

基础知识

1 二、矩阵消元

1.1 使用 消元法 求解方程

- 1.1.1 成功：矩阵r等于n等于m， 也就是说，可逆矩阵。
- 失败：方阵矩阵至少有一零行， r不等于n， 不可逆矩阵。

然后像我们之前说的那样消元，但是这次要带着增广的 b(蓝色部分)一起进行：

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 8 & 1 & 12 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{(2,1)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{(3,2)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & -10 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & -10 \end{bmatrix}$$

好，带回方程 Ax = b，变为：

$$\begin{cases} 1x + 2y + z = 2 \\ 2y - 2z = 6 \\ 5z = -10 \end{cases}$$

1.1.2 增广矩阵，左边再化为上三角矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{bmatrix} = \text{矩阵行的线性组合} = \begin{bmatrix} ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{bmatrix} \begin{matrix} *1 \\ *2 \\ *7 \end{matrix}$$

矩阵行的线性组合

1.1.3 消元矩阵

核心：求消元矩阵就是从单位阵 I 入手，按照 A 每次变换的消元步骤操作 I 矩阵，能分别得到 E 某行某列， 最后累积得到 E 即可。

有了上面消元矩阵的启发，不难得到，能够交换 2x2 矩阵中两行的矩阵为：

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix}$$

而交换 2x2 矩阵中两列的矩阵为：

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & a \\ d & c \end{bmatrix}$$

所以，左乘等同行变换，右乘等同列变换。

1.2 行列变换

1.2.1 基于单位阵 I 的变化，对矩阵 A 进行行列变换的过程

再观察此式： $(A^{-1})^T A^T = I$ ，由于 A 是方阵，则 A^T 定然也是方阵，那么我们发现意外得到了 A^T 的逆矩阵。即为 $(A^{-1})^T$ 。也就是说：

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

这个结果告诉我们：对于单个矩阵，转置与取逆两个运算顺序可颠倒。

2.1 转置矩阵和逆矩阵的关系

2.1.1 转置与取逆顺序可颠倒

$$(AA^{-1})^T = (A^{-1})^T A^T = I$$

2.2 转置后顺序颠倒

$$A^T = A$$

2.3 对称矩阵（转置后为其本身）

以，现在的假设有可逆矩阵 A，若有 $A \xrightarrow{\text{初等行变换}} U(\text{上三角矩阵})$ ，就一定有类似于这样的形式: $E_{21} * A = U$ 的等式存在，使 A 相当于进行了初等行变换成为 U。而我们已经学习了逆矩阵， E_{21} 这样的矩阵一定有逆矩阵，因为它本身就是单位阵变化过来的，所以原式可以改写成: $A = (E_{21})^{-1} U$ ，这一形式即为 A = LU 形式，这个过程就是分解过程。

3.1 使A变换为U的消元矩阵的逆矩阵

4.1 置换矩阵是一个方形二进制矩阵，它在每行和每列中只有一个1，而在其他地方则为0。

求矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 的所有置换矩阵，并判断其性质。

一共有 6 个置换矩阵：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

这可以理解为一个群，很明显，我们任取两个矩阵相乘，结果仍在这个群中。

注：

推广到 n 阶矩阵，n 阶矩阵有 n! 个置换矩阵，就是将单位矩阵 I 各行重新排列后所有可能的情况数量。我自己的理解是：单看第一行，有 n 种排列方式，再看除去第一行，第一列的(n-1)阶矩阵，再看其第一行，有(n-1)种排列方式，以此类推，直到最后的 1 阶，有 1 种排列方式，由乘法原理，就有了 n!个置换 矩阵。

4.2 这样的由单位阵变换而来的矩阵， 通过矩阵乘法可以使被乘矩阵行交换。我们 将这样的矩阵称为置换矩阵 P。

4.3 置换矩阵P^T = P^-1

5 向量的点积和叉积

5.1 点乘

5.1.1 u . v = (uxvx + uyvy)

当u . v > 0时，u和v之间的夹角为锐角

5.1.2 cos a = u . v / (|u||v|)

5.2.1 假设存在向量u(ux, uy, uz), v(vx, vy, vz), 求同时垂直于向量u, v的向量w(wx, wy, wz)

wiki叉积

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = (u_2v_3 - u_3v_2)\mathbf{i} + (u_3v_1 - u_1v_3)\mathbf{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\mathbf{k}.$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \sin(\theta) \mathbf{n}$$

5.2.2

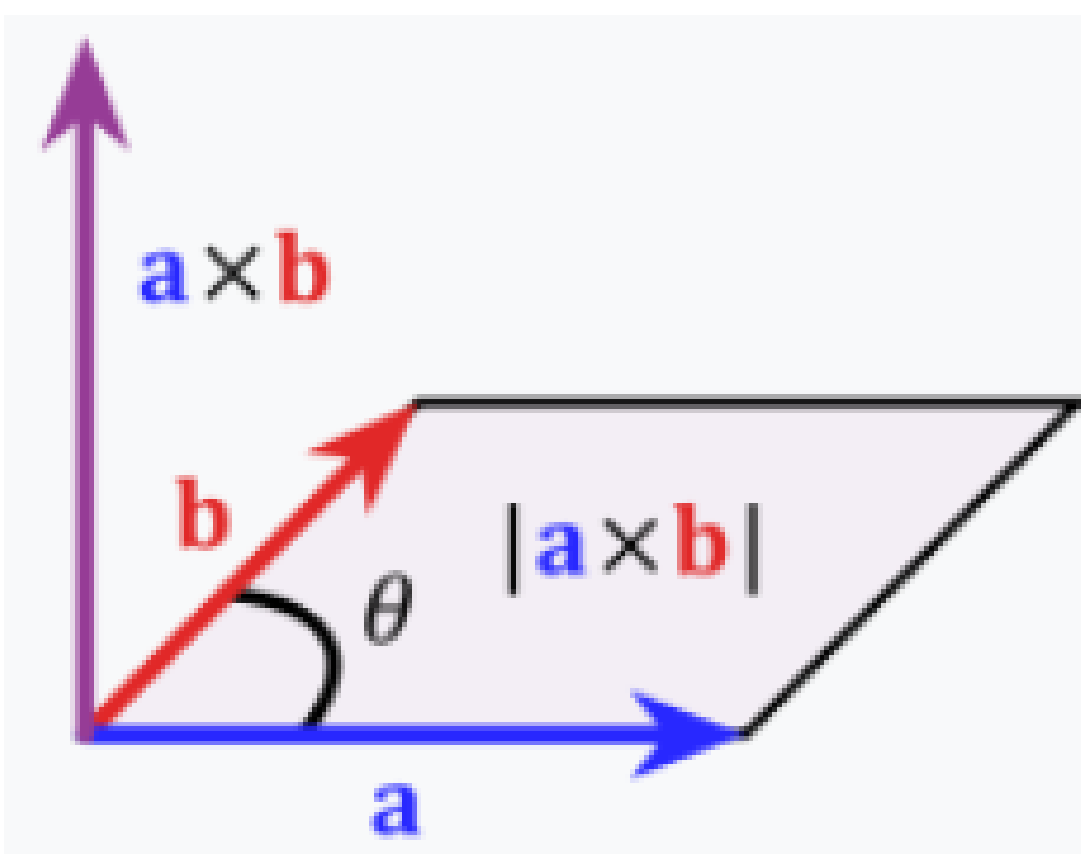


图1：平行四边形面积即叉积的模长

5.2 叉乘

5.2.3 模排除了正负