基础知识

1 二、矩阵消元

- 1.1 使用 消元法 求解方程
  - 1.1.1 成功：矩阵r等于n等于m， 也就是说，可逆矩阵。
    失败：方阵矩阵至少有一零行，r不等于n，不可逆矩阵。
  - 然后像我们之前说的那样消元，但是这次要带着增广的 b(蓝色部分)一起进行：

    $$\begin{bmatrix}1&2&1&2\\3&8&1&12\\0&4&1&2\end{bmatrix}\xrightarrow[(2,1)]{}\begin{bmatrix}1&2&1&2\\0&2&-2&6\\0&4&1&2\end{bmatrix}\xrightarrow[(3,2)]{}\begin{bmatrix}1&2&1&2\\0&2&-2&6\\0&0&5&-10\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&1&2\\0&2&-2&6\\0&0&5&-10\end{bmatrix}$$

    好，带回方程 Ax = b，变为：

    $$\begin{cases}1x+2y+z=2\\ \quad 2y-2z=6\\ \qquad 5z=-10\end{cases}$$

    1.1.2 增广矩阵，左边再化为上三角矩阵
  - $$\begin{bmatrix}1&2&7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}?&?&?\\?&?&?\\?&?&?\end{bmatrix}=\text{矩阵行的线性组合}=\begin{bmatrix}?&?&?\\?&?&?\\?&?&?\end{bmatrix}\begin{array}{l}*1\\*2\\*7\end{array}$$

    矩阵行的线性组合
  - 1.1.3 消元矩阵
    - **核心：求消元矩阵就是从单位阵 I 入手，按照 A 每次变换的消元步骤操作 I 矩阵，能分别得到 E$_{\text{某行某列}}$，最后累积得到 E 即可。**
- 1.2 行列变换
  - 有了上面消元矩阵的启发，不难得到，能够交换 2x2 矩阵中两行的矩阵为：

    $$\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c&d\\b&a\end{bmatrix}$$

    而交换 2x2 矩阵中两列的矩阵为：

    $$\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b&a\\d&c\end{bmatrix}$$

    所以，左乘等同行变换，右乘等同列变换。

    1.2.1 基于单位阵 I 的变化，对矩阵 A 进行行列变换的过程

2 四、转置矩阵

- 2.1 转置矩阵和逆矩阵的关系
  - 再观察此式：$(A^{-1})^T A^T = \mathrm{I}$，由于 A 是方阵，则$A^T$定然也是方阵，那么我们发现意外得到了$A^T$的逆矩阵。即为$(A^{-1})^T$。也就是说：

    $$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

    这个结果告诉我们：对于单个矩阵，转置与取逆两个运算顺序可颠倒。

    2.1.1 转置与取逆顺序可颠倒
- $$(AA^{-1})^T = (A^{-1})^T A^T = \mathrm{I}$$

  2.2 转置后顺序颠倒
- $$A^T = A$$

  2.3 对称矩阵（转置后为其本身）

3 四、A的LU分解

- 以，现在的假设有可逆矩阵 A，若有 $A \xrightarrow[\text{初等行变换}]{} U(\text{上三角矩阵})$。就一定有类似于这样的形式：$E_{21} * A = U$ 的等式存在，使 A 相当于进行了初等行变换成为 U。而我们已经学习了逆矩阵，E_{21} 这样的矩阵一定有逆矩阵，因为它本身就是单位阵变化过来的。所以原式可以改写成：$A = (E_{21})^{-1}\ U$。这一形式即为 A = LU 形式，这个过程就是分解过程。

  3.1 使A变换为U的消元矩阵的逆矩阵

4 四、置换矩阵

- 4.1 置换矩阵是一个方形二进制矩阵，它在每行和每列中只有一个1，而在其他地方则为0。
- 求矩阵 $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$的所有置换矩阵，并判断其性质。

  一共有 6 个置换矩阵：

  $$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}$$

  这可以理解为一个群，很明显，我们任取两个矩阵相乘，结果仍在这个群中。

  注：

  推广到 n 阶矩阵，n 阶矩阵有 n! 个置换矩阵，就是将单位矩阵 I 各行重新排列后所有可能的情况数量。我自己的理解是：单看第一行，有 n 种排列方式， 再看除去第一行，第一列的(n-1)阶矩阵，再看其第一行，有(n-1)种排列方式。以此类推，直到最后的 1 阶，有 1 种排列方式，由乘法原理，就有了 n!个置换 矩阵。

  4.2 这样的由单位阵变换而来的矩阵，通过矩阵乘法可以使被乘矩阵行交换。我们 将这样的矩阵称为置换矩阵 P。
- 4.3 置换矩阵P^T = P^-1

5 向量的点积和叉积

- 5.1 点乘
  - 5.1.1 u . v = (uxvx + uyvy)
    - 当u . v = 0时（即uxvx + uyvy = 0），向量u和v垂直
    - 当u . v > 0时，u和v之间的夹角为锐角
  - 5.1.2 cosα = u . v / (|u||v|)
- 5.2 叉乘
  - 5.2.1 假设存在向量u(ux, uy, uz), v(vx, vy, vz), 求同时垂直于向量u, v的向量w(wx, wy, wz)
  - wiki叉积

    $$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|\sin(\theta)\ \mathbf{n}$$

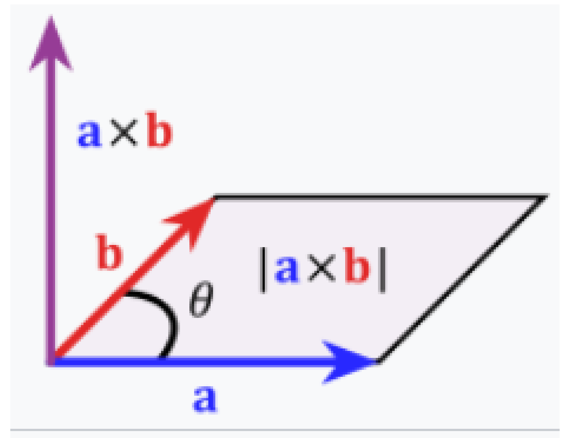
    5.2.2
    - $$\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v} = \begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\u_1&u_2&u_3\\v_1&v_2&v_3\end{vmatrix} = (u_2v_3-u_3v_2)\boldsymbol{i}+(u_3v_1-u_1v_3)\boldsymbol{j}+(u_1v_2-u_2v_1)\boldsymbol{k}.\ ($$
  - 

    图1：平行四边形面积即叉积的模长

    5.2.3 模排除了正负