Algoritmos em Grafos: Fluxo de Custo Mínimo em Redes de Transporte

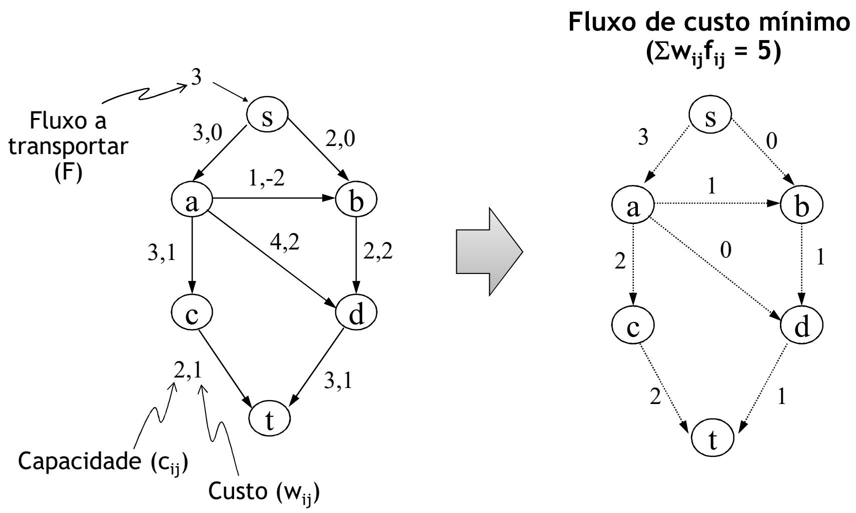
R. Rossetti, A. P. Rocha, L. Ferreira, J. P. Fernandes, F. Ramos, G. Leão

FEUP, MIEIC

Problema

- O objetivo é transportar uma certa quantidade *F* de fluxo (≤ máximo permitido pela rede) da fonte (*s*) para o poço (*t*), com um custo total mínimo
  - Para além da capacidade, arestas têm associado um custo (w_{ij}, custo de transportar uma unidade de fluxo)
  - Podem existir arestas de custo negativo (útil em problemas de maximização do valor, introduzindo sinal negativo)

Exemplo



Formalização

Dados de entrada :

c_{ij} - capacidade da aresta que vai do nó i a j (0 se não existir)

w_{ij} - custo de passar uma unidade de fluxo pela aresta (i, j)

F - quantidade de fluxo a passar pela rede

Dados de saída (variáveis a calcular) :

f_{ij} - fluxo que atravessa a aresta que vai do nó i para o nó j (0 se não existir)

Restrições :

$$0 \le f_{ij} \le c_{ij}, \forall_{ij}$$

$$\sum_j f_{ij} = \sum_j f_{ji}, \forall_{i \neq s,t}$$

$$\sum_j f_{sj} = F$$

Objectivo :

$$\min \sum_{ij} f_{ij} \times w_{ij}$$

Algoritmos

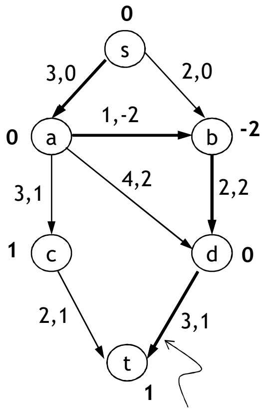
- Há muitos algoritmos propostos na literatura, aplicados à resolução deste problema, incluindo:
  - Cycle cancelling algorithms *(negative cycle optimality)*
  - Successive Shortest Path algorithms *(reduced cost optimality)*
  - Out-of-Kilter algorithms (complimentary slackness)
  - Network Simplex
  - Push/Relabel Algorithms
  - Dual Cancel and Tighten
  - Primal-Dual
  - … *entre outros!*

Método dos caminhos de aumento mais curtos sucessivos

- Algoritmo ganancioso: no algoritmo de Ford-Fulkerson, escolhe-se em cada momento um caminho de aumento mais curto (no sentido de ter custo mínimo)
  - Pára-se quando se atinge o fluxo pretendido ou quando não há mais caminhos de aumento (neste caso dá um fluxo máximo de custo mínimo)
- Restrição: aplicável só a redes sem ciclos de custo negativo
  - Senão usa-se método mais genérico (cancelamento de ciclos negativos)
- Prova-se que dá a solução óptima (ver referências)

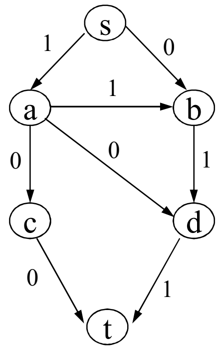
Exemplo (1/2)

Grafo inicial de resíduos e custos =
Grafo base de capacidades e custos



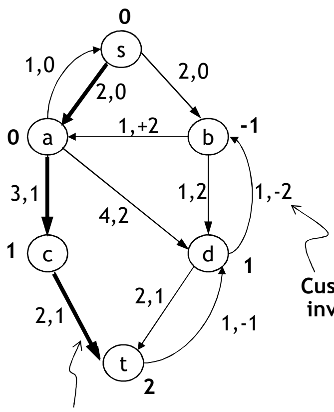
Caminho de custo mínimo de s a t
(fluxo = 1) (custo unitário = 1)

Grafo de fluxos
resultante



Exemplo (2/2)

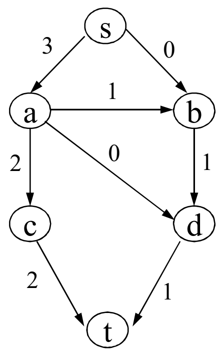
Novo grafo de resíduos e
custos



Custo em aresta
invertida troca
de sinal

Caminho de custo mínimo de s a t
(fluxo = 2)(custo unit.= 2)

Grafo de fluxos
resultante



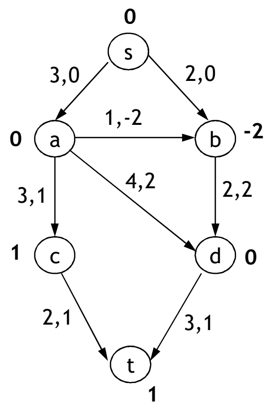
Atingiu-se o fluxo pretendido (3) =>
Termina (custo total = 5)

Melhoramento

- Dificuldade na abordagem anterior: arestas de custo negativo no grafo de resíduos
  - Devido a custos iniciais negativos ou à inversão de arestas no grafo de resíduos
  - Obriga a usar algoritmo menos eficiente na procura do caminho de custo mínimo (Bellman-Ford O(|V| |E|)
- Solução: converte-se o grafo de resíduos num equivalente (para efeito de encontrar caminho de custo mínimo) sem custos negativos
  - Na 1ª iteração usa-se algoritmo de Bellman-Ford O(|V||E|)
  - Em todas as seguintes, usa-se algoritmo de Dijkstra O(|E| log |V|)

Conversão do grafo de resíduos (1/2)

1. No grafo de resíduos inicial, determinar a "distância" mínima de *s* a todos os vértices (*d(v)*)
   - Se existirem arestas (mas não ciclos) de peso negativo no grafo de resíduos inicial, usa-se o algoritmo de Bellman-Ford, de tempo O(|E||V|)
   - *d(v)* também é chamado neste contexto o "potencial do nó *v*"

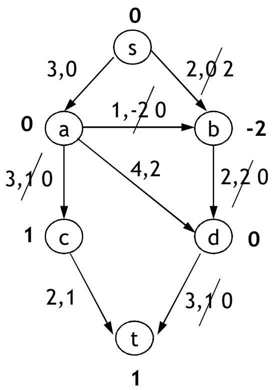


Conversão do grafo de resíduos (2/2)

2. Substituir os custos iniciais w(u,v) por custos "reduzidos" w'(u,v) = w(u,v) + d(u) - d(v)

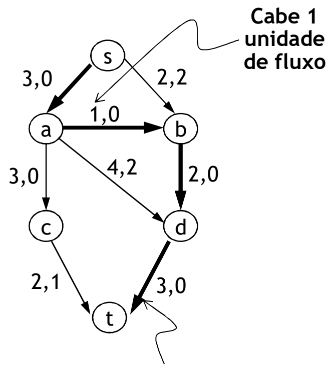
   - w'(u,v) >= 0 pois d(v) <= d(u) + w(u,v)

   - O custo w' de um caminho de s a t, usando os custos reduzidos, é igual ao custo usando os custos antes da redução subtraído de d(t) (demonstrar !)



Determinação do próximo caminho de aumento

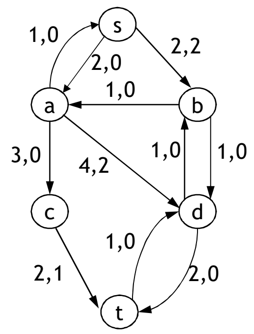
3. Seleccionar um caminho de custo mínimo de *s* para *t* no grafo de resíduos
    - Os caminhos de custo mínimo de *s* para *t* têm custo reduzido 0 e custo "real" (antes da redução) d(t)
    - Como os caminhos de custo mínimo percorrem apenas arestas de custo 0, podem ser encontrados como uma pesquisa simples (DFS) em tempo linear
        - conceitualmente, eliminam-se arestas de custo > 0



Caminho de custo mínimo (custo unitário reduzido 0) (custo unitário "real" 1)

Aplicação do caminho de aumento

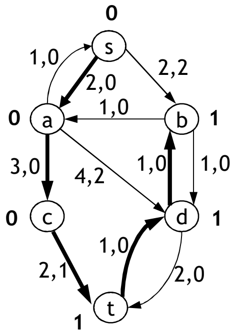
4. Aplicar o caminho de aumento
    - Custo das arestas invertidas no grafo de resíduos é multiplicado por (-1)
    - Só que -1 x 0 = 0 …
    - Evita-se assim a introdução de arestas de custo negativo!

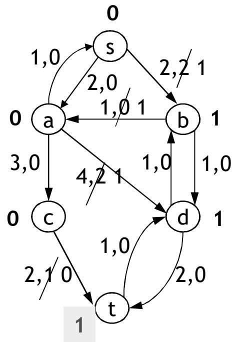


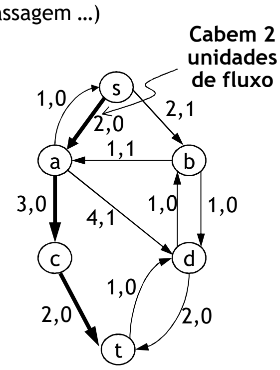
(quantidade atual do fluxo = 1)
(custo atual/real do fluxo = 1)

Nova conversão do grafo de resíduos

5. Como não há mais caminhos de aumento de custo 0, volta-se a efectuar uma "redução" dos custos no grafo de resíduos
   - Isto é, recalculam-se as distâncias mínimas (e.g. pelo algoritmo de Dijkstra!), e reduzem-se os custos (pode ser feito numa única passagem …)

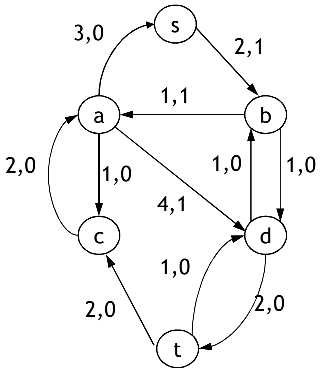






Repetição do processo

6. Aplicar o caminho de aumento de custo 0
   - Actualiza-se o grafo de resíduos



Quantidade atual de fluxo = 3 = pretendido => FIM

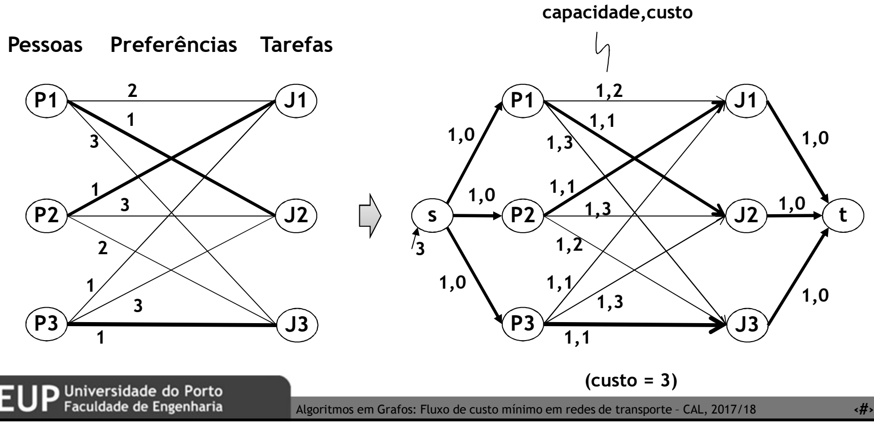
Custo atual do fluxo = 5

Eficiência temporal

- Primeira redução do grafo de resíduos: O(|V| |E|) pelo algoritmo de Bellman-Ford
- Subsequentes reduções do grafo de resíduos e determinação do caminho de aumento de custo mínimo: O(|E| log |V|) pelo algoritmo de Dijkstra
- Se todas as grandezas forem inteiras, o nº máximo de iterações é F, pois em cada iteração o valor do fluxo é incrementado de uma unidade
- Tempo total fica *O*(F |E| log|V|)

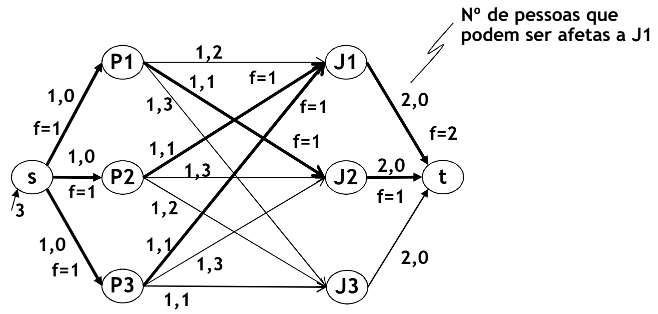
Aplicação a problemas de emparelhamento (1/2)

- Problema de encontrar um emparelhamento de custo/peso mínimo num grafo bipartido (*minimum cost/weight bipartite matching*) (problema de afetação) pode ser reduzido ao problema de encontrar um fluxo de custo mínimo numa rede de transporte



Aplicação a problemas de emparelhamento (2/2)

- E no caso de se poderem afetar várias pessoas à mesma tarefa?
  - Por exemplo, no caso anterior, admitindo 2 pessoas por tarefa



Referências e informação adicional

- "Network Flows: Theory, Algorithms and Applications", R. Ahuja, T. Magnanti & J. Orlin, Prentice-Hall, 1993
- "Efficient algorithms for shortest paths in sparse networks". D. Johnson, J. ACM 24, 1 (Jan. 1977), 1-13