uc3m | Universidad **Carlos III** de Madrid

Grado en Ingeniería Informática

2018-2019

Apuntes

Algebra Lineal

Jorge Rodríguez Fraile[1]

Esta obra se encuentra sujeta a la licencia Creative Commons

Reconocimiento - No Comercial - Sin Obra Derivada

[1]Universidad: 100405951@alumnos.uc3m.es | Personal: jrf1616@gmail.com

ÍNDICE GENERAL

I Teoría **1**

Parte I

Teoría

Estructuras algebraicas: Un conjunto A y unas operaciones $\oplus, \otimes, \odot, \ldots$ -internas o externas- que verifican ciertas propiedades.

- Productos cartesianos

$A \times B = \{(a,b) : a \in A, b \in B\}$ $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \mathbb{N}^2$ = pares de elementos. $(1,1) \in \mathbb{N}^2$

en conjuntos de 2

$\mathbb{N}^3$ $(1,1,1)$ $\mathbb{R}^n$ formado por eneuplas (n-tupla) de números reales.

$\mathbb{N}^p$ formado por p números $\mathbb{C}^n$ formado por eneuplas (n-tupla) de números complejos.

- Operación (Ley de combinación): Aplicación f cuyo conjunto de partida $A \times B$, pasa a salir C.
  - Monaria: $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ sea $a \in \mathbb{Z}$ $f(a) = -a$ Cambio de signo.
    $\perp: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ De eneupla (n-t) a emeupla (m-t).
  - Binaria: $f: A \times B \to C$ Se transforman A y B para convertirse en C.
    $+: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ Un par de números reales se transforman en otro real,
    $(x,y) \to x+y$ en este caso suma (+)
    $(1,1) \to 2$
    $*: \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ $a \in \mathbb{N}$ $b \in \mathbb{Z}$ $a*b = ab+a \equiv *(a,b) = ab+a$
    $2*3 = 6+2 \equiv *(2,3) = 6+2 = 8$

- Tipo de operaciones:
  - Interna: Si los tres conjuntos con los que operamos son iguales. Como la suma y el producto en $\mathbb{R}$. No son internas la resta y división en $\mathbb{N}$
    $f: A \times A \to A$ Ejem: $+: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $\frac{n}{0} \notin \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

Propiedades:
- Conmutativa: $*: A \times A \to A$ $\forall a,b \in A$ $a*b = b*a$.
- Asociativa: $*: A \times A \to A$ $\forall a,b,c \in A$ $a*(b*c) = (a*b)*c$.
- El. (elemento) neutro: e es neutro de $*$ si $\forall a \in A$; $a*e = a$ Suma en $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ es "0" y para el producto es "1"
- El. simétrico: $*: A \times A \to A$ $\forall a \in A$; a' es simétrico de "a" si: $a*a' = a'*a = e$ (Debe tener El. neutro) Suma $x/-x$ opuesto. Producto $x/\frac{1}{x}$ inverso. Matriz A/A^{-1}
- Distributiva: $*: A \times A \to A$ $\forall a,b,c \in A$ $a*(b \perp c) = (a*b) \perp (a*c)$
  $(A, \cdot, +)$ $\perp: A \times A \to A$ Sirve para dar prioridad. (D por la izq.) Hay otra ?
  Ejemplo: El producto sobre la suma, pero no al revés.

- Elemento regular o simplificado
  $a \in A$ para $\oplus$ si:
  $a \oplus a_1 = a \oplus a_2 \Rightarrow a_1 = a_2$
  y: $\forall a_1, a_2 \in A$
  $a_1 \oplus a = a_2 \oplus a \Rightarrow a_1 = a_2$

Estructuras algebraicas con una ley interna.

Semigrupo: posee la propiedad asociativa. $(S,*)$ y si posee más se añade el nombre hasta grupo.
+ conmutativo: si además posee la conmutativa,

Grupo: posee la propiedad asociativa, el. neutro y el. simétrico $(G,*)$
+ conmutativo (o abeliano): si además también la conmutativa. $(\mathbb{R},+)$ $(\mathbb{R}_0,\cdot)$ $(\mathbb{Z},+)$ $(\mathbb{Q},+)$ $(\mathbb{Q}_0,\cdot)$ $(\mathbb{C},+)$ $(\mathbb{C}_0,\cdot)$

Estructuras algebraicas con dos leyes internas.

Anillo: posee las de un grupo conmutativo con la primera (con el neutro 0 en la suma) y la asociativa y distributiva respecto al segundo. $(A,+,\circ)$
+ conmutativo: si posee la conmutativa en el 2º. $(\mathbb{Z},+,\cdot)$
+ unitario: si además tiene el neutro distinto del de la suma en la segunda operación $(e \neq 0)$
+ real: $(\mathbb{R},+,\cdot)$ +inversible: simétrico respecto a la 2ª operación.
+ complejo: $(\mathbb{C},+,\cdot)$

- Anillos íntegros o dominios de integridad.
  $\forall x,y \in A$ $(x \odot y = 0 \Leftrightarrow (x=0 \vee y=0))$ (2ª op)
- Divisor de cero, en $(A,\oplus,\odot)$ anillo $a,b \in A$ no nulos $a \odot b = 0$. Si no hay es un anillo íntegro.

- Conjuntos: $A \subseteq B$ = A contenido en B $[\forall x (x \in A \Rightarrow x \in B)]$ $A = B$ si y solo si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$
  - $\mathbb{Z}$: C. de números enteros
  - $\mathbb{N} = \mathbb{Z}^+$: C. de números naturales o enteros positivos
  - $\mathbb{Z}_0^+$: C. de los enteros no negativos
  - $\mathbb{Q}$: C. de los números racionales
  - $\mathbb{R}$: C. de los números reales
  - $\mathbb{C}$: C. de los números complejos
  - $\emptyset$: C. vacío
  - $\{a\}$: C. con un único elemento; $a \in \{\{a\}\}$ C. cuyo único elemento es el conjunto $\{a\}$

Mirar fotocopias Espacio vectorial. $(V, +, \cdot)$ Grupo abeliano. Asoc, El neutro y distributiva de producto respecto a la suma. $K \times V \to V$ (escalar, vector)
y proposición 2 (Hoja Tema 2)

- Cuerpo: poseé las de un anillo unitario en el que todo número distinto de 0 tiene inverso. $(A, *, 0)$ respecto a 0 (2ª op)
  + Conmutativo: si la 2ª ley es conmutativa. Ej: $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ — k, $\mathbb{K}^{m\times n}$ → cuerpo conmutativo
- Externa: Cuando manejamos como entrada conjuntos distintos, la salida sea uno de ellos. (multiplicador o escalar)
  $f: A \times B \to A$ Ej: Escalar y vectorial → Vectorial / Escalar y función real → función real.
  Ley de composición externa por la derecha
- Matrices: Es un arreglo rectangular de $m \times n$ números reales o complejos ordenadas en m filas horizontales y n columnas verticales, entonces la entrada escalar en la i-ésimas filas y la j-ésima columna de A se denomina a_{ij}.
  $\mathbb{K}^{m\times n}$ Cuerpo conmutativo
  Si no es invertible → singular. Es invertible si es de rango completo ($\det(A) \neq 0$)
  - Suma: Sumar los elementos que ocupan la misma posición, si tienen el mismo orden.
    $(A+B)_{ij} = (A)_{ij} + (B)_{ij}$ Ej: $(\mathbb{R}^{n\times p}, +)$ Grupo complementario conmutativo.
  - Producto: $(AB)_{ij} = \sum_{j=1}^{n} (A)_{ij} (B)_{ij}$ $\quad \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}$ por un escalar: por todas las entradas $2\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2&4\\6&8\end{pmatrix}$
    i-ésima por j-ésima
    Propiedades: Asociativa, El. neutro (matriz identidad) y no cumple la conmutativa, ni el el. inverso.
    Ejemplo: $(\mathbb{R}^{n\times p}, \cdot)$ $(\mathbb{R}^{n\times n}, \cdot)$
    $A \in \mathbb{R}^{n\times p}$ $\quad AB \in \mathbb{R}^{n\times n}$
    $B \in \mathbb{R}^{p\times n}$
    $AB \in \mathbb{R}^{n\times p}$

    $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ anillo conmutativo unitario
    Sin elemento simetrico (No todos tienen inversa)
  - Combinación lineal (Solo saber hacerlo por ahora)
    Ejem:
    $$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 14 & 4 \\ 1 & 0 & 12 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{matrix}$$
    (with partial products $2\cdot4$, $3\cdot4$, $14\cdot4$, $4\cdot4$; $1\cdot2$, $0\cdot2$, $12\cdot2$, $0\cdot2$; $-1\cdot1$, $1\cdot1$, $0\cdot1$, $1\cdot1$)
    $(9 \quad 13 \quad 6 \quad 17)$
    Elegir 3 vectores fila.

    1 7 4 2 ← Vectores columna
    $$\begin{pmatrix} x\cdot1 + x\cdot7 + x\cdot4 + x\cdot2 \\ x\cdot1 + x\cdot7 + x\cdot4 + x\cdot2 \\ x\cdot1 + x\cdot7 + x\cdot4 + x\cdot2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y \\ y \end{pmatrix}$$

    Cardinalidad: nº de elementos de un conjunto $\operatorname{card} A = x$ $A\{a_1, a_2, \ldots, a_x\}$

    $\langle S \rangle$ {combinaciones lineales de S} $\quad S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p\}$ Card $S = p$
    Conjunto libre o de vectores linealmente independientes: todas las combinaciones lineales de los vectores de S: $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \vec{v}_i = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \ldots + \alpha_p \vec{v}_p = \vec{0}$ $\quad \alpha_i = 0$ para todo i
    Conjunto ligado o de vectores linealmente dependientes: existe una combinación lineal de los vectores de S: $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \vec{v}_i = \alpha_1 \vec{v}_1 + \ldots + \alpha \vec{v}_p = \vec{0}$ donde algún $\alpha_i \neq 0$.
- Matriz cuadrada: Dimensión $m \times m$ $\left(\begin{smallmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{smallmatrix}\right)$
- Vector columna: $\left(\begin{smallmatrix} \cdot \\ \cdot \end{smallmatrix}\right)$ Dimensión $m \times 1$, una columna de m elementos.
- Vector fila: $(\ldots)$ Dimensión $1 \times n$
- Matriz diagonal: $\begin{pmatrix} 1&0&0\\0&2&0\\0&0&3 \end{pmatrix}$ $a_{ij} = 0$ para todo $i \neq j$. Siendo cuadrada.
- Matriz triangular inferior: $\left(\begin{smallmatrix} \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{smallmatrix}\right)$ $a_{ij} = 0$ para todo $j > i$. Siendo cuadrada.
- Matriz triangular superior $\left(\begin{smallmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot \end{smallmatrix}\right)$ $a_{ij} = 0$ para todo $i > j$. Siendo cuadrada.
- Matriz escalar: $\begin{pmatrix} 2&0&0\\0&2&0\\0&0&2 \end{pmatrix}$ Diagonal con números iguales distintos de 1.
- Diagonal principal $\left(\begin{smallmatrix} \cdot & & \\ & \cdot & \\ & & \cdot \end{smallmatrix}\right)$
- Identidad (I_n): $I_2 \begin{pmatrix} 1&0\\0&1 \end{pmatrix}$
- Matriz cero $= \begin{pmatrix} 0&0\\0&0 \end{pmatrix}$ o nula.
- Idempotente $= A^2 = A$
- Simetrica: $A^t = A$
- Antisimetrica: $A = -A^t$
- Traspuesta $= A^t_{ij} = A_{ji}$ $\begin{pmatrix} 1&2\\3&4 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1&3\\2&4 \end{pmatrix}$
  $(A^t)^t = A$
  $(AB)^t = B^t \cdot A^t$

- Traza de una matriz: Suma de los elementos de la diagonal principal.

$tr(A) = \sum_{i=1}^{m} a_{ii}$ $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $tr(A) = 6$

- Inversa de una matriz: Toda matriz cuadrada $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ no singular (rango igual a n) tiene una matriz inversa, nxn. (A^{-1}). Las que tienen inversa sen llaman Invertibles. Solo hay una.

$AA^{-1} = I = A^{-1}A$ $\quad (AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$ $\quad A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot Adj(A)^t$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

$(A \mid I) \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} (I \mid A^{-1})$

Es lo mismo que $Ax = e_j$, $Ax = e_1$, $Ay = e_2$, $Az = e_3$

- Matriz ortogonal: Matriz cuadrada, $A^tA = I$ $\quad A^{-1} = A^t$

Si el $\det(A) = \pm 1$, es posible que sea ortogonal, sino seguro que no lo es.

× - Equivalentes: $A, B \in \mathbb{K}^{m \times n}$ son equivalentes, si existen P y Q invertibles tal que $B = Q^{-1}AP$.

× - Semejantes: $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ son semejante, si existe P invertible tal que $B = P^{-1}AP$.

- Menor de A_{ij}: M^A_{ij} eliminar i-esima fila y j-esima columna.
- Cofactor de $a_{ij} = C^A_{ij} = \pm \det(M^A_{ij})$ $\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$
- Desarrollo de Laplace. determinantes

$\mathbb{K}^{n \times n} \rightarrow$ Para cualquier fila, $\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} C^A_{ij}$, o columna, $\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} C^A_{ij}$

Para 2x2, $\det(A) = a \cdot d - b \cdot c$ $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\quad \rightarrow a_{11}C^A_{11} + a_{12}C^A_{12} + a_{13}C^A_{13} + a_{14}C^A_{14} + \ldots$

- Adjunta: Sustituir cada entrada por su cofactor. $Adj(A) = \begin{pmatrix} C^A_{11} & C^A_{12} & C^A_{13} \\ C^A_{21} & C^A_{22} & C^A_{23} \\ C^A_{31} & C^A_{32} & C^A_{33} \end{pmatrix}$
- Propiedades de los determinantes:
  1) Dos filas o columnas iguales, $\det(A) = 0$
  2) $\det(I_n) = 1$
  3) $\det(A^t) = \det(A)$
  4) Intercambiar entre sí dos filas o columnas, $\det(D) = -\underbrace{d(A)}$ → Resultado de cambiarlas
  5) Multiplicar una fila o columna por un escalar. $\underbrace{\det(D)}_{\text{Multiplicada}} = \alpha \det(A)$ → original
  6) $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$
- Mirar hojas: Matrices por bloques.
- Espacio nulo: Matriz A mxn, es el conjunto de todos los elementos v de $\mathbb{K}^n$ que verifican Av es el elemento 0 de $\mathbb{K}^m$. / Es el conjunto de todas las soluciones de la matriz homogenea asociada. $Ax = 0$ $Nul(A) = \{x : Ax = 0\}$

$N(A) = \{v \in \mathbb{R}^n : Av = 0\}$

- Espacio columna: Matriz $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$, es el subconjunto de $\mathbb{K}^m$ que contiene todas las combinaciones lineales de columnas de A. $Col(A) = C(A) = \{v \in \mathbb{R}^m : v = \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2, \alpha_i \in \mathbb{R}\}$
- Espacio fila: $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$, conjunto de $\mathbb{K}^n$ formado por todas las combinaciones lineales de las filas de A. $fil(A) = C(A^t) = \{v \in \mathbb{R}^n : v = \beta_1 A_1 + \beta_2 A_2 + \beta_3 A_3, \beta_i \in \mathbb{R}\}$
- Espacio nulo de la transpuesta: $N(A^t)$; $A^t v = 0$; $v^t A = 0^t$

14/09/2018

Sistemas de Ecuaciones Lineales.

$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots a_nx_n = b$ ← Ecuación lineal.

- Coeficientes de la combinación: $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$
- Variables: $x_1, \dots, x_n$
- Termino constante: $b \in \mathbb{R}$
- Solución: n-tupla ~~es una solución~~ $(s_1, \dots, s_n)$. Al sustituirlo por las variable, sale b.

• Tipos de SEL:

- Sistema Compatible Determinado: 1, única soluciones. Donde se encuentran en el plano.
- Sistema Compatible Indeterminado: ∞ soluciones (00). Coincidentes en el plano.
- Sistema Incompatible: Sin solución (05) El vector b no pertenece al espacio generado por a_1 y a_2. $xa_1 + ya_2 = b$. No hay ninguna combinación lineal.

Dos sistemas son equivalentes si tienen el mismo conjunto solución.

• Resolución de SEL:

- Intercambio
- Re-escalado
- Reemplazo

} Operaciones fundamentales → Crean equivalentes

• Metodo de Gauss: Consiste en añadir y eliminar ecuaciones para alcanzar un sistema triangular / escalonado. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \Big/ \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

La primera variable no nula variable pivote (en cada fila), si no variable libre.
↳ basica

Mediante operaciones fundamentales:

Intercambio: Cambia posición de dos ecuaciones (filas)

Re-escalado: multiplicar los dos miembros de una ecuación por una constante no nula.

Remplazo: una fila (ecuación es sustituida por la suma de ella y algun multiplo de ella.

Ejem:

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 3 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 &= 3 \end{aligned}\right\} \xrightarrow[R_3 - R_1]{R_2 - 2R_1} \left.\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 0 \\ -3x_2 + 3x_3 &= 3 \\ -3x_2 - x_3 &= 3 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{R_3 - R_2} \left.\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 0 \\ -3x_2 + 3x_3 &= 3 \\ -4x_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_2 &= -1 \\ x_3 &= 0 \end{aligned} \quad \{(1, -1, 0)\}$$

• Metodo de Gauss-Jordan: Buscar la forma escalonada reducida. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 0 \\ -3x_2 + 3x_3 &= 3 \\ -4x_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \xrightarrow[-\frac{1}{4}R_3]{-\frac{1}{3}R_2} \left.\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 0 \\ x_2 - x_3 &= -1 \\ x_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{R_2 - R_3} \left.\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 0 \\ x_2 &= -1 \\ x_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{R_1 - R_2} \left.\begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_2 &= -1 \\ x_3 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

• Matriz ampliada.

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 \quad &= 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 3 \\ \underbrace{x_1 - 2x_2 - x_3}_{A} &= \underbrace{3}_{b} \end{aligned}\right\} \rightarrow \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Matriz coeficiente}}}{[A|b]} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

Si en una matriz ampliada la última columna no es pivotable, es Sistema Compatible.

- Rango de una matriz: Es el número de vectores columna linealmente independientes.
  Es igual al numero de pivotes. En una matriz $rg[A|b]$ = pivotes; $rg(A)$ = pivotes - los de los terminos indepen.
- Rouche: Un sistema de ecuaciones lineales, si y solo si el rango de la matriz de los coeficientes es igual que la ampliada, ademas si coincide con el nº de incognitas es determinado, sino indeterminado.
  $rg(A) = rg(A|b) \iff b \in Col(A)$

Cada ecuación de un SEL es una restricción de un espacio (variables - restricciones) mensional en un espacio (variables) mensional, que es el espacio de trabajo.
Ejem: Espacio bidimensional, en un espacio tetradimensional de trabajo.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \leftarrow 1^a \text{ restricción} \\ \leftarrow 2^a \text{ restricción} \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

Cuando se pasa a parametrica, la variables basicas se escriben en función de los libres.

$$\left.\begin{array}{l} 1x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 1x_4 = 1 \\ x_3 + x_4 = 5 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x_1 + 3x_3 = 1 - 2x_2 + x_1 \\ x_3 = 5 - x_4 \end{array}\right\} \rightarrow \boxed{x_1 = -14 - 2x_2 + 4x_4}$$

Implicita Implicita Parametrica

- Grados de libertad = pivotes - restricciones = ___
- Ecuación lineal homogenea: $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0$ constante igual a 0.
- Sistema homogéneo: Solucion $x_1, \dots, x_n = 0$ $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{array}\right)$
- Solución trivial: $x_1, x_2, \dots, x_n = 0$
- Solución no trivial: Cualquier solución en la que almenos una variable no es nula.
  Si p es solución de $Ax = b$ y V_h son todas las soluciones de $Ax = 0 \Rightarrow p + V_h$ son todas las soluciones de $Ax = b$. $Ap = b$ $A(p + V_h) = Ap + AV_h = \underline{b} + 0$

Vector de la base canonica: $e_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $Ae_j = a_j$ La j-esima columna de A

Espacios vectoriales: Sea K un cuerpo conmutativo $(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ y E un conjunto de vectores con dos operaciones $\oplus$ (interna) y $\odot$ (externa $K \cdot E = E$) que cumple 8 axiomas. $(V, +, \circ_K)$

vectores $\mathbb{R}^2$ sobre escalar $\mathbb{R}$

Se dice que $(E, +, \circ)$ es un espacio vectorial sobre K si:

1) $(E, +)$ es un grupo conmutativo.
2) $\forall a, b \in E$ $(\lambda + \mu) \cdot a = a\lambda + \mu a$ (λa) pseudoasociativa $\lambda(\mu a) = (\lambda \mu) a$ (1 operación, 2 operaciones)
   $\forall \lambda, \mu \in K$ $\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$ $1a = a$

Combinación lineal (vector): "Sea E un espacio vectorial sobre K, y sea $A = \{v_1, v_2, \dots, v_p\} \subseteq E$ (Del subconjunto E) y sea $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_p \in K$, la expresión $(\lambda_1 v_1, \lambda_2 v_2, \dots, \lambda_p v_p) \in E$"

Ejemplo de C.L.:

$\mathbb{P}_2[x] \rightarrow$ Polinomios de $\underset{V_n}{x}$ indeterminada y grado 2 o menor.

$p_1\ P_1 = 2x+3x^2$ $\quad 3p_1+4p_2 = 3(2x+3x^2)+4(2x-x^2) = 14x+5x^2$ es C.L de p_1, p_2 con 3,4.

$p_2\ P_2 = 2x-x^2$

Subespacio vectorial: Sea E un e.v. sobre k y sea $F \subseteq E$, se dice que F es un subespacio vectorial de E si mantiene la misma estructura que E y cumple los axiomas de E.

1º Comprobar si contiene el nulo. (0,0,...) Si no lo contiene no lo es, pero que lo contenga no asegura

Tiene que ser la suma y el producto estable (Clausura) $\quad$ F no genera a $\mathbb{R}^2$ / $\mathbb{R}^2$ genera a F

$$\left.\begin{array}{l}\forall a,b \in F \\ \lambda \in k\end{array}\right\} \left.\begin{array}{ll}1)\ a+b \in F & \text{Clausura de suma} \\ 2)\ \lambda a \in F & \text{Clausura del producto}\end{array}\right\} \Leftrightarrow a\lambda + b\mu \in F$$

Ejem: $\mathbb{P}_2[x]$

$A\{a_0+a_1x+a_2x^2 : a_0=0\}$

$(a_1x+a_2x^2)+(b_1x+b_2x^2) = (a_1+b_1)x+(a_2+b_2)x^2 \in A$ Suma estable.

$\mathbb{R}^3$

$A\{(x,1,0) : x \in \mathbb{R}\}$

$(0,1,0)+(1,1,0) = (1,2,0) \notin A$ No es estable la suma, por lo tanto no es s.e.v de $\mathbb{R}^3$

Conjunto generado por $\{v_1,\dots,v_p\}$ $(v_i \in V)$

$\equiv$ el conjunto $\mathrm{Gen}(v_1,\dots,v_2)$ formada por todas las combinaciones lineales de $v_1,\dots,v_p$.

$\langle A \rangle = A =$ $\quad \mathrm{Gen}(v_1,\dots,v_p) = \{\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_p v_p : \alpha \in \mathbb{K}\} = F$ (A es el sistema generador, genera a F)

$\hookrightarrow$ S es un subespacio de V. $\quad$ es el s.e.v de las CL de A.

Demostración de la suma estable: $a = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i v_i \quad b = \sum_{i=1}^{p} \mu_i v_i$

$$a+b = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i v_i + \sum_{i=1}^{p} \mu_i v_i = \sum_{i=1}^{p} (\lambda_i + \mu_i) \cdot v_i \in F$$

Demostración del producto externo estable: $\alpha \in k$

$$\alpha a = \alpha \left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{p} (\alpha \lambda_i) v_i \in F$$

Ejem: $\mathbb{R}^2$ $\quad A = \{(1,2),(-1,-2)\}$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & x \\ 2 & -2 & y \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & x \\ 0 & 0 & -2x+y \end{pmatrix}$

$$\mathrm{Gen}\ A \underbrace{\{(x,y) = \alpha(1,2) + \beta(-1,-2) : \alpha,\beta \in \mathbb{R}\}}_{\text{paramétrica}} = \underbrace{\{(x,y) : -2x+y=0\}}_{\text{Implícita.}}$$

Intersección de S.e.V (En común / se verifica en las dos)

E e.v sobre k y S_1, S_2 s.e.v de E

$S_1 \cap S_2 = \{x \in E : x \in S_1$ y $x \in S_2\}$ $\quad S_1 \cap S_2$ también es s.e.v sobre E

Ejemplo:

$S_1 = \mathrm{Gen}\{(1,0)\}$ $\quad$ (0,0) (1,0) (2,0) (5,0) $\quad S_1 \cap S_2 = \{(0,0)\}$

$S_2 = \mathrm{Gen}\{(x,y) : x=0\}$ $\quad$ (0,0) (0,3) (0,5) (0,8)

$\{(0,1)\}$ Implícita

Unión de s.e.v. (En común ó que pertenezca a uno).

Un sistema es generador si por medio de comb lineales se pueden obtener todos los elementos de un conjunto

$S_1 \cup S_2 = \{x \in E : x \in S_1 \text{ ó } x \in S_2\}$ No es s.e.v de E

$S_1 \cup S_2 = \{(1,0);(0,1)\}$

Sistema generador minimal: Si al prescindir de algunos de los vectores genera lo mismo.

Ejem: Hacer una matriz con la C.L de los vectores y ver los l.i y quitar el resto.

Suma de s.e.v

$S_1 + S_2 = \{\overset{\text{vector de E}}{x} \in E : x = x_1 + x_2 ;\ x_1 \in S_1 \text{ y } x_2 \in S_2\}$

Ejem: $\mathbb{R}^2$ sobre $\mathbb{R}$

$S_1 = Gen\{(1,0)\}$ $S_2 = Gen\{(0,1)\}$

$(1,1) = (1,0) + (0,1)$

Suma directa, solo si la descomposición es única. Al darse $(0,0) = \{\vec{0}\}$

s.e generado por la unión

$S_1 + S_2 = \mathbb{R}^2 = Gen\{S_1 + S_2\}$

28/09/2018

Dependencia Lineal.

Sea E un e.v. sobre K y $G = \{g_1, g_2, \dots, g_p\} \subseteq E$ generador minimal de E

$\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 + \dots + \alpha_p g_p = 0$ para que sea 0, $\alpha_p = \alpha_1 = \alpha_2 = 0$

si $\alpha_1 \neq 0$ $\quad g_1 = \left(-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) g_2 + \left(-\frac{\alpha_3}{\alpha_1}\right) g_3 + \dots + (\ \ ) g_p$ Si fuera cierto, sería un s.e.v. g_1 de los demás $g_2, g_3, \dots$

Def: Sea $L = \{a_1, a_2, \dots, a_p\} \subseteq E$ se dice que L es libre (l.i) si $\forall \lambda_i, i = 1, \dots, m$.

$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_m a_p = 0 \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_p = 0$

Si contiene el vector nulo no será linealmente independiente.

Def: Si no demuestra lo anterior se llama ligado (se demuestra con un contra ejemplo)

Ejem: $\mathbb{P}_1[t]$ sobre $\mathbb{R}$ $\quad A = \{t; t+1\}$

$\alpha_1 t + \alpha_2 (1+t) = 0 \ ; \ \alpha_2 + t(\alpha_1 + \alpha_2) = 0$

Sist. homogeneo (siempre S.C)

$\left.\begin{array}{l} \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \end{array}\right\} \alpha_1 = \alpha_2 = 0$ Lin. indep.

¿ $A = \{t; 1+t\}$ es generador de $\mathbb{P}_1[t]$?

$\alpha t + \beta \in \mathbb{P}_1[t]$ generico $\quad \alpha t + \beta = \mu + t(\lambda + \mu)$ (ter indep) $\Rightarrow \begin{array}{l}\mu = \beta \\ \lambda \mu = \alpha\end{array} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \beta \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$ SCD

$\alpha t + \beta \in Gen\, A$ + cierto al ser SCD

$\alpha t + \beta = \lambda t + \mu(1+t)$ CL de A

Todo subsistema de un conjunto l.i o l.d., seguirá siendolo.

Proposición: Sea $L \subsetneq E$ un conjunto linealmente independiente y sea $x \in E$, y $L \cup \{x\}$ es linealmente independiente $\Rightarrow x \in Gen\, L$.

Sea $L = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ l.i. y $G = \{g_1, g_2, \dots, g_p\}$ generador $\Rightarrow m \leq p$

si $m = p$ el generador es l.i (formando base)

Ejem: $a_1 = \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 + \dots + \alpha_p g_p$

$g_1 \text{ CL} = \{a_1, g_2, \dots, g_p\} ; \ g_2 = \{a_1, a_2, g_3, \dots, g_p\}, \dots \{\dots, a_m\}$

Base de E:

Se dice que $B=\{u_1,u_2,\dots,u_p\}\subseteq E$ es una base de E si es l.i. y generador.

Si $\underset{m\,vect}{B_1}$ y $\underset{n\,vect}{B_2}$ son bases de E B_0= base canonica = $\{(1,0,\dots,0),(0,1,0,\dots),\dots\}$

$m\geq n / m\leq n$ $\dim_k E=\underset{n\ vectores}{n}$ Ejem: $\dim \mathbb{P}_1[t]=2$

Un vector pertenece si sale SCD, pero no puede salir SI, y si sale SCI no pertenece

$B_1\{t, 1+t\}$ $B_2=\{3t, 3+3t\}$

Una base para contruir otra hay que hacer C.L, tantas como elementos que la forman y sumarlos (las combinaciones lineales) es dando el valor que queramos

Dimensión:

$\dim\mathbb{R}^2=2$ $\dim\mathbb{R}^{2\times2}=4$ $\dim\mathbb{P}_n[t]=n+1$ $\dim\{(0,0)\}=0$

$\dim\mathbb{R}^n=n$ $\dim\mathbb{P}_1[t]=2$

$B_1\ \{(1,2,3),(4,5,6)\}\to\{(1,2,3),(4,5,6)\}$

$\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{matrix}$

Coordenadas de un vector.

Sea $B=\{u_1,u_2,\dots,u_n\}$ una base de E sobre K.

$x\in E\Rightarrow \exists_{1\ \text{única}}\ \alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n\in K: x=\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\dots+\alpha_nu_n \leftarrow$ Única.

$[x]_B=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)\leftarrow$ Coordenadas de x respecto a la base B por ser única.

Ejem: Coordenadas de x, respecto a B_0 y B_1

Sea $x=(3,7,8)\in\mathbb{R}^3$

$[x]_{B_0}=\begin{pmatrix}3\\7\\8\end{pmatrix}$ $x=3(1,0,0)+7(0,1,0)+8(0,0,1)$

$[x]_{B_1}=\alpha(1,1,0)+\beta(0,1,1)+\gamma(1,1,1)$ $\begin{pmatrix}1&0&1&3\\1&1&1&7\\0&1&1&8\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&4\\0&0&1&4\end{pmatrix}$ $\begin{matrix}\alpha_1=-1\\ \alpha_2=4\\ \alpha_3=4\end{matrix}$ $[x]_{B_1}$

Matriz cambio:

$\boxed{[x]_{B_1}=T_{B_1B_0}[x]_{B_0}}$; $[x]_{B_0}=T_{B_0B_1}[x]_{B_1}\to$ Ejem: $\begin{pmatrix}3\\7\\8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\4\\4\end{pmatrix}$

$\boxed{(T_{B_1B_0})^{-1}=T_{B_0B_1}}$ $T_{B_0B_1}\cdot T_{B_1B_0}=I$ $\boxed{B_1=B_0T_{B_0B_1}}$ $B_0=B_1T_{B_1B_0}$

$\underset{}{\begin{pmatrix}1&1&2\\1&2&1\\0&1&0\end{pmatrix}}=\underset{B_0}{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}}\cdot\underset{T_{B_0B_1}}{\begin{pmatrix}1&1&2\\1&2&1\\0&1&0\end{pmatrix}}$

Espacios fundamentales asociados:

$\begin{pmatrix}1&0&1&1\\1&1&0&1\\0&1&1&1\end{pmatrix}\mathbb{R}^{3\times4}$ Vectores columna $c_i\in\mathbb{R}^{3}$ ← 3 filas $(c_1\ c_2\ c_3\ c_4)$

Vectores fila $f_i\in\mathbb{R}^4$ ← 4 columnas $\begin{pmatrix}f_1\\f_2\\f_3\end{pmatrix}$

Col A = Gen$\{c_1,c_2,c_3,c_4\}$ No minimal (Hay 4 en $\mathbb{R}^3$) Tiene que haber 3 vectores l.i., buscamos 3 vectores l.i desechando por rangos uno de los 4 y quedaría Col A = Gen$\{c_1,c_2,c_4\}$

Base Col A = $\{c_1,c_2,c_4\}$

Fil A = Gen$\{f_1,f_2,f_3\}$ Minimal hay 3 en $\mathbb{R}^4$ $\alpha f_1+\beta f_2+\gamma f_3$

Base Fil A = $\{f_1,f_2,f_3\}$ Comprobar que son l.i. y Fil A = Gen$\{f_1,f_2,f_3\}$

Nul A: s.e.v de $\mathbb{R}^4$ $Ax=0$ Resolver Nul A = $\{v_1,v_2,\dots\}$ $\boxed{\text{Si sale }(0,0)\text{ No hay base.}}$

Base Nul A = $\{(\_,\_,\_,\_)\}$ $\underset{3\times4}{(\ )}\underset{4\times1}{(\ )}=\underset{3\times1}{(\ )}$ El resultado de $Ax=0$

Nul A^t $A^tx=0$ Resolver Nul $A^t=\{v_1,v_2,\dots\}$

$\underset{4\times3}{(\ )}\underset{3\times1}{(\ )}=(\ )$

Base Nul $A^t=\{(\_,\_,\_,\_)\}$ $Ax=0$ Resultado

Sea $Ax=b$ un SEL Comp. Deter. $\Rightarrow x=A^{-1}b$

$[A|b]\sim\dots\sim[I|A^{-1}b]$

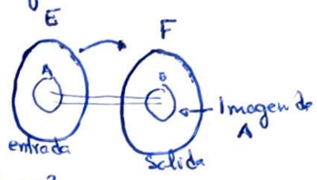
Transformaciones lineales: convierte un e.v. en e.v

- Aplicación: A cada elemento de un conjunto le corresponde otro de otro elemento, sin que sobren.

  Ej: $f(x)=\frac{1}{x}$ no lo es, a 0 no le corresponde.

  Todo elemento tiene una imagen única.

- Inyectiva: Si a imágenes iguales le corresponden antecedentes iguales.



$\mathrm{Nul}T=0$ T es inyectiva si $\forall x_1, x_2 \in E$, si $\rightarrow$ $\boxed{(T(x_1)\neq T(x_2) \Rightarrow x_1 \neq x_2)}$

- Suprayectiva: A todo elemento de F está en E. $\boxed{\mathrm{Im}(T)=F}$

$T: A\rightarrow B$

$\mathrm{rg}T=\dim B \rightarrow$ T es sobreyectiva si $\forall x_1, x_2 \in F, \exists x \in E: T(x)=y$.

$\dim \mathrm{Im} T$

- Biyectividad: Si cumple lo Inyectiva y suprayectiva a la vez.

Si es $\rightarrow$ e

Isomorfismo

Si A es s.e.v de E $\Rightarrow T(A)$ es s.e.v de E. $T(A)=\{y\in F: \exists x\in A, T(x)=y\}$

Son Transformaciones Lineales si:

E y F son e.v construidos en la misma base.

$$\left.\begin{matrix}\forall x_1, x_2 \in E \\ \forall \lambda, \mu \in F\end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix}(1)\ T(x_1+x_2)=T(x_1)+T(x_2) \\ (2)\ T(\lambda x_1)=\lambda T(x_1)\end{matrix}\right\} T(\lambda x_1+\mu x_2)=\lambda T(x_1)+\mu T(x_2)$$

Ejem en sucio

A las Transformaciones lineales también se les llama operaciones o homomorficas.

Si además fuera biyectiva se llamaría isomorfismo.

Si los e.v. son el mismo endomorfismo. $T: \mathbb{R}^2\rightarrow\mathbb{R}^2$

Imagen recíproca: Buscar los elementos en E, conociendo su imagen en F.

$$T^{-1}(B)=\{x\in E: T(x)\in B\}$$

Núcleo = Espacio nulo.

$\mathrm{Ker}T=\mathrm{Nul}T$ Es la imagen recíproca del vector nulo de F.

$\mathrm{Nul}\,T=T^{-1}(\{0\})=\{x\in E: T(x)=0\}$

· Para que una transformación sea nula tiene que contener solo el nulo.

$T\ \mathrm{iny} \Leftrightarrow \mathrm{ker}T=\{0\}$ $\mathrm{Ker}T=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: T[(x,y)]=(0,0)\}$

Conjunto imagen de una transformación lineal: Es el conjunto de todas las imágenes.

$T(E)=\{x'\in F: \exists x\in E, T(x)=x'\}$

Ejem: $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$(x,y)\longmapsto(x,0,x)$

$\mathbb{R}^2$ $B_0\{(1,0),(0,1)\}$ $T(B_0)=\{(1,0,1),(0,0,0)\}$ B_0 es l.i pero $T(B_0)$ no lo es. Las bases no se convierten en bases, la independencia lineal no se conserva.

$T(B_0)=\{(1,0,1),\overbrace{(1,0,0),(0,1,0)}^{\text{nuevos}}\}$ ← Esta sí que es l.i.

Sea $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ un conjunto generador de E.

$T: E\rightarrow F$ Sea $y\in \mathrm{Im}T\subseteq F \Rightarrow \exists x\in E: T(x)=y \Rightarrow T(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i g_i)=y$ Como es lineal la suma de vectores y escalares:

$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i T(g_i)=y \Rightarrow \mathrm{Gen}\{T(g_1), T(g_2), \dots, T(g_n)\}=\mathrm{Im}T$

La dimensión del conjunto imagen recibe el nombre de rango de la transformación.

$rg(T) = \dim Im T \leq n$ (Es $\leq$ porque puede haber vectores que no sean l. i.)

Teorema del rango:

Sea $T: E \to F$ una T.L además $\dim E = n \Rightarrow \dim Im T \leq n$

$\underbrace{\dim Im T}_{rg(T)} + \underbrace{nulidad}_{\dim ker T} = \dim E$

$\overbrace{\dim Im T}^{rg(T)} = \dim F$ Será sobreyectiva.

$\boxed{rg\, T = \underbrace{\dim E}_{f.\ entrada} - Im\, ker T}$

Algebra de las Transformaciones lineales.

- Identidad, definida de V en V mediante $I(v) = v$.
- Nula 0, definida de V en W mediante $O(v) = v$.
- Suma, $(T_1 + T_2)(v) = T_1(v) + T_2(v)$
- Producto por el escalar $\alpha \in K$, $(\alpha T_1)(v) = \alpha T_1(v)$

Operaciones algebraicas con T.L 16/10/2018

Sumar) $T: U \to V$ $\quad T+S: U \to V$ Sea $u \in U$ / La salida $T(u) \in V$

$S: U \to V$ $\quad (T+S)(u) = T(u) + S(u)$

Si T y S son lineales T+S será lineal (Demostración en sucio)

Transformación nula) $T + 0 = T$ Elemento neutro

$0: U \to V$

$u \to 0$

Aquella a la que cualquier vector se le asigna el nulo. $O(u) = 0$

Su nulo son todo el espacio de partida (U)

Producto externo) $(\lambda T): U \to V$ $\quad (\lambda T)(u) = \lambda T(u)$

Composición) Sean U, V y W e.v / Si son los dos son lineales la composición lo será

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[dr, "S"] & \\ U \arrow[ur, "T"] \arrow[rr, "S \circ T"'] & & W \end{tikzcd}$$

$U \to V \to W$

$u \to T(u) \to S(T(u))$

Asociativa

Inversa, si el neutro

No conmutativa.

El. neuto $\to$ la identidad

Identidad) $id: U \to U$ $\quad id(u) = u$ $\quad S \circ id = id \circ S = S$

$u \to u$

Cada vector va a sí mismo. Es inyectiva y sobreyectiva, por lo tanto biyectiva. isomorfo.

Inversa) $T: U \rightleftarrows U$ $\quad T \circ T^{-1} = id$

Para tener inversa tiene que ser inyectiva.

Matriz asociada a T.L

$T: U \to V$

$\dim_k U = m$ Base de U: $B_U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$

$\dim_k V = n$ Base de V: $B_V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$

Sea $x \in U$, $T(x) \in V$

$$x = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_m u_m = [u_1\ u_2 \dots u_m] \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} \quad \alpha_j \in k,\ j = 1 \dots m$$

$$T(x) = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \dots + \beta_n v_n = [v_1\ v_2 \dots v_n] \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_n \end{pmatrix}$$

$$T(x) = T(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots) = \alpha_1 T(u_1) + \alpha_2 T(u_2) + \dots = [T(u_1)\ T(u_2) \dots] \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_m \end{pmatrix}$$

La matriz asociada a la T.L se construye hallando las imagenes de los vectores de la base de U.

$$[T(u_1)\ T(u_2) \dots T(u_m)] = [u_1\ u_2 \dots u_m] \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

$$[T(x)]_{B_V} = A [x]_{B_U} \quad M_{B_V B_U}(T) \text{ ó } A_{T, B_V B_U}$$

Para hallar el espacio nulo de una T.L (Nul T), me vale con calcular el de la matriz asociada.

El rango de la T.L coincide con el rango de la matriz asociada.

Col $M_{B_2 B_1}(id) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = Im\ id$

Las matrices de cambio de base, son las matrices asociadas de la T.L id., ya que T.L. id es invertible al ser de rango completo.

Matriz asociada de una transformación con operaciones.

$T: U \to V$ B_u base de U

$S: U \to V$ B_v base de V

$T+S: U \to V$

$(T+S)(x) = T(x) + S(x)$

mismo orden

$M_{B_V B_U}(T) = A$

$M_{B_V B_V}(T) = B$

$M_{B_V B_U}(T+S) = C$

$[(T+S)(x)]_{B_V} = C[x]_{B_V}$

$[T(x) + S(x)]_{B_V} = [T(x)]_{B_V} + [S(x)]_{B_V}$

$[T(x) + S(x)]_{B_V} = A[x]_{B_U} + A[x]_{B_U}$

La matriz asociada a la composición es el producto de los otros dos. $C = A \cdot B$

Matrices:

- Equivalentes: Si estan asociadas a las mismas T.L.
- Semejantes: Si estan asociadas a las mismas T.L. y encima cuadradas
  y endomorfismo

Forma normal de una T.L.

1º Hallar la base del nucleo

2º Base de $\mathbb{R}^3$ en la que ya esté incluida la base del núcleo.

La forma normal de una T.L consiste en una matriz escrita por bloques.

$$\left(\begin{array}{c|c} I_n & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R}_C \arrow[r, "T", "A"'] & \mathbb{R}_C \arrow[dr, "id", "Q"'] & \\ \mathbb{R}_{B_1} \arrow[ur, "id", "P"'] \arrow[rrr, "T", "B"'] & & & \mathbb{R}_{B_2} \end{tikzcd}$$

$B = Q^{-1}AP$ $\quad \overset{B}{\cancel{A}}_{T,B_1B_2} = Q_{T,B_2C} \cdot A_{T,CC} \cdot P_{CB_1}$

$A = QBP^{-1}$

↳ Matriz asociada a la T.L de las bases canonicas.

Ejem: $T: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ $\quad T[(x,y,z,t)] = (x+y,\ y+z,\ z+t,\ x+2y+2z+t)$

$T(1,0,0,0) = (1,0,0,1) = 1(1,0,...$

$T(0,1,0,0) = (1,1,0,2) = 1(1,0...$

$A = \begin{pmatrix} 1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\\1&2&2&1 \end{pmatrix} = A_{T,B_0B_0}$ $\quad rg(A) = 3$

...

Nucleo $= \ker T = \{(-x_4, x_4, -x_4, x_4) \in \mathbb{R}_4 : x_4 \in \mathbb{R}\} = Gen\{(-1,1,-1,1)\}$

$\left(\begin{array}{cccc|c} 1&1&0&0&0\\0&1&1&0&0\\0&0&1&1&0\\1&2&2&1&0 \end{array}\right)$ $\left.\begin{array}{l} x_1+x_2=0 \\ x_2+x_3=0 \\ x_3+x_4=0 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} x_1=-x_4 \\ x_2=x_4 \\ x_3=-x_4 \end{array}$ $\quad x_4$ libre

$B_1 = \{(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (-1,1,-1,1)\}$ $\qquad P = M_{CB_1}(id) = \begin{pmatrix} 1&0&0&-1\\0&1&0&1\\0&0&1&-1\\0&0&0&1 \end{pmatrix}$

$T(B_1) = \{\overset{u_1}{(1,0,0,1)}, \overset{u_2}{(1,1,0,2)}, \overset{u_3}{(0,1,1,2)}, \overset{u_3}{(0,0,0,0)}\}$ $\qquad Q = M_{CB_2}(id) = \begin{pmatrix} 1&1&0&1\\0&1&1&0\\0&0&1&0\\1&2&2&0 \end{pmatrix}$

$B_2 = \{\overset{v_1}{(1,0,0,1)}, \overset{v_2}{(1,1,0,2)}, \overset{v_3}{(0,1,1,2)}, \overset{v_4}{(1,0,0,0)}\}$ ↪ Añadir uno para qe sea de $\mathbb{R}^4$

$v_1 = T(u_1)$ $\quad v_2 = T(u_2)$ $\quad v_3 = T(u_3)$ $\quad 0 = T(u_4)$

$$B = M_{B_1B_2}(id) = \left(\begin{array}{ccc|c} \multicolumn{3}{c|}{I_3} & \\ 1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\ \hline 0&0&0&0 \end{array}\right)$$

Autovalores. Autovectores. Diagonalización. $\qquad$ 26/10/2018

$\begin{pmatrix} 7&2\\5&8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2\\3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20\\30 \end{pmatrix}$ ← linealmente dependiente de $\begin{pmatrix} 2\\3 \end{pmatrix}$ $\qquad \begin{pmatrix} 0&16&12\\2&0&0\\0&1&0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 18\\6\\1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 108\\36\\6 \end{pmatrix}$

Si ocurre que es l.d, $\begin{pmatrix} 2\\3 \end{pmatrix}$ es un autovector (vector propio) y su autovalor es 10 $\left(\frac{20}{10} = 2 \quad \frac{30}{10} = 3\right)$

* Sea A una matriz cuadrada, se dice que $x \neq 0$ es un autovector de A si cumple: $\boxed{Ax = \lambda x}$
  λ es un escalar, el autovector.

* El conjunto de los autovectores asociados a un autovalor se llama subespacio propio.
  Sea λ un autovalor de A $\Rightarrow V(\lambda) = \{x \in E : Ax = \lambda x\}$

$\boxed{Ax = \lambda x}$ $\qquad \det(A - \lambda I) = 0$ polinomio característico en A en $\lambda \to P_A(\lambda)$

$Ax - \lambda x = 0$ $\qquad V(\lambda) = \ker(A - \lambda I)$ ↳ no invertible (es singular, no rango completo)

$(A - \lambda)x = 0$ $\qquad$ Ecuación característica $P_A(\lambda) = 0$ $\quad \boxed{P_A(A) = \det(A - AI) = 0}$ ← Caley-Hamilton

$\boxed{A^n x = \lambda^n x}$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot 5 \quad \det(A-5I) = \begin{vmatrix} 1-5 & 2 \\ 4 & 3-5 \end{vmatrix} = 0$ El 5 es autovalor.

$P_A(\lambda) = \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right] = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \underbrace{\lambda^2 - 4\lambda - 5}_{\text{polinomio característico}}$ $\quad \underbrace{\lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0}_{\text{Ec. característica grado 2 y matriz 2}}$ → Los resultados son los autovectores.
$(\lambda-5)(\lambda+1) \quad \sigma(A) = \{-1, 5\}$

$V(-1) = \ker(A+I) = \{(x, -x) : x \in \mathbb{R}\} = Gen\{(1,-1)\} = u_1 \quad V(5) = \ker(A-5I) = \{(x, 2x) : x \in \mathbb{R}\} = Gen\{(1,2)\} = u_2$

$A + I = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$ $rg = 1$ $\quad 2x + 2y = 0;\ x = -y \quad A - 5I = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ $\quad -2x + y = 0;\ 2x = y$
$-4x + 2y = 0$

$[Au_1\ Au_2] = [-u_1\ 5u_2] = A[u_1\ u_2] = [u_1\ u_2] \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ Diagonalizable y semejante a $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

$\boxed{Ax = \lambda x \quad AP = PD \quad A = PDP^{-1} \quad D = P^{-1}AP}$ P autovectores e invertible // D diagonal autovectores.

Diagonalización: Es una matriz cuadrada. Si y solo si se puede encontrar una base de autovectores.
Tantos autovectores como rango de A
Cuando tiene una matriz semejante diagonal. Si tiene n autovalores distintos 2 a 2
Com $m_{alg} = 1$, no repes, si no comprobar hallando autovect.

Teorema: El grado del $P_A(\lambda)$ coincide con el orden de la matriz.
Una matriz cuadrada de orden n tiene n autovalores distintos.
El conjunto de los autovalores recibe el nombre de espectro. $\sigma(A) = \{-1, 5\}$

Dos matrices semejantes tienen el mismo determinante, traza y polinomio característico.

$AP = PD$ o al ser invertible.
$\det A \cdot \det P = \det P \cdot \det D$
$\det A = \det D$

$tr(AP) = tr(PD)$
$tr P \cdot tr A = tr D \cdot tr P$
(producto inverso)

$\boxed{tr(A) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i}$ ← autovalores

$p \leq n$
$\boxed{\det(A) = \text{term. ind.}}$

$\det(A - \lambda I) = 0$
$\det(PDP^{-1} - \lambda PP^{-1}) = 0$
$\det(D - \lambda I) = 0$

$\boxed{\det(A) = P_A(0) = \prod_{i=1}^{p} \lambda_i}$ $p \leq n$ Si hay n autovalores

$\begin{pmatrix} 1 & \\ & 2 \end{pmatrix}$ $(\lambda-1)^2(\lambda-2)$ Tiene una multiplicidad algebraica de 2, es el número de veces que aparece en el polinomio característico.
$\sigma(A) = \{1, 2\}$

Multiplicidades:

$(\lambda - \alpha_1)^{m_1} \cdot (\lambda - \alpha_2)^{m_2} \cdot \ldots \cdot (\lambda - \alpha_p)^{m_p} \quad V(\alpha_1) = \ker(A - \alpha_1 I) \to g_1$ La dimensión de cada subespacio es igual a
$\sigma(A) = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p\} \quad p < n \quad V(\alpha_p) = \ker(A - \alpha_p I) \to g_p$ la multiplicidad geometrica. algebraica e igual o menor a la geometrica

$\sum_{i=1}^{p} m_i = n \qquad \sum_{i=1}^{p} g_i \leq n$ < = diagonalizable; < no diagonalizable $\qquad \boxed{\dim V(\lambda_i) = m_{alg}}$

Vector propio (autovector): Aquel que cuando se transforma no cambia de dirección.


No tiene

Si tiene, se dilata pero no cambia

Tema 9: Producto interno (interior o escalar)

Sea E (vector) un e.v sobre k (escalar), sea ϕ una función: $\phi : E \times E \to k$
$(x, y) \to \langle x, y \rangle = \phi(x, y)$
producto cartesiano — producto escalar de "x" e "y"

Debe cumplir:

i) $\phi(x,y) = \phi(y,x) \,/\, \langle x,y \rangle = \langle y,x \rangle$

Distributiva
Multipl. de vectores internos

ii) $\phi(x, y+z) = \phi(x,y) + \phi(x,z) \,/\, \langle x, y+z \rangle = \langle x,y \rangle + \langle x,z \rangle$

iii) $\phi(\lambda x, y) = \lambda \phi(x,y)$

iv) $\phi(x,x) \geq 0$, y además si $\phi(x,x) = 0 \iff x = 0$

$x = (x_1, x_2) \quad \langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 = (x_1\ x_2) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = x^t y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$
$y = (y_1, y_2)$

$\langle x,y\rangle = x_1y_1+x_2y_2$ Producto interno $= (x_1\ x_2)\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix} \Big/ \underbrace{(x_1\ x_2)\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix} = x_1y_1+x_1y_2+x_2y_1+2x_2y_2$

$\langle a_0+a_1t, b_0+b_1t\rangle = a_0b_0$ No cumple la 4ª axioma

$f,g\in C[a,b]$ $\langle f,g\rangle = \int_a^b f\cdot g$ Producto interno

Matriz métrica: Tiene que ser simetrica. y positiva.

$\langle x,y\rangle = [x]_B^t \cdot G_B \cdot [y]_B$

- Normas de un vector (Longitud o módulo) $\boxed{\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}}$ $\|x\|^2 = \langle x,x\rangle$
- Angulo entre vectores $\boxed{\cos(\hat{x,y}) = \frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\|y\|}}$

$|\langle x,y\rangle| \le \|x\|\|y\| \Rightarrow -\|x\|\|y\| \le \langle x,y\rangle \le \|x\|\|y\| \Rightarrow -1 \le \frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\|y\|} \le 1$

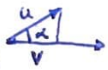
- Distancia entre vectores.

$\boxed{d(x,y) = \|x-y\|}$

- Ortogonalidad: Se dice que x es ortogonal de y $(x\perp y) \iff \langle x,y\rangle = 0$
- Vector unitario (con norma 1): $\|\lambda u\| = |\lambda|\|u\|$ $\left\|\frac{u}{\|u\|}\right\| = \frac{\|u\|}{\|u\|} = 1$
- Normalizar un vector hacerlo de norma 1

$\mathbb{R}^2$ sobre $\mathbb{R}$ $u=(1,1)$ $\|u\| = \sqrt{\langle u,u\rangle} = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$ $\boxed{\frac{u}{\|u\|}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

- Proyecciones ortogonales



$\boxed{proy_y(x) = \frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle} y}$ $proy_y(proy_y(x)) = proy_y(x)$

- Conjunto ortogonal (tienen que serlo 2 a 2)

$G = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ es ortogonal si $\langle u_i, u_j\rangle = 0$ si $i\neq j$ $\forall u_i \neq 0$

Si un conjunto de vectores es ortogonal, entonces son linealmente independientes.

Ejem: $\mathbb{R}^3$ sobre $\mathbb{R}$ $G\{(1,2,1),(2,-1,0)\}$ $\langle(1,2,1),(2,-1,0)\rangle = 0$

- Conjuntos ortogonales.

Sean S_1 y S_2 dos conjuntos del e.v E son ortogonales $(S_1\perp S_2)$ si $\forall u\in S_1$ y $\forall v\in S_2$, $u\perp v$ $(\langle u,v\rangle = 0)$

Ejem: $S_1\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x=y\}$ $S_2\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x=-y\}$ > No ortogonal $\langle(x,x),(y,-y)\rangle = xy-xy = 0$ Conjuntos ortogonales, pero no solos

- Complemento ortogonal

Sea F un s.e.v de E, se define $F^\perp = \{x\in E : x\perp y, \forall y\in F\}$ → Contenga a todos los ortogonales de F

Ejem: $S_3 = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x=y, z=0\} = Gen\{(1,1,0)\}$ No ortogonal solo

$S_3^\perp = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x-y=0\} = Gen\{(1,1,0),(0,0,1)\}$

$x=-y$ $(1,-1,0)$

$\boxed{\dim F + \dim F^\perp = \dim E}$ $F\cap F^\perp = \{0\}$ $\boxed{Nul(A) = (Fil(A))^\perp}$ $\boxed{Nul(A^t) = (Col(A))^\perp}$

Bases ortogonales y ortonormales.

Sea $x \in E$ $\quad x = \underbrace{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_p x_p}_{V} + \underbrace{\alpha_{p+1} x_{p+1} + \dots + x_n \alpha_n}_{V^\perp}$

$x = proy_V(x) + proy_{V^\perp}(x) \qquad proy_V(x) = \sum_{j=0}^{p} \frac{\langle y_j, x_v \rangle}{\langle y_j, u_j \rangle} u_j$

Procedimiento de Gram-Schmidt. (para hallar bases ortogonales)

$\{u_1, u_2, \dots, u_p\}$ base de V, s.e.v de E // Hallar $\{q_1, q_2, \dots, q_p\}$ base ortogonal de V

1° $q_1 = u_1 \qquad W_1 = Gen\{q_1\}$

2° $q_2 = u_2 - proy_{W_1}(u_2) = u_2 - \frac{\langle u_2, q_1 \rangle}{\langle q_1, q_1 \rangle} q_1 \qquad W_2 = Gen\{q_1, q_2\}$

3° $q_3 = u_3 - proy_{W_2}(u_3) = u_3 - \frac{\langle u_3, q_1 \rangle}{\langle q_1, q_1 \rangle} q_1 - \frac{\langle u_3, q_2 \rangle}{\langle q_2, q_2 \rangle} q_2$

- Ortogonalización.

B = Matriz base

Q = Matriz con columnas ortogonales por Gram-Schmidt

W = Matriz con las columnas ortonormales de Q ($W^t W = I$)

R = Matriz ortogonal ($A^t = A^{-1}$)

$B = WR$

$\boxed{R = W^t B}$

16/11/2018

Matriz:

Transpuesta: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$ $A^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ Diagonal: $\begin{pmatrix} \circ & \\ & \circ \end{pmatrix}$

Conjugada: La transpuesta con los números complejos conjugados, pero si es normal solo transponer.
$B^* = B^H$

- Simetrica: La matriz coincide con la transpuesta.

Hermitica: La matriz que coincide con la conjugada, en reales son las simetricas.

Ortogonal: Las columnas ortogonales. ($A^t = A^{-1}$)

Teorema 1: Si A es ortogonalmente diagonizable $\Rightarrow$ A es simetrica.

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ Demostración: $A = QDQ^t$; $A^t = (QDQ^t)^t$; $(Q^t)^t D^t Q^t = A = QDQ^t$

Sea dice que $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es ortogonalmente diagonizable si $\exists Q, D \in \mathbb{R}^{n \times n}$: $AQ = QD$ con diagonal D (autovalores) y Q ortogonal. (columnas ortonormales)

Solo si $\rightarrow$ son simetricas

Teorema 2: Si A es simetrica $\Rightarrow$ A es ortogonalmente diagonalizable.

$V(\cos\phi + \text{sen}\,\phi i) = Nul(A - \lambda_1 I) = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$

$V(\cos\phi - \text{sen}\,\phi i) = Nul(A - \lambda_2 I) = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$

$P\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}$ $AP = PD$

$C = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\text{sen}\,\phi \\ \text{sen}\,\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$

$\sigma(C) = \{\cos\phi + \text{sen}\,\phi i, \cos\phi - \text{sen}\,\phi i\} = \{e^{i\phi}, e^{-i\phi}\}$

- Descomposición espectral.

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simetrica, $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ diagonal, $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonal $\Big\}$ $A = QDQ^t$

$$A = [q_1\, q_2 \cdots q_n]\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_1^t \\ q_2^t \\ \vdots \\ q_n^t\end{pmatrix} = [q_1\, q_2 \cdots q_n]\begin{pmatrix}\lambda_1 q_1^t \\ \lambda_2 q_2^t \\ \vdots \\ \lambda_n q_n^t\end{pmatrix}$$

$$A = \underbrace{\lambda_1 q_1 q_1^t}_{A_1} + \underbrace{\lambda_2 q_2 q_2^t}_{A_2} + \dots + \lambda_n \underset{n\times 1}{q_n}\underset{1\times n}{q_n^t}$$

rango 1

$A_1 + A_2 + A_i = I$ A_i simetricas e idepotentes.

$A_1 A_2 = A_1 A_i = 0$

$A = QQ^t = I$

$n\times 1 \;\; 1\times n = n\times n$ Matriz proyección que proyecta sobre el primer vector propio.

24/11/2018

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times p}$; $A = [a_1\, a_2 \dots a_p]$ con $\{a_1, a_2, \dots, a_p\}$ base ortogonal de Col A

Sea x un vector de $\mathbb{R}^p$ tal que $\|Ax\|^2 = \langle Ax, Ax\rangle = (Ax)^t \cdot Ax = x^t \underbrace{A^t A}_{I} x = x^t x = \|x\|^2$

$\|Ax\| = \|x\|$ $\qquad \langle u, v\rangle = u^t v$ $\qquad$ al ser base ortonormal

Toda transformación lineal que conserva la metrica se llama <u>isometria</u>, y tiene una matriz asociada con las columnas ortonormales. Ademas rango completo

Una isometria $n=p$ siempre es insomorfismo.

Solo si $n=p$ es inyectiva.

Sea λ un autovalor de A con autovector u. $\|Au\| = \|\lambda u\| = \|u\|$; $|\lambda|\,\|u\| = \|u\| \Rightarrow \boxed{|\lambda| = 1}$

Las matrices con columnas ortonormales (si es cuadrada $\Rightarrow$ ortogonal) tienen autovalores ± 1.

El determinante de una matriz ortogonal es 1 ó -1.

Reflexión: Es una transformación que mantiene invariantes los elementos de un hiperplano.

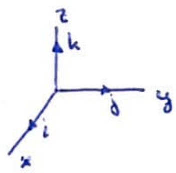
$\mathbb{R}^2 = \{i, j\}$ Es una isometria.

$R(i) = -i$ $\quad R(j) = j$ $\quad R = \begin{pmatrix}-1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$ Eje y

Sobre la bisectriz. $R_{\cdot} = \begin{pmatrix}0 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}$

Respecto al centro $R = \begin{pmatrix}-1 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix}$

$\mathbb{R}^3 = \{i, j, k\}$ $\quad R_{\text{plano } xz} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$



Contracción $\begin{pmatrix}0'5 & 0 \\ 0 & 1/3\end{pmatrix}$

Dilatación $\begin{pmatrix}2 & 0 \\ 0 & 3\end{pmatrix}$ 2 unidades en sentido del 1er vector. 3 unidades en sentido del 2º vector.

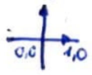
Trasquilados $\begin{pmatrix}1 & 1 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$

Giro

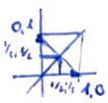
$\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$ Respecto al eje x $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ 0 & \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$

Proyecciones ortogonales (No isometria)

$\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}$ respecto al eje x

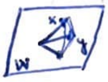


Bisectriz $\begin{pmatrix}1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2\end{pmatrix}$



- Optimización.

Sea E un e.v sobre $\mathbb{R}$, y W un s.e.v de E
↳ con metrica.

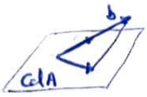
$x \in E$  x fijo
$y \in W$ $\quad$ y variable en W

$$x-y = \underbrace{(x-proy_W(x))}_{W^\perp} + \underbrace{(proy_W(x)-y)}_{W}$$

$$\|x-y\|^2 = \|x-proy_W(x)\|^2 + \|proy_W(x)-y\|^2 \Rightarrow \|x-proy_W(x)\| \leq \|x-y\|$$

La minima distancia de x a y es proyectar y luego restar.

Teorema de la aproximación optima $\Rightarrow \|x-proy_W(x)\| \leq \|x-y\|$

$Ax=b$ $\quad$ $b \in E$ $\quad$ A es una matriz 
↳ si es cierta $\Rightarrow b \in Col A$
si es falsa $\Rightarrow b \notin Col A$ Es incompatible y no tendra solución (no exacta, pero si aproximada)

- Solución de mínimos cuadrados.

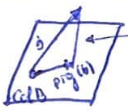
$A\tilde{x} = proy_{Col A}(b)$ $\quad$ Ejem: (1,2) (2,4) (3,4) $\quad$ $y = a_0 + a_1 x$ $\quad$ Halla una ortogonal para hacer la proyección.

$$\left.\begin{matrix} a_0 + a_1 = 2 \\ a_0 + 2a_1 = 4 \\ a_0 + 3a_1 = 4 \end{matrix}\right\} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{a}_0 \\ \tilde{a}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$
$$A \cdot \tilde{x} = b$$

$proy_{Col A}(b) =$ —

Solución tipo: $y = 1 + 3x$

Para columnas linealmente independientes.

$\boxed{A\tilde{x} = proy_{Col A}(b)}$  $b - Ax$

$\langle a_i, b - A\tilde{x} \rangle = 0$ $\quad$ $a_i^t(b - A\tilde{x}) = 0$
$i = 1, \ldots, n$ $\quad$ ↳ el conjunto de todos

$\boxed{A^tA\tilde{x} = A^tb}$ $\quad$ $A^t(b - A\tilde{x}) = 0$; $A^tb - A^tA\tilde{x} = 0$

Ejem: $A^tA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 14 \end{pmatrix}$ $\quad$ $A^tA\,\tilde{x} = A^tb$

$A^tb = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 22 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 22 \end{pmatrix}$ $\quad$ $a = 1$, $b = 4/3$ $\quad$ $\boxed{y = 1 + \frac{4}{3}x}$

$\tilde{x} = (A^tA)^{-1}A^tb = \begin{pmatrix} 1 \\ 4/3 \end{pmatrix}$

- $\boxed{\text{Residuos} = \|b - A\tilde{x}\|} = \|A\tilde{x} - b\|$

Si es compatible, directamente $Ax = b$; $x = A^{-1}b$

Si es incompatible, por mínimos cuadrados $A\tilde{x} = b$, $\tilde{x} = A^+b$

Ejem: $b - A\tilde{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 1/3 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\|b - A\tilde{x}\| = \boxed{\sqrt{(-\frac{1}{3})^2 + (\frac{1}{3})^2 + (-1)^2} = 3\sqrt{11}}$

- Matriz pseudoinversa (A^+)

Se define como $\boxed{A^+ = (A^tA)^{-1}A^t}$ cuando las columnas de la matriz son linealmente independientes

Si $A \in \mathbb{R}^{p \times n}$ $\quad$ $A^+ \in \mathbb{R}^{n \times p}$ // $AA^+b = proy_{Col A}(b)$

AA^+ = matriz de proyección

- Descomposición en Valores Singulares

$A \in \mathbb{R}^{n\times m}$

$A^tA \in \mathbb{R}^{m\times m}$ ← Simetrica, por tanto diagonalizable ortogonalmente

$rg(A) = rg(A^tA)$

$Nul(A) = Nul(A^tA)$

Ejem: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $A^tA = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$rg(A) = 2 = rg(A^tA)$ $Nul(A) = 0 = Nul(A^tA)$

Sean $v_1, \dots, v_m$ los autovectores de A^tA $0 < \lambda_i$

Sean $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ los autovalores de A^tA (Distintos de 0)

La norma de un autovectores: $\boxed{\|Av_i\| = \lambda \|v_i\|^2 = \sigma_i \|v_i\|}$ mediante A

- Valor singular (σ_i), las raices cuadradas de los autovalores. $\boxed{+\sqrt{\lambda_i} = \sigma_i}$

$\|Av_i\| = \sigma_i \|v_i\|$ y si es ortogonal $\|Av_i\| = \sigma_i$ $Av_i = \dfrac{u_i}{\sigma_i}$

1° Hallar autovalores de A^tA ($\det(A^tA - \lambda I)$)

2° Hallar autovectores de A^tA ($V(3) = \det(A^tA - \lambda_i I)$) y normalizarlos, forma V

3° Av_i que formaran las columnas de U. ← v_i normalizar ($Av_i = u_i$) y u_i lo normalizamos

4° Los valores singulares en diagonal y con dimension igual a A forman Σ $\left(\begin{array}{c|c} D & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$ ← Dimensión igual al rango de A

5° $AV = U\Sigma$; $\boxed{A = U\Sigma V^t}$ $\boxed{A^+ = V\Sigma^+ U^t}$ $\Sigma^+ = \left(\begin{array}{c|c} D^{-1} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$

$proy_S(b) = AA^+b = QQ^tb$
S ← se

$A = Q \cdot R$ (ortn, transp) 1° Q por Gram-Smidt ortonormo
2° $R = Q^tA$ Es triangular superior.

$proy_W(x) = \dfrac{\langle x, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle}v_1 + \dfrac{\langle x, v_2\rangle}{\langle v_2, v_2\rangle}v_2 + \dfrac{\langle x, v_3\rangle}{\langle v_3, v_3\rangle}v_3$ ← Creo que son sumas

$W = \{v_1, v_2, v_3\}$ ← Ortogonalizados por Gram-Smidt ← Hallar un vector ortogonal a otros

$\begin{array}{ccc|c} a & b & c & \\ x_{11} & x_{12} & x_{13} & 0 \\ x_{21} & x_{12} & x_{23} & 0 \end{array}$ Sol → (a, b, c)

Autoadjunta $\langle T(u), w\rangle = \langle u, T^*(w)\rangle$ ← adjunta
↳ simetrica

Una transformación proyeccion ortogonal tiene una matriz asociada idempotente y simetrica, verifica:
$T(T(x)) = T(x) \leadsto \lambda^2 = \lambda$ $\lambda \in (0,1)$

Matriz metrica $G = \begin{pmatrix} \langle v_1, v_1\rangle & \langle v_1, v_2\rangle & \dots \\ \langle v_2, v_1\rangle & \ddots & \end{pmatrix}$ Los productos de los vectores, avanzando en fila y columna

simetrica y cuadrada

↳ $\langle v_1, v_2\rangle = v_1^t G v_2$

T_{BB_0} Los vectores de B_0 en función de B

T_{B_0B} Directa, los de B en función de la canónica

// Pasar de la base B a B_0 T_{BB_0}

No diagonalizable → Defectiva.

Ortogonalidad + fuerte que independencia lineal ↓ lo son l.i

Matriz giro $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

Fijarse si es simetrica y reales, para ortogonalmente diagonalizable y comprovar autovectores (sino rellenar)

Transformación ortogonal → $\langle u, v\rangle = \langle T(u), T(v)\rangle$
= Isometria A_T ortogonal $\|T(u)\| = \|u\|$

No altera la longitud y angulo (simetrico) del vector