基础知识

1 二、矩阵消元

1.1 使用 消元法 求解方程

1.1.1 成功：矩阵r等于n等于m， 也就是说，可逆矩阵。
失败：方阵矩阵至少有一零行，r不等于n，不可逆矩阵。

然后像我们之前说的那样消元，但是这次要带着增广的 b(蓝色部分)一起进行：

$$\begin{bmatrix}1&2&1&2\\3&8&1&12\\0&4&1&2\end{bmatrix}\xrightarrow[(2,1)]{}\begin{bmatrix}1&2&1&2\\0&2&-2&6\\0&4&1&2\end{bmatrix}\xrightarrow[(3,2)]{}\begin{bmatrix}1&2&1&2\\0&2&-2&6\\0&0&5&-10\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&2&1&2\\0&2&-2&6\\0&0&5&-10\end{bmatrix}$$

好，带回方程 Ax = b，变为：

$$\begin{cases}1x+2y+z=2\\2y-2z=6\\5z=-10\end{cases}$$

1.1.2 增广矩阵，左边再化为上三角矩阵

$$\begin{bmatrix}1&2&7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}?&?&?\\?&?&?\\?&?&?\end{bmatrix}=\text{矩阵行的线性组合}=\begin{bmatrix}?&?&?\\?&?&?\\?&?&?\end{bmatrix}\begin{matrix}*1*2*7\end{matrix}$$

矩阵行的线性组合

1.1.3 消元矩阵

核心：求消元矩阵就是从单位阵 I 入手，按照 A 每次变换的消元步骤操作 I 矩阵，能分别得到 $E_{某行某列}$，最后累积得到 E 即可。

有了上面消元矩阵的启发，不难得到，能够交换 2x2 矩阵中两行的矩阵为：

$$\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c&d\\a&b\end{bmatrix}$$

而交换 2x2 矩阵中两列的矩阵为：

$$\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b&a\\d&c\end{bmatrix}$$

所以，左乘等同行变换，右乘等同列变换。

1.2 行列变换

1.2.1 基于单位阵 I 的变化，对矩阵 A 进行行列变换的过程

2 四、转置矩阵

再观察此式：$(A^{-1})^TA^T=I$，由于 A 是方阵，则A^T定然也是方阵，那么我们发现意外得到了A^T的逆矩阵。即为$(A^{-1})^T$。也就是说：

$$(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$$

这个结果告诉我们：对于单个矩阵，转置与取逆两个运算顺序可颠倒。

2.1 转置矩阵和逆矩阵的关系

2.1.1 转置与取逆顺序可颠倒

$$(AA^{-1})^T=(A^{-1})^TA^T=I$$

2.2 转置后顺序颠倒

$$A^T=A$$

2.3 对称矩阵（转置后为其本身）

3 四、A的LU分解

以，现在的假设有可逆矩阵 A，若有 $A\xrightarrow[\text{初等行变换}]{}U(\text{上三角矩阵})$。就一定有类似于这样的形式：$E_{21}*A=U$ 的等式存在，使 A 相当于进行了初等行变换成为 U。而我们已经学习了逆矩阵，E_{21} 这样的矩阵一定有逆矩阵，因为它本身就是单位阵变化过来的。所以原式可以改写成 $A=(E_{21})^{-1}U$。这一形式即为 A = LU 形式，这个过程就是分解过程。

3.1 使A变换为U的消元矩阵的逆矩阵

4 四、置换矩阵

4.1 置换矩阵是一个方形二进制矩阵，它在每行和每列中只有一个1，而在其他地方则为0。

求矩阵 $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$的所有置换矩阵，并判断其性质。

一共有 6 个置换矩阵：

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\ \begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\ \begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}\ \begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}\ \begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}\ \begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}$$

这可以理解为一个群，很明显，我们任取两个矩阵相乘，结果仍在这个群中。

注：

推广到 n 阶矩阵，n 阶矩阵有 n! 个置换矩阵，就是将单位矩阵 I 各行重新排列后所有可能的情况数量。我自己的理解是：单看第一行，有 n 种排列方式，再看除去第一行，第一列的(n-1)阶矩阵，再看其第一行，有(n-1)种排列方式。以此类推，直到最后的 1 阶，有 1 种排列方式，由乘法原理，就有了 n!个置换 矩阵。

4.2 这样的由单位阵变换而来的矩阵，通过矩阵乘法可以使被乘矩阵行交换。我们 将这样的矩阵称为置换矩阵 P。

4.3 置换矩阵P^T = P^-1

5 向量的点积和叉积

5.1 点乘

5.1.1 u . v = (uxvx + uyvy)

当u . v = 0时（即uxvx + uyvy = 0），向量u和v垂直

当u . v > 0时，u和v之间的夹角为锐角

5.1.2 cos α = u . v /（|u||v|）

5.2 叉乘

5.2.1 假设存在向量u(ux, uy, uz)，v(vx, vy, vz)，求同时垂直于向量u, v的向量w(wx, wy, wz)

$$u\times v=\begin{vmatrix}i&j&k\\u_1&u_2&u_3\\v_1&v_2&v_3\end{vmatrix}=(u_2v_3-u_3v_2)i+(u_3v_1-u_1v_3)j+(u_1v_2-u_2v_1)k.\ ($$

wiki叉积

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|\sin(\theta)\,\mathbf{n}$$

5.2.2

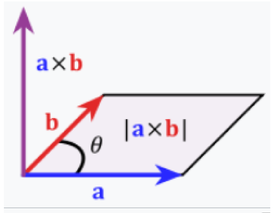

图1：平行四边形面积即叉积的模长

5.2.3 模排除了正负