投影

1 十五，子空间投影

1.1 投影矩阵

1.1.1 二维

$p = Pb$(P是投影矩阵，作用于b向量上)

$p = a\frac{a^Tb}{a^Ta}$ ，也就是说，P 矩阵生成了投影 p 。

1.1.2 平面上的投影

其中 a_1, a_2 为构成平面的一组基，p 在平面上。所以有： $p = \hat{x}_1 a_1 + \hat{x}_2 a_2$ 。或者写做： $p = A\hat{x}$， $A = [a_1 \quad a_2]$（其中的 a_n 都是列向量），$\hat{x} = \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix}$ 。

$$P = A(A^TA)^{-1}A^T$$

1.1.3 性质

$$P^T = P$$

$$P^2 = P$$

1.2 无解方程的最优解(Ax = b)无解

1.2.1

将方程改写成： $A^TA\hat{x} = A^Tb$

- A^TA 的结果总是方阵。
- A^TA 总为对称阵。

在求最优解的时候要判断A的列向量之间是否线性无关,再进行求解。如果A的列线性相关，A不可逆，A^T*A不可逆。方程无解。

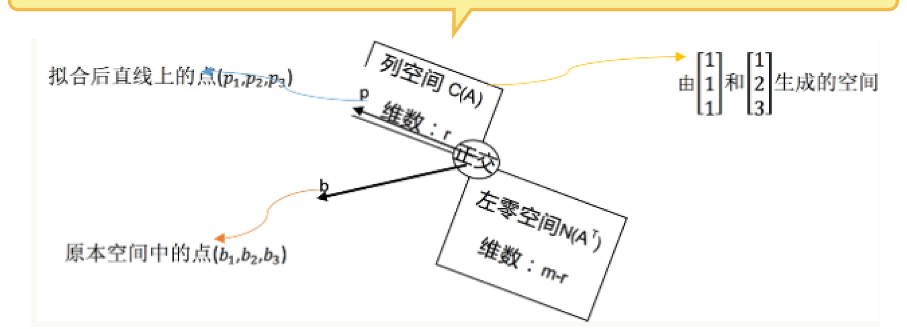
- $N(A^TA) = N(A)$: A^TA 与 A 的零空间相同。

证明在十六中

1.2.2 最小二乘法

思路：b不在A列空间中（无法用A列向量线性组合成b），我们要求解的X就是把A的列向量（基）重新组合（基可以通过合成成得到该空间的新向量p），求得离b最近的投影p。

同时b也能通过p = P * b得到投影



2 十四、正交

2.1

在线性代数中,正交就是垂直,无论我们以后谈论的是向量 正交还是空间正交，都可以理解为：垂直。

2.2 正交的表示：x^T * y = 0 说明x和y正交

这个定义的重点在于两个列向量，需要把第一个转为行向量，最后相乘得实数0

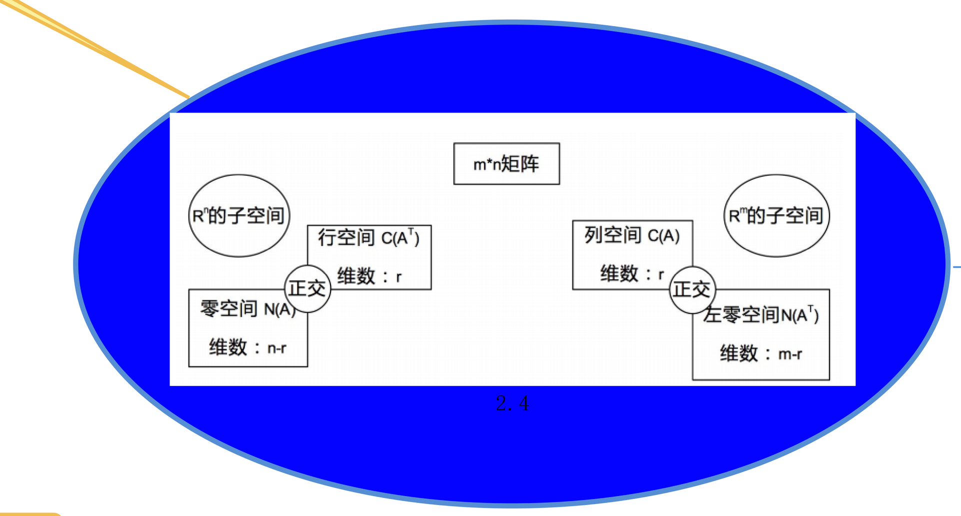
2.3 空间正交

2.3.1

两个空间正交就是：一个空间中的任意一个向量，都与另一个 空间中的任意i向量正交。

2.4

若有A^T * X = 0 这里的X是左零空间，A是列空间（对应上面第一个列向量， 向量从定义上就都是列的）
若有A * X = 0 A就是(A^T)^T，A^T的列向量，也就是A的行向量， 与X相乘为0，说明A的行空间与零空间正交



2.4

2.5 标准正交基

2.5.1 长度为1且相互正交的单位向量

$$\begin{bmatrix} cos\vartheta \\ sin\vartheta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -sin\vartheta \\ cos\vartheta \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$q_i^T q_j \begin{cases} 0 \ldots .(i \neq j) \\ 1 \ldots .(i = j) \end{cases}$$

这很好地表现了标准正交向量组内各向量的性质。“标准” → 长度为 1 。

2.5.2 标准正交矩阵

Q是方阵

所谓标准正交矩阵 Q，就是将标准正交向量组中的 $q_1, q_2 ... q_n$ 列在同一个矩阵中：

$$Q = \begin{bmatrix} q_1 & \cdots\cdots & q_n \end{bmatrix}$$

$$Q^T = Q^{-1}$$

当我们选择标准正交向呈作为基时，投影矩阵相关公式中的A都可以代换为Q ，这样很多公式都可以被化简。

方便计算

$$\hat{x}_i = q_i^T b$$

如果我们已知标准正交基，那么 b 在第 i 个基上的投影就是对应基向量 $q_i^T b$ 。

2.6 Gram-Schmidt 正交化

2.6.1 有两个线性无关的向量a, b。我们想从中得到标准正交向q1,q2