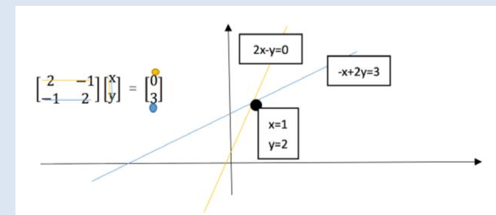
一、方程组的几何解释 $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ -x + 2y = 3 \end{cases}$

1 行图像

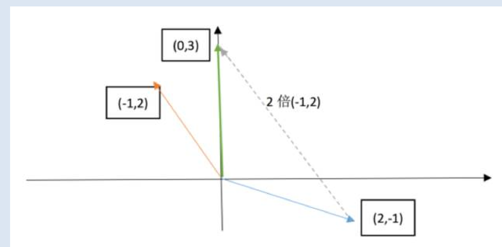


1 行图像

2 列图像

$$x\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix} + y\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix}$$

如果我们任意取 x 和 y ，那么我们得到的是什么呢？很明显，能得到任意方向的向量，这些向量能够布满整个平面。



2 列图像

3 方程组的几何解释推广

左侧是线性组合，右侧是合适的线性组合组成的结果，这样一来思路就清晰多了，“寻找线性组合”成为了解题关键

$$x\begin{bmatrix}2\\-1\\0\end{bmatrix} + y\begin{bmatrix}-1\\2\\-3\end{bmatrix} + z\begin{bmatrix}0\\-1\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\-1\\4\end{bmatrix}$$

3 方程组的几何解释推广

比如三个列向量分别为：$\begin{bmatrix}2\\-1\\0\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}-1\\2\\-3\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}1\\1\\-3\end{bmatrix}$。

3.1

其中$\begin{bmatrix}1\\1\\-3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\-1\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-1\\2\\-3\end{bmatrix}$。这样的矩阵 A$\begin{bmatrix}2 & -1 & 1\\-1 & 2 & 1\\0 & -3 & -3\end{bmatrix}$构成的方程 Ax = b，其中的 b 就无法覆盖整个三维空间，也就无法实现：对任意的 b，都能求解 Ax = b 这个方程。

3.2

5 三、矩阵乘法

方法1：列空间角度
方法2：方程角度

例如 Ax ，如果我们已知一个矩阵 A 和一个向量 x，那么我们就怎么求解它们的积呢？例如 A = $\begin{bmatrix}2 & 5\\1 & 3\end{bmatrix}$，x = $\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$，我们这样求：

- 方法 1：将矩阵 A 看做列向量的组合：

$$\begin{bmatrix}2 & 5\\1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix}5\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}12\\7\end{bmatrix}$$

即 x 每个分量与矩阵中各的列向量相乘，再将其求和。看做 A 各列的线性组合。

- 方法 2：将矩阵 A 看做行向量的组合：

$$\begin{bmatrix}2 & 5\\1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}(2,5)\cdot(1,2)\\(1,3)\cdot(1,2)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}12\\7\end{bmatrix}$$

即采用这个方式进行向量乘法：$\begin{bmatrix}2 & 5\\1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1*2+2*5\\1*1+2*3\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}2 & 5\\1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1*2+2*5\\1*1+2*3\end{bmatrix}$$

5.1

C_{ij} = （A 中第 i 行向量）（ B 中第 j 列向量） = $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$

5.2 矩阵乘法最常见的求解方式

5.3 列组合与行组合方式

$$\begin{bmatrix}? & ? & ?\\? & ? & ?\\? & ? & ?\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\4\\5\end{bmatrix} = \text{矩阵列的线性组合} = \begin{array}{ccc} *3 & *4 & *5 \\ \end{array}\begin{bmatrix}? & ? & ?\\? & ? & ?\\? & ? & ?\end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix}?\\?\\?\end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix}?\\?\\?\end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix}?\\?\\?\end{bmatrix}$$

矩阵　向量

那我们在计算矩阵之间的乘法时，可以把后面的矩阵 B 看做列向量的组合：

$$\begin{bmatrix}? & ? & ? & ?\\? & ? & ? & ?\\? & ? & ? & ?\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b & c & d\\a & b & c & d\\a & b & c & d\\a & b & c & d\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}A\begin{bmatrix}a\\a\\a\\a\end{bmatrix} & A\begin{bmatrix}b\\b\\b\\b\end{bmatrix} & A\begin{bmatrix}c\\c\\c\\c\end{bmatrix} & A\begin{bmatrix}d\\d\\d\\d\end{bmatrix}\end{bmatrix} = C$$

A　B

B 的各列，用来线性组合 A 矩阵的各列向量

5.3.1 列组合

同理，我们还学习过行向量与矩阵的乘法，得到一个行向量

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}? & ? & ?\\? & ? & ?\\? & ? & ?\end{bmatrix} = \text{矩阵行的线性组合} = \begin{array}{c}\begin{bmatrix}? & ? & ?\\? & ? & ?\\? & ? & ?\end{bmatrix}\end{array}\begin{array}{c}*1\\*2\\*7\end{array}$$

$$=1\begin{bmatrix}? & ? & ?\end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix}? & ? & ?\end{bmatrix} + 7\begin{bmatrix}? & ? & ?\end{bmatrix}$$

同样,按照形式，这次将矩阵 A 看做行向量组合就行了：

$$\begin{bmatrix}a & a & a & a\\b & b & b & b\\c & c & c & c\end{bmatrix}\begin{bmatrix}? & ? & ? & ?\\? & ? & ? & ?\\? & ? & ? & ?\\? & ? & ? & ?\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}[a & a & a & a]B\\ [b & b & b & b]B\\ [c & c & c & c]B\end{bmatrix} = C$$

5.3.2 行组合

【例】求解 $\begin{bmatrix}2 & 7\\3 & 8\\4 & 9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 6\\0 & 0\end{bmatrix}$

列乘行方法：

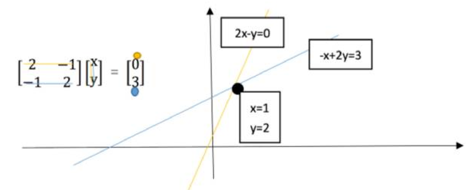
$$\begin{bmatrix}2 & 7\\3 & 8\\4 & 9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 6\\0 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 6\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}7\\8\\9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 12\\3 & 18\\4 & 24\end{bmatrix}$$

注意这里每一次都是用列向量与行向量相乘得到一个矩阵，而每次得到的矩阵都是有特点的，比如$\begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 12\\3 & 18\\4 & 24\end{bmatrix}$，这其中得到的矩阵$\begin{bmatrix}2 & 12\\3 & 18\\4 & 24\end{bmatrix}$每一列都和向量$\begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix}$同向，可以说列向量都在$\begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix}$这条直线上，列空间是一条直线。同理，行向量都在$\begin{bmatrix}1 & 6\end{bmatrix}$这条直线上，行空间（矩阵行所有可能的线性组合）是一条直线。

5.3.3 列乘以行

5.3.4 分块做乘法

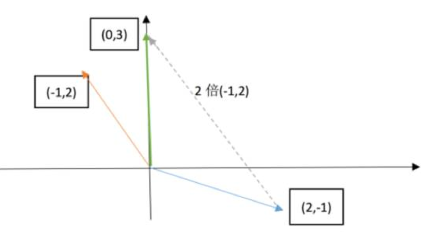
4 一、方程组的几何解释 $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ -x + 2y = 3 \end{cases}$



4.1 行图像

$$x\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix} + y\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix}$$

如果我们任意取 x 和 y ，那么我们得到的是什么呢？很明显，能得到任意方向的向量，这些向量能够布满整个平面。



4.2 列图像

左侧是线性组合，右侧是合适的线性组合组成的结果，这样一来思路就清晰多了，“寻找线性组合”成为了解题关键

$$x\begin{bmatrix}2\\-1\\0\end{bmatrix} + y\begin{bmatrix}-1\\2\\-3\end{bmatrix} + z\begin{bmatrix}0\\-1\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\-1\\4\end{bmatrix}$$

4.3 方程组的几何解释推广

比如三个列向量分别为：$\begin{bmatrix}2\\-1\\0\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}-1\\2\\-3\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}1\\1\\-3\end{bmatrix}$。

4.3.1

其中$\begin{bmatrix}1\\1\\-3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\-1\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-1\\2\\-3\end{bmatrix}$。这样的矩阵 A$\begin{bmatrix}2 & -1 & 1\\-1 & 2 & 1\\0 & -3 & -3\end{bmatrix}$构成的方程 Ax = b，其中的 b 就无法覆盖整个三维空间，也就无法实现：对任意的 b，都能求解 Ax = b 这个方程。

4.3.2