uc3m | Universidad Carlos III de Madrid

Grado en Ingeniería Informática

2018-2019

Apuntes

Cálculo

Jorge Rodríguez Fraile[1]

[1]Universidad: 100405951@alumnos.uc3m.es | Personal: jrf1616@gmail.com

ÍNDICE GENERAL

Parte I

Teoría

Desarrollos en serie de algunas funciones.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \qquad -\infty < x < \infty$$

$$\ln x = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \frac{(x-1)^5}{5} - \cdots \qquad 0 < x \le 2$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \cdots \qquad -1 < x \le 1$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \cdots \qquad -1 < x < 1$$

$$\frac{1}{(1+x)^2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4 - 6x^5 + \cdots \qquad -1 < x < 1$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \cdots \qquad -1 < x < 1$$

$$\frac{x}{(1-x)^2} = x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + 5x^5 + \cdots \qquad -1 < x < 1$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2\cdot 4}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 - \cdots \qquad -1 < x \le 1$$

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \qquad -\infty < x < \infty$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \qquad -\infty < x < \infty$$

$$\operatorname{senh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots \qquad -\infty < x < \infty$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots \qquad -\infty < x < \infty$$

$$\operatorname{arcsen} x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x^7}{7} + \cdots \qquad -1 < x < 1$$

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcsen} x = \frac{\pi}{2} - \left(x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x^7}{7} + \cdots \right) \qquad -1 < x < 1$$

$$\arctan x = \begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{3x^3} - \dfrac{1}{5x^5} + \cdots & x \le -1 \\[2ex] x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^7}{7} + \cdots & -1 < x < 1 \\[2ex] \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{3x^3} - \dfrac{1}{5x^5} + \cdots & x \ge 1 \end{cases}$$

Calculo T(1) 6/09/2018

Introducción

$\in$ pertenece
hipo $\Rightarrow$ tesis
: tal que /
\ excepto
$\equiv$ equivalente
$\Leftrightarrow$
$\forall$
Σ sumatorio
Π multiplicatorio

Conjuntos: colecciones de elementos

- Los números naturales = $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ El conjunto más sencillo, "el de contar."

Es un conjunto infinito numerable, en $\mathbb{N}$ es definida la suma y la multiplicación.

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
$n \to 7^n - 2^n$
$f(n) = 7^n - 2^n$

Ejemplo: P_2: "$7^n - 2^n$ es multiplo de 5"
proposición

$n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ $n=1$ P_1 es cierta
$n=2$ P_2 es cierta
....

Si le doy valores a n habria infinitas, para ello se utiliza:

- Principio de inducción: P_n es cierta, $n \in \mathbb{N}$ de infinitas proposiciones, si:

$P_1 \; P_2 \; P_3 \dots P_k \; P_{k+1}$

Ver hasta que ficha caeria.

1° Base de inducción: damos un valor a n (normalmente 1) y comprobamos si se cumple.

2° Hipotesis de inducción: cambiamos n por un valor k y con k+1, si $P_k \Rightarrow P_{k+1}$ y la base son ciertas, me afirma que P_n es cierta. $\forall n \in \mathbb{N}$. Pero hay que resolverlo como se pueda

Ejemplo 1:

$1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

$\forall n \in \mathbb{N}$ ¿Es cierto? Sí

B.I $n=1$ ¿ $1 = \frac{2}{2}$? Sí

H.I $1+2+\dots+k = \frac{k(k+1)}{2}$

¿ $1+2+\dots+k+k+1 = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$?

$\underset{H.I}{=} \frac{k(k+1)}{2} + k+1 = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$; $\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)\cdot(k+2)}{2}$ Sí

$(k+2)(k+1)$

Ejemplo 2: "$7^n - 2^n$ es multiplo de 5" $n \in \mathbb{N}$ ¿Cierto?

B.I $n=1$ ¿ $7-2 = 5\underset{\text{un entero}}{m}$? Sí

H.I $7^k - 2^k = 5m$ / ¿ $7^{k+1} - 2^{k+1} = 5m$? Sí

Al cumplirse ambas la presición es cierta.

$7^k = 5m + 2^k$ / $7^k \cdot 7 - 2^k \cdot 2 = 5m$; $\underset{H.I}{=} 7\cdot(5m+2^k) - 2^k \cdot 2$; $= \underbrace{7\cdot 5m}_{\text{mult. 5}} + \overbrace{\underbrace{7\cdot 2^k - 2\cdot 2^k}_{(7-2)\cdot 2^k}}^{\text{número entero}}$

$(7-2)\cdot 2^k$ ← n° entero
$5 \cdot 2^k$ → mult. 5

Observación: ¿n Par $\Leftrightarrow$ n^2 Par? Cierto

$\Rightarrow$) $n = \underset{PAR}{2k} \Rightarrow n^2 = \underset{PAR}{2\cdot 2 \cdot k^2}$

$\Leftarrow$) Para demostrarlo en el sentido $\Leftarrow$ ($p \Rightarrow q \equiv \neg q \Rightarrow \neg p$)

n impar $\Rightarrow$ n^2 impar

$\underset{\substack{PAR \\ Impar}}{2k+1} \Rightarrow \underset{\substack{Par \\ Impar}}{4k^2+4k+1}$

• Los números enteros $= \mathbb{Z} = \{\ldots, -1, 0, 1, \ldots\}$ Es la unión de los naturales, los negativos y el cero. En $\mathbb{Z}$ está definida la suma, multiplicación y la resta, la suma del opuesto.
Conjunto infinito numerable.
No se puede hacer inducción al no haber un mínimo.
Ejemplo de dirección:

$$n \mapsto \begin{cases} \frac{n}{2} & n \text{ par} \\ \frac{1-n}{2} & n \text{ impar} \end{cases} \quad \text{Biyección}$$

• Los números racionales (fracciones) $= \mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$ Con nº finito de decimales.
Conjunto infinito numerable (los mismos que los naturales y tienen huecos $\sqrt{2}, \ldots$)
• Los números irracionales (infinitos decimales): $\pi, \sqrt{2}$
• Los números reales: $\mathbb{R} = \{\text{Racionales}\} \cup \{\text{Irracionales}\}$

• Valor absoluto.

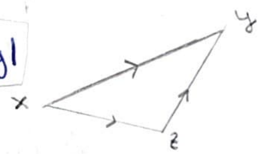
$f(x) = |x|$ $\qquad |x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases}$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+} \cup \{0\}$

• Singularidad triangular.

$x, y, z \in \mathbb{R}$ $\qquad \boxed{|x-y| \leq |x-z| + |z-y|}$

dist $(x, y) = |x-y|$



Otras desigualdades: $x, y \in \mathbb{R}$

• $|x+y| \leq |x| + |y|$
• $||x| - |y|| \leq |x-y|$

Supremo e Ínfimo / Máximo y Mínimo.

Sea A un conjunto de números reales:

- El supremo de A, sup A, es el número más pequeño dentro de los números mayores o iguales que todos los contenidos en A. ∞ no cuenta
- En ínfimo de A, inf A, es el número más grande de los números que son menores o iguales que todos los elementos de A. $-\infty$ no vale.
- El maximo de A, max A, es el sup A si este está contenido en A.
- El minimo de A, min A, es el inf A si este está contenido en A. (Es decir si sup/inf no está entre paréntesis.)

Ejem: $A = [1, 3)$ Conjunto acotado.

$\text{Sup}(A) = 3 \quad \nexists \max A$
$\text{Inf}(A) = 1 \quad \min(A) = 1$

• **Sucesiones de números reales:** Una sucesión es una lista infinita de números en un orden especifico; $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots)$

Ejemplo: $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right) / (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots)$

Como sacar la formula general se ve en Mat. discretas, lo que nos interesa es saber como crecen.

Notación $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$
↳ Termino general de la sucesion

Sucesiones acotadas:

(x_n) está acotada superiormente si $x_n \leq k \ \forall n \in \mathbb{N} \ (k \in \mathbb{R})$

(x_n) está acotada inferiormente si $x_n \geq k \ \forall n \in \mathbb{N} \ (k \in \mathbb{R})$

(x_n) está acotada si $k_1 \leq x_n \leq k_2 \ \forall n \in \mathbb{N} \ (k_1, k_2 \in \mathbb{R})$

Ejemplo: $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ $\frac{1}{n} \leq 1 \ \forall n \ k=1$ Acotada superiormente
$\frac{1}{n} \geq 0 \ \forall n \ k=0$ Acotada inferiormente
Sucesión acotada.

Sucesiones monotonas:

Daigual a_n que x_n

(x_n) (a_n) es monótona creciente si $a_{n+1} \geq a_n \ \forall n \in \mathbb{N}$

("Estrictamente creciente" si $a_{n+1} > a_n \ \forall n \in \mathbb{N}$)

Nota: $a_{n+1} \geq a_n \iff a_{n+1} - a_n \geq 0 \iff \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$

Solo si $a_n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$

(x_n) (a_n) es monótona decreciente si $a_{n+1} \leq a_n \ \forall n \in \mathbb{N}$

("Estrictamente decreciente" si $a_{n+1} < a_n \ \forall n \in \mathbb{N}$)

Nota: $a_{n+1} \leq a_n \iff a_{n+1} - a_n \leq 0 \iff \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1$

Ejemplo: $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = 0$; $\frac{\cancel{n} - \cancel{n} - 1}{n(n+1)} = -\frac{1}{n(n+1)} < 0$

$x_{n+1} < x_n$ Sucesión decreciente.

(an positivos) $a_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}$; $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{n+2} \cdot \frac{n+1}{n} = \frac{(n^2+2n)+1}{n^2+2n} \geq 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$ $\left(: \frac{n}{n+1}\right)$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ Sucesion creciente

"Teorema": (Por detrás todos)

Si (x_n) es creciente y acotada superiormente. $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ Converge

Si (x_n) es decreciente y acotada inferiormente. $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ Converge

Sucesiones convergentes

Si el límite de x_n cuando $n \to \infty$ existe y es finito, es decir:

(x_n) converge a $x \in \mathbb{R}$

Lo + pequeño (0,001)

$\lim_{x\to\infty} x_n = x \in \mathbb{R} \ (x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x) \equiv \exists N_\varepsilon^{\text{¿}} : |x_n - x| < \varepsilon \ \forall \varepsilon > 0 \ \forall n > N_\varepsilon$

No lo pon los dan saltos a lante y a tras

Si x_n no es convergente, se dice divergente. (Cuando el limite no existe o es infinito)

Ejemplo:

Demostrar $\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ $\varepsilon > 0$ ¿N_ε?

$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$; $\frac{1}{n} < \varepsilon$; $n > \frac{1}{\varepsilon}$ $N_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$

Observación: Divergentes dos tipos importantes.

- Diverge a ∞ $(x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty)$ si:
  $\forall k > 0 \ \exists N_k \ x_n > k \ \forall n \geq N_k$
- Diverge a $-\infty$ $(x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty)$ si:
  $\forall k > 0 \ \exists N_k \ x_n < -k \ \forall n > N_k$

- Teoremas:
  - (x_n) convergente $\Rightarrow (x_n)$ acotada.
  - (x_n) acotada $\not\Rightarrow (x_n)$ convergente
  - (x_n) no acotada $\Rightarrow (x_n)$ divergente y su límite es infinito.
  - (x_n) creciente y acotada superiormente $\Rightarrow (x_n)$ convergente
  - (x_n) decreciente y acotada inferiormente $\Rightarrow (x_n)$ convergente.

$0 \cdot ACOT = 0$	$\frac{\infty}{\pm 1} = \pm\infty$
$ACOT \pm \infty = \pm\infty$	$\infty + \infty = \infty$
$\frac{ACOT}{\infty} = 0$	$\infty \cdot (\pm\infty) = \pm\infty$
$y_n \neq 0 \to$ cualquier número $\neq 0$ $(\pm 1)\cdot\infty = \pm\infty$	$(-1)(\pm\infty) = \mp\infty$ ¿?

OJO $\cancel{\frac{1}{0}=\infty}$ No, es falso en general.

Ejem:

$\frac{(-1)^n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ $\frac{1}{(-1)^n/n} = \frac{(-1)^n \cdot n}{1}$ No diverge

$(-1, 2, -3, 4, -5, \ldots)$

$\frac{\operatorname{sen}(n)}{n} = \underbrace{\frac{1}{n}}_{\text{Tiende a } 0} \cdot \underbrace{\operatorname{sen}(n)}_{\text{Acotada}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 = 0 \cdot ACOT$

In determinaciones:

$\infty - \infty$	$\frac{\infty}{\infty}$	$\frac{0}{0}$	∞^0
$0 \cdot \infty$	1^∞	0^0	

Título de Método de Heron $\sqrt{2}$

$$\begin{cases} x_1 \text{ Dato inicial (Semilla)} \\ x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right) \ \forall_n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

2 ← Siendo el número cuya raíz cuadrada queremos aproximar.

$$\left(x_1, \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right), \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(x_1 + 2/x_1) + \frac{2}{\frac{1}{2}(x_1 + \frac{2}{x_1})}\right), \ldots\right)$$

Tiende a / Recursion

$$x_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right) - \sqrt{2} \ ; \ \forall_n = 1, 2, \ldots = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n} - \sqrt{2} = \frac{x_n^2 + 2 - 2\sqrt{2}}{2x_n} = \frac{(x_n - \sqrt{2})^2}{2x_n} \geq 0$$

Factorizar; $(x_n-\sqrt{2})^2$ ← Positivo siempre; $2x_n$ ← Positivo siempre

No tiene en cuenta x_1

$x_{n+1} - \sqrt{2} \geq 0$; $\boxed{x_{n+1} \geq \sqrt{2}}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $x_1 = 2$

$x_n - \sqrt{2}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $x_n \geq \sqrt{2}$ $\forall_n = 1, 2, \ldots$

↳ Cota Inferior

Recursion

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right) - x_n = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n} - x_n = -\frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n} = \frac{-x_n^2 + 2}{2x_n} = -\frac{x_n^2 - 2}{2x_n} = -\frac{(x_n + \sqrt{2})(x_n - \sqrt{2})}{2x_n} \leq 0$$

el cuadrado anterior $\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{2}$ $\sqrt{2} = 2$ ⊕ ⊕

$x_{n+1} \leq x_n$

$\forall_n = 1, 2, 3, \ldots$

$x_n = \frac{1}{2}\left(x_n + 2/x_n\right)$ (Suponiendo que tiene $\lim\limits_{x\to\infty} x_n$) $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)$ x

$x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$; $2x = x + \frac{2}{x}$; $x = \frac{2}{x}$; $x^2 = 2$; $\boxed{x = \sqrt{2}}$ Tiende a $\sqrt{2}$

Emplear la recursión cuando sea posible.

- Lema del sandwicho del bocadillo: Si las sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tienen un mismo límite (finito o infinito) cuando $n \to \infty$, y $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es otra sucesión que cumple que $a_n \leq c_n \leq b_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, entonces la sucesión $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ también tiene ese límite
- Teorema de Bolzano-Weierstrass: Toda sucesión acotada de números reales admite una subsucesión convergente. $\exists a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ Supongamos $a_n = \sqrt{3a_{n-1}}$ $\exists a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{3a_{n-1}} \Leftrightarrow a = \sqrt{3a} = a(a-3) = 0 \begin{cases} a = 0 \\ a = 3 \end{cases}$

$\lfloor x \rfloor = \max\{k \in \mathbb{Z} / k \leq x\}$ Ejem: $\lfloor 3.8 \rfloor = 3$

$\lceil x \rceil$: $\lceil 3.8 \rceil = 4$

$$1+r+r^2+\dots+r^n=\frac{1-r^{n+1}}{1-r}$$

Series de números reales (terminos no negativos)

$a_1+a_2+a_3+\dots=\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (a_n\in\mathbb{R}\ \forall n\in\mathbb{N})$ SERIE

a_n es el termino general

- $a_1+a_2+a_3+\dots+a_k=S_k$ Suma parcial de orden k

$\hookrightarrow \{S_1,S_2,\dots,S_k,\dots\}$ Sucesión de sumas parciales.

Convergente: Si $\lim_{k\to\infty} S_k$ existe y es un número.

Divergente: No existe el limite.

La convergencia de una sucesión no equivale a la convergencia de la serie.

Ejem: r = razon de la serie geometrica

$$\sum_{k=1}^{\infty} r^k=\lim_{k\to\infty}(r^1+r^2+\dots+r^n)=\lim_{k\to\infty} r(1+r+r^2+\dots+r^{n-1})=\lim_{k\to\infty} r\cdot\frac{1-r^n}{1-r}=$$

$$=\frac{r}{1-r}-\frac{r}{1-r}\cdot\lim_{k\to\infty} r^k \quad \begin{cases} \xrightarrow{0\le r<1} \frac{r}{1-r} \text{ Convergente} \\ \xrightarrow{r\ge 1} \text{Diverge a } +\infty \end{cases}$$

$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}$ Converge a e.

Series conocidas:

Serie geometrica: $\sum_{n=0}^{\infty} r^n=1+r+r^2+\dots \quad (r\in\mathbb{R})$

Si $|r|<1 \to$ Convergente $\qquad 1+r+r^2+\dots+r^k=\frac{1-r^{k+1}}{1-r}\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{1}{1-r}$ (con $r^{k+1}\xrightarrow[k\to\infty]{}0$)

Si $|r|\ge 1 \to$ Divergente.

Serie p: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ (p fijo)

Si $p>1 \to$ Convergente

Si $p\le 1 \to$ Divergente.

Serie armónica: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ Diverge.

Serie telescopica: $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n-b_{n+1})=b_1-\lim_{n\to\infty} b_{n+1}$

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$ La serie converge $\iff \lim_{n\to\infty} b_n$ existe finito.

Teorema de comparación por desigualdades.

Quiero conocer $\sum_{n=1}^{\infty} a_k$ y conozco $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$. $a_k, b_k\ge 0$

Si $a_k\le b_k$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_k$ converge $\to \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ Converge.

Si $a_k\ge b_k$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_k$ diverge $\to \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ Diverge.

Ejem:

$$\sum \frac{\text{Sen}(n)+1}{n^3}$$ (Números positivos)

$$a_n = \frac{\text{Sen}(n)+1}{n^3} \overset{\forall n}{\leq} \frac{1+1}{n^3} \to 2 \cdot \underbrace{\frac{1}{n^3}}_{b_n}$$

Sabemos que $\sum b_n = 2\sum \frac{1}{n^3}$ Converge $\Rightarrow a_n$ Converge.

Teorema de comparación al límite.

Calculo $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = C \in \mathbb{R}$ (existe) ← nos interesa ← Conocida (Cuando tiende a ∞ como queda y conocida)

Se compara como esta

Si $C \neq 0$ $(a \sim b)$ $C>0$: $\sum_n^\infty a_n$ Converge $\Longleftrightarrow \sum_n^\infty b_n$ Converge.

Si $C = 0$: Si $\sum_n^\infty b_n$ converge $\Rightarrow \sum_n^\infty a_n$ converge.

Ejem: $\sum_{n=1}^\infty \frac{3\sqrt{n}+7}{5n^7+3n+2}$ $\notin N_0$

$$a_n = \frac{3\sqrt{n}+7}{5n^7+3n+2} \cdot \frac{n^7}{\sqrt{n}} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{3}{5} \neq 0 \text{ Convergente.}$$

$$b_n = \frac{\sqrt{n}}{n^7} = \frac{1}{n^{7-1/2}}$$ Mismo carácter, Converge

Ejem 2: $\sum_{n=1}^\infty \frac{\log(n)}{n^2}$ Converge

$$a_n = \frac{\log(n)}{n^2} \quad \frac{a_n}{b_n} = \frac{\log(n)}{n^2} \cdot \frac{n^2}{n^\varepsilon} = \frac{\log(n)}{n^\varepsilon} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

n^ε mayor que $\log x$

$b_n = \frac{1}{n^{2-\varepsilon}}$ Converge $\varepsilon > 0$ $p>1$ $2-\varepsilon > 1 \Longleftrightarrow \varepsilon < 1$ Sirve cualquier valor $0<\varepsilon<1$

Teorema de descarte.

$\sum_n^\infty a_n$ Converge $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

$a_n \not\to 0 \Rightarrow \sum_n^\infty a_n$ diverge.

Ejem: $\sum \frac{n^2+3}{n+2}$ Diverge (Mayor)

Series de números alternados.

- Absolutamente convergente: $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ lo es si la serie $\sum_{k=1}^{\infty} |a_n|$ es convergente.

Teorema: Toda serie absolutamente convergente es convergente.

- Condicionalmente convergente: Si es convergente, pero no absolutamente convergente.

Cuando alterna • Criterio de Leibniz: Si una sucesión positiva y decreciente a partir de n_0 y $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ entonces $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot a_n$ converge.

Ejem: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$] a_n $0<a_n$, a_n decrece, $a_n \to 0$ {a_n sería $\frac{1}{n}$} Convergente.

$-1+\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ $\frac{1}{n}$

• Criterio del cociente:

$r = \lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}$: Si $r<1$, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ abs. convergente

Si $r>1$ $(r=\infty)$, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergente.

$\boxed{r=1 \text{ No funciona}}$ No decide

Ejem: (2017)

$x \in \mathbb{R}$ ¿x: serie converge?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{\sqrt{5+n}} = \frac{x^3}{\sqrt{6}} + \frac{x^6}{\sqrt{7}}$$

Criterio del cociente $\left| \frac{x^{3(n+1)}}{\sqrt{n+6}} \cdot \frac{\sqrt{n+5}}{x^{3n}} \right| = \left| \frac{x^3 \sqrt{n+5}}{\sqrt{n+6}} \right| =$

$= |x|^3 \cdot \frac{\sqrt{n+5}}{\sqrt{n+6}} \xrightarrow[n\to\infty]{\lim} \boxed{|x|^3} 1$

Si $|x|>1$ Diverge ¿$x \in (-\infty,-1)\cup(1,\infty)$?

Si $|x|<1$ Converge $-x\in(-1,1)$

Si $|x|=\pm 1$ (Hay que estudiarlo)

$x=1$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+5)^{1/2}}$ = Diverge $1/2<1$

$x=-1$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+5}}$ por Leibniz $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{(n+5)^{1/2}}$ Converge condicionalmente

Decreciente a 0

Si hacemos valor absoluto es la misma de arriba

$\boxed{\text{Conv.} \iff x\in[-1,1)}$ Lo primero Si $|x|<1$ Conv $x\in(-1,1)$

$\boxed{\text{Conv. abs} \iff x\in(-1,1)}$

27/09/2018

• Funciones reales de variables reales.

- Teorema de las funciones continuas: Si $f:[x_1,x_2]\to\mathbb{R}$ es continua $\Rightarrow \text{Im} f = [m,M]$

(Dominio, Codominio, Imagen de f, Acotada mínimo-máximo)

$f: D\subseteq\mathbb{R} \to C$ (domi, Codom)
$x \mapsto f(x)$

$f(x)=x^2 \Rightarrow f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto x^2$

Se entiende que el dominio es el conjunto más grande en el que tiene sentido

- Imagen de una función: $\text{Im} f = \{ y\in\mathbb{R} : \boxed{y=f(x)}$ para $x\in D \}$

Ejem: ¿y? $y=\boxed{\sqrt{1-x^2}}$ no puede ser (-)

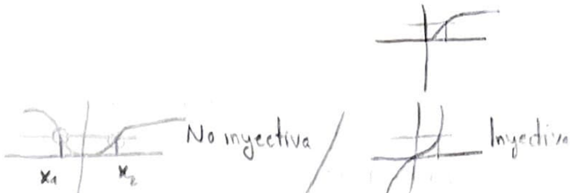
$y^2 = 1-x^2$; $x^2 = 1-y^2$; $|x| = \sqrt{1-y^2}$; $x_\pm = \pm\sqrt{1-y^2}$ $\quad \text{Im} f = [0,1]$

$\sqrt{x^2} = |x|$

Como $\boxed{y\geq 0}$, aunque el Dominio sea $[-1,1]$ queda como $[0,1]$

- Función inyectiva.

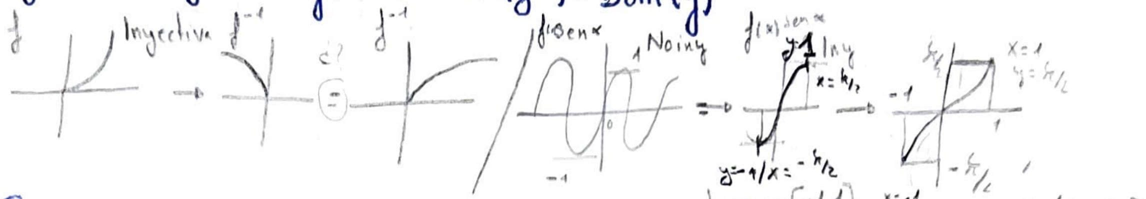
Definición 1: $f(x_1)=f(x_2) \Longleftrightarrow x_1=x_2$



Def. 2: f es inyectiva para cada $y \in \operatorname{Im} f$ $\exists$ unico $x \in D$ $n=f(x)$

- Inversa: (Tiene que ser inyectiva, si no, se coge un fragmento que sí lo sea) Restringir el Dominio

$\exists f$ inversa $f^{-1}: \operatorname{Im}(f) \to \mathbb{R}$ $\quad \operatorname{Im}(f^{-1}) = \operatorname{Dom}(f)$



- Composición:

$f(x) = \operatorname{sen} x$

$g(x) = x^2$ $\qquad f \circ g(x) = f(g(x)) = \operatorname{sen}(g(x)) = \operatorname{Sen}(x^2)$

- Límite

Sea $l \in \mathbb{R}$, diremos que $l = \lim_{x \to x_0} f(x)$ si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0 \,/\, |f(x) - l| < \varepsilon$ si $0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon$

Ejem: $f(x) = \frac{1}{x}$ $\quad \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty$

$\lim_{x \to n^+} \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor} =$

$= \lim_{x \to n^+} \lfloor x \rfloor + \sqrt{\lim_{x \to n^+} x - \lim_{x \to n^+} \lfloor x \rfloor} = n + \sqrt{n - n} = n$

$= \lim_{x \to n^-} \lfloor x \rfloor + \sqrt{\lim_{x \to n^-} x - \lim_{x \to n^-} \lfloor x \rfloor} = (n-1) + \sqrt{n - (n-1)} = n$

$\underbrace{x_0 - \delta_\varepsilon < x}_{\text{izq.}} < \underbrace{\delta_\varepsilon - x_0}_{\text{dech.}}$

- Límite lateral izquierdo.

$l_- = \lim_{x \to x_0^-} f(x) \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0 \,/\, |f(x) - l_-| < \varepsilon$ si $x_0 - \delta_\varepsilon < x < x_0$

- Límite lateral derecho.

$l_+ = \lim_{x \to x_0^+} f(x) \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0 \,/\, |f(x) - l_+| < \varepsilon$ si $x_0 < x < x_0 - \delta_\varepsilon$

- Continuidad. (Limites laterales igual al valor en $f(x)$)

Sea $x_0 \in \operatorname{Dom}(f)$, diremos que f es continua en $x_0 \Longleftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Las funciones elementales son continuas, hay que decirlo, y mirar aquellos que puedan dar indeterminación.

En las funciones a trozos, se miran los puntos de intersección y se hacen los límites laterales.

- Dominio (D): Números reales x para los que tiene sentido el calculo de $f(x)$
- Monótonía

Creciente: en $\operatorname{Dom}(f)$ si $\forall x_1, x_2 \in \operatorname{Dom}$ con $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

Decreciente en $\operatorname{Dom}(f)$ si $\forall x_1, x_2 \in \operatorname{Dom}$ con $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

Si es estrictamente monótona $\Rightarrow f$ es inyectiva y tiene inversa en D.

- Par: $f(-x) = f(x)$
- Impar: $-f(x) = f(x)$

Teoremas (Bolzano, Weierstrass, ...)

Funciones continuas.

Elementales: Son continuas en su dominio.

$x^n \mid x^{1/n} \mid \begin{matrix} \operatorname{sen} x \\ \cos x \\ \tan x \end{matrix} \mid \begin{matrix} \operatorname{arcsen} x \\ \arccos x \\ \arctan x \end{matrix} \mid \begin{matrix} e^x \\ \log x \end{matrix}$ $+, -, \cdot, \div$, Composición. número finito de operaciones.

Ejem: $f(x) = x \cos \frac{1}{x}$ elemental $\Rightarrow$ Continua en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

Weirstrass $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(13^n \pi x)}{2^n}$ Continua
No derivable en ningun sitio (Fractal)

Converge $\left| \frac{\cos(\,)}{2^n} \right| < \frac{1}{2^n}$

Teorema de la función continua.

$$\left. \begin{matrix} f: [x_1, x_2] \to \mathbb{R} \\ \text{Continua} \end{matrix} \right\} \Rightarrow \operatorname{Im}(f) = [m, M]$$

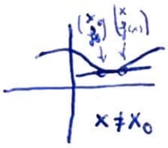
Ejem: 4.6 $f: [0,1] \to [0,1]$ ¿ $\exists x_0 \in [0,1]$ $f(x_0)\, x_0$

$\underbrace{f(x) - x}_{F(x)} = 0$ $F(x): [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) - x$ $F(0) = f(0) \geq 0$ $F(1) = f(1) - 1 \leq 1 - 1 = 0$

$\boxed{0 \in \operatorname{Im} F \text{ Continua}}$

Función derivable.

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ f(x_0) \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} x - x_0 \\ f(x) - f(x_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ f(x_0) \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \end{pmatrix}$$



$x \neq x_0$

$\boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)}$ Derivada

Derivada geometricamente $\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)}$

Fisicamente: variación de algo respecto a una varible independiente.

$\boxed{\text{Recta tangente en } x_0: P_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}$

Teorema: Si $\exists f'(x_0) \Rightarrow f$ es continua en x_0

f no continua en $x_0 \Rightarrow \nexists f'(x_0)$

Regla de Leibniz

Si son derivables $\boxed{(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) g'(x)}$ $(x^2)' = x \cdot x = 1 \cdot x + x \cdot 1 = 2x$

Regla de la cadena.

$\boxed{(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)}$ $(f(x^2))' = f'(x^2) \cdot 2x = 1$; $f'(x^2) = \frac{1}{2x}$; $\underset{\text{inv}}{f'(x)} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Derivada lineal

$\boxed{(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)}$

$\log(e^x) = x$
$\log'(e^x)\, e^x = 1$, $\log'(e^x) = \frac{1}{e^x}$, $\log'(x) = \frac{1}{x}$

Ejem arctan en hoja

$f^{-1}(f(x)) = x$ Derivada de la función inversa.

$$(f^{-1})'(f(x)) \cdot f'(x) = 1 \to (f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} \to \boxed{(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}}$$

Teorema de Bolzano

Sea f continua en $[a,b]$ (intervalo acotado cerrado con $f(a)<0$, $f(b)>0$.
Entonces existe $c \in (a,b)$ tal que $f(c)=0$

Teorema de Weierstrass:

Se f continua en $[a,b] \Rightarrow$ Existen max, min. valores de f en $[a,b]$

Teoremas para funciones derivables (f derivable en mi intervalo)

1. Sea (a,b) un intervalo (no necesariamente acotado)
   Si $f'(x)=0 \ \forall x \in (a,b) \Rightarrow f(x)$ es una función constante. $\forall x \in (a,b)$
2. Teorema de Rolle.
   f es continua en $[a,b]$, f derivable en (a,b), $f(a)=f(b) \Rightarrow$ Existe $c \in (a,b)$ tal que $f'(c)=0$

$f(a)=f(b)$ c es un punto donde la tangente a f es horizontal.
(Pendiente $=0$)

Ejem: $f(x)=x-x^2 \ \forall x \in [0,1] \Rightarrow f(0)=f(1)=0$
Existe $c \in [0,1] / f'(c)=0 \Leftrightarrow x=1/2 \quad f'(1/2)=0$

3. Teorema del valor medio de Lagrange.
   f continua en $[a,b]$, f derivable en (a,b)
   $\Rightarrow$ Existe $c \in (a,b)$ tal que $\boxed{f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}$

Pendiente de la recta tangente a f en $x=c$

Pendiente de la recta

Corolario:
- Si $f'(x)\geq 0 \ \forall x \in (a,b) \Rightarrow f(a)\leq f(b)$
- Si $f'(x)\leq 0 \ \forall x \in (a,b) \Rightarrow f(a)\geq f(b)$

4. Teorema del valor medio de Cauchy
   Sea f, g continuas en $[a,b]$, derivable en (a,b).
   $\Rightarrow$ Existe $c \in (a,b)$ tal que $\boxed{[f(b)-f(a)]\,g'(c)=[g(b)-g(a)]\,f'(c)}$
   Nota: Si $g(x)=x$ se recupera 3 para f.

$C(\mathbb{R})$ Continua en $\mathbb{R}$

$C^1(\mathbb{R})$ Continua y derivable $\mathbb{R}$

Regla de L'hôpital

Sean f, g dos funciones derivables $\forall x \in I \ (x \neq a)$

- Si $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ ó ∞
- Si $g'(x)\neq 0 \ \forall x \in I \ (x\neq a)$
- Si existe $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g(x)}$

$\Rightarrow \boxed{\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}}$

Clases de continuidad: Sea una función $f: \Omega \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se dice que:

- f es de clase $C^0(\Omega)$, $f \in C^0(\Omega)$, $f \in C(\Omega)$ si es continua en todo $\mathbb{R}$
- f es de clase $C^k(\Omega)$, $f \in C^k(\Omega)$, si está definida en todo Ω, sus derivadas tambien orden k y ademas f y todas sus derivadas hasta orden k.
- f es de clase $C^\infty(\Omega)$, $f \in C^\infty(\Omega)$, si tiene derivadas continuas hasta cualquier orden.

Teorema de Taylor. ($f\in C^{n+1}$) $f(x)=P_n(x)+R_n(x)$

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+\dots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x|x_0,f)$$

Resto de taylor de orden n

x_0 un punto que controlo

donde $R_n(x|x_0,f)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ con $c\in(x,x_0)$ No es un polinomio, depende de x_0 y x

Ejem: $p(x)=5x^3+2x+1$ Centrado en $x=1$

$$p(x)=\frac{p^{(3)}(1)}{3!}(x-1)^3+\frac{p^{(2)}(1)}{2!}(x-1)^2+p^{(1)}(1)(x-1)+p(1)=$$

$$p(x)=\frac{30}{3!}(x-1)^3+\frac{30}{2!}(x-1)+17(x-1)+8$$

Ejem: ¿Calcular e con error menor a 10^{-5}?

$f(x)=e^x$ $\quad f(1)=e$ $\quad f(0)=1$ $\quad e=1+x+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^n}{n!}+\frac{e^c}{(n+1)!}$

$x=1$ $\quad x_0=0$ $\quad 0<c<1;\ 1<e^c<e<3$

Lo impongo — Son los n's que sirven

$e=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots+\frac{1}{n!}+\frac{e^c}{(n+1)!}$ $\quad$ error: $\frac{e^c}{(n+1)!}<\frac{3}{(n+1)!}<10^{-5};\ 10^{5}<\frac{(n+1)!}{3}$ al ser n en el numerador y diverge a ∞, vale para cualquier número

$$e=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} \qquad e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

Cuando tiende a ∞ se convierte en 0.

25/10/2018

Si estamos interesados en calcular $\lim_{x\to x_0}$

o-Landau: $f=o(g)$ cuando $x\to x_0$, $g\neq 0$ $\iff \lim_{x\to x_0}\frac{f}{g}=0$

Afecta a un conjunto de funciones, por lo que no se altera al multiplicarlo.

$x^2\cdot o(x^3)=o(x^5)$ $\quad o(x^2)\cdot o(x^3)=o(x^5)$

$\lim_{x\to x_0}R_n(x)=0$; $\lim_{x\to x_0}\frac{R_n(x)}{x-x_0}=0$; $\lim_{x\to x_0}\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}=0$

Hay que buscar como se anula el denominador, y ese es nuestro "n".

x / $x_0=0$

x^2 ∪ $\frac{x}{x}=1$

x^3 / $\frac{x^2}{x}=x$

$$\boxed{R_n(x)=o((x-x_0)^n) \text{ cuando } x\to x_0}$$

Ejem: ¿$x^4=o(x^3)$? $x\to 0$ Sí $\qquad \lim_{x\to0}\frac{x^4}{x^3}=\lim_{x\to0}x=0$

¿$x=o(x^2)$? $x\to0$ No $\qquad \lim_{x\to0}\frac{x}{x^2}\neq 0$

$\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{sen}x}{\underbrace{x}_{\text{grado }1}}=\frac{x+o(x)}{x}=1+\lim_{x\to0}\cancel{\frac{o(x)}{x}}_{0}=1$

$\operatorname{sen}x=x+o(x)$ Taylor orden 1

* $\operatorname{Sen}(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}\dots$ $\quad R_{2n+2}(x)=\frac{\cos(c)}{(2n+3)!}x^{2n+3}$
* $e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots$ $\quad R_n(x)=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$
* $\cos(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\dots$ $\quad R_n(x)=\frac{\cos(c)}{(2n+2)!}x^{2n+2}$
* $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\dots$ $\quad R_n(x)=\frac{n!\cdot x^{n+1}}{(1+c)^{n+1}\cdot(n+1)!}$ — alternan $(-1)^{n+1}$ — Si es $\ominus$, todos negativos — sin factorial

Binomio de Newton

* $(1+x)^{-2}=1-2x+3x^2-4x^3+\dots$ / $(1+x)^a=1+ax+\frac{a(a-1)}{2}x^2+\frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3+\dots+a(a-1)\dots(a-n+1)\frac{x^n}{n!}$

¿$1/(1+x)^2$

* $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\dots+x^n$
* $\tan x=\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}=\frac{x-\sim}{1-\sim}=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2}{15}x^5+\frac{17}{315}x^7$

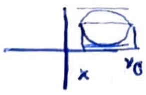
Si $f \in \mathcal{C}(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ $f(x) = P_n(x/f,0) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$; $c \in (x_0,x)$; $c \in (x, x_0)$

$n=0$ $f(x) = f(x_0) + f'(c)(x-x_0)$ Th. valor medio de Lagrange $f'(c) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

- Si $f'(c) > 0 \Rightarrow f(x) > f(x_0)$ si $x > x_0$
  Estrictamente monótona creciente

- Si $f'(c) < 0 \Rightarrow f(x) > f(x_0)$ si $x < x_0$
  Estrictamente monótona decreciente

- Si $f'(c) = 0 \Rightarrow f(x) = f(x_0)$
  Cambio de concavidad y convexidad



$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(p)}(x_0)}{p!}(x-x_0)^p + \sigma((x-x_0)^p)$; donde $p > 1$ es de orden de la primera derivada no nula en x_0

$f'(x_0) = 0$ $x_0 \in (x_1, x_2)$ $f^{(p)}(x_0) \simeq \frac{f(x) - f(x_0)}{(x-x_0)^p}$

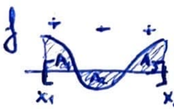
- Si p es par y la $f^{(p)}(x_0) > 0 \Rightarrow (+)$ Convexa
  x_0 ~ A la izq y dech. son positivos
  $f(x) - f(x_0) > 0$ $\forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$
- Si p es par y la $f^{(p)}(x_0) < 0 \Rightarrow (-)$ Concava
  x_0 ~ A la izq y dech son negativos
  $f(x) - f(x_0) < 0$
- Si p es impar y la $f^{(p)}(x_0) > 0$
  $\frac{+}{+}$ ó $\frac{-}{-}$

- Si p es impar y la $f^{(p)}(x_0) < 0$
  $\frac{-}{+}$ ó $\frac{+}{-}$

24/11/2018

Integral de Riemann.

$f: [x_1, x_2] \to \mathbb{R}$
Cerrado y acotado



$A_1 - A_2 - A_3$ Queremos $|f|$

$A_1 + A_2 + A_3$

$|f_1 + f_2| \neq |f_1| + |f_2|$
No es lineal.

f es integrable en un intervalo $[x_1, x_2] \Leftrightarrow \exists \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} I_n$ (por exceso, por defecto) $\int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt$ (variable muda, cualquier letra)

Propiedades de las integrales definidas: f_1, f_2 y f_3 integrables en $[x_1, x_2]$

* $\int_{x_1}^{x_2} (\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t))\,dt = \alpha_1 \int_{x_1}^{x_2} f_1(t)\,dt + \alpha_2 \int_{x_1}^{x_2} f_2(t)\,dt$
* f impar $\Rightarrow \int_{-a}^{a} f_i(t)\,dt = 0$
* Si $f_1(x) \leq f_2(x)$ $\forall x \in [x_1, x_2] \Rightarrow \int_{x_1}^{x_2} f_1(t)\,dt \leq \int_{x_1}^{x_2} f_2(t)\,dt$
* f par $\Rightarrow \int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 2\int_0^a f(t)\,dt$
* Si $m \leq f_1(x) \leq M$ $\forall x \in [x_1, x_2] \Rightarrow m[x_2 - x_1] \leq \int_{x_1}^{x_2} f_1(t)\,dt \leq M[x_2 - x_1]$
* $\left| \int_{x_1}^{x_2} f_1(t)\,dt \right| \leq \int_{x_1}^{x_2} |f(t)|\,dt$
* $\int_a^a f(t)\,dt = 0$
* $\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt$ $\forall c \in [a,b]$
* $\int_a^b f(t)\,dt = -\int_b^a f(t)\,dt$

Teorema: $f:[x_1,x_2]\to\mathbb{R}$ Continua a trozos y acotada $\Big\}\Rightarrow \exists \int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt$

a trozos → que no vayan a infinito

Si f es continua es integrable en un intervalo cerrado y acotado.

Teorema Fundamental del Cálculo.

Sea f integrable en $[a,b]$ $\quad x\in[a,b] \rightsquigarrow F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$

↳ función integral (continua)

Primera parte:

Si f es integrable en $[a,b] \Rightarrow F(x)$ es continua en $[a,b]$

Si f es continua en $[a,b] \Rightarrow F(x)$ es continua en $[a,b]$ y además es derivable en (a,b) con $F'(x)=f(x)$ $\forall x\in(a,b)$

La integral regulariza o suaviza funciones.

Segunda parte:

Sea f integrable en $[a,b]$. Si existe una función g derivable tal que $g'=f$ $\forall x\in(a,b)$

$$\int_a^b f(t)\,dt=\int_a^b g'(t)\,dt=g(b)-g(a)$$

$$\underset{f}{x}\xrightarrow{\int}\underset{g}{\frac{x^2}{2}}$$

Ejem: $\int_0^1 x\,dx=\frac{x^2}{2}\Big|_0^1=\frac{1}{2}$

Nota: g se llama primitiva o antiderivada de f ← En las definidas

Si g es primita de $f \Rightarrow \underline{g+C\ (C\in\mathbb{R})}$ es primitiva de f

En las indefinidas → ↳ Familia de primitivas

- Regla de Leibniz (Integración por partes)

$$(u(t)\cdot v(t))'=u'(t)v(t)+u(t)\cdot v'(t)$$

$$\int u'(x)v(x)\,dx=u(x)v(x)+\int v(x)u(x)\,dx$$

$$\boxed{\int u\,dv=uv-\int v\,du}$$

Sirve para ALPES [illegible]

Ejem: $\int x^{3/2}\log(x)\,dx=\frac{2}{5}x^{5/2}\log(x)-\int\frac{2}{5}x^{5/2}\frac{dx}{x}=\frac{2}{5}x^{5/2}\log x-\left(\frac{2}{5}\right)^2x^{5/2}+C$

$u=\log x \quad dv=x^{3/2}$

$du=\frac{dx}{x} \quad v=\frac{x^{5/2}}{5}2$

- Regla de la cadena (Integración por cambio de variable)

u conocemos una primitiva U $\quad u(x)=U'(x)$

$$(U(v(x)))'=U'(v(x))\cdot v'(x)=u(v(x))\cdot v'(x)$$

$$\int_{x_1}^{x_2}(U(v(x)))'\,dx=\int_{x_1}^{x_2}\underbrace{u(v(x))}_{u(z)}\cdot\underbrace{v'(x)\,dx}_{dz}$$

$$U(v(x_2))-U(v(x_1))=\int_{x_1}^{x_2}u(v(x))\cdot v'(x)\,dx$$

$$U(z_2)-U(z_1)=\int_{z_1}^{z_2}u(z)\,dz$$

Ejem: $\int\cos(\sqrt{x})\,dx=\int 2z\cos z\,dz=$ por partes

$z=\sqrt{x} \quad dz=\frac{1}{2\sqrt{x}}dx \quad dx=2\sqrt{x}\,dz=2z\,dz$