

# 动态规划(上)

九章官网下载最新课件

九章算法强化班 第5章



扫描二维码关注微信/微博  
获取最新面试题及权威解答

微信: [ninechapter](#)

微博: <http://www.weibo.com/ninechapter>

知乎: <http://zhuoanlan.zhihu.com/jiuzhang>

官网: <http://www.jiuzhang.com>

- 滚动数组
  - House Robber I/II
  - Maximal Square
- 记忆化搜索
  - Longest Increasing Subsequence
  - Coin in a line I/II/III

# 动态规划的4点要素

1. 状态 State
  - 灵感, 创造力, 存储小规模问题的结果
    - 最优解/Maximum/Minimum
    - Yes/No
    - Count(\*)
2. 方程 Function
  - 状态之间的联系, 怎么通过小的状态, 来求得大的状态
3. 初始化 Intialization
  - 最极限的小状态是什么, 起点
4. 答案 Answer
  - 最大的那个状态是什么, 终点

# 滚动数组优化

# 滚动数组优化

$f[i] = \max(f[i-1], f[i-2] + A[i]);$

转换为

$f[i\%2] = \max(f[(i-1)\%2] \text{ 和 } f[(i-2)\%2])$

# House Robber

<http://www.lintcode.com/en/problem/house-robber/>  
<http://www.jiuzhang.com/solutions/house-robber/>

公主追王子  
For循环 -----> DP

- 序列型动态规划
- 状态 State
  - $f[i]$  表示前 $i$ 个房子中, 偷到的最大价值
- 方程 Function
  - $f[i] = \max(f[i-1], f[i-2] + A[i-1]);$
- 初始化 Initialization
  - $f[0] = 0;$
  - $f[1] = A[0];$
- 答案 Answer
  - $f[n]$

- 序列型动态规划
  - 状态 State
    - $f[i]$  表示前 $i$ 个房子中, 偷到的最大价值
  - 方程 Function
    - $f[i] = 1. A[i-1] + \max(f[i-2] \dots f[1])$  偷第 $i$ 个房子
    - 2.  $f[i-1]$  不偷第 $i$ 个房子
- 总结为
- $f[i] = \max(f[i-1], f[i-2] + A[i-1]);$
- 初始化 Initialization
  - $f[0] = 0;$
  - $f[1] = A[0];$
- 答案 Answer
  - $f[n]$



# House Robber II

<http://www.lintcode.com/en/problem/house-robber-ii/>  
<http://www.jiuzhang.com/solutions/house-robber-ii/>

## 滚动数组优化一维

- 这类题目特点
  - $f[i] = \max(f[i-1], f[i-2] + A[i]);$  由  $f[i-1], f[i-2]$  来决定状态
- 可以转化为
  - $f[i\%2] = \max(f[(i-1)\%2] \text{ 和 } f[(i-2)\%2])$  由  $f[(i-1)\%2]$  和  $f[(i-2)\%2]$  来决定状态
- 观察我们需要保留的状态来确定模数
  
- 其他一维滚动数组的题目
  - <http://www.lintcode.com/en/problem/climbing-stairs/>

# Maximal Square

<http://www.lintcode.com/en/problem/maximal-square/>  
<http://www.jiuzhang.com/solutions/maximal-square/>

# 小技巧

网格类的题目

正方形用右下角作为定位角

长方形可以用左上角和右下角作为定位角

# Maximal Square

## 1. 状态 State

$f[i][j]$  表示以  $i$  和  $j$  作为正方形右下角可以拓展的最大边长

## 2. 方程 Function

if  $matrix[i][j] == 1$

$f[i][j] = \min(\text{LEFT}[i][j-1], \text{UP}[i-1][j], f[i-1][j-1]) + 1;$

if  $matrix[i][j] == 0$

$f[i][j] = 0$

## 3. 初始化 Initialization

$f[i][0] = matrix[i][0];$

$f[0][j] = matrix[0][j];$

## 4. 答案 Answer

$\max\{f[i][j]\}$

# Maximal Square

## 1. 状态 State

$f[i][j]$  表示以  $i$  和  $j$  作为正方形右下角可以拓展的最大边长

## 2. 方程 Function

if  $matrix[i][j] == 1$

$f[i][j] = \min(f[i-1][j], f[i][j-1], f[i-1][j-1]) + 1;$

if  $matrix[i][j] == 0$

$f[i][j] = 0$

## 3. 初始化 Initialization

$f[i][0] = matrix[i][0];$

$f[0][j] = matrix[0][j];$

## 4. 答案 Answer

$\max\{f[i][j]\}$

# Maximal Square

## 1. 状态 State

$f[i][j]$  表示以  $i$  和  $j$  作为正方形右下角可以拓展的最大边长

## 2. 方程 Function

if  $matrix[i][j] == 1$

$f[i+1][j+1] = \min(f[i][j], f[i+1][j], f[i][j+1]) + 1;$

if  $matrix[i][j] == 0$

$f[i+1][j+1] = 0$

## 3. 初始化 Initialization

$f[i+1][0] = matrix[i][0];$

$f[0][j+1] = matrix[0][j];$

## 4. 答案 Answer

$\max\{f[i+1][j+1]\}$

# Follow up

01矩阵里面找一个，对角线全为1，其他为0的正方形



# 二维动态规划空间优化

这类题目特点

$f[i][j]$  = 由  $f[i-1]$  行 来决定状态,

第  $i$  行跟  $i-1$  行之前毫无关系,

所以状态转变为

$f[i\%2][j]$  = 由  $f[(i-1)\%2]$  行来决定状态

# 二维滚动数组相关题目

Unique Paths

<http://www.lintcode.com/en/problem/unique-paths/>

Minimum Path Sum

<http://www.lintcode.com/en/problem/minimum-path-sum/>

Edit Distance

<http://www.lintcode.com/en/problem/edit-distance/>

# 记忆化搜索

- 本质上: 动态规划
- 动态规划就是解决了重复计算的搜索
  
- 动态规划的实现方式:
  - 循环(从小到大递推)
  - 记忆化搜索(从大到小搜索)
    - 画搜索树
    - 万金油

# Longest Increasing Subsequence

<http://www.lintcode.com/en/problem/longest-increasing-continuous-subsequence/>

<http://www.jiuzhang.com/solutions/longest-increasing-continuous-subsequence/>

[4, 2, 5, 4, 3, 9, 8, 10]

# Longest Increasing continuous Subsequence 2D

<http://www.lintcode.com/en/problem/longest-increasing-continuous-subsequence-ii/>

<http://www.jiuzhang.com/solutions/longest-increasing-continuous-subsequence-ii/>

10	2	7
2	3	6
11	4	5

## Longest Increasing continuous Subsequence 2D

- 多重循环DP遇到的困难：
  - 从上到下循环不能解决问题
  - 初始状态找不到
- 那我们有没有可以比较暴力解决的方法呢？
  - 有搜索，我们从大的往小的搜索

# Longest Increasing continuous Subsequence 2D

- 普通搜索

```
1 // 循环求所有状态
2 For i = 1 -> n
3     For j = 1 -> n
4         search (i,j) // 直接求i,j最为结尾最长子序列
5
6
7 int search(int x, int y, int[][] A) {
8     for(int i = 0; i < 4; i++) {
9         nx = x + dx[i];
10        ny = y + dy[i];
11        if( A[x][y] > A[nx][ny]) {
12            // 通过 search( nx, ny, A) 更新最长子序列
13        }
14    }
15    //返回答案
16 }
```



# Longest Increasing continuous Subsequence 2D

## • 普通搜索

```
1 // 循环求所有状态
2 For i = 1 -> n
3   For j = 1 -> n
4     search (i,j) // 直接求i,j最为结尾最长子序列
5
6
7 int search(int x, int y, int[][] A) {
8   for(int i = 0; i < 4; i++) {
9     nx = x + dx[i];
10    ny = y + dy[i];
11    if( A[x][y] > A[nx][ny]) {
12      // 通过 search( nx, ny, A) 更新最长子序列
13    }
14  }
15  //返回答案
16 }
```

## • 记忆化搜索

```
1 // 循环求所有状态
2 For i = 1 -> n
3   For j = 1 -> n
4     dp[i][j] = search (i,j) // 直接求i,j最为结尾最长子序列
5
6
7 int search(int x, int y, int[][] A) {
8   if(flag[x][y] != 0) // 遍历过直接返回
9     return dp[x][y];
10
11   for(int i = 0; i < 4; i++) {
12     nx = x + dx[i];
13     ny = y + dy[i];
14     if( A[x][y] > A[nx][ny]) {
15       // 通过 search( nx, ny, A) 更新最长子序列
16     }
17   }
18   //返回答案
19 }
```

# Longest Increasing continuous Subsequence 2D

- 那怎么根据DP四要素转化为记忆化搜索呢？

- State:  $dp[x][y]$  以 $x,y$ 作为结尾的最长子序列

- Function:

- 遍历 $x,y$  上下左右四个格子
- $dp[x][y] = dp[nx][ny] + 1$ 
  - (if  $a[x][y] > a[nx][ny]$ )

- Intialize:

- $dp[x][y]$  是极小值时, 初始化为1

- Answer:  $dp[x][y]$ 中最大值

```
1 // 循环求所有状态
2 For i = 1 -> n
3   For j = 1 -> n
4     dp[i][j] = search (i,j) // state定义
5
6
7 int search(int x, int y, int[][] A) {
8   if(flag[x][y] != 0)
9     return dp[x][y];
10
11
12   dp[x][y] = 0; // Intialize
13   for(int i = 0; i < 4; i++) { // Intialize
14     nx = x + dx[i];
15     ny = y + dy[i];
16     if( A[x][y] > A[nx][ny]) { // Function
17       dp[x][y] = Math.max(dp[i][j], search( nx, ny, A) + 1);
18     }
19   }
20
21   return dp[x][y]; //Answer
22 }
```

# 什么时候用记忆化搜索？

1. 状态转移特别麻烦，不是顺序性。
2. 初始化状态不是很容易找到。

# 博弈类DP



# Coins in a line

<http://www.lintcode.com/en/problem/coins-in-a-line/>  
<http://www.jiuzhang.com/solutions/coins-in-a-line/>

博弈有先后手

- State:
  - 定义一个人的状态
- Function:
  - 考虑两个人的状态做状态更新
- Intialize:
- Answer:

先思考最小状态

然后思考大的状态-> 往小的递推, 那么非常适合记忆化搜索

- 方法一
- State:
  - $dp[i]$  现在还剩  $i$  个硬币, 现在 **先手** 取硬币的人最后输赢状况
- Function:
  - $dp[i] = (dp[i-2] \& \& dp[i-3]) \vee (dp[i-3] \& \& dp[i-4])$
- Initialize:
  - $dp[0] = \text{false}$
  - $dp[1] = \text{true}$
  - $dp[2] = \text{true}$
  - $dp[3] = \text{false}$
- Answer:
  - $dp[n]$



- 方法二
- State:
  - $dp[i]$  现在还剩 $i$ 个硬币, 现在当前取硬币的人最后输赢状况
- Function:
  - $dp[i] = \text{true}$  ( $dp[i-1] == \text{false}$  或者  $dp[i-2] == \text{false}$ )
- Initialize:
  - $dp[0] = \text{false}$
  - $dp[1] = \text{true}$
  - $dp[2] = \text{true}$
- Answer:
  - $dp[n]$

# Coins in a Line II

<http://www.lintcode.com/en/problem/coins-in-a-line-ii/>

<http://www.jiuzhang.com/solutions/coins-in-a-line-ii/>

[5,1,2,10]

- 方法一
- State:
  - $dp[i]$  现在还剩 $i$ 个硬币, 现在先手取硬币的人最后最多取硬币价值
- Function:
  - $i$  是所有硬币数目
  - $coin[n-i]$  表示倒数第 $i$ 个硬币
  - $dp[i] = \max(\min(dp[i-2], dp[i-3]) + coin[n-i], (\min(dp[i-3], dp[i-4]) + coin[n-i] + coin[n-i+1]))$
- Intialize:
  - $dp[0] = 0$
  - $dp[1] = coin[i-1]$
  - $dp[2] = coin[i-2] + coin[i-1]$
  - $dp[3] = coin[i-2] + coin[i-3]$
- Answer:
  - $dp[n] > sum/2$

- 方法二
- State:
  - $dp[i]$  现在还剩*i*个硬币, 现在当前取硬币的人最后最多取硬币价值
- Function:
  - *i* 是所有硬币数目
  - $sum[i]$  是后*i*个硬币的总和
  - $dp[i] = \max(sum[i]-dp[i-1], sum[i] - dp[i-2])$
- Intialize:
  - $dp[0] = 0$
  - $dp[1] = coin[i-1]$
  - $dp[2] = coin[i-2] + coin[i-1]$
- Answer:
  - $dp[n]$

# Coins in a Line III

<http://www.lintcode.com/en/problem/coins-in-a-line-iii>

[www.jiuzhang.com/solutions/coins-in-a-line-iii](http://www.jiuzhang.com/solutions/coins-in-a-line-iii)

- 方法一:
- State:
  - $dp[i][j]$  现在还第i到第j的硬币, 现在先手取硬币的人最后最多取硬币价值
- Function:
  - $left = \min(dp[i+2][j], dp[i+1][j-1]) + coin[i]$   $[i+1, j]$
  - $right = \min(dp[i][j-2], dp[i+1][j-1]) + coin[j]$   $[i, j-1]$
  - $dp[i][j] = \max(left, right).$
- Intialize:
  - $dp[i][i] = coin[i],$
  - $dp[i][i+1] = \max(coin[i], coin[i+1]),$
- Answer:
  - $dp[0][n-1] > sum/2$

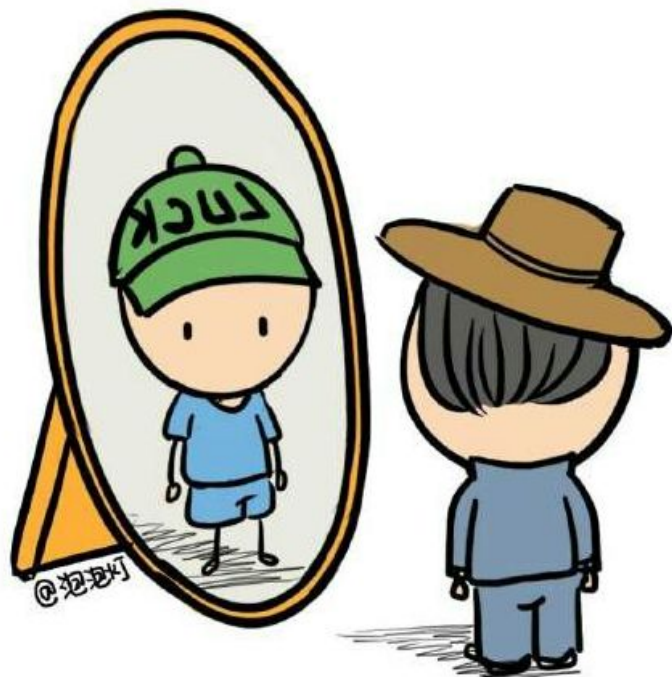
- 方法二:
- State:
  - $dp[i][j]$  现在还第i到第j的硬币, 现在当前取硬币的人最后最多取硬币价值
- Function:
  - $sum[i][j]$  第i到第j的硬币价值总和
  - $dp[i][j] = \max(sum[i][j] - dp[i+1][j], sum[i][j] - dp[i][j-1]);$
- Intialize:
  - $dp[i][i] = coin[i],$
- Answer:
  - $dp[0][n-1]$

# 什么时候用记忆化搜索？

- 状态转移特别麻烦，不是顺序性。
  - **Longest Increasing continuous Subsequence 2D**
    - 遍历x,y 上下左右四个格子  $dp[x][y] = dp[nx][ny]$
  - **Coins in a Line III**
    - $dp[i][j] = sum[i][j] - \min(dp[i+1][j], dp[i][j-1]);$
- 初始化状态不是很容易找到
  - **Stone Game**
    - 初始化  $dp[i][i] = 0$
  - **Longest Increasing continuous Subsequence 2D**
    - 初始化极小值
- 从大到小



- **House Robber**
  - 滚动数组优化最简单的入门。
- **Longest Increasing continuous Subsequence 2D**
  - 记忆化搜索的经典题, 此题只有记忆化搜索才能最优。
- **Coins in a Line III**
  - 博弈问题和记忆化搜索的结合



The only person you should compare yourself to,  
is the person you were yesterday.  
唯一能够和你相比较的，就是那个曾经的自己。

# Thank You

