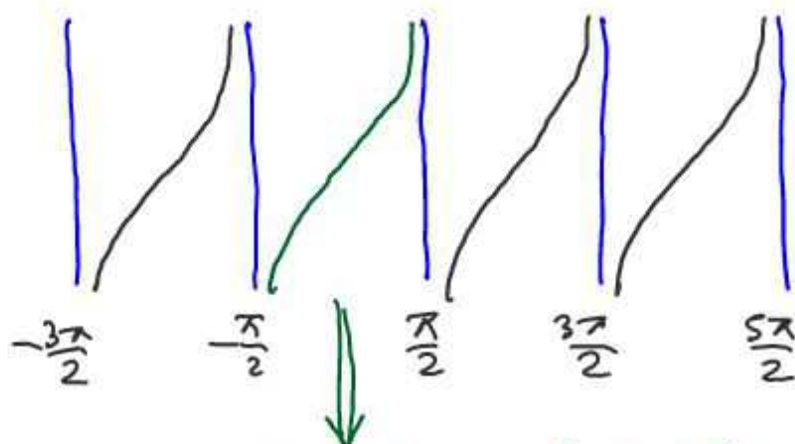
$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} ; \quad \text{Im}(f) = [-1, 1]$$



③ $f(x) = \tan(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{ \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2}, \pm \frac{5\pi}{2}, \dots \right\}$$

$$\text{Im}(f) = \mathbb{R}$$



④ $\arctan: \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

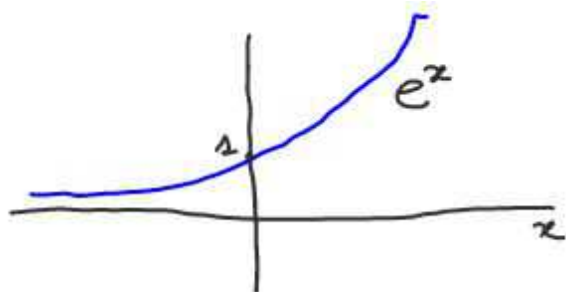
$$\text{Dom}(\arctan) = \mathbb{R}$$

$$\text{Im}(\arctan) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

¿por qué? ↙ ↘

⑤ $\text{Dom}(\arccos) = [-1, 1]$
 $\text{Im}(\arccos) = [0, \pi]$

⑥ $\text{Dom}(\arcsen) = [-1, 1]$
 $\text{Im}(\arcsen) = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

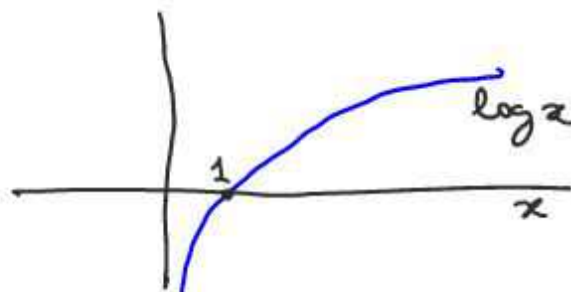


$$\exp: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$$

$$x \mapsto e^x$$

$$\text{Dom}(\exp) = \mathbb{R}$$

$$\text{Im}(\exp) = (0, \infty)$$



$$\log: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \log x$$

$$\text{Dom}(\log) = (0, \infty)$$

$$\text{Im}(\log) = \mathbb{R}$$

- $\log(e^x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- $e^{\log x} = x \quad \forall x \in (0, \infty)$

Ejemplo: $f(x) = \frac{2x-3}{5x+7}$ ¿Dom; Im?

$$\boxed{\text{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} : 5x+7 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{7}{5}\}}$$

$$\text{Im}(f): y \in \text{Im}(f) \Leftrightarrow y = \frac{2x-3}{5x+7}$$

para algún $x \neq -\frac{7}{5}$

$$y = \frac{2x-3}{5x+7} \quad \text{¿} x \text{?} \Leftrightarrow (5x+7)y = 2x-3$$

$$\Leftrightarrow (5y-2)x = -7y-3$$

$$\Rightarrow x = \frac{7y+3}{2-5y}$$

$y \neq \frac{2}{5}$

$$\Rightarrow 0 = -7 \cdot \frac{2}{5} - 3 \quad !!$$

$y = \frac{2}{5}$

Es fácil ver que $x \neq -\frac{7}{5}$

$$\boxed{\text{Im}(f) = \mathbb{R} \setminus \{\frac{2}{5}\}}$$

Parte II

Tema 2. Sucesiones

LÍMITE DE UNA FUNCIÓN REAL DE VARIABLE REAL

Sea $l \in \mathbb{R}$, diremos que $l = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0 \text{ tal que } |f(x) - l| < \varepsilon \text{ si } 0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon$$

Es decir:

$$l = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \Leftrightarrow$$

Los valores de $f(x)$ se pueden acercar a l tanto como queramos sin más que tomar la x suficientemente cerca de x_0 (pero con $x \neq x_0$)

Observaciones:

(1) El valor de f en $x = x_0$ NO juega ningún papel a la hora de calcular el límite.

En particular, x_0 NO necesita pertenecer al dominio de f .

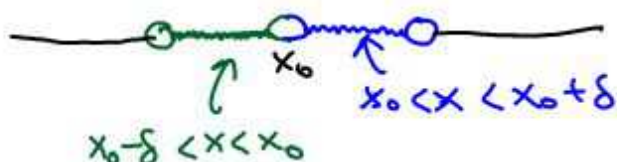
(2) Los valores de x alejados de x_0 tampoco juegan ningún papel a la hora de calcular un límite.

(3) Es importante darse cuenta de que:

$$0 < |x - x_0| < \delta \Leftrightarrow$$

$$\text{o bien } x_0 < x < x_0 + \delta$$

$$\text{o bien } x_0 - \delta < x < x_0$$



Este hecho invita a definir los LÍMITES LATERALES

LATERAL
IZQUIERDA

$$l_- = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 : |f(x) - l_-| < \varepsilon$$

$$\text{si } x_0 - \delta < x < x_0$$

LATERAL
DERECHA

$$l_+ = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 : |f(x) - l_+| < \varepsilon$$

$$\text{si } x_0 < x < x_0 + \delta_\varepsilon$$

Teorema
$$l = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$$

Ejemplo • $\lim_{x \rightarrow 1/2} \lfloor x \rfloor = \lim_{x \rightarrow 1/2^+} \lfloor x \rfloor = \lim_{x \rightarrow 1/2^-} \lfloor x \rfloor = 0$

• $\lim_{x \rightarrow 1^-} \lfloor x \rfloor = 0 \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} \lfloor x \rfloor = 1$

$\Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow 1} \lfloor x \rfloor$

Obs: En la práctica, casi nunca calcularemos los límites usando la definición

Obs: Propiedades de los límites:

Si $l_1 = \lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x)$

$l_2 = \lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x)$

\Rightarrow • $\lim_{x \rightarrow x_0} (f_1(x) \pm f_2(x)) = l_1 \pm l_2$

• $\lim_{x \rightarrow x_0} (f_1(x) \cdot f_2(x)) = l_1 \cdot l_2$

• $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{l_1}{l_2} \quad (\text{si } l_2 \neq 0)$

• $\lim_{x \rightarrow x_0} (f_1(x))^{f_2(x)} = l_1^{l_2} \quad (\text{si } l_1 \text{ y } l_2 \neq 0)$
 0^0 indeterminación

• $\lim_{x \rightarrow x_0} \log(f_1(x)) = \log l_1$
 $(\text{si } l_1 > 0)$

Obs: Si $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ con $D = (x_1, x_2) \cup [x_1, x_2] \cup]x_1, x_2[\cup]x_1, x_2]$,
es decir, cuando el dominio de f sea un intervalo:

$$l_1 = \lim_{x \rightarrow x_1} f(x) \Leftrightarrow l_1 = \lim_{x \rightarrow x_1^+} f(x)$$

$$l_2 = \lim_{x \rightarrow x_2} f(x) \Leftrightarrow l_2 = \lim_{x \rightarrow x_2^-} f(x)$$

Es decir, si el dominio es un intervalo (cerrado o no), el límite en los extremos del intervalo se define a través de los límites laterales.

CONTINUIDAD DE FUNCIONES REALES DE VARIABLE REAL

Si x_0 es un punto cualquiera del dominio de f podemos comparar el valor de $f(x_0)$ con el valor, si existe, de $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

Def: Función continua en x_0

Sea $x_0 \in \text{Dominio}(f)$.

f es continua en $x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

Def: Función continua:

Diremos que f es continua $\Leftrightarrow f$ es continua en x para todo x de su dominio

Ejemplos: $f(x) = \lfloor x \rfloor$

es continua en $x_0 \Leftrightarrow x_0 \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

• $f(x) = x$ es una función continua

• $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ racional} \\ -1 & \text{si } x \text{ irracional} \end{cases}$

no es continua en ningún punto

TEOREMA: FUNCIONES CONTINUAS EN INTERVALOS CERRADOS Y ACOTADOS

Sea $f: [x_1, x_2] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua

(es decir, $f(x)$ es continua $\forall x$ en el intervalo cerrado y acotado $[x_1, x_2]$)

Entonces $\text{Im}(f) = [m, M]$ \leftarrow intervalo cerrado y acotado

Corolario: Si $f: [x_1, x_2] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua, entonces

$\exists x_m \in [x_1, x_2]$ tal que $f(x_m) \geq f(x) \quad \forall x \in [x_1, x_2]$

$\exists x_M \in [x_1, x_2]$ tal que $f(x_M) \leq f(x) \quad \forall x \in [x_1, x_2]$

Dem: Puesto que $\text{Im}(f) = [m, M]$ existen

$x_m, x_M \in [x_1, x_2]$ tales que $f(x_m) = m$
 $f(x_M) = M$

$$\Rightarrow m = f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M) = M \\ \forall x \in [x_1, x_2].$$

Corolario: $f: [x_1, x_2] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua;

$f(x_1) < 0$ & $f(x_2) > 0$;

$\Rightarrow \exists x_0 \in (x_1, x_2)$ tal que $f(x_0) = 0$

Dem: $\text{Im}(f) = [m, M]$

$$m \leq f(x_1) < 0 < f(x_2) \leq M$$

$$\Rightarrow m < 0 < M \Rightarrow 0 \in [m, M] = \text{Im}(f)$$

Por tanto, puesto que $0 \in \text{Im}(f)$:

$\exists x_0 \in D$ tal que $f(x_0) = 0$.

Parte III

Tema 3. Series

DERIVADA: INTERPRETACIÓN Y PROPIEDADES

Sea $f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; $x_0 \in D$

Diremos que f es DERIVABLE en x_0 si

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

A dicho límite se le denomina la DERIVADA de f en x_0 y lo denotaremos mediante

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Def: Sea $D' = \{x \in D : f \text{ es derivable en } x\}$

La función $f': D' \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto f'(x)$$

se denomina "función derivada de f ".

Ejemplos:

1) $f(x) = x$

$$\Rightarrow f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1$$

$$f'(x) = 1 \quad \forall x$$

2) $f(x) = x^2$

$$\Rightarrow f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x + x_0) \cancel{(x - x_0)}}{\cancel{x - x_0}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} (x + x_0) = x_0 + x_0 = 2x_0$$

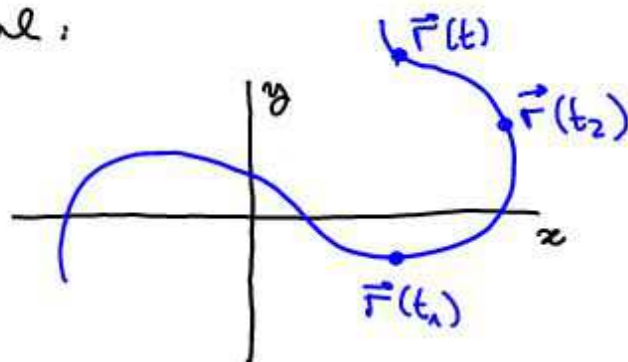
$$f'(x) = 2x \quad \forall x$$

↑
función continua

INTERPRETACIÓN FÍSICA DE LA DERIVADA: VELOCIDAD

El movimiento de una PARTÍCULA PUNTUAL en \mathbb{R}^2 está descrito por una función vectorial:

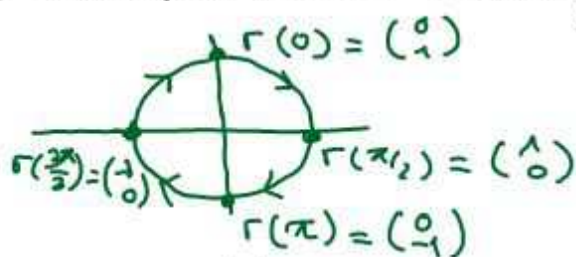
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \vec{r}(t) \\ \text{TIEMPO} & & \text{POSICIÓN} \\ & & \text{en el tiempo } t \end{array}$$



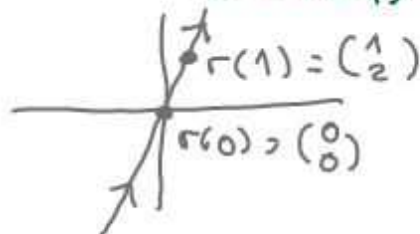
Puesto que $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, para describir la posición en el tiempo t necesitamos dar dos funciones reales de variable real: $x(t)$ & $y(t)$

Ejemplos:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

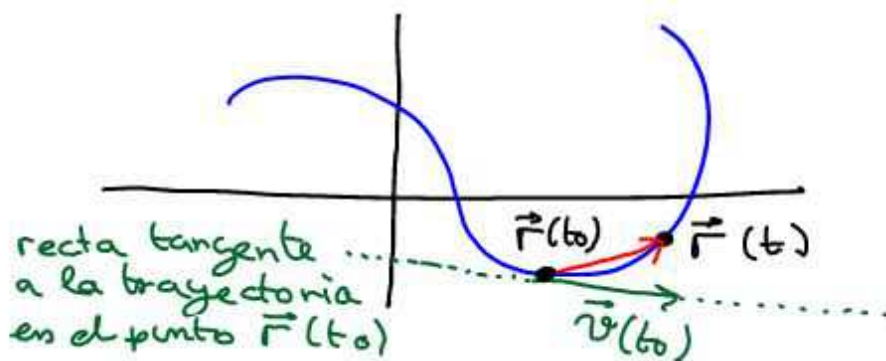


$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 2t \end{pmatrix}$$

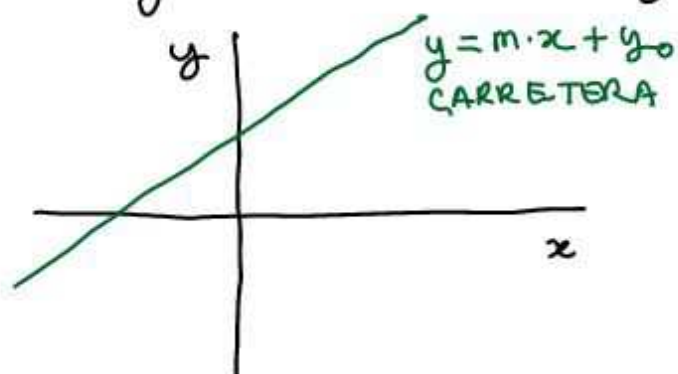


Def : VELOCIDAD en el instante t_0 :

$$\begin{aligned} \vec{v}(t_0) &= \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{1}{t - t_0} (\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)) = \\ &= \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{1}{t - t_0} \begin{pmatrix} x(t) - x(t_0) \\ y(t) - y(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'(t_0) \\ y'(t_0) \end{pmatrix} \end{aligned}$$



- Para fijar ideas, supongamos que la partícula está obligada a moverse siguiendo una CARRETERA RECTA:



En ese caso, el movimiento viene dado por una función:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ m \cdot x(t) + y_0 \end{pmatrix}$$

La velocidad en el instante t es, por tanto:

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ m x'(t) \end{pmatrix}$$

En principio, el movimiento anterior puede ser muy complicado, pero si imponemos que la velocidad sea constante (independiente de t):

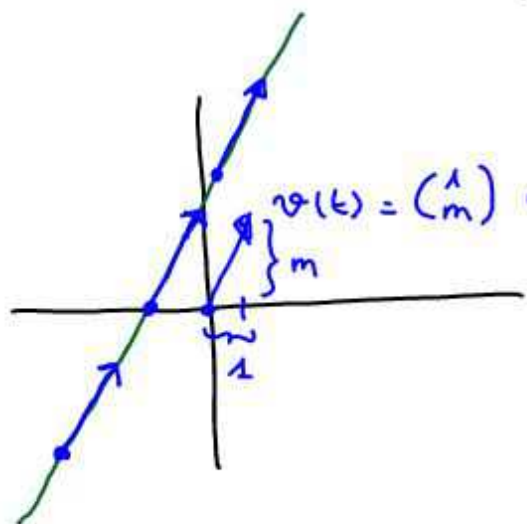
$$x(t) = \alpha t \Rightarrow x'(t) = \alpha$$

$$\Rightarrow \vec{v}(t) = \begin{pmatrix} \alpha \\ m \alpha \end{pmatrix}$$

En concreto, si $\alpha = 1 \Rightarrow x = t$ de manera que:

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} \quad \forall t$$

↑ pendiente de la recta

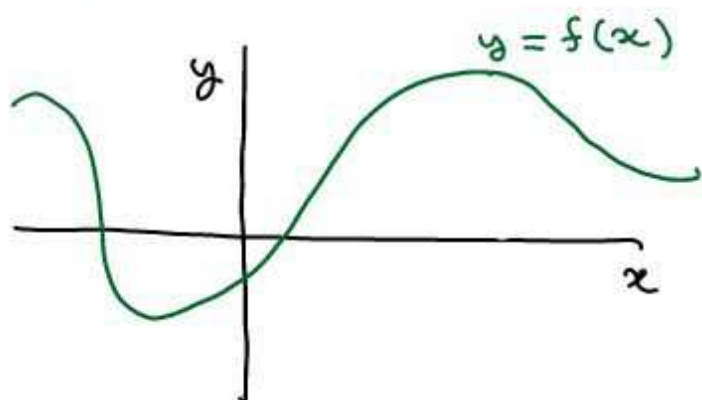


$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ es un vector:

- constante
- "tangente" a la carretera
- su segunda componente es la pendiente de la carretera (recta)

- Supongamos ahora que la carretera por la que ha de moverse la partícula es la **GRÁFICA de una FUNCIÓN** $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

En este caso, el movimiento es de la forma:



$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ f(x(t)) \end{pmatrix}$$

Si además suponemos que $x(t) = t$ se tiene que:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix} \quad \text{o bien} \quad \vec{r}(x) = \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix} \quad (x=t)$$

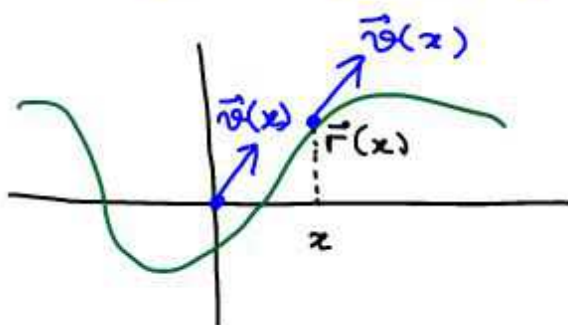
De esta manera, la velocidad en el "instante x " es:

$$\vec{v}(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ f'(x) \end{pmatrix}$$

- $f'(x)$ es la pendiente de la recta tangente a la gráfica (carretera) en el punto

$$\vec{r}(x) = \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$$

- El vector $\vec{v}(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ f'(x) \end{pmatrix}$ es "tangente" a la gráfica en el punto $\vec{r}(x) = \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$



PROPIEDADES DE LA DERIVADA

Aunque la derivada está definida a través de un límite, en muchos casos (aunque NO en todos) podremos calcular la derivada de una función usando los siguientes teoremas:

TEOREMA 1: Si $\exists f'(x_0) \Rightarrow f$ es continua en x_0
 $\left[\begin{array}{l} \text{Si } f \text{ no es continua} \\ \text{en } x_0 \end{array} \Rightarrow \nexists f'(x_0) \right]$

TEOREMA 2: Supongamos que $\exists f'(x_0) \& g'(x_0)$
entonces:

- $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$
- $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$
(Leibnitz)
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$
(si $g(x_0) \neq 0$)

TEOREMA 3: REGLA DE LA CADENA

Si $\exists f'(g(x_0)) \& \exists g'(x_0)$, se cumple que:

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

obs: $(f \circ g)(x) := f(g(x))$
"f compuesta con g"

Aplicación: Derivada de la función inversa:

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \forall x \in D$$

\Rightarrow
Regla de la
cadena
($f'(x) \neq 0$)

$$(f^{-1})'(f(x)) \cdot f'(x) = 1$$

$$\Rightarrow (f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

Por tanto: $\boxed{(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}}$

si $f'(f^{-1}(y)) \neq 0$

Ejemplos:

• $f(x) = x \Rightarrow f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1 \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$

• $f(x) = x^2 = x \cdot x \xRightarrow{\text{Leibniz}} f'(x) = 1 \cdot x + x \cdot 1 = 2x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

• $f(x) = x^3 = x \cdot x^2 \xRightarrow{\text{Leibniz}} f'(x) = 1 \cdot x^2 + x \cdot 2x = 3x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

• Usando inducción:

$$f(x) = x^n = x \cdot x^{n-1} \Rightarrow f'(x) = n x^{n-1} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

• Asumiré que:

$$\begin{aligned} \sin'(x) &= \cos(x) \\ \cos'(x) &= -\sin(x) \\ \exp'(x) &= \exp(x) \end{aligned} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Ejercicios:

① Calcular $\arccos'(x)$ para los x 's que tenga sentido:

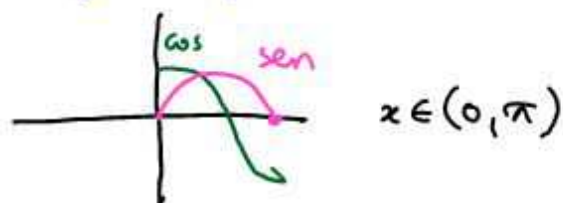
Usando: $\arccos(\cos(x)) = x$

$$\arccos'(\cos(x)) \cdot \cos'(x) = 1$$

$$-\sin(x) \arccos'(\cos(x)) = 1$$

$$\arccos'(\cos(x)) = -\frac{1}{\sin(x)} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2(x)}} \quad (\sin x > 0)$$

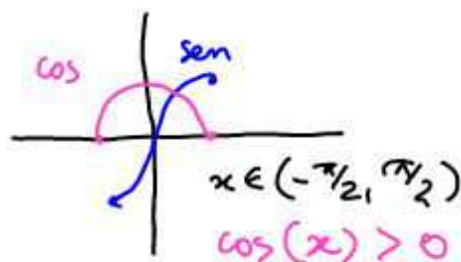
$$\arccos'(y) = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$
$$y \in (-1, 1)$$



② Calcular $\arcsen'(x)$ para los x 's que tenga sentido:

$$\arcsen(\sen(x)) = x \Rightarrow \arcsen'(\sen x) \cdot \sen'x = 1$$

$$\Rightarrow \cos(x) \cdot \arcsen'(x) = 1 \Rightarrow \arcsen'(x) = \frac{1}{\cos(x)}$$



$$\Rightarrow \arcsen'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\sen^2(x)}}$$

Por tanto:

$$\arcsen'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$
$$y \in (-1, 1)$$

③ Calcular $\arctan'(x)$ para los x 's que tenga sentido:

$$\arctan(\tan x) = x \Rightarrow \arctan'(\tan x) \cdot \tan' x = 1$$

$$\Rightarrow \arctan'(\tan x) = \frac{1}{\tan' x}$$

Obs: $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \sin x \cdot \frac{1}{\cos x}$

$$\Rightarrow \tan' x = \cos x \cdot \frac{1}{\cos x} + \sin x \cdot \frac{\sin x}{\cos^2 x} =$$

$$\tan' x = 1 + \tan^2 x ; x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2}, \dots \right\}$$

$$\Rightarrow \arctan'(\tan x) = \frac{1}{1 + \tan^2 x}$$

Por tanto:

$$\boxed{\arctan'(y) = \frac{1}{1 + y^2} \quad \forall y \in \mathbb{R}}$$

④ Calcular $\log'(x)$ para los x 's que tenga sentido:

$$\log(e^x) = x \Rightarrow \log'(e^x) \cdot e^x = 1$$

$$\Rightarrow \log'(e^x) = \frac{1}{e^x}$$

Por tanto:

$$\boxed{\log'(y) = \frac{1}{y} \quad \forall y > 0}$$

Parte IV

Tema 4. Funciones de variable real y Continuidad

FUNCIONES DERIVABLES: TEOREMAS

Teorema: Sea (x_1, x_2) un intervalo no necesariamente acotado (es decir, permitiremos que $x_1 = -\infty$ y/o $x_2 = \infty$)

Si $f'(x) = 0 \quad \forall x \in (x_1, x_2) \Rightarrow f(x) = C$

$\forall x \in (x_1, x_2)$

(función constante)

$\text{Im} f = \{C\}$

Obs: Hay funciones no constantes que cumplen $f'(x) = 0$

Por ejemplo:

$$f: (-\infty, 0) \cup (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+(1/x)^2} \left(-\frac{1}{x^2}\right) =$$

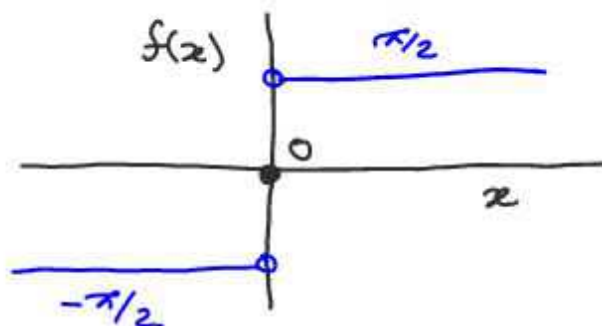
$$= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$$

$$\forall x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$$

Sin embargo:

$$f(1) = 2 \arctan(1) = \frac{\pi}{2}$$

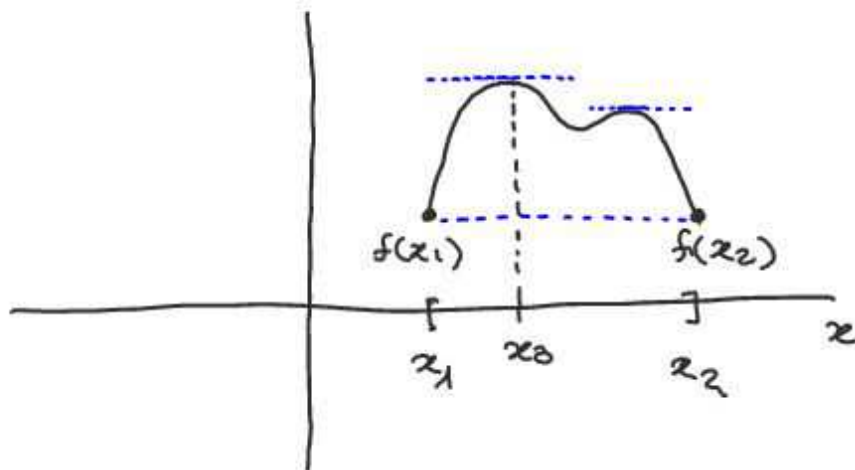
$$f(-1) = 2 \arctan(-1) = -\frac{\pi}{2}$$



Teorema de Rolle :

$f: [x_1, x_2] \rightarrow \mathbb{R}$: continua en $[x_1, x_2]$
derivable en (x_1, x_2)
 $f(x_1) = f(x_2)$

$$\Rightarrow \exists x_0 \in (x_1, x_2) : f'(x_0) = 0$$



Ejemplo: $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto f(x) = x(1-x) \text{ continua}$$

$$f'(x) = 1 - 2x \quad \forall x \in (0, 1)$$

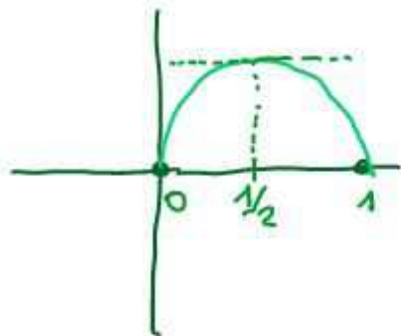
$$f(0) = f(1) = 0$$

$$\Rightarrow \exists x_0 \in (0, 1) : f'(x_0) = 0$$

En efecto;

$$f'(x) = 1 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} \in (0, 1)$$

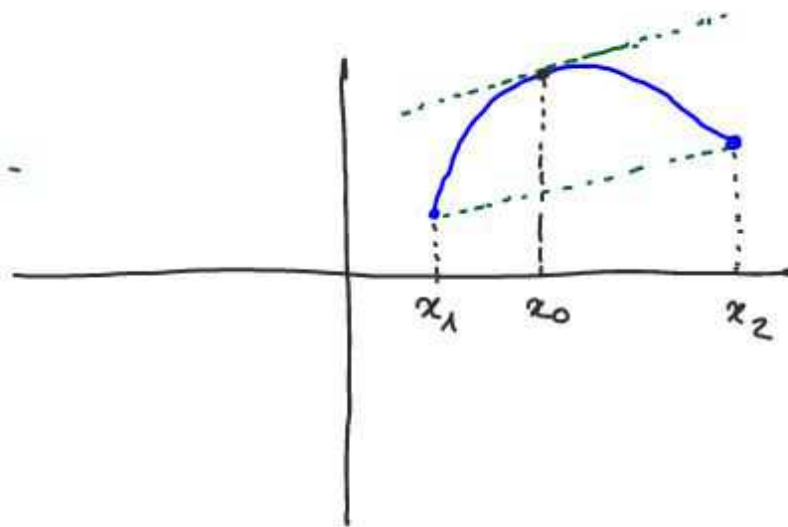


Teorema del valor medio de Lagrange:

$f: [x_1, x_2] \rightarrow \mathbb{R}$ continua en $[x_1, x_2]$
derivable en (x_1, x_2)

$$\Rightarrow \exists x_0 \in (x_1, x_2) : f'(x_0) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$f(x_2) = f(x_1) + f'(x_0)(x_2 - x_1)$$



Ejemplo:

$$f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) = 2x^3 - 3x + 2$$

continua en $[0, 1]$ & derivable en $(0, 1)$

$$\Rightarrow \exists x_0 \in (0, 1) : f'(x_0) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0}$$

En efecto:

$$f(0) = 2$$

$$f(1) = 1$$

$$f'(x) = 6x^2 - 3$$

$$f'(x) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0}$$

$$\Leftrightarrow 6x^2 - 3 = -1$$

$$6x^2 = 2$$

$$x^2 = 1/3 \Leftrightarrow x = \pm 1/\sqrt{3}$$

$$1/\sqrt{3} \in (0, 1).$$

Teorema del valor medio de Cauchy

$f, g : [x_1, x_2] \rightarrow \mathbb{R}$: continuas en $[x_1, x_2]$
derivables en (x_1, x_2)

$\Rightarrow \exists x_0 \in (x_1, x_2)$ tal que:

$$(g(x_2) - g(x_1)) f'(x_0) = (f(x_2) - f(x_1)) g'(x_0)$$

Obs: Si $g'(x_0) \neq 0$ & $g(x_2) - g(x_1) \neq 0$
podemos escribir:

$$\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{g(x_2) - g(x_1)}$$

Este hecho permite demostrar el TEOREMA DE
L'HOPITAL

Teorema de L'Hopital:

Sea $x_0 \in I = (x_1, x_2)$. Sean f y g dos funciones
derivables en todos los puntos de $I \setminus \{x_0\}$.

Si • $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$

• $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in I \setminus \{x_0\}$

• $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Obs: El teorema también es válido si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm\infty$

Ejemplos (L'Hopital)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \log(x) - x + 1}{(x-1) \log(x)} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log x}{\log x + 1 - 1/x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \log x}{x \log x + x - 1}$$

$$\stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + \log x}{2 + \log x} = \frac{1}{2}$$

Parte V

Tema 5. Derivadas

FUNCIONES $f(x) = x^n$; $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

$$n=1 : f(x) = x$$

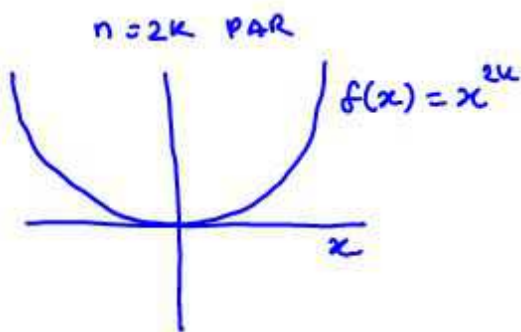
$$n=2 : f(x) = x^2 = x \cdot x$$

$$n=3 : f(x) = x^3 = x \cdot x \cdot x$$

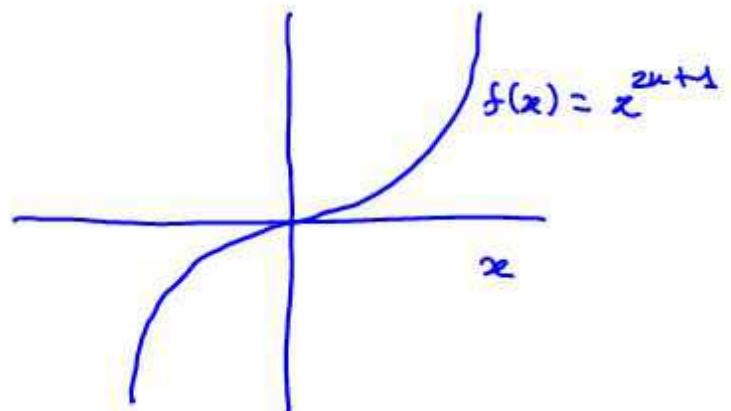
etc.

$$f(x) = x^n :$$

- $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$
- f es continua en \mathbb{R}
- f es derivable en \mathbb{R}
- $f'(x) = nx^{n-1}$; $x \in \mathbb{R}$
- f' es continua en \mathbb{R} .



función par
 $f(-x) = f(x)$



función impar
 $f(-x) = -f(x)$

FUNCIONES $f(x) = x^{-n}$ con $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

$$n=1: f(x) = x^{-1} = \frac{1}{x} ; x \neq 0$$

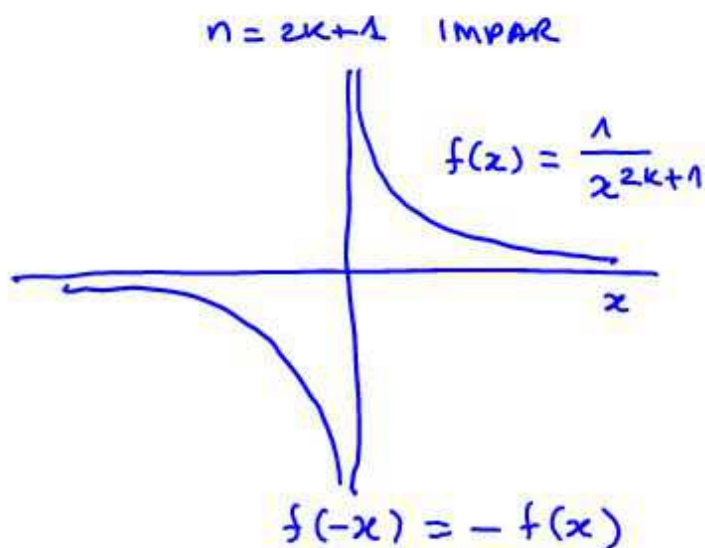
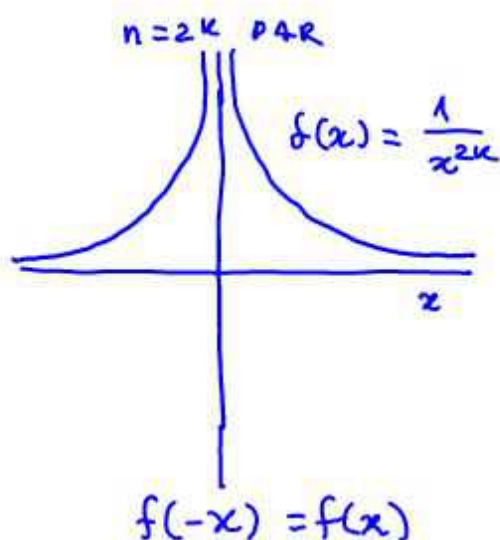
$$n=2: f(x) = x^{-2} = \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} ; x \neq 0$$

$$n=3: f(x) = x^{-3} = \frac{1}{x^3} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} ; x \neq 0$$

etc.

$$f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

- $\text{Dom } f = \mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
- f es continua en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$
- f es derivable en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$
- $f'(x) = -n x^{-n-1} ; x \neq 0$
- f' es continua en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$



FUNCIONES $f(x) = x^a$ con $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$

$$f(x) = x^{\sqrt{2}} ; f(x) = x^{\frac{1}{\sqrt{7}}} ; f(x) = x^{1/6} ; \dots$$

• PRIMERA DEFINICIÓN:

$$f(x) = x^a := e^{a \log(x)} \quad \text{si } x > 0$$

Esta definición nos obliga a tomar $\text{Dom}(f) = (0, \infty)$

$$\nexists \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) ?$$

$$\begin{aligned} \text{Puesto que } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} x^a = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{a \log(x)} = \\ &= e^{a \cdot (-\infty)} = \begin{cases} 0 & \text{si } a > 0 \\ \infty & \text{si } a < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

• SEGUNDA DEFINICIÓN:

$$\text{Si } a > 0 : f(x) = x^a = \begin{cases} e^{a \log x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$\text{Dom } f = [0, \infty)$$

f es continua en $[0, \infty)$

$$\text{Si } a < 0 : f(x) = x^a = e^{a \log x} \quad \text{si } x > 0$$

$$\text{Dom } f = (0, \infty)$$

f es continua en $(0, \infty)$

Supongamos $a < 0$:

$$f(x) = x^a = e^{a \log x} \quad \text{con } x \in (0, \infty)$$

f es continua y derivable en $(0, \infty)$. En concreto:

$$f'(x) = e^{a \log x} \cdot \frac{a}{x} = a \frac{e^{a \log x}}{x} = a \frac{e^{a \log x}}{e^{\log x}} =$$

$$= a e^{(a-1) \log x} =: a x^{a-1} \quad ; \quad x > 0$$

$$\Rightarrow f'(x) = a x^{a-1} \quad \forall x \in (0, \infty)$$

f' es continua en $(0, \infty)$.

Supongamos $a > 0$:

$$f(x) = x^a = \begin{cases} e^{a \log x} & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Si $x > 0$: $f(x) = x^a = e^{a \log x}$

f es derivable en $x > 0$

$$f'(x) = a x^{a-1}$$

↳ mismo cálculo que para $a < 0$

Si $x = 0$: $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} =$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{a \log x} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{a \log x}}{e^{\log x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{(a-1) \log x} = \begin{cases} 0 & \text{si } a > 1 \\ \infty & \text{si } 0 < a < 1 \end{cases}$$

En resumen:

- Si $0 < a < 1$:

$f(x) = x^a$ es continua en $[0, \infty)$

derivable en $(0, \infty)$

$$f'(x) = ax^{a-1} \quad \text{si } x \in (0, \infty)$$

f' es continua en $(0, \infty)$

$$\nexists f'(0) \quad [f'_+(0) = \infty]$$

- Si $a > 1$:

$f(x) = x^a$ es continua en $[0, \infty)$

es derivable en $[0, \infty)$

$$f'(x) = ax^{a-1} \quad \forall x \in [0, \infty)$$

En particular $f'(0) = 0$

f' es continua en $[0, \infty)$.

Obs: Supongamos $x > 0$; a, b arbitrarios:

- $x^a \cdot x^{-a} = 1 \Rightarrow x^{-a} = \frac{1}{x^a}$

- $x^a \cdot x^b = x^{a+b}$

- $(x^a)^b = x^{ab}$

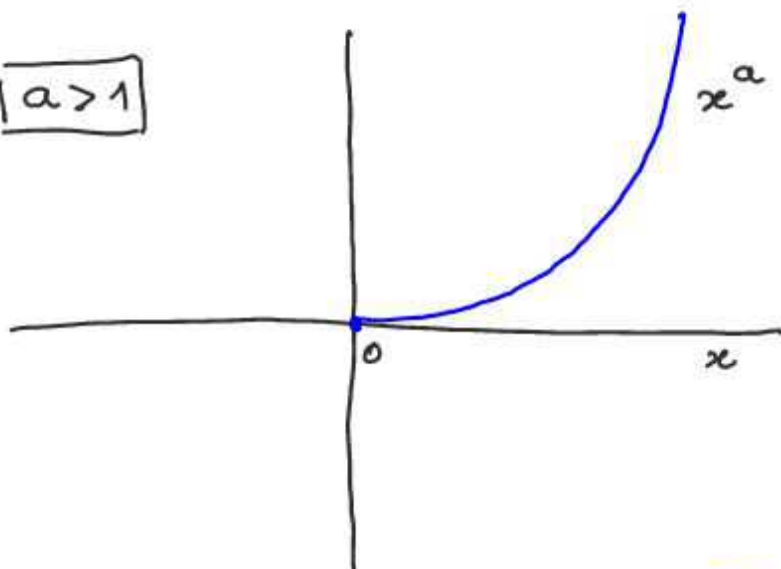
En efecto:

- $x^a \cdot x^{-a} = e^{a \log x} \cdot e^{-a \log x} = e^0 = 1$

- $x^a x^b = e^{a \log x} \cdot e^{b \log x} = e^{(a+b) \log x} = x^{a+b}$

- $(x^a)^b = (e^{a \log x})^b = e^{b \log(e^{a \log x})} =$
 $= e^{b \cdot a \log x} = x^{ab}$

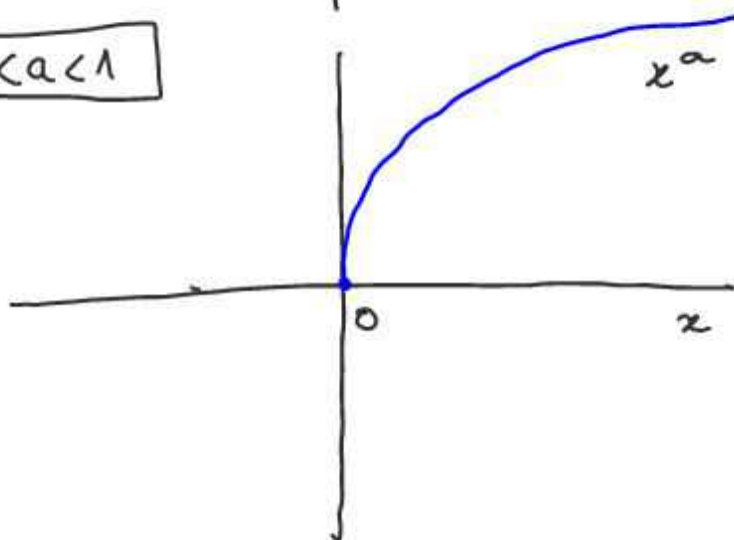
$$|a| > 1$$



$$0^a = 0$$

$$1^a = 1$$

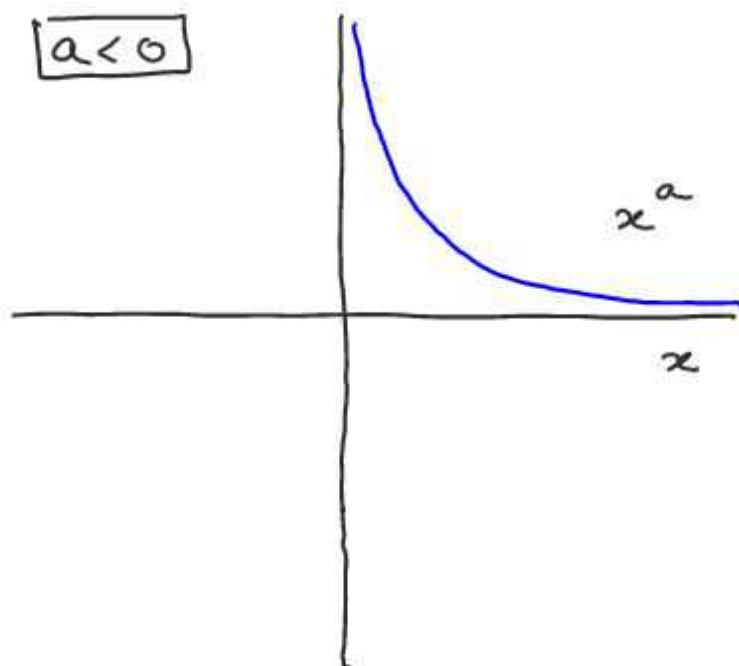
$$0 < a < 1$$



$$0^a = 0$$

$$1^a = 1$$

$$a < 0$$



$$1^a = 1$$

$$0^a = \infty$$

$$f(x) = x^a \quad \text{con } a = \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{6}; \dots$$

$$a = 1/2: (x^{1/2})^2 = x \quad \forall x \geq 0 \Rightarrow x^{1/2} = \sqrt{x}$$

$$f(x) = x^{1/2} = \sqrt{x} \quad \text{continua en } [0, \infty)$$

$$\text{derivable en } (0, \infty)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} x^{-1/2} = \frac{1}{2x^{1/2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}; \quad x > 0$$

$$a = 1/4: (x^{1/4})^4 = x \quad \forall x \geq 0 \Rightarrow x^{1/4} = \sqrt[4]{x}$$

$$f(x) = x^{1/4} = \sqrt[4]{x} \quad \text{continua en } [0, \infty)$$

$$\text{derivable en } (0, \infty)$$

$$f'(x) = \frac{1}{4} x^{\frac{1}{4}-1} = \frac{1}{4} x^{-3/4} = \frac{1}{4x^{3/4}} =$$

$$= \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}; \quad x > 0$$

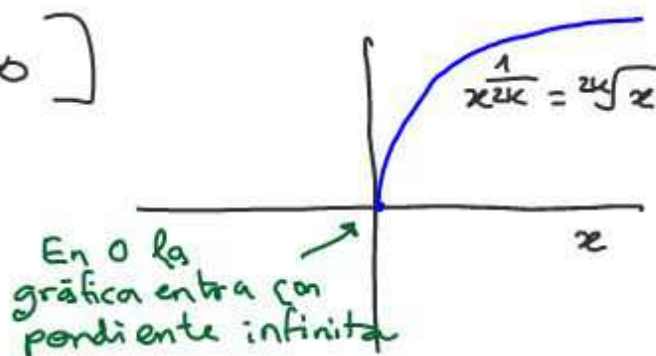
$$\text{En general: } (x^{1/2k})^{2k} = x \quad \forall x \geq 0$$

$$\Rightarrow x^{\frac{1}{2k}} = \sqrt[2k]{x}$$

$$f(x) = x^{\frac{1}{2k}} = \sqrt[2k]{x} \quad \text{continua en } [0, \infty)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2k} x^{\frac{1}{2k}-1} = \frac{1}{2k x^{\frac{2k-1}{2k}}} = \frac{1}{2k \sqrt[2k]{x^{2k-1}}}; \quad x > 0$$

$$\nexists f'(0) \quad [f'_+(0) = \infty]$$



$$f(x) = x^a \quad \text{con } a = 1/3, 1/5, 1/7, \dots$$

En este caso conviene **CAMBIAR** la definición general para que x^a tenga como dominio **TODO** \mathbb{R} . En concreto, si $a = 1/3$ **definimos**:

$$f(x) = x^{1/3} = \begin{cases} e^{\frac{1}{3} \log(x)} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -e^{\frac{1}{3} \log(-x)} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

(La definición es tal que $f(-x) = -f(x)$: impar)

Esta **nueva** definición hace que se cumpla que:

$$(x^{1/3})^3 = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

En efecto:

$$(x^{1/3})^3 = \begin{cases} e^{\frac{2}{3} \log(x)} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -e^{\frac{2}{3} \log(-x)} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$(x^{1/3})^3 = \begin{cases} x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Por tanto: $f(x) = x^{1/3} = \sqrt[3]{x} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

f es continua en \mathbb{R}

derivable en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$f'(x) = \frac{1}{3} x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3} x^{-2/3} = \frac{1}{3 x^{2/3}} \quad \text{si } x \neq 0$$

$\nexists f'(0)$

En general, si $a = \frac{1}{2k+1}$:

$$f(x) = x^{\frac{1}{2k+1}} = \begin{cases} e^{\frac{1}{2k+1} \log(x)} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -e^{\frac{1}{2k+1} \log(-x)} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left(x^{\frac{1}{2k+1}} \right)^{2k+1} = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

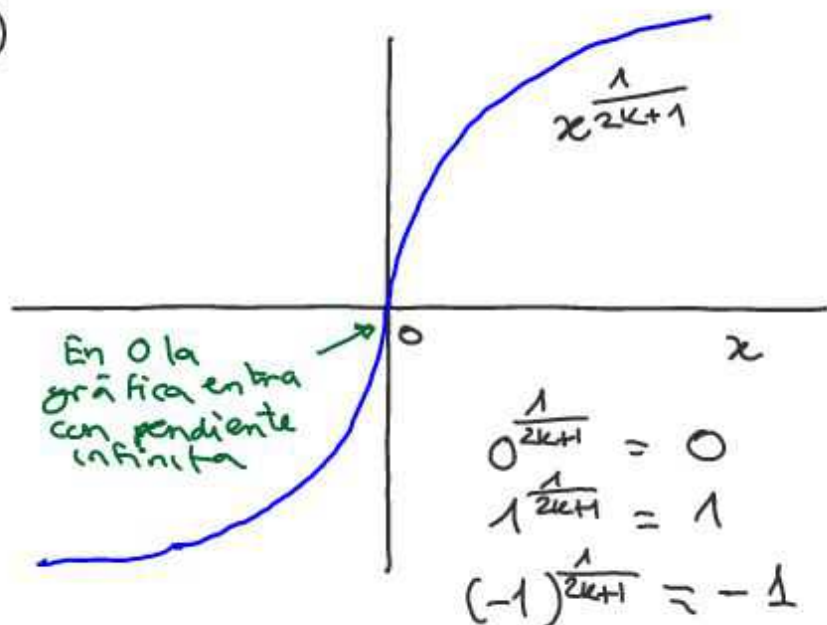
$$f(x) = x^{\frac{1}{2k+1}} = \sqrt[2k+1]{x} \quad ; \quad x \in \mathbb{R}$$

continua en \mathbb{R} y derivable en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$f'(x) = \frac{1}{2k+1} x^{\frac{1}{2k+1} - 1} = \frac{1}{(2k+1) x^{\frac{2k}{2k+1}}}$$

$$= \frac{1}{(2k+1) \sqrt[2k+1]{x^{2k}}} \quad \text{si } x \neq 0$$

$\nexists f'(0)$



Parte VI

Tema 6. Teoremas sobre funciones derivables

POLINOMIO DE TAYLOR

- Un polinomio de grado n es una función de la forma

$$P(x) = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \dots + p_n x^n$$

con $p_n \neq 0$

Ejemplo: $P(x) = 3 + 5x + 7x^2$
polinomio de grado 2.

p_i constantes

- Dado $x_0 \in \mathbb{R}$, cualquier polinomio de grado n puede escribirse en la forma

$$P(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots + a_n(x-x_0)^n$$

con $a_n \neq 0$

a_i constantes

Ejemplo: $P(x) = 3 + 5x + 7x^2 =$

$$\begin{aligned} & \boxed{x = x - x_0 + x_0} \Rightarrow 3 + 5(x - x_0 + x_0) + 7(x - x_0 + x_0)^2 \\ & = 3 + 5x_0 + 7x_0^2 + \\ & \quad + (5 + 14x_0)(x - x_0) + \\ & \quad + 7(x - x_0)^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow P(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2$$

$$\text{con: } a_0 = 3 + 5x_0 + 7x_0^2$$

$$a_1 = 5 + 14x_0$$

$$a_2 = 7$$

- Si $P(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots + a_n(x-x_0)^n$ es evidente que:

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= P(x_0) \\ a_1 &= P'(x_0) \\ 2a_2 &= P''(x_0) \\ &\dots \end{aligned} \right\}$$

$$P^{(k)}(x_0) = k! a_k$$

$$\Rightarrow \boxed{a_k = \frac{1}{k!} P^{(k)}(x_0)}$$

derivada k -ésima

- Si $P(x)$ es un polinomio de grado n
 x_0 es un número real arbitrario

$$\Rightarrow P(x) = P(x_0) + P'(x_0)(x-x_0) + \frac{P''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \frac{P'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \dots + \frac{P^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

- Sea $f: (x_1, x_2) \rightarrow \mathbb{R}$ una función $C^n(x_1, x_2)$
 (aunque no hace falta tanta regularidad, todos los ejemplos que vamos a considerar serán de este tipo)

Sea $x_0 \in (x_1, x_2)$

El **POLINOMIO de TAYLOR de ORDEN n** de f en x_0 es el polinomio

$$P_n(x|f, x_0) := f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

EL **RESTO n -ÉSIMO de TAYLOR** de f en x_0 se denota mediante $R_n(x|f, x_0)$ y se define como:

$$R_n(x|f, x_0) := f(x) - P_n(x|f, x_0)$$

Obs: $f(x)$ y $P_n(x|f, x_0)$ satisfacen:

$$P(x_0|f, x_0) = f(x_0); P'(x_0|f, x_0) = f'(x_0), \dots, P^{(n)}(x_0|f, x_0) = f^{(n)}(x_0)$$

Ejemplo: $f(x) = \cos x$; $x_0 = 0$

$$P_4(x|f, 0) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4$$

$$R_4(x|f, 0) = \cos x - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}\right)$$

TEOREMA DE TAYLOR

Sea $f: (x_1, x_2) \rightarrow \mathbb{R}$ una función $C^{n+1}(x_1, x_2)$

Sea $x_0 \in (x_1, x_2)$:

\Rightarrow Si $x \neq x_0 \exists c \in (x_0, x)$ ó $c \in (x, x_0)$
tal que:

$$R_n(x|f, x_0) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}$$

Obs: Para $n=0$ el teorema se reduce al teorema del valor medio de Lagrange

Corolarios: En las hipótesis del teorema de Taylor:

- $\lim_{x \rightarrow x_0} R_n(x|f, x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n(x|f, x_0)}{x-x_0} =$
 $= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n(x|f, x_0)}{(x-x_0)^2} = \dots = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n(x|f, x_0)}{(x-x_0)^n} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - P_n(x|f, x_0)}{(x-x_0)^n} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - P_{n-1}(x|f, x_0)}{(x-x_0)^n} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$

NOTACIÓN de LANDAU

Sean f y g funciones definidas en un entorno de x_0

O-grande de Landau:

Diremos que $f = O(g)$ cuando $x \rightarrow x_0$ si $\exists M \geq 0$ tal que $|f(x)| \leq M |g(x)| \quad \forall x$ en un entorno de x_0

o-pequeña de Landau:

Diremos que $f = o(g)$ cuando $x \rightarrow x_0$ si $\forall M > 0$ existe un entorno de x_0 tal que $|f(x)| \leq M |g(x)|$ para todo x en dicho entorno

Observación: Si $g(x) \neq 0 \quad \forall x \neq x_0$

$$f = o(g) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

$$f = O(g) \Leftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} \text{ acotado para } x \text{ cerca de } x_0$$

Ejemplo: En las hipótesis del teorema de Taylor,

$$R_n(x|f, x_0) = o((x-x_0)^n)$$

\uparrow o-pequeña

ya que:

$$0 = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n(x|f, x_0)}{(x-x_0)^n} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n(x|f, x_0)}{(x-x_0)^{n-1}} = \dots = \lim_{x \rightarrow x_0} R(x|f, x_0)$$

\Rightarrow Muchas veces escribiremos simplemente:

$$f(x) = P_n(x|f, x_0) + o((x-x_0)^n)$$

EJEMPLOS: Si $x \rightarrow 0$ se tiene que:

- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$
- $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + o(x^n)$
- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \underbrace{o(x^{2n})}_{o(x^{2n+1})}$
- $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \underbrace{o(x^{2n+1})}_{o(x^{2n+2})}$
- $(1+x)^a = 1 + a + \frac{a(a-1)}{2} x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!} x^3 + \frac{a(a-1)(a-2)(a-3)}{4!} x^4 + \dots + \frac{a(a-1)\dots(a-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)$
Binomio
Newton

$$\binom{a}{n} := \frac{a(a-1)\dots(a-n+1)}{n!}; \quad a \in \mathbb{R} \text{ (no necesariamente entero)}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x + x^3/6}{x^5} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5) - x + x^3/6}{x^5} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^5}{5!} + o(x^5)}{x^5} = \frac{1}{5!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \sqrt{1-x}}{\sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - (1-x)^{1/2}}{\sin x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) - (1 - \frac{1}{2}x + o(x))}{x + o(x)} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Ejemplo: Aproxima el valor de $(1.1)^{1/3}$ mediante un polinomio de Taylor de grado 3 y estima el error cometido en la aproximación.

Consideremos la función $f(x) = (1+x)^{1/3}$.

Tanto el valor de f en $x_0=0$ como el de todas sus derivadas en $x_0=0$ son números racionales que se pueden calcular fácilmente:

$$\begin{aligned} f(x) &= (1+x)^{1/3} & \Rightarrow f(0) &= 1 \\ f'(x) &= \frac{1}{3} (1+x)^{-2/3} & \Rightarrow f'(0) &= \frac{1}{3} \\ f''(x) &= -\frac{2}{3^2} (1+x)^{-5/3} & \Rightarrow f''(0) &= -\frac{2}{9} \\ f'''(x) &= \frac{2 \cdot 5}{3^3} (1+x)^{-8/3} & \Rightarrow f'''(0) &= \frac{10}{27} \\ f^{(4)}(x) &= -\frac{2^4 \cdot 5}{3^4} (1+x)^{-11/3} \end{aligned}$$

En este caso, puesto que $f(x) = (1+x)^{1/3}$ podríamos haber calculado dichas derivadas usando el binomio de Newton:

$$\begin{aligned} (1+x)^{1/3} &= 1 + \frac{1}{3}x + \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)}{2}x^2 + \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)(\frac{1}{3}-2)}{3!}x^3 + o(x^3) \\ &= 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \frac{5}{81}x^3 + o(x^3) \end{aligned}$$

En cualquier caso:

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = (1+x)^{1/3} \\ x_0 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{P_3(x|f,0) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5}{81}x^3}$$

$$\boxed{(1+x)^{1/3} = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5}{81}x^3 + R_3(x|f,0)}$$

Usando el teorema de Taylor:

$$R_3(x|f,0) = -\frac{2^4 \cdot 5}{3^4 \cdot 4!} \frac{x^4}{(1+c)^{11/3}} \quad \text{con } c \in (0,x)$$

Particularizando la ecuación

$$(1+x)^{1/3} = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5}{81}x^3 + R_3(x|f,0)$$

en $x=0.1$ se tiene:

$$(1.1)^{1/3} = 1 + \frac{0.1}{3} - \frac{(0.1)^2}{9} + \frac{5 \cdot (0.1)^3}{81} - \frac{2^4 \cdot 5}{3^4 \cdot 4!} \frac{(0.1)^4}{(1+c)^{11/3}} \quad \text{con } c \in (0, 0.1)$$

Podemos aproximar $(1.1)^{1/3}$ mediante:

$$(1.1)^{1/3} \approx 1 + \frac{0.1}{3} - \frac{(0.1)^2}{9} + \frac{5(0.1)^3}{81} = 1.03228395 \dots$$

El error cometido en la aproximación es:

$$\text{Error} = \left| \underbrace{(1.1)^{1/3}}_{\text{exacto}} - \underbrace{\left(1 + \frac{0.1}{3} - \frac{(0.1)^2}{9} + \frac{5 \cdot (0.1)^3}{81}\right)}_{\text{aproximación}} \right|$$

$$\Rightarrow \text{Error} = \left| \frac{2^4 \cdot 5 \cdot (0.1)^4}{3^4 \cdot 4! \cdot (1+c)^{11/3}} \right| \leq \frac{2^4 \cdot 5 \cdot (0.1)^4}{3^4 \cdot 4!}$$

con $c \in (0, 0.1)$ si $c=0$

$$\Rightarrow \text{Error} < \frac{2^4 \cdot 5 \cdot (0.1)^4}{3^4 \cdot 4!} < \frac{1}{2} \cdot 10^{-5}$$

La aproximación
proporciona 5 cifras
decimales exactas.

$$(1.1)^{1/3} = 1.03228 \dots$$

cifras exactas

Parte VII

Tema 7. Polinomio de Taylor

SERIES DE TAYLOR Y FUNCIONES ANALÍTICAS:

- Supongamos que $f: (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ es una función $C^\infty(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ (es decir, las funciones $f^{(k)}(x)$ son continuas en $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \forall k=0,1,2,\dots$)

La serie:

$$f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k$$

se denomina **SERIE de TAYLOR** de f centrada en x_0 .

- Podemos pensar en $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k$ como una función cuyo dominio consiste en el conjunto de valores de x para los cuales la serie converge:

$$x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k$$

En particular, x_0 pertenece al dominio ya que:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x_0-x_0)^k = f(x_0)$$

¿Qué ocurre si $x \neq x_0$? Si $x \neq x_0$, en principio

puede pasar cualquiera de las siguientes cosas:

- 1) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k$ no sea convergente
- 2) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k$ converja a un valor $\neq f(x)$
- 3) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k$ converja a $f(x)$

Dicha casuística depende del comportamiento de la sucesión $(f^{(k)}(x_0))_{k \in \mathbb{N}}$. Aunque no vamos a estudiar el problema con detalle, en algunos casos es fácil demostrar la convergencia de la serie de Taylor (ver siguiente sección). En concreto:

- $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- $\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- $\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \quad ; \quad |x| < 1$
- $\log(1-x) = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} \quad ; \quad |x| < 1$
- $(1+x)^a = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{a}{k} x^k \quad ; \quad |x| < 1$

$\binom{a}{0} = 1$
 $\binom{a}{k} = \frac{a(a-1)\dots(a-k+1)}{k!}$

FUNCIÓN ANALÍTICA EN x_0 :

- Diremos que f es analítica en x_0 si;

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k$$

para todo $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ con $\varepsilon > 0$.

- Ejemplo: Consideremos $f(x) = e^x$; x_0 arbitrario
Usando que $f^{(k)}(x) = e^x \quad \forall k=0,1,2,\dots$ se tiene que

$$e^x = e^{x_0} + e^{x_0}(x-x_0) + \dots + \underbrace{\frac{e^{x_0}}{n!} (x-x_0)^n}_{P_n(x|f, x_0)} + \underbrace{\frac{e^{c_n}}{(n+1)!} x^{n+1}}_{R_n(x|f, x_0)}$$

con $c_n \in (x_0, x)$

Tomando $\lim_{n \rightarrow \infty}$ se tiene:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{x_0}}{k!} (x-x_0)^k + \lim_{n \rightarrow \infty} e^{c_n} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

donde $c_n \in (x_0, x)$

Ahora bien: $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$ Stirling

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}} = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{e^{c_n}}_{\text{acotado}} \cdot \underbrace{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}_{\rightarrow 0} = 0$$

Por tanto:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{x_0}}{k!} (x-x_0)^k \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$$

e^x es ANALÍTICA en x_0
para todo $x_0 \in \mathbb{R}$

Parte VIII

Tema 8. Comportamiento local

POLINOMIO DE TAYLOR Y COMPORTAMIENTO LOCAL

- Para funciones suficientemente regulares, el comportamiento local de la función entorno a un cierto punto x_0 puede codificarse de una forma muy conveniente a través de los primeros términos no nulos del polinomio de Taylor en x_0 .
- En lo que sigue, sólo nos interesará el comportamiento local de una función entorno a un cierto punto x_0 por lo que nos centraremos en funciones de forma $f \in C^n(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, con $n = 1, 2, \dots, \infty$.
(en los ejemplos $f \in C^\infty(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$).

- Recordemos que el teorema de Taylor nos dice que:

$$f(x) = P_n(x|f, x_0) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}; \quad c \in (x_0, x)$$

Para $n=0$ el teorema se reduce al teorema del valor medio de Lagrange:

$$f(x) = f(x_0) + f'(c)(x-x_0); \quad c \in (x_0, x).$$

TEOREMA: Sea $f \in C^1$ tal que $f'(x_0) > 0$, entonces f es estrictamente creciente en un entorno de x_0 [es decir, existe un entorno $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ en el cual:
 $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$]

Dem: Como f' es continua & $f'(x_0) > 0$ existe un entorno de x_0 : $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ en el cual $f'(x) > 0$. Usando el teorema de Taylor para $n=0$:

$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{f'(c)}_{>0} \underbrace{(x-x_0)}_{>0 \text{ si } x > x_0} \text{ con } c \in (x_0, x)$$

concluimos que $x > x_0 \Rightarrow f(x) > f(x_0)$ 

Un razonamiento similar permite demostrar el siguiente:

TEOREMA: Sea $f \in C^1$ tal que $f'(x_0) < 0$. Entonces f es estrictamente decreciente en un entorno de x_0 . Es decir, existe un intervalo $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ en el cual dados dos puntos $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Definición: PUNTOS CRÍTICOS

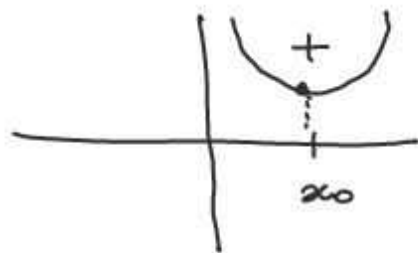
Sea $f \in C^1$. Diremos que x_0 es un PUNTO CRÍTICO de f si $f'(x_0) = 0$

Por simplicidad, supongamos que x_0 es un punto crítico de una función C^∞ (es decir $f'(x_0) = 0$). Sea $p > 1$ orden de la primera derivada no nula en x_0 . Entonces:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(p)}(x_0)}{p!} (x - x_0)^p + o((x - x_0)^p) \quad x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$$

- Si $p = \text{PAR}$ & $f^{(p)}(x_0) > 0$:

$$f(x) \simeq f(x_0) + \underbrace{\frac{f^{(p)}(x_0)}{p!}}_{> 0} (x - x_0)^p$$



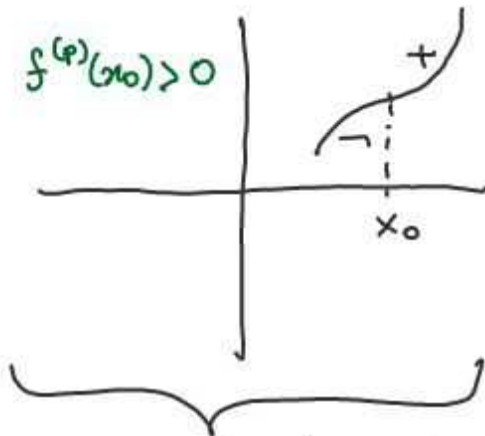
$\Rightarrow f$ es CONVEXA (+) en un entorno de x_0 y tiene un MÍNIMO LOCAL en x_0

- Si $p = \text{PAR}$ & $f^{(p)}(x_0) < 0$

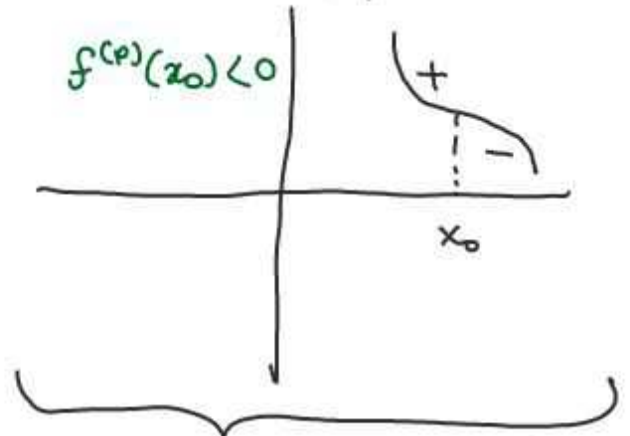
$\Rightarrow f$ es CÓNCAVA (-) en un entorno de x_0 y tiene un MÁXIMO LOCAL en x_0



- Si $P = \text{IMPAR}$: $f(x) \simeq f(x_0) + \frac{f^{(P)}(x_0)}{P!} (x-x_0)^P$



Función estrictamente creciente en un entorno de x_0 .



Función estrictamente decreciente en un entorno de x_0 .

En ambos casos, x_0 es un **PUNTO de INFLEXIÓN**, es decir, la función es convexa a un lado de x_0 y cóncava al otro lado.

Observación: Independientemente del valor de $f'(x_0)$, si f tiene un desarrollo de Taylor de la forma:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f^{(P)}(x_0)}{P!} (x-x_0)^P + o((x-x_0)^P) \quad \text{con } f^{(P)}(x_0) \neq 0 \quad (P > 1)$$

podemos concluir que:

- Si $P = \text{PAR}$ & $f^{(P)}(x_0) > 0$:
 $\Rightarrow f$ es CONVEXA (\cup) en un entorno de x_0
- Si $P = \text{PAR}$ & $f^{(P)}(x_0) < 0$:
 $\Rightarrow f$ es CONCAVA (\cap) en un entorno de x_0
- Si $P = \text{IMPAR}$;
 $\Rightarrow f$ tiene un punto de INFLEXIÓN en x_0

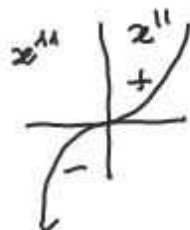
EJEMPLOS:

- Comportamiento de $f(x) = x^7 \sin^4 x$ cerca de $x_0 = 0$:

$$f(x) = x^7 \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) \right)^4 = x^{11} \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \right)^4 \\ = x^{11} + o(x^{12})$$

$\Rightarrow f$ es estrictamente creciente en un entorno de $x_0 = 0$

$\Rightarrow f$ tiene un punto de inflexión en $x_0 = 0$



- Comportamiento de $f(x) = \cos^3 x \cdot \log^2(1+x)$ cerca de $x_0 = 0$:

$$f(x) = \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \right)^3 \cdot (x + o(x))^2 = \\ = x^2 + o(x^2)$$

$\Rightarrow f$ tiene un mínimo local en $x_0 = 0$

$$\cup \quad + \quad \cup \quad x^2$$

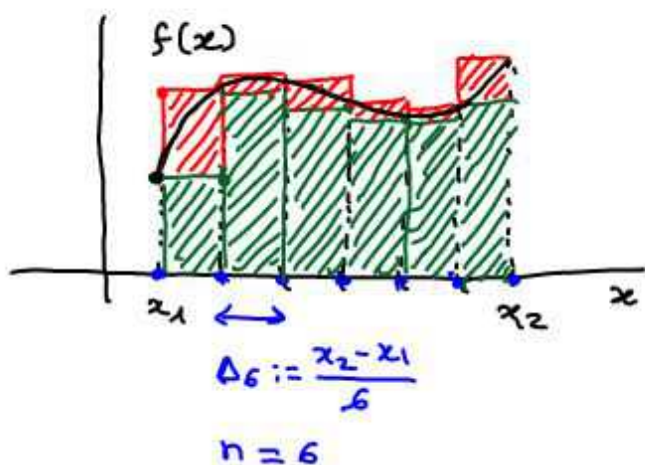
$\Rightarrow f$ es convexa en un entorno del 0.

Parte IX

Tema 10. Teoremas fundamental del Calculo

INTEGRACIÓN en \mathbb{R}

- Ingredientes:**
- $[x_1, x_2]$: intervalo cerrado y acotado
 $0 \leq x_2 - x_1 < \infty$
 - $f : [x_1, x_2] \rightarrow \mathbb{R}$: función acotada
 $m \leq f(x) \leq M, \forall x$.
 - $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$: dividimos el intervalo



de igual longitud:

$$\Delta_n = \frac{x_2 - x_1}{n}$$

(definición simplificada)

Definimos : $m_k(n) = \inf \{ f(x) : x_1 + (k-1)\Delta_n \leq x \leq x_1 + k\Delta_n \}$
 $M_k(n) = \sup \{ f(x) : x_1 + (k-1)\Delta_n \leq x \leq x_1 + k\Delta_n \}$

Suma inferior:

$$I_n(f, x_1, x_2) := \sum_{k=1}^n m_k(n) \cdot \Delta_n$$

Suma superior:

$$S_n(f, x_1, x_2) := \sum_{k=1}^n M_k(n) \cdot \Delta_n$$

DEFINICIÓN 1. Diremos que f es **INTEGRABLE** en $[x_1, x_2]$ si

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} I_n(f, x_1, x_2) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f, x_1, x_2).$$

Si f es integrable en $[x_1, x_2]$, el símbolo $\int_{x_1}^{x_2} f(t) dt$ denotará

$$\int_{x_1}^{x_2} f(t) dt \stackrel{\text{"variable muda"}}{:=} \lim_{n \rightarrow \infty} I_n(f, x_1, x_2) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f, x_1, x_2)$$

y se denomina **INTEGRAL** de f en $[x_1, x_2]$.

OBSERVACIONES:

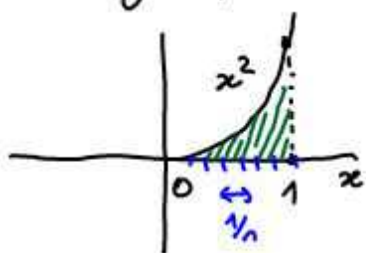
- Si $f \geq 0$ el significado geométrico de $\int_{x_1}^{x_2} f(t) dt$ es claro:
 $\int_{x_1}^{x_2} f(t) dt$: área de la región limitada por la gráfica de f , el eje x y las rectas $x = x_1$ y $x = x_2$



- En general, $\int_{x_1}^{x_2} f(t) dt$ representa la DIFERENCIA de las áreas que quedan por encima y las que quedan por debajo del eje x



- El cálculo de $\int_{x_1}^{x_2} f(t) dt$ usando la definición es difícil:
Por ejemplo, consideremos $f(x) = x^2$; $[x_1, x_2] = [0, 1]$



En este caso:

$$m_k(n) = \left(\frac{k-1}{n}\right)^2 ; M_k(n) = \left(\frac{k}{n}\right)^2$$

por tanto:

$$I_n(f; 0, 1) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{k-1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n (k-1)^2$$

$$S_n(f; 0, 1) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2$$

$$[\text{Resultado conocido: } \sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}]$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} I_n = \frac{1}{n^3} \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \\ S_n = \frac{1}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \end{array} \right\} \begin{array}{l} f(x) = x^2 \\ \text{integrable} \\ \text{en } [0, 1] \end{array}$$

$$\text{Por tanto: } \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3} \quad \blacksquare$$

Usando la definición de integral es posible demostrar las siguientes propiedades:

TEOREMA: Sean $f(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$ funciones integrables en $[x_1, x_2]$. Entonces:

- $c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)$ es integrable en $[x_1, x_2]$ y se cumple qe:

$$\int_{x_1}^{x_2} (c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)) dt = c_1 \int_{x_1}^{x_2} f_1(t) dt + c_2 \int_{x_1}^{x_2} f_2(t) dt$$

- Si $f_1(x) \leq f_2(x)$ para todo $x \in [x_1, x_2]$:

$$\int_{x_1}^{x_2} f_1(t) dt \leq \int_{x_1}^{x_2} f_2(t) dt$$

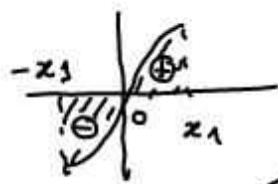
- Si $m \leq f(x) \leq M$ para todo $x \in [x_1, x_2]$:

$$m(x_2 - x_1) \leq \int_{x_1}^{x_2} f(t) dt \leq M \cdot (x_2 - x_1)$$

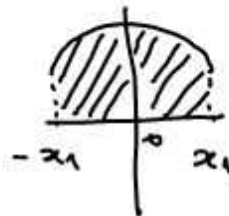
- $|f(x)|$ es integrable en $[x_1, x_2]$ y se cumple qe:

$$\left| \int_{x_1}^{x_2} f(t) dt \right| \leq \int_{x_1}^{x_2} |f(t)| dt$$

- Si f es IMPAR: $\int_{-x_1}^{x_1} f(t) dt = 0$



- Si f es PAR: $\int_{-x_1}^{x_1} f(t) dt = 2 \int_0^{x_1} f(t) dt$



- $\int_{x_1}^{x_1} f(t) dt = 0$

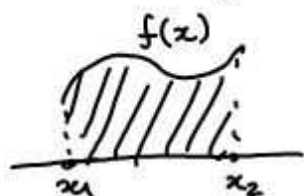


Ejemplo: $\int_{-1}^1 \sin t dt = 0$

$$\int_{-1}^1 t^2 dt = 2 \int_0^1 t^2 dt = \frac{2}{3}$$

Los siguientes teoremas nos garantizan que, en la práctica, casi nunca nos encontraremos con funciones no integrables:

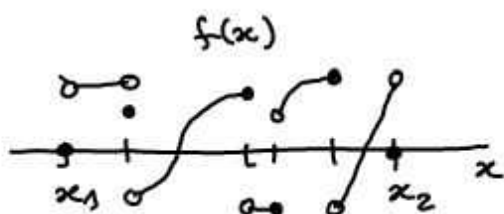
TEOREMA: Si f es continua en $[x_1, x_2]$ entonces:
 f es integrable en $[x_1, x_2]$



$$\exists \int_{x_1}^{x_2} f(t) dt$$

TEOREMA: Si f es acotada y continua a trozos en $[x_1, x_2]$:

$\Rightarrow f$ es integrable en $[x_1, x_2]$

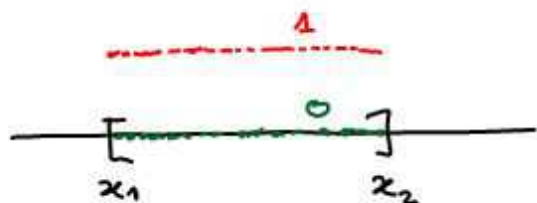


$$\exists \int_{x_1}^{x_2} f(t) dt$$

(continua salvo en un conjunto finito de puntos)

Ejemplo de función no integrable en $[x_1, x_2]$: ($x_1 < x_2$)

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$



$$S_n = 1 \quad \forall n$$

$$I_n = 0 \quad \forall n$$

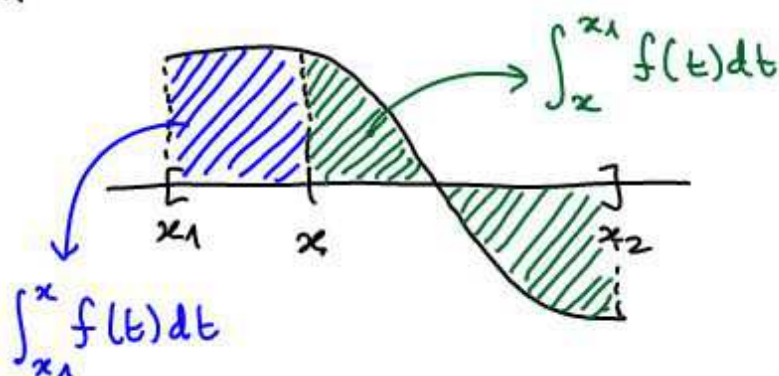
$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f, x_1, x_2) = 1 \neq 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} I_n(f, x_1, x_2)$$

Usando la definición, también es posible demostrar el siguiente resultado que usaremos frecuentemente:

TEOREMA: Sea f integrable en $[x_1, x_2]$ y sea $x \in [x_1, x_2]$

Entonces f es integrable en $[x_1, x]$ y en $[x, x_2]$ y se cumple que:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(t) dt = \int_{x_1}^x f(t) dt + \int_x^{x_2} f(t) dt$$



Ejemplo: $f(x) = \begin{cases} \sin x, & -1 \leq x \leq 1 \\ 3 & ; \quad 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$

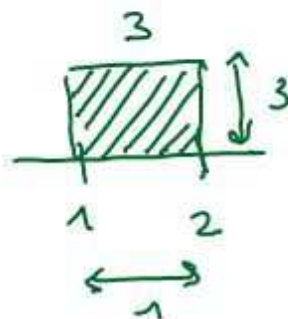
continua a trozos \Rightarrow integrable

$$\int_{-1}^2 f(t) dt = \int_{-1}^1 f(t) dt + \int_1^2 f(t) dt =$$

$$= \int_{-1}^1 \sin t dt + \int_1^2 3 dt =$$

\swarrow impar

$$= 3 - (2 - 1) = 3$$

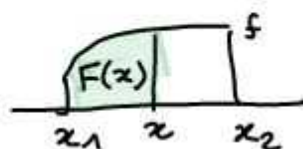


TEOREMAS FUNDAMENTALES DEL CÁLCULO (TFC)

Los siguientes teoremas nos permitirán calcular integrales sin necesidad de recurrir a la definición:

Primer TFC : • Sea f INTEGRABLE en $[x_1, x_2]$. Entonces, la función

$$F(x) = \int_{x_1}^x f(t) dt; \quad x \in [x_1, x_2]$$



es una función CONTINUA en $[x_1, x_2]$.

• Si f es CONTINUA en $[x_1, x_2]$, entonces la función

$$F(x) = \int_{x_1}^x f(t) dt \text{ es CONTINUA en } [x_1, x_2]$$

DERIVABLE en (x_1, x_2)

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in (x_1, x_2)$$

Obs: La integral tiene un "EFECTO REGULARIZADOR":

$$f(x) \text{ integrable} \Rightarrow F(x) = \int_{x_1}^x f(t) dt \text{ continua}$$

$$f(x) \text{ continua} \Rightarrow F(x) = \int_{x_1}^x f(t) dt \text{ derivable} \\ F'(x) = f(x)$$

Segundo TFC: Si f es integrable en $[x_1, x_2]$ y existe una función derivable g tal que $f(x) = g'(x) \quad \forall x \in [x_1, x_2]$

se tiene que:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(t) dt = \int_{x_1}^{x_2} g'(t) dt = g(x_2) - g(x_1)$$

Definición (PRIMITIVA) Diremos que una función g es **UNA PRIMITIVA** de una función f en el intervalo (x_1, x_2) si

$$g'(x) = f(x) \quad \forall x \in (x_1, x_2)$$

Obs: El primer TFC nos garantiza que si f es continua en $[x_1, x_2]$ la función:

$$F(x) = \int_{x_1}^x f(t) dt$$

es una PRIMITIVA de f en (x_1, x_2) , es decir:

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in (x_1, x_2)$$

Obs: El segundo TFC nos permitirá calcular un buen número de integrales. Por ejemplo, las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = \frac{1}{3}x^3$ cumplen:

$$f(x) = g'(x) \quad \forall x$$

Por tanto:

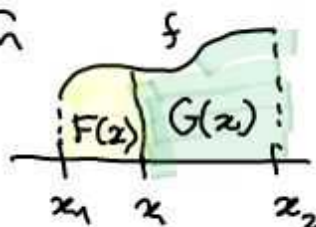
$$\int_{x_1}^{x_2} t^2 dt = \frac{1}{3}x_2^2 - \frac{1}{3}x_1^2$$

En particular:

$$\int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3} \quad (\text{como ya sabíamos pero con menos sufrimiento})$$

Obs: Si f es continua, la función

$$G(x) = \int_x^{x_2} f(t) dt$$



cumple

$$G'(x) = -f(x)$$

La razón es evidente:

$$F(x) + G(x) = \underbrace{\int_{x_1}^{x_2} f(t) dt}_{\text{independiente de } x}$$

\Rightarrow
derivando

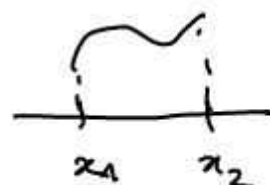
$$F'(x) + G'(x) = 0$$

$$f(x) + G'(x) = 0 \Rightarrow G'(x) = -f(x) \quad \blacksquare$$

Notación: Para tener en cuenta dicho signo menos,

si $x_1 \leq x_2$ definimos:

$$\int_{x_2}^{x_1} f(t) dt := - \int_{x_1}^{x_2} f(t) dt$$



De esta manera, independientemente de si x es mayor o menor que x_1 , la función

$$F(x) = \int_{x_1}^x t^2 dt$$

cumple $F'(x) = x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$