

图

拓扑排序：零入度算法

10-F1

一吕二马三典韦，四关五赵六张飞，七许八黄九姜维

邓俊辉

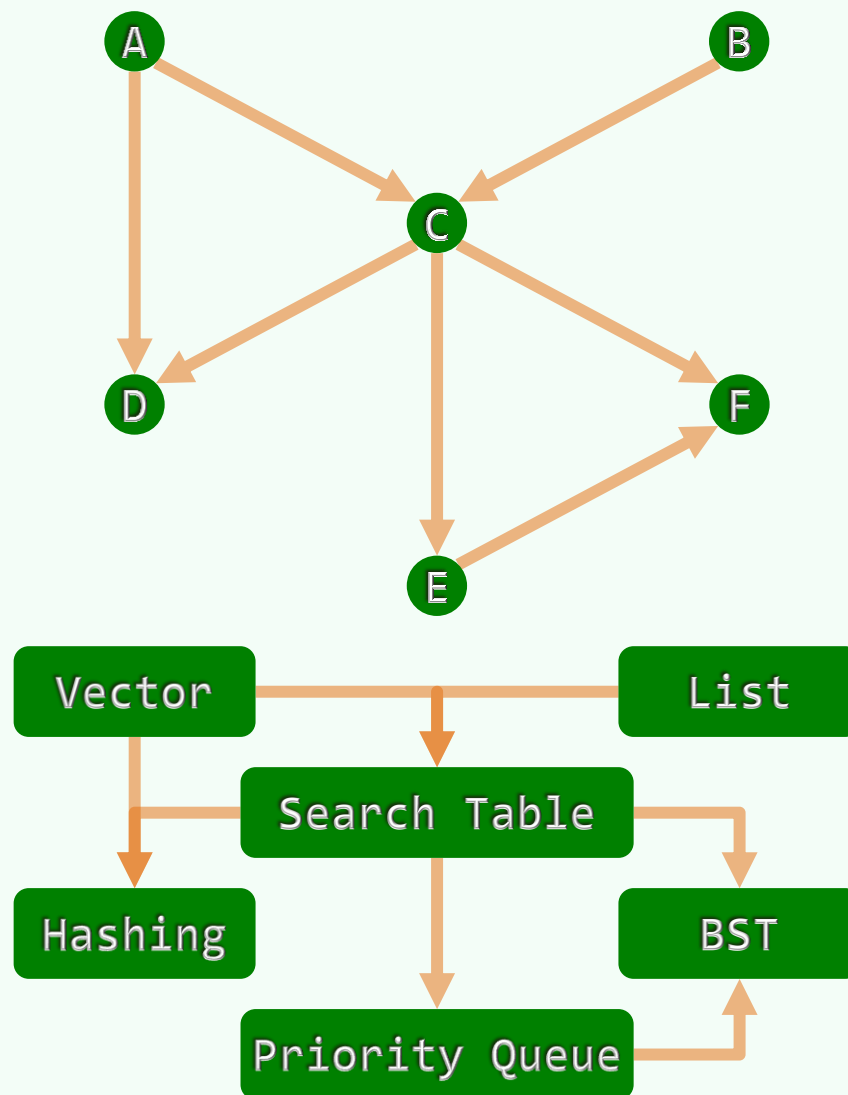
deng@tsinghua.edu.cn

有向无环图

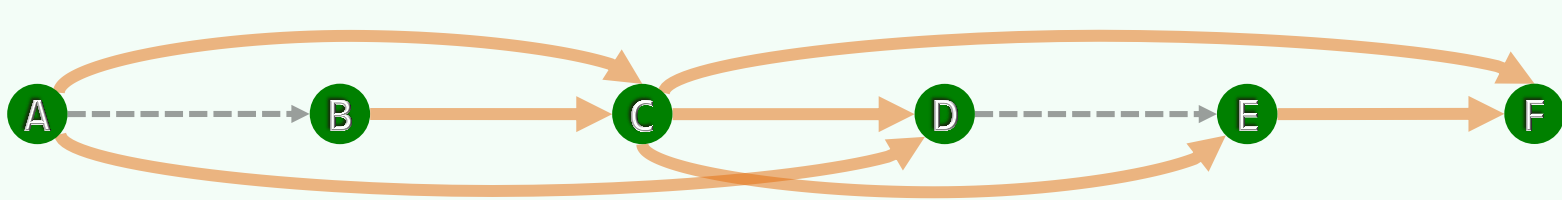
❖ Directed Acyclic Graph

❖ 应用

- 类派生和继承关系图中，是否存在循环定义
- 操作系统中相互等待的一组线程，如何调度
- 给定一组相互依赖的课程，设计可行的培养方案
- 给定一组相互依赖的知识点，设计可行的教学进度方案
- 项目工程图中，设计可串行施工的方案
- email系统中，是否存在自动转发或回复的回路
- ...



拓扑排序



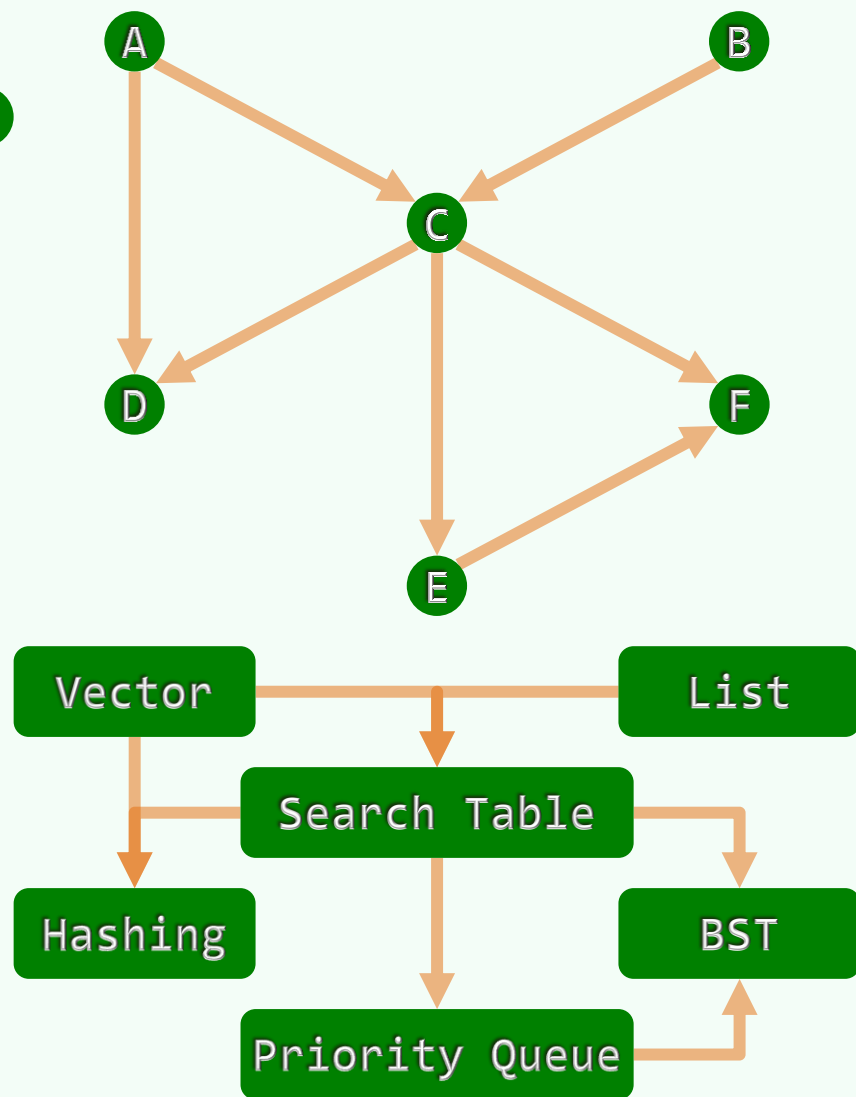
❖ 任给有向图G（不一定是DAG），尝试

将所有顶点排成一个**线性序列**，使其次序须与原图**相容**

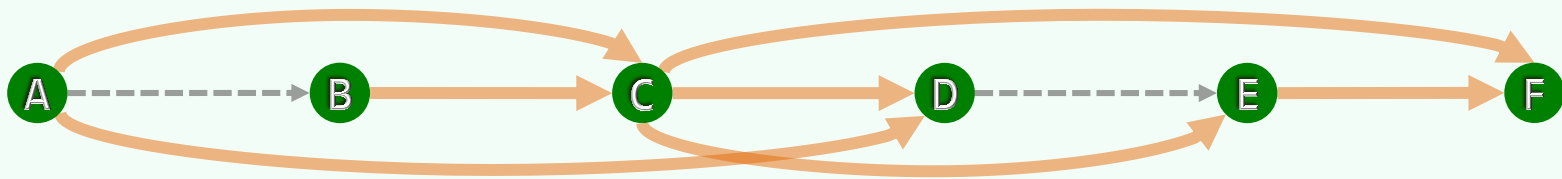
（每一顶点都不会通过边指向**前驱**顶点）

❖ 接口要求

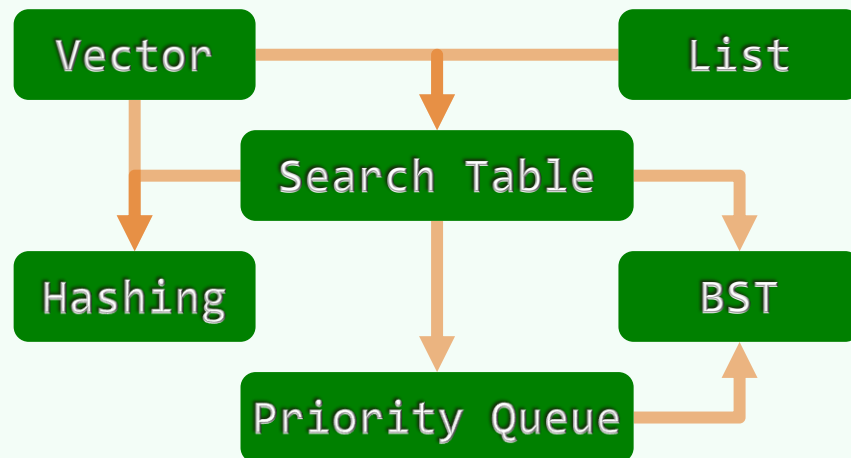
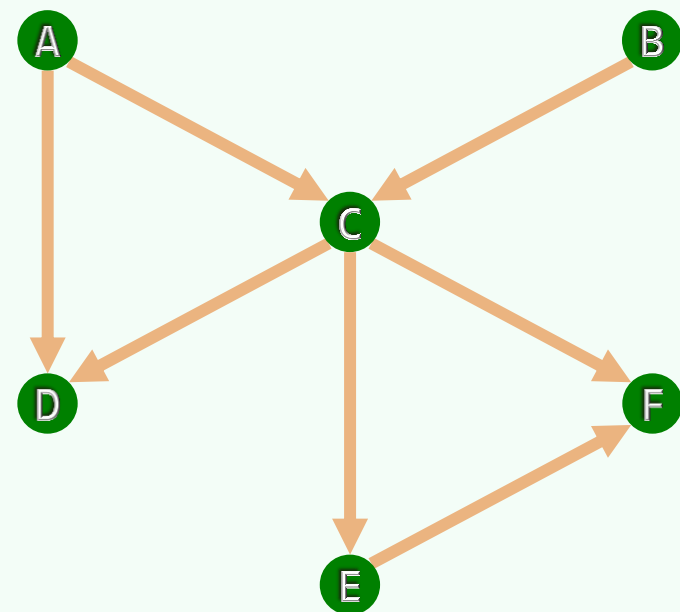
- 若原图存在回路（即并非DAG），检查并报告
- 否则，给出一个相容的线性序列



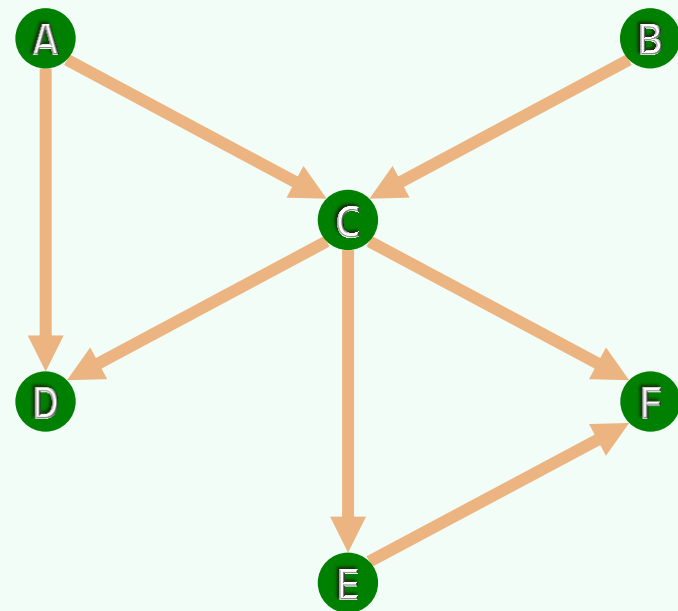
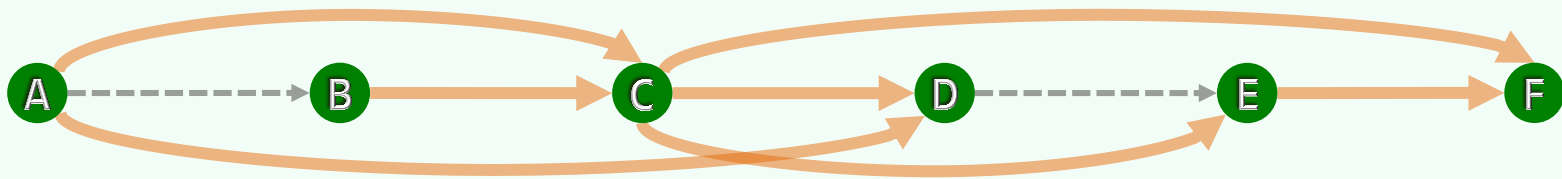
偏序 ~ 极值



- ❖ 每个DAG对应于一个**偏序集**；拓扑排序对应于一个**全序集**
所谓的拓扑排序，即构造一个与指定偏序集**相容**的全序集
- ❖ 可以拓扑排序的有向图，必定无环 //反之...
- ❖ 任何DAG，都存在（至少）一种拓扑排序？是的！
- ❖ 有限偏序集必有**极值**元素...
- ❖ 可归纳证明，并直接导出一个算法...



存在性



❖ 任何有向无环图 \mathcal{G} 中

必有一个零入度的顶点 m

❖ 若 $\mathcal{G} \setminus \{m\}$ 存在拓扑排序 $S = \{ \underline{u_{k_1}, u_{k_2}, u_{k_3}, \dots, u_{k_{n-1}}} \}$ //subtraction

则 $S' = \{ m, \underline{u_{k_1}, u_{k_2}, u_{k_3}, \dots, u_{k_{n-1}}} \}$ 即为 \mathcal{G} 的拓扑排序 //DAG子图亦为DAG

❖ 当然，只要 m 不唯一，拓扑排序也应不唯一 //反之呢？

策略：顺序输出零入度顶点

将所有入度为零的顶点存入栈 S ，取空队列 Q $//O(n)$

```
while ( !  $S$ .empty() ) {  $//O(n)$ 
```

```
     $Q$ .enqueue(  $v = S$ .pop() );  $//$ 栈顶 $v$ 转入队列
```

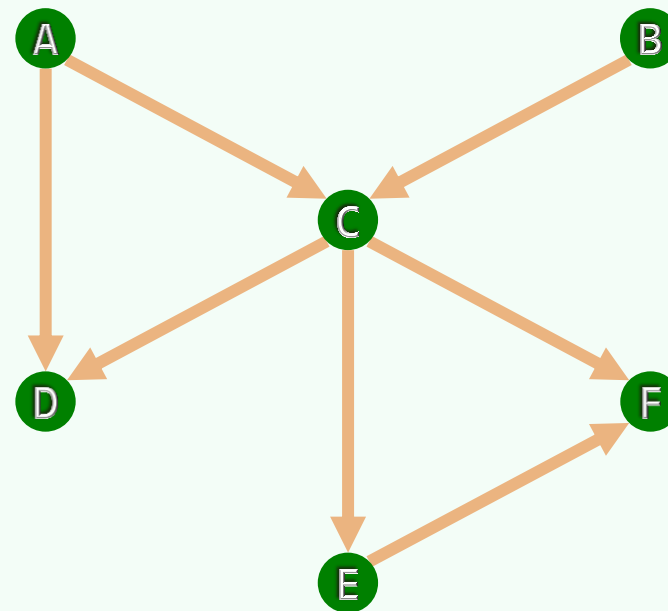
```
    for each edge(  $v, u$  )  $//v$ 的邻接顶点 $u$ 若入度仅为1
```

```
        if (  $u$ .inDegree < 2 )  $S$ .push(  $u$  );  $//$ 则入栈
```

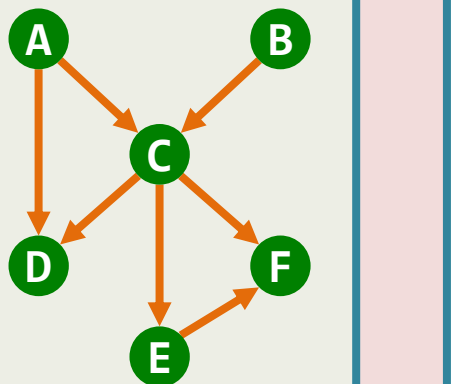
```
     $G = G \setminus \{ v \}$ ;  $//$ 删除 $v$ 及其关联边（邻接顶点入度减1）
```

```
}  $//$ 总体 $O(n + e)$ 
```

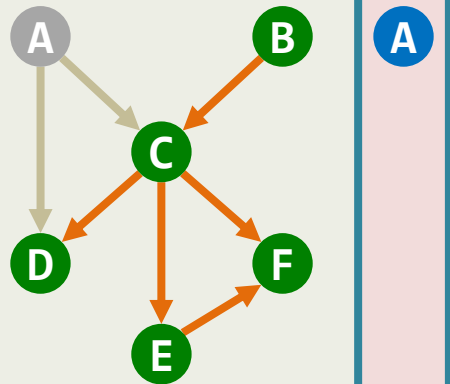
```
return  $|G| \neq 0$  ? "NOT_A_DAG" :  $Q$ ;  $//$ 残留的 $G$ 空，当且仅当原图可拓扑排序
```



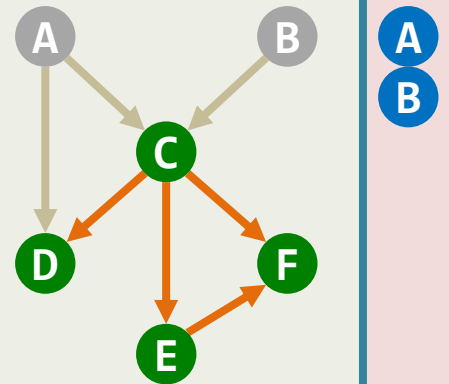
实例



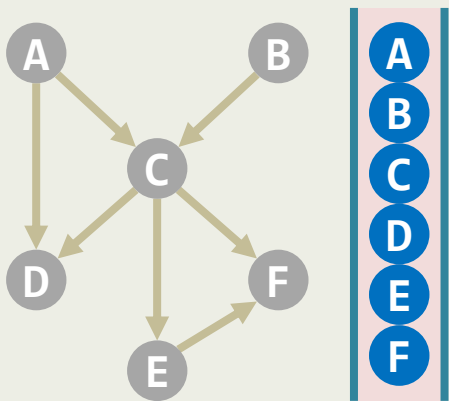
(a)



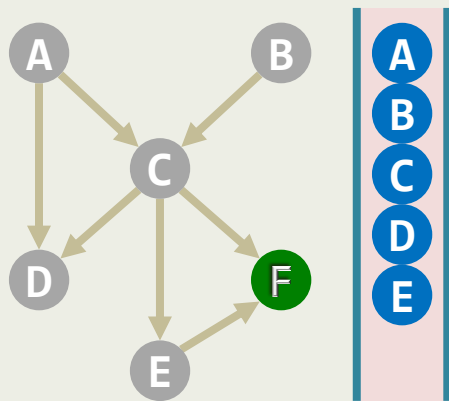
(b)



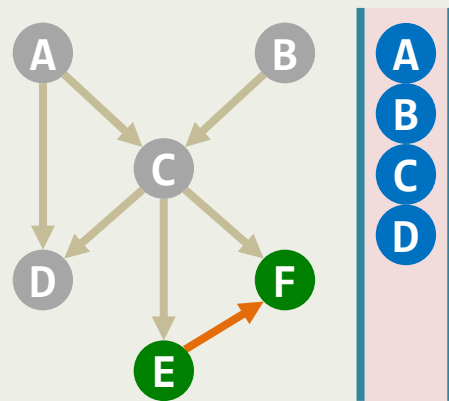
(c)



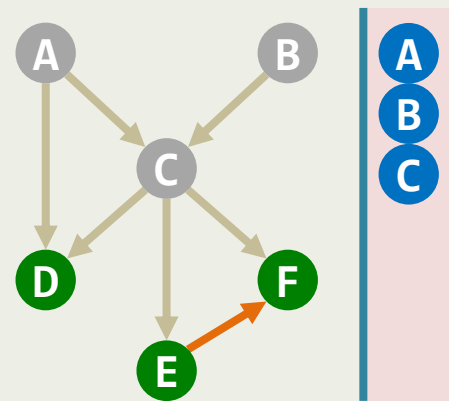
(g)



(f)



(e)



(d)