uc3m | Universidad Carlos III de Madrid

Grado en Ingeniería Informática
2018-2019

Apuntes

Lógica

Jorge Rodríguez Fraile[1]

[1] Universidad: 100405951@alumnos.uc3m.es | Personal: jrf1616@gmail.com

ÍNDICE GENERAL

Parte I

Información

Presentación

Lógica

Grado en Ingeniería Informática

2018/19

Sesiones

- Sesiones semanales
  - 1 Clase magistral (jueves)
  - 1 Sesión práctica (lunes)
- Profesorado:
  - Inés M. Galván (igalvan@inf.uc3m.es) 2.2.B25
  - Alejandro Cervantes (acervant@inf.uc3m.es) 2.1.B12
  - Otros grupos
    - **David Quintana** (dquintan@inf.uc3m.es) 2.2.A06

Dinámica

- Clase magistral
  - Contenido básico
- Clase práctica
  - Ejemplos de refuerzo
  - Trabajo en grupo (máximo 3 integrantes)
  - Cuadernillos de ejercicios
    - Validación (2x). Entrega de cuadernillo obligatoria
- Distribución de material
  - Aula Global

Temario

Tema 1. Introducción al Cálculo de Proposiciones
- Introducción a los Sistemas Formales
- Representación y sintaxis en Cálculo Proposicional

Tema 2. Teoría de la Demostración en Cálculo Proposicional.
- Sistema de Kleene
- Cálculo por Supuestos

Tema 3 Introducción al cálculo de Predicados
- Representación y sintaxis en Cálculo de Predicados

Tema 4. Teoría de la Demostración en Cálculo de Predicados
- Sistema de Kleene
- Cálculo por Supuestos

Tema 6. Teoría Semántica
- Proposiciones
- Predicados

Tema 7. Método de Resolución

Tema 8. Lógica Computacional y aplicaciones

Calendario

Ejer. (L)	Ejercicios	Mag. (J)	Teoría
28-ene	Presentación	31-ene	Tema 1. Introducción al Cálculo de Proposiciones
4-feb	Cuadernillo 1: Formalización proposiciones	7-feb	Tema 2. Teoría de la Demostración en Cálculo Proposicional
11-feb	Cuadernillo 1: Formalización proposiciones Cuadernillo 2: Teoría Demostración Proposiciones	14-feb	Tema 2. Teoría de la Demostración en Cálculo Proposicional
18-feb	Cuadernillo 2: Teoría Demostración Proposiciones	21-feb	Tema 2. Teoría de la Demostración en Cálculo Proposicional (supuestos)
25-feb	Cuardenillo 3: Supuestos Proposiciones	28-feb	Tema 3. Representación y sintaxis en Cálculo de Predicados
4-mar	Cuadernillo 4: Formalización Predicados	7-mar	Validación I
11-mar	PROLOG	14-mar	Tema 4. Teoría de la demostración en Cálculo de Predicados
18-mar	Cuadernillo 4: Formalización Predicados Cuadernillo 5: Teoría Demostración Predicados	21-mar	Tema 4. Teoría de la demostración en Cálculo de Predicados
25-mar	Cuadernillo 5: Teoría Demostración Predicados	28-mar	Tema 5: Teoría Semántica (Proposiciones)
1-abr	Cuadernillo 6. Semántica proposiciones	4-abr	Tema 5: Teoría Semántica (Predicados)
8-abr	Cuadernillo 7: Semántica Predicados	11-abr	Tema 6. Formas Normales y Resolución
15-abr	FESTIVO	18-abr	FESTIVO
22-abr	FESTIVO	25-abr	Tema 6. Formas Normales y Resolución
29-abr	Cuadernillo 8: Formas Normales	2-may	FESTIVO
6-may	Cuadernillo 9: Resolución	9-may	Validación II

Bibliografía

- Básica
  - J. Cuena. Lógica Informática. Alianza, 1985.
- Complementaria
  - Alfredo Deaño. Lógica Computacional. Alianza. 1978
  - Enrique Paniagua Arís et al.. Lógica Computacional. Thomson Paraninfo. 2003
  - Manuel Garrido. Lógica Simbólica. Tecnos. 2001
  - María Antonia Huertas Sánchez y María Manzano. Lógica para Principiantes. Alianza. 2004
  - Pascual Julian Iranzo. Lógica Simbólica para Informáticos. RA-MA. 2004

Evaluación

		Conv. Ordinaria	Conv. Extraordinaria
Opción más favorable	**Con evaluación continua**	Entrega ejercicios Validación 1: 30% Validación 2: 30% Examen convocatoria: 40%	Entrega ejercicios Validación 1: 30% Validación 2: 30% Examen convocatoria: 40%
	Sin evaluación continua	Examen convocatoria: 60%	Examen convocatoria: 100%

Parte II

Tema 1. Introducción

Tema 1:
Introducción al Cálculo de Proposiciones

Lógica

Grado en Ingeniería Informática
2018/19

uc3m

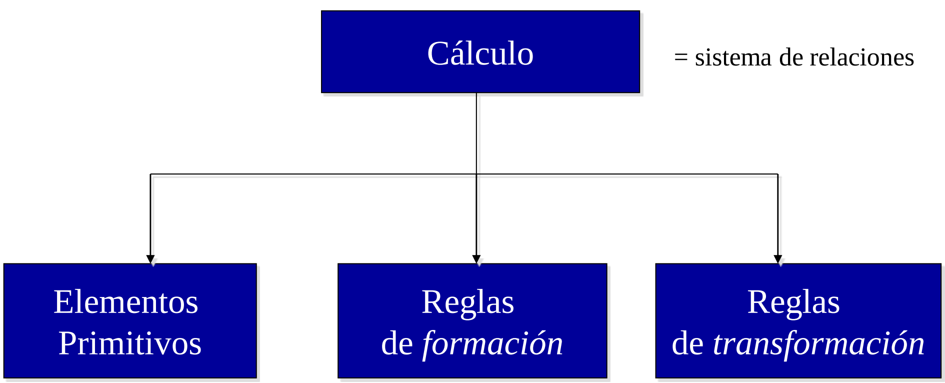
- Introducción a los Sistemas Formales
- Representación y sintaxis en Cálculo Proposicional

Introducción al concepto de cálculo

- Un cálculo es una estructura pura, un sistema de relaciones.
- Un cálculo se compone de lo siguiente:
  - Un conjunto de elementos primitivos (*símbolos elementales*).
  - Un conjunto de reglas de *formación* o de *construcción*.
  - Un conjunto de reglas de *transformación*.

Introducción al concepto de cálculo

- **Mapa conceptual:**



Introducción al concepto de cálculo

1. Elementos primitivos:

- Constituyen las piezas a manejar dentro del sistema.
- El conjunto ha de estar definido de un modo efectivo.
  - Enumeración exhaustiva. (Ej: los símbolos {0; 1;+; -})
  - Definición a través de una propiedad lo suficientemente precisa. (Ej: “las letras minúsculas)

Introducción al concepto de cálculo

2. Reglas de formación:

- Establecen cuáles son las combinaciones correctas posibles de estos símbolos elementales.
- Proporcionan una definición efectiva de la noción de “expresión bien formada de cálculo”.
- En los lenguajes naturales no están formuladas (hasta que se establece una gramática) y además son defectivas (se permiten expresiones que pueden no tener sentido desde el punto de vista del lenguaje).
  - El perro corre; Corre perro el; el perro recita molinos

Introducción al concepto de cálculo

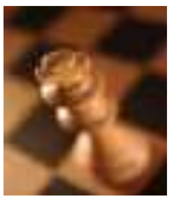
3. Reglas de transformación:

- Aplicándolas, podemos transformar una combinación bien construida de símbolos en otra combinación que resultará igualmente bien construida.
- El concepto de transformación ha de quedar definido de manera efectiva.

¿"el niño juega" = "juega el niño" = "juega niño el"?

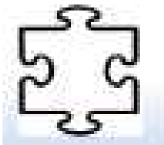
Ejemplo

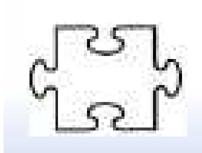
- **Símil ajedrez:**
  - **Símbolos primitivos:** piezas del juego.
  - **Reglas de formación:** instrucciones sobre las posiciones que pueden ocupar las piezas.
  - **Reglas de transformación:** reglas sobre los movimientos que se pueden efectuar con las piezas.



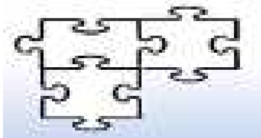
Ejemplo

- **Símil puzle:**
  - **Símbolos primitivos:**

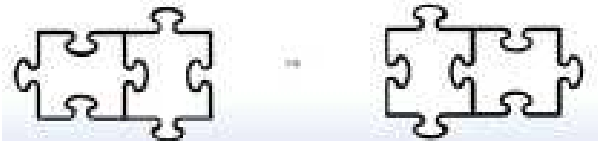




  - **Reglas de formación:**



  - **Reglas de transformación:**

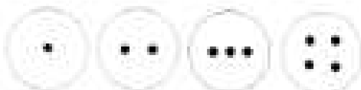


Ejemplo de cálculo

- **Símbolos primitivos:**
  - Tipo A) *Triángulos con un número cualquiera de puntos en su interior*

etc.

  - Tipo B) *Círculos con un número cualquiera de puntos en su interior*



etc.

  - Una operación, que escribiremos como ζ, mediante la cual ponemos en relación los elementos de A con los de B o viceversa.

Fuente: Deaño, A. "Introducción a la lógica formal"

Ejemplo de cálculo

- **Reglas de formación:**
  - RF1: Un triángulo solo con un número cualquiera de puntos en su interior es una expresión bien formada del cálculo
  - RF2: Un círculo solo con un número cualquiera de puntos en su interior es una expresión bien formada del cálculo
  - RF3: Una expresión compuesta por un símbolo cualquiera de tipo A, seguido del símbolo ‘ζ’ y de una expresión cualquiera de tipo B es una expresión bien formada
  - RF4: Una expresión compuesta por un símbolo cualquiera de tipo B, seguida del símbolo ‘ζ’ y de un símbolo cualquiera de tipo A es una expresión bien formada
  - RF5: Nada es una expresión bien formada a no ser en virtud de las reglas 1-4

Ejemplo de cálculo

- **Reglas de transformación:**
  - RT1
    - RT1 a:
      - Dada una fórmula compuesta por un **símbolo** determinado de tipo A, seguido del símbolo ‘ζ’ y de un símbolo determinado de tipo B, podemos transformarla en otra fórmula compuesta por este símbolo determinado de tipo B seguido del símbolo ‘ζ’ y de ese símbolo determinado por A
    - RT1 b:
      - Dada una fórmula compuesta por un **símbolo** determinado de tipo B, seguido del símbolo ‘ζ’ y de un símbolo determinado de tipo A, podemos transformarla en otra fórmula compuesta por este símbolo determinado de tipo A seguido del símbolo ‘ζ’ y de ese símbolo determinado por B

Ejemplo de cálculo

- **Reglas de transformación (y II):**
  - RT2
    - RT2 a:
      - Dada una fórmula compuesta por un símbolo determinado de tipo A, seguido del símbolo 'ζ' y de un símbolo determinado de tipo B, se puede pasar a otra fórmula compuesta por ese símbolo determinado de tipo A, seguido del símbolo 'ζ' y de otro símbolo **cualquiera** de tipo B.
    - RT2 b:
      - Dada una fórmula compuesta por un símbolo determinado de tipo B, seguido del símbolo 'ζ' y de un símbolo determinado de tipo A, se puede pasar a otra fórmula compuesta por ese símbolo determinado de tipo B, seguido del símbolo 'ζ' y de otro símbolo **cualquiera** de tipo A.

Consideraciones sobre cálculos

- Los cálculos se caracterizan porque no hacen referencia a nada ajeno a ellos.
- No atenerse a las reglas significa simplemente dejar de operar con ese determinado cálculo.
- Lo esencial de un cálculo es su carácter formal (naturaleza puramente sintáctica).
- Acerca de un cálculo sólo se pueden hacer consideraciones de pura sintaxis
  - *"La expresión 'X' está mal formada",*
  - *"La transformación de la expresión 'X' en la expresión 'Y' es correcta", etc.*

Consideraciones sobre cálculos

- Operar con un cálculo no es otra cosa que manipular un conjunto de entidades según unas reglas establecidas explícitamente de antemano.
- Se trata de un lenguaje formalizado, un lenguaje con estructura de cálculo, un lenguaje en el que no es sólo artificial el vocabulario, sino también la sintaxis.

Consideraciones sobre cálculos

- Un cálculo no es un lenguaje, en la medida que no es un medio de comunicación, sino un puro armazón sintáctico.
- Sus elementos carecen de significado, son entidades opacas que manipulamos de acuerdo a una serie de reglas.
- Podemos transformar un cálculo en un lenguaje interpretando sus símbolos (dotando a sus símbolos de un significado).

  Por ejemplo, los triángulos o círculos pueden representar individuos humanos (triángulo, masculino y círculo femenino, y 'ζ' puede significar contraer matrimonio)

Consideraciones sobre cálculos

- Aunque en la práctica los cálculos se construyen a menudo pensando en sus posibles aplicaciones, desde el punto de vista teórico, son independientes del lenguaje o lenguajes formalizados que se puedan obtener interpretándolos.
- De entre todos los cálculos posibles, hay algunos que por su especial estructura y su buen rendimiento son particularmente aptos para ser aplicados a un ámbito específico de problemas.

Definición de *Lógica*

La **lógica** se puede entender como:

- Un conjunto de cálculos
- La teoría de construcción de cálculos

Cálculo proposicional

Cálculo de predicados

Introducción al cálculo proposicional

- Nuestras posibilidades de uso del lenguaje son muy amplias:
  - Hacer preguntas, elevar súplicas, para dar órdenes, insultar, expresar deseos… y también para hacer afirmaciones acerca de los objetos (enunciar hechos o describir situaciones).
- Las preguntas, las órdenes o las súplicas no tienen valor de verdad. Sí lo tienen las afirmaciones que hacemos acerca del mundo.

Introducción al cálculo proposicional

- La lógica actual se ocupa principalmente del discurso caracterizado por enunciados que tienen forzosamente un valor de verdad o falsedad.
- A este tipo de discurso se le llama también enunciativo, declarativo, representativo, indicativo, descriptivo, asertórico, aseverativo, etc.
- El conocimiento tiene su reflejo en frases de tipo declarativo: p. ej: afirmaciones y declaraciones.

Introducción al cálculo proposicional

- El lenguaje natural se analiza en este curso en dos niveles de complejidad:
  - **Cálculo proposicional:** basado en la representación de frases declarativas simples denominadas *proposiciones*
    - Limitada habilidad para expresar conocimiento
  - **Cálculo de predicados:** basado en fórmulas que permiten hacer afirmaciones sobre sujetos (*predicados*) apoyándose en variables susceptibles de cuantificación

Introducción al cálculo proposicional

- El **cálculo base** sobre el que se apoya la lógica es el **cálculo de proposiciones**.
- Es una lógica que simboliza y describe razonamientos basados en enunciados declarativos (**proposiciones**).
- Trata sobre el análisis lógico, dispuesto como un cálculo, de las relaciones de inferencia entre proposiciones.

Introducción al cálculo proposicional

- Mediante esta representación, el lenguaje está formado por:
  - **Enunciados simples** o **proposiciones atómicas:** unidad mínima del lenguaje con una información.
  - **Conectivas:** elementos del lenguaje que permiten construir frases nuevas a partir de otras (relacionan proposiciones).

Proposiciones atómicas

- Hay tres tipos:
  - **De acción:** sujeto no determinado.
    - Ej: Nieva, Hace fría
  - **De atribución:** atribuyen propiedades a sujetos.
    - Ej: Juan es alto
  - **De relación:** establecen relaciones entre sujetos.
    - Ej: Juan es hermano de Luis

Proposiciones atómicas

- En cálculo proposicional los sujetos no tienen información propia (distinto cálculo predicados)
- Las proposiciones no se pueden dividir en elementos con información propia
- Las proposiciones se simbolizan mediante letras de variables, normalmente, **p,q,r,s..**

Ejemplos de proposiciones

Proposiciones simples:

- *"El cielo es azul*
- *"La nieve es fría"*
- *"12*12=144"*
- *"Vicente Fox es el presidente de la Republica Mexicana"*
- *"La Segunda Guerra Mundial duró desde 1939 hasta 1945"*
- *"8+99=231"*
- *"Los Insectos crean su comida a través de la fotosíntesis"*
- *"Atenas es la capital de Italia"*

Conectivas

- Elementos del lenguaje que permiten construir una nueva frase mediante dos proposiciones, cuyo contenido de información es el de cada frase aislada pero añadiendo la característica de simultaneidad a ambas
- Hay cuatro tipos:
  - Negación (~)
  - Conjunción ($\wedge$)
  - Disyunción ($\vee$)
  - Condicional ($\rightarrow$)

Conectivas

- Negación (~)

Permite construir una frase a partir de otra

- "No p"
- "Es falso que p"
- "No es cierto que p"

Si p es "Juan es alto", entonces "No es cierto que Juan sea alto" sería ~p

Conectivas

- Conjunción ($\wedge$)

  Permite unir dos frases

  - "p y q"
  - "p pero q"
  - "p sin embargo q"
  - "p no obstante q"
  - "p a pesar de q"

Si p es "Hay sol"
Si q es "Hace frío"
Entonces "Hay sol, pero hace frío"
sería $p \wedge q$

Conectivas

- Disyunción ($\vee$)
  - "O p o q o ambas cosas"
  - "Al menos p o q"
  - p o q (se asume que es incluyente)
  - "Como mínimo p o q"

Si p es "Hace sol"
Si q es "Hace frío"
Entonces "O hace sol o hace frío" sería $p \vee q$

Conectivas

- Condicional ($\rightarrow$)

  Representa la relación causa/efecto
  - “Si p entonces q”
  - “p sólo si q”
  - “q si p”
  - “q necesario para p”
  - “p suficiente para q”
  - “No p a menos que q”
  - “Solo si q entonces p”

Si p es “Está nublado”
Si q es “Llueve”
Entonces “Si llueve está nublado” sería $q \rightarrow p$

Conectivas

- Bicondicional ($\leftrightarrow$)
  - $p \leftrightarrow q$ es una forma equivalente a $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
  - p si y solo si q
  - p es lo mismo que q
  - p es equivalente a q

Conectivas. Otras notaciones

$\neg p$	"no p"	negación	$\sim p$
$p \wedge q$	"p y q"	conjunción	p&q
$p \vee q$	"p o q"	disyunción	
$p \rightarrow q$	"si p, entonces q"	condicional	$p \supset q$, $p \Rightarrow q$
$p \leftrightarrow q$	"p si y sólo si q"	bicondicional	$p \equiv q$, $p \Leftrightarrow q$

Sintaxis. Reglas de formación

- Las frases del lenguaje generalmente son más complejas aunque siempre se pueden descomponer en enunciados simples unidos por conectivas
- Para escribir estas frases complejas mediante el cálculo proposicional, existen unas reglas de formación (sintaxis)
- Dichas reglas están inspiradas en las reglas del lenguaje natural (teoremas)

Sintaxis. Reglas de formación

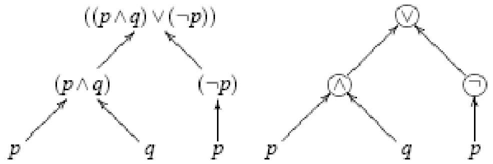
- Se dice que una frase o **fórmula es sintácticamente correcta (fsc)** si se forma mediante las siguientes reglas:
  - Las proposiciones **p**, **q**, **r…** son **fsc**
  - Si **A** y **B** son **fsc**, también lo son
    - ~A, ~B, A∧B, A∨B, A→B
  - Sólo son **fsc** las que cumplen las condiciones anteriores

Sintaxis. Reglas de formación

- En ocasiones hay margen para la ambigüedad

$$p \wedge q \vee \sim p$$

- Esto se puede solucionar con paréntesis
- Fijados los paréntesis adecuados, a cada fórmula le corresponde un único árbol sintáctico (y viceve



Reglas de Sintaxis para Desambiguación

- Una conectiva afecta a la proposición que le sigue o al conjunto de proposiciones y conectivas inmediata a ellas entre paréntesis
- Es posible la eliminación de paréntesis. Para ello se define la siguiente jerarquía

Nivel 1 $\sim$ $\quad \sim p \vee \sim q$ equiv. $(\sim p) \vee (\sim q)$

Nivel 2 $\wedge$ $\quad p \wedge q \vee r$ equiv. $((p \wedge q) \vee r)$

Nivel 3 $\vee$ $\quad p \wedge q \to r \vee s$ equiv. $(p \wedge q) \to (r \vee s)$

Nivel 4 $\to$ $\quad (r \wedge s) \vee p \to \sim p \wedge q$ equiv. $[(r \wedge s) \vee p] \to [(\sim p) \wedge q]$

Nivel 5 $\leftrightarrow$ $\quad p \leftrightarrow q \to r$ equiv. $p \leftrightarrow (q \to r)$

- Las conectivas (a igualdad de prioridad) se evaluarán de izquierda a derecha, (así como los paréntesis)

$p \to q \to r$ equiv. $((p \to q) \to r)$

Proceso de formalización

- Reconocer las **proposiciones simples** (tb. **atómicas**) y **etiquetarlas** claramente
- Reconocer las **proposiciones compuestas** en el texto, que agrupamos con paréntesis
- Añadir las conectivas que unen dichos bloques, reconociendo qué conectivas son mediante las **frases tipo**

Formalización: ejemplos

- No es cierto que María tenga 50 años
  - No es cierto que **María tenga 50 años (a)**
  - ~ a
- Pedro tiene un CI de 140, pero suspende siempre
  - **Pedro tiene un CI de 140 (ci)**, pero **suspende siempre (s)**
  - ci ^ s
- Si una sustancia orgánica se descompone, sus componentes se transforman en abono y fertilizan el suelo.
  - Si **una sustancia orgánica se descompone (desc)**, **sus componentes se transforman en abono (a)** y **fertilizan el suelo (f)**.
  - desc →(a ^ f)

Formalización: ejemplos

- *"If p then q else r"*

$$(p \rightarrow q) \wedge (\sim p \rightarrow r)$$

- *"Antonio, Blanca y Carmen vienen a la fiesta si y solo si David no viene, pero, si no vienen ni Antonio ni Blanca, entonces David viene sólo si Carmen lo hace."*

$$((a \wedge b \wedge c) \leftrightarrow \sim d) \wedge ((\sim a \wedge \sim b) \rightarrow (d \rightarrow c))$$

Formalización: ejemplos

Frase	Formalización
No es cierto que María tenga 50 años	~a
Pedro tiene un CI de 140, pero suspende siempre	i ∧ s
A pesar de que estaba lloviendo, asistieron cien personas	l ∧ c
O viene Ana o Carmen, o ambas	a ∨ c
Si lo deseas entonces lo conseguirás	d → c
Tener pasaporte es necesario para pasar la frontera	f → p
Ser habilidoso es suficiente para poder instalar un enchufe	h → e
Te creeré sólo si traes los originares	c → o
Si la temp. baja de 10º, me quedaré en casa y dormiré	t → c ∧ d
Ganaremos el partido sólo si jugamos	g → j

Resumen Formalización Conectivas

- Negación ($\sim p$):
  - No p
  - Es falso que p
  - No es cierto que p
- Conjunción ($p \wedge q$):
  - p y q
  - p pero q
  - p sin embargo q
  - p no obstante q
  - p a pesar de q
- Disyunción ($p \vee q$):
  - O p o q o ambas cosas
  - Al menos p o q
  - Como mínimo p o q
- Condicional ($p \to q$):
  - Si p entonces q
  - p sólo si q
  - q si p
  - q necesario para p
  - p suficiente para q
  - No p a menos que q

Parte III

Tema 2. Demostración en Proposiciones

Tema 2:
Teoría de la Demostración

Lógica

Grado en Ingeniería Informática

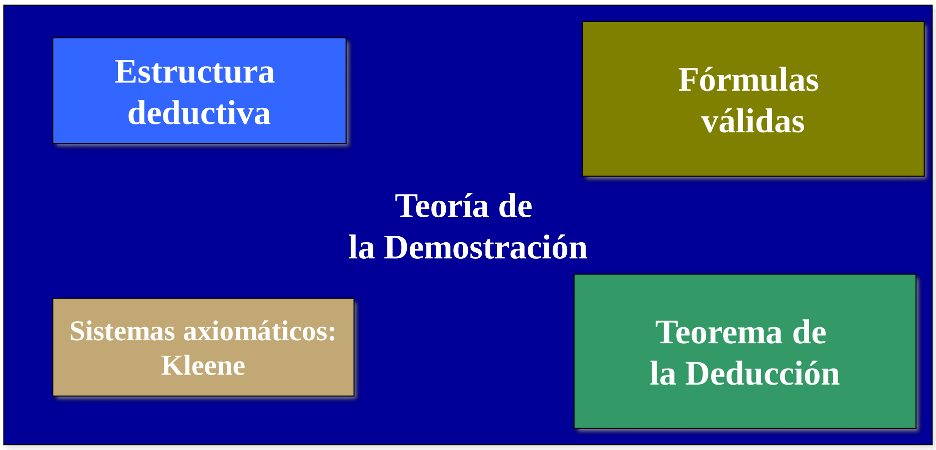
2018/19

uc3m

Una vez en este punto…

- Hasta este momento nos hemos limitado a simbolizar (representar nociones por medio de símbolos) pero no hemos formalizado la estructura deductiva.
- Es necesario representar matemáticamente los procesos de razonamiento mediante los cuales se obtienen conclusiones a partir de premisas
- Para esto abordaremos la Teoría de la Demostración (deducción axiomática)

Mapa conceptual



Introducción a la T. de la Demostración

- **Estructura deductiva:** es una representación formal de un proceso de razonamiento para obtener una **conclusión** a partir de unas **premisas**.

Premisas → Conclusión

- Las deducciones se demuestran fórmula a fórmula.
- Las conclusiones se apoyan en fórmulas previamente probadas o dadas por buenas

Introducción a la T. de la Demostración

- La formalización de las **estructuras deductivas** en teoría de la demostración requiere:
  - Un sistema de fórmulas válidas.
    - Una serie de fórmulas que se asumen como válidas por hipótesis (axiomas del sistema)
    - Unas reglas de demostración o inferencia que permiten obtener nuevas fórmulas válidas a partir de los axiomas.
  - Una definición de deducción que permita, aplicando las reglas, representar cualquier deducción correcta.

Teoría de la demostración

- **Definición:** un sistema de demostración formal S o sistema de pruebas se define matemáticamente mediante los siguientes cuatro elementos:
  - **A** es el alfabeto del sistema: el conjunto de símbolos que se pueden utilizar,
  - **F** es el conjunto de reglas de sintaxis: las reglas que permiten definir las fórmulas bien construidas,
  - **X** es el conjunto de axiomas: fórmulas válidas por definición,
  - **R** es el conjunto de reglas de inferencias: reglas de transformación que permiten inferir una fórmula, la conclusión, a partir de un conjunto de fórmulas, las condiciones o premisas.
- Es necesario que el conjunto de axiomas y reglas sea consistente (no contradictorio):
  - no pueda demostrarse una fórmula y su negación.

Teoría de la demostración

- Un sistema de demostración *S* como el anterior se puede representar en forma compacta como

S = (A, F, X, R)

- Existen varios sistemas, entre los que podemos mencionar:
  - Sistema L (Lukasiewizc y Church).
  - Sistema PM. (Principia Mathematica)
  - Sistema de Kleene.

Teoría de la demostración

- Sistemas de demostración se pueden dividir en dos clases:
  - Sistemas directos
  - Sistemas indirectos (o por refutación).
- **Sistemas directos:** los primeros aplican una cadena finita de reglas de inferencia hasta llegar a la fórmula que se quiere demostrar.
  - Los sistemas de demostración directos tienen interés histórico y además son los más naturales ya que son los más cercanos a la forma de razonamiento habitual.
  - Los sistemas directos son de difícil automatización.
  - El sistema de demostración directo que vamos a estudiar es el sistema axiomático de Kleene
- **Sistemas indirectos:** aplican la técnica de reducción al absurdo.

Teoría de la demostración

- Sistema L (Alfabeto A={prop., $\rightarrow$, ~, (,)}
  - Axiomas:
    - **A1.** $\vdash A \rightarrow (B \rightarrow A)$
    - **A2.** $\vdash (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$
    - **A3.** $\vdash (\sim A \rightarrow \sim B) \rightarrow (B \rightarrow A)$
  - Regla de demostración:

$$\frac{\vdash A \rightarrow B, \ \vdash A}{\vdash B}$$

  - Reglas de interdefinición de conectivas:
    - $A \wedge B \ \leftrightarrows \ \sim(A \rightarrow \sim B)$
    - $A \vee B \ \leftrightarrows \ \sim A \rightarrow B$
    - $A \leftrightarrow B \ \leftrightarrows \ \sim((A \rightarrow B) \rightarrow \sim(B \rightarrow A))$

Teoría de la demostración

- Sistema axiomático de KLEENE:

  K= (A, F, X, R**)**

- Definido por:
  1. A: Un alfabeto compuesto por:
     - Símbolos p, q, r, s, t, .. (proposiciones atómicas)
     - Símbolos de conectivas (~, ∧, ∨, →)
     - Paréntesis "(", ")".

Teoría de la demostración

- Sistema axiomático de KLEENE:

  K= (A, **F**, X, R**)**
- Definido por:
  2. F: el conjunto de las fórmulas bien construidas (fbc) se define recursivamente como:
     - At: toda proposición atómica es una fbc,
     - ~: si A es una fbc entonces ~A es una fbc,,
     - Resto: si A y B son fbc, entonces $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \to B$, $B \to A$ son fbc.
     - Toda fbc se obtiene mediante las tres reglas anteriores.

Nota: en lo que se sigue usaremos también la conectiva de equivalencia (o bicondicional) entre dos fórmulas, $A \leftrightarrow B$: Esta conectiva se entenderá como una forma abreviada de representar la fórmula bien construida $(A \to B) \wedge (B \to A)$.

Teoría de la demostración

- Sistema axiomático de KLEENE:

  K= (A, F, **X**, R**)**
- Definido por:
  3. X: Axiomas

Fórmula válida

A1. $\vdash A \to (B \to A)$

A2. $\vdash (A \to B) \to ((A \to (B \to C)) \to (A \to C))$

A3. $\vdash A \to (B \to A \wedge B)$

A4. $\vdash A \wedge B \to A$, $\vdash A \wedge B \to B$

A5. $\vdash A \to A \vee B$, $\vdash B \to A \vee B$

A6. $\vdash (A \to C) \to ((B \to C) \to (A \vee B \to C))$

A7. $\vdash (A \to B) \to ((A \to \sim B) \to \sim A)$

A8. $\vdash \sim\sim A \to A$

Teoría de la demostración

- Sistema axiomático de KLEENE:
  K= (A, F, X, **R)**
- Definido por:
  4. R: Regla de demostración (Modus Ponens):

$$\frac{\vdash A \rightarrow B,, \vdash A}{\vdash B}$$

De A → B y A, se puede deducir B (como fórmula válida)

Concepto de demostración

- Una demostración de una fórmula A en el sistema, es una sucesión de fórmulas $p_1,p_2,p_3,\ldots,p_n$ tales que:
  - Cada fórmula p_i, elemento de la sucesión es:
    - Un axioma.
    - Una fórmula válida obtenida a partir de las anteriores, aplicando la regla de demostración.
  - El **último elemento** de la sucesión: $\mathbf{p_n}$ es precisamente la **fórmula a demostrar** A.

Concepto de demostración

- Ejemplo de demostración I

T. Identidad: $\mathbf{A \rightarrow A}$

1. $\vdash A \rightarrow (A \rightarrow A)$ Axioma 1 de Kleene $B \Leftrightarrow A$
2. $\vdash (A \rightarrow (A \rightarrow A)) \rightarrow ((A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A))$

   Axioma 2 de Kleene, definiendo $B \Leftrightarrow A \rightarrow A$, $C \Leftrightarrow A$, $A \Leftrightarrow A$
3. $\vdash (A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A)$ Modus Ponens 1 y 2
4. $\vdash (A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A))$ Axioma 1 de Kleene, definiendo $B \Leftrightarrow A \rightarrow A$
5. $\vdash (A \rightarrow A)$ Modus ponens 4,3

Concepto de demostración

- Ejemplo de demostración II

Commutatividad de la disyunción: $\mathbf{(A \vee B) \rightarrow (B \vee A)}$

1. $\vdash (A \rightarrow B \vee A) \rightarrow ((B \rightarrow B \vee A) \rightarrow (A \vee B \rightarrow B \vee A))$

   Axioma 6, definiendo $C \Leftrightarrow B \vee A$
2. $\vdash A \rightarrow B \vee A$ Axioma 5
3. $\vdash (B \rightarrow B \vee A) \rightarrow (A \vee B \rightarrow B \vee A)$ Modus Ponens 1,2
4. $\vdash B \rightarrow B \vee A$ Axioma 5
5. $\vdash (A \vee B \rightarrow B \vee A)$ Modus Ponens 3,4

Deducción

- Una deducción o estructura deductiva se describe mediante dos sucesiones separadas por el signo $\Rightarrow$

$$p_1,p_2,p_3,\ldots,p_n \Rightarrow q_1,q_2,..,q_m$$

- La sucesión p_i es el antecedente de la deducción y sus elementos se llaman premisas. La sucesión q_i es el consecuente de la deducción y sus elementos se llaman conclusiones.

Deducción

- Deducción correcta
  - Una estructura deductiva se define como correcta cuando la sucesión consecuente se obtiene de acuerdo con alguna de las reglas siguientes.
    - q_i es una de las premisas.
    - q_i es una fórmula válida del sistema (axioma o teorema[1]).
    - q_i se deduce de alguna premisa o alguna conclusión previa aplicando las reglas de inferencia.

[1]*Fórmula obtenida a partir de los axiomas mediante las reglas de inferencia con que se define el sistema.*

Deducción

- Ejemplo de deducción (I)

$$\mathbf{A \to (B \to C), B, A \Rightarrow C}$$

1 . $A \to (B \to C)$ Premisa 1
2. B Premisa 2
3. A Premisa 3
4. $B \to C$ Modus Ponens 3,1
5. C Modus Ponens 2,4

Deducción

- Ejemplo de deducción (II)

$$A \to B, B \to C, A \Rightarrow C$$

1 . $A \to B$ Premisa 1
2. $B \to C$ Premisa 2
3. A Premisa 3
4. B Modus Ponens 3,1
5. C Modus Ponens 2,4

Teorema de la deducción

- Permite definir una relación entre las estructuras deductivas correctas y las fórmulas válidas.

- Si $p_1,p_2,\ldots,p_n \Rightarrow q_1,q_2,..,q_m$ es una deducción correcta, existe una deducción correcta de $p_n \rightarrow q_m$ con premisas $p_1,p_2,\ldots,p_{n-1}$:

$$p_1,p_2,\ldots,p_{n-1} \Rightarrow q_1,q_2,.., q_{m-1}, p_n \rightarrow q_m$$

- Es decir, si $q_1,q_2,..,q_m$ es deducible de $p_1,p_2,\ldots,p_n$, entonces $p_n \rightarrow q_m$ es deducible de $p_1,p_2,\ldots,p_{n-1}$

Teorema de la deducción

- De acuerdo con el concepto de demostración, la deducción

$$p_1,p_2,\ldots,p_n \Rightarrow q_1,q_2,..,q_m$$

se puede escribir como la secuencia

$$p_1,p_2,\ldots,p_{n-1}, p_{n,} q_1,q_2,.., q_m$$

o también (por teorema de la deducción)

$$p_1,p_2,\ldots,p_{n-1}, q_1,q_2,.., q_{m-1},p_n \rightarrow q_m$$

Teorema de la deducción

- Cuestiones clave:
  - De una estructura deductiva correcta siempre es posible encontrar una fórmula válida que la representa
    - Aplicar el teorema de la deducción de forma sucesiva hasta que desaparezca la secuencia antecedente).
  - Una estructura deductiva correcta es también una regla de demostración si se asumen como fórmulas válidas las premisas.

Teorema de la deducción

- Si $p_1,p_2,p_3,\ldots,p_n \Rightarrow q$ es una deducción correcta, entonces

  $p_1,p_2,p_3,\ldots,p_{n-1} \Rightarrow p_n \rightarrow q$ es también una deducción correcta

  $p_1,p_2,p_3,\ldots,p_{n-2} \Rightarrow p_{n-1} \rightarrow (p_n \rightarrow q)$ es también una deducción correcta

  .....

  $\vdash p_1 \rightarrow (p_2 \rightarrow (p_3 \rightarrow \ldots (p_n \rightarrow q))$ es una fórmula válida

- También es válido el proceso inverso de fórmula válida a deducción correcta

Teorema de la deducción

- Ejemplo1:

  Si $A \wedge B,\ B \rightarrow C,\ C \rightarrow D \Rightarrow D$ es una deducción correcta, entonces:

  $A \wedge B,\ B \rightarrow C \Rightarrow (C \rightarrow D) \rightarrow D$ también lo es

  $A \wedge B \Rightarrow (B \rightarrow C) \rightarrow ((C \rightarrow D) \rightarrow D)$ también lo es

  $\vdash A \wedge B \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow ((C \rightarrow D) \rightarrow D))$ es fórmula válida

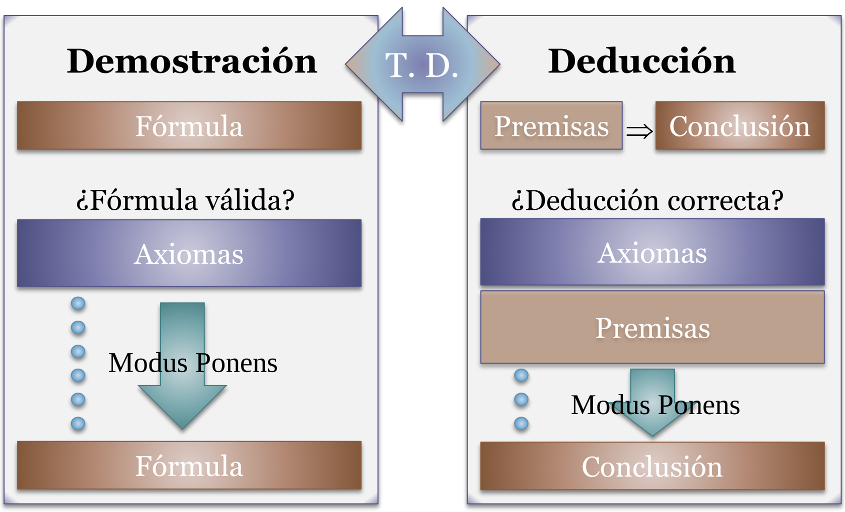
- Ejemplo2:

  Si $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$ es fórmula válida, entonces:

  $(A \rightarrow B),\ (B \rightarrow C) \Rightarrow (A \rightarrow C)$ es deducción correcta

  $(A \rightarrow B),\ (B \rightarrow C),\ A \Rightarrow C$ es deducción correcta

Demostración vs deducción



Reglas derivadas (aplicando TD)

- Axiomas

Con el T. de la Deducción

- **A1 .** $\vdash$ A→(B→A) — A ⇒ B → A
- **A2.** $\vdash$ (A→B)→((A → (B → C)) → (A→C)) — A → B, A → (B → C), A ⇒ C
- **A3.** $\vdash$ A → (B → A ∧ B) — A, B ⇒ A ∧ B
- **A4.** $\vdash$ A ∧ B → A ,, $\vdash$ A ∧ B → B — A ∧ B ⇒ A   A ∧ B ⇒ B
- **A5.** $\vdash$ A → A ∨ B,, $\vdash$ B → A ∨ B — A ⇒ A ∨ B   B ⇒ A ∨ B
- **A6.** $\vdash$ (A → C) → ((B → C) → (A ∨ B → C)) — A → C, B → C, A ∨ B ⇒ C
- **A7.** $\vdash$ (A → B) → ((A → ~B) → ~A) — A → B, A → ~B ⇒ ~A
- **A8.** $\vdash$ ~~A → A — ~ ~ A ⇒ A

Reglas derivadas (aplicando TD)

- Axiomas
  - **A1 .** A ⇒ B→A — Introducción del antecente
  - **A2.** A→B, A → (B → C), A ⇒ C
  - **A3.** A, B ⇒ A ∧ B — Regla del producto
  - **A4.** A ∧ B ⇒ A ,, A ∧ B ⇒ B — Regla de simplificación
  - **A5.** A ⇒ A ∨ B ,, B ⇒ A ∨ B — Regla de la adición
  - **A6.** A → C, B → C, A ∨ B ⇒ C — Prueba por casos
  - **A7.** A → B, A → ~B ⇒ ~A — Reducción al absurdo
  - **A8.** ~~A ⇒ A — Eliminación de la doble negación

Teoremas

Definición recursiva de **teorema**:

- Un teorema es una fórmula válida (demostrable) y tiene la siguiente definición recursiva:
  - Una fórmula bien construida *A* es un teorema si es un axioma o si se obtiene como conclusión de la aplicación de un conjunto de reglas de inferencias a otros teoremas.

Es un axioma
O
se obtiene como conclusión de otras reglas

- La demostración de un teorema es la demostración de una deducción cuyo conjunto de premisas es vacío.

Teoremas

T3: Modus ponens (T. Deducción)

$\vdash A \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow B)$

RD: A, A → B, ⇒ B

- De una implicación y de su premisa se deduce su conclusión.

Ejemplo:

P1. Luis es un hombre
P2. Si Luis es un hombre entonces es mortal
Q => Luis es mortal.

Teoremas

T1: Teorema de la identidad:

$$\vdash A \rightarrow A$$

RD: $A \Rightarrow A$

De toda fórmula se deduce ella misma.

Ya demostrado anteriormente.

Teoremas

T2: Regla del silogismo (prop. Transitiva)

$\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$

RD: $A \rightarrow B, B \rightarrow C \Rightarrow A \rightarrow C$

De dos implicaciones ($A \rightarrow B$ y $B \rightarrow C$) tales que la conclusión de la primera es la premisa de la segunda se deduce la implicación de la premisa de la primera fórmula a la conclusión de la segunda. ($A \rightarrow C$).

Ejemplo:

P1. *Si como mucho entonces me duele la tripa.*

P2. *Si me duele la tripa entonces me tumbo en la cama*

Q => *Si como mucho entonces me tumbo en la cama*

Ya demostrado anteriormente.

Teoremas

T4: Excontradictione Quodlibet

$A \rightarrow (\sim A \rightarrow B)$ o bien, $\vdash \sim A \rightarrow (A \rightarrow B)$

RD: $A, \sim A \Rightarrow B$

- De una fórmula y de su negación se deduce **cualquier fórmula**.
- **Ejemplo**:
  - P1. Pedro es un hombre
  - P2. Pedro no es un hombre.
  - *Q* => Por lo tanto se deduce que el cielo es azul.

Ya demostrado anteriormente.

Teoremas

T5: Producto Condicional

$\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B \wedge C))$

RD: $A \rightarrow B, A \rightarrow C \Rightarrow A \rightarrow B \wedge C$

- De dos implicaciones con la misma premisa se deduce la implicación de esa misma premisa y conjunción de sus conclusiones.
- **Ejemplo**: si x es par, es divisible entre dos y si x es par entonces no es impar, por lo tanto, se deduce que si x es par, entonces x es divisible entre dos y no es impar.

Teoremas

T5: Producto Condicional

$$\vdash (A \to B) \to ((A \to C) \to (A \to B \wedge C))$$

$$A \to B,, A \to C,, A \Rightarrow B \wedge C$$

1 .	$A \to B$	Premisa 1
2.	$A \to C$	Premisa 2
3.	A	Premisa 3
4.	B	Modus Ponens 3,1
5.	C	Modus Ponens 3,2
6.	$\vdash B \to (C \to B \wedge C)$	Ax 3
7.	$(C \to B \wedge C)$	Modus Ponens 4,6
8.	$B \wedge C$	Modus Ponens 5,7

Teoremas

T6: Contraposición

RD: $A \to B \Rightarrow \sim B \to \sim A$

$\vdash (A \to B) \to (\sim B \to \sim A)$,

$\vdash (A \to \sim B) \to (B \to \sim A)$, (Equivalente)

$\vdash (\sim A \to B) \to (\sim B \to A)$ (Equivalente)

- De una implicación se deduce su "contrapositiva".
- **Ejemplo**: de "voy en metro sólo si llueve", se deduce, que "si no llueve no voy en metro"

Teoremas

T7: Interdefinición (de conectivas) respecto conjunción

$\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (\sim (A \wedge \sim B))$ (Directa) | RD: $A \rightarrow B \Rightarrow \sim (A \wedge \sim B)$

- De una implicación se deduce la negación de la conjunción de su premisa con la negación de su conclusión.
- **Ejemplo**: de "voy en metro sólo si llueve" se deduce que no es posible que vaya en metro y no llueva.
- Y también el recíproco del anterior: una implicación se deduce de la negación de la conjunción de su premisa con la negación de su conclusión:

$\vdash \sim (A \wedge \sim B) \rightarrow (A \rightarrow B)$ (Recíproca) | RD: $\sim (A \wedge \sim B) \Rightarrow A \rightarrow B$

Teoremas

T8: Interdefinición (de conectivas) respecto disyunción

$\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow \sim A \vee B$ (Directa) | RD: $A \rightarrow B \Rightarrow \sim A \vee B$

- De una implicación se deduce la disyunción de la negación de su premisa con su conclusión.
- **Ejemplo:** de "Una función derivable es continua" se deduce que "Una función o no es derivable, o es continua".

$\vdash \sim A \vee B \rightarrow (A \rightarrow B)$ (Recíproca) | RD: $\sim A \vee B \Rightarrow A \rightarrow B$

Teoremas

T9: Leyes de De Morgan

$\vdash \sim(A \vee B) \rightarrow \sim A \wedge \sim B$ (Directa)

RD: $\sim(A \vee B) \Rightarrow \sim A \wedge \sim B$

$\vdash \sim A \wedge \sim B \rightarrow \sim (A \vee B)$ (Recíproca)

RD: $\sim A \wedge \sim B \Rightarrow \sim(A \vee B)$

De la negación de la disyunción de dos fórmulas se deduce la conjunción de las negaciones de las mismas.

- **Ejemplo**: de "no es posible que Pedro sea hermano de Marta o que sea hermano de Luis". De esto se deduce que "Pedro no es hermano de Marta y Pedro no es hermano de Luis".

T9b: Leyes de De Morgan

$\vdash \sim(A \wedge B) \rightarrow \sim A \vee \sim B$ (Directa), $\vdash \sim A \vee \sim B \rightarrow \sim(A \wedge B)$ (Recíproca)

RD: $\sim(A \wedge B) \Rightarrow \sim A \vee \sim B$

RD: $\sim A \vee \sim B \Rightarrow \sim(A \wedge B)$

Teoremas

Propiedades conjunción $\wedge$

T10: Propiedad conmutativa

$\vdash (A \wedge B) \rightarrow (B \wedge A)$, $\vdash (B \wedge A) \rightarrow (A \wedge B)$

T11: Propiedad asociativa

$\vdash A \wedge (B \wedge C) \rightarrow (A \wedge B) \wedge C$, $\vdash (A \wedge B) \wedge C \rightarrow A \wedge (B \wedge C)$

T12: Propiedad distributiva

$\vdash A \wedge (B \vee C) \rightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$,

$\vdash (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \rightarrow A \wedge (B \vee C)$

T13: Propiedad de absorción

$\vdash A \wedge (A \vee B) \rightarrow A$, $\vdash A \rightarrow A \wedge (A \vee B)$

T14: Idempotencia

$\vdash A \wedge A \rightarrow A$, $\vdash A \rightarrow A \wedge A$

Teoremas

T15: Propiedad conmutativa

$\vdash (A \lor B) \to (B \lor A)\,,\ \vdash (B \lor A) \to (A \lor B)$

T16: Propiedad asociativa

$\vdash A \lor (B \lor C) \to (A \lor B) \lor C\,,\ \vdash (A \lor B) \lor C \to A \lor (B \lor C)$

T17: Propiedad distributiva

$\vdash A \lor (B \land C) \to (A \lor B) \land (A \lor C)\,,$

$\vdash (A \lor B) \land (A \lor C) \to A \lor (B \land C)$

T18: Propiedad de absorción

$\vdash A \lor (A \land B) \to A,\ \vdash A \to A \lor (A \land B)$

T19: Idempotencia

$\vdash A \lor A \to A\,,\ \vdash A \to A \lor A$

Teoremas

T20: Coimplicación

$\vdash (A \to B) \to (B \to A) \to (A \leftrightarrow B)$

- La coimplicación (doble implicación) entre dos fórmulas se deduce de las dos implicaciones que tienen estas dos fórmulas como premisa y conclusión y como conclusión y premisa, respectivamente.

Teoremas

T21: Eliminación de la Coimplicación

$$\vdash (A \leftrightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B)$$
$$\vdash (A \leftrightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow A)$$

- De una coimplicación entre dos fórmulas se deducen las implicaciones de cada una a la otra.

T22: Propiedad Simétrica Coimplicación

$$\vdash (A \leftrightarrow B) \rightarrow (B \leftrightarrow A)$$

Teoremas

T23: Importación-Exportación

$$\vdash (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \wedge B \rightarrow C) \quad \text{(Directa)}$$
$$\vdash (A \wedge B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \quad \text{(Recíproca)}$$

- De una implicación cuya conclusión es una implicación $A \rightarrow B$ se deduce la implicación de la conjunción de las dos premisas a la conclusión B.

- **Ejemplo:** Sean
  - p = n es un número natural,
  - q = n es par,
  - r = el cuadrado de n es par.

  entonces,
  "si n es número natural, entonces, si n es par, su cuadrado es par.
  Se deduce que:
  "si n es un número natural y es par, entonces su cuadrado es par"

Teoremas

T23: Importación-Exportación

$\vdash (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \wedge B \rightarrow C)$ (Directa)

$\vdash (A \wedge B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C))$ (Recíproca)

$A \rightarrow (B \rightarrow C),\ A \wedge B \Rightarrow C$

- Demostración:
  1. $(A \rightarrow (B \rightarrow C))$ Premisa 1
  2. $A \wedge B$ Premisa 2
  3. $\vdash A \wedge B \rightarrow A$ Ax. 4
  4. A M.P 2,3
  5. $B \rightarrow C$ M.P. 4,1
  6. $\vdash A \wedge B \rightarrow B$ Ax. 4
  7. B M.P 2,6
  8. C M.P. 7,5

Regla de intercambio

- Sea F_A la notación correspondiente a una fórmula del cálculo proposicional en la que aparece la fórmula A. El teorema dice:

$$\text{Si } \vdash A \leftrightarrow B \text{ entonces } \vdash F_A \leftrightarrow F_B$$

- Siendo F_B la fórmula resultante de sustituir la ocurrencia de A en F_A por B

Regla de intercambio

- **1. Conjunción**

$\vdash (A \wedge A) \leftrightarrow A$

$\vdash A \wedge (B \wedge C) \leftrightarrow (A \wedge B) \wedge C$

$\vdash A \wedge (B \vee C) \leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

- **2. Disyunción**

$\vdash (A \vee A) \leftrightarrow A$

$\vdash A \vee (B \vee C) \leftrightarrow (A \vee B) \vee C$

$\vdash A \vee (B \wedge C) \leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

Regla de intercambio

- **3. Negación**

$\vdash \sim\sim A \leftrightarrow A$

- **4. Interdefiniciones**

$\vdash \sim A \vee B \leftrightarrow (A \rightarrow B)$

$\vdash \sim(A \wedge B) \leftrightarrow \sim A \vee \sim B$

$\vdash \sim(A \vee B) \leftrightarrow \sim A \wedge \sim B$

$\vdash \sim(A \wedge \sim B) \leftrightarrow (A \rightarrow B)$

Regla de intercambio

- Ejemplo:

  Transformación de ~(A → ~B) ∧ (B → ~(C ∨ D)) en una conjución de disyunciones donde A, B, C y D

1.	~(A → ~B) ∧ (B → ~(C ∨ D))	
2.	~(~A ∨ ~B) ∧ (B → ~(C ∨ D))	4.1
3.	~(~A ∨ ~B) ∧ (~B ∨ ~(C ∨ D))	4.1
4.	(~~A ∧ ~~B) ∧ (~B ∨ ~(C ∨ D))	4.2
5.	(~~A ∧ ~~B) ∧ (~B ∨ (~C ∧ ~D))	4.2
6.	(~~A ∧ ~~B) ∧ (~B ∨ ~C) ∧ (~B ∨ ~D)	2.3
7.	A ∧ B ∧ (~B ∨ ~C) ∧ (~B ∨ ~D)	3.1

- Modus Ponens

  $P, P \to Q \Longrightarrow Q$
- Silogismo

  $P \to Q, Q \to R \Longrightarrow P \to R$
- Mutación de premisas

  $A \to (B \to C) \Longrightarrow B \to (A \to C)$
- Introducción de antecedente

  $A \Longrightarrow B \to A$
- Conmutativa

  $A \wedge B \Longrightarrow B \wedge A$
- Contraposición en $\to$

  $A \to B \Longrightarrow \sim B \to \sim A$
- Modus Tollens

  $A \to B, \sim B \Longrightarrow \sim A$
- Doble negación

  $A \Longrightarrow \sim\sim A$
- Tercio excluso

  $\Gamma \Longrightarrow A \vee \sim A$
- Ex contradictione quodlibet

  $A \wedge \sim A \Longrightarrow B$
- Simplificación

  $A \wedge B \Longrightarrow A$
- Asociativa

  $(A \wedge B) \wedge C \Longrightarrow A \wedge (B \wedge C)$
- Distributiva

  $A \wedge (B \vee C) \Longrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
- Idempotencia

  $A \wedge A \Longrightarrow A$
- Absorción

  $A \wedge (A \vee B) \Longrightarrow A$
- Reglas de Morgan

  $\sim (A \vee B) \Longrightarrow \sim A \wedge \sim B$

  $\sim A \wedge \sim B \Longrightarrow \sim (A \vee B)$

  $\sim (A \wedge B) \Longrightarrow \sim A \vee \sim B$

  $\sim A \vee \sim B \Longrightarrow \sim (A \wedge B)$
- Implicación

  $\sim A \vee B \Longrightarrow A \to B$

  $A \to B \Longrightarrow \sim A \vee B$
- Reflexiva

  $\Longrightarrow A \to A$
- Transitiva

  $A \to B, B \to C \Longrightarrow A \to C$

Parte IV

Tema 3. Calculo de Predicados

Tema 3:
Introducción al Cálculo de Predicados

Lógica

Grado en Ingeniería Informática
2018/19

uc3m

Motivación

Todos los hombres son mortales
Sócrates es un hombre
———————————————
Luego Sócrates es mortal

Propiedades

Juan enseña a Pedro
Algunos hombres enseñan a Pedro
———————————————
Todos los hombres enseñan a alguien

Relaciones

Motivación

- Limitación de la lógica proposicional: su **unidad mínima** es la **proposición**, que tiene información propia y se contempla como un todo.

  Ej: para decir que todos los humanos son mortales habría que decir

  "Pepe es humano" →"Pepe es mortal"
  "Juan es humano" →"Juan es mortal"
  (y así sucesivamente...)

Motivación

- En lógica de predicados (Gottob Frege, 1879) se simbolizan los componentes de una proposición (no se trata como un todo)
- La idea es simbolizar:
  - Qué se afirma (predicado)
  - De quien o quienes (sujetos o términos)

  Ej: Pepe es humano
    - "Pepe" es el sujeto
    - "es humano" el predicado
- El predicado es atribuible a varios sujetos
  - Dominio. Ej: D={alumnos UC3M}, D={alumnos gr84}

Simbolización

- **Términos o sujetos pueden ser:**
  - Constantes, representados por **a, b, c..** representan objetos concretos. Las constantes son individuos o elementos distinguidos del universo del discurso, que es la colección de objetos sobre los cuales queremos razonar.
  - Variables, representados por **x, y, z...** sirven para representar objetos, cuyo dominio hay que especificar.
- **Predicados:**
  - Símbolos para los predicados: **P**, **Q**, **R**,...
  - Se utiliza la notación funcional $P(p_1,\ldots,p_n)$, donde p_i representa el lugar "*i*" en el predicado a ocupar por una variable o constante.
  - A cada lugar se le asigna un sujeto o término, que puede ser constante o variable

Simbolización

- Los predicados tienen un número *n* de argumentos. El número *n* es la aridad del predicado.

1. Predicados *constantes*, *n* = 0: representan proposiciones atómicas. Para representar las proposiciones atómicas se suelen usar los símbolos *p, q, r, s, t* ...
2. Predicados *monádicos*, *n* = 1: representan propiedades de objetos.
3. Predicados poliádicos, *n* > 1: representan relaciones entre objetos.

Ejemplos :

- *P*(*x*): la raíz cuadrada de x es irracional (monádico),
- *P*(*x, y*): *x* es el hermano de *y* (predicado binario),
- *P*(*a, b, c*): *la media de a y b es c* (predicado ternario).

Simbolización

- Es posible asignar a un lugar un conjunto de términos dentro del dominio.
- Para simbolizar esta diferencia se usan los **cuantificadores**.
  - Asignar a una variable **todos** los elementos del dominio:

    (cuantificador universal ∀) **∀xHumano(x)**
    - Ej: para cualquier/todo x, x es humano,
  - Asignar a una variable un **subconjunto** del dominio

    (cuantificador existencial ∃) **∃xRojo(x)**
    - Ej: hay/existen uno (o más) x que son de color rojo
- Las variables afectadas por cuantificadores se definen como ***ligadas***, y **libres** en caso contrario

  Amigo(x,y): x es amigo de y

  En ∀xAmigo(x,y): x es variable ligada o cuantificada; y es variable libre

Simbolización

- La asignación de valores a las plazas puede hacerse de varias formas:

Sea por ejemplo: P(x,y,z): x se sienta en clase entre y y z

- **Sustitución de términos:** Juan se sienta en clase entre Manuela y José

  P(a,b,c)
- **Sustitución variable genérica:** un alumno cualquiera se sienta en clase entre Manuela y José

  P(x,b,c)
- **Sustitución variable incógnita:** un alumno se sienta en clase entre Manuela y José

  P(x,b,c)
- **Cuantificación universal:** todos los alumnos se sientan en clase entre Manuela y José

  ∀xP(x,b,c)
- **Cuantificación existencial:** algunos alumnos se sientan en clase entre Manuela y José

  ∃xP(x,b,c)

Construcción de fórmulas: alfabeto

- Símbolos para los términos
  - Variables: **x**, **y**, **z**, **t**...
  - Constantes: **a**, **b**, **c**,...
- Símbolos para los predicados: **P**, **Q**, **R**, ...
- Símbolos para las conectivas: **~**, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ y paréntesis*
- Símbolos de cuantificación:
  - Universal $\forall$
  - Existencial $\exists$

*(también se considera válida la coimplicación $\leftrightarrow$)

Construcción de fórmulas: sintaxis

- Una fórmula sintácticamente correcta (fsc) en el cálculo de predicados es una sucesión de símbolos del alfabeto que verifica las siguientes reglas de formación:
  - Toda proposición (del cálculo proposicional) es una fsc
  - Si **P** es un predicado de **n** lugares/variables, $\mathbf{P(t_1,\ldots,t_n)}$ entonces es una fsc, siendo $\mathbf{t_i}$ símbolos de términos (objetos/sujetos)
  - Si **A** es una fsc (hechos relativos a objetos o términos) con $\mathbf{x_i}$ variable libre, también son fsc
    - $\forall x_i A(x_1,\ldots,x_i,\ldots x_n)$
    - $\exists x_i A(x_1,\ldots,x_i,\ldots x_n)$
  - Si **A y B** son fsc, también lo son **~A, ~B,** $\mathbf{A\wedge B}$, $\mathbf{A\vee B}$, $\mathbf{A\rightarrow B}$
  - Toda fórmula del cálculo proposicional es sintácticamente correcta en el cálculo de predicados

Construcción de fórmulas: sintaxis

- ¿Están bien construidas?
  - **$\forall yP(x,a) \rightarrow Q(z)$** — **No**
  - **$\forall xP(x,a) \rightarrow Q(z)$** — **Si**
  - **$\forall xP(x,a) \rightarrow \exists xQ(z)$** — **No**
  - **$P(x, \forall y) \rightarrow Q(z)$** — **No**
  - **$\exists x(P(x) \rightarrow \forall yR(y,z))$** — **Si**

Construcción de fórmulas

- Colocación de paréntesis
  - En cuanto a las conectivas, las reglas son iguales a las utilizadas en el cálculo de proposiciones
  - Los cuantificadores sólo afectan a las variables libres inmediatamente siguientes. Para cambiar esto es necesario incluir paréntesis

$$\forall xP(x) \rightarrow Q(x) \text{ vs. } \forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$$

  - Cuando hay varios cuantificadores seguidos, el proceso de cuantificación se realiza en el **orden de mayor a menor proximidad** a la fórmula
  - **El cambio de orden de un cuantificador puede alterar el significado de la frase:**

$$\forall x\exists yF(x,y) \text{ vs. } \exists y\forall xF(x,y)$$

$\forall x\exists yF(x,y)$: Todos son amigos de alguien

$\exists y\forall xF(x,y)$: Hay alguna persona de la que todos son amigos de dicha persona

Construcción de fórmulas

- Ejemplos de ligado en función del paréntesis

  - En $\exists x((P(x) \wedge Q(x)) \vee (P(x) \wedge Q(x)))$
    - la variable ***x*** aparece **ligada** en las dos componentes de la disyunción, ya que el cuantificador existencial la afecta en los dos casos.

  - En $\exists x(P(x) \wedge Q(x)) \vee (P(x) \wedge Q(x))$
    - la variable x está **ligada** en el primer paréntesis y **libre** en el segundo, y el cuantificador existencial solo afecta a la primera parte de la disyunción. Se podría escribir:

$$\exists x(P(x) \wedge Q(x)) \vee (P(y) \wedge Q(y))$$

Construcción de fórmulas

- Ejemplos:
  - 1) *Sócrates es un filósofo, sin embargo no es un deportista*
    - *F*(x): x es un filósofo
    - D(x): x es un deportista
    - a: Sócrates

D: personas

$$F(a) \wedge \sim(D(a))$$

  - 2) *Sócrates es un filósofo o Sócrates es un deportista*

$$F(a) \vee D(a)$$

  - 3) *La luna es de papel si y sólo si Carlos lee muchos Libros*
    - P(x): x es de papel
    - L(x): x lee muchos libros
    - a: luna
    - b: Carlos

D: entes

$$P(\mathrm{a}) \leftrightarrow L(\mathrm{b})$$

Construcción de fórmulas

- Ejemplos:
  - *Todo número primo y mayor que 2 es impar*
    - $P(x)$: x es primo,
    - $Q(x)$: x es mayor que 2
    - $R(x)$: x es impar.

D: números

$$\forall x((P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow R(x))$$

  - *Todo hombre es mortal y hay hombres que no son filósofos*
    - $P(x)$: x es un hombre,
    - $Q(x)$: x es mortal
    - $R(\mathrm{x})$: x es filósofo.

D: entes

$$(\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))) \wedge (\exists x(P(x) \wedge (\sim(R(x))))$$

Construcción de fórmulas

- Funciones. Generalizando el concepto de término
  - Los términos, además de constantes y variables, pueden ser también funciones ($f{:}D^n \rightarrow D$, siendo **D** el **dominio de referencia** o dominio del término)
  - Son una ayuda para la expresión de relaciones. **No presentan propiedades entre los argumentos interpretables como V o F**
  - Es usual utilizar la notación **f, g, h** y **letras griegas**

Construcción de fórmulas

- Funciones. Generalizando el concepto de término
  - Una vez consideramos las funciones, el concepto de término se puede definir de forma recursiva de la siguiente manera:
    - Son términos las variables y constantes
    - Si φ es una **función**, son términos las expresiones $\boldsymbol{\varphi(t_1, t_2,..,t_n)}$ siendo $\mathbf{t_i}$ términos y **n** el número de variables de la función

Ejemplo: $\boldsymbol{\varphi(x_1, a_1, \psi[x_2, a_2,\sigma(x_3)])}$

Construcción de fórmulas

- Funciones. Generalizando el concepto de término
  - *Ejemplos de términos: x, a, f(x), g(x, y), g(x, f(x))*
    - donde *x* es una variable, *a* es una constante, *f* es una función monádica.
    - *g* es una función binaria.
    - Los primeros dos términos de la lista son atómicos y los restantes son compuestos.

Construcción de fórmulas

- El uso de funciones permite simplificar la estructura de las fórmulas.
  - Ej: ningún producto de dos números naturales es primo
    - **Dominio:** números naturales
    - **Predicados:**
      - R(x,y,z): z es el producto de x e y
      - P(w): w es primo

$$\forall x\ \forall y\ \forall z(R(x,y,z) \rightarrow \sim P(z))$$

    - Si se considera la función **$\psi(x,y)=x*y$**, la frase se puede escribir de la forma

$$\forall x\ \forall y \sim P(\psi(x,y))$$

- Deben ser funciones que tomen valores en el dominio, es decir, funciones que se aplican sobre un conjunto de términos para dar otro término

Importancia del dominio

- A la hora de formalizar en lógica de predicados es fundamental establecer el **dominio de definición** (universo)
- En función de éste, se pueden asignar fórmulas distintas a las mismas frases del lenguaje natural

Ej: “todas las águilas vuelan alto”

  - Dominio de definición: las águilas
    - V(x) x vuela alto

$$\forall x V(x)$$

  - Dominio de definición: las aves
    - A(x) x es águila
    - V(x) x vuela alto

$$\forall x(A(x) \rightarrow V(x))$$

CP de orden superior

Cálculo de predicados

- **Primer orden:** los cuantificadores se aplican exclusivamente a las variables
  - **P(x,y) :** **x=y**
  - $\forall x \exists y P(x,y)$
- **Orden superior:** los cuantificadores se aplican a **funciones o predicados**

Ej: existe al menos una función tal que φ(a)=b

$$\exists\varphi P(\varphi(a),b)$$

Ej: algunas relaciones entre pares de alumnos de la clase son simétricas

$$\exists P\ \forall x \forall y (P(x,y) \rightarrow P(y,x))$$

Ejemplos

- Frases simples:
  - Todos son de color azul — $\forall x\ Azul(x)$
  - Juan es rubio — $Rubio(j)$
  - Juan es amigo de todos — $\forall x Amigo(j,x)$
  - Algunos son amigos de Juan — $\exists x Amigo(x,j)$
  - Todos son amigos — $\forall x \forall y Amigo(x,y)$

En cálculo de predicados cuando se formaliza una frase las variables aparecen cuantificadas

Ejemplos

Generalmente los cuantificadores existenciales van con conjunción y los universales con implicación

- Frases compuestas:
  - Algunos republicanos son ricos
    - Existen algunas personas en las que se da simultáneamente la condición de ser republicanos y ricos

$\exists x(P(x) \wedge Rep(x) \wedge Rico(x))$

$\exists x(Rep(x) \wedge Rico(x))$

$\cancel{\exists x(Rep(x) \rightarrow Rico(x))}$

  - Todos los republicanos son ricos
    - No existe nadie que sea republicano y no sea rico
    - Para cualquier x del dominio, si x es republicano, entonces x es rico

$\sim\exists x(Rep(x) \wedge \sim Rico(x))$

$\forall x(Rep(x) \rightarrow Rico(x))$

$\cancel{\forall x(Rep(x) \wedge Rico(x))}$

Ejemplos

- En toda pareja de vecinos existe algún envidioso
  - Cualquiera que sean x e y, si x e y son vecinos, entonces, o x o y o ambos, son envidiosos

$$\forall x\forall y(V(x,y) \rightarrow E(x) \vee E(y))$$

- Todos los que son vecinos se odian entre sí
  - Para cualquier x e y del dominio, si x e y son vecinos, se odian mutuamente

$$\forall x\forall y(Vec(x,y) \rightarrow (O(x,y) \wedge O(y,x)))$$

- Todos los estudiantes de informática son amigos de los aficionados a la lógica
  - Cualquiera que sean x e y, si x es un estudiante de inf., e y es aficionado a la lógica, entonces x es amigo de y

$$\forall x\forall y((EstInf(x) \wedge AficLog(y)) \rightarrow A(x,y))$$

Ejemplos

- Algunos estudiantes de informática tienen amigos aficionados a la lógica
  - Existen algunos elementos de x e y en los que se dan simultáneamente las circunstancias de "x ser estudiante de informática", "y aficionado a la lógica" y "x ser amigo de y"

$$\exists x \exists y((\mathbf{EstInf}(x) \land \mathbf{AficLog}(y)) \land \mathbf{A}(x,y))$$

- Algunos estudiantes de informática sólo son amigos de los aficionados a la lógica.
  - Existe algún x del dominio que es estudiante de informática y sólo es amigo de y si y es aficionado a la lógica

$$\exists x(\mathbf{EstInf}(x) \land \forall y(\mathbf{A}(x,y) \rightarrow \mathbf{AficLog}(y)))$$

Ejemplos

- Algunos franceses son amigos de cualquier español
  - En el dominio de referencia existen individuos x en los que se da simultáneamente la condición de ser francés y la de ser amigo de cualquier y que sea español

$$\exists x(\mathbf{F}(x) \land \forall y(\mathbf{E}(y) \rightarrow \mathbf{A}(x,y)))$$

- Solo los futbolistas admiran a los futbolistas
  - Cualquiera que sean x e y, si x admira a y e y es futbolista, entonces x es futbolista

$$\forall x \forall y(\mathbf{Admira}(x,y) \land \mathbf{F}(y) \rightarrow \mathbf{F}(x))$$

Ejemplos

- Todos los futbolistas admiran solo a los futbolistas
  - Para cualquier *x* del dominio de referencia, si *x* es futbolista entonces, cualquiera que sea *y*, si *x* admira a *y*, entonces y es futbolista

$$\forall x(F(x) \rightarrow (A(x,y) \rightarrow F(y)))$$

- Sólo los tontos se dejan engañar por los vendedores ambulantes
  - Para todo *x* e *y* del dominio de referencia, si *x* se deja engañar por *y* e *y* es vendedor ambulante, entonces *x* es tonto

$$\forall x \forall y\ (E(x,y) \wedge Vend(y) \rightarrow T(x))$$

Ejemplos

- Frases con constantes
  - Juan engaña a Antonio

$$E(j,a)$$

  - Algunos abogados y obreros admiran a López

$$\exists x \exists y\ (AB(x) \wedge OB(y) \wedge A(y,l) \wedge A(x,l))$$

  - Todos los que ayudan a Juan trabajan en casa de Manolo

$$\forall x(A(x,j) \rightarrow T(x,m))$$

Ejemplos

- Otros
  - Algunas plantas no tienen flores

    $$\exists x(P(x) \land \sim F(x))$$

  - Cualquier edificio es habitable

    $$\forall x(E(x) \rightarrow H(x))$$

  - Algunas personas son insoportables

    $$\exists x(P(x) \land I(x))$$

  - Existen personas que no comen carne

    $$\exists x(P(x) \land \sim C(x))$$

Notas prácticas

- Generalmente los cuantificadores existenciales van con conjunción y los universales con implicación.
- Esto puede no ser así dependiendo de que la frase sea hipotética.
- Depende del dominio. El cuantificador $\exists$ va con $\rightarrow$ cuando, la relación $P(x)\rightarrow Q(x)$ no tiene que cumplirse siempre

Hay algún artículo que si se cayese al suelo, se rompería

$$\exists x(\text{Caerse}(x) \rightarrow \text{Romperse}(x))$$

Parte V

Tema 4. Teoría de la Demostración en Cálculo de Predicados

Tema 4:
Teoría de la Demostración en Cálculo de Predicados

Lógica

Grado en Ingeniería Informática

2018/19

Introducción a la T. de la Demostración

Estructura deductiva

Fórmulas válidas

Teoría de la Demostración

Sistemas axiomáticos: Kleene

Teorema de la Deducción

Introducción a la T. de la Demostración

- **Estructura deductiva:** es una representación formal de un proceso de razonamiento para obtener una **conclusión** a partir de unas **premisas**.
- Las deducciones se demuestran fórmula a fórmula.

Introducción a la T. de la Demostración

- La formalización de las **estructuras deductivas** en teoría de la demostración requiere:
  - Un sistema de fórmulas válidas.
    - Una serie de fórmulas que se asumen como válidas por hipótesis (axiomas del sistema)
    - Unas reglas de demostración o inferencia que permiten obtener nuevas fórmulas válidas a partir de los axiomas.
  - Una definición de deducción que permita, aplicando las reglas, representar cualquier deducción correcta.

Teoría de la demostración

- Es necesario que el conjunto de axiomas y reglas sea consistente (no contradictorio):
  - no pueda demostrarse una fórmula y su negación.
- **Definición:** un sistema de demostración formal S o sistema de pruebas se define matemáticamente mediante los siguientes cuatro elementos:
  - **A** es el alfabeto del sistema: el conjunto de símbolos que se pueden utilizar,
  - **F** es el conjunto de reglas de sintaxis: las reglas que permiten definir las fórmulas bien construidas,
  - **X** es el conjunto de axiomas: fórmulas válidas por definición,
  - **R** es el conjunto de reglas de inferencias: reglas de transformación que permiten inferir una fórmula, la conclusión, a partir de un conjunto de fórmulas, las condiciones o premisas.

Teoría de la demostración

Sistema axiomático KLEENE:

$$K = (A,F,X,R)$$

Definido por:

- **A: alfabeto**
  - **variables: x,y,z,.. O constantes: a,b,c,d...**
  - **Conectivas:** $(\sim, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow)$
  - **Cuantificadores:** universal ($\forall$), existencial ($\exists$)
  - **Símbolos de puntuación:** paréntesis y comas. (reglas)
  - **Símbolos propios (predicados):** $P(t_1,t_2,t_3...),Q(t_1,t_2,t_3...)$, ...
  - **Funciones:** f, g, ...

Teoría de la demostración

- **F:** el conjunto de las fórmulas bien construidas (fbc) se define como:

Fórmula atómica (predicado): Una fórmula atómica es una expresión de la forma:

- $R(t_1,...,t_n)$, donde R es un símbolo relacional n-ario (predicado) y $t_1...t_n$ son términos
- Los términos son:
  1. cada constante c es un término
  2. cada variable x es un término
  3. si f es una función n-aria y $t_1...t_n$ son términos, entonces $f(t_1,...,t_n)$ es un término
- Toda fórmula atómica es una fórmula bien construida

~ : si A es una fbc entonces (~ A) es una fbc
(∧, ∨, →, ↔): si A y B son fbc entonces (A* B) es una fbc, para toda conectiva binaria *
∀, ∃: si A es un fbc y x una variable libre entonces (∀xA) y (∃xA) son fbc
Toda proposición es una fbc.

Toda fbc se obtiene mediante las reglas anteriores.

Axiomas de Kleene y Reglas de demostración

3. X: Axiomas

A1 . $\vdash A \to (B \to A)$
A2. $\vdash (A \to B) \to ((A \to (B \to C)) \to (A \to C))$
A3. $\vdash A \to (B \to A \wedge B)$
A4. $\vdash A \wedge B \to A$,, $\vdash A \wedge B \to B$
A5. $\vdash A \to A \vee B$,, $\vdash B \to A \vee B$
A6. $\vdash (A \to C) \to ((B \to C) \to (A \vee B \to C))$
A7. $\vdash (A \to B) \to ((A \to \sim B) \to \sim A)$
A8. $\vdash \sim\sim A \to A$
A9. $\vdash \forall x\, B(x) \to B(t)$ $\quad (\vdash \forall x\, B(x) \to B(y))$
A10. $\vdash B(t) \to \exists x\, B(x)$ $\quad (\vdash B(y) \to \exists x\, B(x))$

Axiomas de Kleene y Reglas de demostración

R: **Modus Ponens**

$$\frac{\vdash A \rightarrow B,, \vdash A}{\vdash B}$$

De A→B y A,
se puede deducir B
(como fórmulas válidas)

Generalización Universal Condicional

$$\frac{\vdash A \rightarrow B(y)}{\vdash A \rightarrow \forall x\, B(x)}$$

Regla de uso:
Es necesario que y no sea
una variable libre de A

Generalización Existencial Condicional

$$\frac{\vdash A(y) \rightarrow B}{\vdash \exists x\, A(x) \rightarrow B}$$

Regla de uso:
Es necesario que y no sea
una variable libre de B

A y B representan cualquier fórmula bien construida.
A(y) y B(y) representan fórmulas cualesquiera en las que la variable "y" está libre.
No tiene porqué ser la única variable: ej. : $A(y) = \forall x(P(x,y) \rightarrow \exists z Q(w,z))$

Concepto de demostración

- Una demostración de una fórmula A en el sistema, es una sucesión de fórmulas $p_1,p_2,p_3,\ldots,p_n$ tales que:
  - Cada fórmula p_i, elemento de la sucesión es:
    - Un axioma.
    - Una fórmula válida obtenida a partir de las anteriores, aplicando la regla de demostración.
  - El **último elemento** de la sucesión: $\mathbf{p_n}$ es precisamente la **fórmula a demostrar** A.

Concepto de deducción

- Una deducción o estructura deductiva se describe mediante dos sucesiones separadas por el signo $\Rightarrow$

$$p_1,p_2,p_3,\ldots,p_n \Rightarrow q_1,q_2,..,q_m$$

- La sucesión p_i es el antecedente de la deducción y sus elementos se llaman premisas. La sucesión q_i es el consecuente de la deducción y sus elementos se llaman conclusiones.

Deducción correcta

- Una estructura deductiva se define como correcta cuando la sucesión consecuente se obtiene de acuerdo con alguna de las reglas siguientes.
  - q_i es una de las premisas.
  - q_i es una fórmula válida del sistema (axioma o teorema).
  - q_i se deduce de alguna premisa o alguna conclusión previa aplicando las reglas de inferencia.

Teorema de la deducción

- Permite definir una relación entre las estructuras deductivas correctas y las fórmulas válidas.
- Si $p_1,p_2,\ldots,p_n \Rightarrow q_m$ es una deducción correcta, entonces $p_1,p_2,\ldots,p_{n-1} \Rightarrow p_n \rightarrow q_m$ también lo es, *siempre que en p_n no existan variables libres con sentido genérico.*
  - A una deducción correcta no siempre le corresponde una fórmula válida

$A\rightarrow \exists z\, C(z) \Rightarrow A\rightarrow \forall x B(x)$ Correcta $\Rightarrow (A\rightarrow \exists z\, C(z)) \rightarrow (A\rightarrow \forall x B(x))$ Correcta
$A\rightarrow B(y) \Rightarrow A\rightarrow \forall x B(x)$ Correcta $\Rightarrow (A\rightarrow B(y)) \rightarrow (A\rightarrow \forall x B(x))$ No tiene porqué ser correcta

- Si $p_1,p_2,\ldots,p_{n-1} \Rightarrow p_n \rightarrow q_m$ es una deducción correcta, entonces también lo es $p_1,p_2,\ldots,p_n \Rightarrow q_m$

Reglas derivadas

GENERALIZACIÓN		ESPECIFICACIÓN	
Universal	**Existencial**	**Universal**	**Existencial**
$\vdash A(y)$	$\vdash A(y)$	$\vdash \forall x\, A(x)$	$\vdash \exists x\, A(x),, A(y)\rightarrow B$
$\vdash \forall x\, A(x)$	$\vdash \exists x\, A(x)$	$\vdash A(y)$	$\vdash B$ (y no está libre en B)

- Especificación Universal (EU) y Generalización Existencial (GE) no tienen limitaciones
  - Ej: $\forall x(A(x) \rightarrow B(x)), A(a) \rightarrow B(a)$

Reglas derivadas

$$\frac{\forall x\, A(x)}{A(y)}$$

- Especificación Universal (EU):

1. $\vdash \forall x A(x)$ Premisa
2. $\vdash \forall x A(x) \rightarrow A(y)$ Axioma 9
3. $\vdash A(y)$ MP 1,2

$\forall x\, A(x)$
↓↓↓↓ **(sin restricciones, *y* es un término genérico)**
$A(y)$

Reglas derivadas

$$\frac{A(y)}{\exists x\, A(x)}$$

- Generalización Existencial (GE):

1. $\vdash A(y)$ Premisa
2. $\vdash A(y) \rightarrow \exists x A(x)$ Axioma 10
3. $\vdash \exists x A(x)$ MP 1,2

$A(y)$
↓↓↓↓ **(sin restricciones, *y* es un término genérico)**
$\exists x\, A(x)$

Reglas derivadas

$$\frac{A(y)}{\forall x\, A(x)}$$

GU:

1. ├ A(y)	Premisa
2. ├ A(y) → (C→A(y))	Axioma 1 (B⇔C)
3. ├ C → A(y)	MP 1,2
4. ├ C → ∀xA(x)	G.U cond. en 3
5. ├ A(y) → (~C →A(y))	Axioma 1
6. ├ ~C →A(y)	MP 1,5
7. ├ ~C → ∀xA(x)	G.U. cond. en 6
8. ├ (C → ∀xA(x)) →((~C → ∀xA(x)) →((C v ~C)→ ∀xA(x)))	Ax. 6.
9. ├ (~C → ∀xA(x)) →((C v ~C)→ ∀xA(x))	MP 4,8
10. ├ (C v ~C)→ ∀xA(x)	MP 7,9
11. ├ C v ~C	Tercio excluso (cprop)
12. ∀xA(x)	M.P 10,11

Reglas derivadas

- Generalización Universal (GU):
  - No se puede hacer sobre variables libres que no tienen un sentido general.
  - En particular,
    - a) No se puede hacer sobre variables que hayamos introducido mediante EE.
    - b) No se puede hacer dentro de un supuesto, salvo en el caso en que, dentro del mismo supuesto, hubiéramos obtenido la variable libre haciendo EU de una variable con cuantificador universal.

Reglas derivadas

$$\frac{\exists x\, A(x),,\, A(y) \rightarrow B}{B}$$

Especificación Existencial (EE):

1. ├ ∃xA(x) Premisa
2. ├ A(y) → B Premisa
3. ├ ∃xA(x) → B Gen. ∃xist. Cond.
4. ├ B MP 1,3

∃x A(x), , A(y) → B
↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓ **(restricción: *y* no puede estar libre en B)**
B

Reglas derivadas

- Especificación Existencial (EE)
  - El uso de esta regla suele hacerse mediante la introducción de supuestos (como en Cálculo de Proposiciones)

∃xA(x)
A(y)
…
B
├A(y) →B TD
├B EE

∃xA(x)
A(y) Supuesto x EE
…
B
├B Cancelacion sup. EE

  - La variable "y", objeto del supuesto de EE, no puede serlo también de GU.
  - Para cerrar el supuesto y concluir ├B, es necesario que en B, "y" no esté libre (desaparece del predicado o GE sobre ella)
  - La variable "y" que se introduce no se puede volver a usar en otra EE interna al supuesto

Reglas derivadas

- Errores típicos en EE

1- ∃xP(x)

2- ∃yQ(y)

3- P(a) supuesto EE 1

4- Q(b) supuesto EE 2 ~~Q(a) supuesto EE 1~~

⋮

n- ∃yQ(y) GE ~~∀yQ(y) GU~~

⋮

El término que satisface 1 no tiene porqué ser el que satisface 2

El término b viene de EE, no es "cualquier y"

Reglas derivadas

- Ejemplo del uso **correcto** de EE y EU:

  ∃xP(x), ∀x∀y(P(x)→Q(y))⇒ ∀yQ(y)

1.	∃xP(x)	Premisa 1
2.	∀x∀y(P(x)→Q(y))	Premisa 2
3.	P(x)	Sup. T.D
4.	∀y(P(x)→Q(y))	E.U. en 2 (x)
5.	P(x)→Q(y)	E.U. en 4 (y)
6.	Q(y)	M.P. 3,5
7.	∀y(Q(y))	G.U. 6
8.	P(x) → ∀yQ(y)	Canc. T.D. 3-7
9.	∀y(Q(y))	Regla E.E.

Reglas derivadas

- Ejemplo del uso **correcto** del EE:
  $\exists xP(x), \forall x\forall y(P(x)\rightarrow Q(y)) \Rightarrow \forall yQ(y)$

1.	$\exists xP(x)$	Premisa 1
2.	$\forall x\forall y(P(x)\rightarrow Q(y))$	Premisa 2
3.	$P(z)$	Sup. E.E en 1
4.	$\forall y(P(z)\rightarrow Q(y))$	E.U. en 2 x=z
5.	$P(z) \rightarrow \forall yQ(y)$	Propiedad $\forall y$
6.	$\forall yQ(y)$	M.P. 3,5
7.	$\forall yQ(y)$	Cerramos el supuesto. z no libre

Nota: no salimos del supuesto $P(z) \rightarrow \forall yQ(y)$ porque "z" es libre. El problema se soluciona en 6.

Reglas derivadas

- Ejemplo uso **incorrecto** del EE:
  $\exists xA(x), \exists xB(x) \Rightarrow \exists x(A(x) \wedge B(x))$

1.	$\exists xA(x)$	Premisa 1
2.	$\exists xB(x)$	Premisa 2
3.	$A(y)$	Sup. E.E en 1 (I)
4.	$B(y)$	Sup. E.E en 2 (II)
5.	$A(y) \wedge B(y)$	Producto 3,4
6.	$\exists x(A(x) \wedge B(x))$	G.E. 5
7.	$\exists x(A(x) \wedge B(x))$	Cancelación supuesto (II)
8.	$\exists x(A(x) \wedge B(x))$	Cancelación supuesto (I)

Reglas derivadas

- Las reglas plantean un método para obtener deducciones cuantificadas a partir de premisas cuantificadas
  - Extraer los cuantificadores al comienzo de las fórmulas completas utilizando las equivalencias
  - Se aplican EU y/o EE a las premisas cuantificadas de forma que aparezcan no cuantificadas
  - Se aplican las reglas del cálculo proposicional a las variables hasta obtener una conclusión sin cuantificar
  - Se obtiene la conclusión cuantificada aplicando GU y/o GE

Resumen de reglas

- Generalización Universal (GU) no se puede hacer sobre variables libres que no tienen un sentido general.
  - Ej: no se pueden hacer sobre variables que hayamos introducido en EE o dentro de un supuesto (porque sólo se generalizaría en las condiciones del supuesto).
- Todas las reglas se aplican sobre cuantificadores que afectan a fórmulas completas, no a partes.
- Especificación Universal (EU) no tiene limitaciones.
- Generalización Existencial (GE) no tiene limitaciones.

Resumen de reglas

- Especificación Existencial (EE):
  - Se hace mediante la introducción del supuesto
  - La variable que se introduce no se puede volver a usar en otra EE interna al supuesto (sí en una EU).
  - Se puede cerrar el supuesto sólo cuando desaparece la variable libre que introdujimos en el mismo
  - La variable se hace desaparecer porque ya no aparece en el predicado que se quiere introducir, o porque se hace GE sobre ella. No se puede hacer GU sobre dicha variable.

Equivalencias

- Expresiones:
  - $\sim\forall x\, P(x) \leftrightarrows \exists x \sim P(x)$
  - $\sim\exists x\, P(x) \leftrightarrows \forall x \sim P(x)$
  - $\forall x\, P(x) \leftrightarrows \sim\exists x \sim P(x)$
  - $\exists x\, P(x) \leftrightarrows \sim \forall x \sim P(x)$
  - $\forall x\, (P(x) \rightarrow Q(x)) \leftrightarrows \forall x\, (\sim P(x) \vee Q(x))$

Teoremas principales

- Derivados de los axiomas obtenemos los siguientes teoremas:

Equivalencias

$$\forall x A(x) \Leftrightarrow \neg \exists x \neg A(x)$$
$$\exists x A(x) \Leftrightarrow \neg \forall x \neg A(x)$$

$$\forall x \forall y A(x,y) \Leftrightarrow \forall y \forall x A(x,y)$$
$$\exists x \exists y A(x,y) \Leftrightarrow \exists y \exists x A(x,y)$$
$$(\exists x A(x) \vee B) \Leftrightarrow \exists x (A(x) \vee B)$$
$$(\forall x A(x) \vee B) \Leftrightarrow \forall x (A(x) \vee B)$$
$$(\exists x A(x) \wedge B) \Leftrightarrow \exists x (A(x) \wedge B)$$
$$(\forall x A(x) \wedge B) \Leftrightarrow \forall x (A(x) \wedge B)$$
$$\exists x (A(x) \vee B(x)) \Leftrightarrow (\exists x A(x) \vee \exists x B(x))$$
$$\forall x (A(x) \wedge B(x)) \Leftrightarrow (\forall x A(x) \wedge \forall x B(x))$$
$$\forall x (A \rightarrow B(x)) \Leftrightarrow (A \rightarrow \forall x B(x))$$
$$\forall x (A(x) \rightarrow B) \Leftrightarrow (\exists x A(x) \rightarrow B)$$

Implicaciones

$$\forall x A(x) \Rightarrow \exists x A(x)$$

$$\exists x \forall y A(x,y) \Rightarrow \forall y \exists x A(x,y)$$

$$\forall x A(x) \vee \forall x B(x)) \Rightarrow \forall x (A(x) \vee B(x))$$
$$\exists x (A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow (\exists x A(x) \wedge \exists x B(x))$$

Teoremas principales

$$\exists x (A(x) \rightarrow B(x)) \Leftrightarrow (\forall x A(x) \rightarrow \exists x B(x))$$
$$(\exists x A(x) \rightarrow \forall x B(x)) \Rightarrow \forall x (A(x) \rightarrow B(x))$$

$$\forall x (A(x) \rightarrow B(x)) \Rightarrow (\forall x A(x) \rightarrow \forall x B(x))$$
$$\forall x (A(x) \rightarrow B(x)) \Rightarrow (\exists x A(x) \rightarrow \exists x B(x))$$
$$\forall x (A(x) \rightarrow B(x)) \Rightarrow (\forall x A(x) \rightarrow \exists x B(x))$$

(…)

Ejemplos

├ ∀xP(x) → ∀yP(y)

∀xP(x) ⇒ ∀yP(y)

1. ∀xP(x)	Premisa
2. P(b)	E.U. de 1 (x=b)
3. ∀yP(y)	G.U. de 2 (b no es variable libre en P(x))

├ ∃xP(x) → ∃zP(z)

∃xP(x) ⇒ ∃zP(z)

1. ∃xP(x)	Premisa
2. P(y)	Sup. T.D
3. ∃zP(z)	G.E de 2
4. P(y) → ∃zP(z)	T.D. Canc. Sup. (en P(z) no es libre y)
5. ∃zP(z)	Regla E.E. 1,4

$$\frac{\exists x\, A(x),,\ A(y)\rightarrow B}{B}$$

y no está libre en B

Ejemplos

├ ∀x∀yP(x,y) → ∀y∀xP(x,y)

∀x∀yP(x,y) ⇒ ∀y∀xP(x,y)

1. ∀x∀yP(x,y)	Premisa
2. ∀yP(x,y)	E.U. de 1 (respecto x)
3. P(x,y)	E.U. de 2 (respecto y)
4. ∀xP(x,y)	G.U de 3 (respecto x)
5. ∀y∀xP(x,y)	G.U de 4 (respecto y)

Ejemplos

$\vdash \exists x\forall y P(x,y) \rightarrow \forall y\exists x P(x,y)$

$\exists x\forall y P(x,y) \Rightarrow \forall y\exists x P(x,y)$

1. ∃x∀yP(x,y) Premisa
2. ∀yP(a,y) Sup. T.D. de 1 (x=a)
3. P(a,y) E.U. de 2 (resp. y)
4. ∃xP(x,y) G.E de 3 (a=x)
5. ∀yP(x,y) → ∃xP(x,y). Canc. T.D.
6. ∃xP(x,y) Regla de E.E. (1,5)
7. ∀y∃xP(x,y) G.U de 6 (respecto y)

$\vdash \exists x\forall y P(x,y) \rightarrow \forall y\exists x P(x,y)$

$\exists x\forall y P(x,y) \Rightarrow \forall y\exists x P(x,y)$

1. ∃x∀yP(x,y) Premisa
2. ∀yP(a,y) Sup. E.E. de 1 (x=a)
3. P(a,y) E.U. de 2 (resp. y)
4. ∃xP(x,y) G.E de 3 (a=x)
5. ∃xP(x,y) Canc. Supuesto E. Exist.
6. ∀y∃xP(x,y) G.U de 6 (respecto y)

Con supuesto T.D

$$\frac{\exists x\, A(x),\, A(y)\rightarrow B}{B}$$

y no está libre en B

Con supuesto Especificación Existencial (EE)

Ejemplos

La siguiente deducción no es correcta. Intentemos demostrarla

$\vdash \forall y\exists x P(x,y) \rightarrow \exists x \forall y P(x,y)$

$\forall y\exists x P(x,y) \Rightarrow \exists x \forall y P(x,y)$

1. ∀y∃xP(x,y) Premisa
2. ∃xP(x,y) E.U. de 1 (respecto de y)
3. P(a,y) Sup. T.D.
4. ∀yP(a,y) G.U de 3 (respecto de y)
5. ∃x∀yP(x,y) G.E. de 4 (a=x)
6. P(a,y) → ∃x∀yP(x,y) T.D NO "y" es libre en P(a,y)
7. ∃x∀yP(x,y) E.E. 2,6

$\vdash \forall y\exists x P(x,y) \rightarrow \exists x \forall y P(x,y)$

$\forall y\exists x P(x,y) \Rightarrow \exists x \forall y P(x,y)$

1. ∀y∃xP(x,y) Premisa
2. ∃xP(x,y) E.U. de 1 (respecto de y)
3. P(a,y) Sup. EE
4. ∀yP(a,y) G.U de 3 (respecto de y) (NO, GU no se puede aplicar porque y entra en el supuesto sin cuantificar)
5. ∃x∀yP(x,y) G.E. de 4
6. ∃x∀yP(x,y) Cierre Sup EE

Con supuesto T.D

Con supuesto Especificación Existencial (EE)

Ejemplos

$$\forall x\ (R(x) \to P(x)), \forall x\ (P(x) \to \sim S(x)), \forall x\ (R(x) \wedge Q(x) \to S(x))$$

$$\Longrightarrow \forall x\ (R(x) \to \sim (P(x) \to Q(x))$$

- Se especifican universalmente las premisas para la misma y genérica
- Se mantiene y constante y se aplican las reglas de cálculo proposicional
- Se obtiene una fórmula sin cuantificar con y libre
- Se puede aplicar GU ya que y es variable genérica por tener origen en EU

1	$\forall x(R(x) \to P(x))$	Premisa
2	$\forall x(P(x) \to \sim S(x))$	Premisa
3	$\forall x(R(x) \wedge Q(x) \to S(x))$	Premisa
4	$R(y) \to P(y)$	EU 1
5	$P(y) \to \sim S(y)$	EU 2
6	$R(y) \wedge Q(y) \to S(y)$	EU 3
7	$\sim S(y) \to \sim (R(y) \wedge Q(y))$	Contraposición (CP) 6
8	$\sim (R(y) \wedge Q(y)) \leftrightarrow$ $\leftrightarrow (\sim R(y) \vee \sim Q(y))$	Regla de De Morgan
9	$\sim S(y) \to (\sim R(y) \vee \sim Q(y))$	Intercambio 7, 8
10	$R(y) \to \sim S(y)$	SH 4, 5
11	$R(y) \to (\sim R(y) \vee \sim Q(y))$	SH 9, 10
12	$R(y)$	
13	$\sim R(y) \vee \sim Q(y)$	MP 12, 11
14	$(\sim R(y) \vee \sim Q(y)) \leftrightarrow$ $\leftrightarrow (R(y) \to \sim Q(y))$	Definición de $\to$ en función de $\vee$
15	$R(y) \to \sim Q(y)$	Intercambio 13, 14
16	$\sim Q(y)$	MP 12, 15
17	$P(y)$	MP 12, 4
18	$P(y) \to (\sim Q(y) \to P(y))$	A 1
19	$\sim Q(y) \to P(y)$	MP 17, 18
20	$\vdash (\sim Q(y) \to P(y)) \to$ $\to (\sim P(y) \to Q(y))$	Teorema de contraposición
21	$\sim P(y) \to Q(y)$	MP 19, 20
22	$R(y) \to (\sim P(y) \to Q(y))$	TD 12, 21
23	$\forall x[R(x) \to (\sim P(x) \to Q(x))]$	GU 22

$\forall x(F(x) \to \sim E(x)), \exists x(F(x) \land A(x)) \Rightarrow \exists x(A(x) \land \sim E(x))$

1	$\forall x[F(x) \to \sim E(x)]$	Premisa
2	$\exists x[F(x) \land A(x)]$	Premisa
3	$F(y) \land A(y)$	EE 2
4	$F(y) \to \sim E(y)$	EU 1
5	$\vdash F(y) \land A(y) \to F(y)$	Ax 4
6	$F(y)$	MP 3, 5
7	$\sim E(y)$	MP 6, 4
8	$\vdash F(y) \land A(y) \to A(y)$	Ax 4
9	$A(y)$	MP 3, 8
10	$\vdash A(y) \to$ $\to (\sim E(y) \to A(y) \land \sim E(y))$	Ax 3
11	$\sim E(y) \to A(y) \land \sim E(y)$	MP 9, 10
12	$A(y) \land \sim E(y)$	MP 7, 11
13	$\exists x(A(x) \land \sim E(x))$	GE 12
14	$\exists x(A(x) \land \sim E(x))$	Al ser independiente de y puede cancelarse la deducción subsidiaria.

Guía básica

1. Axiomas nuevos (9 y 10)

Todo lo anterior sigue valiendo, pero ahora las letras A, B, etc. significan "fórmulas del cálculo de predicados"

2. Reglas nuevas (GUC y GEC)

Hay que precisar que, cuando aparece en una "fórmula válida" una variable libre "y", tiene que entenderse siempre como una variable genérica ("cualquier y").

Si aparece A(y) nos referimos a cualquier fórmula de cálculo de predicados en la que hay una variable libre "y" (puede haber otras variables libres y todas las ligadas que se quiera).

Ej: $A(y) = \forall x(P(x,y) \to \exists z Q(w,z))$ (variables libres: y,w)

3. Concepto de demostración (= que en proposiciones)

Guía básica

4. Concepto de deducción (= que en proposiciones).

En las deducciones, las variables libres a veces son genéricas y a veces son particulares o condicionales

Al formalizar un enunciado en lenguaje natural no quedan variables libres. Todas las variables estarán cuantificadas, de manera que se sepa en qué sentido las usamos.

5. Teorema de la deducción

Mismo enunciado que en proposiciones, pero uso restringido

No hay una fórmula válida asociada a toda deducción correcta.

Ej: siendo $A \rightarrow B(y) \Rightarrow A \rightarrow \forall x\, B(x)$ una deducción correcta, $(A \rightarrow B(y)) \rightarrow (A \rightarrow \forall x\, B(x))$ NO es fórmula válida (es uno de los casos en los que no se puede aplicar el T.D.).

Guía básica

6. Teorema de la deducción inverso

Se puede afirmar, con toda generalidad, que es válido el T.D. a la inversa:

Si $P1 \ldots Pn\text{-}1 \Rightarrow Pn \rightarrow Q$ deducción correcta,
Entonces $P1 \ldots Pn \Rightarrow Q$ es también deducción correcta.

Esta propiedad se usa constantemente para demostrar los teoremas. Si no fuera válido el teorema, no podríamos dar por demostrado todos los teoremas que se ven en cálculo de proposiciones.

Guía básica

7. Reglas complementarias

EU: sin restricciones, pero cuidado con aplicarla a trozos de fórmula. El cuantificador debe afectar a toda la fórmula sobre la que se aplica. Esto es válido para las dos especificaciones.

Ejemplo mala aplicación:
1. $\forall x\ P(x) \rightarrow A$; Premisa
2. $P(y) \rightarrow A$; EU 1 (INCORRECTO)

Ejemplo buena aplicación:
1. $\forall x\ (P(x) \rightarrow A)$; Premisa
2. $P(y) \rightarrow A$; EU 1 (CORRECTO)

Hay casos en las que las dos premisas son equivalentes, pero hay que aplicar primero la equivalencia necesaria para poner el cuantificador en el sitio correcto antes de aplicar EU o EE.

GE: sin restricciones

GU: sólo fuera de supuestos y sólo si la variable generalizada venía de EU

Guía básica

EE: es mejor usar la versión de la notación que utiliza un supuesto. Etiquetamos la primera línea como "supuesto" y al final introducimos la fórmula "B" de la regla.

- Ver lo dicho en EU sobre el ámbito del cuantificador
- Se tienen que usar variables distintas para cada supuesto.

  Ejemplo demostración falaz (si se incumple lo anterior):
  $\exists x A(x), \exists x\ B(x) \Rightarrow \exists x(A(x) \wedge B(x))$

- No se puede usar GU dentro del supuesto sobre la variable del supuesto (por la restricción del T.D.).

  Ejemplo demostración falaz (si se incumple lo anterior):
  $\exists x A(x) \Rightarrow \forall x A(x)$

- Sí se puede usar GE sobre la variable del supuesto
- El supuesto sólo se cierra cuando desaparece la variable introducida en el mismo.

Guía básica

8. Método general

El método consiste en:

- Cuando sepamos, pasar los cuantificadores a cabeza de la fórmula cuando se sepa.
- Aplicar Especificación a las fórmulas afectadas por cuantificadores en la cabeza de las mismas, empezando por los supuestos de EE.
- Resolver por cálculo de proposiciones hasta llegar a la conclusión.
- Cerrar los supuestos de EE (si es preciso usando GE)
- Generalizar mediante GE o GU según se pueda y según sea la conclusión a la que se quiera llegar.

Parte VI

Tema 5. Teoría Semántica

Tema 5:
Teoría Semántica

Lógica

Grado en Ingeniería Informática

2018/19

uc3m

Teoría Semántica en cálculo proposicional

Introducción

- Utiliza la simbolización vista hasta el momento
- La diferencia principal es que el sistema de fórmulas y estructuras deductivas válidas ***no se construye a partir de los axiomas y reglas*** sino mediante una ***simbolización del significado*** de las proposiciones

Introducción

- Para esto, se necesita
  - Un conjunto de significados atribuibles a las proposiciones **{V,F} o {1,0}**
  - Definición semántica de las conectivas (tablas de verdad)
  - Una definición semántica de deducción correcta

Tablas de verdad

- Definición de conectivas

p	~p
V	F
F	V

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
v	F	F
F	V	F
F	F	F

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Tablas de verdad

- El número de interpretaciones (filas) es 2^n, donde *n* es el número de proposiciones que intervienen en la fórmula.

Interpretaciones para 3 proposiciones

		p	q	r
7	$\leadsto$	1	1	1
6	$\leadsto$	1	1	0
5	$\leadsto$	1	0	1
4	$\leadsto$	1	0	0
3	$\leadsto$	0	1	1
2	$\leadsto$	0	1	0
1	$\leadsto$	0	0	1
0	$\leadsto$	0	0	0

Evaluación de Fórmulas

- Es posible construir la tabla de significado de cualquier fórmula a partir de las correspondientes fórmulas parciales que la integran
- **Interpretación:** asignación de significados a sus componentes básicas (una línea de la tabla de verdad)
  - **Modelo:** interpretación que hace cierta una fórmula
  - **Contramodelo (contraejemplo):** interpretación que hace falsa la fórmula

Tablas de verdad

- **Ejemplo:** $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$

2^2 interpretaciones

A	B	$A \rightarrow B$	$B \rightarrow A$	$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$
1	1	1	1	1
1	0	0	1	0
0	1	1	0	0
0	0	1	1	1

¿$A \rightarrow B$ <=>$B \rightarrow A$?

¿$A \rightarrow B$ <=>~A v B?

Modelos

Contramodelos

Equivalencia

Considere las formulas que siguen:

$$p \wedge q \quad \sim(\sim p \vee \sim q) \quad \sim(p \rightarrow \sim q) \quad \sim(q \rightarrow \sim p)$$

- Si se construyen las tablas de verdad, se puede verificar que se obtienen columnas finales idénticas.

1
0
0
0

- Cuando se obtienen los mismos resultados para cualquier interpretación (fila) estamos ante un caso de ***equivalencia lógica***

Evaluación de Fórmulas

- De acuerdo con el resultado de las interpretaciones, las fórmulas pueden clasificarse en:
  - **Tautología:** siempre es verdad ($\models$)
  - **Contradicción:** siempre es falsa
  - **Contingencia:** valores distintos (ninguna de las anteriores)
- Una fórmula que tiene **al menos un modelo** es ***satisfacible*** (al menos una línea en la que todas las fórmulas son válidas).
- Una fórmula **sin contraejemplos** es ***semánticamente válida.***

Evaluación de Fórmulas

2^3 interpretaciones

p	q	r	Fórmula 1: $(p \wedge q) \wedge \neg(q \vee r)$	Fórmula 2: $(p \wedge q) \rightarrow (q \wedge r)$	Fórmula 3: $(p \wedge q) \rightarrow (q \vee r)$
1	1	1	0	1	1
1	1	0	0	0	1
1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1
0	1	0	0	1	1
0	0	1	0	1	1
0	0	0	0	1	1

- F1 es insatisfacible (contradicción) (tautología negada)
- F2 es satisfacible
- F3 es una tautología (semánticamente válida)

Evaluación de Fórmulas

- Ejemplos: tautologías

p	$p \rightarrow p$
1	1
0	1

p	q	$q \rightarrow p$	$p \rightarrow (q \rightarrow p)$
1	1	1	1
1	0	1	1
0	1	0	1
0	0	1	1

p	q	$\sim p \rightarrow q$	$p \rightarrow (\sim p \rightarrow q)$
1	1	1	1
1	0	1	1
0	1	1	1
0	0	0	1

Evaluación de Fórmulas

- Ejemplos: contradicciones y contingencia

p	~p	p ∧ ~p
1	0	0
0	1	0

p	q	p ∨ q	q ∧ ~(p ∨ q)
1	1	1	0
1	0	1	0
0	1	1	0
0	0	0	0

p	q	p ∧ q	(p ∧ q) → ~q
1	1	1	0
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	0	1

Deducción Correcta

- Dada una estructura deductiva $\mathbf{p_1,p_2,p_3,\ldots,p_n \Rightarrow q}$ se define como **correcta** cuando **no existe** una interpretación que haga $\mathbf{p_1,p_2,p_3,\ldots,p_n}$ verdadero y **q** falso.

- Para comprobar que una estructura deductiva es **incorrecta**, basta con encontrar una interpretación que no cumpla la regla anterior.

Deducción Correcta

Ejemplo: Modus Ponens: A, A → B ⇒ B

A	A → B	B
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	V	F

No hay ninguna interpretación donde las premisas sean **V** y la conclusión **F**.

Por tanto, la deducción es correcta

Deducción Correcta

p	q	p → q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

- **Ejemplo:** A → B, B → C ⇒ A→C

A	B	C	A → B	B → C	A→C
1	1	1	1	1	**1**
1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0
0	1	1	1	1	**1**
0	1	0	1	0	1
0	0	1	1	1	**1**
0	0	0	1	1	**1**

Deducción incorrecta

p	q	$p \to q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

- **Ejemplo:** $A \to B, B \to C \Rightarrow C \to A$

A	B	C	$A \to B$	$B \to C$	$C \to A$
1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	1
0	1	1	1	1	**0**
0	1	0	1	0	1
0	0	1	1	1	**0**
0	0	0	1	1	1

Teorema de la Deducción

- Es demostrable mediante la definición semántica de deducción

Si

$$p_1,p_2,p_3,\ldots,p_n \Rightarrow q$$

Es una deducción correcta

$$p_1,p_2,\ldots,p_{n-1} \Rightarrow p_n \to q$$

También es una deducción correcta

Tautologías asociadas una Deducción

- Si $\mathbf{p_1,p_2,p_3,\ldots,p_n \Rightarrow q}$ es una deducción semánticamente correcta, entonces
  $\models \mathbf{p_1 \rightarrow (p_2 \rightarrow (p_3 \rightarrow \ldots (p_n \rightarrow q)\ldots)}$ es una tautología

- Si $\mathbf{p_1,p_2,p_3,\ldots,p_n \Rightarrow q}$ es una deducción semánticamente correcta, entonces
  $\models \mathbf{p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \ldots \wedge p_n \rightarrow q}$ es una tautología

- Las fórmulas asociadas son equivalentes

Tautologías asociadas una Deducción

- Dos ideas importantes:
  - Mediante la TS podemos ***comprobar*** si una deducción es correcta, pero ***no demostrar*** dicha corrección.
  - Si una deducción es correcta, la fórmula asociada es una tautología. Lo recíproco también es cierto.

Comprobación de Deducciones

- Frente a los sistemas axiomáticos, TS permite definir un procedimiento ***sistemático*** para comprobar si una deducción es correcta o si una fórmula es semánticamente válida.
- Dos métodos principales
  - **Directo**
    - Construcción de una tabla de verdad completa
    - Problemático si hay muchas interpretaciones
  - **Contraejemplo**
    - Búsqueda de una interpretación específica

Comprobación de Deducciones

- Procedimiento contraejemplo
  - Construir una fórmula asociada
  - Generar interpretaciones y calcular significados para la fórmula
  - Buscando algún significado *falso* (contraejemplo)
- Alternativa: operar de forma análoga con una deducción completa buscando una interpretación tal que
    - *Todas las premisas* sean *verdaderas*
    - *Conclusión falsa*

Comprobación de Deducciones

$(\sim A \vee \sim B) \Rightarrow \sim(A \wedge B)$

Fórmula asociada:

$(\sim A \vee \sim B) \rightarrow \sim(A \wedge B)$

Método directo

A	B	~A	~B	A ∧ B	~A ∨ ~B	~(A ∧ B)	(~A ∨ ~B) → ~(A ∧ B)
V	V	F	F	V	F	F	V
V	F	F	V	F	V	V	V
F	V	V	F	F	V	V	V
F	F	V	V	F	V	V	V

La formula asociada es una tautología (no hay contraejemplos), entonces la deducción es correcta.

Comprobación de Deducciones

$(\sim A \vee \sim B) \Rightarrow \sim(A \wedge B)$

Fórmula asociada:

$(\sim A \vee \sim B) \rightarrow \sim(A \wedge B)$

Método del contraejemplo

- 1. $\underbrace{(\sim A \vee \sim B) \rightarrow \sim(A \wedge B)}_{\text{Falso}}$
- 2. $\underbrace{(\sim A \vee \sim B)}_{\text{Verdad}} \rightarrow \underbrace{\sim(A \wedge B)}_{\text{Falso}}$
- 3. $(\underbrace{\sim A}_{V} \vee \underbrace{\sim B}_{F}) \rightarrow \sim(A \wedge B)$

  $(\underbrace{\sim A}_{F} \vee \underbrace{\sim B}_{V}) \rightarrow \sim(A \wedge B)$

  $(\underbrace{\sim A}_{V} \vee \underbrace{\sim B}_{V}) \rightarrow \sim(A \wedge B)$

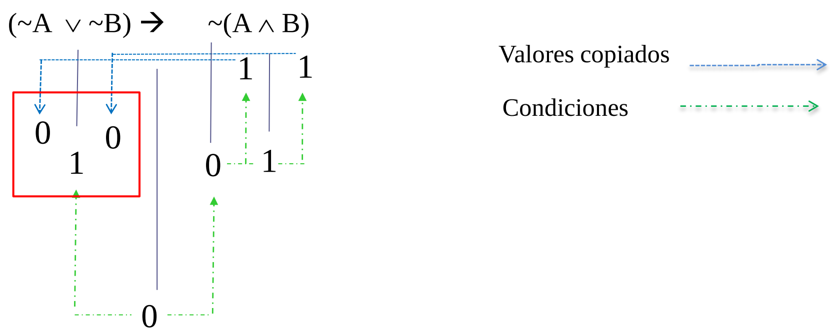
A=F, B=V, entonces ~(A ∧ B) es V
A=V, B=F, entonces ~(A ∧ B) es V
A=F B=F, entonces ~(A ∧ B) es V

La implicación no puede ser falsa, no hay contraejemplos, por lo que deducción es correcta.

Comprobación de Deducciones

(~A ∨ ~B) → ~(A ∧ B)

Método del contraejemplo. Otra representación



No hay un contraejemplo. La deducción es correcta

Comprobación de Deducciones

$p \vee q, q \rightarrow r, p \rightarrow s \Rightarrow s$

Método directo

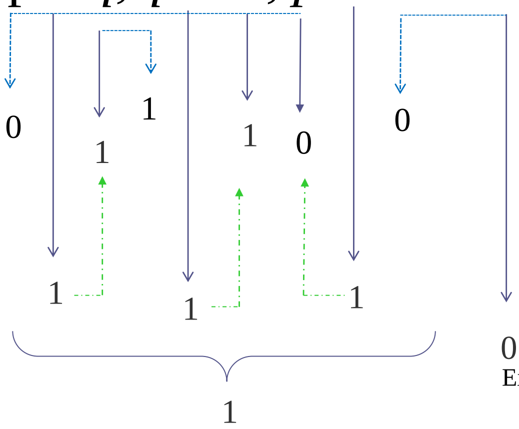
	p	q	r	s	p ∨ q	q → r	p → s
	0	0	0	0	0	1	1
	0	0	0	1	0	1	1
	0	0	1	0	0	1	1
	0	0	1	1	0	1	1
	0	1	0	0	1	0	1
	0	1	0	1	1	0	1
	0	1	1	0	1	1	1
	0	1	1	1	1	1	1
	1	0	0	0	1	1	0
	1	0	0	1	1	1	1
	1	0	1	0	1	1	0
	1	0	1	1	1	1	1
	1	1	0	0	1	0	0
	1	1	0	1	1	0	1
	1	1	1	0	1	0	0
	1	1	1	1	1	0	1

Existe una interpretación en la que las premisas con V y la conclusión F

Deducción no correcta

Comprobación de Deducciones

$$p \vee q, q \to r, p \to s \Rightarrow s$$



p	q	p → q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Una interpretación es un contraejemplo si:
*premisas **V** y conclusión **F***

Existe una interpretación que hace premisas V y conclusión F (contraejemplo):
p=0,q=1,r=1,s=0
Deducción incorrecta

Comprobación de Deducciones

- Analizamos la corrección de la deducción estudiando si la fórmula asociada es una tautología.

$$[p \to (q \vee r)] \;,\; (r \leftrightarrow s) \;,\; t \Rightarrow (p \to q)$$

$$([p \to (q \vee r)] \wedge (r \leftrightarrow s) \wedge t) \to (p \to q)$$

1 1 1 1 1 0 1 0 0

1 0

Intentamos identificar una interpretación para la cual el consecuente sea F, y el antecedente V. Para esto, *p* tiene que ser V *q* tiene que ser F. Para que el segmento proveniente de la primera premisa sea V, r tiene que ser V. Esto supone que s también deberá ser V. Si t fuese v, entonces todo el antecedente sería V, con lo que queda claro que existe un contraejemplo y NO ES UNA TAUTOLOGÍA

Comprobación de Deducciones

Refutación

- Otra vía potencial fundamentada en la misma idea que la del contraejemplo
- Negamos la conclusión, la unimos a las premisas y vemos si el conjunto resultante es satisfacible

$$p_1, p_2, p_3, \ldots p_n \Rightarrow \mathbf{q}$$
$$p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \ldots \wedge p_n \wedge \sim\mathbf{q}$$

- La deducción es correcta si y sólo si la segunda expresión es insatisfacible.

Propiedades Formales de Cálculo Prop.

- El sistema formal de cálculo proposicional tiene como propiedades:
  - **Consistencia:** no es demostrable una fórmula y su negación
  - **Completitud:** toda fórmula válida es demostrable.
  - **Decidibilidad:** existe un procedimiento efectivo de comprobar si una fórmula es válida.

Teorema de Post: $\vdash B$ *es demostrable* $\leftrightarrow \models B$

Resumen Sem. Prop. Fórmulas

Tabla de verdad

Coherencia de resultados

¿Fórmula válida?

Método del Contraejemplo

Válida si tautología

Tautología si no contraejemplo

Contraejemplo si no interpret. falsa

Resumen Sem. Prop. Deducciones

Tabla de verdad

Como deducción

Met. Contraejemplo

¿Deducción correcta?

Refutación

Correcta si **no** contraejemplo

$p_1, p_2, \ldots, p_n \Rightarrow q$

Si **no interpretación** tal que

$1 \quad 1 \ldots \quad 1 \Rightarrow 0$

Como fórmula

$(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \rightarrow q$

Si **válida**, deducción **correcta**

Transformar en fórmula

$p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n \wedge \sim q$

Deduc. correcta si fórmula

INSATISFACIBLE

Tema 5:
Teoría Semántica

Lógica

Grado en Ingeniería Informática

2018/19

uc3m

Teoría Semántica en cálculo proposicional

Introducción

- Utiliza la simbolización vista hasta el momento
- La diferencia principal es que el sistema de fórmulas y estructuras deductivas válidas ***no se construye a partir de los axiomas y reglas*** sino mediante una ***simbolización del significado*** de las proposiciones

Introducción

- Para esto, se necesita
  - Un conjunto de significados atribuibles a las proposiciones **{V,F} o {1,0}**
  - Definición semántica de las conectivas (tablas de verdad)
  - Una definición semántica de deducción correcta

Tablas de verdad

- Definición de conectivas

p	~p
V	F
F	V

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
v	F	F
F	V	F
F	F	F

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Tablas de verdad

- El número de interpretaciones (filas) es 2^n, donde n es el número de proposiciones que intervienen en la fórmula.

Interpretaciones para 3 proposiciones

		p	q	r
7	$\rightsquigarrow$	1	1	1
6	$\rightsquigarrow$	1	1	0
5	$\rightsquigarrow$	1	0	1
4	$\rightsquigarrow$	1	0	0
3	$\rightsquigarrow$	0	1	1
2	$\rightsquigarrow$	0	1	0
1	$\rightsquigarrow$	0	0	1
0	$\rightsquigarrow$	0	0	0

Evaluación de Fórmulas

- Es posible construir la tabla de significado de cualquier fórmula a partir de las correspondientes fórmulas parciales que la integran
- **Interpretación:** asignación de significados a sus componentes básicas (una línea de la tabla de verdad)
  - **Modelo:** interpretación que hace cierta una fórmula
  - **Contramodelo (contraejemplo):** interpretación que hace falsa la fórmula

Tablas de verdad

- **Ejemplo:** $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$

2^2 interpretaciones

A	B	$A \rightarrow B$	$B \rightarrow A$	$(A\rightarrow B) \wedge (B\rightarrow A)$
1	1	1	1	1
1	0	0	1	0
0	1	1	0	0
0	0	1	1	1

¿$A \rightarrow B \Leftrightarrow B \rightarrow A$?

¿$A \rightarrow B \Leftrightarrow \sim A \vee B$?

Modelos

Contramodelos

Equivalencia

Considere las formulas que siguen:

$$p \land q \quad \sim(\sim p \lor \sim q) \quad \sim(p \rightarrow \sim q) \quad \sim(q \rightarrow \sim p)$$

- Si se construyen las tablas de verdad, se puede verificar que se obtienen columnas finales idénticas.

1
0
0
0

- Cuando se obtienen los mismos resultados para cualquier interpretación (fila) estamos ante un caso de ***equivalencia lógica***

Evaluación de Fórmulas

- De acuerdo con el resultado de las interpretaciones, las fórmulas pueden clasificarse en:
  - **Tautología:** siempre es verdad ($\models$)
  - **Contradicción:** siempre es falsa
  - **Contingencia:** valores distintos (ninguna de las anteriores)
- Una fórmula que tiene **al menos un modelo** es ***satisfacible*** (al menos una línea en la que todas las fórmulas son válidas).
- Una fórmula **sin contraejemplos** es ***semánticamente válida.***

Evaluación de Fórmulas

2^3 interpretaciones

p	q	r	Fórmula 1 $(p \wedge q) \wedge \neg(q \vee r)$	Fórmula 2 $(p \wedge q) \rightarrow (q \wedge r)$	Fórmula 3 $(p \wedge q) \rightarrow (q \vee r)$
1	1	1	0	1	1
1	1	0	0	0	1
1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1
0	1	0	0	1	1
0	0	1	0	1	1
0	0	0	0	1	1

- F1 es insatisfacible (contradicción) (tautología negada)
- F2 es satisfacible
- F3 es una tautología (semánticamente válida)

Evaluación de Fórmulas

- Ejemplos: tautologías

p	p → p
1	1
0	1

p	q	q → p	p → (q → p)
1	1	1	1
1	0	1	1
0	1	0	1
0	0	1	1

p	q	~p → q	p → (~p → q)
1	1	1	1
1	0	1	1
0	1	1	1
0	0	0	1

Evaluación de Fórmulas

- Ejemplos: contradicciones y contingencia

p	$\sim p$	$p \wedge \sim p$
1	0	0
0	1	0

p	q	$p \vee q$	$q \wedge \sim(p \vee q)$
1	1	1	0
1	0	1	0
0	1	1	0
0	0	0	0

p	q	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \rightarrow \sim q$
1	1	1	0
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	0	1

Deducción Correcta

- Dada una estructura deductiva $\mathbf{p_1,p_2,p_3,\dots,p_n \Rightarrow q}$ se define como **correcta** cuando **no existe** una interpretación que haga $\mathbf{p_1,p_2,p_3,\dots,p_n}$ verdadero y $\mathbf{q}$ falso.

- Para comprobar que una estructura deductiva es **incorrecta**, basta con encontrar una interpretación que no cumpla la regla anterior.

Deducción Correcta

Ejemplo: Modus Ponens: A, A → B ⇒ B

A	**A → B**	**B**
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	V	F

No hay ninguna interpretación donde las premisas sean **V** y la conclusión **F**.

Por tanto, la deducción es correcta

Deducción Correcta

p	q	p → q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

- **Ejemplo:** A → B, B → C ⇒ A→C

A	B	C	A → B	B → C	A→C
1	1	1	1	1	**1**
1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0
0	1	1	1	1	**1**
0	1	0	1	0	1
0	0	1	1	1	**1**
0	0	0	1	1	**1**

Deducción incorrecta

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

- **Ejemplo:** $A \rightarrow B, B \rightarrow C \Rightarrow C \rightarrow A$

A	B	C	$A \rightarrow B$	$B \rightarrow C$	$C \rightarrow A$
1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	1
0	1	1	1	1	**0**
0	1	0	1	0	1
0	0	1	1	1	**0**
0	0	0	1	1	1

Teorema de la Deducción

- Es demostrable mediante la definición semántica de deducción

Si

$$p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n \Rightarrow q$$

Es una deducción correcta

$$p_1, p_2, \ldots, p_{n-1} \Rightarrow p_n \rightarrow q$$

También es una deducción correcta

Tautologías asociadas una Deducción

- Si $p_1,p_2,p_3,\ldots,p_n \Rightarrow q$ es una deducción semánticamente correcta, entonces
  $\models p_1 \rightarrow (p_2 \rightarrow (p_3 \rightarrow \ldots (p_n \rightarrow q)\ldots)$ es una tautología
- Si $p_1,p_2,p_3,\ldots,p_n \Rightarrow q$ es una deducción semánticamente correcta, entonces
  $\models p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \ldots \wedge p_n \rightarrow q$ es una tautología
- Las fórmulas asociadas son equivalentes

Tautologías asociadas una Deducción

- Dos ideas importantes:
  - Mediante la TS podemos ***comprobar*** si una deducción es correcta, pero ***no demostrar*** dicha corrección.
  - Si una deducción es correcta, la fórmula asociada es una tautología. Lo recíproco también es cierto.

Comprobación de Deducciones

- Frente a los sistemas axiomáticos, TS permite definir un procedimiento ***sistemático*** para comprobar si una deducción es correcta o si una fórmula es semánticamente válida.
- Dos métodos principales
  - **Directo**
    - Construcción de una tabla de verdad completa
    - Problemático si hay muchas interpretaciones
  - **Contraejemplo**
    - Búsqueda de una interpretación específica

Comprobación de Deducciones

- Procedimiento contraejemplo
  - Construir una fórmula asociada
  - Generar interpretaciones y calcular significados para la fórmula
  - Buscando algún significado *falso* (contraejemplo)
- Alternativa: operar de forma análoga con una deducción completa buscando una interpretación tal que
    - *Todas las premisas* sean *verdaderas*
    - *Conclusión falsa*

Comprobación de Deducciones

$(\sim A \vee \sim B) \Rightarrow \sim(A \wedge B)$

Fórmula asociada:

$(\sim A \vee \sim B) \rightarrow \sim(A \wedge B)$

Método directo

A	**B**	**~A**	**~B**	**A ∧ B**	**~A ∨ ~B**	**~(A ∧ B)**	**(~A ∨ ~B) → ~(A ∧ B)**
V	V	F	F	V	F	F	V
V	F	F	V	F	V	V	V
F	V	V	F	F	V	V	V
F	F	V	V	F	V	V	V

La formula asociada es una tautología (no hay contraejemplos), entonces la deducción es correcta.

Comprobación de Deducciones

$(\sim A \vee \sim B) \Rightarrow \sim(A \wedge B)$

Fórmula asociada:

$(\sim A \vee \sim B) \rightarrow \sim(A \wedge B)$

Método del contraejemplo

- 1. **$\underbrace{(\sim A \vee \sim B) \rightarrow \sim(A \wedge B)}_{\text{Falso}}$**
- 2. **$\underbrace{(\sim A \vee \sim B)}_{\text{Verdad}}$** $\rightarrow \underbrace{\sim(A \wedge B)}_{\text{Falso}}$
- 3.$(\underbrace{\sim A}_{V} \vee \underbrace{\sim B}_{F}) \rightarrow \sim(A \wedge B)$

  $(\underbrace{\sim A}_{F} \vee \underbrace{\sim B}_{V}) \rightarrow \sim(A \wedge B)$

  $(\underbrace{\sim A}_{V} \vee \underbrace{\sim B}_{V}) \rightarrow \sim(A \wedge B)$

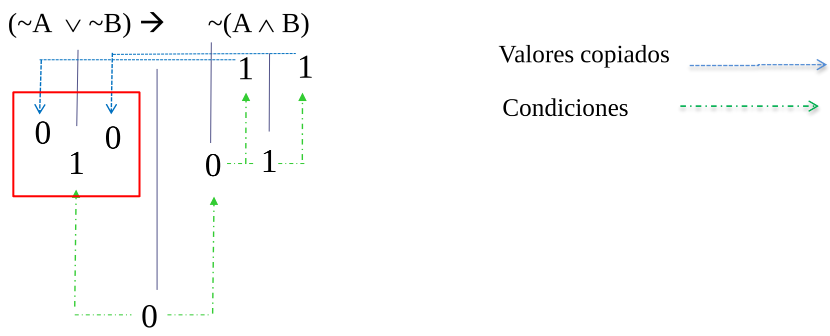
A=F, B=V, entonces ~(A ∧ B) es V
A=V, B=F, entonces ~(A ∧ B) es V
A=F B=F, entonces ~(A ∧ B) es V

La implicación no puede ser falsa, no hay contraejemplos, por lo que deducción es correcta.

Comprobación de Deducciones

(~A ∨ ~B) → ~(A ∧ B)

Método del contraejemplo. Otra representación



No hay un contraejemplo. La deducción es correcta

Comprobación de Deducciones

$p \vee q, q \rightarrow r, p \rightarrow s \Rightarrow s$

Método directo

	p	q	r	s	p ∨ q	q → r	p → s
	0	0	0	0	0	1	1
	0	0	0	1	0	1	1
	0	0	1	0	0	1	1
	0	0	1	1	0	1	1
	0	1	0	0	1	0	1
	0	1	0	1	1	0	1
	0	1	1	0	1	1	1
	0	1	1	1	1	1	1
	1	0	0	0	1	1	0
	1	0	0	1	1	1	1
	1	0	1	0	1	1	0
	1	0	1	1	1	1	1
	1	1	0	0	1	0	0
	1	1	0	1	1	0	1
	1	1	1	0	1	0	0
	1	1	1	1	1	0	1

Existe una interpretación en la que las premisas con V y la conclusión F

Deducción no correcta

Comprobación de Deducciones

$$p \vee q, q \rightarrow r, p \rightarrow s \Rightarrow s$$

0 1 1 1 0 0

1 1 1

1 0

p	q	p → q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

*Una interpretación es un contraejemplo si: premisas **V** y conclusión **F***

Existe una interpretación que hace premisas V y conclusión F (contraejemplo):
p=0,q=1,r=1,s=0
Deducción incorrecta

Comprobación de Deducciones

- Analizamos la corrección de la deducción estudiando si la fórmula asociada es una tautología.

$$[p \rightarrow (q \vee r)] \; , \; (r \leftrightarrow s) \; , \; t \Rightarrow (p \rightarrow q)$$

$$([p \rightarrow (q \vee r)] \wedge (r \leftrightarrow s) \wedge t) \rightarrow (p \rightarrow q)$$

1 1 1 1 1 0 1 0 0

1 0

Intentamos identificar una interpretación para la cual el consecuente sea F, y el antecedente V. Para esto, *p* tiene que ser V *q* tiene que ser F. Para que el segmento proveniente de la primera premisa sea V, r tiene que ser V. Esto supone que s también deberá ser V. Si t fuese v, entonces todo el antecedente sería V, con lo que queda claro que existe un contraejemplo y NO ES UNA TAUTOLOGÍA

Comprobación de Deducciones

Refutación

- Otra vía potencial fundamentada en la misma idea que la del contraejemplo
- Negamos la conclusión, la unimos a las premisas y vemos si el conjunto resultante es satisfacible

$$p_1, p_2, p_3, \ldots p_n \Rightarrow \mathbf{q}$$
$$p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \ldots \wedge p_n \wedge \sim\mathbf{q}$$

- La deducción es correcta si y sólo si la segunda expresión es insatisfacible.

Propiedades Formales de Cálculo Prop.

- El sistema formal de cálculo proposicional tiene como propiedades:
  - **Consistencia:** no es demostrable una fórmula y su negación
  - **Completitud:** toda fórmula válida es demostrable.
  - **Decidibilidad:** existe un procedimiento efectivo de comprobar si una fórmula es válida.

Teorema de Post: $\vdash B$ *es demostrable* $\leftrightarrow \models B$

Resumen Sem. Prop. Fórmulas

¿Fórmula válida?

Válida si tautología

Tautología si no contraejemplo

Contraejemplo si no interpret. falsa

Tabla de verdad

Coherencia de resultados

Método del Contraejemplo

Resumen Sem. Prop. Deducciones

¿Deducción correcta?

Correcta si **no** contraejemplo

$p_1, p_2, \dots, p_n \Rightarrow q$

Si **no interpretación** tal que

$1 \quad 1 \dots 1 \Rightarrow 0$

Como deducción

- Tabla de verdad
- Met. Contraejemplo
- Refutación

Transformar en fórmula

$p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n \wedge {\sim}q$

Deduc. correcta si fórmula

INSATISFACIBLE

Como fórmula

$(p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n) \rightarrow q$

Si **válida**, deducción **correcta**

Teoría Semántica en lógica de predicados

Introducción

- En la semántica proposicional se utilizan las tablas de verdad para fijar los conceptos de consecuencia lógica, validez y equivalencia.
- Para aprovechar estas mismas intuiciones basta considerar que ahora, para una fórmula cualquiera, existen las "tabla de verdad", pero con infinitas líneas o interpretaciones distintas.
- Todos los esquemas utilizados en lógica de proposiciones siguen siendo válidos: así, una fórmula será consecuencia de otra si es verdadera en todas las líneas en que ésta lo es.
- Un conjunto de fórmulas será satisfacible si existe al menos una "línea" (una interpretación) donde coincidan en ser verdaderas.

Introducción

- Se construye en base a la atribución de significado a las fórmulas
- Al ser más complejas que en proposiciones, la evaluación requiere un mayor número de elementos
- Todos los esquemas utilizados en lógica de proposiciones (validez, satisfacibilidad etc.) siguen siendo válidos

Evaluación de Fórmulas

- La evaluación requiere lo siguiente:
  - Dominio de referencia, no vacío, para interpretar las letras de término (constantes, variables y funciones)
  - Definición del conjunto de significados a asignar a las fórmulas (**V** o **F**)
  - Definición semántica de conectivas $\sim$, $\wedge$, $\vee$ y $\rightarrow$ (iguales que en cálculo proposicional)

Evaluación de Fórmulas

- Interpretación de letras de término y función
  - A las constantes se les asigna un elemento concreto del dominio
  - A las variables se les puede asignar cualquier elemento del dominio
  - A las funciones se les puede asignar una aplicación concreta f: $D^n \rightarrow D$ de entre todas las posibles

D = {a,b,c}

x	f(x)
a	a
b	a
c	b

Evaluación de Fórmulas

- Definición de argumentos del predicado
  - A cada predicado se le asigna una relación concreta n-aria definida en el dominio de referencia
  - Una definición de predicado se establece mediante una correspondencia concreta

$D^n \rightarrow \{V,F\}$ o $\{1,0\}$

x	**y**	**P(x,y)**
a	a	V
a	b	V
a	c	F
b	a	V
b	b	F
b	c	F
c	a	V
c	b	F
c	c	V

Evaluación de Fórmulas

- Ejemplos definiciones de predicados P(x) y Q(x)

D={a}

x	P(x)	Q(x)
a	1	0

D={a,b}

x	P(x)	Q(x)
a	1	1
b	1	0

Evaluación de Fórmulas

- Definición semántica de cuantificadores
  - El significado de una fórmula cuantificada se obtiene de acuerdo con las siguientes consideraciones
    - A una fórmula con ∀x se le asignará el valor de verdad **V** si para *todos* los elementos del dominio, la fórmula es verdadera (**V**).
    - A una fórmula con ∃x se le asignará el valor de verdad **V** si para *algún* elemento del dominio la fórmula es verdadera (**V**). En caso contrario será falsa **F**.

Evaluación de Fórmulas

- Ejemplos definición de predicados cuantificados

D={a}

x	P(x)	Q(x)	∀xP(x)	∀xQ(x)
a	0	1	0	1

x	P(x)	Q(x)	∃xP(x)	∃xQ(x)
a	0	1	0	1

D={a,b}

x	P(x)	Q(x)	∀xP(x)	∃xQ(x)
a	1	0	1	0
b	1	0		

x	P(x)	Q(x)	∀xP(x)	∃xQ(x)
a	1	0	0	1
b	0	1		

x	P(x)	Q(x)	∃xP(x)	∀xQ(x)
a	1	0	1	0
b	1	0		

Evaluación de Fórmulas

- Ejemplo: D^3 = {a,b,c}

x	y	P(x,y)
a	a	V
a	b	V
a	c	F
b	a	F
b	b	V
b	c	F
c	a	F
c	b	V
c	c	F

∃x∃yP(x,y) **Verdadero**
∀x∃yP(x,y) **Verdadero**
∃x∀yP(x,y) **Falso**
∀x∀yP(x,y) **Falso**

Evaluación de Fórmulas

- **Ejemplo 1:** $\forall x(P(x) \rightarrow R(x)) \rightarrow \exists y Q(y)$
- Proponemos la siguiente interpretación: D = {a,b,c}

Predicados básicos

x	P(x)	R(x)	Q(x)
a	1	0	0
b	1	1	0
c	0	0	0

Evaluamos por partes. ¿Si **$\exists y Q(y)$ es falso** **Podemos llegar a $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$** verdadero?

x	P(x)	R(x)	P(x)→R(x)	∀x(P(x)→R(x))
a	**1**	**0**	**0**	**No se cumple**
b	**1**	**1**	**1**	
c	**0**	**0**	**1**	

Por lo tanto el significado de la fórmula es **Verdadero** para la interpretación propuesta

Evaluación de Fórmulas

- **Ejemplo 2:** $P(x) \wedge (\forall x(R(x) \wedge P(y)) \rightarrow \exists y Q(x,y))$
- Proponemos la siguiente interpretación: D = {a,b}, y las variables libres, x=a e y=b.

Predicados básicos

x	y	Q(x,y)	P(x)	R(x)
a	a	**1**	**1**	**0**
a	b	**0**	**1**	**0**
b	a	**0**	**0**	**1**
b	b	**1**	**0**	**1**

Nota, variables libres en la fórmula:
P(a) vale 1 en esta interpretación
P(b) vale 0 en esta interpretación
Q(a,y) vale 1 o 0 dependiendo del valor de y

Evaluación de Fórmulas

- **Ejemplo 2 (II):**

$$(P(a) \wedge (\forall x(R(x) \wedge P(b))) \rightarrow \exists y Q(a,y)$$

x	R(x)	R(x)∧P(b)	∀x(R(x)∧P(b))	P(a) ∧ ∀x(R(x)∧P(b))
a	**0**	**0**	**0**	**0**
b	**1**	**0**		

y	**Q(a,y)**	**∃yQ(a,y)**
a	**1**	Cierto
b	**0**	

Por lo tanto el significado de la fórmula es **Verdadero** para la interpretación propuesta

Evaluación de Fórmulas

- **Ejemplo 2 (III): P(x) ∧ (∀x(R(x) ∧ P(y))→ ∃yQ(x,y))**
- Sea ahora esta otra interpretación en D = {a,b}, y las variables libres, x=a e y=b.

Predicados básicos

x	y	Q(x,y)	P(x)	R(x)
a	a	**0**	**1**	**1**
a	b	**0**	**1**	**1**
b	a	**0**	**1**	**1**
b	b	**1**	**1**	**1**

Nota, variables libres en la fórmula:
P(a) vale 1 en esta interpretación
P(b) vale 1 en esta interpretación
Q(a,y) vale 0 tanto para y=a como y=b

Evaluación de Fórmulas

- **Ejemplo 2 (IV):**

$$(P(a) \wedge (\forall x(R(x) \wedge P(b))) \rightarrow \exists y Q(a,y)$$

x	R(x)	R(x)∧P(b)	∀x(R(x)∧P(b))	P(a) ∧ ∀x(R(x)∧P(b))
a	**1**	**1**		
			1	**1**
b	**1**	**1**		

y	**Q(a,y)**	**∃yQ(a,y)**
a	**0**	**0**
b	**0**	

Por lo tanto el significado de la fórmula es **Falso** para la interpretación propuesta

Definiciones Relacionadas con TS

- Una fórmula es *satisfacible* si tiene al menos una interpretación que la verifique
- Las interpretaciones que satisfacen una fórmula se denominan *modelos*
- Las interpretaciones que no satisfacen una fórmula se denominan *contraejemplos*

Fórmulas Semánticamente Válidas

- Una fórmula es *válida* en un dominio si cualquier interpretación que pueda plantearse en *ese* dominio satisface la fórmula
  - Una fórmula válida en un dominio D2 que incluye otro D1, es válida en D1
  - Una fórmula no válida en D1 no lo puede ser en D2
- Una fórmula es *semánticamente válida* cuando es válida en *cualquier* dominio
  - La comprobación de la validez semántica en predicados no es trivial
  - Consiste en buscar un dominio donde no sea válida

Evaluación de Fórmulas

- **Ejemplo 3:** dado el dominio {a} y la fórmula **$\forall x \forall y(P(x) \rightarrow P(y))$** averiguar si es satisfacible y válida en el dominio.

x	y	P(x)	P(x) →P(y)	∀y(P(x) →P(y))	∀x ∀y(P(x) →P(y))
a	a	**1**	**1**	**1**	**1**
		0	**1**	**1**	**1**

Es satisfacible y válida en D={a}

Evaluación de Fórmulas

- **Ejemplo:** $\exists y(P(y) \vee \forall x(P(x) \rightarrow q))$

  $\forall y(P(y) \vee \forall x(P(x) \rightarrow q))$

  D = {a,b,c}

¿Satisfacibles?
¿Válidas en el dominio?
¿Semánticamente válidas?

- Responder a la segunda pregunta requeriría estudiar cualquier posible interpretación del predicado *P* en el dominio

x	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8
a	1	1	1	0	0	0	1	0
b	1	1	0	1	0	1	0	0
c	1	0	1	1	1	0	0	0

Evaluación de Fórmulas

- **Ejemplo (II):** $\exists y(P(y) \vee \forall x(P(x) \rightarrow q))$

  $\forall y(P(y) \vee \forall x(P(x) \rightarrow q))$

  D = {a,b,c}

¿Satisfacibles?
¿Válidas en el dominio?
¿Semánticamente válidas?

Interpretación P1

x	q	P(x)	P(x) →q	∀x(P(x) →q)	P(y) ∨ ∀x(P(x) →q)
a	1	1	1	1	1
b		1	1		1
c		1	1		1
a	0	1	0	0	1
b		1	0		1
c		1	0		1

Ambas son satisfacibles (para la interpretación P1 son V)

- **Ejemplo (III):** $\exists y(P(y) \vee \forall x(P(x) \rightarrow q))$

D = {a,b,c} $\forall y(P(y) \vee \forall x(P(x) \rightarrow q))$

P	q	y	P(y)	∀x(P(x) → q)	P(y) ∨ ∀x(P(x) → q)	(1)	(2)
P_1	V	a	V	V	V	V	V
		b	V		V		
		c	V		V		
	F	a	V	F	V	V	V
		b	V		V		
		c	V		V		
P_2	V	a	V	V	V	V	V
		b	V		V		
		c	F		V		
	F	a	V	F	V	V	F
		b	V		V		
		c	F		F		
P_3	V	a	V	V	V	V	V
		b	F		V		
		c	V		V		
	F	a	V	F	V	V	F
		b	F		F		
		c	V		V		
P_4	V	a	F	V	V	V	V
		b	V		V		
		c	V		V		
	F	a	F	F	F	V	F
		b	V		V		
		c	V		V		

Fuente: Cuena, 1985

- **Ejemplo (IV):** $\exists y(P(y) \vee \forall x(P(x) \rightarrow q))$

D = {a,b,c} $\forall y(P(y) \vee \forall x(P(x) \rightarrow q))$

(1) es válida en D
(2) no es válida en D

P	q	y	P(y)	∀x(P(x) → q)	P(y) ∨ ∀x(P(x) → q)	(1)	(2)
P_5	V	a	F	V	V	V	V
		b	F		V		
		c	V		V		
	F	a	F	F	F	V	F
		b	F		F		
		c	V		V		
P_6	V	a	F	V	V	V	V
		b	V		V		
		c	F		V		
	[illegible]	a	F	[illegible]	F	[illegible]	[illegible]
P_7	V	a	V	V	V	V	V
		b	F		V		
		c	F		V		
	F	a	V	F	V	V	F
		b	F		F		
		c	F		F		
P_8	V	a	F	V	V	V	V
		b	F		V		
		c	F		V		
	F	a	F	V	V	V	F
		b	F		V		
		c	F		V		

Fuente: Cuena, 1985

Evaluación de Deducciones

- Definición semántica de deducción correcta
- Dada una estructura deductiva $\mathbf{p_1,p_2,p_3,\ldots,p_n \Rightarrow q}$ se define como correcta cuando no existe una interpretación que haga $\mathbf{p_1,p_2,p_3,\ldots,p_n}$ verdadero y $\mathbf{q}$ falso

Deducción Semánticamente Correcta

- La definición de deducción semánticamente correcta es la misma que en proposiciones
  - Una estructura deductiva $\mathbf{p_1,p_2,p_3,\ldots,p_n \Rightarrow q}$ se define como correcta cuando no hay una interpretación que haga $\mathbf{p_1,p_2,p_3,\ldots,p_n}$ verdadero y $\mathbf{q}$ falso
  - O, lo que es lo mismo, $\mathbf{p_1,p_2,p_3,\ldots,p_n \Rightarrow q}$ es válida si y solo si la fórmula $\mathbf{p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \ldots \wedge p_n \wedge {\sim}q}$ es insatisfacible
  - Esto permite la comprobación a través de la búsqueda de contraejemplos.

Contraejemplos

- **Ejemplo:** **(A → P(y)) → (A → ∀x(P(x)))** ¿Válida?

1. $\underline{(A \rightarrow P(y)) \rightarrow (A \rightarrow \forall x(P(x)))}$ Falso
2. $\underline{(A \rightarrow P(y))}$ Verdadero $\rightarrow$ $\underline{(A \rightarrow \forall x(P(x)))}$ Falso
3. $\underline{(A}$ V $\rightarrow$ $\underline{P(y))}$ V $\rightarrow$ $\underline{(A}$ V $\rightarrow$ $\underline{\forall x(P(x)))}$ F

Tiene que haber algún predicado que no sea **V en P(x)**
para todos los elementos del dominio D, se puede pensar en un predicado
que sea **V** para algún valor de y ¿pero no para todos?
Salvo en dominios con un elemento, SI (contraejemplo a continuación)

Contraejemplos

- **Ejemplo (II):** **(A → P(y)) → (A → ∀x(P(x)))**

D = {a,b}

Variable libre y: y=a

A	x	P(x)	∀x P(x)	A →P(y)	A → ∀x P(x)	(A →P(y)) →(A → ∀x P(x))
1	a	1	0	1	0	0
	b	0				

Se ha encontrado un contraejemplo en el dominio {a,b}, por tanto la fórmula no es válida

Contraejemplos

- **Ejemplo:** **(P(y)→A) → (∃xP(x) →A)** ¿Válida?

  1. **(P(y)→A) → (∃xP(x) →A)**
     Falso
  2. **(P(y)→A) → (∃xP(x) →A)**
     Verdadero Falso
  3. **(P(y)→A) → (∃xP(x) →A)**
     F F V F

Se puede pensar en un predicado P(y) que sea **falso** para algún valor de y pero NO para todos?

D={a,b}, Variable libre y=b

A	x	P(x)	P(y)→A	∃xP(x)	∃xP(x) →A	(P(y)→A) → (∃xP(x) →A)
0	a	1	1	1	0	0
	b	0				

Se ha encontrado un contraejemplo en el dominio {a,b}, por tanto la fórmula no es válida

Propiedades Formales de Cálculo Pred

- El sistema de cálculo de predicados desarrollado tiene las siguientes propiedades:
  - **Consistencia:** no es posible demostrar una fórmula y su negación
  - **Completitud:** toda fórmula semánticamente válida es demostrable en el sistema axiomático
  - **Indecidibilidad:** no existe un procedimiento finito que permita decidir si una fórmula o deducción es demostrable

Parte VII

Tema 6. Forma normal y Resolución

Tema 6:
Formas Normales y Resolución

Lógica

Grado en Ingeniería Informática
2018/19

Introducción

- Los muchos métodos de demostración automática (entre ellos el método de Resolución) utilizan lo que se conoce como estandarización de fórmulas.
- Esta estandarización se basa en el teorema de intercambio para convertir las fórmulas originales a otras fórmulas con una sintaxis especial denominada **forma clausular** o **forma normal de Skolem**.
- Con ello se evita la complejidad que supondría tener que tratar con cualquier fórmula de primer orden.
- Para definir esta clase especial de fórmulas son necesarios dos conceptos: **literal** y **cláusula**.

Introducción

Definición: se llama **literal** a cualquier fórmula que sea

- Una fórmula atómica (en cuyo caso la fórmula se denomina literal positivo).
- La negación de una fórmula atómica (en cuyo caso la fórmula se denomina literal negativo).

Definición: se llama **cláusula** a cualquier disyunción de literales, es decir, a cualquier fórmula de la forma $L_1 \vee L_2 \vee \ldots \vee L_n$ donde cada L_i es un literal.

- Cuando n = 0, la cláusula se denomina cláusula vacía y se denota **λ**
- Las cláusulas que tienen como mucho un literal positivo se denominan *cláusulas de Horn*.

Teorema de intercambio

- Sea F_A la notación correspondiente a una fórmula del cálculo proposicional en la que aparece la fórmula A. El teorema dice:

$$\text{Si } \vdash A \leftrightarrow B \text{ entonces } \vdash F_A \leftrightarrow F_B$$

- Siendo F_B la fórmula resultante de sustituir la ocurrencia de A en F_A por B

Teorema de intercambio

- **Ejemplo:** $(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \Leftrightarrow (\mathbf{B} \vee \mathbf{A})$

a) $(C \vee B) \leftrightarrow (B \vee C)$ $\quad$ $\mathbf{A \leftrightarrow C}$
b) $((A \rightarrow C) \vee B) \leftrightarrow (B \vee (A \rightarrow C))$ $\quad$ $\mathbf{A \leftrightarrow A \rightarrow C}$
c) $((A \rightarrow C) \vee (B \wedge D)) \leftrightarrow ((B \wedge D) \vee (A \rightarrow C))$

$\mathbf{A \leftrightarrow A \rightarrow C}$ **and** $\mathbf{B \leftrightarrow B \wedge D}$

Teorema de intercambio

También se puede utilizar la regla de intercambio en cálculo de predicados:

Lema 1: Si $\vdash A(y) \Leftrightarrow B(y)$ entonces $\rightarrow \forall x A(x) \Leftrightarrow \forall x B(x)$

Lema 2: Si $\vdash A(y) \Leftrightarrow B(y)$ entonces $\rightarrow \exists x A(x) \Leftrightarrow \exists x B(x)$

Como consecuencia de la aplicación de esta regla de intercambio, por ejemplo, la fórmula

$$\exists x[C(x) \rightarrow \forall y \sim(B(y) \wedge \sim A(y))]$$

Se corresponde con:

$$\exists x[\sim C(x) \vee \forall y(B(y) \rightarrow A(y))]$$

Teorema de intercambio

Ejemplo: $\exists x[C(x) \rightarrow \forall y{\sim}(B(y) \wedge {\sim}A(y))]$

1. ${\sim}(B(y) \wedge {\sim}A(y)) \Leftrightarrow B(y) \rightarrow A(y)$
2. $\forall y{\sim}(B(y) \wedge {\sim}A(y)) \Leftrightarrow \forall y(B(y) \rightarrow A(y))$
3. $C(x) \rightarrow \forall y{\sim}(B(y) \wedge {\sim}A(y)) \Leftrightarrow C(x) \rightarrow \forall y(B(y) \rightarrow A(y))$
4. $C(x) \rightarrow \forall y{\sim}(B(y) \wedge {\sim}A(y)) \Leftrightarrow {\sim}C(x) \vee \forall y(B(y) \rightarrow A(y))$
5. $\exists x[C(x) \rightarrow \forall y{\sim}(B(y) \wedge {\sim}A(y))] \Leftrightarrow \exists x[{\sim}C(x) \vee \forall y(B(y) \rightarrow A(y))]$

Forma Normal PRENEX

- Estructura de fórmula en cálculo de predicados caracterizada por las siguientes propiedades:
  - Todos los cuantificadores aparecen en cabeza de una expresión a la que afectan en su totalidad
  - La expresión afectada por el conjunto de cuantificadores se denomina matriz de la fórmula y está constituida por predicados y conectivas $(\wedge, \vee, {\sim})$

$$\forall x \forall y \exists z[{\sim}A(x,y) \vee P(x,y,z) \vee R(w,x)]$$

$$\exists x \forall y \forall z[{\sim}A(x,y,z) \wedge (R(x,w) \vee P(x,w))]$$

Forma Normal PRENEX

- Dada una fórmula cualquiera, A, en cálculo de predicados, siempre existe otra fórmula FP(A) en forma PRENEX, tal que $\vdash A \leftrightarrow FP(A)$ es una fórmula válida

- Toda fórmula en cálc. pred. es equivalente a otra en forma PRENEX que se puede obtener en tres etapas usando la regla de intercambio

  1. Eliminación de conectivas distintas de $\wedge, \vee, \sim$
  2. Eliminación del signo $\sim$ aplicado a fórmulas compuestas
  3. Situación de los cuantificadores en cabeza de la fórmula

Forma Normal PRENEX

Paso 1.

Eliminación de conectivas distintas de $\wedge, \vee, \sim$

- Teniendo en cuenta que

$$\vdash (A \rightarrow B) \leftrightarrow (\sim A \vee B)$$

$$\vdash (A \rightarrow B) \leftrightarrow \sim (A \wedge \sim B)$$

- Si la fórmula A contiene ...$R \rightarrow S$...

$$\vdash \ldots \overbrace{(R \rightarrow S)}^{A} \ldots \leftrightarrow \ldots \overbrace{(\sim R \vee S)}^{A'} \ldots$$

$$\vdash \ldots (R \rightarrow S) \ldots \leftrightarrow \ldots \sim (R \wedge \sim S) \ldots$$

Forma Normal PRENEX

Paso 2.

Eliminación del signo ~ aplicado a fórmulas compuestas

- Basta con aplicar la regla intercambio y las siguientes equivalencias apoyadas en las leyes de Morgan

$\vdash \ldots\sim(R\wedge S)\ldots \leftrightarrow \ldots(\sim R\vee\sim S)\ldots$

$\vdash \ldots\sim(R\vee S)\ldots \leftrightarrow \ldots(\sim R\wedge\sim S)\ldots$

$\vdash \ldots\sim\forall xR(x)\ldots \leftrightarrow \ldots\exists x\sim R(x)\ldots$

$\vdash \ldots\sim\exists xR(x)\ldots \leftrightarrow \ldots\forall x\sim R(x)\ldots$

Forma Normal PRENEX

Paso 3.

Situación de los cuantificadores en cabeza de la fórmula (dos casos)

a) Fórmula parcial conectada no contiene libre la variable cuantificada

$\vdash \ldots A\vee\forall xP(x)\ldots \leftrightarrow \ldots\forall x(A\vee P(x))\ldots$

$\vdash \ldots A\wedge\forall xP(x)\ldots \leftrightarrow \ldots\forall x(A\wedge P(x))\ldots$

$\vdash \ldots A\vee\exists xP(x)\ldots \leftrightarrow \ldots\exists x(A\vee P(x))\ldots$

$\vdash \ldots A\wedge\exists xP(x)\ldots \leftrightarrow \ldots\exists x(A\wedge P(x))\ldots$

Forma Normal PRENEX

b) Fórmula parcial conectada contiene libre la variable cuantificada

$\vdash \ldots A(x) \lor \forall x P(x) \ldots \leftrightarrow \ldots A(x) \lor \forall y P(y) \ldots \leftrightarrow \ldots \forall y (A(x) \lor P(y)) \ldots$

$\vdash \ldots A(x) \land \forall x P(x) \ldots \leftrightarrow \ldots A(x) \land \forall y P(y) \ldots \leftrightarrow \ldots \forall y (A(x) \land P(y)) \ldots$

$\vdash \ldots A(x) \lor \exists x P(x) \ldots \leftrightarrow \ldots A(x) \lor \exists y P(y) \ldots \leftrightarrow \ldots \exists y (A(x) \lor P(y)) \ldots$

$\vdash \ldots A(x) \land \exists x P(x) \ldots \leftrightarrow \ldots A(x) \land \exists y P(y) \ldots \leftrightarrow \ldots \exists y (A(x) \land P(y)) \ldots$

Forma Normal PRENEX

Ejemplo 1: $\sim\exists x(P(x) \rightarrow \forall y Q(y))$

1. $\sim\exists x(P(x) \rightarrow \forall y Q(y)) \Leftrightarrow \sim\exists x(\sim P(x) \lor \forall y Q(y))$
2. $\sim\exists x(\sim P(x) \lor \forall y Q(y)) \Leftrightarrow \forall x \sim(\sim P(x) \lor \forall y Q(y))$
3. $\forall x \sim(\sim P(x) \lor \forall y Q(y)) \Leftrightarrow \forall x(\sim\sim P(x) \land \sim\forall y Q(y))$
4. $\forall x(\sim\sim P(x) \land \sim\forall y Q(y)) \Leftrightarrow \forall x(P(x) \land \exists y \sim Q(y))$
5. $\forall x(P(x) \land \exists y \sim Q(y)) \Leftrightarrow \forall x \exists y(P(x) \land \sim Q(y))$

Eliminar $\rightarrow$

Eliminar ~

Unir cuantificadores

Forma Normal PRENEX

Ejemplo 2: ∀xA(x) → ~∃z(B(w,z)→ ∀yC(w,y))

1. ∀xA(x) → ~∃z(B(w,z)→ ∀yC(w,y))⇔ ~∀xA(x) ∨ ~∃z(B(w,z)→ ∀yC(w,y))
2. ~∀xA(x) ∨ ~∃z(B(w,z)→ ∀yC(w,y))⇔~∀xA(x) ∨ ~∃z(~B(w,z) ∨ ∀yC(w,y))
3. ~∀xA(x) ∨ ~∃z(~B(w,z) ∨ ∀yC(w,y))⇔∃x~A(x) ∨ ∀z~(~B(w,z) ∨ ∀yC(w,y))
4. ∃x~A(x) ∨ ∀z~(~B(w,z) ∨ ∀yC(w,y))⇔∃x~A(x) ∨ ∀z(~~B(w,z) ∧ ~∀yC(w,y))
5. ∃x~A(x) ∨ ∀z(B(w,z) ∧ ~∀yC(w,y)) ⇔ ∃x~A(x) ∨ ∀z(B(w,z) ∧ ∃y~C(w,y))
6. ∃x~A(x) ∨ ∀z(B(w,z) ∧ ∃y~C(w,y)) ⇔ ∃x~A(x) ∨ ∀z ∃y(B(w,z) ∧ ~C(w,y))
7. ∃x~A(x) ∨ ∀z∃y(B(w,z) ∧ ~C(w,y)) ⇔ ∃x∀z∃y(~A(x) ∨ (B(w,z) ∧ ~C(w,y)))

1. Eliminar → ⇨ **2. Eliminar ~** ⇨ **3. Unir cuantificadores**

Forma Normal PRENEX

Ejemplo 3:

∀x(P(x)→[~∀y(Q(x,y)→ ∃zP(z)) ∧ ∀y(Q(x,y) → R(t))])

1. ∀x(P(x)→[~∀y(Q(x,y)→ ∃zP(z)) ∧ ∀y(Q(x,y) → R(t))])
2. ∀x(~P(x) ∨ [~∀y(~Q(x,y) ∨ ∃zP(z)) ∧ ∀y(~Q(x,y) ∨ R(t))])
3. ∀x(~P(x) ∨ [∃y~(~Q(x,y) ∨ ∃zP(z)) ∧ ∀y(~Q(x,y) ∨ R(t))])
4. ∀x(~P(x) ∨ [∃y(Q(x,y) ∧ ~ ∃zP(z)) ∧ ∀y(~Q(x,y) ∨ R(t))])
5. ∀x(~P(x) ∨ [∃y(Q(x,y) ∧ ∀z~P(z)) ∧ ∀y(~Q(x,y) ∨ R(t))])
6. ∀x(~P(x) ∨ [∃y∀z(Q(x,y) ∧ ~P(z)) ∧ ∀y(~Q(x,y) ∨ R(t))])
7. ∀x∃w∀z(~P(x) ∨ [(Q(x,w) ∧ ~P(z)) ∧ ∀y(~Q(x,y) ∨ R(t))])
8. ∀x∃w∀z∀y(~P(x) ∨ [(Q(x,w) ∧ ~P(z)) ∧ (~Q(x,y) ∨ R(t))])

1. Eliminar → ⇨ **2. Eliminar ~** ⇨ **3. Unir cuantificadores**

Forma Normal de SKOLEM

- Está en la base de varios procedimientos de demostración automática.
- Es una estructura de fórmula con las siguientes características:
  - Todos los cuantificadores están en cabeza de la fórmula.
  - Sólo existen cuantificadores universales.
  - La matriz de la fórmula es una conjunción de disyunciones de los átomos de las fórmulas, es decir una conjunción de cláusulas (cláusula: disyunción de literales)

$\forall x \forall z[(\underline{P(f(a),x) \vee Q(y,z)}) \wedge (\underline{Q(g(x),x) \vee R(w,y) \vee P(x,z)}]$

Forma Normal de SKOLEM

- Dada una fórmula A, se le puede asociar una fórmula en FNS usando el procedimiento:
  1. Se pone A en prenex (FNP).
  2. Las **variables libres** se ligan pasando a la cabeza de FNP cuantificadores existenciales (se denomina **cierre existencial**).
  3. La expresión de la matriz se transforma empleando la equivalencia:

     $$A \vee (B \wedge C) \leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

  4. Se suprimen los cuantificadores existenciales.

Forma Normal de SKOLEM

- La supresión de cuantificadores existenciales se hace de la forma que sigue:
  - Se va mirando de izquierda a derecha.
  - Si el $\exists$ no tiene ningún $\forall$ a la izquierda, reemplazar las variables por constantes:

    $$\exists x \forall y \forall z(P(x,y) \vee Q(x,z)) \Rightarrow \forall y \forall z(P(a,y) \vee Q(a,z))$$

  - Por cada existencial que se reemplaza de esta manera debe usarse una constante distinta.
  - Si $\exists$ tiene un $\forall$ a la izquierda, reemplazar la variable por una función de tantos argumentos como $\forall$s tenga a la izquierda, con esas variables como argumento:

    $$\forall y \forall z \exists x(P(x,y)) \vee Q(x,z)) \Rightarrow \forall y \forall z(P(f(y,z),y) \vee Q(f(y,z),z))$$

  - Por cada existencial que se reemplaza por una función se introduce una letra (de función) distinta.

Forma Normal de SKOLEM

Ejemplo: $\forall x(P(x) \rightarrow \sim\forall y(Q(x,y) \rightarrow \exists z P(z)) \wedge \forall y(Q(x,y) \rightarrow R(t)))$

Prenex

1. $\forall x \exists w \forall z \forall y(\sim P(x) \vee [(Q(x,w) \wedge \sim P(z)) \wedge (\sim Q(x,y) \vee R(t))])$

Cierre Existencial

2. $\exists t \forall x \exists w \forall z \forall y(\sim P(x) \vee [(Q(x,w) \wedge \sim P(z)) \wedge (\sim Q(x,y) \vee R(t))])$

Propiedad Distributiva

3. $\exists t \forall x \exists w \forall z \forall y((\sim P(x) \vee (Q(x,w) \wedge \sim P(z)) \wedge (\sim P(x) \vee (\sim Q(x,y) \vee R(t))))$
4. $\exists t \forall x \exists w \forall z \forall y((\sim P(x) \vee Q(x,w)) \wedge (\sim P(x) \vee \sim P(z)) \wedge (\sim P(x) \vee \sim Q(x,y) \vee R(t)))$

Eliminación de Cuantificaciones Existenciales

5. $\forall x \forall z \forall y((\sim P(x) \vee Q(x,f(x)) \wedge (\sim P(x) \vee \sim P(z)) \wedge (\sim P(x) \vee \sim Q(x,y) \vee R(a)))$

Forma Normal de SKOLEM

Ejemplo:

$\forall x[\sim P(x,a) \rightarrow \exists y[P(y,g(x)) \wedge \forall z(P(z,g(x)) \rightarrow P(y,z))]]$

Prenex

1. $\forall x \exists y \forall z[P(x,a) \vee [P(y,g(x)) \wedge (\sim P(z,g(x)) \vee P(y,z))]]$

Cierre Existencial

2. No hay variables libres

Propiedad Distributiva

3. $\forall x \exists y \forall z[(P(x,a) \vee P(y,g(x))) \wedge (P(x,a) \vee \sim P(z,g(x)) \vee P(y,z))]$

Eliminacion del Cuantificador Existencial

4. $\forall x \forall z[(P(x,a) \vee P(f(x),g(x))) \wedge (P(x,a) \vee \sim P(z,g(x)) \vee P(f(x),z))]$

Forma Normal de SKOLEM

De hecho, los pasos para SKOLEM se podrían resumir en:

1. **Convertir la fórmula en PRENEX:**
   1. Eliminar condicionales.
   2. Gestionar negaciones.
   3. Extraer los cuantificadores al principio de la fórmula.
2. **Cerrar las variables libres: cierre existencial**
   1. Ejemplo: $\forall x \forall y(P(x) \vee Q(y) \vee R(z))$ => $\exists z \forall x \forall y(P(x) \vee Q(y) \vee R(z))$
3. **Aplicar la propiedad distributiva si es necesario:**

   $$A \vee (B \wedge C) \leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

4. **Suprimir los cuantificadores existenciales**
   1. Ejemplo: $\exists x \forall y \forall z(P(x,y) \vee Q(x,z))$ => $\forall y \forall z(P(a,y) \vee Q(a,z))$
   2. Ejemplo: $\forall y \forall z \exists x(P(x,y)) \vee Q(x,z))$ => $\forall y \forall z(P(f(y,z),y) \vee Q(f(y,z),z))$

Introducción a la Resolución

- Es un método de demostración automática de teoremas.
- Permite comprobar si una estructura deductiva es correcta a través del estudio de la validez de una fórmula.
- El algoritmo no tiene porqué terminar siempre (indecibilidad).
- Permiten la verificación formal de programas.

Resolución

- El procedimiento general consiste en demostrar que $p_1,p_2,p_3,\ldots,p_n \Rightarrow q$ es correcta.
- Para esto se comprueba si la fórmula

  $F = p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n \wedge \sim q$ es **insatisfacible**
- Es posible elegir unas funciones de **Skolem** *f* tales que la FNS sea satisfacible o insatisfacible en las mismas condiciones que la fórmula original.
  - *Tanto las funciones como las constantes tienen que satisfacer el predicado.*
- Si de una fórmula F se deduce una **contradicción**, entonces la fórmula es **insatisfacible.**

Regla de resolución

- Se escribe la forma clausular correspondiente a la FNS(F).
- Se intenta llegar a una cláusula vacía (la llamaremos **λ**) mediante la aplicación reiterada de la **regla de resolución** ($L \vee A$, $\sim L \vee B \Rightarrow A \vee B$) para obtener **resolventes**.
- La obtención de una cláusula vacía **λ** implica la **existencia** de una **contradicción**, con ello la **insatisfacibilidad** de la fórmula y la **corrección de la estructura deductiva**.

Regla de resolución

- **Regla de resolución**

$L \vee A$, $\sim L \vee B \Rightarrow A \vee B$

Ejemplo1:

C1: $P(a) \vee Q(x)$

C2: $\sim P(a) \vee Q(x)$

Resolvente: $Q(x)$

Ejemplo2:

C1: $P(y) \vee Q(x)$

C2: $\sim P(w) \vee Q(x)$

Resolvente: ??

Unificar Predicados

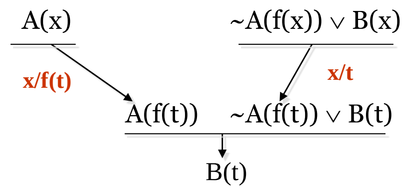
Regla de resolución

- La obtención de **resolventes** puede exigir sustituciones de **variables por:**
  - **Constantes**: x cambia por a (x/a)
  - **Variables:** x cambia por y (x/y)
  - **Funciones en las que no aparece esa variable**:
    - x cambia por f(y,z,a)

Regla de resolución

- No se puede cambiar una variable por una función donde aparece esa misma variable:
  - **x** cambia por f(**x**,z,a), **x**/f**(x,**z,a)
- Hay que hacer un cambio (si es posible) a otra variable distinta:

Ejemplo:



Regla de resolución

- La sustitución de variables debe hacerse teniendo en cuenta lo siguiente:
  - Aunque la **misma variable** aparezca en **dos cláusulas distintas**, se trata de **dos variables distintas**, por lo tanto pueden sustituirse por dos términos distintos.
  - Una cláusula se puede utilizar tantas veces como sea necesario y con sustituciones de variables distintas.
  - Las sustituciones **afectan a las cláusulas completas**, no a los predicados de una cláusula. Dentro de una cláusula se sustituyen todas las apariciones de una variable por un mismo término:
    - Ejemplo: $\sim A(f(x)) \vee B(x,y) \xrightarrow{x/t} \sim A(f(t)) \vee B(t,y)$

Regla de resolución

Ejemplo I: Obtención de resolventes

Cláusulas:

C1:~ p(a,x) ∨ p(b,x)

C2: p(a,c)

C3:~ p(b,y)

Resolventes:

C4: ~ p(b,x)	y/x en C3
C5: ~ p(a,x)	Regla de resolución C1 y C4
C6: ~ p(a,c)	x/c en C5
C7: vacía	Regla resolución C2 y C6

Regla de resolución

Ejemplo II: Obtención de resolventes.

C1: ~r(x) ∨ q(x)

C2:~p(y) ∨ ~q(y)

C3: p(a)

C4: q(a)

C5: ~q(z) ∨ r(z)

Resolventes:

C6: ~q(a) ∨ r(a)	z/a en C5
C7: r(a)	Regla resolución C4 y C6
C8: ~r(a) ∨ q(a)	x/a en C1
C9: q(a)	Regla resolución C7 y C8
C10:~p(a) ∨ ~q(a)	y/a en C2
C11: ~p(a)	Regla resolución C9 y C10
C12: vacía	Regla resolución C3 y C11

Resolución

- Si se encuentra una contradicción, F es insatisfacible (deducción correcta).
- Si tras ***todas*** las pruebas posibles no hay una contradicción, **F es satisfacible** = **deducción no correcta**.
- Si el algoritmo no termina (no podemos asegurar haber probado todas las posibilidades), entonces **no podemos afirmar nada**.
- Al componer la fórmula $\mathbf{F = p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n \wedge \sim q}$, se debe **negar la conclusión** y hacerlo con **todos sus cuantificadores**.

Resolución

Los pasos para la Resolución se podrían resumir en:

1. **Unir las premisas con conjunciones y la conclusión negada:**
   p_1 ^ p_2 ^ ...^ p_n ^ ~q,
2. **Convertir la fórmula en PRENEX:**
   1. Eliminar condicionales.
   2. Gestionar negaciones.
   3. Extraer los cuantificadores al principio de la fórmula.
3. **Cerrar las variables libres: cierre existencial**
   1. Ejemplo: $\forall x\forall y(P(x)\vee Q(y)\vee R(z)) \Rightarrow \exists z\forall x\forall y(P(x)\vee Q(y)\vee R(z))$
4. **Aplicar la propiedad distributiva si es necesario:**
   $A \vee (B \wedge C) \leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
5. **Suprimir los cuantificadores existenciales**
   1. Ejemplo: $\exists x\forall y\forall z(P(x,y) \vee Q(x,z)) \Rightarrow \forall y\forall z(P(a,y) \vee Q(a,z))$
   2. Ejemplo: $\forall y\forall z\exists x(P(x,y)) \vee Q(x,z)) \Rightarrow \forall y\forall z(P(f(y,z),y) \vee Q(f(y,z),z))$
6. **Realizar sustituciones de variables necesarias para obtener la cláusula vacía mediante la regla de resolución.**

Resolución

Ejemplo 1: $\exists xP(x) \Rightarrow \forall xP(x)$

1. $\exists xP(x) \wedge \sim\forall xP(x)$
2. $\exists xP(x) \wedge \exists x\sim P(x)$
3. $\exists x\exists y(P(x) \wedge \sim P(y))$

Prenex

4. $P(a) \wedge \sim P(b)$

Skolem

5. $C_1 \Rightarrow P(a)$
   $C_2 \Rightarrow \sim P(b)$

No son unificables, F es satisfacible, deducción no correcta

Puedo cambiar a/b?? o b/a??... Y ¿a/x y b/x?

Resolución

Ejemplo 2: ∀x(p(a,x) →p(b,x)), p(a,c) ⇒ ∃xp(b,x)

1. ∀x(p(a,x) →p(b,x)) ∧ p(a,c) ∧ ~ ∃xp(b,x)
2. Forma Skolen: ∀x∀y ((~ p(a,x) ∨ p(b,x)) ∧ p(a,c) ∧ ~ p(b,y))

Cláusulas:

C1:~ p(a,x) ∨ p(b,x)

C2: p(a,c)

C3:~ p(b,y)

Resolventes:

C4: ~ p(b,x)	y/x en C3
C5: ~ p(a,x)	Regla de resolución C1 y C4
C6: ~ p(a,c)	x/c en C5
C7: vacía	Regla resolución C2 y C6

Por lo tanto, la fórmula es insatisfacible y la deducción correcta

Forma Normal de SKOLEM

Ejemplo 3:

∀x[∃y(A(x,y) ∧ B(y))→∃y(C(y) ∧ D(x,y))] ⇒ ∀x~C(x)→ ∀x∀y(A(x,y)→~B(y))

∀x[∃y(A(x,y) ∧ B(y))→∃y(C(y) ∧ D(x,y))] ∧ ~[∀x~C(x)→ ∀x∀y(A(x,y)→~B(y))]

F1: ∀x[∃y(A(x,y) ∧ B(y))→∃y(C(y) ∧ D(x,y))]

F2: ~[∀x~C(x)→ ∀x∀y(A(x,y)→~B(y))]

1. ∀x[~∃y (A(x,y) ∧ B(y))∨ ∃y(C(y) ∧ D(x,y))]
2. ∀x[∀y (~A(x,y) ∨ ~ B(y)) ∨ ∃y(C(y) ∧ D(x,y))]
3. ∀x[∀y (~A(x,y) ∨ ~ B(y)) ∨ ∃z(C(z) ∧ D(x,z))]
4. ∀x∃z [∀y (~A(x,y) ∨ ~ B(y)) ∨ (C(z) ∧ D(x,z))]
5. ∀x∃z ∀y [(~A(x,y) ∨ ~ B(y)) ∨ (C(z) ∧ D(x,z))]
6. $\forall x \exists z\, \forall y\, [\, \underbrace{(\sim A(x,y) \vee \sim B(y) \vee C(z))} \wedge \underbrace{(\sim A(x,y) \vee \sim B(y) \vee D(x,z))}]$

F2: ~[∀x~C(x)→ ∀x∀y(A(x,y)→~B(y))]

7. ~[~∀x~C(x) ∨ ∀x∀y(~ A(x,y) ∨ ~B(y))]
8. ~[∃ xC(x) ∨ ∀x∀y(~ A(x,y) ∨ ~B(y))]
9. ∀ x~C(x) ∧ ∃ x ∃ y(A(x,y) ∧ B(y))
10. ∀ u~C(u) ∧ ∃ x ∃ y(A(x,y) ∧ B(y))
11. $\exists x\, \exists y\, \forall u\, [\underbrace{\sim C(u)} \wedge \underbrace{A(x,y)} \wedge \underbrace{B(y)}]$

Forma Normal de SKOLEM

Ejemplo 3: (Continuación)

$F1 \wedge F2$:

$\forall x \exists z \forall y\, [\, (\sim A(x,y) \vee \sim B(y) \vee C(z)) \wedge (\sim A(x,y) \vee \sim B(y) \vee D(x,z))]$

$\wedge\, \exists x \exists y \forall u\, [\sim C(u) \wedge A(x,y) \wedge B(y)]$

12. $\forall x \exists z \forall y\, [\, (\sim A(x,y) \vee \sim B(y) \vee C(z)) \wedge (\sim A(x,y) \vee \sim B(y) \vee D(x,z))]$
 $\wedge\, \exists w \exists v \forall u\, [\sim C(u) \wedge A(w,v) \wedge B(v)]$

13. $\exists w \exists v \forall u \forall x \exists z \forall y [(\sim A(x,y) \vee \sim B(y) \vee C(z)) \wedge (\sim A(x,y) \vee \sim B(y) \vee D(x,z))$
 $\wedge \sim C(u) \wedge A(w,v) \wedge B(v)]$ Prenex

14. $\forall u \forall x \forall y ((\sim A(x,y) \vee \sim B(y) \vee C(f(u,x))) \wedge (\sim A(x,y) \vee \sim B(y) \vee D(x,f(u,x)))$
 $\wedge \sim C(u) \wedge A(a,b) \wedge B(b))$

Claúsulas:

$\sim A(x,y) \vee \sim B(y) \vee C(f(u,x))$; $\sim A(x,y) \vee \sim B(y) \vee D(x,f(u,x))$; $\sim C(u)$; $A(a,b)$; $B(b)$

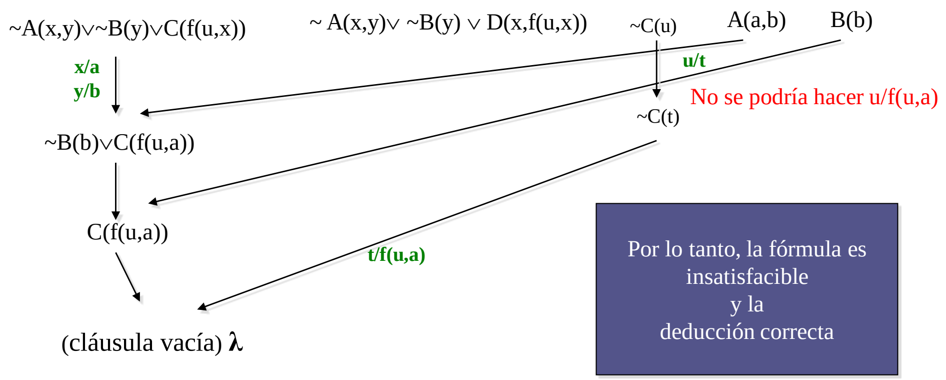
O:

$\sim A(x,y) \vee \sim B(y) \vee C(f(u,x))$; $\sim A(v,w) \vee \sim B(w) \vee D(v,f(u,v))$; $\sim C(t)$; $A(a,b)$; $B(b)$

Resolución

Ejemplo 3: (continuación)

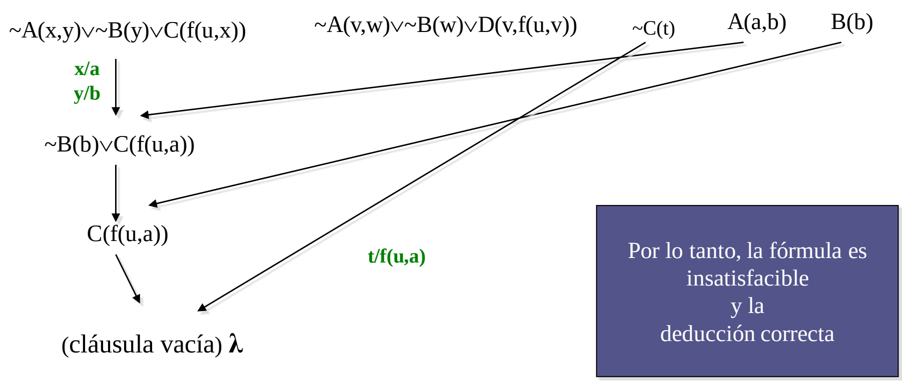
$\forall u \forall x \forall y ((\sim A(x,y) \vee \sim B(y) \vee C(f(u,x))) \wedge (\sim A(x,y) \vee \sim B(y) \vee D(x,f(u,x))) \wedge \sim C(u) \wedge A(a,b) \wedge B(b))$



Resolución

Ejemplo 3: (continuación)

$\forall u \forall x \forall y \forall v \forall w \forall z \forall t((\sim A(x,y) \vee \sim B(y) \vee C(f(u,x))) \wedge (\sim A(v,w) \vee \sim B(w) \vee D(v,f(u,v))) \wedge \sim C(t) \wedge A(a,b) \wedge B(b))$



Por lo tanto, la fórmula es insatisfacible
y la
deducción correcta

Forma Normal de SKOLEM

Ejemplo 4:

$\exists x(F(x) \wedge \forall y(E(y) \rightarrow A(x,y))), \forall x \forall y(F(x) \wedge C(y) \rightarrow \sim A(x,y)) \Rightarrow \forall x(E(x) \rightarrow \sim C(x))$

1. $\exists x(F(x) \wedge \forall y(E(y) \rightarrow A(x,y))) \wedge \forall x \forall y(F(x) \wedge C(y) \rightarrow \sim A(x,y)) \wedge \sim(\forall x(E(x) \rightarrow \sim C(x)))$
2. $\exists x(F(x) \wedge \forall y(\sim E(y) \vee A(x,y))) \wedge \forall x \forall y(\sim(F(x) \wedge C(y)) \vee \sim A(x,y)) \wedge \sim(\forall x(\sim E(x) \vee \sim C(x)))$
3. $\exists x(F(x) \wedge \forall y(\sim E(y) \vee A(x,y))) \wedge \forall x \forall y(\sim F(x) \vee \sim C(y) \vee \sim A(x,y)) \wedge \exists x(E(x) \wedge C(x))$
4. $\exists x \forall y(F(x) \wedge (\sim E(y) \vee A(x,y))) \wedge \forall x \forall y(\sim F(x) \vee \sim C(y) \vee \sim A(x,y)) \wedge \exists x(E(x) \wedge C(x))$
5. $\exists x \forall y(F(x) \wedge (\sim E(y) \vee A(x,y))) \wedge \forall w \forall z(\sim F(x) \vee \sim C(y) \vee \sim A(w,z)) \wedge \exists v(E(v) \wedge C(v))$
6. $\exists x \forall y \forall w \forall z \exists v((F(x) \wedge (\sim E(y) \vee A(x,y)) \wedge (\sim F(w) \vee \sim C(z) \vee \sim A(w,z)) \wedge (E(v) \wedge C(v)))$
7. $\forall y \forall w \forall z((F(a) \wedge (\sim E(y) \vee A(a,y)) \wedge (\sim F(w) \vee \sim C(z) \vee \sim A(w,z)) \wedge (E(f(y,w,z)) \wedge C(f(y,w,z))))$

Resolución

Ejemplo 4 (II):

∀y∀w∀z((F(a) ∧ (~ E(y) ∨ A(a,y)) ∧ (~F(w) ∨ ~C(z) ∨ ~A(w,z)) ∧ (E(f(y,w,z)) ∧ C(f(y,w,z))))

F(a) ~ E(y) ∨ A(a,y) ~F(w) ∨ ~C(z) ∨ ~A(w,z) E(f(y,w,z)) C(f(y,w,z))

w/a

f(y,w,z) / z??

~C(z) ∨ ~A(a,z)

z / f(y,w,z) ??

¿~A(a,f(y,w,z)) o ~A(a,z)?

Problema en este caso

Problema en este caso:

No se pueden sustituir funciones por variables ni variables por funciones que contengan esa misma variable

~A(a,f(y,w,f(y,w,z)))

~A(a,f(y,w,f(y,w,f(y,w,z)))) … α

Resolución

Ejemplo 4 (III):

∀y∀w∀z((F(a) ∧ (~ E(y) ∨ A(a,y)) ∧ (~F(w) ∨ ~C(z) ∨ ~A(w,z)) ∧ (E(f(y,w,z)) ∧ C(f(y,w,z))))

F(a) ~ E(y) ∨ A(a,y) ~F(w) ∨ ~C(z) ∨ ~A(w,z) E(f(y,w,z)) C(f(y,w,z))

w/a

y/t

~C(z) ∨ ~A(a,z)

~E(t) ∨ A(a,t)

z/t

~C(t) ∨ ~A(a,t)

t/f(y,w,z)

t/f(y,w,z)

~A(a,f(y,w,z))

Por lo tanto, la fórmula es insatisfacible y la deducción correcta

~E(f(y,w,z))

(cláusula vacía) λ

Resolución

Ejemplo 4 (III). Otra forma de escribirlo

C1: $F(a)$

C2: $\sim E(y) \vee A(a,y)$

C3: $\sim F(w) \vee \sim C(z) \vee \sim A(w,z)$

C4: $E(f(y,w,z))$

C5: $C(f(y,w,z))$

C6: $\sim C(z) \vee \sim A(a,z)$	w/a en C3 y RR con C1
C7: $\sim C(t) \vee \sim A(a,t)$	z/t en C6
C8: $\sim A(a, f(y,w,z))$	t/f(y,w,z) en C7 y RR con C5
C9: $\sim E(t) \vee A(a,t)$	y/t en C2
C10: $\sim E(f(y,w,z))$	t/f(y,w,z) en C9 y RR con C8

C11: vacía RR C4 y C10

Parte VIII

Prolog

Introducción a la Programación Lógica

Lógica, Curso 2014-15

Departmento de Informática
Universidad Carlos III de Madrid

Inteligencia Artificial

Cláusulas de Horn

- Las cláusulas de Horn simplifican el proceso de demostración automatizada de teoremas.
- Se pueden transformar en un conjunto de átomos afirmados que implican una o varias conclusiones.
- Permiten representar la mayoría de proposiciones y predicados lógicos.
- Un programa de Prolog está compuesto por un conjunto de cláusulas de Horn.

  Ejemplo: $p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \rightarrow q$

  Ejemplo: $p(X) \wedge q(X, Y) \wedge \cdots \rightarrow r(X)$

Términos en PROLOG

- Constantes: elementos concretos del dominio, representadas con minúsculas (a,b,c,juan,pedro, etc..).
- Variables: representan objetos por determinar.
    - Secuencia de letras, dígitos y _ comenzando por mayúscula
    - Las variables son semejantes a incógnitas: no se les puede asignar valores a voluntad.
    - Ejemplos:
        - X1
        - Padre
        - X
        - Num_Telef
        - ListaClientes

Hechos en PROLOG

- Son predicados aplicados a términos constantes.
- En PROLOG todo se termina con un **punto** '.'.
- Ejemplo:
  - padre(maria,guillermo).
  - padre(antonio, guillermo).
  - padre(guillermo, juan).
  - haceSol.

Reglas en PROLOG

- También podemos establecer relaciones entre predicados, por ejemplo:

  $Padre(Y, X) \rightarrow Hijo(X, Y)$ (lógica)
- Una regla en PROLOG tiene la forma: $Cabeza : -Cuerpo$

  $Hijo(X, Y) : -Padre(Y, X)$ (prolog)
- Que es lo mismo que decir que para Y padre de X se cumple X es su hijo (del padre Y).
- Las variables de la cabeza son **universales**, las que sólo están en el cuerpo son **existenciales**.
- Los hechos son simplemente reglas sin cuerpo.
- Se usa la **coma** (,) para representar la conjunción en el antecedente.

Reglas en PROLOG (II)

- La forma de salvar algunas de las limitaciones de las cláusulas de Horn es la siguiente:
  - Conjunción en el consecuente:

Lógica	PROLOG
$p \rightarrow q \wedge r$	$q :- p.\ r :- p.$

  - Disyunción en el Antecedente:

Lógica	PROLOG
$p \vee q \rightarrow r$	$r :- p.\ r :- q.$

Consultas en PROLOG

- PROLOG permite CONSULTAR si un hecho está en la base de conocimiento:

  ```
  ?- padre(maria, guillermo).
  true.
  ```

- Si se usan variables, devuelve las UNIFICACIONES que hacen verdad la consulta:

  ```
  ?- padre(maria, X).
  X=guillermo.
  ```

- La consulta puede ser compuesta:

  ```
  ?- padre(maria, X),padre(X,Y)
  X=guillermo.
  Y=juan.
  ```

Reglas Avanzadas en PROLOG

- Un predicado puede estar definido en función de otros

  $padre(X, Y) : -progenitor(X, Y), hombre(X).$

- Incluso puede estar definido en función de sí mismo, lo que da lugar a expresiones recursivas.

$$\begin{array}{l} factorial(0, 1). \\ factorial(X, Y) : - \\ \qquad\qquad X1 \ is \ X - 1, \\ \qquad\qquad factorial(X1, Z), \\ \qquad\qquad Y \ is \ Z * X, \ !. \end{array}$$

Tipos de Razonamiento

Partimos del siguiente ejemplo formado por Cláusulas de Horn. ¿Se puede deducir “s”?

1	$p \wedge r \rightarrow q$	Premisa 1
2	$q \rightarrow s$	Premisa 2
3	p	Premisa 3
4	r	Premisa 4

Encadenamiento hacia delante

- También llamado dirigido por datos
  1. Se parte de los hechos conocidos en BC.
  2. Se escoge una cláusula de Horn B_i de BC tal que los hechos del antecedente sean todos conocidos.
  3. Se añade a BC como hecho el consecuente de B_i.
  4. Se repite el proceso hasta que no se puedan generar sentencias nuevas o se haya llegado a la conclusión buscada α.

Ejemplo de Encadenamiento hacia delante

	Hechos	Regla
1	p,r	$p \wedge r \rightarrow q$
2	p,r,q	$q \rightarrow s$
3	p,r,q,s	fin

Encadenamiento hacia atrás

- También llamado dirigido por objetivos
- Puede contestar a la pregunta de ¿en qué mundos sería verdadera la conclusión buscada? (valores que tendrían que haber en la BC)
    1. Se inicializa una pila de objetivos con α.
    2. Se busca una sentencia (B_i) en *BC* que tenga el primer objetivo de la pila α como consecuente. Si no se puede encontrar, el algoritmo termina: no se puede obtener α.
    3. Si los antecedentes de B_i están en *BC*, entonces se retira el primer objetivo de la pila y se añade a la *BC*. Si la pila ha quedado vacía, se termina: se demuestra que se puede deducir α.
    4. Si los antecedentes no están, se añaden los antecedentes a pila y se va a (2)

Ejemplo de Encadenamiento hacia atrás

	Hechos	Objetivos	Regla
1	p,r	s	$q \rightarrow s$
2	p,r	q,(s)	$p \wedge r \rightarrow q$
3	p,r,q,s	fin	

Comparación

- Los métodos de encadenamiento son completos sólo cuando se usan Cláusulas de Horn
- En estos casos el proceso de deducción se puede realizar en tiempo lineal con respecto al tamaño de la base de conocimiento
- El encadenamiento hacia atrás va “directo” al objetivo requerido
- Se usa en PROLOG para responder a las consultas
- Y también para encontrar la unificación concreta que responde a la consulta

Parte IX

Recursos

FORMULARIO DE PREDICADOS

Axiomas

A1.	$\vdash A \to (B \to A)$	*Introd. del antecedente*
A2.	$\vdash (A \to B) \to ((A \to (B \to C)) \to (A \to C))$	
A3.	$\vdash A \to (B \to A \wedge B)$	*Regla del producto*
A4.	$\vdash A \wedge B \to A$,, $\quad A \wedge B \to B$	*Regla de simplificación*
A5.	$\vdash A \to A \vee B$,, $\quad B \to A \vee B$	*Regla de la adición*
A6.	$\vdash (A \to C) \to ((B \to C) \to (A \vee B \to C))$	*Prueba por casos*
A7.	$\vdash (A \to B) \to ((A \to \sim B) \to \sim A)$	*Reducción al absurdo*
A8.	$\vdash \sim\sim A \to A$	*Eliminación de la doble neg.*
A9.	$\vdash \forall x B(x) \to B(t)$	
A10.	$\vdash B(t) \to \exists x B(x)$	

Reglas de Inferencia

$\dfrac{\vdash A,\ \vdash A \to B}{\vdash B}$ Modus Ponens

$\dfrac{\vdash A \to B(y)}{\vdash A \to \forall x B(x)}$ Gen. Univ Condicional

$\dfrac{\vdash A(y) \to B}{\exists x A(x) \to B}$ Gen. Exist Condicional

Reglas Derivadas

$\dfrac{\vdash A(y)}{\vdash \exists x A(x)}$ Gen. Existencial

$\dfrac{\vdash A(y)}{\forall x A(x)}$ Gen. Universal

$\dfrac{\vdash \exists x A(x),\ A(y) \to B}{\vdash B}$ Esp. Existencial

$\dfrac{\vdash \forall x A(x)}{\vdash A(y)}$ Esp. Universal

Teoremas

1. **Modificación de la variable cuantificada**
   $\vdash \forall x P(x) \leftrightarrow \forall B P(y)$
   $\vdash \exists x P(x) \leftrightarrow \exists y P(y)$

2. **Descenso cuantificacional**
   $\vdash \forall x P(x) \to \exists y P(y)$

3. **Cuantificación múltiple. Propiedades conmutativas**
   a. **Cuantificador universal**
      $\vdash \forall x \forall y P(x,y) \leftrightarrow \forall y \forall x P(x,y)$

   b. **Cuantificador existencial**
      $\vdash \exists x \exists y P(x,y) \leftrightarrow \exists y \exists x P(x,y)$

   c. **Conmutatividad de distintos tipos**
      $\vdash \exists x \forall y P(x,y) \to \forall y \exists x P(x,y)$

4. **Negación de fórmulas cuantificadas**
   $\vdash \sim\forall x P(x) \leftrightarrow \exists x \sim P(x)$
   $\vdash \sim\exists x P(x) \leftrightarrow \forall x \sim P(x)$

5. **Cuantificación de las fórmulas con la conectiva conjunción**
   $\vdash \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x) \leftrightarrow \forall x (P(x) \wedge Q(x))$
   $\vdash A \wedge \forall x P(x) \leftrightarrow \forall x (A \wedge P(x))$
   - x no es libre en A (A es independiente de x)

   $\vdash \exists x (P(x) \wedge Q(x)) \to \exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$
   $\vdash \exists x (A \wedge P(x)) \leftrightarrow A \wedge \exists x P(x)$
   - x no es libre en A (A es independiente de x)

6. **Cuantificación de las fórmulas con la disyunción**
   $\vdash \forall x P(x) \vee \forall x Q(x) \to \forall x (P(x) \vee Q(x))$
   $\vdash \forall x (A \vee P(x)) \leftrightarrow A \vee \forall x P(x)$
   $\vdash \exists x (P(x) \vee Q(x)) \leftrightarrow \exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$
   $\vdash \exists x (A \vee P(x)) \leftrightarrow A \vee \exists x P(x)$

7. **Cuantificación de las fórmulas con la conectiva implicación**
   $\vdash \forall x (P(x) \to Q(x)) \to (\forall x P(x) \to \forall x Q(x))$
   $\vdash \forall x (P(x) \to A) \to (\forall x P(x) \to A)$
   $\vdash \forall x (A \to P(x)) \leftrightarrow (A \to \forall x P(x))$
   $\vdash (\exists x P(x) \to \exists x Q(x)) \to \exists x (P(x) \to Q(x))$
   $\vdash (\exists x P(x) \to A) \to \exists x (P(x) \to A)$
   $\vdash \forall x (P(x) \to A) \leftrightarrow \exists x P(x) \to A$
   $\vdash A \to \exists x P(x) \leftrightarrow \exists x (A \to P(x))$
   $\vdash \exists x (A(x) \to B) \leftrightarrow (\forall x A(x) \to B)$

8. **Cuantificación de fórmulas con equivalencia material**
   $\vdash \forall x (P(x) \leftrightarrow P(Q)) \to (\forall x P(x) \leftrightarrow \forall x Q(x))$
   $\vdash \forall x (P(x) \leftrightarrow A) \to (\forall x P(x) \leftrightarrow A)$

9. **Otros teoremas**
   $\vdash (\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)) \to \exists x (P(x) \wedge Q(x))$
   $\vdash (A \wedge \forall x P(x)) \to \exists x (A \wedge P(x))$
   $\vdash \forall x (P(x) \wedge Q(x)) \to (\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x))$
   $\vdash \forall x (P(x) \wedge A) \to \exists x (P(x) \wedge A)$
   $\vdash (A \vee \forall x P(x)) \to \exists x (A \vee P(x))$
   $\vdash (\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)) \to \exists x (P(x) \vee Q(x))$
   $\vdash \forall x (P(x) \vee Q(x)) \to (\exists x P(x) \vee \exists x Q(x))$
   $\vdash \forall x (P(x) \vee A) \to (\exists x P(x) \vee A)$
   $\vdash \forall x (P(x) \to Q(x)) \to (\exists x P(x) \to \exists x Q(x))$
   $\vdash \forall x (P(x) \to A) \to (\forall x P(x) \to A)$
   $\vdash (\forall x P(x) \to A) \to \exists x (P(x) \to A)$

FORMULARIO DE PROPOSICIONES

Axiomas y *Reglas Derivadas*

A1. $\vdash A \to (B \to A)$	*Introducción del antecedente*
A2. $\vdash (A \to B) \to ((A \to (B \to C)) \to (A \to C))$	
A3. $\vdash A \to (B \to A \wedge B)$	*Regla del producto*
A4. $\vdash A \wedge B \to A$,, $A \wedge B \to B$	*Regla de simplificación*
A5. $\vdash A \to A \vee B$,, $B \to A \vee B$	*Regla de la adición*
A6. $\vdash (A \to C) \to ((B \to C) \to (A \vee B \to C))$	*Prueba por casos*
A7. $\vdash (A \to B) \to ((A \to \sim B) \to \sim A)$	*Reducción al absurdo*
A8. $\vdash \sim\sim A \to A$	*Eliminación de la doble negación*

Teoremas

1. Identidad

$\vdash A \to A$

2. Contraposición

$\vdash (A \to B) \to (\sim B \to \sim A)$
$\vdash (A \to \sim B) \to (B \to \sim A)$

3. Permutación

$\vdash [A \to (B \to C)] \to [B \to (A \to C)]$

4. Importación-exportación

$\vdash [A \to (B \to C)] \to (A \wedge B \to C)$
$\vdash (A \wedge B \to C) \to [A \to (B \to C)]$

5. Producto condicional

$\vdash (A \to B) \to [(A \to C) \to (A \to B \wedge C)]$

6. Ex Contradictione Quodlibet

$\vdash A \to (\sim A \to C)$
$\vdash \sim A \to (A \to C)$

7. Def. de implicación respecto conjunción

$\vdash (A \to B) \to \sim(A \wedge \sim B)$ *directa*
$\vdash \sim(A \wedge \sim B) \to (A \to B)$ *recíproca*

8. Leyes de De Morgan

$\vdash \sim(A \vee B) \to \sim A \wedge \sim B$ *directa*
$\vdash \sim A \wedge \sim B \to \sim(A \vee B)$ *recíproca*
$\vdash \sim(A \wedge B) \to \sim A \vee \sim B$ *directa*
$\vdash \sim A \vee \sim B \to \sim(A \wedge B)$ *recíproca*

9. Implicación respecto a disyunción

$\vdash (A \to B) \to \sim A \vee B$ *directa*
$\vdash \sim A \vee B \to (A \to B)$ *recíproca*

10. Teoremas de la conjunción

Conmutatividad
$\vdash A \wedge B \to B \wedge A$

Asociatividad
$\vdash (A \wedge B) \wedge C \to A \wedge (B \wedge C)$ *directa*
$\vdash A \wedge (B \wedge C) \to (A \wedge B) \wedge C$ *recíp.*

Distributividad respecto de la disyunción
$\vdash A \wedge (B \vee C) \to (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
$\vdash (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \to A \wedge (B \vee C)$

Absorción
$\vdash A \wedge (A \vee B) \to A$
$\vdash A \to A \wedge (A \vee B)$

Idempotencia
$\vdash A \wedge A \to A$
$\vdash A \to A \wedge A$

11. Teoremas de la conectiva disyunción

Conmutatividad
$\vdash A \vee B \to B \vee A$

Asociatividad
$\vdash (A \vee B) \vee C \to A \vee (B \vee C)$
$\vdash A \vee (B \vee C) \to (A \vee B) \vee C$

Distributividad respecto de la conjunción
$\vdash A \vee (B \wedge C) \to (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
$\vdash A \wedge (A \vee B) \to A$
$\vdash A \to A \wedge (A \vee B)$
$\vdash (A \vee B) \wedge (A \vee C) \to A \vee (B \wedge C)$

Absorción
$\vdash A \to A \vee (A \wedge B)$
$\vdash A \vee (A \wedge B) \to A$

Idempotencia
$\vdash A \vee A \to A$
$\vdash A \to A \vee A$

12. Silogismo

$\vdash (A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$

13. Teoremas de equivalencia

$\vdash (A \to B) \to ((B \to A) \to (A \leftrightarrow B))$
$\vdash (A \leftrightarrow B) \to (A \to B)$
$\vdash (A \leftrightarrow B) \to (B \to A)$
$\vdash (A \leftrightarrow B) \to (B \leftrightarrow A)$

14. Silogismo disyuntivo

$\vdash A \vee B \to (\sim A \to B)$

15. Tercio excluso

$\vdash A \vee \sim A$
$\vdash \sim(A \wedge \sim A)$

16. Modus Tollens

$\vdash ((A \to B) \wedge \sim B \to \sim A$

Regla de intercambio

1. Conjunción	1.1	$\vdash (A \wedge A) \leftrightarrow A$
	1.2	$\vdash A \wedge (B \wedge C) \leftrightarrow (A \wedge B) \wedge C$
	1.3	$\vdash A \wedge (B \vee C) \leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
2. Disyunción	2.1	$\vdash (A \vee A) \leftrightarrow A$
	2.2	$\vdash A \vee (B \vee C) \leftrightarrow (A \vee B) \vee C$
	2.3	$\vdash A \vee (B \wedge C) \leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
3. Negación	3.1	$\vdash \sim\sim A \leftrightarrow A$
4. Interdefiniciones	4.1	$\vdash \sim A \vee B \leftrightarrow (A \to B)$
	4.2	$\vdash \sim(A \wedge B) \leftrightarrow \sim A \vee \sim B$
	4.3	$\vdash \sim(A \vee B) \leftrightarrow \sim A \wedge \sim B$
	4.4	$\vdash \sim(A \wedge \sim B) \leftrightarrow (A \to B)$

FORMULARIO DE PREDICADOS

Axiomas

A1.	$\vdash A \to (B \to A)$	*Introd. del antecedente*
A2.	$\vdash (A \to B) \to ((A \to (B \to C)) \to (A \to C))$	
A3.	$\vdash A \to (B \to A \wedge B)$	*Regla del producto*
A4.	$\vdash A \wedge B \to A$,, $A \wedge B \to B$	*Regla de simplificación*
A5.	$\vdash A \to A \vee B$,, $B \to A \vee B$	*Regla de la adición*
A6.	$\vdash (A \to C) \to ((B \to C) \to (A \vee B \to C))$	*Prueba por casos*
A7.	$\vdash (A \to B) \to ((A \to \sim B) \to \sim A)$	*Reducción al absurdo*
A8.	$\vdash \sim\sim A \to A$	*Eliminación de la doble neg.*
A9.	$\vdash \forall x B(x) \to B(t)$	
A10.	$\vdash B(t) \to \exists x B(x)$	

Reglas de Inferencia

$\dfrac{\vdash A,\ \vdash A \to B}{\vdash B}$ Modus Ponens

$\dfrac{\vdash A \to B(y)}{\vdash A \to \forall x B(x)}$ Gen. Univ Condicional

$\dfrac{\vdash A(y) \to B}{\exists x A(x) \to B}$ Gen. Exist Condicional

Reglas Derivadas

$\dfrac{\vdash A(y)}{\vdash \exists x A(x)}$ Gen. Existencial

$\dfrac{\vdash A(y)}{\forall x A(x)}$ Gen. Universal

$\dfrac{\vdash \exists x A(x),\ A(y) \to B}{\vdash B}$ Esp. Existencial

$\dfrac{\vdash \forall x A(x)}{\vdash A(y)}$ Esp. Universal

Teoremas

1. **Modificación de la variable cuantificada**
   $\vdash \forall x P(x) \leftrightarrow \forall B P(y)$
   $\vdash \exists x P(x) \leftrightarrow \exists y P(y)$

2. **Descenso cuantificacional**
   $\vdash \forall x P(x) \to \exists y P(y)$

3. **Cuantificación múltiple. Propiedades conmutativas**
   a. **Cuantificador universal**
      $\vdash \forall x \forall y P(x,y) \leftrightarrow \forall y \forall x P(x,y)$

   b. **Cuantificador existencial**
      $\vdash \exists x \exists y P(x,y) \leftrightarrow \exists y \exists x P(x,y)$

   c. **Conmutatividad de distintos tipos**
      $\vdash \exists x \forall y P(x,y) \to \forall y \exists x P(x,y)$

4. **Negación de fórmulas cuantificadas**
   $\vdash \sim\forall x P(x) \leftrightarrow \exists x \sim P(x)$
   $\vdash \sim\exists x P(x) \leftrightarrow \forall x \sim P(x)$

5. **Cuantificación de las fórmulas con la conectiva conjunción**
   $\vdash \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x) \leftrightarrow \forall x(P(x) \wedge Q(x))$
   $\vdash A \wedge \forall x P(x) \leftrightarrow \forall x(A \wedge P(x))$
   - x no es libre en A (A es independiente de x)

   $\vdash \exists x(P(x) \wedge Q(x)) \to \exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$
   $\vdash \exists x(A \wedge P(x)) \leftrightarrow A \wedge \exists x P(x)$
   - x no es libre en A (A es independiente de x)

6. **Cuantificación de las fórmulas con la disyunción**
   $\vdash \forall x P(x) \vee \forall x Q(x) \to \forall x(P(x) \vee Q(x))$
   $\vdash \forall x(A \vee P(x)) \leftrightarrow A \vee \forall x P(x)$
   $\vdash \exists x(P(x) \vee Q(x)) \leftrightarrow \exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$
   $\vdash \exists x(A \vee P(x)) \leftrightarrow A \vee \exists x P(x)$

7. **Cuantificación de las fórmulas con la conectiva implicación**
   $\vdash \forall x(P(x) \to Q(x)) \to (\forall x P(x) \to \forall x Q(x))$
   $\vdash \forall x(P(x) \to A) \to (\forall x P(x) \to A)$
   $\vdash \forall x(A \to P(x)) \leftrightarrow (A \to \forall x P(x))$
   $\vdash (\exists x P(x) \to \exists x Q(x)) \to \exists x(P(x) \to Q(x))$
   $\vdash (\exists x P(x) \to A) \to \exists x(P(x) \to A)$
   $\vdash \forall x(P(x) \to A) \leftrightarrow \exists x P(x) \to A$
   $\vdash A \to \exists x P(x) \leftrightarrow \exists x(A \to P(x))$
   $\vdash \exists x(A(x) \to B) \leftrightarrow (\forall x A(x) \to B)$

8. **Cuantificación de fórmulas con equivalencia material**
   $\vdash \forall x(P(x) \leftrightarrow P(Q)) \to (\forall x P(x) \leftrightarrow \forall x Q(x))$
   $\vdash \forall x(P(x) \leftrightarrow A) \to (\forall x P(x) \leftrightarrow A)$

9. **Otros teoremas**
   $\vdash (\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)) \to \exists x(P(x) \wedge Q(x))$
   $\vdash (A \wedge \forall x P(x)) \to \exists x(A \wedge P(x))$
   $\vdash \forall x(P(x) \wedge Q(x)) \to (\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x))$
   $\vdash \forall x(P(x) \wedge A) \to \exists x(P(x) \wedge A)$
   $\vdash (A \vee \forall x P(x)) \to \exists x(A \vee P(x))$
   $\vdash (\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)) \to \exists x(P(x) \vee Q(x))$
   $\vdash \forall x(P(x) \vee Q(x)) \to (\exists x P(x) \vee \exists x Q(x))$
   $\vdash \forall x(P(x) \vee A) \to (\exists x P(x) \vee A)$
   $\vdash \forall x(P(x) \to Q(x)) \to (\exists x P(x) \to \exists x Q(x))$
   $\vdash \forall x(P(x) \to A) \to (\forall x P(x) \to A)$
   $\vdash (\forall x P(x) \to A) \to \exists x(P(x) \to A)$