

投影

1 十五，子空间投影

1.1 投影矩阵

1.1.1 二维

$p = Pb$ (P 是投影矩阵，作用于 b 向量上)
 $p = a \frac{a^T b}{a^T a}$ ，也就是说， P 矩阵生成了投影 p 。

其中 a_1, a_2 为构成平面的一组基， p 在平面上。所以有： $p = x_1 a_1 + x_2 a_2$ 。或者写做： $p = A\hat{x}$ ， $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix}$
(其中的 a_n 都是列向量)， $\hat{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ 。

$P = A(A^T A)^{-1} A^T$

$P^T = P$

$P^2 = P$

1.1.3 性质

1.1.2 平面上的投影

• $A^T A$ 的结果总是方阵。

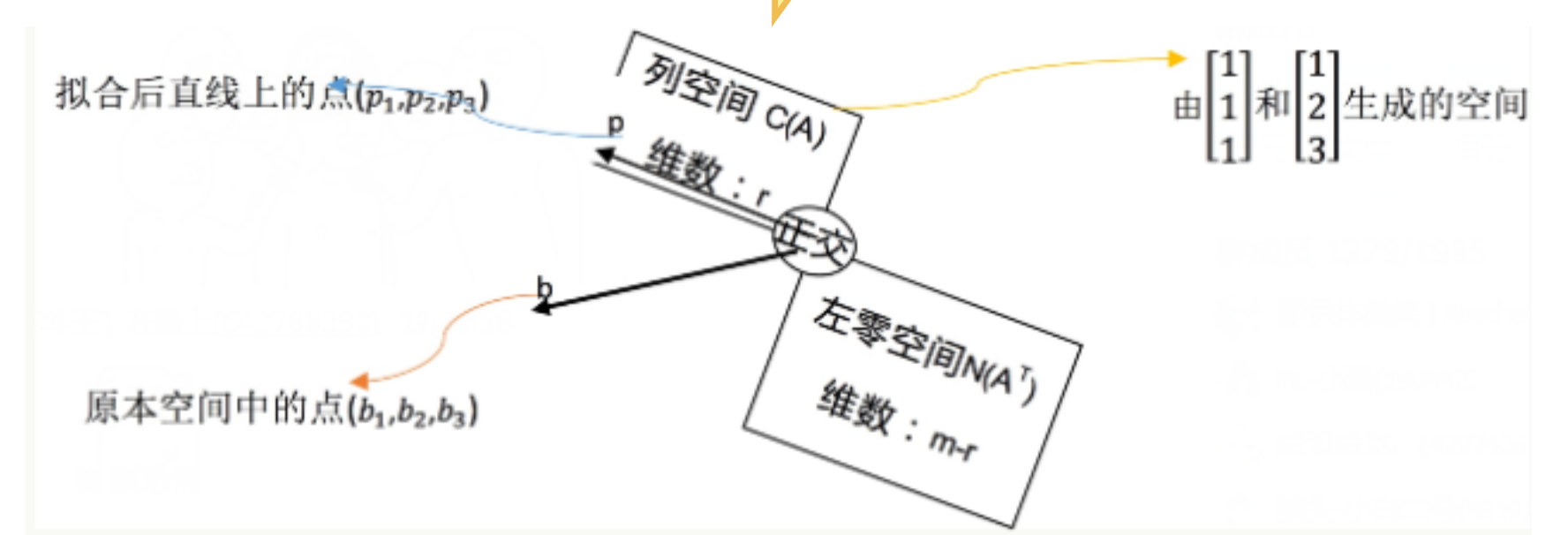
• $A^T A$ 总为对称阵。

在求最优解的时候要判断A的列向量之间是否线性无关，再进行求解。如果A的列线性相关，A不可逆， $A^T A$ 不可逆。方程无解。

• $N(A^T A) = N(A)$: $A^T A$ 与 A 的零空间相同。

证明在十六中

思路：b不在A列空间中（无法用A列向量线性组合成b），我们要求解的x就是把A的列向量（基）重新组合（基可以通过合成得到该空间的新向量p），求得离b最近的投影p。
同时b也能通过 $p = P * b$ 得到投影



1.2.2 最小二乘法

2.1 在线性代数中，正交就是垂直，无论我们以后谈论的是向量 正交还是空间正交，都可以理解为：垂直。

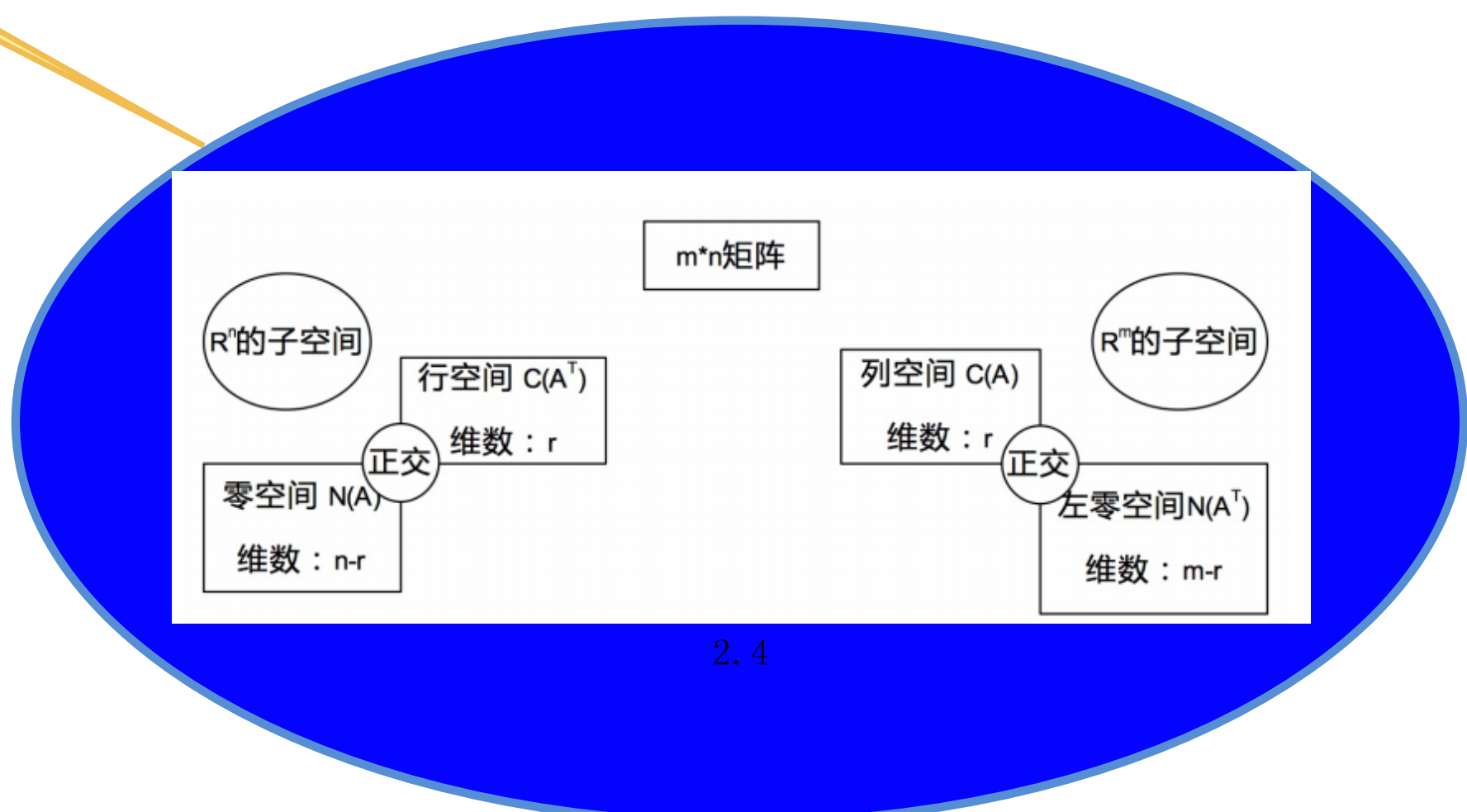
这个定义的重点在于两个列向量，需要把第一个转为行向量，最后相乘得实数0

2.2 正交的表示： $x^T * y = 0$ 说明x和y正交

2.3.1 两个空间正交就是：一个空间中的任意一个向量，都与另一个 空间中的任意i向量正交。

2.3 空间正交

若有 $A^T * X = 0$ 这里的X是左零空间，A是列空间（对应上面第一个列向量，向量从定义上就都是列的）
若有 $A * X = 0$ A就是 $(A^T)^T$ ， A^T 的列向量，也就是A的行向量，与X相乘为0，说明A的行空间与零空间正交



2.4

$\begin{bmatrix} \cos\vartheta \\ \sin\vartheta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\sin\vartheta \\ \cos\vartheta \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$q_i^T q_j = \begin{cases} 0 & (i \neq j) \\ 1 & (i = j) \end{cases}$

这很好地表现了标准正交向量组内各向量的性质。“标准” → 长度为 1。

2.5.1 长度为1且相互正交的单位向量

Q是方阵

所谓标准正交矩阵 Q ，就是将标准正交向量组中的 q_1, q_2, \dots, q_n 列在同一个矩阵中：

$Q = \begin{bmatrix} | & & | \\ q_1 & \dots & q_n \\ | & & | \end{bmatrix}$

$Q^T = Q^{-1}$

2.5.2 标准正交矩阵

2.5 标准正交基

方便计算

$\hat{x}_i = q_i^T b$

如果我们已知标准正交基，那么 b 在第 i 个基上的投影就是对应基向量 $q_i^T b$ 。

当我们选择标准正交向量作为基时，投影矩阵相关公式中的A都可以代换为Q，这样很多公式都可以被化简。

2.6.1 有两个线性无关的向量a，b。我们想从中得到标准正交向q1,q2

2.6 Gram-Schmidt 正交化