uc3m | Universidad Carlos III de Madrid

Grado en Ingeniería Informática
2019-2020

Apuntes

Cálculo diferencial aplicado

Jorge Rodríguez Fraile[1]

[1] Universidad: 100405951@alumnos.uc3m.es | Personal: jrf1616@gmail.com

ÍNDICE GENERAL

Parte I

Teoría

Tema 1: Ecuaciones diferenciales ordinarias de 1^{er} orden.

Si tengo una ecuación con una incognita, tendrá una sola solución, aunque las tecnicas matemáticas arrojen varias, solo nos servirá una. $x=3 \to x^2=9$ $x=3$ y $\cancel{-3}$

¿Qué es una Ecuación Diferencial? Es una ecuación en la que aparece la función incognita y sus derivadas.

Ejem: $y=y(x)$ es la función incognita. $y: A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to y(x)$ $\qquad \frac{dy(x)}{dx}=x$

x es la variable independiente.

Notación, distintas maneras de escribir la misma ecuación:

1) $\frac{dy(x)}{dx}=x$ Completa
2) $\frac{dy}{dx}=x$ Sabemos $y=y(x)$
3) $y'(x)=x$ Economia del lenguaje
4) $y'=x$ Sabemos $y=y(x)$

Solución: $\int \frac{dy(x)}{dx}dx = \int x\,dx$; $\boxed{y(x)=\frac{x^2}{2}+C}$

Problemas de valor inicial:

$\begin{cases} \frac{dy(x)}{dx}=x & \text{Ec. dif} \\ y(0)=7 & \text{Dato inicial} \end{cases}$ $\quad y(x)=\frac{x^2}{2}+C$; $y(0)=\frac{0}{2}+C=7$; $C=7$ $\quad \boxed{y(x)=\frac{x^2}{2}+7}$

Ejem 2: Resolver $\frac{dy(x)}{dx}=y(x) \leftrightarrow \frac{dy}{dx}=y$

Como entra en juego $y(x)$, se resuelve con metodos de CDA, sinó sabemos.

$\frac{dy}{dx}=y$; $\xrightarrow{\text{Separación de Variables (las y a la izq)}} \frac{dy}{y}=dx \xrightarrow{\int} \int\frac{dy}{y}=\int dx$

$\ln(|y|) \overset{\text{indep+ reag}}{=} x+C$ (cte y agrupa ambas C_1+C_2) $\xrightarrow{e^x} |y| = \underset{\text{siempre +}}{e^{x+C}}$; $\boxed{y=e^{x+C}}$

$\ln(|y|)=x+\ln(k)$ ($k>0$ y cte) $\xrightarrow{e^x} |y|=e^{x+\ln(k)}$; $\boxed{y=e^x \cdot k}$

Comprobación: $\frac{ke^x}{dx}=ke^x$; $1ke^x=ke^x$

Tipos de E.D:

1) $3\frac{d^2y}{dx^2}+\text{Sen}(x)\cdot\frac{dy}{dx}+y^5=x^3+3x^2+2$ Ec. dif. de 2° orden, no lineal, ordinaria.

$y''(x)$ 2° orden maxima derivada.

no lineal (no es una recta) → la función incognita o sus derivadas estan elevadas a más de 1

Ordinaria: Solo depende de una incognita, x

$y=y(x)$

2) $y^{(IV} - \text{sen}^5(x) \cdot y'' - 3y' + x^3 y + e^x = 0$ Ec. Dif. ordinaria de 4º orden, lineal.

$\frac{d^{4''}y}{dx^4}$ 4º orden
$y = y(x)$

Ordinaria: Solo depende de x
Lineal: Toda y o su derivada es de grado 1. (y^1)

3) $y = y(x,t)$; $\frac{\partial y}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,t) + \frac{\text{sen}(x)}{1+t}$ Ec. dif. en derivadas parciales no ordinaria, de 2º orden, lineal

depende de x,y en derivadas parciales

2º orden Lineal: De grado 1.

13/9/19

Ecuaciones Diferenciales de 1er orden (EDO 1er ord. lin.)

Forma: $y' + p(x)y = g(x)$

$y = y(x)$ Función incognita
x Variable independiente.
$p(x), g(x)$ Funciones continuas y conocidas (nos las dan)

Buscamos una función $\mu(x)$, llamada Factor integrante, que cumpla la siguiente propiedad:

Al multiplicarla: $\mu(x)y' + \mu(x)p(x)y = \mu(x)g(x) \xrightarrow{\text{Colapse}} \frac{d}{dx}(\mu(x)y) = \mu(x)g(x)$

A partir de eso integrando obtenemos: $\int \frac{d}{dx}(y\mu(x))dx = \int \mu(x)g(x)dx + k$;

$y\mu(x) = \int \mu(x)g(x)dx + k$; $\boxed{y(x) = \frac{1}{\mu(x)}\int \mu(x)g(x)dx + \frac{k}{\mu(x)} \quad \mu(x) \neq 0,\ k \in \mathbb{R} \text{ cte}}$

1º Multiplicar. $\mu(x)$ 2º Colapsar $\frac{d}{dx}(\ )$ 3º ~~Derivar~~ Integrar $\int$ 4º Despejar $y(x)$

Localizar $\mu(x)$: $\boxed{\mu(x) = e^{\int p(x)dx}}$

$\mu(x)y' + \mu(x)p(x)y = \frac{d}{dx}(\mu(x)y)$; $\mu(x)y' + \mu(x)p(x)y = \mu'(x)y + \mu(x)y'$

$\mu(x)p(x) = \mu'(x)$; $\mu(x)p(x) = \frac{d\mu}{dx}$; $\frac{d\mu}{\mu} = p(x)dx$; $\int \frac{d\mu}{\mu} = \int p(x)dx + k$;

$\ln(\mu(x)) = \int p(x)dx + k^{\to 0}$ Como solo necesitamos una función, cogemos la de $k=0$

Siempre $\mu(x) > 0$

$e^x \to \mu(x) = e^{\int p(x)dx}$

Comprobar: $\underbrace{y'+y\,p(x)}_{\text{La hallada}} = g(x)$

+ Derivamos la $y(x) \to y'$
Multiplicamos $y(x)$ y $p(x) \to y\,p(x)$

Debe dar $g(x) \longrightarrow g(x)$

EDOS de Primer orden:

$y' = f(x,y)$ Forma explicita de la ecuación: Se puede separar y' del resto.

$y' = xy \quad y' = \frac{x+y}{1+x^2} \quad y' = x\,\text{sen}\,y \quad y' = 3y + e^x$

$\text{Sen}(yy')e^{xy'} - x^2 = 0$ Forma implicita de la ecuación: No podemos separar y'.

Tipo 1: $y' = f(x)$ $\int y'dx = \int f(x)\,dx$; $y = \int f(x)dx$

Tipo 2: $y' + p(x)y = g(x)$ Con $\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$, multiplicandolo, colapsando $\frac{d}{dx}(y\mu(x))$ e integrando.

Tipo 3: EDO variables separables. No lineal.

Forma: $y' = \frac{M(x)}{N(y)}$ o $y' = \frac{m(y)}{n(x)}$ Las variables estan separadas perfectamente las x's de las y's

Cambiar la notación.

Resolucion: $\frac{dy}{dx} = \frac{M(x)}{N(y)} \xrightarrow{\text{variables separables}}$; $N(y)\,dy = M(x)\,dx$; $\int N(y)dy = \int M(x)\,dx + k$

$\frac{dy}{dx} = \frac{m(y)}{n(x)}$; $\frac{dy}{m(y)} = \frac{dx}{n(x)}$; $\int \frac{dy}{m(y)} = \int \frac{dx}{n(x)} + k$ Solución implicita.

Apesar de que no podemos hallar $y(x)$ de forma explicita, vamos a poder trabajar con esta ecuacion gracias a un cambio de notacion. $y \to y(x)$

Comprobación: Derivamos toda la expresión.

Tipo 4: EDO Exactas.

Una ecuación de la forma $M(x,y) + N(x,y)\,y' = 0$ se dice que es exacta si existe una función $F(x,y)$ tal que:

$$\begin{cases} 1) \ \frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y) \\ 2) \ \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y) \end{cases}$$

Toda ED exacta tiene por solucion: $F(x,y) = k$ (cte)

1° Saber si es exacta $\to \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \iff$ es exacta

2° Calcular $F(x,y)$ a partir de 1) y 2), cogemos la más sencilla e integramos.

$F(x,y) = \int M(x,y)\,dx + g(y)$ Al ser derivadas parciales, debe depender de la variable contraria a la integral

3° Hallar el valor de $g(y)$, utilizamos la otra ecuacion (1) o 2)) con la $F(x,y)$ hallada y despejamos. Si nos queda $g(y) = C$ (cte) le damos un valor (0) para tener una sola $F(x,y)$

4° Solución: $F(x,y) = k$ $k \in \mathbb{R}$ (cte)

Comprobacion: Derivar la solución y tiene que coincidir con la original.

Ojo al derivar con x e y, dejar y' $\quad e^{xy} = (x'y + y'x)e^{xy} = ye^{xy} + xy'e^{xy}$

$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin(x)$

$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arccos(x)$

$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan(x)$ $\quad \int \frac{1}{x(x+1)}dx = \int \frac{A}{x}dx + \int \frac{B}{x+1}dx$

$x\sqrt{xy} = \sqrt{x^2 y}$

$x(y)^2 = (\sqrt{x}y)^2$

$x = 0$
$x = -1$

$1 = A(x+1) + B(x)$

Ecuaciones homogeneas.

Forma: $y' = F\left(\frac{y}{x}\right)$ ó $y' = G\left(\frac{x}{y}\right)$ Funciones cuya variable es $\frac{x}{y}$ o $\frac{y}{x}$

$u = y/x$; $y = ux$; $y' = u'x + u$ $\quad u = u(x)$ Es la nueva variable dependiente.

$y' = u'x + u$ Es el cambio de variable dependiente, que transforma la ED en una ED de variables separables.

$y' = F(y/x)$; $y' = u'x + u \Rightarrow F(u) = u'x + u$; $\frac{x\,du}{dx} + u = F(u)$

ED de variables separables.

$\frac{du}{F(u)-u} = \frac{dx}{x} \xrightarrow{\text{Integrar}} \int \frac{du}{F(u)-u} = \int \frac{dx}{x} + k$ ... Acabar la ED de V. S.

puede ser $\ln(k)$ para facilitar operar

Al final se deshace el cambio de variable $u = y/x$ ó $u = x/y$

Comprobación: Derivar la expresión final, pero intentando facilitar los calculos y no dejar k, despejarla en un paso anterior y sustituir

1/10/19

Tema 2: Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de 2º orden.

2ª derivada.

Motivación: Modelo Físico.

Tipo $y'' = k$ ó $H(x)$: Integrar dos veces ambos lados. Aparecen 2 ctes independientes.

EDO 2º Orden: $y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x)$ $\quad y = y(x)$. $p(x)$, $g(x)$ y $q(x)$ func. conocidas (cont) x variable indep.

$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x)$ Si $g(x) \neq 0$ La ecuación se llamará No homogenea.

$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ Si $g(x) = 0$ Homogenea

$y'' - My' + Ny = g(x)$ Si $p(x)$ y $q(x)$ son constantes ($g(x) \neq 0$) No homogenea con coeficientes constantes.

$y'' + My' + Ny = 0$ Si $p(x)$ y $q(x)$ son constantes e $g(x) = 0$ Homogenea con coeficientes constantes

Propiedad: Principio de superposición.

Dada la EDO 2º Orden homogenea: $y'' + p(x)y' + qy = 0$ (*)

Si $y_1 = y_1(x)$ e $y_2 = y_2(x)$ son soluciones de (*), entonces cualquier combinación lineal, $u(x) = \alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) / \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ también es solución de (*)

A efectos practicos el conjunto de soluciones de una EDO lineal homogenea es un espacio vectorial de dimensión 2. Por lo que hay dos ecuaciones lineales independientes y el resto se obtiene por combinación lineal.

$\hookrightarrow B = \{y_1(x), y_2(x)\}$

Para hallar si son Linealmente Independientes se tiene en cuenta su Wronskiano.

Dadas las funciones $y=y_1(x)$, $y=y_2(x)$ su Wronskiano es:

$W(y,y)\neq 0$ LI

$W(y,y)=0$ LD

$$W(y_1(x),y_2(x))=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_1'(x) \\ y_2(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

$y_1(x), y_2(x)$ son L.I $\iff W(y_1(x),y_2(x))\neq 0$

* Hallar las soluciones de $ay''+by'+cy=0$ / $a,b,c\in\mathbb{R}$ ctes y $a\neq 0$ EDO 2°ord. coef. ctes

Proponemos: $y=e^{\lambda x}$ / $\lambda\in\mathbb{R}$ $\quad y'=\lambda e^{\lambda x}$ $\quad y''=\lambda^2 e^{\lambda x}$

Sustituimos: $a\lambda^2 e^{\lambda x}+b\lambda e^{\lambda x}+ce^{\lambda x}=0$

$e^{\lambda x}(a\lambda^2+b\lambda+c)=0$; $\underset{\text{Nunca }0}{e^{\lambda x}\neq 0}$ $\quad a\lambda^2+b\lambda+c=0$ Ec. 2°grado.

Resolver ecuación 2° grado. $\lambda=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2\cdot a}=<$ $\quad e^{x\lambda_1}$ y $e^{x\lambda_2}$ son solución.

Hacer el Wronskiano de las soluciones para ver si son linealmente independientes.

Si son L.I, hacer una base con ambas soluciones: $B=\{y_1(x),y_2(x)\}$

8/10/19

Caso 1: $b^2-4ac>0$ Dos soluciones reales y distintas.

$\lambda_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ $\neq$ $\lambda_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$y_1(x)=e^{\lambda_1 x}$ $\quad y_2(x)=e^{\lambda_2 x}$ Siempre linealmente independientes.

$y(x)=C_1 e^{\lambda_1 x}+C_2 e^{\lambda_2 x}$ $\quad C_1,C_2\in\mathbb{R}$

Caso 2: $b^2-4ac=0$ Dos soluciones reales iguales.

$\frac{-b}{2a}=\lambda_1$ $=$ $\frac{-b}{2a}=\lambda_2$

$y_1(x)=e^{\lambda_1 x}$ $\quad y_2(x)=xe^{\lambda_1 x}$ Son siempre linealmen independientes.

$y(x)=C_1 e^{\lambda_1 x}+C_2 xe^{\lambda_1 x}$ $\quad C_1,C_2\in\mathbb{R}$

Caso 3: $b^2-4ac<0$ Dos soluciones complejas conjugadas.

$\lambda_1=\frac{-b}{2a}+i\frac{\sqrt{4a-b^2}}{2a}$ $\quad \frac{-b}{2a}-i\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$

$y_1(x)=e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ $\quad y_2=e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x)$ $\quad \alpha=\frac{-b}{2a}$ $\quad \beta=\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$

$$y(x)=C_1 e^{\frac{-b}{2a}x}\cos\left(\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}x\right)+C_2 e^{\frac{-b}{2a}x}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}x\right) \quad C_1,C_2\in\mathbb{R}$$

* EDO 2° orden lineales no homogeneas de coeficientes constantes:

$ay''+by'+cy=g(x)$ / $\underset{\neq 0}{a},b,c\in\mathbb{R}$ y $g(x)\neq 0$ Todos conocidos.

$y=y(x)$ Incognita $\quad x$ variable independiente.

La solución general siempre es la suma de $y_h(x)$ e $y_p(x)$: $\boxed{y(x)=y_h(x)+y_p(x)}$

donde $y_h(x)$ es la solución general homogenea.

$y_p(x)$ es cualquier solución concreta de $ay''+by'+cy=g(x)$

Como obtener $y_p(x)$: Calcular primero $y_h(x)$ para ver si aparece en $g(x)$. $\mathbb{B}$

Metodo 1: Coeficientes indeterminados.

Hay que mirar la forma de $g(x)$, el metodo es aplicable si es de la forma:

Si hay suma o resta de dos terminos en $g(x)$ de la forma → transformamos cada termino y mantenemos la +/-

$$g(x) = e^{\alpha x}(a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n)\begin{Bmatrix} \operatorname{sen}(\beta x) \\ o \\ \cos(\beta x) \end{Bmatrix}$$

no vale $\operatorname{sen}^2 x$ o $\cos$

- Exponencial
- Polinomio
- Trigonometrica.

$\beta x \sim$ No otra forma

Pueden aparecer todos, o solo uno o dos.

Si sale sen o cos hay que poner la suma de ambos como 2 terminos con la exponencial y polinomio con sus $A_1, A_2 \dots$ y sus $B_1, B_2 \dots$

$y_p = e^{\alpha x} A_0 \operatorname{sen}(x) + e^{\alpha x} B_0 \cos(x)$

Caso 1: La solución será de la forma de $g(x)$, pero con la ecuación con coeficientes indeterminados y del mismo grado que $g(x)$. Ojo con sen y cos $\Rightarrow g(x) = e^{2x}\operatorname{sen}(x) \quad y_p(x) = e^{2x}A_0\operatorname{sen}(x) + e^{2x}B_0\cos(x)$

Las soluciones de $\mathbb{B}$ $y_p(x)$ no aparecen en $g(x)$

Ejem: $g(x) = 2\operatorname{sen}(x)$

$\mathbb{B} = \{e^{-x}, e^{4x}\}$

Ahora la imponemos como solución, la derivamos para hacerla encajar en la ecuación original y hallar los coeficientes indeterminados.

$a y_p''(x) + b y_p'(x) + c y_p(x) = g(x) \Rightarrow$ Sacamos $A_0, A_1 \dots$ y/o $B_0, B_1 \dots$ de la $y_p(x)$

Proceso terminado, ahora hay que sumar la $y_p(x)$ con $y_h(x)$.

Caso 2: Si las soluciones del conjunto fundamental aparecen en $g(x)$

$\mathbb{B}$ base homogenea

Pasa de ser $y_p(x)$ a ser $\boxed{Y_p(x) = x^s y_p(x)}$ / $S = 1$ si se repite 1 y $S = 2$ si se repiten 2.

o hay duda

Ejem: $\mathbb{B} = \{e^{-x}, e^{4x}\} \quad g(x) = e^{-x} \Rightarrow Y = x^1 y_p(x) = x A e^{-x}$

Despues la imponemos como solución.

Metodo 2: Variación de parametros.

Solo en variación de parametros

Tiene que $y''(x)$ ir sola, hay que normalizar la ecuación si no es así. $4y'' + 8y' + 16y = 32 \quad \cdot \frac{1}{4} \Leftrightarrow y'' + 2y' + 3y = 8$

Sabiendo $y_h(x)$. $y_h = C_1 y_1 + C_2 y_2 \; / \; C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

Una solución particular es de la forma $\boxed{y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2}$ donde $u_1 = u_1(x)$ e $u_2 = u_2(x)$ son dos ecuaciones que hallar.

As en la manga ⇒

$$\boxed{\left.\begin{aligned} u_1' y_1 + u_2' y_2 &= 0 \\ u_1' y_1' + u_2' y_2' &= g(x) \end{aligned}\right\}}\ \text{Por Cramer} \Rightarrow u_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ g(x) & y_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} \qquad u_2' = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & g(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}}$$

Una vez hallados u_1' e u_2', los integramos y sustituimos en $y_p(x)$.

Los sumamos con $y_h(x)$

Ej 1)

PVI $\begin{cases} y''+y=\operatorname{sen}(2t) \\ y(0)=0,\ y'(0)=1 \end{cases}$ $\mathcal{L}\{y(t)\}=F(s)$

$\mathcal{L}\{y''+y\}=\mathcal{L}\{\operatorname{sen}(2t)\}$

$\mathcal{L}\{y''\}+F(s)=\frac{2}{s^2+4}$; $s^2\mathcal{L}\{y\}-s\,y(0)-y'(0)+F(s)=\frac{2}{s^2+4}$;

$s^2F(s)+F(s)-1=\frac{2}{s^2+4}$; $F(s)(s^2+1)=\frac{2+s^2+4}{s^2+4}$; $F(s)=\frac{s^2+6}{(s^2+4)(s^2+1)}$

$(s^2+4)(s^2+1)=0$ Hallar 0's del denominador.

0' $s^2+4=0\to s=\pm i2$ Raíz compleja simple

$s^2+1=0\to s=\pm i$ RCS

Al haber RCS, será igual a un polinomio de grado 1 menos del denominador y en denominador las ecuaciones por separado.

$$\frac{s^2+6}{(s^2+4)(x^2+1)}=\frac{As+B}{(s^2+4)}+\frac{Cs+D}{s^2+1}=\frac{(As+B)(s^2+1)+(Cs+D)(s^2+4)}{(s^2+4)(s+1)}$$

$s^2+6=(As+B)(s^2+1)+(Cs+D)(s^2+4)$

$s^2+6=As^3+As+Bs^2+B+Cs^3+4Cs+Ds^2+4D$

$s^2+6=(A+C)s^3+(B+D)s^2+(A+C\cdot 4)s+B+4D$

$A+C=0$; $A=-C$; $A=0$ $A+4C=0$; $-C+4C=0$; $C=0$

$B+D=1$; $B=1-D$ $B+4D=6$; $1-D+4D=6$

$B=1-5/3=\frac{-2}{3}$ $3D=5$; $D=5/3$

$\mathcal{L}\{y(t)\}=F(s)=\frac{-2/3}{s^2+4}+\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{s^2+1}$

$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-2}{3}\cdot\frac{1}{s^2+4}+\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{s^2+1}\right\}=\frac{-1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+2^2}\right\}+\frac{5}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1^2}\right\}$

$\mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{L}\{y(t)\}\}=$

$$\boxed{\frac{-1}{3}(\operatorname{sen}(2t))+\frac{5}{3}(\operatorname{sen}(t))=y(t)\ \text{Solución}}$$

Ej 2)

$$\text{PVI}\begin{cases} y''-2y'+2y=\cos(t) \\ y(0)=1,\ y'(0)=0 \end{cases} \qquad \mathcal{L}\{y(t)\}=F(s)$$

s^2+ms+n

$\underbrace{s^2+ms+\left(\frac{m}{s}\right)^2}-\left(\frac{m}{s}\right)^2+n$

$\left(s+\frac{m}{s}\right)^2+n-\left(\frac{m}{2}\right)^2$

$$\mathcal{L}\{y''\}-2\mathcal{L}\{y'\}+2F(s)=\mathcal{L}\{\cos(t)\}$$

$$s^2F(s)-s\,y(0)-y'(0)-2\left(F(s)\cdot s-y(0)\right)+2F(s)=\frac{s}{s^2+1}$$

$$s^2F(s)-s-0-2F(s)s+2F(s)+2=\frac{s}{s^2+1}$$

$$F(s)\left(s^2-2s+2\right)-s+2=\frac{s}{s^2+1}\ ;\ F(s)=\frac{s+s^3+s-2s^2-2}{(s^2+1)(s^2-2s+2)}=\frac{s^3-2s^2+2s-2}{(s^2+1)(s^2-2s+2)}$$

$(s^2+1)(s^2-2s+2)=0$

$s^2+1=0 \rightarrow s=\pm i$ RCS

0

$s^2-2s+2=0 \rightarrow$ RCS

$$F(s)=\frac{s^3-2s^2+2s-2}{(s^2+1)(s^2-2s+2)}=\frac{As+B}{s^2+1}+\frac{Cs+D}{s^2-2s+2}=\frac{(As+B)(s^2-2s+2)+(Cs+D)(s^2+1)}{(s^2+1)(s^2-2s+2)}$$

$$s^3-2s^2+2s-2=As^3-2As^2+2As+Bs^2-2Bs+2B+Cs^3+Cs+Ds^2+D$$

$$s^3-2s^2+2s-2=s^3(A+C)+(-2A+B+D)s^2+(2A-2B+C)s+2B+D$$

$1=A+C$; $A=1-C$; $A=1-\frac{4}{5}=\boxed{\frac{1}{5}}$ $\quad \frac{8}{5}-\frac{10}{5}=2$

$-2=-2A+B+D$; $\cancel{-2}=\cancel{-2}+2C+B-2-2B$; $B=2C-2=\boxed{-\frac{2}{5}}$

$2=2A-2B+C$; $C=\cancel{2}-2(1-C)+2(2C-2)$; $C=\boxed{\frac{4}{5}}$ $\quad \cancel{2}+2C \quad 4C-4$

$-2=2B+D$; $D=-2-2B$; $D=-\frac{4}{5}+\frac{10}{5}=\boxed{-\frac{6}{5}}$

$A=\frac{1}{5}$

$B=-\frac{2}{5}$

$C=\frac{4}{5}$

$D=-\frac{6}{5}$

$$F(s)=\frac{\frac{1}{5}s+-\frac{2}{5}}{s^2+1}+\frac{\frac{4}{5}s+-\frac{6}{5}}{s^2-2s+2}$$

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{5}s-\frac{2}{5}}{s^2+1}\right\}+\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{4}{5}s-\frac{6}{5}}{s^2-2s+2}\right\}$$

$\frac{6}{5}\cdot\frac{5}{4}=\frac{30}{20}=\frac{3}{2}$

$$\frac{1}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\}-\frac{2}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}=\frac{1}{5}\cos(1t)-\frac{2}{5}\,\text{sen}(1t)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{4}{5}s-\frac{6}{5}}{s^2-2s+2}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{4}{5}s-\frac{6}{5}}{(s-1)^2+1^2}\right\}=\frac{4}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-\frac{6}{4}}{(s-1)^2+1^2}\right\}=\frac{4}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-1+1+\frac{6}{4}}{(s-1)^2+1^2}\right\}=$$

Compl. Cuadrados $\Rightarrow$ $s^2-2s+2 \Rightarrow s^2-2s+\left(\frac{2}{2}\right)^2-\left(\frac{2}{2}\right)^2+2$; $s^2-2s+1+(2-1)$; $(s-1)^2+1^2$ $\quad e^t\,\text{sen}\,t$

$$=\frac{4}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-1}{(s-1)^2+1}\right\}+\frac{4}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{6}{4}+1}{(s-1)^2+1}\right\}=\frac{4}{5}e^t\cos(t)+\frac{4}{5}\left(1-\frac{6}{4}\right)\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2+1^2}\right\}$$

$$\boxed{y(t)=\left(\frac{1}{5}+\frac{4\cdot e^t}{5}\right)\cos(t)+\left(\frac{2}{5}-\frac{2e^t}{5}\right)\text{sen}(t)}$$

CDATU 26/10/19

$e^{\infty}=\infty$ $e^{0}=1$
$e^{-\infty}=0$

Tema 3: Transformada de Laplace.

$$\text{EDO} \; (y' \;\; y'') \;\underset{\xrightarrow[TL]{\mathcal{L}}}{\xleftarrow{\mathcal{L}^{-1}}}\; \text{Ec. Algebraicas} \; (Y(s)=F(s)=\mathcal{L})$$

Pasar la ecuación a un lugar en el que tengo más tecnicas de resolución, el problema es traer de vuelta la solución.

Def: $f:[0,\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$
$t\longrightarrow f(t)$

Una ecuación que satisface "ciertas condiciones de regularidad"

$$\boxed{\mathcal{L}\{f(t)\}=F(s)=\int_{t=0}^{t=\infty}e^{-st}f(t)\,dt} = \lim_{A\to\infty}\int_0^A e^{-st}f(t)\,dt = \begin{cases} s>0 \\ s<0 \end{cases}$$

Elegimos el valor de s que nos interese.

La TL es lineal (al ser una integral):

$$\boxed{\mathcal{L}\{y'(t)\}=s\mathcal{L}\{y(t)\}-y(0)} \qquad \boxed{\mathcal{L}\{y''(t)\}=s^2\mathcal{L}\{y(t)\}-sy(0)-y'(0)}$$

$$\boxed{\mathcal{L}\{y^{(n}\}=s^n\mathcal{L}\{y(t)\}-s^{n-1}y(0)-s^{n-2}y'(0)-\dots-y^{(n-1}}$$

Ejem: $\frac{d^2y}{dx^2}$

$$(PVI)\begin{cases} y''-4y'+4y=0 \\ y(0)=1 \\ y'(0)=1 \end{cases} \qquad \mathcal{L}\{f(t)\}=F(s)$$

$\mathcal{L}\{y''-4y'+4y\}=\mathcal{L}\{0\}$ Al ser lineal los podemos separar.

Quitar el coef. de y'' y dividir el resto

1º Escribir la ecuación en TL y sustituir términos:

$$\mathcal{L}\{y''\}-4\mathcal{L}\{y'\}+4\mathcal{L}\{y\}=\mathcal{L}\{0\} \qquad \int_0 e^{-st}\,0\,dt=0$$

$$(s^2\mathcal{L}\{y\}-sy(0)-y'(0))-4(s\mathcal{L}\{y\}-y(0))+4\mathcal{L}\{y\}=\mathcal{L}\{0\} \qquad \mathcal{L}\{y\}=F(s)$$

2º Resolver/Simplificar ecuación:

$$s^2F(s)-s-1-4sF(s)-4+4F(s)=0;\; \underbrace{F(s)(s^2-4s+4)=s-3}_{\text{Siempre aparece la ec. característica.}};\; F(s)=\frac{s-3}{s^2-4s+4}$$

$s=\begin{cases}2\\2\end{cases}$

3º Simplificar para encontrar en la tabla:

$$\frac{s-3}{s^2-4s+4}=\frac{A}{(s-2)^2}+\frac{B(s-2)}{s-2} \qquad A=-1 \quad B=1$$

Derivar, para hallar A si sust. [illegible]

Mirar tabla. $\left(\frac{1}{s-a}\Rightarrow e^{at} \;/\; \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}\Rightarrow t^n e^{at}\right)$

4º Buscar en la tabla:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-3}{s^2-4s+4}\right\}=-\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-2)^2}\right\}+\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\}=e^{2t}-(te^{2t})=\boxed{e^{2t}(1-t)}$$

30/10/19

Principales transformaciones:

$$\boxed{\mathcal{L}\{t^n\}=\frac{n!}{s^{n+1}}} \quad s>0,\; n=1,2,3\dots$$

$$\boxed{\mathcal{L}\{e^{at}\}=\frac{1}{s-a}} \quad s>a$$

$$\boxed{\mathcal{L}\{\operatorname{sen}(at)\}=\frac{a}{s^2+a^2}} \quad s>a$$

$$\boxed{\mathcal{L}\{\cos(at)\}=\frac{s}{s^2+a^2}} \quad s>0$$

$$\boxed{\mathcal{L}\{e^{at}\cos(bt)\}=\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}} \quad s>a$$

$$\boxed{\mathcal{L}\{e^{at}\operatorname{sen}(bt)\}=\frac{b}{(s-a)^2+b^2}} \quad s>a$$

$$\boxed{\mathcal{L}\{t^n e^{at}\}=\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}} \quad s>a,\; n=1,2,3,\dots$$

Completar Cuadrados

$$* \quad \boxed{s^2+ms+n=\left(s+\left(\frac{m}{2}\right)\right)^2+n-\left(\frac{m}{2}\right)^2} = \underbrace{s^2+ms+\left(\frac{m}{2}\right)^2}_{(s+m/2)^2}\underbrace{-\left(\frac{m}{2}\right)^2+n}_{p}$$

Al sumar y restar, no afecta.

Tema 4: Sistemas de EDOs (Lineales)

Saber Hacerlo

Convertir una ecuación en un sistema de ecuaciones:

$$a(t)\,y'' + b(t)\,y' + c(t)\,y = g(t)$$

$$\begin{cases} X_1(t) = y(t) \xRightarrow{\text{Derivar}} X_1'(t) = y'(t) = X_2(t) \\ X_2(t) = y'(t) \Longrightarrow X_2'(t) = y''(t) = \underbrace{\dfrac{g(t)}{a(t)} - \dfrac{b(t)y'}{a(t)} - \dfrac{c(t)y(t)}{a(t)}}_{\text{Sustituir}} \end{cases}$$

Al ser de orden 2, 2 ecuaciones, si fuese $y''' \Rightarrow X_3(t) = y''(t)$

$$\begin{cases} X_1'(t) = X_2(t) \\ X_2'(t) = -\dfrac{c(t)}{a(t)} X_1(t) - \dfrac{b(t)}{a(t)} X_2(t) + \dfrac{g(t)}{a(t)} \end{cases}$$

$$\vec{X}'(t) = A(t)\,\vec{X}(t) + \vec{B}$$

$$\begin{pmatrix} X_1' \\ X_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{c(t)}{a(t)} & \frac{b(t)}{a(t)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{g(t)}{a(t)} \end{pmatrix}$$

Los sistemas que estudiaremos son los de la forma:

$$\begin{cases} X_1'(t) = a_{11}(t)\,X_1(t) + a_{12}(t)\,X_2(t) + b_1(t) \\ X_2'(t) = a_{21}(t)\,X_1(t) + a_{22}(t)\,X_2(t) + b_2(t) \end{cases} \qquad \boxed{\vec{X}'(t) = A(t)\,\vec{X}(t) + \vec{B}}$$

$$\begin{pmatrix} X_1'(t) \\ X_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \end{pmatrix}$$

Nosotros trabajaremos con sistemas en los que A no dependa de t, y homogeneas.

Sistemas con coeficientes constantes homogeneos. (A y sin $\vec{B}(t)$)

↳ No term. indep.

$$\boxed{\vec{X}'(t) = A\,\vec{X}(t)}$$

Dado el sist. lineal homogeneo $\vec{X}'(t) = A\vec{X}(t)$. Si $\vec{W}_1(t)$ y $\vec{W}_2(t)$ son dos soluciones del sistema $\Rightarrow$ Toda combinación lineal $\boxed{\vec{W}_1(t)\,\alpha + \vec{W}_2(t)\,\beta \;/\; \alpha, \beta \in \mathbb{R}}$ es tambien solución del sistema.

Calcular soluciones sist. lineal homogeneo con coef. constantes.

Proponemos que las soluciones del sistema tienen la forma: $\boxed{\hat{X}(t) = e^{\lambda t}\vec{V} = e^{\lambda t}\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}}$

Los λ son autovalores de A. $\boxed{\overset{\text{Det}}{|A - \lambda I|} = 0}$ Despejar las λ del determinante

El $\vec{V}$ son los vectores propios asociados a A. $\boxed{(A - \lambda I)\vec{V} = 0}$ con λ autovalores.

↳ Coger la mas sencilla

Sol gen: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = C_1 e^{\lambda_1 t}\begin{pmatrix} V_{11} \\ V_{21} \end{pmatrix} + C_2 e^{\lambda_2 t}\begin{pmatrix} V_{21} \\ V_{22} \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x_1 = C_1 e^{\lambda_1 t} V_{11} + C_2 e^{\lambda_2 t} V_{21} \\ x_2 = C_1 e^{\lambda_1 t} V_{12} + C_2 e^{\lambda_2 t} V_{22} \end{cases}$$

Caso raices reales distintas: Hacer normal, hallar autovalores y su correspondiente autovector. Son siempre linealmente independientes, $\vec{X}(t) = e^{\lambda t}\vec{V}_1 C_1 + e^{\lambda t}\vec{V}_2 C_2$

Caso sistema de orden 3 (excepcionales): Hallar las tres raices (con ruffini) y los autovectores de cada una, al elegir el vector ver un menor 2x2 cuyo determinante es distinto de 0 y escribir las (incognitas) de la matriz en función de las dejadas fuera.

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = -3 \neq 0 \qquad \left.\begin{array}{l} -y = -4z \\ 3x + y = +z \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = 4z \\ z = z \end{array} \qquad z\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$3x \quad = -3z\ ; \quad x = -z$$

$$\vec{X}(t) = e^{\lambda t}\vec{V}_{\lambda_1} C_1 + e^{\lambda t}\vec{V}_{\lambda_2} C_2 + e^{\lambda t}\vec{V}_{\lambda_3} C_3$$

Caso autovalores complejos conjugados (2x2)

$|A - \lambda I| = 0 \rightarrow \lambda_1 = \alpha + i\beta \quad \alpha \in \mathbb{R}$; $\lambda_2 = \alpha - i\beta \quad \beta \in \mathbb{R}$. Como una es la conjugada de la otra, hallar el autovector de una sola.

Hacer Euler $e^{\beta i} = \cos(\beta) + i\,\mathrm{sen}(\beta)$ ojo $i \cdot i = -1$

Convertir mi solución ($\vec{w}_1 = e^{(\alpha + i\beta)t}\vec{V}_1$) en 2 terminos separando parte real e imaginaria. $\vec{w} = u(t) + i v(t)$ Ambos terminos son linealmente independientes.

La solución será de la forma: $\vec{X}(t) = C_1 u(t) + C_2 v(t)$. Ojo sin la i

24/11/19

Caso autovalores reales repetidos (2x2): $\lambda_1 = \lambda_2$

Hallar la solucion del autovalor obtenido. $\vec{w}_1(t) = e^{\lambda}\vec{V}_\lambda$

La otra solución es de la forma: $\vec{w}_2(t) = te^{\lambda t}\vec{V}_\lambda + e^{\lambda t}\vec{w}$

Solo 2 ctes
2 terminos
Con $\vec{w}$ y 2 ctes
con la misma

Donde $\vec{w}$ es: $(A - \lambda I)\vec{w} = \vec{V}_\lambda$, coger el vector sin incognita. Ejem: $\begin{pmatrix} x \\ -1-x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\vec{w}$

$$X(t) = C_1 e^{\lambda}\vec{V}_\lambda + C_2\left[te^{\lambda t}\vec{V}_\lambda + e^{\lambda t}\vec{w}\right]$$

Tema 5: Series de Fourier y Separación de variables.

Mundo real $\mathbb{R}^3$ $\longrightarrow$ Ecuación $\mathbb{R}$ $\quad u(x,t)$ (x → Posicion; t → Tiempo.)

Ecuación del calor (Ecuación del modelo 1 Dimensión)

$$\boxed{\frac{du}{dt}(x,t) = \alpha^2 \frac{d^2u}{dx^2}(x,t)}$$

$0 < x < L$

$t > 0$

$\alpha^2 > 0$ Cte. de disipación termica.

Función incognita $u(x,t)$

x: Variable espacial.

t: variable temporal.

Debe ir acompañada de: Ambos reconocidos.

C.I $\quad t = 0 \quad u(x,t) = f(x)$

Datos de frontera (Contorno):

C.C $\quad \begin{array}{l} x = 0 \\ x = L \end{array} \begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u(L,t) = 0 \end{cases}$ Si son 0 ambas, Condiciones de tipo Dirichlet Homogeneas.

EDP: Ecuaciones Diferenciales Parciales

$$u(x,t) = X(x)T(t) \Rightarrow \frac{du(x,t)}{dt} = \alpha^2 \frac{d^2u(x,t)}{dx^2} \Rightarrow X(x)T'(t) = \alpha^2 X''(x)T(t)$$

$0'''$

¿? ⇒ $\frac{1}{X(x)T(t)}$ Mul por $X(x)T(t)$

$$\frac{T'(t)}{\alpha^2 T(t)} = \frac{\cancel{\alpha^2} X''(x)}{\cancel{\alpha^2} X(x)} = -\lambda$$ Cte de separación.

Prob 1: $T'(t) + \alpha^2\lambda T(t) = 0$

Prob 2: $X''(x) + \lambda X(x) = 0$

Buscamos con las cond. de frontera que las soluciones no sean nulas.

Suponemos $\Rightarrow u(x,t) = X(x)T(t) \not\equiv 0$ No identicamente nulo.

EDP $\rightarrow$ $X(x)\,T'(t) = X''(x)\,T'(t)\,\alpha^2$

Buscamos las soluciones no nulas del problema.

Buscamos soluciones no nulas.

Dividimos entre: $X(x)\,T(t)\,\alpha^2$

$$\frac{T'(t)}{\alpha^2 T(t)} = -\lambda = \frac{X''(x)}{X(x)}$$

$-\lambda \Rightarrow$ constante de separación.
Es la manera de relacionar dos variables independientes, una cte y $-\lambda$ por convenio.

Problema 1) $\dfrac{T'(t)}{\alpha^2 T(t)} = -\lambda$; $T'(t) + \alpha^2\lambda T(t) = 0$ EDO 1er orden lineal.

$$\mu(x) = e^{\int \alpha^2 \lambda dt} = e^{\alpha^2 \lambda t} \; ; \quad T(t)\,e^{\alpha^2\lambda t} = C \; ; \quad T(t) = C e^{-\alpha^2 \lambda t}$$

No podemos usa C.I

Problema 2) $\dfrac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$; $X''(x) + \lambda X(x) = 0$ EDO 2° orden lineal homogenea coef. ctes.

$$\begin{cases} u(0,t) = 0 = X(0)T(t) \Rightarrow X(0) = 0 \\ u(L,t) = 0 = X(L)T(t) \Rightarrow X(L) = 0 \end{cases}$$

Es un problema de valores en la frontera (No PVI)

Caso 1) $\lambda \in \mathbb{C}$ Solo da soluciones nulas $\Rightarrow$ No vale.

Caso 2) $\lambda = 0$ No vale

Caso 3) $\lambda < 0$; $\lambda = -a^2$, $a > 0$ No vale.

Caso 4) $\lambda > 0$; $\lambda = a^2$ $a > 0$

$$\begin{cases} X''(x) + a^2 X(x) = 0 \\ X(0) = 0 \\ X(L) = 0 \end{cases} \quad r^2 + a^2 = 0 \; ; \; r = \begin{cases} ia \\ -ia \end{cases} \quad \mathcal{B} = \{\operatorname{sen}(ax), \cos(ax)\}$$

$$X(x) = C_1 \cos(ax) + C_2 \operatorname{sen}(ax)$$

$X(0) = 0 = C_1$; $C_1 = 0$

$X(L) = 0 = C_2 \operatorname{sen}(aL)$; $\operatorname{sen}(aL) = 0$; $aL = n\pi$; $a = \dfrac{n\pi}{L}$

$C_2 \neq 0$ Exijo para $X(x) \neq 0$

$$X_n(x) = C_n \operatorname{sen}\left(x\frac{n\pi}{L}\right) \quad \lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2} \quad n = 1, 2, 3 \ldots$$

$$u_n(x,t) = C_n \operatorname{sen}\left(x\frac{n\pi}{L}\right) \cdot C\, e^{-\alpha^2 \frac{n^2\pi^2}{L^2} t}$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \operatorname{sen}\left(x\frac{n\pi}{L}\right) e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t}$$

CDAP12 29/11/2019

Comprobación:

CI $u(x,t=0)=f(x)$ ✓ Es idéntica al ~~sen~~ por $e^{0}=1$

CC $u(x=0,t)=0$ ✓ Es idéntica al ser $\operatorname{sen}(0)=0$

$u(x=2,t)=0$ ✓ $=2e^{0}\underset{0}{\operatorname{sen}(\pi)}-e^{0}\underset{0}{\operatorname{sen}(2\pi)}+4\underset{0}{\operatorname{sen}(4\pi)}e^{0}$

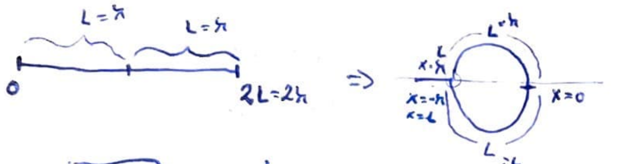
EDP

$$\frac{d\,u(x,t)}{dt}=-2\pi^2e^{-\pi^2t}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)+4\pi^2e^{-4\pi^2t}\operatorname{sen}(\pi x)-64\pi^2e^{-16\pi^2t}\operatorname{sen}(2\pi x)$$

$$4\frac{d^2u(x,t)}{dx^2}=4\frac{d}{dx}\left(\pi e^{-\pi^2t}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)-\pi e^{-4\pi^2t}\cos(\pi x)+8\pi e^{-16\pi^2t}\cos(2\pi x)\right)$$

$$4\frac{du(x,t)}{dx}=4\left(-\frac{\pi^2}{2}e^{-\pi^2t}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)+\underset{4}{\pi^2}e^{-4\pi^2t}\operatorname{sen}(\pi x)+\underset{4}{16}\pi^2e^{-16\pi^2t}\operatorname{sen}(2\pi x)\right)$$

13/12/2019



$\boxed{EDP}$ $\dfrac{du(x,t)}{dt}=\alpha^2\dfrac{d^2u(x,t)}{dx^2}$ si $-\pi<x<\pi$, $t>0$

$\boxed{CI}$ $u(x,t=0)=f(x)$ (conocida) $-\pi<x<\pi$

$\boxed{CC}$ $u(x=-\pi,t)=u(x=\pi,t)$ (a) La misma en ambos bordes pegados.

$\dfrac{\partial u(x=-\pi,t)}{dx}=\dfrac{du(x=\pi,t)}{dx}$ (b)

$u(x,t)=X(x)T(t)\neq0$ Separación de variables

$X(x)T'(t)=\alpha^2X''(x)T(t)$; $\dfrac{T'(t)}{\alpha^2T(t)}=-\lambda=\dfrac{X''(x)}{X(x)}$

P1) $T'(t)+\lambda\alpha^2T(t)=0\Rightarrow\boxed{T(t)=\hat{c}e^{-\lambda\alpha^2t},\ \hat{c}\text{ cte}}$

P2) $X''(x)+\lambda X(x)=0$

(a) $u(x=-\pi,t)=X(-\pi)\cancel{T(t)}=u(x=\pi,t)=X(\pi)\cancel{T(t)}$ Como $T(t)$ es exponencial nunca va a ser 0 por lo que podemos quitarlas.

1º se deriva 2º se sustituye. No al revés.

(b) $\dfrac{\partial u(x=-\pi,t)}{dx}=\dfrac{d}{dx}(X(x)T(t))\Big|_{x=-\pi}=T(t)X'(x)\Big|_{x=-\pi}=\cancel{T(t)}X'(-\pi)$

$\dfrac{du(x=\pi,t)}{dx}=\dfrac{d}{dx}(X(x)T(t))\Big|_{x=\pi}=T(t)X'(x)\Big|_{x=\pi}=\cancel{T(t)}X'(\pi)$

CC $\begin{cases}X(-\pi)=X(\pi)\\X'(\pi)=X(-\pi)\end{cases}$

$T(t) = \hat{C} e^{-\lambda \alpha^2 t} \; / \hat{C}$ cte

P2) $X''(x) + \lambda X(x) = 0$

CC $\begin{cases} X(\pi) = X(-\pi) \\ X'(\pi) = X'(-\pi) \end{cases}$

Casos de λ:

$\lambda \in \mathbb{C}$ Todas las soluciones nulas.

$\lambda = 0 \to X''(x) = 0 \to X(x) = C_1 x + C_2$

$\begin{cases} X(\pi) = X(-\pi) \\ X'(\pi) = X'(-\pi) \end{cases}$ $\quad X'(x) = C_1$

$X(\pi) = C_1\pi + \cancel{C_2} = -C_1\pi + \cancel{C_2} = X(-\pi)$

$\underset{\neq 0}{2} \underset{=0}{C_1} \underset{\neq 0}{\pi} = 0 \; ; \; C_1 = 0$

$X'(\pi) = \underset{=0}{C_1} = \underset{=0}{C_1} = X'(-\pi) \; ; \; C_1 = 0$

Como C_2 no ha tomado parte; imponemos $C_2 \neq 0$

$X(x) = \hat{C}_2 \neq 0$

$\lambda < 0 \; ; \; \lambda = -a^2 \; , \; a > 0$

$X''(x) - a^2 X(x) = 0 \; ; \; r^2 - a^2 = 0 \; ; \; r = \pm a \quad X(x) = C_1 e^{ax} + C_2 e^{-ax}$

$\begin{cases} X(\pi) = X(-\pi) \\ X'(\pi) = X'(-\pi) \end{cases}$ $\quad X'(x) = aC_1 e^{ax} - aC_2 e^{-ax}$

$X(\pi) = C_1 e^{a\pi} + C_2 e^{-a\pi} = C_1 e^{-a\pi} + C_2 e^{a\pi} = X(-\pi)$

$C_2 (\underbrace{e^{a\pi} - e^{-a\pi}}_{\neq 0}) = C_1 (\underbrace{e^{a\pi} - e^{-a\pi}}_{\neq 0}) \; ; \; C_1 = C_2$

$e^{a\pi} = e^{-a\pi} \; ; \; a\pi = -a\pi \; ; \; \underset{\neq 0}{2} \underset{\neq 0}{a} \underset{\neq 0}{\pi} = 0$ No posible.

$X'(\pi) = aC_1 e^{a\pi} - aC_2 e^{-a\pi} = aC_1 e^{-a\pi} - aC_2 e^{a\pi} = X'(-\pi)$

$C_1 = C_2$

$aC_1 e^{a\pi} - aC_1 e^{-a\pi} = aC_1 e^{-\pi a} - aC_1 e^{a\pi}$

$aC_1 (e^{-a\pi} - e^{a\pi} - e^{a\pi} + e^{-a\pi}) = 0 \; ; \; \underset{\neq 0}{2} \underset{\neq 0}{a} \underset{=0}{C_1} (\underbrace{e^{-a\pi} - e^{a\pi}}_{\neq 0}) \; ; \; C_1 = 0$

$C_1 = 0 = C_2$

$X(x) = 0$ No nos sirve

$\lambda > 0 \; ; \; \lambda = a^2 \; ; \; a > 0$

$X''(x) + a^2 X(x) = 0 \qquad r^2 - a^2 = 0 \; ; \; r = \pm ia \; ; \; X(x) = C_1 \operatorname{sen}(ax) + C_2 \cos(ax)$

$\begin{cases} X(\pi) = X(-\pi) \\ X'(\pi) = X(-\pi) \end{cases}$ $\quad X'(x) = aC_1 \cos(ax) - C_2 a \operatorname{sen}(ax)$

Como $\cos(x)$ es par el menciono lo quito

Como $\operatorname{sen}(x)$ es impar saco el menos

$X(\pi) = C_1 \operatorname{sen}(a\pi) + C_2 \cos(a\pi) = -C_1 \operatorname{sen}(+a\pi) + C_2 \cos(+a\pi) = X(-\pi)$

$\cancel{C_1 (\operatorname{sen}(a\pi) - \operatorname{sen}(-a\pi)) = C_2 (\cos(-a\pi) - \cos(a\pi))} \; \underset{\neq 0}{2} \underset{\neq 0}{C_1} \operatorname{sen}(a\pi) = 0$

$a\pi = n\pi$

$a = n \; ; \; n = 1, 2, 3 \ldots$

$\lambda_n = n^2 = a^2$

$n = 1, 2, 3 \ldots$

$X'(\pi) = aC_1 \cos(a\pi) - aC_2 \operatorname{sen}(a\pi) = aC_1 \cos(-a\pi) - aC_2 \operatorname{sen}(-a\pi) = X'(-\pi)$

$aC_1 (\cos(a\pi) - \cos(-a\pi)) = aC_2 (-\operatorname{sen}(-a\pi) + \operatorname{sen}(a\pi))$

$a = n \quad ; \lambda_n = n^2 \quad n = 1,2,3,\dots$

Hay que comprobar que coincida para las C.C derivadas

$X'(-\pi) = +aC_1 \cancel{\operatorname{sen}(a\pi)} + aC_2 \cancel{\cos(a\pi)} = -aC_1 \operatorname{sen}(a\pi) + a\cancel{C_2 \cos}(a\pi) = X'(\pi)$

$aC_1 \operatorname{sen}(a\pi) = -aC_1 \operatorname{sen}(a\pi) \; ; \; \underset{\neq 0}{2}\underset{\vee 0}{a}\underset{\neq 0}{C_1} \operatorname{sen}(a\pi) = 0$

$\operatorname{sen}(a\pi) = 0$ si $a\cancel{\pi} = an\pi \quad a = n$

Se cumple $a = n \Rightarrow \lambda_n = n^2$

Cambio la notación para que coincida con la pizarra.

$X_n(x) = C_{1n}\cos(nx) + C_{2n}\operatorname{sen}(nx) \quad \lambda > 0$

$X(x) = \hat{C}_2 \neq 0 \quad \lambda = 0$

$\left.\right\} \lambda_n = n^2; \; n = 0, 1, 2, 3, \dots$

$X_n = C_{1n}\cos(nx) + C_{2n}\operatorname{sen}(n\pi)$

Si $\lambda = 0$; $X_n = C_{1n} \cdot 1 + 0 = C_1$ se cumple la $X(x) = \hat{C} \neq 0$

$u_n(x,t) = T_n(t) X_n(x) = \hat{C} e^{-n^2\alpha^2 t} \left[C_{1n}\cos(nx) + C_{2n}\operatorname{sen}(\pi n) \right] =$

$= \underbrace{\hat{C} e^{-n^2\alpha^2 t} C_{1n}}_{a_n} \cos(nx) + \underbrace{\hat{C} e^{-n^2\alpha^2 t}}_{b_n} C_{2n}\operatorname{sen}(\pi n) = a_n e^{-n^2\alpha^2 t}\cos(nx) + b_n e^{-n^2\alpha^2 t}\operatorname{sen}(nx)$

para $n=0$ es 0

$$\boxed{\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-n^2\alpha^2 t}\cos(nx) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n e^{-n^2\alpha^2 t}\operatorname{sen}(nx) = \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-n^2\alpha^2 t}\cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n^2\alpha^2 t}\operatorname{sen}(nx) \end{aligned}}$$

Para obtener las constantes se aplica la Condición Inicial.

C.I: $u(x,0) = f(x)$

$u(x,0) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n\operatorname{sen}(nx)$

Lo que quiere decir que una función se puede escribir como combi. de senos

$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n\operatorname{sen}(nx)$

Series de Fourier

Condiciones de ortogonalidad:

$$\int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ L & \text{si } m = n \neq 0 \\ 2L & \text{si } m = n = 0 \end{cases}$$

$$\int_{-L}^{L} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{L}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx = 0$$

Se compensan.

$$\int_{-L}^{L} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{L}x\right)\cancel{\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)}dx = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ L & \text{si } m = n \end{cases}$$

creo que es $\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$

Es como los que sabemos pero multiplicado por 2.

Comprobar de propias def

$$a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx \overset{L=\pi}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx =$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx \overset{L=\pi}{=} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx \overset{L=\pi}{=} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{sen}(nx)$$

EDP $\Rightarrow \dfrac{du(x,t)}{dt} = \alpha^2 \dfrac{d^2u(x,t)}{dx^2}$ CC $\begin{cases} u(x=0,t)=0 \\ u(x=L,t)=0 \end{cases}$ CI $\Rightarrow u(x,t=0)=f(x)$ (conocida)

$0<x<L \qquad t>0$

Solución formal: $\boxed{u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)}$

La idea para hallar los coef. Cn es utilizar la Condición Inicial.

Serie de Fourier de senos :2

¿b_n? CI $u(x,t=0)=f(x)$

$$u(x,t=0)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n e^0 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \Bigg\} \Rightarrow f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

Inciso: $\mathbb{R}^3$ Base ortogonal $\Rightarrow B=\{\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3\}$ (No ortonormal)

$\langle \bar{e}_1,\bar{e}_2\rangle=0$ Producto escalar

$\langle \bar{e}_1,\bar{e}_3\rangle=0$

$\langle \bar{e}_2,\bar{e}_3\rangle=0$ norma al cuadrado

$\langle \bar{e}_1,\bar{e}_1\rangle=\|\bar{e}_1\|^2$

$e_2 \cdot e_2 \quad \|\bar{e}_2\|^2$

$e_3 \cdot e_3 \quad \|\bar{e}_3\|^2$

$\langle \bar{e}_i,\bar{e}_j\rangle=\delta_{ij} = \begin{cases}\|e\|^2 & i=j \\ 0 & i\neq j\end{cases}$

$\vec{V}\in\mathbb{R}^3$

$\vec{V}=V_1\bar{e}_1+V_2\bar{e}_2+V_3\bar{e}_3$

$\langle \vec{V},\bar{e}_1\rangle=V_1\underbrace{\langle\bar{e}_1,\bar{e}_1\rangle}_{\|\bar{e}_1\|^2}+V_2\underbrace{\langle\bar{e}_2,\bar{e}_1\rangle}_{0}+V_3\underbrace{\langle\bar{e}_3,\bar{e}_1\rangle}_{0}$

$$V_1=\frac{\langle\bar{V},\bar{e}_1\rangle}{\langle\bar{e}_1,\bar{e}_1\rangle}=\frac{\langle\bar{V},\bar{e}_1\rangle}{\|\bar{e}_1\|^2} \qquad V_2=\frac{\langle\bar{V},\bar{e}_2\rangle}{\|\bar{e}_2\|^2} \qquad V_3=\frac{\langle\bar{V},\bar{e}_3\rangle}{\|\bar{e}_3\|^2}$$

$\left\{\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\right\}_{n=1}^{n=\infty}=\{X_n(x)\}_1^{\infty}=\left\{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{L}x\right),\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{L}x\right)\dots\right\}=\{X_1(x),X_2(x),X_3(x),\dots\}=$ Base de funciones. ~ de $\mathbb{R}^\infty$

$$\underbrace{f(x)}_{V}=\underbrace{b_1}_{V_1}\underbrace{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi n}{L}x\right)}_{e_1=X_1(x)}+\underbrace{b_2}_{V_2}\underbrace{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi n}{L}x\right)}_{e_2=X_2(x)}+\dots$$

Vamos a utilizar un producto escalar que nos permita hallar los b_n que necesitamos:

$$\overbrace{\int_0^L \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{L}x\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx}^{\langle e_m,e_n\rangle}=\begin{cases}0 & \text{si } m\neq n\\ \underbrace{\frac{L}{2}}_{\approx\|e\|^2} & \text{si } m=n\end{cases}$$

$m=1,2,3\dots$
$n=1,2,3\dots$

: funciona como un producto escalar por lo que podemos escribirlo como: $\bar{V}=\frac{\langle\bar{V},\bar{e}_1\rangle}{\langle\bar{e}_1,\bar{e}_1\rangle}=\frac{\langle\bar{V},\bar{e}_1\rangle}{\|\bar{e}_1\|^2}$

$$\boxed{b_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx}$$

$$b_n=\frac{\langle f(x),\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\rangle}{\langle\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right),\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\rangle}=\frac{\int_0^L f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx}{\frac{L}{2}}=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)d\dots$$

Deducir $b_n=\dots$

Tenemos: La serie que f(x), la base y la integral

Sea $m\in\mathbb{N}$ fija

$$f(x)=b_1\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{L}x\right)+b_2\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{L}x\right)+\dots+b_m\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{L}\right)+b_{m-1}\operatorname{sen}\left(\frac{(m-1)\pi}{L}\right)+b_{m+1}\operatorname{sen}\left(\frac{(m+1)\pi}{L}x\right)+\dots$$

$$f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{L}x\right)=b_1\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{L}x\right)\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{L}x\right)+b_2\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{L}x\right)\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{L}x\right)+\dots+b_{m-1}\operatorname{sen}\left(\frac{(m-1)\pi}{L}x\right)\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{L}\dots\right.$$

$$+b_m\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{L}x\right)\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{L}x\right)+b_{m+1}\operatorname{sen}\left(\frac{(m+1)\pi}{L}x\right)\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{L}x\right)+\dots$$

Ahora le pasamos integral a todos los terminos

$$\int_0^L f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{L}x\right)dx=b_1\int_0^L\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{L}x\right)\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{L}x\right)dx+\dots$$

Se puede separar las sumas el ser esta serie, pero no se puede en todas.

Como paso en la integral si $m \neq n \Rightarrow 0$

$$\int_0^L f \,\text{sen}\left(\frac{m\pi}{L}x\right) = 0+\dots+0+b_m\cdot\frac{L}{2}+0+\dots+0$$

$\int_0^L \text{sen}\left(\frac{m\pi}{L}x\right)\text{sen}\left(\frac{m\pi}{L}x\right)dx$

$$\int_0^L f(x)\,\text{sen}\left(\frac{m\pi}{L}x\right)dx = b_m \frac{L}{2} \Rightarrow \boxed{b_m = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,\text{sen}\left(\frac{m\pi}{L}x\right)dx}$$

Demostrado con carácter universal que se cumple.

Ejem.

$$\frac{du(x,t)}{dt} = 4\frac{d^2u(x,t)}{dx^2} \qquad CI \quad u(x,t=0) = f(x) = 2\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right) - \text{sen}(\pi x) + 4\,\text{sen}(2\pi x)$$

$$CC = \begin{cases} u(0,t)=0 \\ u(L,t)=0 \end{cases} \qquad 0<x<2$$

$$f(x) = 2\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right) - \text{sen}(\pi x) + 4\,\text{sen}(2\pi x) = \sum b_n \text{sen}\left(\frac{n\pi}{2}x\right)$$

$$b_n = \frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\,\text{sen}\left(\frac{\pi n}{2}x\right)dx = 2\int_0^2 \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)\text{sen}\left(\frac{\pi n}{2}x\right) - \int_0^2 \text{sen}(\pi x)\,\text{sen}\left(\frac{\pi n}{2}x\right)dx +$$

$$4\int_0^2 \text{sen}(2\pi x)\,\text{sen}\left(\frac{n\pi}{2}x\right)dx$$

$$2\cdot\begin{cases} \frac{2}{2} = \frac{L}{2} \text{ si } n=1 \\ 0 \quad \text{si } n\neq 1 \end{cases} \qquad - \begin{cases} \frac{2}{2} \text{ si } n=2 \\ 0 \text{ si } n\neq 2 \end{cases}$$

$$+\,4\begin{cases} \frac{2}{2} \text{ si } n=4 \\ 0 \text{ si } n\neq 0 \end{cases}$$

$n=1 \quad b_1 = 2\cdot\frac{2}{2}+0+0 = 2$

$n=2 \quad b_2 = 0-1\cdot\frac{2}{2}+0 = -1$

$n=3 \quad b_3 = 0+0+0 = 0$

$n=4 \quad b_4 = 0+0+4\cdot\frac{2}{2} = 4$

$n=5 \quad b_5 = 0$

$n>5 \quad b_n = 0$

Delas 5.2 ingª

Ec. del calor con contorno Neumann Homogeneas (Caso aislado)

$$\frac{du(x,t)}{dt} = \alpha^2\frac{d^2u(x,t)}{dx^2} \quad \text{si } 0<x<L,\ t>0 \qquad CC \Rightarrow \begin{cases} \frac{du}{dx}(x=0,t)=0 \\ \frac{du}{dx}(x=L,t)=0 \end{cases} \qquad CI \Rightarrow u(x,t=0) = f(x) \quad 0\leq x\leq L$$

No sale dela barra el calor. Se tapan los lados en t=0

$u(x,t) = X(x)T(t) \neq$

EDP $\quad X(x)T'(t) = \alpha^2 X''(x)T(t) \qquad \frac{T'(t)}{\alpha^2 T(t)} = -\lambda = \frac{X''(x)}{X(x)}$

$P_1 \quad T'(t)+\alpha^2\lambda T(t) = 0 \Rightarrow \boxed{T(t) = Ce^{-\lambda\alpha^2 t} \,/\, C\in\mathbb{R} \text{ cte}}$

$$P_2 \begin{cases} X''(x)+\lambda X(x) = 0 \\ \frac{du(x=0,t)}{dx} = 0 = X'(0)T(t) \Rightarrow X'(0)=0 \\ \qquad \forall t>0 \\ \frac{du(x=L,t)}{dx} = 0 = X'(L)T(t) \Rightarrow X'(L)=0 \end{cases}$$

Casos: 1) $\lambda\in\mathbb{C}$ No lo estudiamos

2) $\lambda=0$

3) $\lambda<0 \rightarrow$ Sol. Nulas

4) $\lambda>0$

Caso $\lambda=0$

$$\begin{cases} X''(x)=0 \\ X'(0)=0\ ;\ X'(L)=0 \end{cases} \qquad X(x)=C_1+C_2x \qquad X(x)=C_1\neq 0 \ (\text{cte})$$

$$X'(x)=C_2 \Rightarrow \begin{cases} X'(0)=0=C_2 \\ X'(L)=0=C_2 \end{cases}$$

Cualquier constante no nula es solución de nuestro problema: $\boxed{X(x)=\tilde{C}\neq 0 \,/\, \tilde{C} \text{ cte}}$ $\lambda_0=0$

$\lambda_0=\left(\frac{0}{L}\right)^2=0$

Caso $\lambda>0$ $\quad \lambda=a^2$, $a>0$

$\nexists$ $r=\pm ia$

$$\begin{cases} X''(x)+a^2X(x)=0 \\ X'(0)=0=X'(L) \end{cases}$$

$X(x)=C_1\cos(ax)+C_2\,\text{sen}(ax)$

$X'(x)=-aC_1\,\text{sen}(ax)+aC_2\cos(ax)$

$\beta=\{\text{sen}(ax),\cos(ax)\}$

$X'(0)=-aC_1\cdot 0+aC_2\cdot 1=\underset{\neq 0}{a}C_2=0\ ;\ C_2=0$

$X'(L)=-\underset{\neq 0}{a}\,\underset{\neq 0}{C_1}\,\text{sen}(aL)$ Exijo

$\text{sen}(aL)=0$

$aL=n\pi\ ;\ a=\frac{n\pi}{L}\quad n=1,2,3\ldots$

$$\boxed{\begin{array}{l} \lambda_n=\dfrac{n^2\pi^2}{L^2} \quad n=1,2,3,\ldots \\ X_n(x)=C_n\cos\left(\dfrac{n\pi}{L}x\right) \end{array}}$$

$X_0(x)=C_0$

$$u(x,t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2t\alpha^2}\cdot\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad \text{donde } a_0=\frac{1}{L}\int_0^L f(x)\,dx$$

Promedio $\frac{\text{Esuma de todo } L}{L}$

$\triangleright$ Puedo compactar $\lambda=0$ y $\lambda>0$ en:

por ser cte $\lambda_0=0$

$\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\ ;\ n=0,1,2,\ldots$

$X_n(x)=C_n\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$

$$u_n(x,t)=T_n(t)X_n(x)=\tilde{C}_n e^{-\alpha^2\frac{n^2\pi^2}{L^2}t}\cdot C_n\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)=a_n e^{-\alpha^2\frac{n^2\pi^2}{L^2}t}\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n e^{-\alpha^2\frac{n^2\pi^2}{L^2}t}\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n e^{-\alpha^2\frac{n^2\pi^2}{L^2}t}\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

sacar un termino

$$\beta_{\text{funcional}}=\left\{X_n(x)=\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\right\}_{n=0}^{\infty}=\left\{1,\cos\left(\frac{\pi}{L}x\right),\cos\left(\frac{2\pi}{L}\right),\ldots\right\}$$

$$\int_0^L\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right)dx=\begin{cases} 0 & \text{si } m\neq n \\ \frac{L}{2} & \text{si } m=n \text{ pero } m\neq 0\neq n \\ L & \text{si } m=n=0 \end{cases}$$

$m=0,1,2\ldots$
$n=0,1,2\ldots$

$\int_0^L dx=L-0=L$

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)dx \qquad a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

Estos coeficientes se hallas con la condición inicial en $u(x,t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \cdots$

$CI \Rightarrow u(x,0) = f(x)$

$$\boxed{u(x,0) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = f(x)}$$ Serie de cosenos de Fourier.

Encontrar a_0:

$$f(x) = a_0 + a_1\cos\left(\frac{\pi}{L}x\right) + a_2\cos\left(\frac{2\pi}{L}x\right) + a_3\cos\left(\frac{3\pi}{L}x\right) + \dots$$
$\hookrightarrow a_0\cos\left(\frac{0\pi}{L}x\right)$

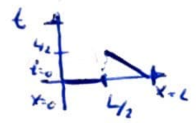
Fijamos $m=0$: $\cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right)$ Lo que haremos para a_n es que m vaya variando $1,2,3\dots$

$$\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{0\pi}{L}x\right)dx = \underbrace{\int_0^L a_0\cos\left(\frac{0\pi}{L}x\right)\cos\left(\frac{0\pi}{L}x\right)dx}_{= a_0 \cdot L} + a_1\underbrace{\int_0^L \cos\left(\frac{\pi}{L}x\right)\cos\left(\frac{0\pi}{L}x\right)dx}_{=0} + a_2\underbrace{\int_0^L \cos\left(\frac{2\pi}{L}x\right)\cos\left(\frac{0\pi}{L}x\right)dx}_{=0} + \underbrace{\dots}_{=0}$$

$$\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{0\pi}{L}x\right)dx = a_0 L \Rightarrow a_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)dx$$

5.1)

b) Ec. Calor: C. Frontera $\begin{cases} u(0,t)=0 \\ u(L,t)=0 \end{cases}$ CI: $f(x) = u(x,0) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0<x<L/2 \\ L-x & \text{si } L/2<x<L \end{cases}$



La discontinuidad no es significativa.

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\alpha^2\frac{n^2\pi^2}{L^2}t}\,\text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,\text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^0\,\text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\,\text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,\text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx = \frac{2}{L}\left[\int_0^{L/2} 0\cdot\text{sen}\left(\frac{\pi n}{L}x\right)dx + \int_{L/2}^{L}(L-x)\,\text{sen}\left(\frac{\pi n}{L}x\right)\right] = \frac{2}{L}\left[0 + \bigcirc\right] =$$
$$= \frac{2}{L}$$

$$\int_{L/2}^{L}(L-x)\,\text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx = \left[-(L-x)\frac{L}{\pi n}\cos\left(\frac{\pi n}{L}x\right)\Big|_{L/2}^{L} - \frac{L}{\pi n}\int_{L/2}^{L}\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx\right] = \frac{L}{2}\cdot\frac{L}{\pi n}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\cdot\frac{L}{2}\right) -$$

$u = L-x \quad du = -1\,dx$

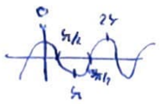
$dv = \text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx \quad v = \frac{L}{\pi n}\cos\left(\frac{\pi n}{L}x\right)$

$$-\frac{L}{n\pi}\int_{L/2}^{L}\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx = \frac{L}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{2}{n\pi}\int_{L/2}^{L}\cos\left(\frac{n\pi}{2}x\right)dx$$

$dx =$

$$b_n = \frac{2}{L}\left[\frac{L}{2}\cdot\frac{L}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{\cancel{L}}\cdot\frac{\cancel{L}}{2}\right) - \frac{L}{n\pi}\int_{L/2}^{L}\cos\left(\frac{n\pi}{2}x\right)dx\right] =$$

$$= \frac{L}{n\pi}\underbrace{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)} - \frac{2}{n\pi}\underbrace{\int_{L/2}^{L}\cos\left(\frac{n\pi}{\cancel{L}}x\right)dx} =$$



$$\begin{cases} 0 \text{ si } n = 1,2,3,\dots \\ -1 \text{ si } n = 2,6 \\ 1 \text{ si } n = 4,8,\dots \end{cases} \qquad \frac{2}{n\pi}\left[\frac{L}{n\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\right]_{L/2}^{L}$$

$$\frac{L}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{2}{n\pi}\left\{\frac{L}{n\pi}\left[\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\right]_{L/2}^{L}\right\} =$$

$$-\frac{2L}{n^2\pi^2}\left[\underbrace{\operatorname{sen}(n\pi)}_{=0} - \operatorname{sen}(n\pi/2)\right] =$$

$$b_n = \frac{L}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{2L}{n^2\pi^2}\operatorname{sen}(n\pi/2)$$

Indicar los valores que tomaría para la n según el trigonométrico.

7.18) $k\dfrac{d^2u(x,t)}{dx^2} = \dfrac{du(x,t)}{dt}$ $\quad$ C.C $\Rightarrow$ $u(0,t)=0$, $u(L,t)=0$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-k\frac{n^2\pi^2}{L^2}t}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \qquad A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$$

$n = 1,2,3,\dots$

i) Deducir (lo de con m y n de 0 y $\frac{L}{2}$ (integral), la base y la $u(x,t)$ sin Σ)

ii) $L=\pi$ hallar la solución $u(x,t)$

$$f(x) = 3\operatorname{sen}(2x) + \frac{5}{3}\operatorname{sen}(4x)$$

$$u(x,0) = \sum A_n\operatorname{sen}\left(\frac{n\cancel{\pi}}{\cancel{\pi}}x\right) = A_1\operatorname{sen}(x) + A_2\operatorname{sen}(2x) + \dots$$

$$A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^L f(x)\operatorname{sen}(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^L\left[3\operatorname{sen}(2x) + \frac{5}{3}\operatorname{sen}(4x)\right]\operatorname{sen}(nx)dx =$$

$A_2 = 3 \quad A_4 = \frac{5}{3}$

$n \neq \{2,4\} \quad A_n = 0$

$$= \frac{6}{\pi}\underbrace{\int_0^L \operatorname{sen}(2x)\operatorname{sen}(nx)\,dx} + \frac{10}{3\pi}\underbrace{\int_0^L \operatorname{sen}(4x)\operatorname{sen}(nx)\,dx}$$

Usando la integral del i) $\quad = \begin{cases} n=2 \Rightarrow \pi/2 \\ n\neq 2 \Rightarrow 0 \end{cases} \qquad = \begin{cases} n=4 \Rightarrow \pi/2 \\ n\neq 4 \Rightarrow 0 \end{cases}$

$A_1 = 0$

$A_2 = \frac{6\cancel{\pi}}{\cancel{\pi}2} = 3$

$A_3 = 0$

$A_4 = \frac{10\cancel{\pi}}{3\cancel{\pi}\cdot 2} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$

$A_5 = 0$

$n \geq 5 \quad A_n = 0$

$\{\operatorname{sen}(nx)\}_{n=1}^{\infty}$ Tiene la forma.

$$f(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n\overbrace{\operatorname{sen}(nx)}^{n=n} = A_1\overbrace{\operatorname{sen}(x)}^{n=1} + A_2\overbrace{\operatorname{sen}(2x)}^{n=2} + A_3\overbrace{\operatorname{sen}(3x)}^{n=3} + \dots A_4\operatorname{sen}(4x)$$

1. TABLA: TRANSFORMADA DE LAPLACE

1. $\mathcal{L}\{f(t) = 1\} = F(s) = \frac{1}{s}, \quad s > 0$
2. $\mathcal{L}\{f(t) = e^{\text{at}}\} = F(s) = \frac{1}{s-a}, \quad s > a$
3. $\mathcal{L}\{f(t) = t^n\} = F(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0; n = 1, 2, 3, \cdots$
4. $\mathcal{L}\{f(t) = \text{sen}(at)\} = F(s) = \frac{a}{s^2+a^2}, \quad s > 0$
5. $\mathcal{L}\{f(t) = \cos(at)\} = F(s) = \frac{s}{s^2+a^2}, \quad s > 0$
6. $\mathcal{L}\{f(t) = e^{at}\,\text{sen}(bt)\} = F(s) = \frac{b}{(s-a)^2+b^2}, \quad s > a$
7. $\mathcal{L}\{f(t) = e^{at}\cos(bt)\} = F(s) = \frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}, \quad s > a$
8. $\mathcal{L}\{f(t) = t^n e^{at}\} = F(s) = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}, \quad s > a; n = 1, 2, 3, \cdots$
9. $\mathcal{L}\{f(t) = \text{senh}(at)\} = F(s) = \frac{a}{s^2-a^2}, \quad s > |a|$
10. $\mathcal{L}\{f(t) = \cosh(at)\} = F(s) = \frac{s}{s^2-a^2}, \quad s > |a|$
11. $\mathcal{L}\left\{(f * g)(t) = \int_0^t f(t-\alpha)g(\alpha)\mathrm{d}\alpha\right\} = \int_0^t f(\alpha)g(t-\alpha)\mathrm{d}\alpha\right\} = \mathcal{L}\{f(t)\}\mathcal{L}\{g(t)\}$
12. $\mathcal{L}\left\{f^{(n}(t)\right\} = s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{(n-2)}f'(0) - \cdots - f^{(n-1}(0); \quad F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$