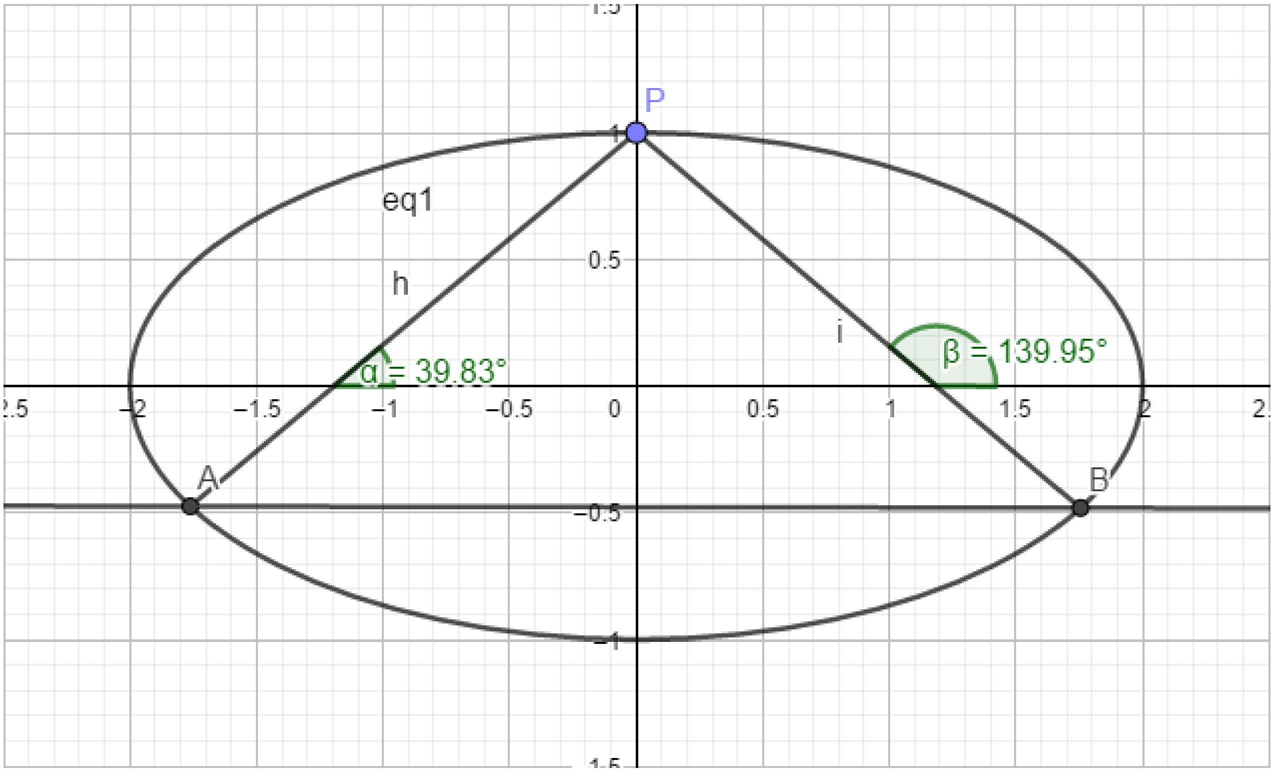
椭圆共点定角弦所得直线性质再探究

> 已知P(x_0,y_0)为椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上一点，PA、PB为椭圆的两条动弦，其倾斜角分别为α、β，且**α-β=θ**，θ∈[0,2π)。试探究直线AB的性质。



大量具有精准良好的计算结果均表明：

1. **当θ = 0时，直线AB为椭圆的上各个点的切线**
2. **当θ∈(0,π/2)∪(π/2,π)时，直线AB为椭圆内部某小椭圆上各个点的切线**
3. **当θ = π/2时，直线AB恒过定点**

以下为证明过程
（数学手算证明，C++程序辅助计算）

设直线AB：$y=kx+m$，$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，PA、PB斜率为$k_1=tan\alpha$、$k_2=tan\beta$，直线AB恒过定点Q

联立$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\\ y=kx+m\end{cases}$ 得： $(a^2k^2+b^2)x^2+2a^2kmx+a^2(m^2-b^2)=0$

- $x_1+x_2=\frac{-2a^2km}{a^2k^2+b^2}$ **(1)**
- $x_1x_2=\frac{a^2(m^2-b^2)}{a^2k^2+b^2}$ **(2)**

- > > $y_1+y_2=k(x_1+x_2)+2m=\frac{2b^2m}{a^2k^2+b^2}$ **(3)**
- > > $y_1y_2=(kx_1+m)(kx_2+m)=\frac{b^2(m^2-a^2k^2)}{a^2k^2+b^2}$ **(4)**

因为 $k_1=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0},k_2=\frac{y_2-y_0}{x_2-x_0}$
所以

- $k_1\cdot k_2=\frac{(y_1-y_0)(y_2-y_0)}{(x_1-x_0)(x_2-x_0)}=\frac{y_1y_2-y_0(y_1+y_2)+y_0^2}{x_1x_2-x_0(x_1+x_2)+x_0^2}$ **(*)**

当$\theta=\frac{\pi}{2}$ 时

因为 α = θ + β 所以 $tan\alpha=tan(\theta+\beta)=\frac{sin(\theta+\beta)}{cos(\theta+\beta)}=\frac{cos\beta}{-sin\beta}=-\frac{1}{tan\beta}$

即：$tan\alpha\cdot tan\beta+1=0$

> > 即：$k_1k_2-1=0$

把(**)代入式得

> > $y_1y_2-y_0(y_1+y_2)+y_0^2+x_1x_2-x_0(x_1+x_2)+x_0^2=0$

把$(1)(2)(3)(4)$代入得

> > $b^2(m^2-a^2k^2)-y_0(2b^2m)+a^2(m^2-b^2)-x_0(-2a^2km)+(y_0^2+x_0^2)(a^2k^2+b^2)=0$

整理得

> > $(a^2+b^2)m^2+2(a^2x_0k-b^2y_0)m+a^2(-b^2+x_0^2+y_0^2)k^2+b^2(-a^2+x_0^2+y_0^2)=0$

```
//代码如下
A = a2 + b2;
B = 2 * a2 * x0;
C = -2 * b2 * y0;
D = a2 * (-b2 + x0 * x0 + y0 * y0);
E = 0;
F = b2 * (-a2 + x0 * x0 + y0 * y0);
```

所以 若使直线PA、PB倾斜角α - β = θ，直线AB恒过定点，m 与 k应满足：

> > $f(k,m)=Am^2+(Bk+C)m+Dk^2+Ek+F=0$

设k，m的值域分别为集合K，M的子集

> **所以$\forall k_0 \in K$，都$\exists m_0 \in M$，使$f(k_0, m_0) = 0$成立 ==> 直线PA、PB倾斜角α - β = θ ==> 直线：$y = k_0 x + m_0$ 过所求定点Q**

若要求Q点的坐标，我们可以**朝着目标来。**
不妨令$k_1 = 0$，$k_2 = 1$ 则$f(0, m_1) = 0$，$f(1, m_2) = 0$
即

- $Am_1^2 + Cm_1 + F = 0$ 解得：m_{11}，m_{12}
  经检验的直线 $y = m_{12}$ 过P (x_0, y_0)，则舍去m_{12}
- $Am_2^2 + (B + C)m_2 + D + E + F = 0$ 解得：m_{21}，m_{22}
  经检验的直线 $y = x + m_{22}$ 过P (x_0, y_0)，则舍去m_{22}

若两条相交的直线都经过同一点，则该点为这两条直线的交点。

所以 直线$y = m_{11}$ 与 直线$y = x + m_{21}$的交点即为所求定点Q
解得：$Q(m_{11} - m_{21}, m_{11})$

```
//代码如下
double x1, x2, m1, m2;
solve_equation(A, C, F, &m1, &m2);
x1 = (abs(m1 - y0) > abs(m2 - y0)) ? m1 : m2;
solve_equation(A, B + C, D + E + F, &m1, &m2);
x2 = (abs(x0 + m1 - y0) > abs(x0 + m2 - y0)) ? m1 : m2;
printf("直线AB恒过定点Q(%f,%f)\n", x1 - x2, x1);
```

证毕