09-G1

词典

跳转表：结构

邓俊辉
deng@tsinghua.edu.cn

去沿江上下，或二十里，或三十里，选高阜处置一烽火台，每台用五十军守之。

动机与思路

❖ [William Pugh, 1989]

Skip Lists: A Probabilistic Alternative to Balanced Trees

Skip lists are data structures that use

probabilistic balancing rather than

strictly enforced balancing

Algorithms for insertion and deletion in skip lists

are much simpler and significantly faster than

equivalent algorithms for balanced trees

结构

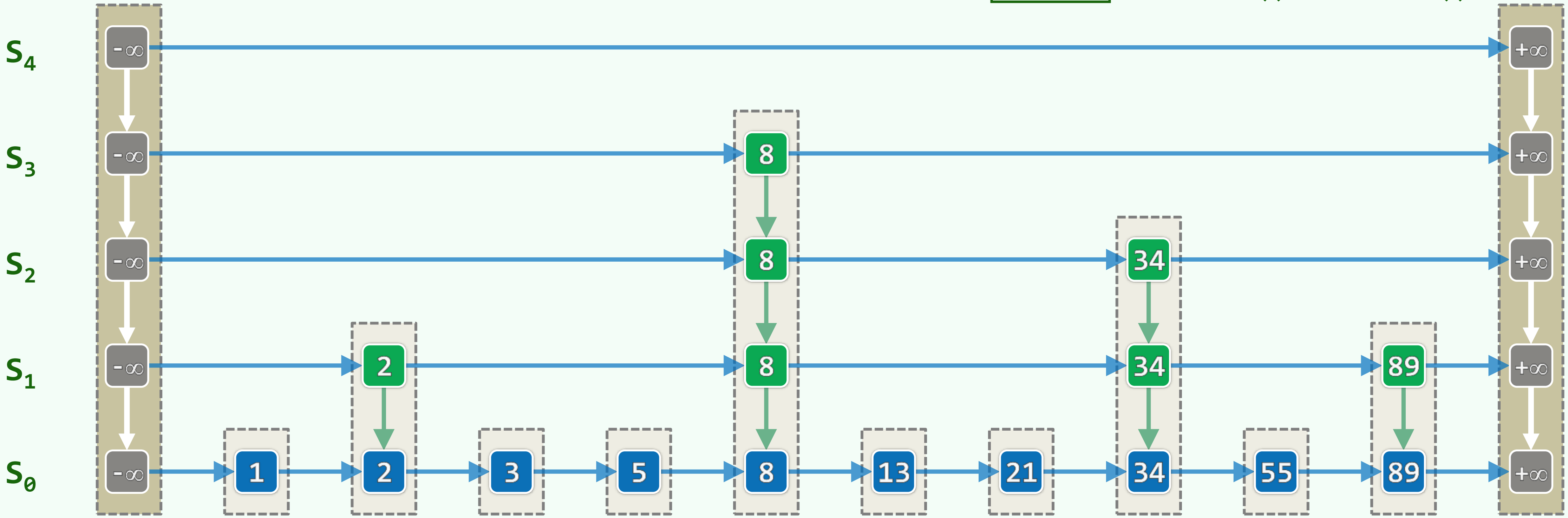
❖ 分层耦合的多个列表：S_0, S_1, ..., S_h

S_0/S_h称作底/顶层

❖ 横向为层 level：prev()、next()

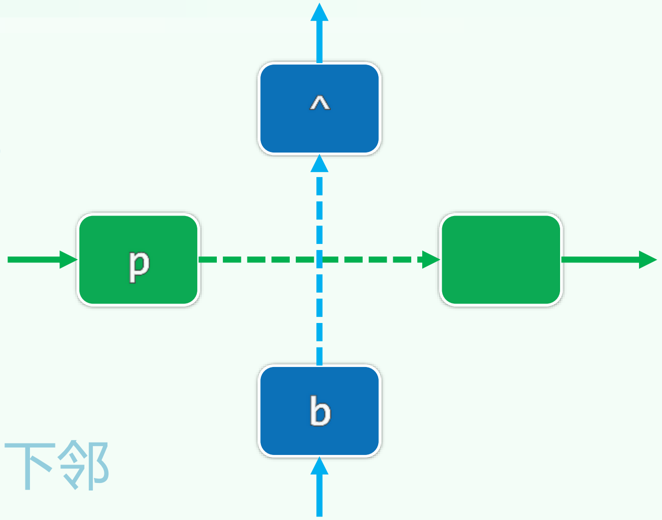
设有头、尾哨兵

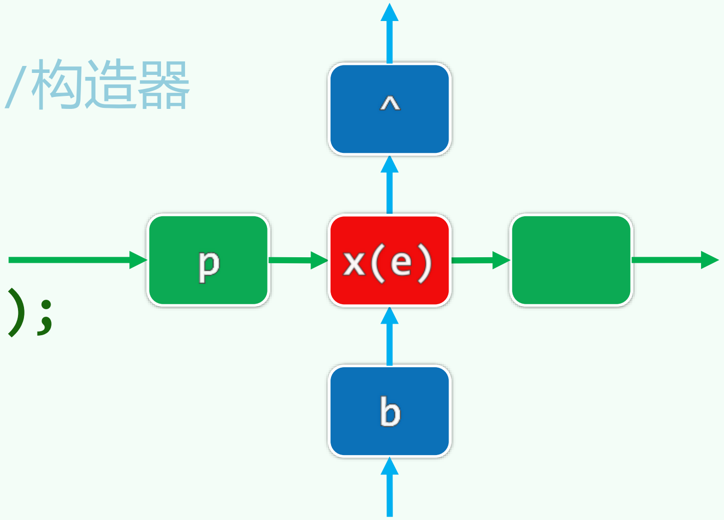
❖ 纵向成塔 tower：above()、below()



QuadNode

```
template <typename T> using QNodePosi = QNode<T>*; //节点位置
template <typename T> struct QNode { //四联节点
   T entry; //所存词条
   QNodePosi<T> pred, succ, above, below; //前驱、后继、上邻、下邻
   QNode( T e = T(), QNodePosi<T> p = NULL, QNodePosi<T> s = NULL,
          QNodePosi<T> a = NULL, QNodePosi<T> b = NULL ) //构造器
      : entry(e), pred(p), succ(s), above(a), below(b) {}
   QNodePosi<T> insert( T const& e, QNodePosi<T> b = NULL );
      //将e作为当前节点的后继、b的上邻插入
};
```





QuadList

```
template <typename T> struct Quadlist { //四联表
   int _size; //节点总数
   QNodePosi<T> header, trailer; //头、尾哨兵
   void init(); int clear(); //初始化、清除
   Quadlist() { init(); } //构造
   ~Quadlist() { clear(); delete header; delete trailer; } //析构
   T remove( QNodePosi<T> p ); //删除p
   QNodePosi<T> insert( T const & e, QNodePosi<T> p, QNodePosi<T> b = NULL );
      //将e作为p的后继、b的上邻插入
};
```

Skiplist

```
template < typename K, typename V > struct Skiplist :
public Dictionary<K, V>, public List< Quadlist< Entry<K, V> >* > {
   Skiplist() //即便为空，也有一层空列表
      { insertAsFirst( new Quadlist< Entry<K, V> > ); };
   QNodePosi< Entry<K, V> > search( K ); //由关键码查询词条
   int size() { return empty() ? 0 : last()->data->size(); } //词条总数
   int height() { return List::size(); } //层高，即Quadlist总数
   bool put( K, V ); //插入（Skiplist允许词条重复，故必然成功）
   V * get( K ); //读取
   bool remove( K ); //删除
};
```

空间性能

❖ 较之常规的单层列表

- 每次操作过程中，需**访问的节点**是否会实质地增多?
- 每个节点都至多可能**重复h份**，空间复杂度是否因此有实质增加? //先来回答后者...

❖ **逐层随机减半**： S_k 中的每个关键码，在 S_{k+1} 中依然出现的概率，均为 $p = 1/2$

——稍后将会看到，这一性质可以通过**投掷硬币**来**模拟**

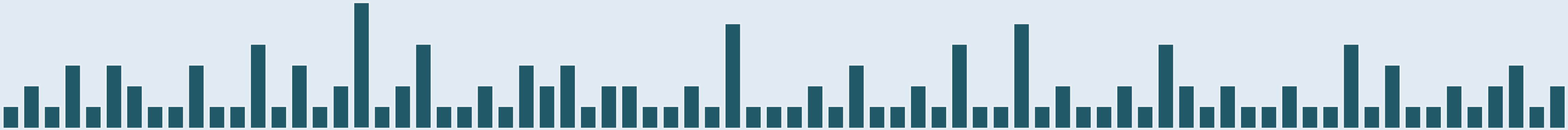
❖ 可见，各塔的高度符合**几何分布**： $Pr(h = k) \;=\; p^{k-1} \cdot (1 - p)$

❖ 于是，期望的塔高： $\mathbb{E}(h) \;=\; 1/(1 - p) \;=\; 2$

❖ 什么，没有学过概率? 不要紧，有直观的解释...

空间性能

❖ 既然逐层随机减半，故 S_0 中任一关键码在 S_k 中依然出现的概率为 2^{-k}



第 k 层节点数的期望值 $\mathbb{E}(|S_k|) \ = \ n \cdot 2^{-k} \ = \ n/2^k$

❖ 于是，所有节点期望的总数（即各层列表所需空间总和）为

$$\mathbb{E}(\sum_k |S_k|) \ = \ \sum_k \mathbb{E}(|S_k|) \ = \ n \times \sum_k 2^{-k} \ < \ 2n \ = \ \mathcal{O}(n)$$

❖ 结论：跳转表所需空间为 expected-$\mathcal{O}(n)$

❖ 类比：**半衰期为1年**的放射性物质中，各粒子的**平均寿命**不过**2年**

❖ 更为细致地，塔高的**方差**是否足够小？ //比照稍后对层高的分析