

## 2023河南省ICPC省赛题解：

### A. 列车售货员难题

题目大意：给 $n$ 个集合，求所有区间的集合的并有多少不同种情况。

题解：元素只有 $m(m \leq 100)$ 种，以每个点为左端点，变化右端点能得到的不同集合也就最多 $m$ 种。记录下来每种元素出现的位置序列，在枚举左端点的同时维护对于每个元素，下次出现在什么位置。就能以 $nm$ 的时间枚举出所有集合。再用bitset或int128表示集合，用哈希表去重即可。

### B. 循环数码

题目大意：求 $n$ 以内所有循环数字的个数， $n$ 是一个长度为 $10^5$ 的十进制数字串。

题解：考虑两种情况：长度小于 $n$ 和长度等于 $n$ 。

第一种：长度小于 $n$ ，此时枚举长度，再枚举循环节直接计算方案即可。注意第一位不能填0 第二种：长度等于 $n$ ，此时要注意的是不能超过 $n$ 。枚举一个 $n$ 的约数 $x$ 作为循环节长度，然后前 $x$ 位小于原串的前 $x$ 位时，后面相当于没有限制，直接填相同的串即可。当前 $x$ 位等于原串的前 $x$ 位时，需要枚举整个串，判断一下如果按前 $x$ 位的形式复制，是否能小于等于 $n$ 。

然后，对于类似1212121212这样的串，其循环次数有2, 4, 6三种情况。此时要去重。在前面计算时要记录成"循环次数为 $x$ 时答案有多少种"。再进行倍数容斥，即从大到小枚举，把 $x$ 的答案减去 $2x, 3x, 4x$ 等的答案。

### C. 结对编程

题目大意：求树上所有点集 $s$ ，其 $a_{LCA(s)} \times (-1)^{|s|}$ ,  $a$ 是权值数组。

题解：对于一个点 $x$ 作为lca时，当其他点出自于两个或多个它的不同的子树，那么选择该点和不选择该点是一对对称的方案，和为0。

那么此时考虑剩下两种情况：1：只选择 $x$ 自身，贡献是 $a_i$ 的和 2：选择 $x$ 自身，再选择其某一个子树里的点，此时选奇数个点的方案要比偶数个点的方案要多1(因为不能选空集，偶数方案少一个)。对于每个子树，贡献是 $-a_i$

### D. 导弹拦截

题目大意：求有多少对  $(a,b)$  使得  $L1 \leq a \leq R1, L2 \leq b \leq R2$  且满足  $a$  在  $b$  进制表示下的数位序列最长不上升子序列长度为  $k$ 。

题解：考虑先枚举进制 $b$ ，再枚举 $b$ 的倍数，此时整体枚举复杂度是 $n \log n$ ，这些数字在 $b$ 进制表示中最低位都是0。因此如果前面的子序列长度为 $k$ ，那么个位只要大于所有长度 $k$ 的结尾，不做贡献即可，如果子序列长度为 $k-1$ ，那么各位需要小于任意的长度 $k$ 的结尾，做贡献。因此，合法的个位的个数是可以直接算出来的。(当前前提是前面的最长不上升子序列长度必须是 $k$ 或 $k-1$ )

然后，再维护前方的dp数组时，要保证枚举过程中只维护当前变化的位，不要每次重新转化成 $b$ 进制重新dp。因为每+1一次，进位个数的均摊是 $O(1)$ 的，大概只需要修改1.几位置的dp值。跑起来还是很快的

### E. 抽奖问题

题目大意：有个抽奖程序，抽到 $[0,n]$ 每个价值的奖品由概率，抽 $m$ 次后 $[0,n]$ 每个值作为总价值的概率告诉你，让你求原本抽奖程序里的概率。

题解：只需要构造一个价值为 $n$ 的概率，使得概率和为1，那么此时对于 $[0,n]$ 来说概率和个数等价。那么所谓个数序列等于概率序列。

本题中的抽奖相当于给概率序列写成一个多项式 $f$ ，给出了 $f^m$ 让你还原 $f$ 。只要处理出 $\frac{f}{f_0}$ ，把 $f$ 多项式的首项变成1，直接用 $\ln+\exp$ 求出 $(\frac{f}{f_0})^{\frac{1}{m}}$ 。再将该多项式乘以 $f_0$ 的 $m$ 次剩余即可。如果 $f_0$ 没有 $m$ 次剩余，即无解。

## F.实验器材选购

题目大意：一个序列每次给出三个整数 $L, mid, R$ 满足 $1 \leq L \leq mid < R \leq n$ 。求 $[L, mid]$ 和 $[mid + 1, R]$ 中每个数出现次数相差最大的差值。

题解：使用莫队算法，同时维护三个指针的移动。给 $L$ 和 $mid$ 做 $n^{\frac{2}{3}}$ 大小的分块，给 $R$ 做排序。值的操作是 $+1, -1, +2, -2$ ，用链表或者分块维护最值即可。复杂度 $n^{\frac{5}{3}}$ ，复杂度证明请参考"带修莫队"的相关资料

## G.异或解密

题目大意：给出一个序列，把该序列整体异或一个值 $a$ ，使得异或后序列和为 $S$ ，求最小的 $a$ 。

题解：相当于对每一位来说，该序列有 $x$ 个1和 $n-x$ 个0，你可以任选异或后的结果要加上 $x$ 个1还是 $n-x$ 个1，类似01背包

考虑从低位到高位做背包时，要注意当枚举到高位时，其价值的二进制低位都是0。也就是高位的决策不能影响和的低位的值。因此必须在低位时，就把值就和 $S$ 的低位对应上，在之后的 $dp$ 中，取消低位的状态。这样虽然直接01背包的数组大小是 $2^{60}$ ，但是实际上只需要开 $O(n)$ 的数组大小即可，转移时上一次的状态大小都要除以2。

## H. 部落冲突

题目大意：求凸包并的周长，没有重合的边。

题解：凸包并起来并不一定是凸包，但是可以用半平面交求凸包的交，用两个凸包的周长的和减去凸包交的和即可。

## I. calc

题目大意：给一个 $[1,7]$ 整数的集合，求 $n$ 以内任选若干个数，且任意两个的差不能在该集合的方案数。

题解：考虑状压 $dp$ ，在从1到 $n$ 枚举每个数选不选的过程中，状压最近7个数选/不选的状态进行转移。考虑到对于每一步，状态之间的转移关系和位置无关，各个位置都是一样的，那么这样的 $dp$ 就可以用矩阵快速幂来优化。复杂度 $(2^7)^3 * \log(n)$

## J. NBS

题目大意：给一个二进制串，求其字典序下一个不存在前缀后缀相等串。

题解：首先，可以该串可以看成二进制串，其后讲解的"对串加一个数"，指看成二进制串后的操作。

第一步：对于一个前缀和后缀相等的串，其最小相等长度必然小于其长度的一半（这个可以画一下如果相等大于长度一半会怎么样，很容易证明）。

第二步：对于a开头的串，其后一半是bbbbbbbbbbb的话一定是一个NBS串，所以只要其本身后半段全部是b，那么一定不需要动前半段，后半段全部是b那就先+1再进行，总之是不需要动前半段的。对于b开头的串，后面一半是aaaaaaaaaaa的话一定是一个NBS串，所以如果不动前半段无解的话直接给前半段+1，后面变成aaaaaaaaaaa即可。总结来说就是，前半段不需要改变，需要改变的情况都可以特判。由此，我们可以根据前半段来构造后半段。

第三步：以a开头举例，如果开头是abbb，那么结尾必须是bbbb，也就是a不能出现在后四位里。那么我们枚举从后往前数第一个a的位置，后面填abb(若干个b)的形式，前方尝试加一个最小的数，使得得到串是NBS串。那么考虑前半段所有的abb形式的串，如果其出现在第x+1位，那么也就是后面abb串的前x位不能和开头x位相等。这时我们可以利用字符串哈希(模数任意，但是base必须是2，因为是2进制串)，求出对于若干个不同的模数做哈希时，两个长度为x的串哈希值差值是多少。如果这个差值很小，那么在多个模数下求的结果应当相等。如果不相等，我们就抛弃这个值。

那么我们就得到了若干个限制，形式例如："对于任意的k，加的值不能是 $x+k*2^{len}$ "。此时求mex值即可。由于len值互不相等，且差值至少为2，所以对于大多数的限制len都比较大只需要考虑x，不需要考虑 $k \times 2^{len}$ 。

再次考虑对于前半段来说，一个abbb形式的串可以产生多少次限制。当一个该形式的串有x个b时，其只能做x次限制，因此限制的总数是On的。前方求mex总复杂度是On。

那么我们就得到了当从右往左数第一个a在每个位置时，前方的串至少加几才能得到一个nbs串，在这些方案中，进行比较谁更优。其他情况进行分类讨论即可，只讲解一种情况：a在前加的值比较小，a在后加的值比较大时，可以考虑把a在前加的值乘以 $2^{位置之差}$ ，并用刚才哈希的方式判出abbbb串和原串的差。由这样的方式，可以得到一个最优的方案，包括从后往前第一个a在哪，再往前的串需要加几。按该方案得到结果即可。

其余代码实现上有一些分类讨论内容。

此解法是出题人无聊时想出的，不敢保证最优，不敢保证唯一。请各位选手发挥想象力，感觉会存在有更简洁优美的做法。

## K. 连通最小乘积

题目大意：一个完全图，i到j边权为 $A_i \times A_j$ ，你选出一些边使得图连通且权值和最小。

题解：签到题。讨论即可，如果有正有负那么所有正连向所有负，否则拿绝对值最小的点连向其他所有点。

## L. 行星探索

题目大意：给一个二维矩阵有三种字符，每次询问其中一块，问这一块内三种字符各出现多少次

题解：二维前缀和即可，对于每个 $(x, y)$ 分别记录三种字符 $(x, y)$ 左上角区域中出现的次数，对于一次询问 $a, b, c, d$ ，输出 $\text{cnt}[c][d] - \text{cnt}[a-1][d] - \text{cnt}[b][c-1] + \text{cnt}[a-1][b-1]$ 。

## M. 二手物品回收

题目大意：有n个物品，每个物品有价值，有售卖渠道，激活每个售卖渠道有代价，问卖出k个物品的最小代价。

题解：对于每个售卖渠道，如果激活了它那么一定会选择更贵的商品去卖。所以对每个渠道来说首先按价值从高到低排序，再把第一个物品的价值减去渠道代价，再求前缀和做分组背包即可。