

图应用

Prim算法：最小支撑树

11-D1

“疯子么，怎能绳之以常理？还有更荒唐的事呢，他要在普济造一条风雨长廊，把村里的每一户人家都连接起来，哈哈，他以为，这样一来，普济人就可免除日晒雨淋之苦了。”

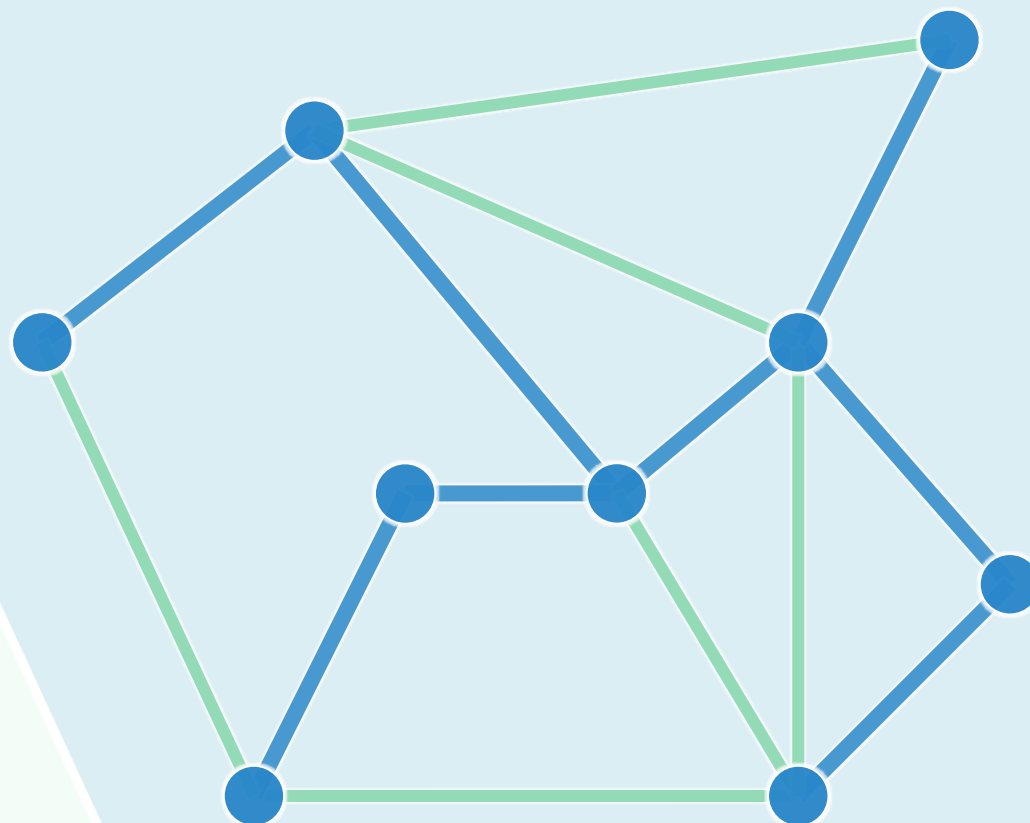
邓俊辉

deng@tsinghua.edu.cn

最小 + 支撑 + 树

- ❖ 连通网络 $N=(V;E)$ 的子图 $T=(V;F)$
- ❖ 支撑/spanning = 覆盖 N 中所有顶点
- ❖ 树/tree = 连通且无环, $|F| = |V| - 1$
- ❖ 同一网络的支撑树, 未必唯一
- ❖ minimum = optimal:
总权重 $w(T) = \sum_{e \in F} w(e)$ 达到最小
- ❖ 谁感兴趣?

电信公司、网络设计师、VLSI布线算法设计师、...



MST

❖ 为何重要?

- 自身可**有效计算**
- 众多优化问题的**基本模型**
- 为许多NP问题提供足够好的**近似解**

比如, Euclidean TSP

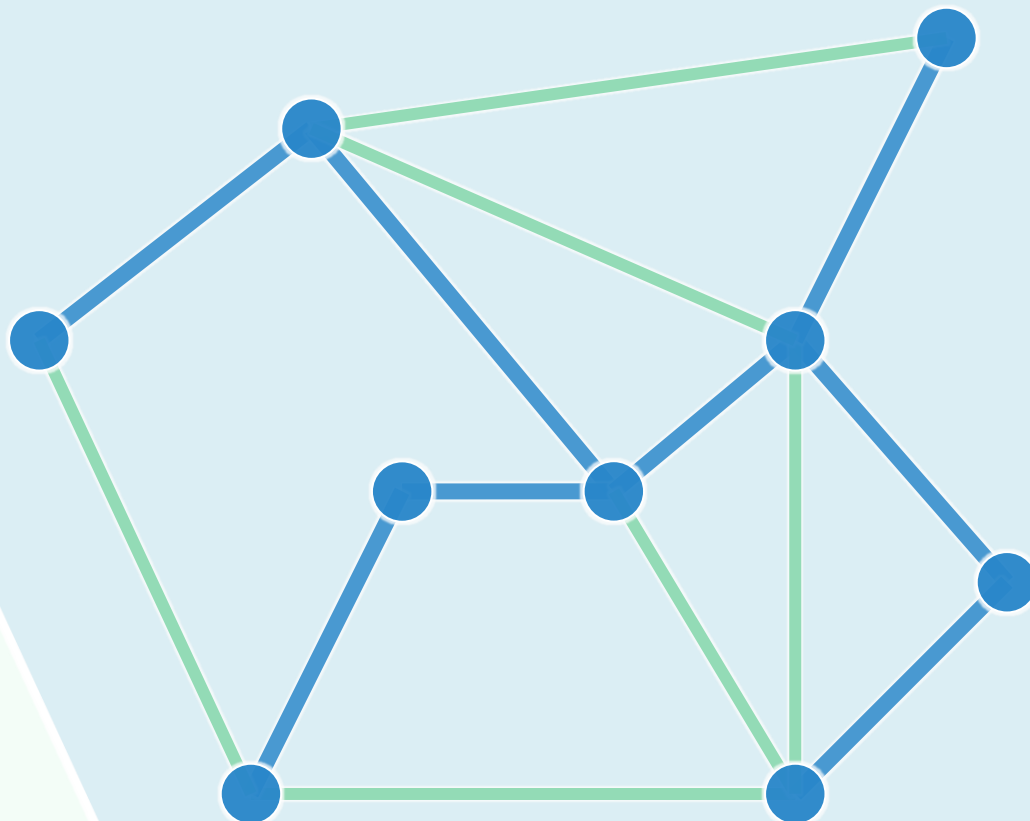
❖ 延伸问题: Proximity Graphs $// \Omega(n \log n)$

Steiner MST $// \text{NP-hard}$

❖ 众多算法: Boruvka-1926、Jarnik-1930、

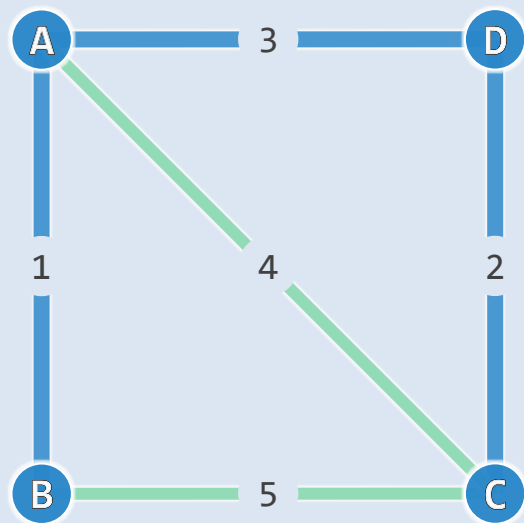
Prim-1956、Kruskal-1956

Karger-Klein-Tarjan-1995、Chazelle-2000、...

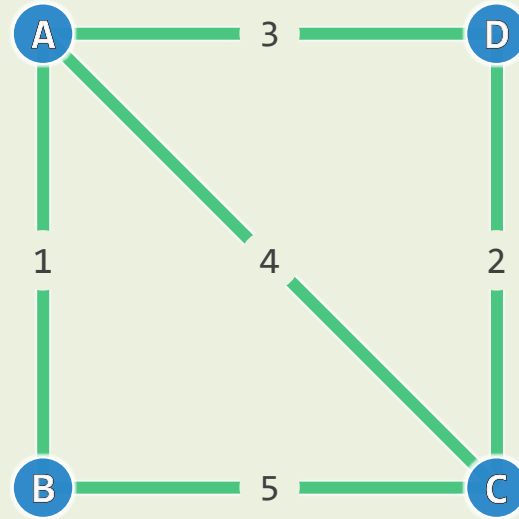


MST \neq SPT

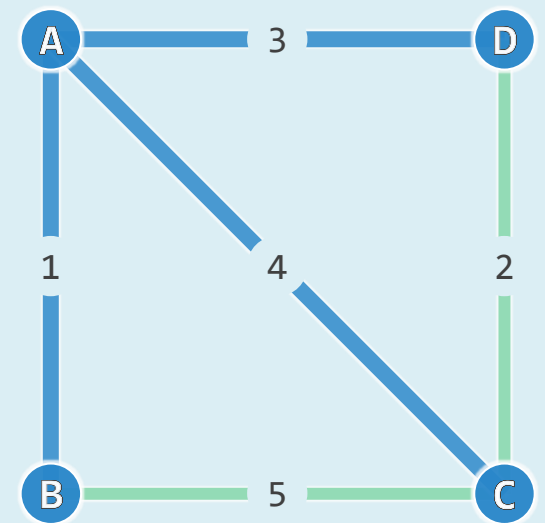
MST



G



SPT



负权 & 退化

❖ 权值必须是正数?

- 允许为**零**，有何影响?
- 允许为**负数**呢?

❖ 所有支撑树所含的边数，必相等

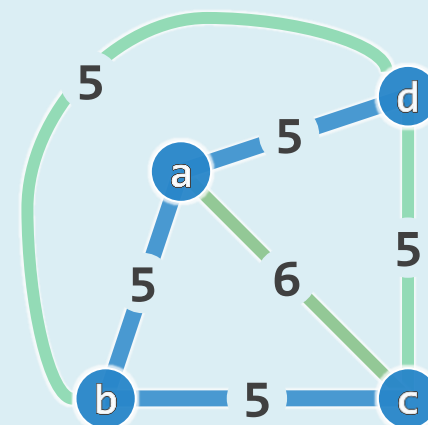
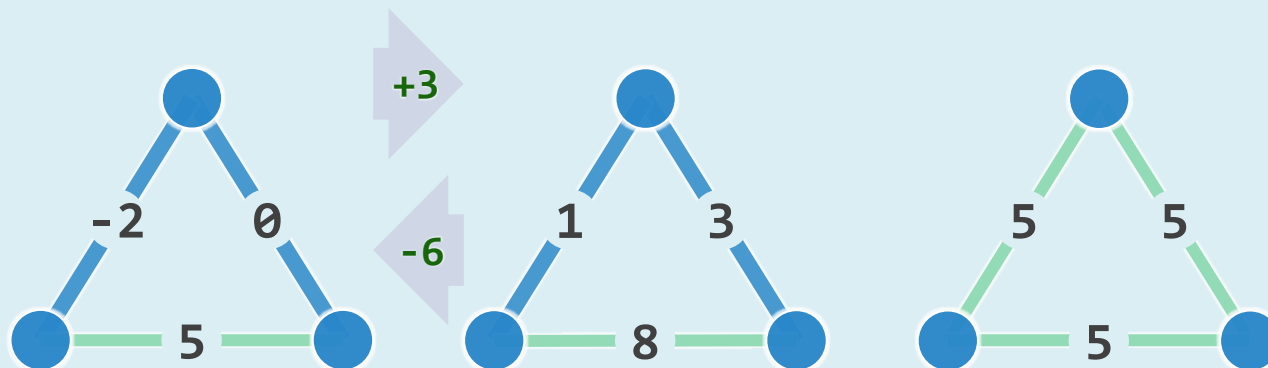
故可统一调整: `increase(1 - findMin())`

❖ The minimum? A minimal!

- 同一网络，或有多棵MST
- 可强制消除歧义...

❖ 合成数 (composite number) : $(w(u, v), \min(u, v), \max(u, v))$

5ab < **5**ad < **5**bc < 5bd < 5cd < **6**ac



蛮力算法

❖ 枚举出N的所有支撑树，从中找出代价最小者

❖ 包含n个顶点的图，可能有多少棵支撑树？

n = 1 1

n = 2 1

n = 3 3

n = 4 16

n = 5 125

... ...

❖ Cayley公式：完全图 K_n 有 n^{n-2} 棵支撑树

❖ 如何高效地构造MST呢？

