14-B3

排序

选取：QuickSelect

大胆猜测，小心求证

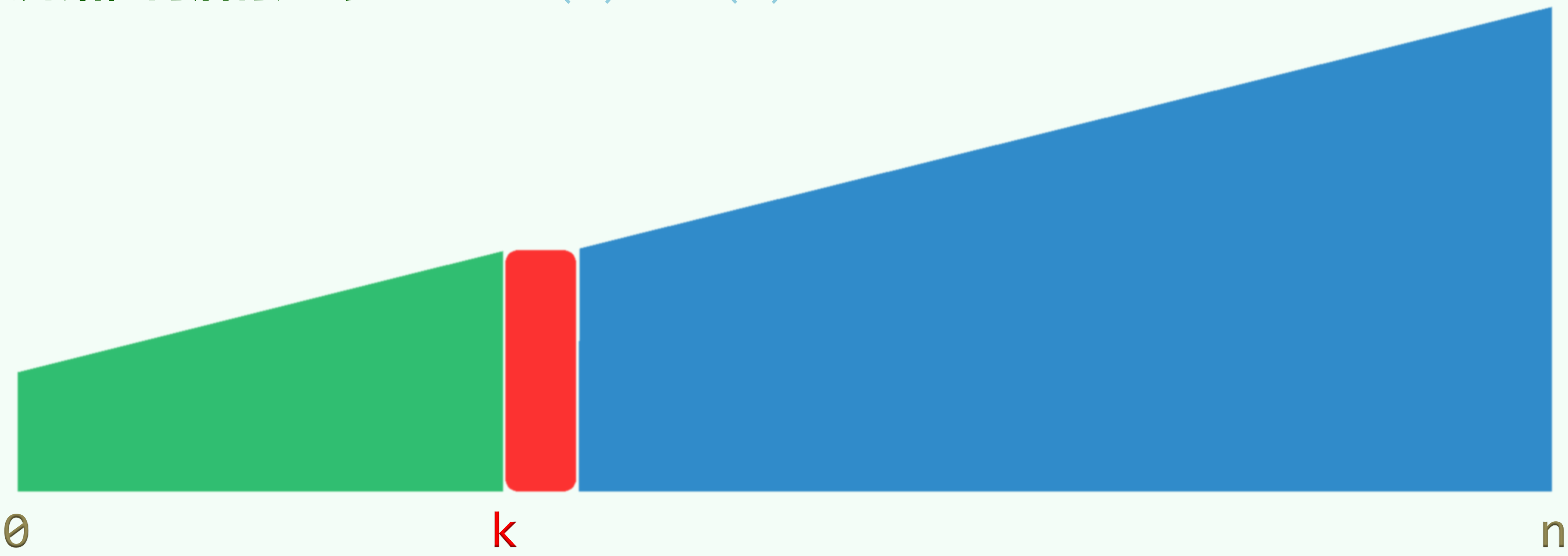
他们在一起谈了一下之后，就转过身来向我表示敬意，对此，我的老师微微一笑；此外，他们还给了我更多的荣誉，因为他们把我列入他们的行列，结果，我就是这样赫赫有名的智者中的第六位。

邓俊辉
deng@tsinghua.edu.cn

尝试：蛮力

❖ 对A排序 //$\mathcal{O}$(nlogn)

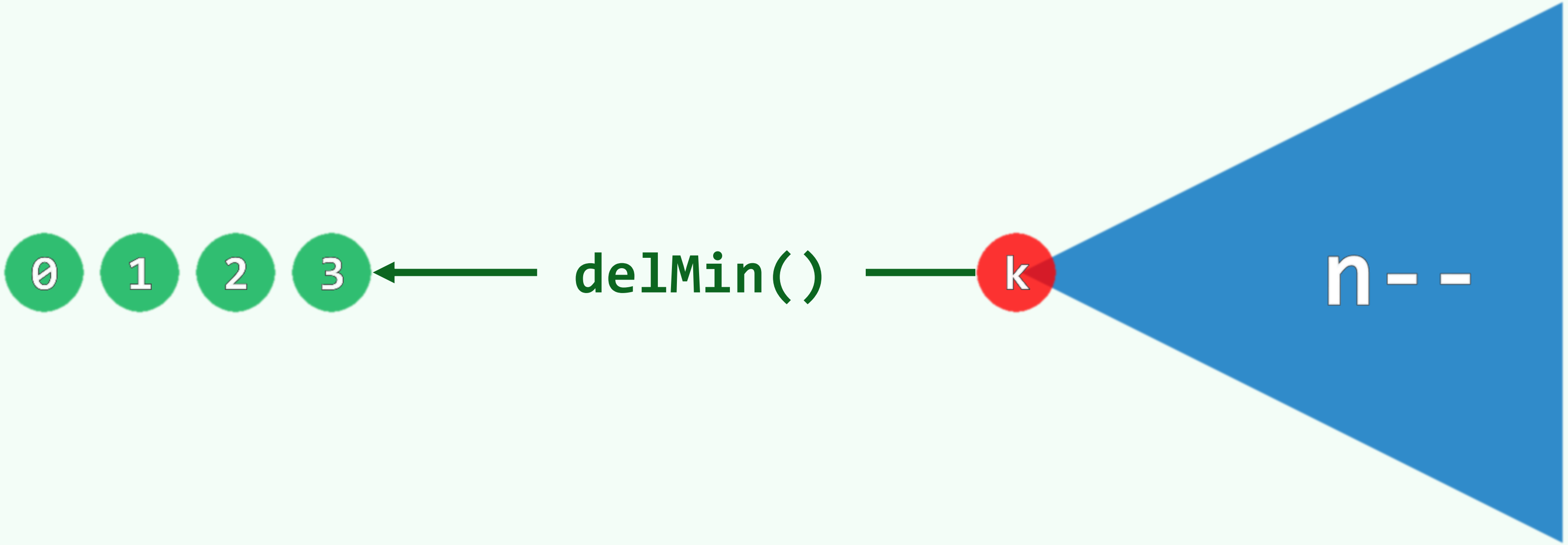
从首元素开始，向后行进k步 //$\mathcal{O}$(k) = $\mathcal{O}$(n)



尝试：堆（A）

❖ **将所有元素组织为小顶堆** //𝒪(n)

连续调用k+1次delMin() //𝒪(klogn)

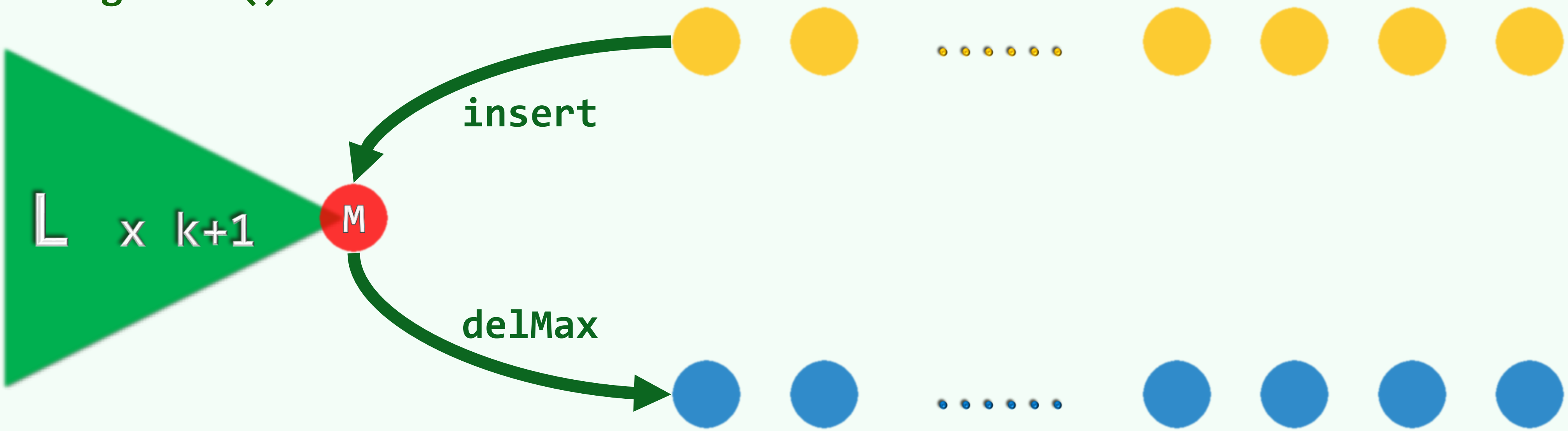


尝试：堆（B）

❖ `L = heapify( A[0, k] )` //任选 k+1 个元素，组织为大顶堆：$\mathcal{O}(k)$

❖ `for each i in (k, n)` //$\mathcal{O}(n - k)$

```
    L.insert( A[i] )  //O(logk)
    L.delDelMax()
```



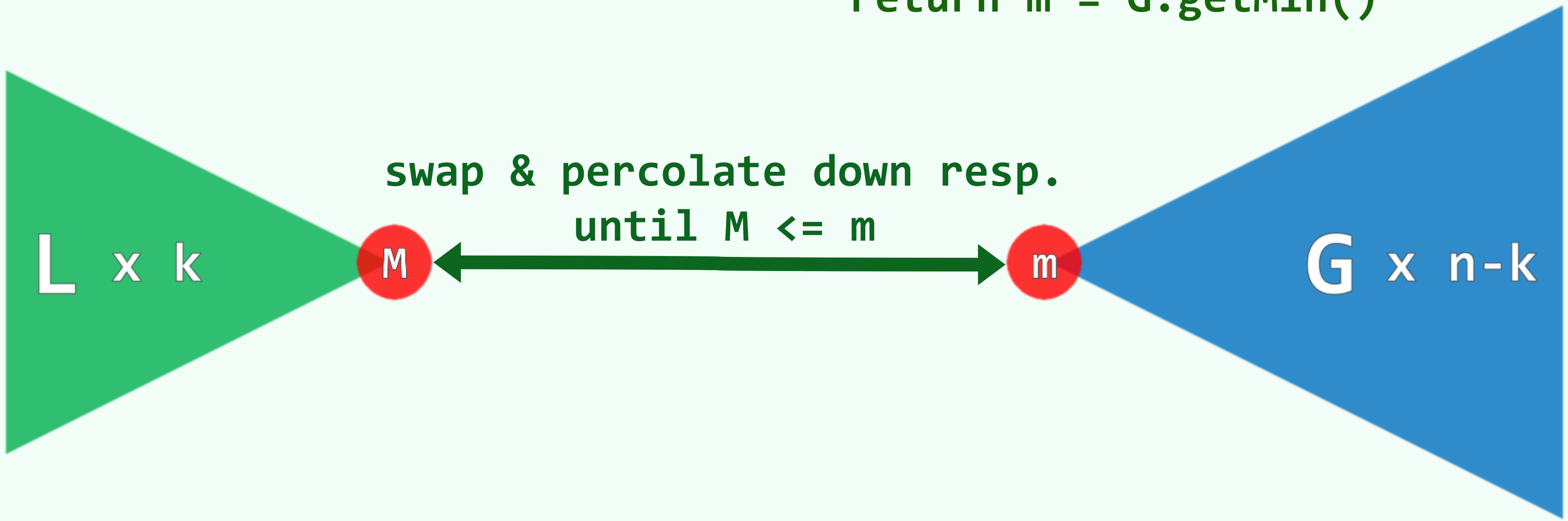
尝试：堆（C）

❖ 将输入任意划分为规模为k、n-k的子集

分别组织为大、小顶堆

//$\mathcal{O}$(k + (n-k)) = $\mathcal{O}$(n)

```
❖ while ( m < M ) //O(min(k, n - k))
      swap( m, M )
      L.percolateDown() //O(logk)
      G.percolateDown() //O(log(n - k))
   return m = G.getMin()
```



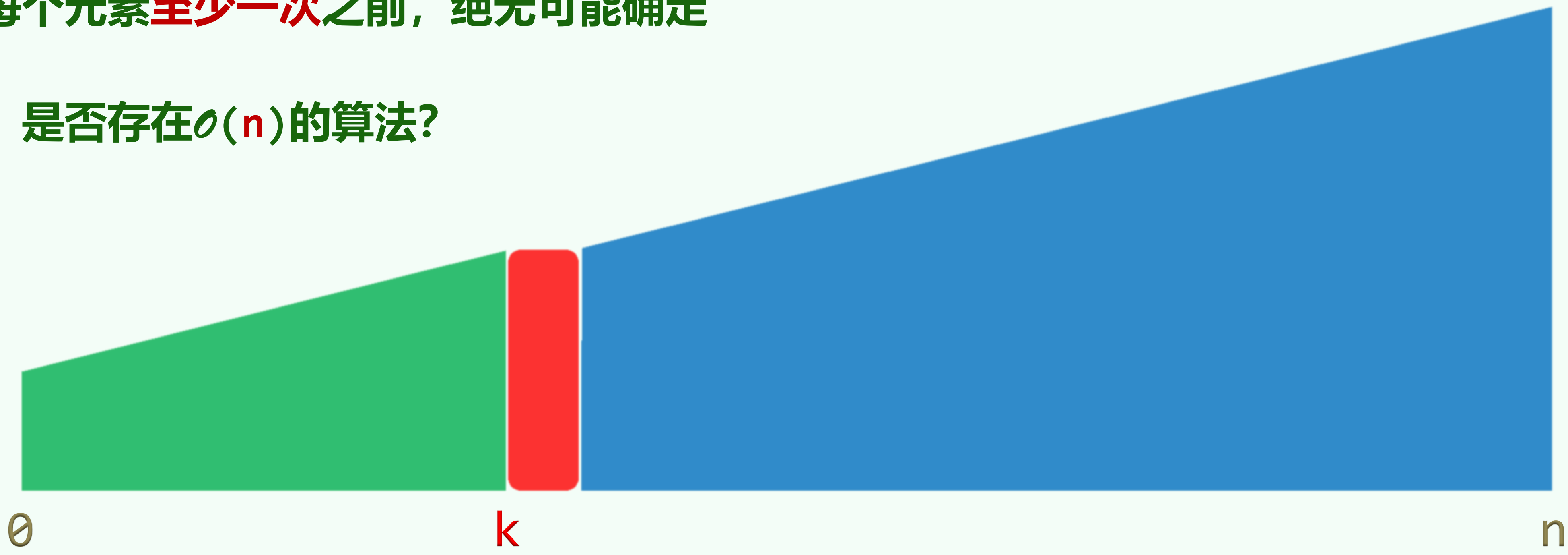
下界与最优

❖ 是否存在**更快**的算法？当然，最快也不至于快过Ω(n)！

❖ 所谓**第**k小，是相对于序列**整体**而言，所以...

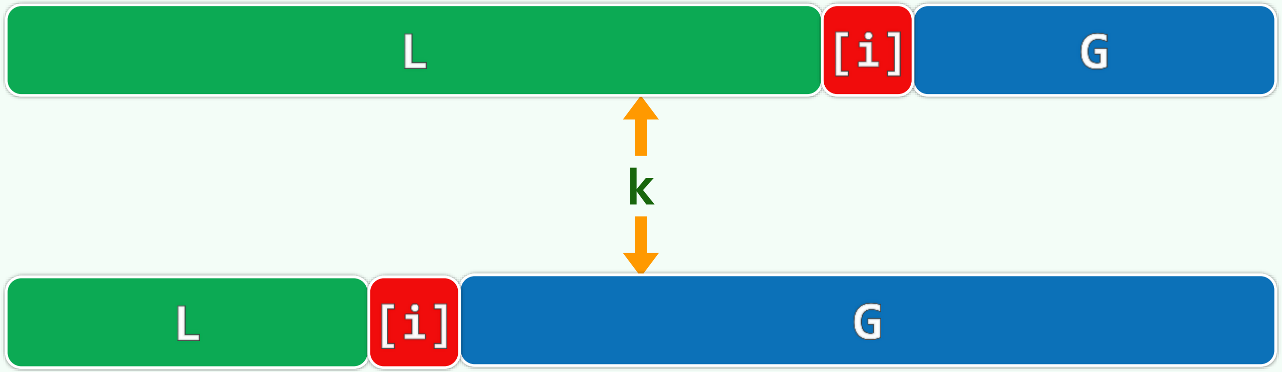
在访问每个元素**至少一次**之前，绝无可能确定

❖ 反过来，是否存在$\mathcal{O}$(n)的算法？



quickSelect()

```
template <typename T> void quickSelect( Vector<T> & A, Rank k ) {
   for ( Rank lo = 0, hi = A.size() - 1; lo < hi;  ) {
      Rank i = lo, j = hi; T pivot = A[lo]; //大胆猜测
      while ( i < j ) { //小心求证：O(hi - lo + 1) = O(n)
         while ( i < j  &&  pivot <= A[j] ) j--;  A[i] = A[j];
         while ( i < j  &&  A[i] <= pivot ) i++;  A[j] = A[i];
      } //assert: quit with i == j
      A[i] = pivot;
      if ( k <= i ) hi = i - 1;
      if ( i <= k ) lo = i + 1;
   } //A[k] is now a pivot
}
```



期望性能

❖ 记期望的比较次数为 $T(n)$

$$T(1) = 0,\ T(2) = 1,\ \ldots$$

❖ 可以证明：$T(n) = \mathcal{O}(n)\ \ \ldots$

$$T(n) \;=\; (n-1) \;+\; \frac{1}{n} \times \sum_{k=0}^{n-1} \max\{T(k), T(n-k-1)\} \;\leq\; (n-1) \;+\; \frac{2}{n} \times \sum_{k=n/2}^{n-1} T(k)$$

❖ 事实上，不难验证：$T(n) \;<\; 4 \cdot n\ \ \ldots$

$$T(n) \;\leq\; (n-1) \;+\; \frac{2}{n} \times \sum_{k=n/2}^{n-1} 4k \;\leq\; (n-1) + 3n \;<\; 4n$$