二叉树

下界：代数判定树

05-K1

要是你达到一个界线，你不能越过它，那你就会倒霉；
但是你越过了它，也许你会更倒霉。

就好比假设有四样东西，我们正在寻找其中的一个。不管它在哪里，如果我们一开始就知道这样东西在哪里的话，那么剩下的就不是什么问题了。又或者我们可以首先找到其余的三样东西，那么剩下的显然就是第四个了。

邓俊辉
deng@tsinghua.edu.cn

难度与下界

❖ 由前述实例可见，同一问题的不同算法，复杂度可能相差悬殊

❖ 在可解的前提下，可否谈论问题的**难度**？如何比较不同问题的难度？

❖ 问题P若存在算法，则所有算法中**最低**的复杂度称为P的难度

❖ 为什么要确定问题的难度？给定问题P，如何确定其难度？

❖ 两个方面着手：设计复杂度更低的算法 + 证明更高的问题难度下界

❖ 一旦算法的复杂度达到难度下界，则说明就大$\mathcal{O}$记号的意义而言，算法已经最优

❖ 例如，排序问题下界为$\Omega(n\log n)$，而且是**紧**的...

时空性能 + 稳定性

❖ 多种角度估算的时间、空间复杂度

- 最好 / best-case
- 最坏 / worst-case
- 平均 / average-case
- 分摊 / amortized

❖ 其中，对最坏情况的估计最保守、最稳妥

因此，首先应考虑**最坏情况最优**的算法

//worst-case optimal

❖ 排序所需的时间，主要取决于

- 关键码比较次数 / # {key comparison}
- 元素交换次数 / # {data swap}

❖ 就地 (in-place) ：

除输入数据本身外，只需$O(1)$附加空间

❖ 稳定 (stability) ：

关键码雷同的元素，在排序后相对位置保持

最坏情况最优 + 基于比较

❖ 排序算法，最快能够有多快?

- 语境1：就最坏情况最优而言
- 语境2：就某一大类主流算法而言...

❖ 基于比较的算法（comparison-based algorithm）

算法执行的进程，取决于一系列的数值（这里即关键码）比对结果

- 比如，max() 和 bubbleSort()

❖ 任何CBA在最坏情况下，都需$\Omega(n\log n)$时间才能完成排序

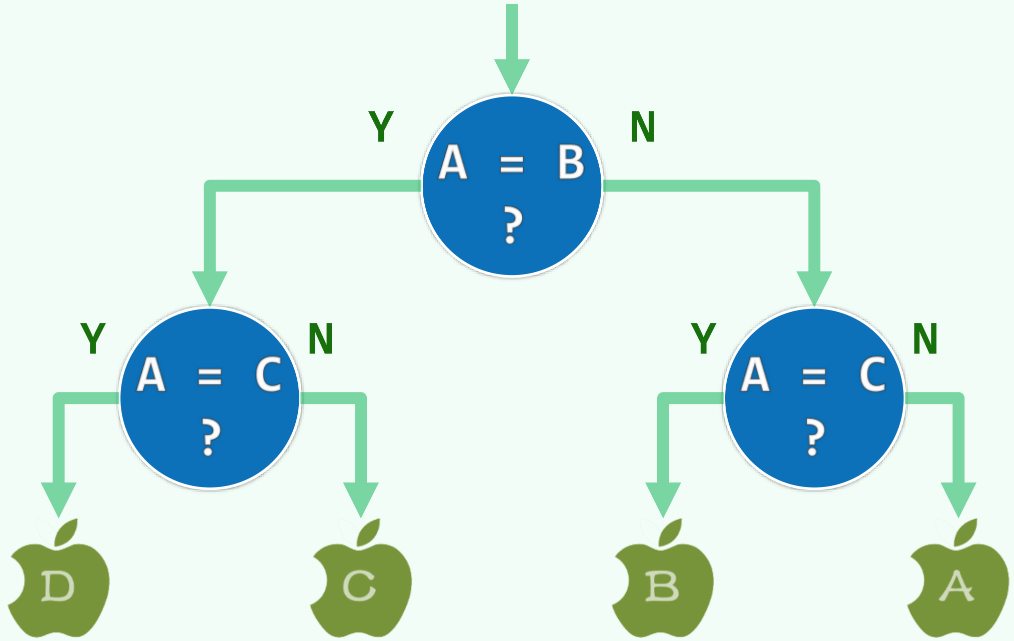
判定树

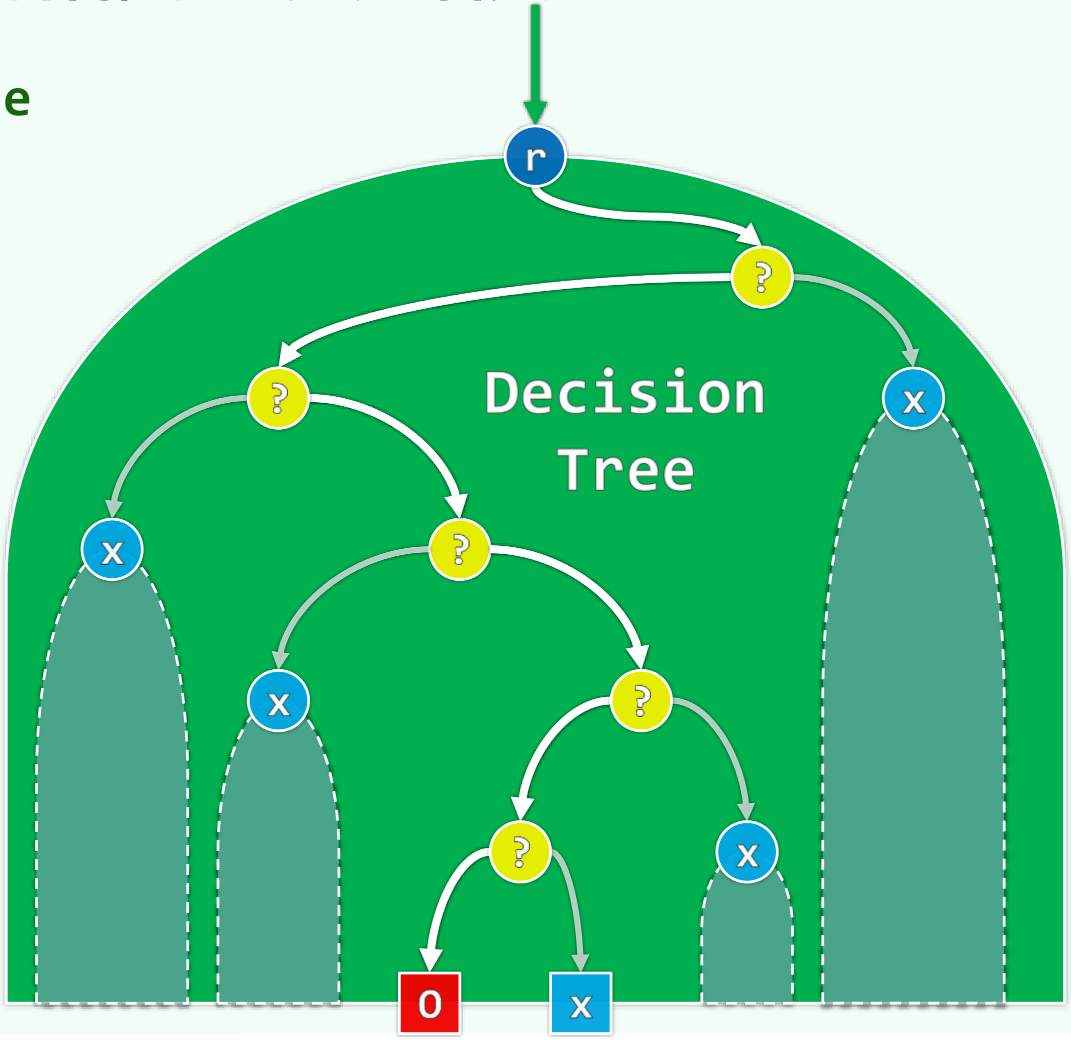
❖ 经2/4次称量，必可从4/16只苹果中找出唯一的重量不同者；称量次数可否更少？

❖ 每个CBA算法都对应于一棵Algebraic Decision Tree

　　每一可能的输出，都对应于至少一个叶节点

　　每一次运行过程，都对应于起始于根的某条路径



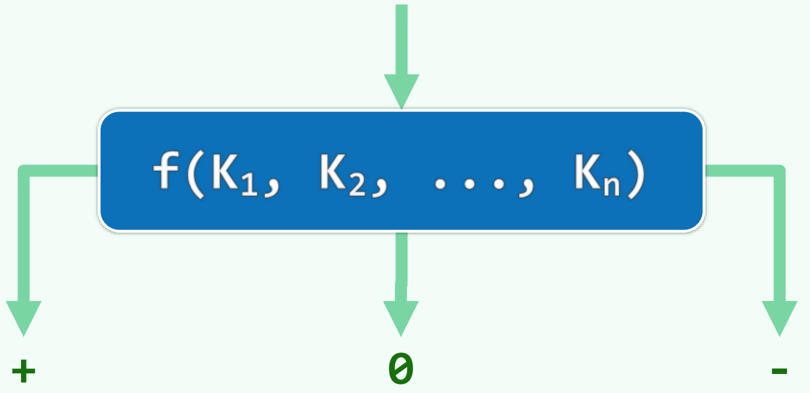


代数判定树

❖ Algebraic Decision Tree

- 针对“比较-判定”式算法的计算模型
- 给定输入的规模，将所有可能的输入

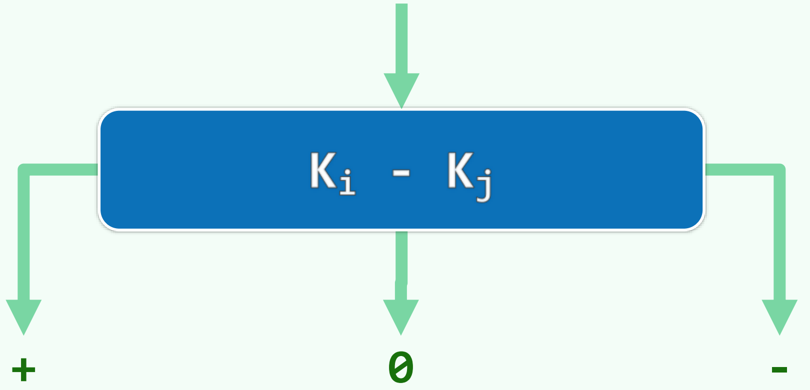
  所对应的一系列判断表示出来



❖ 代数判定：

- 使用某一常次数代数多项式

  将任意一组关键码做为变量，对多项式求值
- 根据结果的符号，确定算法推进方向



❖ Comparison Tree：最简单的ADT，二元一次多项式，形如：$K_i - K_j$

下界：Ω(nlogn)

❖ 比较树是三叉树（ternary tree）

内部节点至多三个分支（+|0|-）

❖ 每一叶节点，各对应于

- 起自根节点的一条通路
- 某一可能的运行过程
- 运行所得的输出

❖ 叶节点深度 ~ 比较次数 ~ 计算成本

❖ 树高 ~ 最坏情况时的计算成本

树高的下界 ~ 所有CBA的时间复杂度下界

❖ 对于排序算法所对应的ADT，必有$N \geq n!$

- ADT的每一输出（叶子），对应于某一置换

  依此置换，可将输入序列转换为有序序列
- 算法的输出，须覆盖所有可能的输入

❖ 包含N个叶节点的排序算法ADT，高度不低于

$$\log_3 N \geq \log_3 n!$$

$$= \log_3 e \cdot [n \ln n - n + \mathcal{O}(\ln n)] = \Omega(n \cdot \log n)$$

❖ 这一结论，还可进一步推广到

理想平均情况、随机情况（概率≥25%）...