

方法1：列空间角度
方法2：方程角度

例如 Ax ，如果我们已知一个矩阵 A 和一个向量 x ，那么我们就怎么求解它们的积呢？例如 $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ ， $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ，我们这样求：

• 方法 1：将矩阵 A 看做列向量的组合：

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 7 \end{bmatrix}$$

即 x 每个分量与矩阵中各的列向量相乘，再将其求和。看做 A 各列的线性组合。

• 方法 2：将矩阵 A 看做行向量的组合：

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2,5) \cdot (1,2) \\ (1,3) \cdot (1,2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 7 \end{bmatrix}$$

即采用这个方式进行向量乘法： $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2+2+5 \\ 1+1+2+3 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2+2+5 \\ 1+1+2+3 \end{bmatrix}$$

5. 1

$$C_{ij} = (A \text{ 中第 } i \text{ 行向量}) (B \text{ 中第 } j \text{ 列向量}) = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$

5. 2 矩阵乘法最常见的求解方式

$$\begin{bmatrix} ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \text{矩阵列的线性组合} = \begin{bmatrix} ? \\ ? \\ ? \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} ? \\ ? \\ ? \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} ? \\ ? \\ ? \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} ? \\ ? \\ ? \end{bmatrix}$$

矩阵

向量

那我们在计算矩阵之间的乘法时，可以把后面的矩阵 B 看做列向量的组合：

$$\begin{bmatrix} ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ a & b & c & d \\ a & b & c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ a & b & c & d \\ a & b & c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = C$$

A

B

$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$

B 的各列，用来线性组合 A 矩阵的各列向量

5. 3. 1 列组合

同理，我们还学习过行向量与矩阵的乘法，得到一个行向量

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{bmatrix} = \text{矩阵行的线性组合} = \begin{bmatrix} ? \\ ? \\ ? \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} ? \\ ? \\ ? \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} ? \\ ? \\ ? \end{bmatrix} + 7 \begin{bmatrix} ? \\ ? \\ ? \end{bmatrix}$$

同样按照形式，这次将矩阵 A 看做行向量组合就行了：

$$\begin{bmatrix} a & a & a & a \\ b & b & b & b \\ c & c & c & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & a & a & a \\ b & b & b & b \\ c & c & c & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = C$$

5. 3. 2 行组合

【例】求解 $\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 8 \\ 4 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix}$

列乘法方法：

$$\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 8 \\ 4 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 12 \\ 3 & 18 \\ 4 & 24 \end{bmatrix}$$

注意这里每一次都是用列向量与行向量相乘得到一个矩阵，而每次得到的矩阵

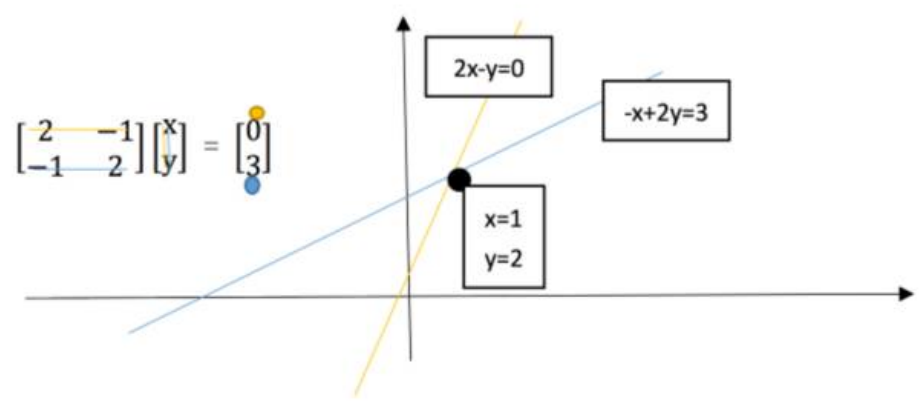
都是有特点的，比如 $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 12 \\ 3 & 18 \\ 4 & 24 \end{bmatrix}$ ，这其中得到的矩阵 $\begin{bmatrix} 2 & 12 \\ 3 & 18 \\ 4 & 24 \end{bmatrix}$ 每一列都

和向量 $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ 同向，可以说列向量都在 $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ 这条直线上，列空间是一条直线。同理，

行向量都在 $\begin{bmatrix} 1 & 6 \end{bmatrix}$ 这条直线上，行空间(矩阵行所有可能的线性组合)是一条直线。

5. 3. 3 列乘以行

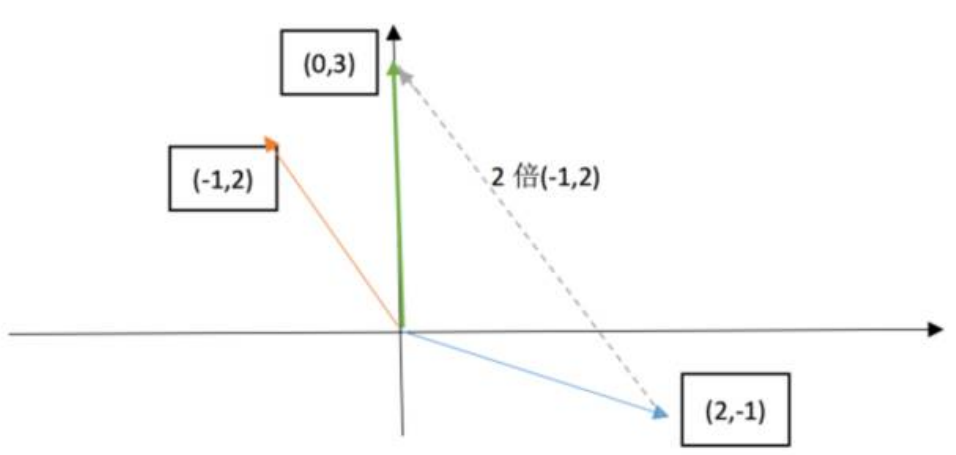
5. 3. 4 分块做乘法



4. 1 行图像

$$x \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

如果我们任意取 x 和 y ，那么我们得到的是什么呢？很明显，能得到任意方向的向量，这些向量能够布满整个平面。



4. 2 列图像

左侧是线性组合，右侧是合适的线性组合组成的结果，这样一来思路就清晰多了，“寻找线性组合”成为了解题关键

比如三个列向量分别为： $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ， $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ ， $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$ 。

4. 3. 1

其中 $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ ，这样的矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -3 \end{bmatrix}$ 构成的方程

$Ax = b$ ，其中的 b 就无法覆盖整个三维空间，也就无法实现：对任意的 b ，都能求解 $Ax = b$ 这个方程。

4. 3. 2

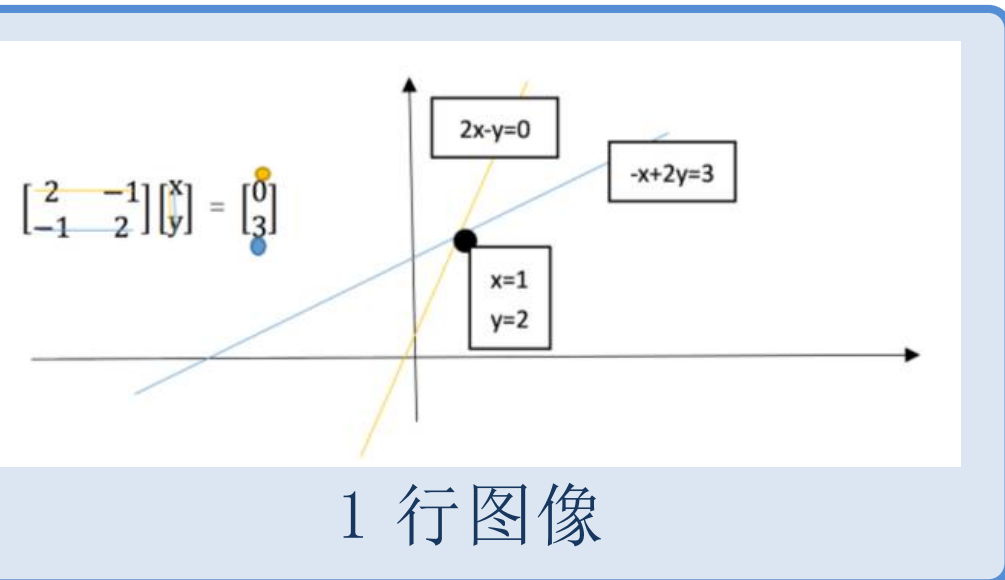
$$x \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

4. 3 方程组的几何解释推广

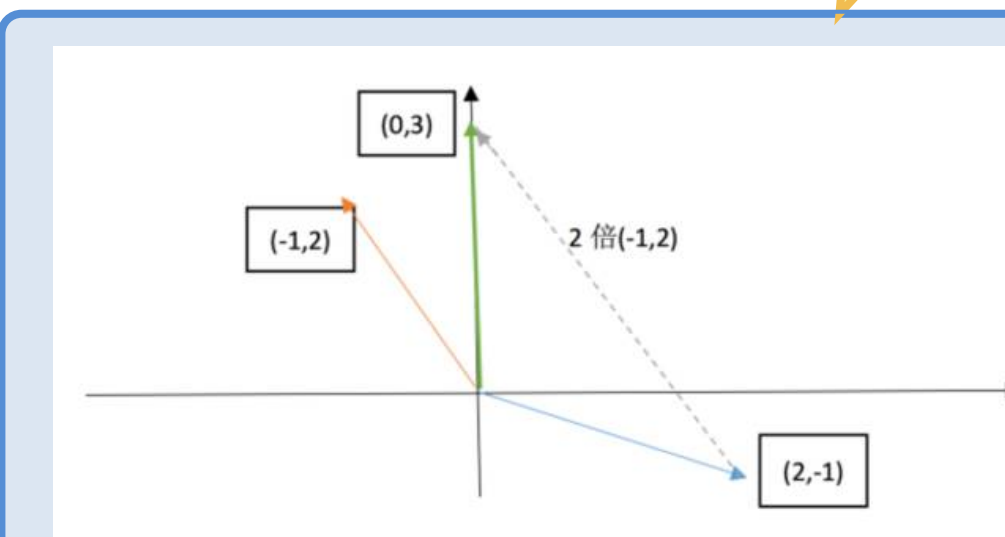
5 三、矩阵乘法

一、方程组的几何解释

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ -x + 2y = 3 \end{cases}$$



1 行图像



2 列图像

左侧是线性组合，右侧是合适的线性组合组成的结果，这样一来思路就清晰多了，“寻找线性组合”成为了解题关键

比如三个列向量分别为： $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ， $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ ， $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$ 。

3. 1

$$x \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

3 方程组的几何解释推广

其中 $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ ，这样的矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -3 \end{bmatrix}$ 构成的方程

$Ax = b$ ，其中的 b 就无法覆盖整个三维空间，也就无法实现：对任意的 b ，都能求解 $Ax = b$ 这个方程。

3. 2