

高级搜索树

B-树：删除

射影，变了形，反而结晶

或动了情，也要合并，或归了零

也不愿不生不死不悔的倒影

邓俊辉

deng@tsinghua.edu.cn

算法：确保目标在叶子中

```
template <typename T>

bool BTree<T>::remove( const T & e ) {

    BTreeNodePosi<T> v = search( e );

    if ( ! v ) return false; //确认e存在

    Rank r = v->key.search(e); //e在v中的秩

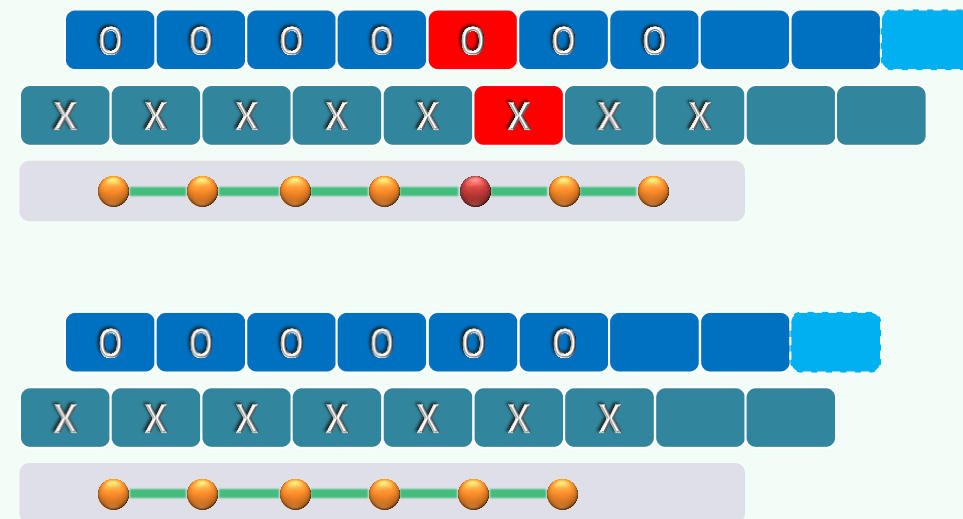
    if ( v->child[0] ) { /* 若v非叶子，则可经过腾挪，确保... */ }

    //assert: 至此，v必位于最底层，且其中第r个关键码就是待删除者

    v->key.remove( r ); v->child.remove( r + 1 ); _size--;

    solveUnderflow( v ); return true; //如有必要，需做旋转或合并

}
```



算法：腾挪 = 与后继交换

```
template <typename T>
bool BTree<T>::remove( const T & e ) {
    /* ..... */
```

```
    if ( v->child[0] ) { //若v非叶子, 则
```

```
        BTNodePosi<T> u = v->child[r + 1]; //在右子树中
```

```
        while ( u->child[0] ) u = u->child[0]; //一直向左, 即可找到e的后继 (必在底层)
```

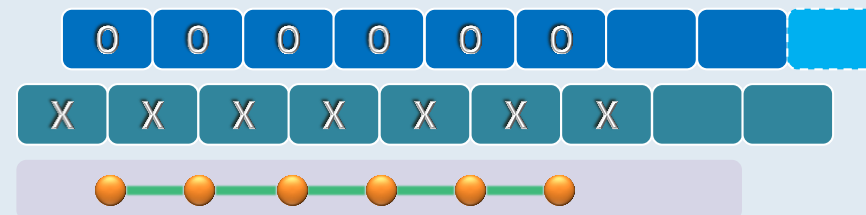
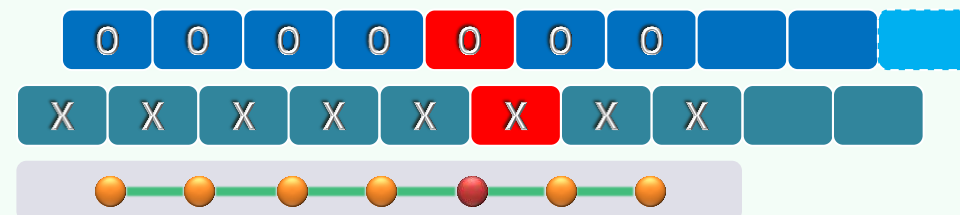
```
        v->key[r] = u->key[0]; v = u; r = 0; //交换
```

```
    }
```

```
    //assert: 至此, v必位于最底层, 且其中第r个关键码就是待删除者
```

```
    /* ..... */
```

```
}
```



旋转

❖ 非根节点[V]下溢时，必恰有 $\lceil m/2 \rceil - 2$ 个关键码和 $\lceil m/2 \rceil - 1$ 个分支

❖ 视其左、右兄弟[L]、[R]的规模，可分三种情况加以处理

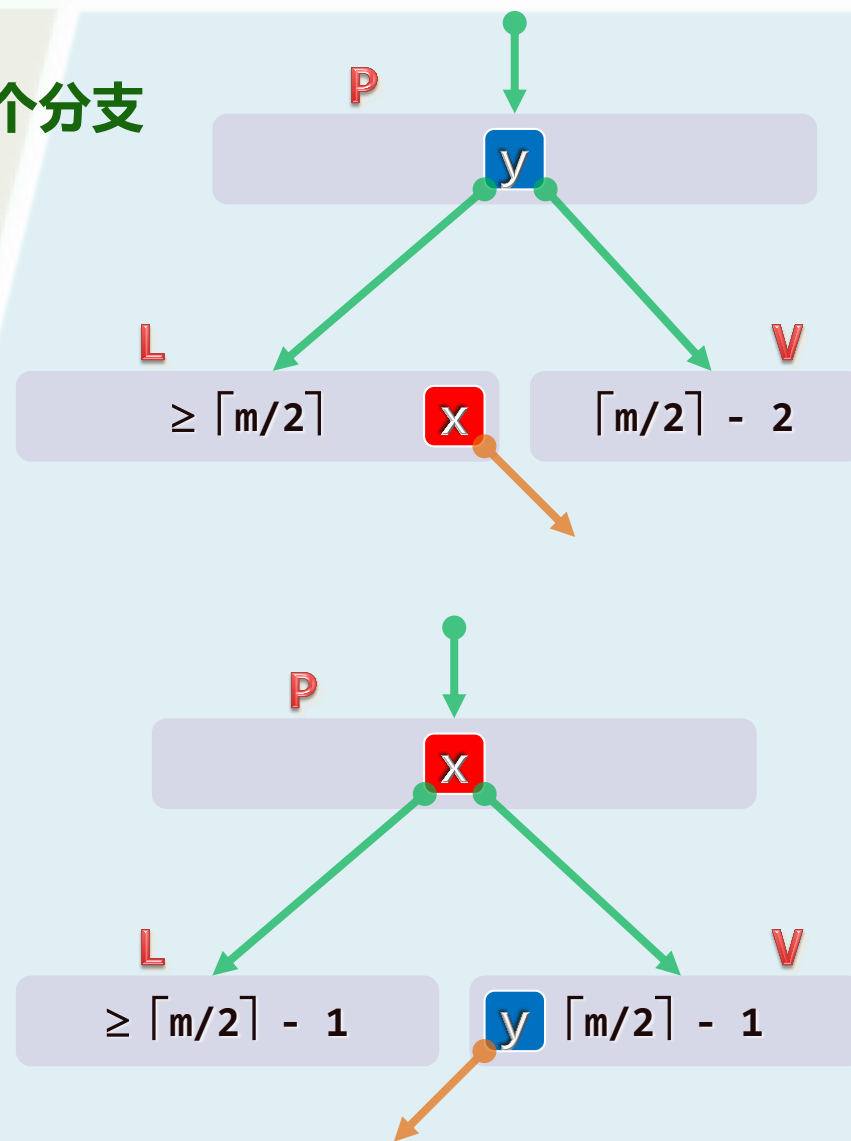
1) 若[L]存在，且至少包含 $\lceil m/2 \rceil$ 个关键码

- 将[P]中的分界关键码[y]移至[V]中（作为最小关键码）
- 将[L]中的最大关键码[x]移至[P]中（取代原关键码[y]）

❖ 如此旋转之后，局部乃至全树都重新满足B-树条件
下溢修复完毕

2) 若[R]存在，且至少包含 $\lceil m/2 \rceil$ 个关键码

- 也可旋转，完全对称



合并

3) L 和 R 或不存在，或均不足 $\lceil m/2 \rceil$ 个关键码——即便如此

- L 和 R 仍必有其一（不妨以 L 为例），且
- 恰含 $\lceil m/2 \rceil - 1$ 个关键码

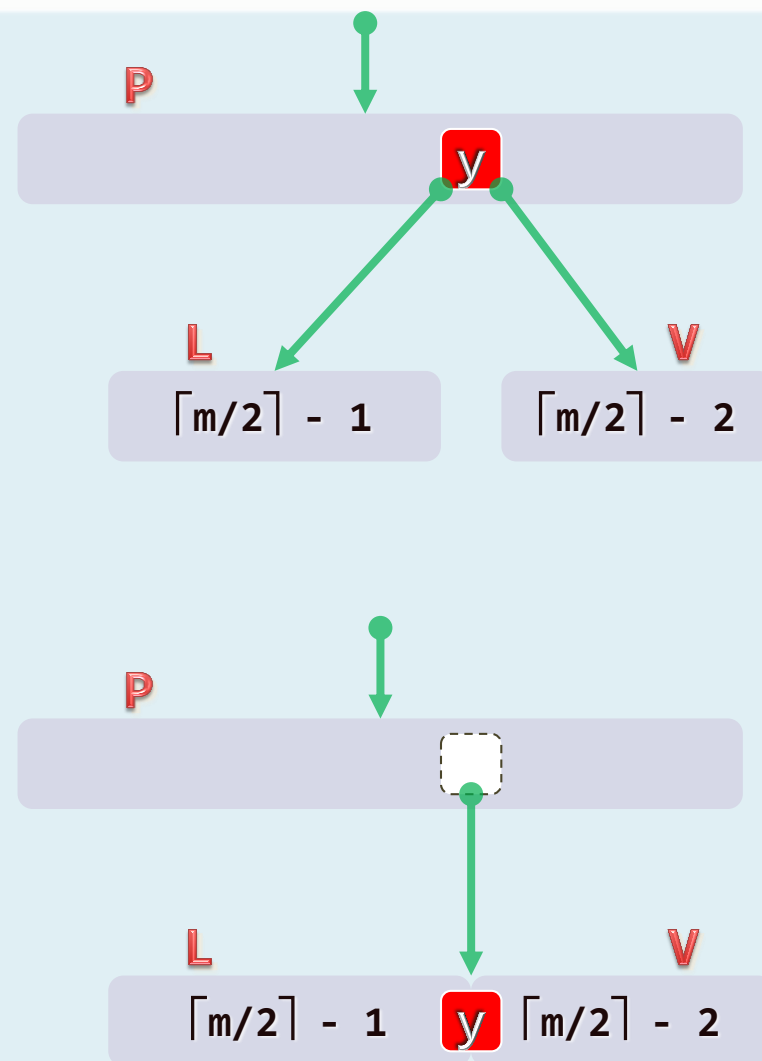
❖ 从 P 中抽出介于 L 和 V 之间的分界关键码 y

- 通过 y 做粘接，将 L 和 V 合成一个节点
- 同时合并此前 y 的孩子引用

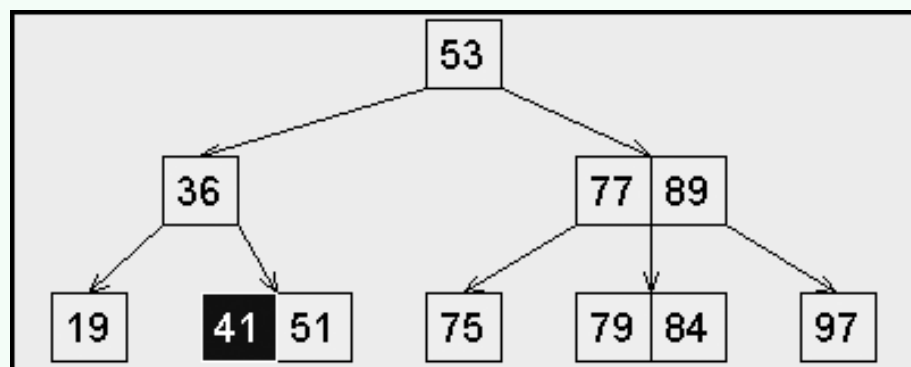
❖ 此处下溢得以修复，但可能继而导致 P 下溢

若果真如此，大可套用前法，继续旋转或合并

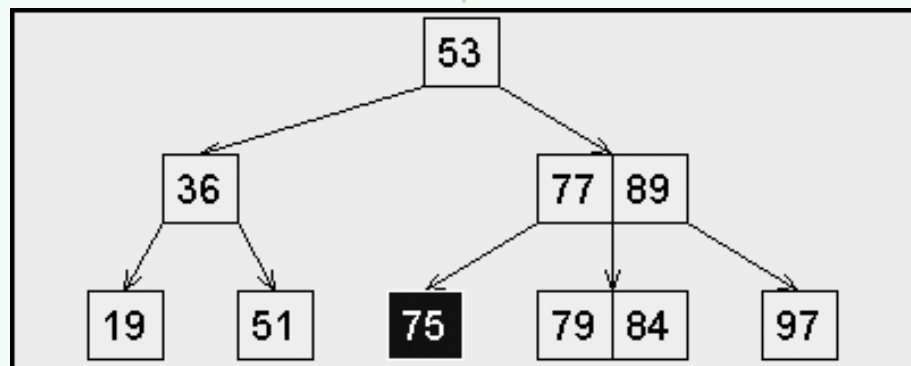
❖ 下溢可能持续发生并向上传播；但至多不过 $O(h)$ 层



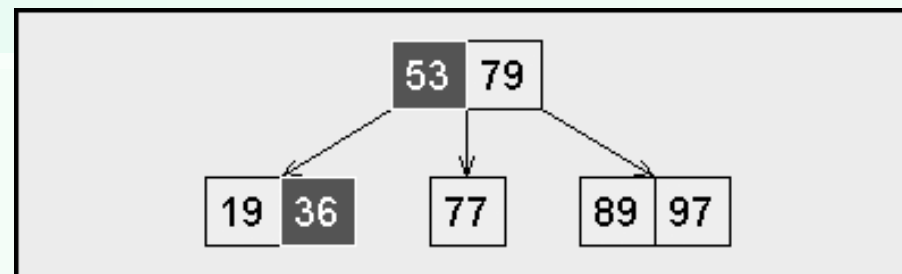
实例：(2,3)-树：底层节点



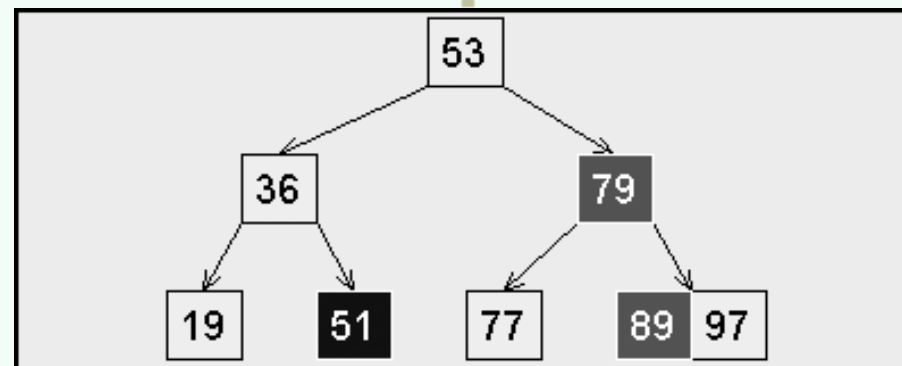
remove(41) //直接删除



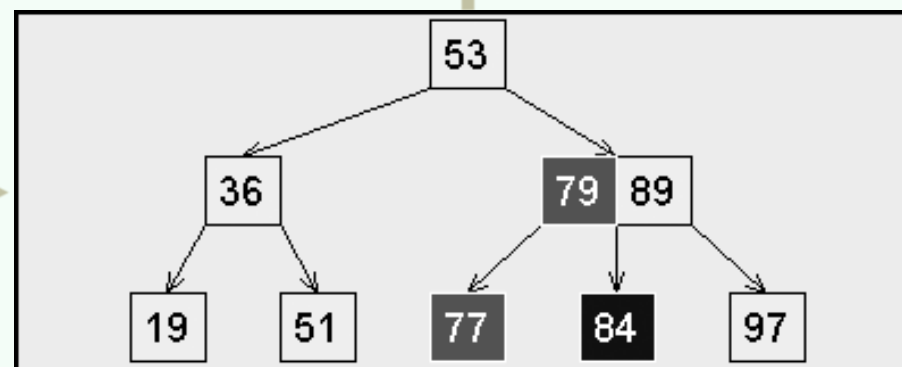
remove(75) //旋转



remove(51) //多次合并



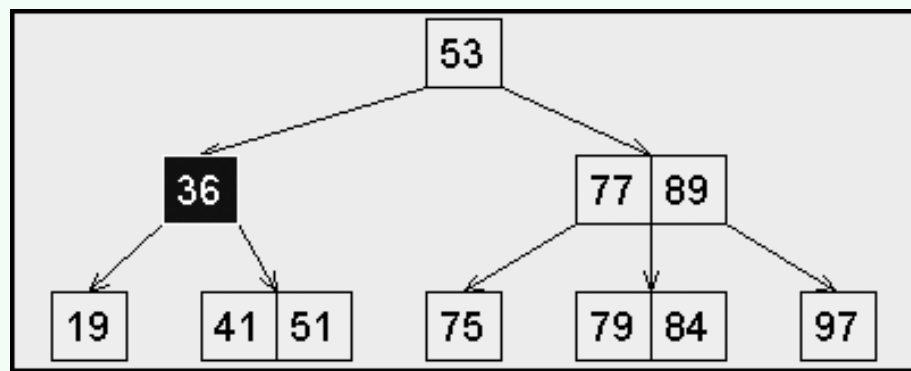
remove(84) //单次合并



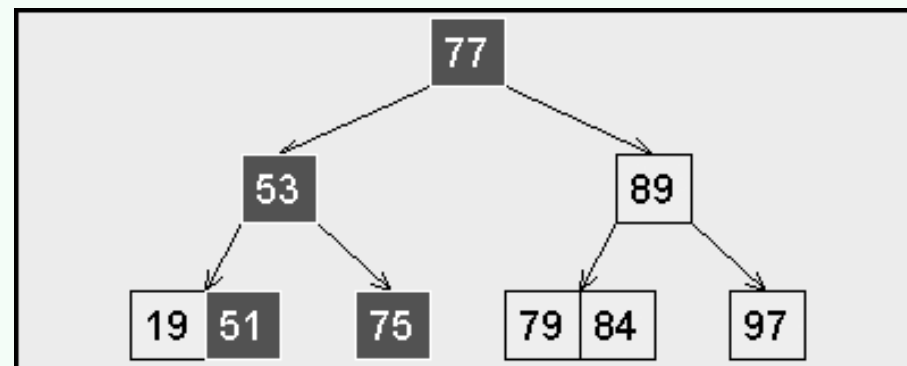
❖ 53 97 36 89 41 75 19 84 77 79 51

实例：(2,3)-树：非底层节点

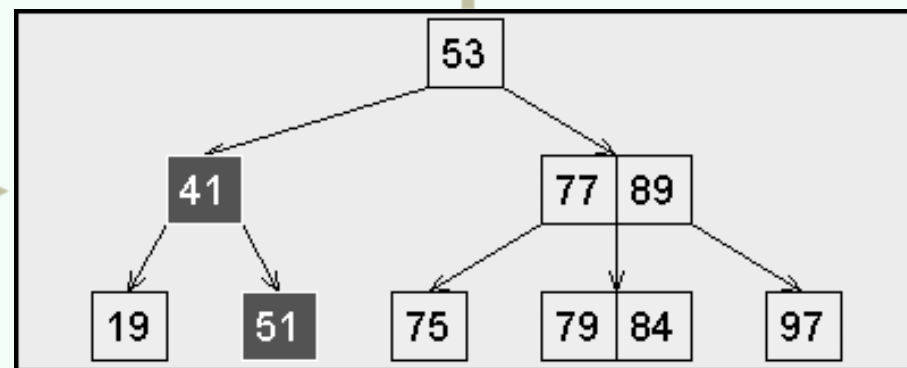
❖ 53 97 36 89 41 75 19 84 77 79 51



remove(36)



remove(41)



下溢修复

```
template <typename T> void BTree<T>::solveUnderflow( BTNodePosi<T> v ) {  
    while ( ( _m + 1 ) / 2 > v->child.size() ) { //除非当前节点没有下溢  
        BTNodePosi<T> p = v->parent; if ( !p ) { /* 已到根节点 */ }  
        Rank r = 0; while ( p->child[r] != v ) r++; //确定v是p的第r个孩子  
        if ( 0 < r ) { /* 情况 #1: 若v的左兄弟存在, 且... */ }  
        if ( p->child.size() - 1 > r ) { /* 情况 #2: 若v的右兄弟存在, 且... */ }  
        if ( 0 < r ) { /* 与左兄弟合并 */ } else { /* 与右兄弟合并 */ } //情况 #3  
        v = p; //上升一层, 如有必要则继续旋转或合并——至多 $O(\log n)$ 层  
    } //while  
} //solveUnderflow
```


下溢修复：情况#1：旋转（向左兄弟借关键码）

```
if (0 < r) { //若v不是p的第一个孩子，则
    BTNodePosi<T> ls = p->child[r - 1]; //左兄弟必存在
    if ( (_m + 1) / 2 < ls->child.size() ) { //若该兄弟足够“胖”，则
        v->key.insert( 0, p->key[r-1] ); //p借出一个关键码给v（作为最小关键码）
        p->key[r - 1] = ls->key.remove( ls->key.size() - 1 ); //ls的最大key转入p
        v->child.insert( 0, ls->child.remove( ls->child.size() - 1 ) );
        //同时ls的最右侧孩子过继给v（作为v的最左侧孩子）
        if ( v->child[0] ) v->child[0]->parent = v;
        return; //至此，通过右旋已完成当前层（以及所有层）的下溢处理
    }
} //情况#2完全对称
```

下溢修复：情况#3：合并 (1/2)

```
if (0 < r) { //与左兄弟合并

    BTNodePosi<T> ls = p->child[r-1]; //左兄弟必存在

    ls->key.insert( ls->key.size(), p->key.remove(r - 1) );

    p->child.remove( r ); //p的第r - 1个关键码转入ls, v不再是p的第r个孩子

    ls->child.insert( ls->child.size(), v->child.remove( 0 ) );

    if ( ls->child[ ls->child.size() - 1 ] ) //v的最左侧孩子过继给ls做最右侧孩子

        ls->child[ ls->child.size() - 1 ]->parent = ls;

    /* ... TBC ... */
}
```

下溢修复：情况#3：合并 (2/2)

```
while ( !v->key.empty() ) { //v剩余的关键码和孩子，依次转入ls

    ls->key.insert( ls->key.size(), v->key.remove(0) );

    ls->child.insert( ls->child.size(), v->child.remove(0) );

    if ( ls->child[ ls->child.size() - 1 ] )

        ls->child[ ls->child.size() - 1 ]->parent = ls;

} //while

release(v); //释放v

} else

{ /* 与右兄弟合并，完全对称 */ }
```