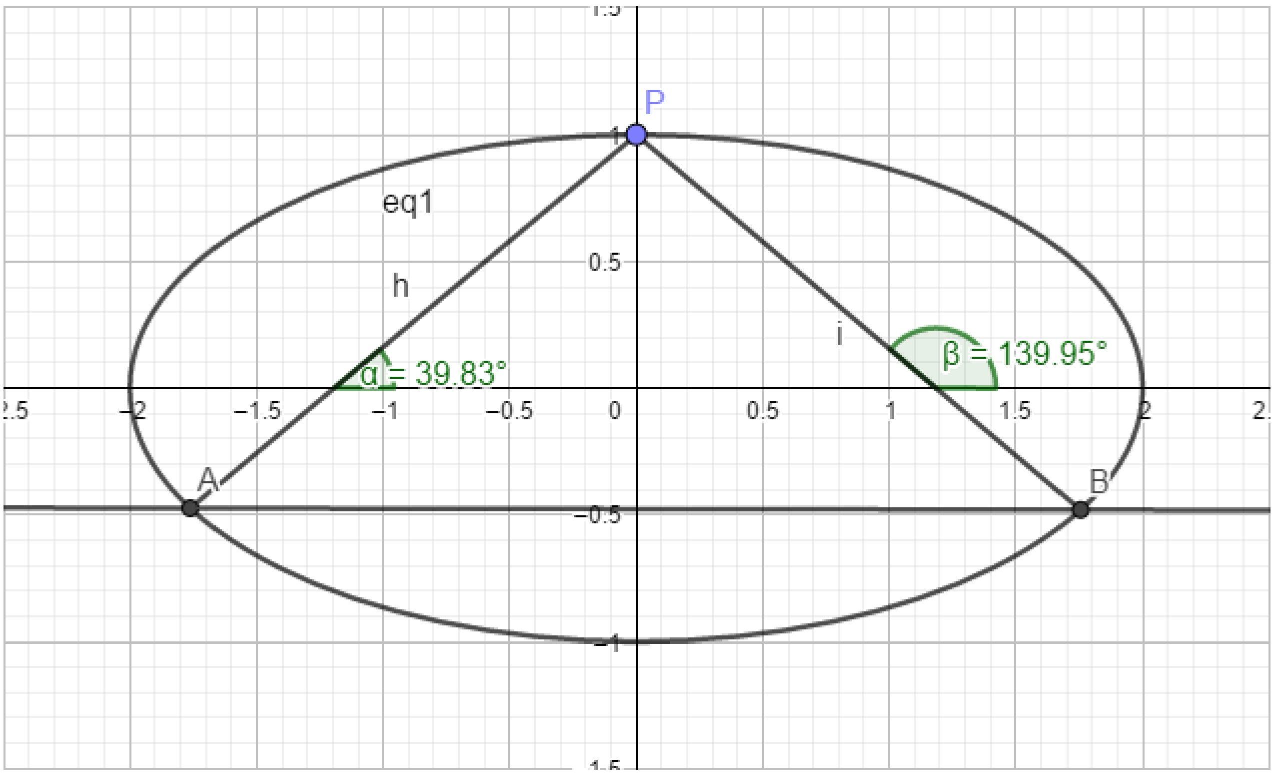
椭圆共点定角弦所得直线性质探究

> 已知P(x_0, y_0)为椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上一点，PA、PB为椭圆的两条动弦，其倾斜角分别为α、β，且α+β=θ，θ∈[0,2π)。试探究直线AB的性质。



大量具有精准良好的计算结果均表明：

1. **当tanθ = 0时，直线AB斜率$k=\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x_0}{y_0}$为定值**
2. **当tanθ ≠ 0时，直线AB恒过定点**

以下为证明过程
（数学手算证明，C++程序辅助计算）

设直线AB：$y=kx+m$，$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，PA、PB斜率为$k_1=tan\alpha$、$k_2=tan\beta$，直线AB恒过定点Q

联立$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\\ y=kx+m\end{cases}$ 得： $(a^2k^2+b^2)x^2+2a^2kmx+a^2(m^2-b^2)=0$

- $x_1+x_2=\frac{-2a^2km}{a^2k^2+b^2}$ **(1)**
- $x_1x_2=\frac{a^2(m^2-b^2)}{a^2k^2+b^2}$ **(2)**
- $y_1+y_2=k(x_1+x_2)+2m=\frac{2b^2m}{a^2k^2+b^2}$ **(3)**

- > > $y_1y_2=(kx_1+m)(kx_2+m)=\frac{b^2(m^2-a^2k^2)}{a^2k^2+b^2}$ **(4)**
- > > $y_1x_2+y_2x_1=\frac{-2a^2b^2k}{a^2k^2+b^2}$ **(5)**

因为 $k_1=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0},k_2=\frac{y_2-y_0}{x_2-x_0}$
所以

- $k_1\cdot k_2=\frac{(y_1-y_0)(y_2-y_0)}{(x_1-x_0)(x_2-x_0)}=\frac{y_1y_2-y_0(y_1+y_2)+y_0^2}{x_1x_2-x_0(x_1+x_2)+x_0^2}$ **(*)**
- $k_1+k_2=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}+\frac{y_2-y_0}{x_2-x_0}=\frac{(y_1-y_0)(x_2-x_0)+(y_2-y_0)(x_1-x_0)}{(x_1-x_0)(x_2-x_0)}=\frac{y_1x_2+y_2x_1-x_0(y_1+y_2)-y_0(x_1+x_2)+2x_0y_0}{x_1x_2-x_0(x_1+x_2)+x_0^2}$ **(**)**

一、当tanθ = 0时

因为 α = θ - β 所以 $tan\alpha=tan(\theta-\beta)=\frac{tan\theta-tan\beta}{1+tan\theta\cdot tan\beta}=-tan\beta$

即 $tan\alpha+tan\beta=0$

> > 即 $k_1+k_2=0$

把(*)代入得

> > $y_1x_2+y_2x_1-x_0(y_1+y_2)-y_0(x_1+x_2)+2x_0y_0=0$

把(1)(2)(3)(4)(5)代入得

> > $-2a^2b^2k-x_0(2b^2m)-y_0(-2a^2km)+2x_0y_0(a^2k^2+b^2)=0$

整理得

> > $(a^2y_0k-b^2x_0)m+a^2x_0y_0k^2-a^2b^2k+b^2x_0y_0=0$

若使直线PA、PB倾斜角α + β = θ，直线AB斜率恒为定值，须使上式成立

设m的值域为集合M的子集

> > **即 $\forall m\in M$，都能使k为恒定值，使该式成立**

所以 方程 $\begin{cases} a^2y_0k-b^2x_0=0 \\ a^2x_0y_0k^2-a^2b^2k+b^2x_0y_0=0 \end{cases}$ **的解为即为所求定值斜率**

由前式得 $k=\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x_0}{y_0}$

代入后式检验得 $\frac{b^2x_0^2}{a^2y_0}-\frac{b^2}{y_0}+y_0=0$

整理得 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 成立

所以该方程的解为 $k=\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x_0}{y_0}$

```
//代码如下
double A, B, C, D, E, F;
if (tan_theta == 0)
{
  printf("直线AB斜率k = %f 为定值", (b2 * x0) / (a2 * y0));
  A = 0;
  B = -a2 * y0;
  C = b2 * x0;
  D = -a2 * x0 * y0;
  E = a2 * b2;
  F = -b2 * x0 * y0;
}
```

二、当tanθ ≠ 0时

此时还需要对θ进行讨论，因为$tan(\frac{\pi}{2}+k\pi)$（$k\in Z$）不存在
类分的越细，解起来心里越有底气。

（一）当tanθ不存在时，即$\theta=\frac{\pi}{2}$或$\frac{3\pi}{2}$时

因为 α = θ - β 所以 $tan\alpha=tan(\theta-\beta)=\frac{sin(\theta-\beta)}{cos(\theta-\beta)}=\frac{cos\beta}{sin\beta}=\frac{1}{tan\beta}$

即：$tan\alpha\cdot tan\beta-1=0$

> > 即：$k_1k_2-1=0$

把(**)代入式得

> > $y_1y_2-y_0(y_1+y_2)+y_0^2-x_1x_2+x_0(x_1+x_2)-x_0^2=0$

把$(1)(2)(3)(4)$代入得

> > $b^2(m^2-a^2k^2)-y_0(2b^2m)-a^2(m^2-b^2)+x_0(-2a^2km)+(y_0^2-x_0^2)(a^2k^2+b^2)=0$

整理得

> > $(a^2-b^2)m^2+2(a^2x_0k+b^2y_0)m+a^2(b^2+x_0^2-y_0^2)k^2+b^2(-a^2+x_0^2-y_0^2)=0$

```
//代码如下
if (abs(tan_theta) >= 10000)
{
  A = a2 - b2;
  B = 2 * a2 * x0;
  C = 2 * b2 * y0;
  D = a2 * (b2 + x0 * x0 - y0 * y0);
  E = 0;
  F = b2 * (-a2 + x0 * x0 - y0 * y0);
} //由于tan Pi/2  为无穷，不存在，我们令θ角正切值绝对值一个很大的数作为θ是否等于Pi/2 或 3Pi/2的判断条件
```

（二）当tanθ存在时，即$\theta \neq \frac{\pi}{2}$或$\frac{3\pi}{2}$时

因为 α = θ - β 所以 $tan\alpha = tan(\theta - \beta) = \frac{tan\theta - tan\beta}{1 + tan\theta \cdot tan\beta}$

即 $tan\theta \cdot tan\alpha \cdot tan\beta + tan\alpha + tan\beta - tan\theta = 0$

> > 即 $tan\theta k_1 k_2 + k_1 + k_2 - tan\theta = 0$

把(*)(**)代入得

> > $tan\theta[y_1 y_2 - y_0(y_1 + y_2) + y_0^2] + y_1 x_2 + y_2 x_1 - x_0(y_1 + y_2) - y_0(x_1 + x_2) + 2x_0 y_0 - tan\theta[x_1 x_2 - x_0(x_1 + x_2) + x_0^2] = 0$

整理得

> > $tan\theta y_1 y_2 - tan\theta x_1 x_2 + y_1 x_2 + y_2 x_1 + (y_1 + y_2)(-y_0 tan\theta - x_0) + (x_1 + x_2)(xtan\theta - y_0) + tan\theta(y_0^2 - x_0^2) + 2x_0 y_0 = 0$

把$(1)(2)(3)(4)(5)$代入得

> > $tan\theta b^2(m^2 - a^2k^2) - tan\theta a^2(m^2 - b^2) + (-2a^2b^2k) + 2b^2m(-y_0 tan\theta - x_0) + (-2a^2km)(xtan\theta - y_0) + (a^2k^2 + b^2)(tan\theta(y_0^2 - x_0^2) + 2x_0 y_0) = 0$

整理得

> > $(a^2 - b^2)tan\theta \cdot m^2 + [2a^2(x_0 tan\theta - y_0)k + 2b^2(y_0 tan\theta + x_0)]m + a^2[tan\theta(b^2 + x_0^2 - y_0^2) - 2x_0 y_0]k^2 + 2a^2b^2k + b^2[tan\theta(-a^2 + x_0^2 - y_0^2) - 2x_0 y_0] = 0$

```
//代码如下
else
{
  A = (a2 - b2) * tan_theta;
  B = 2 * a2 * (x0 * tan_theta - y0);
  C = 2 * b2 * (y0 * tan_theta + x0);
  D = a2 * (tan_theta * (b2 + x0 * x0 - y0 * y0) - 2 * x0 * y0);
  E = 2 * a2 * b2;
  F = b2 * (tan_theta * (-a2 + x0 * x0 - y0 * y0) - 2 * x0 * y0);
}
```

综上所述：若使直线PA、PB倾斜角α + β = θ ，直线AB恒过定点，m 与 k应满足：

> > $f(k,m) = Am^2 + (Bk + C)m + Dk^2 + Ek + F = 0$

设k，m的值域分别为集合K，M的子集

> > **所以$\forall k_0 \in K$，都$\exists m_0 \in M$，使$f(k_0, m_0) = 0$成立 ==> 直线PA、PB倾斜角α + β = θ ==> 直线：$y = k_0 x + m_0$ 过所求定点Q**

若要求Q点的坐标，我们可以**朝着目标来。**
不妨令$k_1 = 0$，$k_2 = 1$ 则$f(0, m_1) = 0$，$f(1, m_2) = 0$
即

- $Am_1^2 + Cm_1 + F = 0$ 解得：m_{11}，m_{12}
  经检验的直线 $y = m_{12}$ 过P (x_0, y_0)，则舍去m_{12}
- $Am_2^2 + (B + C)m_2 + D + E + F = 0$ 解得：m_{21}，m_{22}
  经检验的直线 $y = x + m_{22}$ 过P (x_0, y_0)，则舍去m_{22}

若两条相交的直线都经过同一点，则该点为这两条直线的交点。

所以 直线$y = m_{11}$ 与 直线$y = x + m_{21}$的交点即为所求定点Q
解得：$Q(m_{11} - m_{21}, m_{11})$

```
//代码如下
double x1, x2, m1, m2;
solve_equation(A, C, F, &m1, &m2);
x1 = (abs(m1 - y0) > abs(m2 - y0)) ? m1 : m2;
solve_equation(A, B + C, D + E + F, &m1, &m2);
x2 = (abs(x0 + m1 - y0) > abs(x0 + m2 - y0)) ? m1 : m2;
printf("直线AB恒过定点Q(%f,%f)\n", x1 - x2, x1);
```

证毕

拓展延伸

> 当θ改变时，探究直线AB恒过定点Q的轨迹

由$tan(\pi+\theta)=tan\theta$；在$[\pi,2\pi)$上Q点的位置与$[0,\pi)$相同

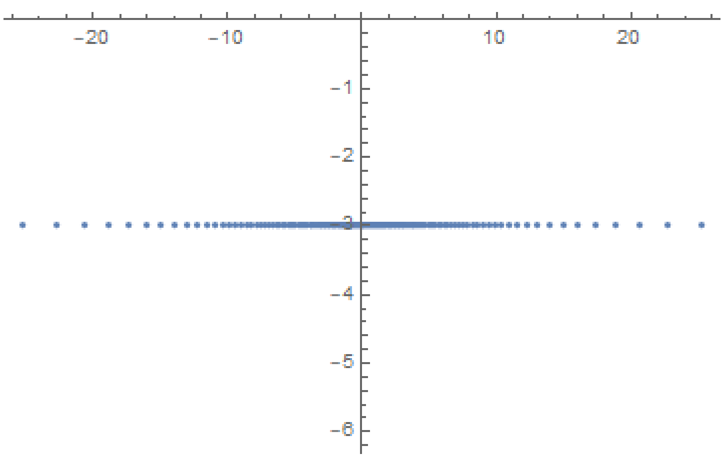
我们通过一个程序只计算$\theta=i^\circ,i\in[1,180)$且$i\in N$时Q点的位置

```
//部分代码如下
for (int i = 1; i < 180; i++)
{
  cout << i << "  ";
  if (i == 90)
    calc(a2, b2, x0, y0, 100000);
  else
    calc(a2, b2, x0, y0, tan(Pi * i / 180));
  cout << endl;
}
```

下面是一些具有代表性意义的典型特征结果

```
取a2 = 2, b2 = 1, x0 = 0, y0 = 1 计算结果如下
```

```
1 {-229.159847,-3.000000},2 {-114.545013,-3.000000},3 {-76.324547,-3.000000},4 {-57.202665,-3.000000},5 {-45.7202
```

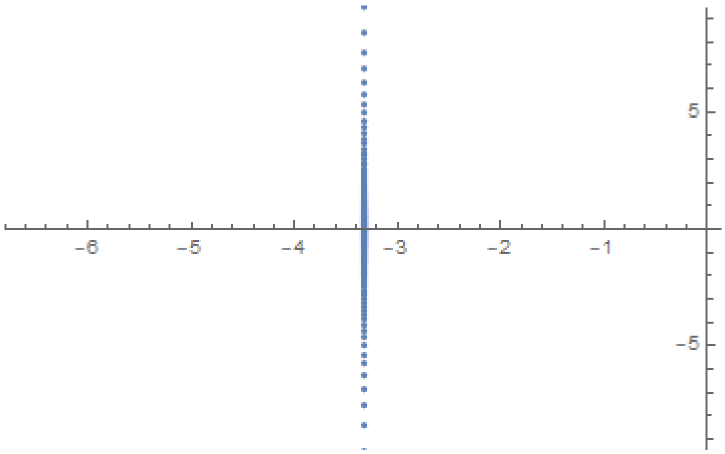


求得 直线为$y+3=0$

$\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x_0}{y_0}=0$

```
取a2 = 4, b2 = 1, x0 = -2, y0 = 0 计算结果如下
```

```
1 {-3.333333,76.386616},2 {-3.333333,38.181671},3 {-3.333333,25.441516},4 {-3.333333,19.067555},5 {-3.333333,15.2
```

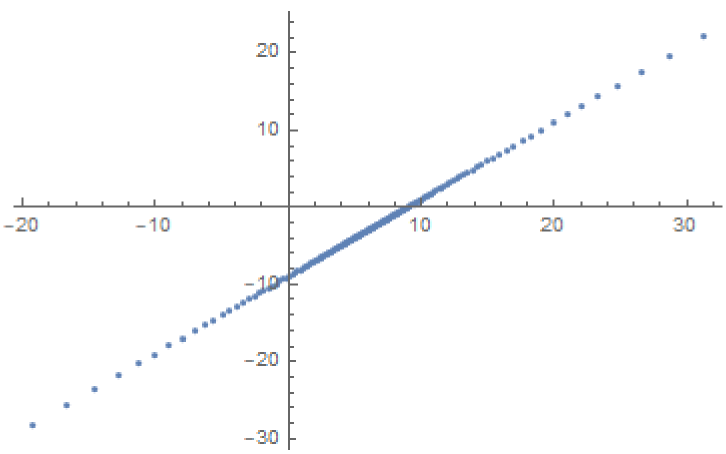


求得 直线为 $3x+10=0$

$$\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x_0}{y_0}=inf$$

取a2 = 6, b2 = 3, x0 = 2, y0 = 1 计算结果如下

```
1 {-223.159847,-232.159847},2 {-108.545013,-117.545013},3 {-70.324547,-79.324547},4 {-51.202665,-60.202665},5 {-3
```

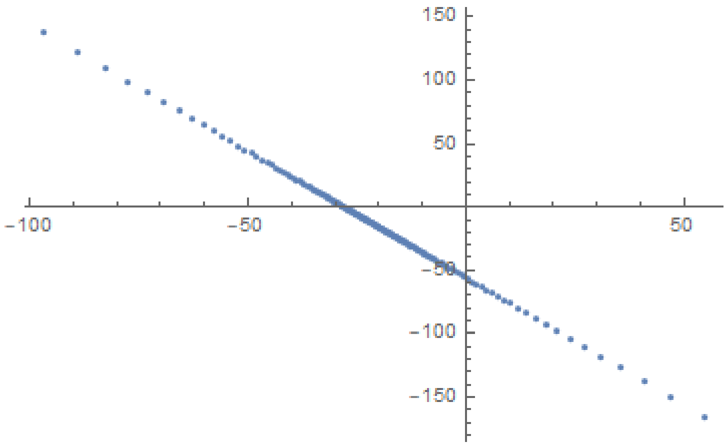


求得 直线为$x-y-9=0$

$$\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x_0}{y_0}=1$$

取a2 = 12, b2 = 16, x0 = 3, y0 = -2 计算结果如下

```
1 {-708.479540,1360.959079},2 {-364.635039,673.270079},3 {-249.973640,443.947281},4 {-192.607995,329.215990},5 {-
```

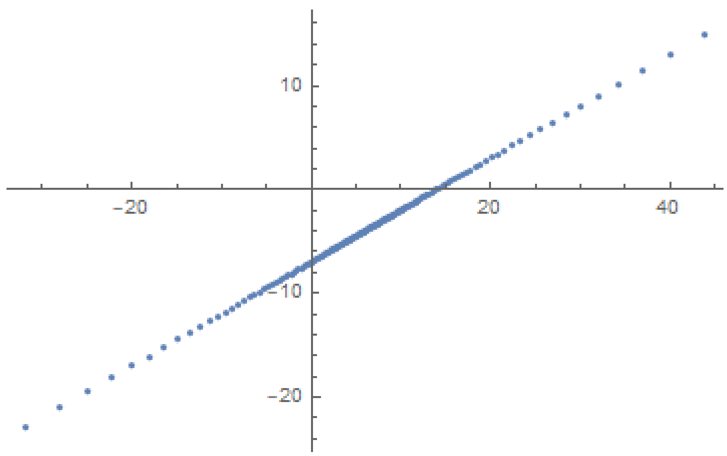


求得 直线为$2x+y+56=0$

$\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x_0}{y_0}=-2$

```
取a2 = 21, b2 = 7, x0 = 3, y0 = 2 计算结果如下
```

```
1 {-337.739770,-175.869885},2 {-165.817520,-89.908760},3 {-108.486820,-61.243410},4 {-79.803998,-46.901999},5 {-6
```



求得 直线为$x-2y-14=0$

$\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x_0}{y_0}=\frac{1}{2}$

我们通过画图，心里特别清楚。显然易得，定点Q的轨迹为一条直线，且斜率与P点坐标和椭圆的系数有关

> > $k=\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x_0}{y_0}$

总结

以后遇到此类问题，便可以直接调取结论，快速解题。正所谓：**观点站得比较高，一眼看穿直接完**

辅助软件：

1. Wolfram Mathematica 12 根据大量点坐标描点画图
2. geogebra 准确绘出函数图像

3. vscode 本文的书写软件
4. Markdown 本文的书写语言
5. C++ 用于完成大量方程的求解