二叉树

树

05-A

越到你的高度上——那是我的深度！

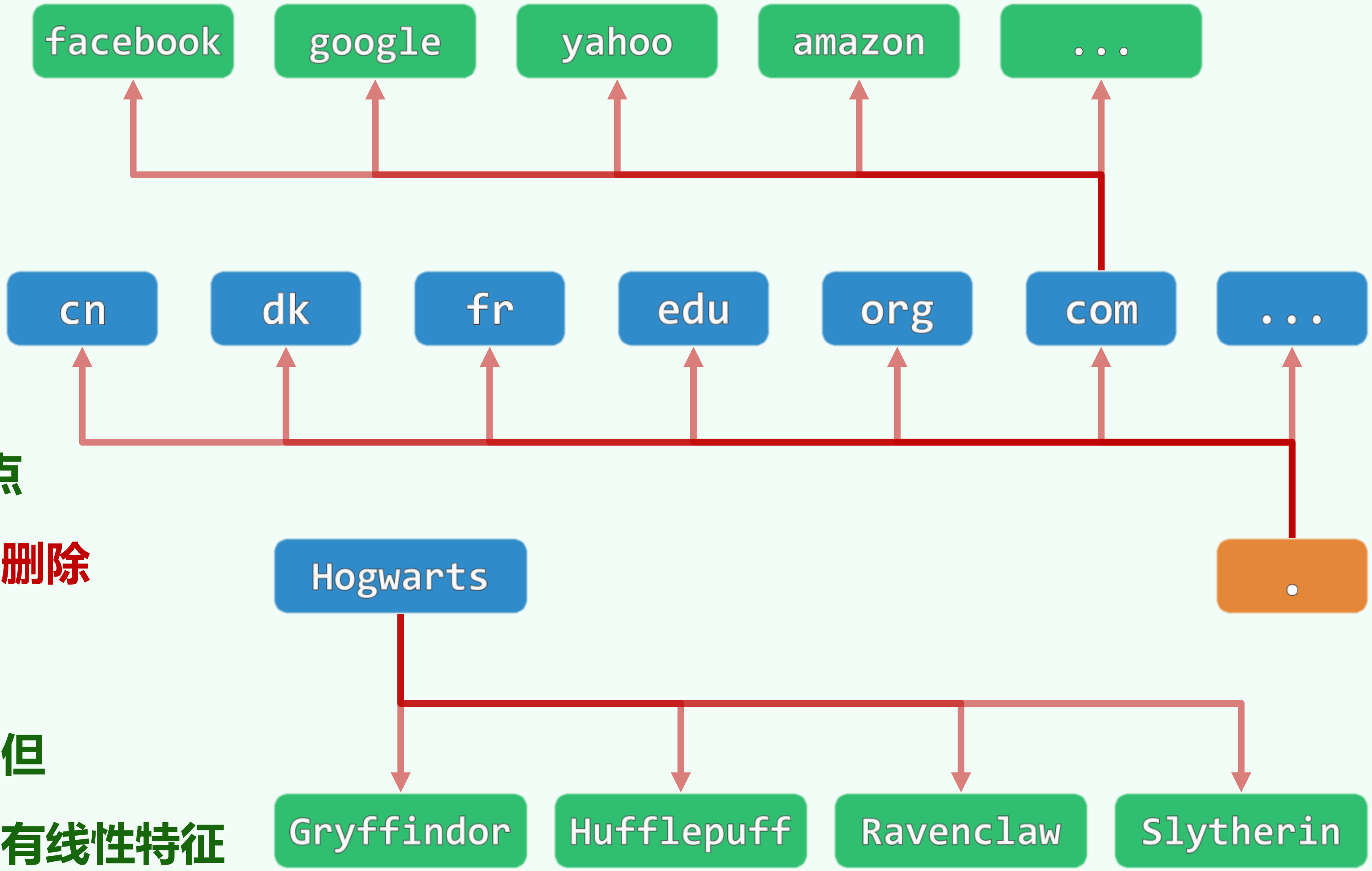
藏在你的纯洁里——那是我的天真！

Two roads diverged in a yellow wood
And sorry I could not travel both

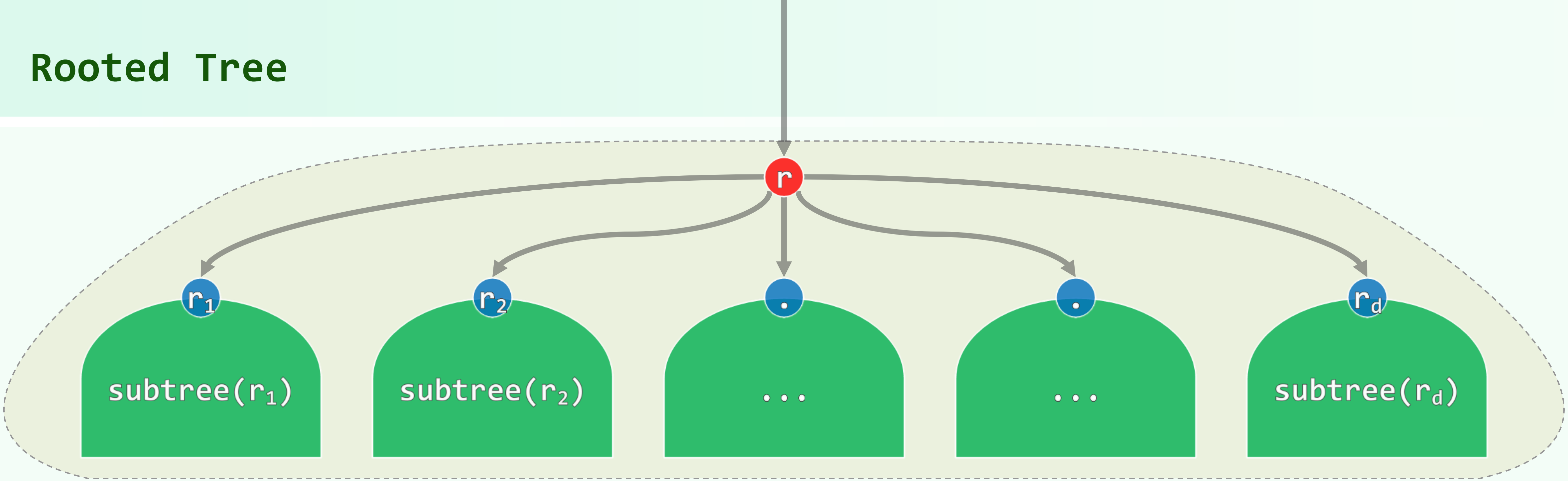
邓俊辉
deng@tsinghua.edu.cn

动机

- 【应用】层次结构的表示
  - 表达式
  - 文件系统
  - URL ...
- 【数据结构】综合性
  - 兼具Vector和List的优点
  - 兼顾高效的查找、插入、删除
- 【半线性】
  - 不再是简单的线性结构，但
  - 在确定某种次序之后，具有线性特征



Rooted Tree



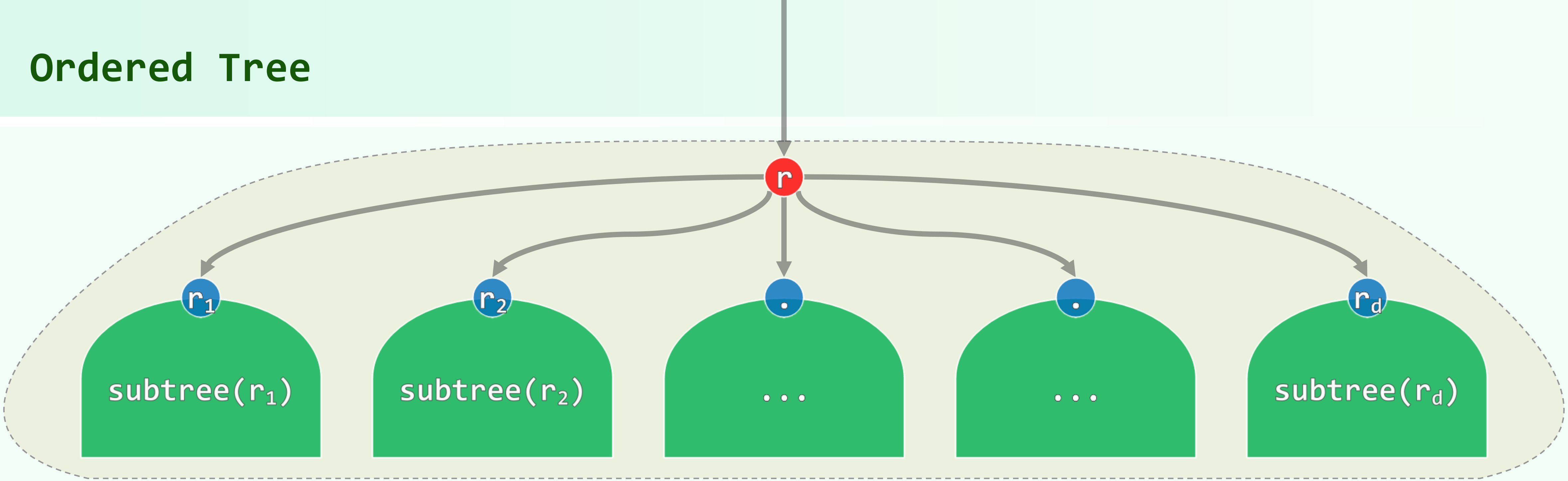
❖ 树是极小连通图、极大无环图 $\mathcal{T} = (V;\ E)$：节点数 $n = |V|$，边数 $e = |E|$

❖ 指定任一节点 $r \in V$ 作为**根**后，$\mathcal{T}$ 即称作**有根树**

❖ 若 $\mathcal{T}_1,\ \mathcal{T}_2,\ \mathcal{T}_3,\ \ldots,\ \mathcal{T}_d$ 为有根树，则 $\mathcal{T} = \left((\bigcup_i V_i) \cup \{r\},\ (\bigcup_i E_i) \cup \{\ \langle r, r_i \rangle \mid 1 \le i \le d\ \} \right)$ 也是

❖ 相对于 $\mathcal{T}$，$\mathcal{T}_i$ 称作以 r_i 为根的**子树** (subtree rooted at r_i)，记作 $\mathcal{T}_i = subtree(r_i)$

Ordered Tree



❖ r_i 称作 r 的**孩子**（child），r_i 之间互称**兄弟**（sibling）

r 为其**父亲**（parent），$d = degree(r)$ 为 r 的（出）**度**（degree）

❖ 可归纳证明：$e = \sum_{v \in V} degree(v) = n - 1 = \Theta(n)$

故在衡量相关复杂度时，可以 n 作为参照

❖ 若指定 T_i 作为 T 的第 i 棵子树，r_i 作为 r 的第 i 个孩子，则 T 称作**有序树**

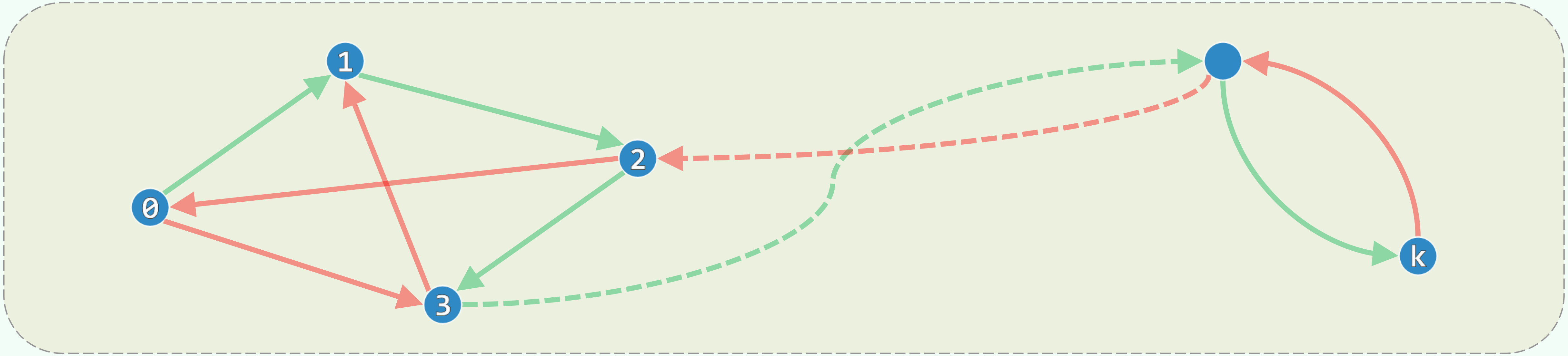
路径 + 环路

❖ V 中的 $k+1$ 个节点，通过 V 中的 k 条边依次相联，构成一条**路径/通路**（path）

$$\pi \ = \ \{ \ (v_0, v_1), \ (v_1, v_2), \ (v_2, v_3), \ \dots, \ (v_{k-1}, v_k) \ \}$$

❖ 路径**长度**即所含**边**数：$|\pi| \ = \ k$ //注意：早期文献，多以节点数为长度

❖ **环路**（cycle/loop）：$v_k \ = \ v_0$ //如果覆盖所有节点各一次，则称作周游（tour）



连通 + 无环

❖ 连通图：节点之间均有路径（connected）

不含环路，称作无环图（acyclic）

❖ 树 = 无环连通图

= 极小连通图

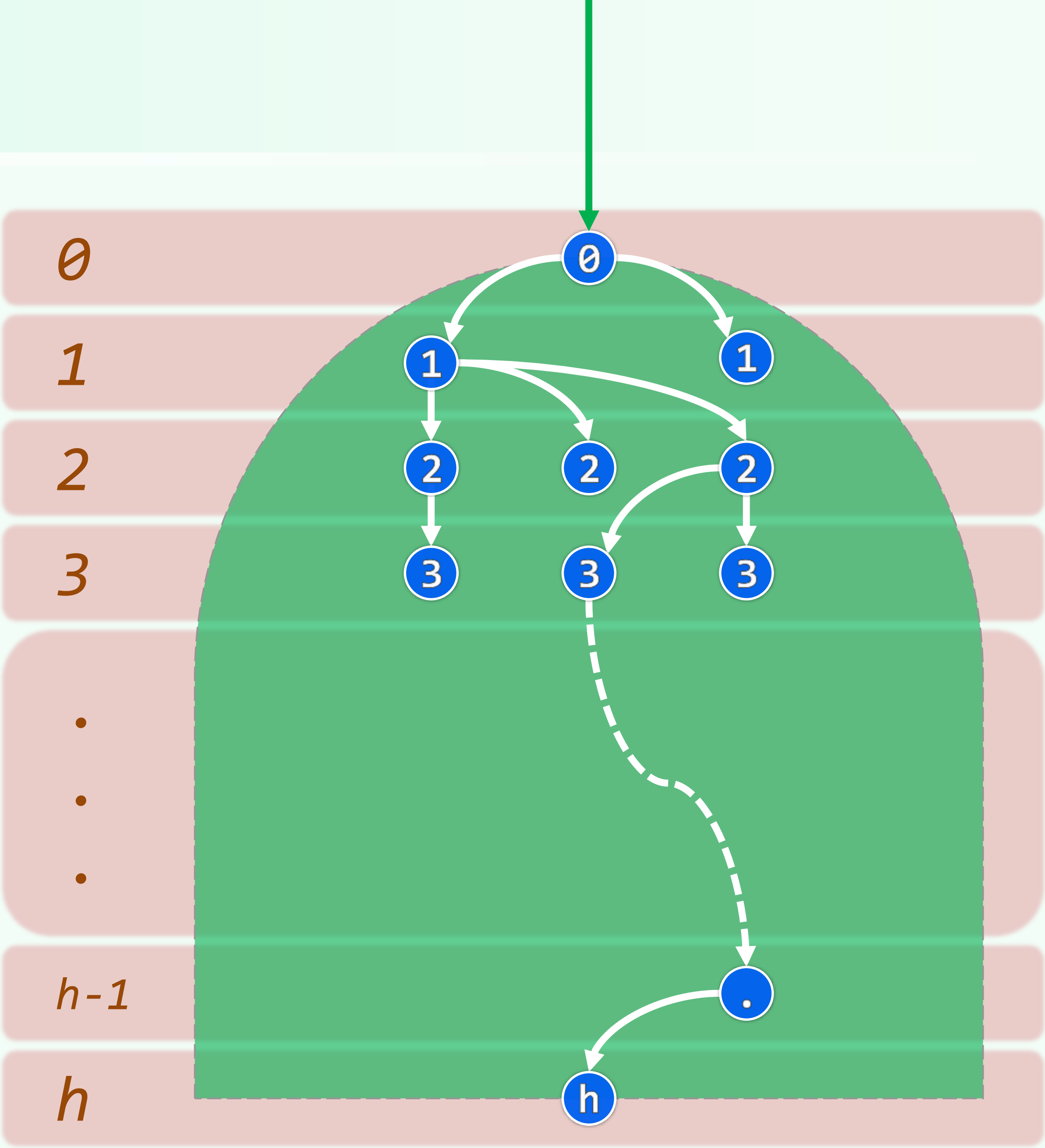
= 极大无环图

❖ 故任一节点v与根之间存在唯一路径

path(v, r) = path(v)

❖ 于是以|path(v)|为指标

可对所有节点做等价类划分...



深度 + 层次

❖ 不致歧义时，路径、节点和子树可**相互指代**

- path(v) ~ v ~ subtree(v)

❖ v的**深度**：depth(v) = |path(v)|

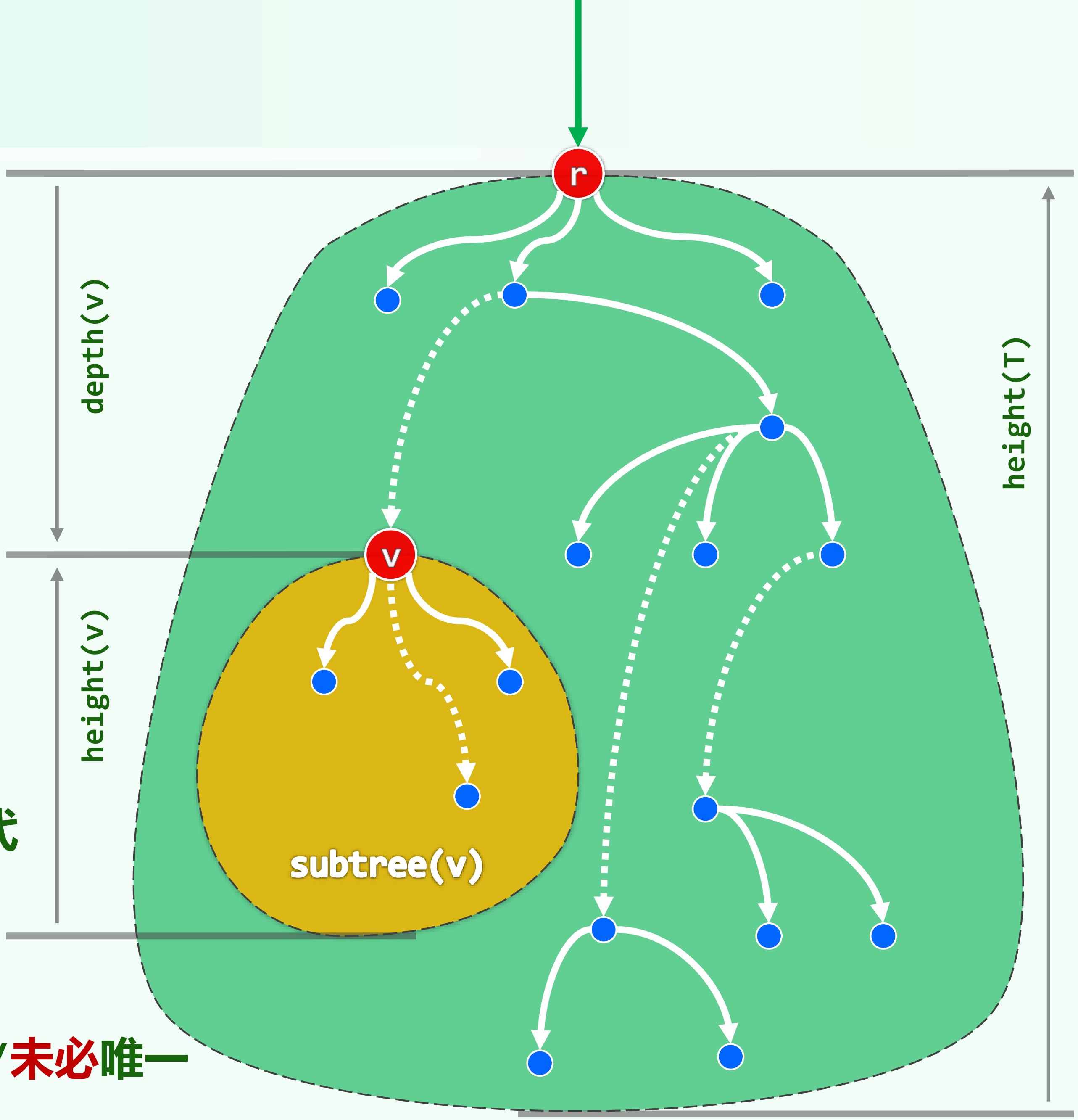
❖ path(v)上节点，均为v的**祖先**（ancestor）

v是它们的**后代**（descendent）

❖ 其中除自身以外，是**真**（proper）祖先/后代

❖ **半线性**：

在任一深度，v的祖先/后代若存在，则**必然**/**未必**唯一



深度 + 层次

❖ 根节点是所有节点的**公共祖先**，深度为0

❖ 没有后代的节点称作**叶子**（leaf）

❖ 所有叶子深度中的最大者

称作（子）树（根）的**高度**

- height(v) = height(subtree(v))

❖ 特别地，**空树**的高度取作-1

❖ depth(v) + height(v) ≤ height(T)

何时取等号？