

Fascicule de TD

Université Claude Bernard Lyon1



FIGURE 1 – La gravure sur bois dite « de Flammarion ».

Astrophysique pour la licence
Université Lyon 1

Version du 8 avril 2015

Table des matières

1	Vie des étoiles	3
1.1	La lumière des étoiles	3
1.1.1	Photosphère et température effective	3
	Exercice 1 : Luminosité du Soleil	3
	Exercice 2 : Rayon des étoiles	3
	Exercice 3 : Équilibre radiatif de la Terre	3
1.1.2	Système de magnitudes	3
	Exercice 4 : Système binaire	3
1.2	Classification spectrale	4
1.2.1	Mesures des distances	4
	Parallaxe trigonométrique	4
	Exercice 5 : Incertitude	4
	Exercice 6 : Astrométrie spatiale	4
	Exercice 7 : Parallaxe et magnitude absolue	4
	Exercice 8 : Méthode du point convergent	4
1.2.2	Classification stellaire	4
	Exercice 9 : Types spectraux	4
	Exercice 10 : Diagramme HR	4
1.2.3	Mesure des rayons	4
	Exercice 11 : Interférométrie	4
1.2.4	Mesure de masse (étoiles doubles)	5
	Exercice 12 : Système binaire	5
	Exercice 13 : Le paradoxe d'Algol	5
1.3	Les systèmes planétaires	6
1.3.1	Les lois de Kepler	6
	Exercice 14 : Invariant de Runge-Lenz	6
	Exercice 15 : Orbite de Pluton	6
	Exercice 16 : Vitesses périhélique et aphélique	6
	Exercice 17 : Satellite géostationnaire	6
2	Vie des galaxies	7
2.1	Milieu interstellaire	7
2.1.1	Mise en évidence expérimentale	7
	Exercice 18 : Comptage d'étoiles	7
	Exercice 19 : Densité des galaxies dans l'Univers	7
2.1.2	Extinction sélective et rougissement	8
	Exercice 20 : Interprétation physique	8
	Exercice 21 : Rougissement et température	8
	Exercice 22 : Rougissement et couleur	8
	Exercice 23 : Excès de couleur	8
2.2	Galaxies	9
2.2.1	Classification morphologique des galaxies	9
	Exercice 24 : Propriétés « physiques » de la classification	9
2.2.2	Constituants des galaxies	9
	Exercice 25 : Les étoiles	9
	Exercice 26 : La matière noire	9
2.2.3	Exemple de galaxie : la Voie Lactée	10
	Exercice 27 : Le centre galactique	10
2.2.4	Le groupe local	10

	Exercice 28 : Recensement	10
2.2.5	Distribution des galaxies dans l'univers	10
	Exercice 29 : Fonction de luminosité	10
	Exercice 30 : Fréquence de collision dans un amas	10
2.2.6	Équilibre gravitationnel	12
	Exercice 31 : Théorème du Viriel scalaire	12
	Exercice 32 : Autres applications du théorème du Viriel	12
	Exercice 33 : Temps cinématique	12
3	Cosmologie	14
3.1	Espace et temps absolus	14
	Exercice 34 : La faiblesse de la force de gravitation	14
3.2	La rupture relativiste	14
3.2.1	Relativité générale	14
	Exercice 35 : L'équivalence gravité/accélération	14
3.2.2	Les tests	14
	Exercice 36 : Le décalage gravitationnel vers le rouge	14
3.3	Le Big Bang	14
3.3.1	Film des débuts	14
	Exercice 37 : Nucléosynthèse primordiale ou non ?	14
3.3.2	Expansion de l'Univers...	15
	Exercice 38 : ... limitée par c ?	15
	Exercice 39 : ... la même partout ?	15
3.3.3	Constante de Hubble & Co.	15
	Exercice 40 : Le facteur d'expansion de l'espace	15
	Exercice 41 : Temps de Hubble	15
	Exercice 42 : Densité critique	15
	Exercice 43 : Âge de l'Univers	15
3.4	Modèles cosmologiques	15
	Exercice 44 : Modèle FLRW	15
	Exercice 45 : <i>Redshift</i> cosmologique	16
	Exercice 46 : Temps de vol, distance, et expansion...	16
4	Retour sur Terre : nos repères dans le ciel	17
4.1	Se positionner dans le ciel	17
	Exercice 47 : Repérage	17
4.2	Mouvement diurne	17
	Exercice 48 :	17
	Exercice 49 : Mouvement diurne	17
	Exercice 50 : Coordonnées horaires	17
	Exercice 51 : Coordonnées équatoriales	17
4.3	Mouvement du Soleil	18
4.3.1	Année sidérale, année tropique	18
	Exercice 52 : Mouvement du Soleil, jour solaire	18

Chapitre 1

Vie des étoiles

1.1 La lumière des étoiles

1.1.1 Photosphère et température effective

Exercice 1 : Luminosité du Soleil

Calculer la luminosité du Soleil à partir de sa température effective $T_{\odot} \approx 5770$ K et de son rayon $R_{\odot} \approx 6,96 \times 10^8$ m.

Exercice 2 : Rayon des étoiles

Déterminer le rayon (en unité solaire), la longueur d'onde de Wien et la couleur « visible » des étoiles suivantes :

1. Naine blanche : $L = 10^{-2} L_{\odot}$, $T_e = 20000$ K
2. Géante rouge : $L = 10^2 L_{\odot}$, $T_e = 4200$ K
3. Supergéante : $L = 10^5 L_{\odot}$, $T_e = 6000$ K

Rappel de la loi de Wien : $\lambda_{\max} T = 2898 \mu\text{m K}$.

Exercice 3 : Équilibre radiatif de la Terre

Soit L la puissance lumineuse du Soleil, R le rayon de la Terre, D la distance Terre-Soleil et T_e la température effective à la surface de la Terre :

1. Écrire la relation entre L et $F(D)$, le flux lumineux à une distance D du Soleil. En déduire la puissance lumineuse totale P_r reçue par la Terre.
2. Utiliser la loi de Stefan et expliciter le flux lumineux F_e , puis la puissance totale P_e , rayonnés par la Terre.
3. Écrire l'égalité des puissance reçue et rayonnée à la surface de la Terre, en déduire l'expression de la température T_e en fonction des données du problème.
4. Application numérique, sachant que $L = 3,85 \times 10^{26}$ W, $R = 6400$ km, $D = 1,500 \times 10^{11}$ m, $\sigma = 5,67 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$.
5. Commenter sur la validité et les limites de ce modèle.

1.1.2 Système de magnitudes

Exercice 4 : Système binaire

Les deux composantes de l'étoile α du Centaure située à 1,32 pc de distance ont des magnitudes visuelles (magnitude apparente dans la bande V) de 0,30 et 1,70. On demande :

1. Le rapport des flux des deux étoiles dans la bande V .
2. La magnitude visuelle globale du système.
3. La correction qu'il faut apporter aux magnitudes apparentes de ce système pour obtenir les magnitudes absolues.

1.2 Classification spectrale

1.2.1 Mesures des distances

Parallaxe trigonométrique

Exercice 5 : Incertitude

Relier l'incertitude sur la distance ΔD à celle sur la parallaxe Δp .

Exercice 6 : Astrométrie spatiale

Considérons les deux missions d'astrométrie spatiale : Hipparcos (1989), avec une incertitude absolue sur la mesure de la parallaxe typique de $\Delta p = 2$ mas, et Gaia (2013), avec $\Delta p = 7 \mu\text{as}$. Quelles sont les précisions obtenues à une distance de 100 pc ? de 1000 pc ? À quelle distance aura-t-on une erreur de 100% ?

Exercice 7 : Parallaxe et magnitude absolue

Le tableau suivant donne la magnitude apparente m_V et la parallaxe p de trois étoiles. Calculer leur distance D avec son incertitude, l'erreur relative sur la distance $\Delta D/D$ et leur magnitude absolue M_V .

	α CMa (Sirius)	α Tau (Aldebaran)	α Ori (Bételgeuse)
m_V	-1,47	0,85	0,58
p (mas)	$379,2 \pm 1,6$	$50,1 \pm 1,0$	$7,6 \pm 1,6$

Exercice 8 : Méthode du point convergent

On veut déterminer la distance de l'amas des Pléiades par la méthode du point convergent.

- L'étude des trajectoires des étoiles de l'amas sur plusieurs années a permis de situer le point convergent à $\theta = 67,9 \pm 0,6^\circ$ de la direction de l'amas.
- L'observation du spectre de l'étoile Alcyone, faisant partie de cet amas, a permis de mesurer sa vitesse radiale $v_r = 10,1 \pm 0,3 \text{ km s}^{-1}$.
- Le mouvement propre apparent de cette même étoile vaut $\mu = 47,3 \pm 0,8 \text{ mas an}^{-1}$.

Déterminer la distance de l'amas.

1.2.2 Classification stellaire

Exercice 9 : Types spectraux

Donner approximativement le type spectral des étoiles dont le flux est maximal aux longueurs d'onde suivantes : 300 nm, 500 nm, et $1,2 \mu\text{m}$. Peut-on déterminer la classe de luminosité ?

Rappel de la loi de Wien : $\lambda_{\text{max}} T = 2898 \mu\text{m K}$.

Exercice 10 : Diagramme HR

Classer par ordre de température effective croissante, puis de rayon croissant, et enfin de luminosité croissante les étoiles de types spectraux suivants : M5III, O2V, K7I, A0VII.

1.2.3 Mesure des rayons

Exercice 11 : Interférométrie

Le tableau suivant donne le diamètre apparent θ_* des étoiles de l'exercice 10, mesuré par interférométrie. Calculer leur rayon R (on rappelle les distances déterminées dans un exercice précédent) et, à l'aide de ce résultat, attribuer à chaque étoile sa classe de luminosité parmi les suivantes : I, III, V.

	α CMa	α Tau	α Ori
θ_* (mas)	5,89	24	67
d (pc)	2,64	20	130

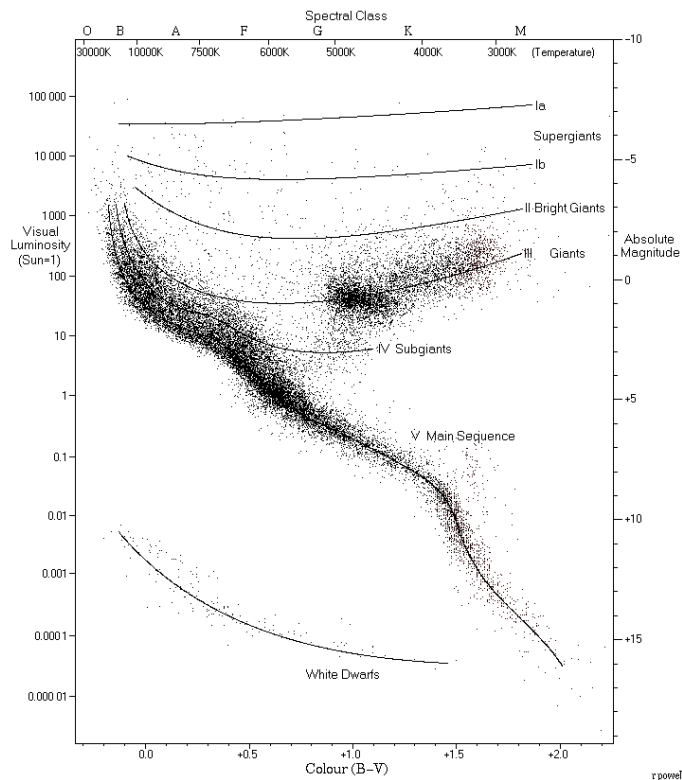


FIGURE 1.1 – Diagramme de Hertzsprung-Russell des 22000 étoiles du catalogue Hipparcos et de 1000 étoiles faiblement lumineuses du catalogue Gliese des étoiles proches.

1.2.4 Mesure de masse (étoiles doubles)

Exercice 12 : Système binaire

On observe une étoile double visuelle dont le plan de l'orbite est perpendiculaire à la ligne de visée.

- La parallaxe de ce système est de 100 mas.
- La plus grande séparation angulaire entre les deux composantes est de $5''$, et la plus petite de $1''$.
- La période de révolution est de 30 ans.
- Le compagnon est toujours observé à une distance du centre de gravité 5 fois plus grande que celle de l'étoile primaire.

Déterminer la masse de chaque composante.

Exercice 13 : Le paradoxe d'Algol

Le tableau suivant rappelle les caractéristiques du système binaire à éclipse d'Algol (β Per) :

p (mas)	$35,14 \pm 0,90$	
T (jours)	2,8674	
θ_{rel} (mas)	2,283	
Composantes	A	B
Type spectral	B8V	K2IV
R/R_{\odot}	2,74	3,60
θ_{abs} (mas)	1,872	

On supposera l'orbite circulaire, ainsi le demi-grand axe de l'ellipse projetée est égal au rayon de l'orbite.

1. Quelle est la distance (et son erreur) de ce système ?
2. Quelle est la séparation des deux étoiles ? Comparez-la à leurs rayons.
3. Quelle est la masse de chacune des étoiles ? Compte-tenu des types spectraux, décrire le *paradoxe d'Algol* et suggérer une solution.

1.3 Les systèmes planétaires

1.3.1 Les lois de Kepler

Exercice 14 : Invariant de Runge-Lenz

On considère une particule P de masse m , animée d'un mouvement non relativiste par rapport à un repère d'origine O . Ce mouvement est dû à un champ de forces $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\mathbf{grad} U(r)$ dérivant d'un potentiel central $U(r)$, où $\mathbf{r} = \mathbf{OP}$. À l'instant t on note respectivement $\mathbf{v}(t)$, $\mathbf{a}(t)$ et $\mathbf{p}(t)$ la vitesse, l'accélération et la quantité de mouvement de la particule P .

1. Montrer que la force \mathbf{F} est radiale.
2. Montrer que le vecteur moment cinétique $\mathbf{L} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{p}$ est conservé au cours du mouvement. En déduire que la trajectoire de P est située dans un plan Π que l'on caractérisera.
3. Montrer que l'énergie mécanique $E = \frac{1}{2}mv^2 + U$ est une constante du mouvement.
4. Calculer L à l'aide des coordonnées polaires (r, θ) dans le plan Π et en déduire la loi des aires.

Dans toute la suite du problème, le potentiel est de la forme :

$$U(r) = -\frac{k}{r} \quad \text{avec} \quad k > 0$$

On définit le vecteur de Runge-Lenz :

$$\mathbf{A} = \frac{1}{k} \mathbf{v} \wedge \mathbf{L} - \frac{\mathbf{r}}{r}$$

5. Montrer que le vecteur \mathbf{A} est constant dans le temps, et qu'il appartient au plan Π .
6. Montrer que :

$$A^2 = 1 + 2 \frac{L^2 E}{mk^2}$$

(On pourra utiliser les coordonnées polaires : en particulier $\mathbf{v} = v_r \mathbf{e}_r + v_\theta \mathbf{e}_\theta$). En déduire, lorsque L est fixé, une borne inférieure pour l'énergie E . Montrer que pour un mouvement circulaire, E est égal à la borne inférieure.

7. Calculer le produit scalaire $\mathbf{A} \cdot \mathbf{r}$ en fonction de L , m , k et r . Établir alors l'équation polaire de la trajectoire sous la forme :

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$$

Indication : on définira l'angle θ à partir de l'axe polaire dirigé selon le vecteur \mathbf{A} .

Vérifier que : $e = \|\mathbf{A}\|$ et exprimer p en fonction de L , m et k .

8. Discuter la nature de la trajectoire suivant la valeur de E .

Dans la suite du problème on se restreint au cas des états liés : $E < 0$. La trajectoire est alors une ellipse.

9. Déterminer son demi-grand axe a et son demi-petit axe b en fonction de m , k , L et E .
10. Quelle est la valeur maximale L_0 de L , l'énergie E étant fixée ?
11. Quelle est la trajectoire pour $L = 0$, et pour $L = L_0$?
12. Calculer la période du mouvement en fonction de m , k et a .

Exercice 15 : Orbite de Pluton

L'orbite de Pluton est très excentrique ($e = 0,248$). Son demi-grand axe vaut 39,43 unités astronomiques (L'unité astronomique est définie comme le demi grand axe de l'orbite de la Terre). Montrer que Pluton peut être plus proche du Soleil que Neptune dont le demi-grand axe de l'orbite vaut 30,06 UA et l'excentricité 0,009.

Exercice 16 : Vitesses périhélique et aphélique

Montrer que la vitesse angulaire d'un objet décrivant une orbite elliptique autour du Soleil augmente lorsqu'il s'en rapproche. Montrer que le rapport des vitesses au périhélie (point le plus proche du Soleil) et à l'aphélie (point le plus éloigné du Soleil) ne dépend que de l'excentricité de l'orbite. Calculer ce rapport pour la Terre dont l'excentricité de l'orbite vaut 0,0167, puis pour la comète de Halley dont l'excentricité de l'orbite vaut 0,97.

Exercice 17 : Satellite géostationnaire

Sachant que la Lune décrit son orbite autour de la Terre en 27,32 jours et que le demi grand-axe de son orbite vaut 384400 km, calculer l'altitude d'un satellite géostationnaire. On supposera que la masse de la Lune est négligeable par rapport à celle de la Terre (la Terre est environ 80 fois plus massive que la Lune).

Chapitre 2

Vie des galaxies

2.1 Milieu interstellaire

2.1.1 Mise en évidence expérimentale

Exercice 18 : Comptage d'étoiles

Dans une observation de comptage d'étoiles, toutes de même type, on constate que :

- pour une magnitude apparente $m \leq 7$, on compte un nombre d'étoiles $N(m)$ tel que $\log N(m) = 0,6m + 3$
 - pour $m \geq 9$, on obtient $\log N(m) = 0,6m + 2,4$
1. Déterminer l'extinction en magnitude A due au nuage traversé quand on passe de $m = 7$ à $m = 9$.
 2. On sait que la magnitude absolue des étoiles de ce type est $M = 5$. Déterminer :
 - La distance r_1 du front proche du nuage.
 - L'épaisseur $r_2 - r_1$ du nuage.

Exercice 19 : Densité des galaxies dans l'Univers

E. Hubble (1934, *The Distribution of Extra-Galactic Nebulae*, ApJ, **79**, 8) a mesuré que le nombre de galaxies $N(m)$ jusqu'à une certaine magnitude limite m par degré carré décroît avec la latitude galactique¹ b (pour $|b| > 15^\circ$). Ainsi, la densité de galaxies semble diminuer à mesure que l'on s'éloigne des pôles de la Galaxie ($b = \pm 90^\circ$). Cela ne reflète évidemment pas la distribution intrinsèque des galaxies dans l'Univers, mais résulte d'un effet d'absorption de la lumière par les particules de poussière contenues dans notre propre Galaxie.

On suppose d'une part que la poussière est répartie de façon homogène dans le disque galactique ($b = 0$) d'épaisseur $2h$, et d'autre part que toutes les galaxies sont des sources ponctuelles de même magnitude absolue M et uniformément distribuées dans l'espace avec une densité ρ .

1. Exprimer l'épaisseur ℓ de poussière traversée à une latitude b . En déduire l'extinction interstellaire $A(b)$, en notant A_0 l'atténuation en magnitude aux pôles galactiques.
2. Dans ces conditions, montrer que le nombre cumulé $N(m, b)$ de galaxies par degré carré à la magnitude apparente m et à la latitude b est donné par :

$$\log N(m, b) = 0,6m - 0,6 \frac{A_0}{\sin b} + K.$$

Exprimer la constante K en fonction des données du problème.

3. Hubble (1934) a mesuré, pour des galaxies de magnitude absolue moyenne $M = -14$:

$$\log N(m, b) = 0,6m - 0,15 \frac{1}{\sin b} - 4,50.$$

En déduire la densité moyenne ρ des galaxies dans l'Univers (en Mpc^{-3}).

1. L'angle entre le plan galactique et l'objet considéré, compté positivement vers le pôle nord galactique.

2.1.2 Extinction sélective et rougissement

Exercice 20 : Interprétation physique

Une étoile est située à 2 kpc de l'observateur sur une ligne de visée représentative des conditions moyennes du MIS, pour lesquelles l'extinction moyenne en bande V est de 0,3 mag/kpc. En admettant que cette extinction n'est due qu'à des grains dont les caractéristiques suivent :

- rayon $a = 0,1 \mu$,
- efficacité d'extinction $Q_{ext} = 1$,
- masse volumique : 1 g/cm^3 ,
- répartition des grains uniforme sur la ligne de visée ;

calculer :

1. la profondeur optique, puis la densité de colonne des grains le long de la ligne de visée,
2. Le nombre de grain par unité de volume sur cette ligne de visée,
3. la masse volumique des grains dans le MIS.

En admettant que la densité moyenne d'atomes d'H est de l'ordre de 8 atomes par cm^3 , et en négligeant la présence des atomes d'autres éléments, calculer (on donne la masse du proton $m = 1,67 \times 10^{-24} \text{ g}$) :

4. la masse volumique du gaz dans le MIS,
5. le rapport (masse volumique des grains)/(masse volumique du gaz).

Qu'en concluez vous sur le rôle des grains dans la matière du MIS ?

Exercice 21 : Rougissement et température

En admettant que l'on observe un objet à la température T , dont le spectre est donné par la loi de Planck :

$$W(\lambda) = C \lambda^{-5} \left[\exp\left(\frac{hc}{\lambda kT}\right) - 1 \right]^{-1}$$

En présence d'une extinction $A(\lambda) = a/\lambda$, montrez que :

1. pour $\lambda \ll hc/kT$ (limite de Wien), dans la partie bleue du spectre, le spectre observé est celui d'un corps noir à une température T' , que l'on déterminera.
2. pour $\lambda \gg hc/kT$ (limite de Rayleigh-Jeans), dans la partie rouge du spectre, le spectre observé est identique à celui de la source.

Exercice 22 : Rougissement et couleur

Une étoile $G5V$ a une magnitude absolue $M_V = 5$, et un indice de couleur intrinsèque $(B - V)_0 = 0,7$. On observe une étoile de ce type spectral, située à une distance de 5 kpc

1. Calculer les magnitudes apparentes m_{V_0} et m_{B_0} qu'aurait cette étoile s'il n'y avait aucune extinction.
2. L'étoile est située dans une région où l'extinction du MIS peut être caractérisée par :
 - une extinction de 0,3 mag/kpc en bande V ,
 - une loi d'extinction de la forme : $A(\lambda) = A_V \times (\lambda_V/\lambda)$

Calculer les extinctions A_V et A_B qu'elle subit du fait de cette loi d'extinction

3. Calculer l'excès de couleur E_{B-V} de cette étoile par rapport à une étoile très proche de même type spectral.
4. Calculer l'indice $(B - V)$ observé en présence d'extinction.
5. À l'aide du diagramme HR, déterminer le type spectral apparent de l'étoile.
6. Qu'en concluez vous sur l'effet de l'extinction sélective sur la « couleur » d'une étoile.

On rappelle les longueurs d'onde effectives des bandes V et B : $\lambda_V = 550 \text{ nm}$ et $\lambda_B = 440 \text{ nm}$.

Exercice 23 : Excès de couleur

On a déterminé par spectroscopie le type spectral $B2V$ pour une étoile lointaine. L'indice de couleur intrinsèque de ce type d'étoiles est $(B - V)_0 = -0,25$. Par photométrie on a déterminé un indice de couleur observé $(B - V) = 2,25$.

1. Déterminer l'extinction A_V de cette étoile à partir de la loi de variation de A_V/E_{B-V} en fonction de $1/\lambda$ (Fig. 2.1).
2. Quelle sera l'extinction de cette étoile dans la bande photométrique infrarouge K ?
3. Qu'en concluez vous sur l'effet de l'extinction dans l'infrarouge, comparé à celui dans le visible ?

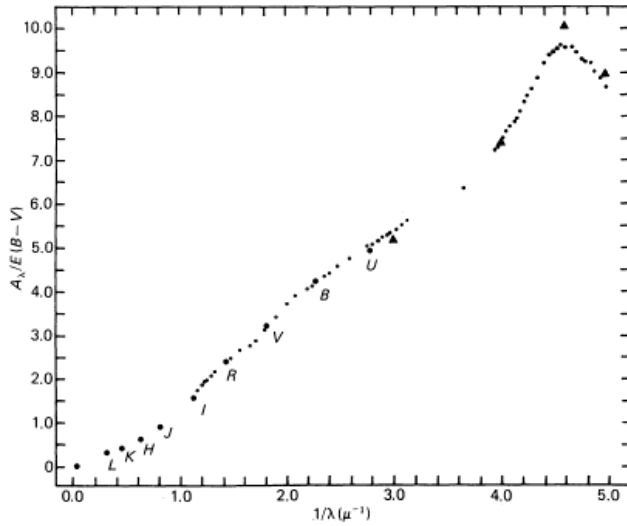


FIGURE 2.1 – Loi de couleur : A_λ/E_{B-V} en fonction de $1/\lambda$. On y lit p.ex. que $A_V/E_{B-V} \simeq 3,1$.

TABLE 2.1 – Propriétés quantitatives de la séquence de Hubble.

Propriétés	E,S0	S0a,Sa	Sab,Sb	Sbc,Sc	Scd,Sd	Sm,Im
$M_{\text{totale}} (10^{10} M_\odot)$		22,6	32,4	19,0	7,9	1,6
$M_{\text{gaz}} \text{ (H neutre en } 10^9 M_\odot)$	1,24	5,62	15,14	15,85	9,33	2,40
Diamètre (kpc)	21,1	19,8	25,1	22,4	17,7	8,5

2.2 Galaxies

2.2.1 Classification morphologique des galaxies

Exercice 24 : Propriétés « physiques » de la classification

En vous servant du tableau 2.1, répondez aux questions suivantes :

1. Que peut-on dire sur la fraction de gaz dans les galaxies selon le type morphologique ?
2. Que peut-on dire de la densité surfacique de masse, en supposant que toute la masse des galaxies est concentrée dans un disque mince ?

2.2.2 Constituants des galaxies

Exercice 25 : Les étoiles

Si l'on considère une sphère de rayon 10 kpc peuplée par 10^{11} étoiles dont le rayon est égal à celui du Soleil, calculez la fraction de volume occupé par les étoiles.

Exercice 26 : La matière noire

On considère une galaxie et ses étoiles réparties uniformément en fonction de la distance au centre de la galaxie. On désigne par $M(R)$ la masse totale des étoiles contenues à l'intérieur de la sphère de rayon R .

1. Si les étoiles sont animées d'un mouvement de rotation uniforme autour du centre de la galaxie, donner la relation entre l'accélération normale a d'une étoile située à la distance R de ce centre et sa vitesse V .
2. Écrire la relation fondamentale de la dynamique pour cette étoile. En déduire la relation entre V et R . Comment varie alors V en fonction de R ?
3. Dans les galaxies spirales, on observe au-delà d'un certain rayon R_0 que la vitesse de rotation du gaz et des étoiles atteint une valeur limite $V_0 > 0$. Commentez.
4. Quelle forme de la densité de masse $\rho(R)$ doit-on présumer pour atteindre une valeur constante de V quand R augmente ? On rappelle que, sous l'hypothèse de symétrie sphérique, $dM = 4\pi R^2 \rho(R) dR$.

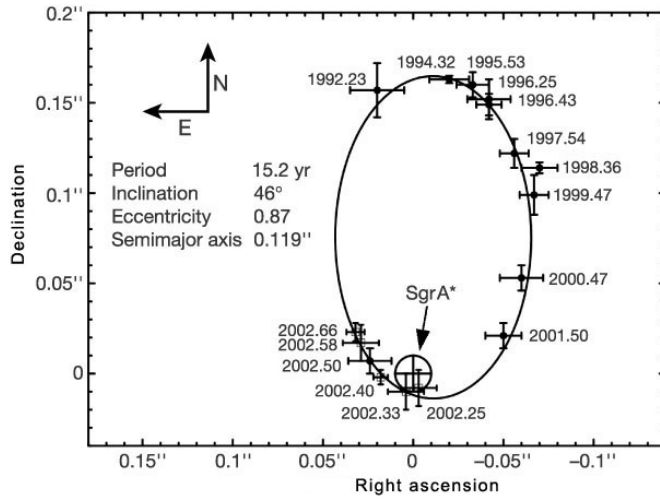


FIGURE 2.2 – Orbite de l'étoile S2 autour du centre galactique SgrA* (Schödel et al. 2002).

2.2.3 Exemple de galaxie : la Voie Lactée

Exercice 27 : Le centre galactique

La Fig. 2.2 montre l'orbite de l'étoile ayant la plus grande vitesse autour du centre galactique. À partir des caractéristiques de cette orbite (période de $T = 15,2$ ans, et demi grand-axe de $a = 0''.119$), retrouver l'estimation de la masse incluse dans ce rayon au centre de notre Galaxie en utilisant la troisième loi de Kepler. On rappelle que nous sommes à environ $R = 8,5$ kpc du centre galactique.

La masse *visible* au centre galactique étant estimée à environ 10^6 masses solaires, en déduire une estimation de la masse centrale invisible de notre Galaxie. Proposer une explication.

2.2.4 Le groupe local

Exercice 28 : Recensement

Dans la Table 2.2, compter le nombre de galaxies ayant un diamètre plus petit que 6 kpc, et celles ayant un diamètre plus grand. Quelles sont les galaxies qui dominent en nombre ? Et en luminosité totale ?

2.2.5 Distribution des galaxies dans l'univers

Exercice 29 : Fonction de luminosité

La fonction de luminosité $\Phi(L)$ des galaxies s'exprime généralement à l'aide de la fonction de Schechter (1976) :

$$\Phi(L) dL = \Phi^* \left(\frac{L}{L^*} \right)^\alpha \exp \left(-\frac{L}{L^*} \right) dL/L^*$$

où $\Phi(L)dL$ est le nombre de galaxies de luminosité comprise entre L et $L + dL$ par unité de volume (p.ex. par Mpc^3). Pour les galaxies de champ, on a $\alpha \sim -5/4$, $L_B^* \sim 2 \times 10^{10} L_\odot$ et $\Phi^* \sim 5 \times 10^{-3} \text{ Mpc}^{-3}$.

1. Quelle est la signification physique de la loi de Schechter ?
2. Exprimer la loi de Schechter en magnitudes absolues.

Exercice 30 : Fréquence de collision dans un amas

On considère un amas de galaxies ayant les caractéristiques suivantes :

- il est supposé sphérique, de diamètre D_a ,
- il contient N_g galaxies identiques et réparties uniformément dans l'amas,
- les galaxies sont supposées animées d'une vitesse quadratique moyenne $v_g/\sqrt{2}$ (la vitesse *relative* quadratique moyenne est donc v_g).

1. Donner l'expression de la densité numérique de galaxies (le nombre par unité de volume) n_g dans l'amas.
2. On suppose que les galaxies ont un diamètre typique d_g . En modélisant les galaxies comme des sphères dures (« boules de billard »), donner l'expression de la section efficace S_{eff} lors d'une interaction (collision) entre deux galaxies.

TABLE 2.2 – Galaxies du Groupe Local, avec leurs noms, leurs positions sur le ciel, le type de Hubble, la distance, les diamètres physiques et angulaires.

Nom	RA	Dec (J2000)	Type Hubble	Mag. Bleue	Distance $\times 10^6$ ly	Diamètre $\times 10^3$ ly	Taille arcmin
WLM	0 02.0	-15 28	lrr	11.3	2.0	7	12
IC 10	0 20.3	59 19	lrr	11.7	4.0	6	5
NGC 147	0 33.1	48 31	E5	10.4	2.2	10	16
Andromeda III	0 35.3	36 31	E5		2.2	3	5
NGC 185	0 38.9	48 20	E3	10.1	2.2	6	9
NGC 205 (M110)	0 40.3	41 41	E5	8.6	2.2	10	16
Andromeda IV	0 42.5	40 34					
NGC 221 (M32)	0 42.7	40 52	E2	9.0	2.2	5	8
NGC 224 (M31)	0 42.7	41 16	Sb	4.4	2.2	200	312
Andromeda I	0 45.7	38 00	E3	14.4	2.2	2	3
SMC	0 52.7	-72 54	lrr	2.8	0.3	15	172
Sculptor	0 59.9	-33 42	E3	9.1	0.2	1	17
Pisces	1 03.7	22 03	lrr	15.5	3.0	0.5	1
IC 1613	1 04.9	02 07	lrr	10.0	2.5	12	17
Andromeda II	1 16.3	33 25	E2		2.2	2	3
NGC 598 (M33)	1 33.9	30 39	Sc	6.3	2.5	45	62
Fornax	2 39.6	-34 31	E3	8.5	0.5	3	21
UGCA 86	3 59.9	67 08					
LMC	5 23.6	-69 47	lrr	0.6	0.2	20	343
Carina	6 41.7	-50 58	E4		0.3	0.5	6
Leo A	9 59.4	30 45	lrr	12.7	5.0	7	5
Antlia	10	-30	E				
Leo I	10 08.5	12 18	E3	11.8	0.6	1	6
Sextans A	10 11.1	-04 43	lrr				
Sextans I	10 12.8	-01 41	E		0.3	3	34
Leo II	11 13.5	22 10	E0	12.3	0.6	0.5	3
GR8	12 59.2	14 09	lrr	14.6	4.0	0.2	
Ursa Minor	15 08.8	67 07	E5		0.3	1	11
Draco	17 20.2	57 55	E3		0.3	0.5	6
Milky Way	17 45.7	-29 00	Sbc		0.03	130	
SagDEG	18 55.0	-30 30	E		0.08		
SagDIG	19 30.0	-17 41	lrr	15.6	4.0	5	4
NGC 6822	19 44.9	-14 46	lrr	9.3	1.7	8	16
DDO 210	20 47.0	-12 51	lrr	15.3	3.0	4	5
IC 5152	22 02.9	-51 17	lrr	11.7	2.0	5	9
Tucana	22 41.9	-64 25					
Pegasus	23 28.6	14 46	lrr	12.4	5.0	8	6

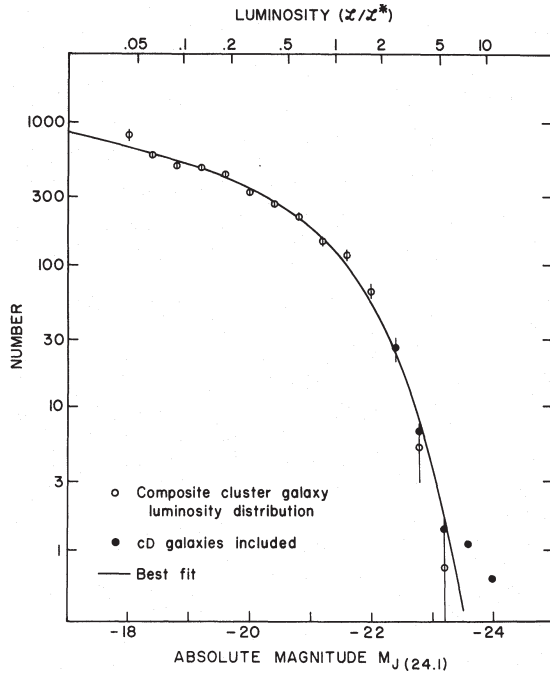


FIGURE 2.3 – Fonction de luminosité des galaxies dans les amas d'Abell (Schechter, 1976).

- Donner l'expression du nombre d'interactions que subit une galaxie de l'amas pendant un temps Δt . En déduire, pour une galaxie, le temps caractéristique de collision τ_c et le libre parcours moyen ℓ_c .
- En déduire le temps T_c entre deux interactions au sein de l'amas.
- Application numérique : considérons un amas avec $D_a = 7$ Mpc, $N = 850$ galaxies, $d_g = 20$ kpc et $v_g = 650$ km/s. Explicitez le calcul numérique du temps moyen entre deux collisions pour cet amas.

2.2.6 Équilibre gravitationnel

Exercice 31 : Théorème du Viriel scalaire

On considère le système Terre-Soleil. Le Soleil, de masse M_\odot , est pris comme référence du mouvement ($v_\odot = 0$). On note M_\oplus et v_\oplus la masse et la vitesse de la Terre.

- Écrire l'expression de l'énergie cinétique du système Terre-Soleil.
- Énoncer le théorème du Viriel. En déduire l'expression de la distance D d'équilibre entre la Terre et le Soleil. Faire l'application numérique, sachant que $M_\odot = 2 \times 10^{30}$ kg, $M_\oplus = 5,97 \times 10^{24}$ kg et $v_\oplus = 30$ km/s.
- On considère un système d'étoiles binaires en équilibre. Pour simplifier, les étoiles sont prises de masses égales $M_1 = M_2 = M_\odot$ et leurs vitesses sont considérées comme égales $v_1 = v_2 = v$.
Expliciter la relation entre la distance entre ces deux étoiles et leur vitesse et calculer cette vitesse v pour les distances d'équilibre D suivantes : 1 UA, 10 UA et 100 UA.

Exercice 32 : Autres applications du théorème du Viriel

On va maintenant utiliser le théorème du Viriel pour remplir le tableau ci-dessous, donnant les rayons, masses et vitesse caractéristiques de différents systèmes stellaires.

Système	R	V [km/s]	M/M_\odot
Amas globulaire	10 pc	10	
Galaxie	15 kpc	200	
Amas de galaxies	1 Mpc	1000	

Exercice 33 : Temps cinématique

On va maintenant calculer le temps cinématique t_c pour différents systèmes stellaires.

Système	R	M/M_\odot	t_c [ans]
Amas ouvert	1 pc	500	
Amas globulaire	10 pc	10^5	
Galaxie	15 kpc	10^{11}	
Amas de galaxies	1 Mpc	10^{14}	

Que remarquez-vous sur ces temps cinématiques pour les différents systèmes ?

Chapitre 3

Cosmologie

3.1 Espace et temps absolus

Exercice 34 : La faiblesse de la force de gravitation

Marcel et Naomi ressentent l'un pour l'autre une certaine attirance... Quelle part en revient tout bêtement à la force de gravitation universelle, lorsque leurs centres de gravité respectifs sont distants de 1 mètre ? Quelle masse m , au même point de la Terre, présente un poids égal à cette force ? Marcel pèse 700 N, et Naomi 580 N. Le rayon de la Terre à Lyon sera supposé égal à $R_{\oplus} = 6375$ km, et la masse de la Terre est de $M_{\oplus} = 5,97 \times 10^{24}$ kg.

3.2 La rupture relativiste

3.2.1 Relativité générale

Exercice 35 : L'équivalence gravité/accélération

Pour la Relativité Générale, gravitation et accélération sont équivalentes, mais cette équivalence n'est que *locale* : aucune expérience de physique ne permet de distinguer les effets de l'une de ceux de l'autre, à *condition* de se limiter à un « petit » domaine spatial.

En reprenant l'expérience de pensée de l'« ascenseur d'Einstein, » pouvez-vous montrer qu'il est en effet facile de distinguer pesanteur et accélération par la fusée si on abandonne la localité.

3.2.2 Les tests

Exercice 36 : Le décalage gravitationnel vers le rouge

Une lampe spectrale émettant dans la raie $H\alpha$ ($\lambda_0 = 656,3$ nm) est utilisée pour communiquer à partir d'une capsule en orbite serrée autour d'une étoile à neutrons. Le rayon de l'orbite est $R = 1000$ km, la masse de l'étoile de $M = 1,5 M_{\odot}$. À quelle longueur d'onde λ le vaisseau qui a lancé la capsule, et se tient prudemment à grande distance, doit-il rechercher les signaux ?

Comparer cet effet gravitationnel au décalage par effet Doppler du signal de la sonde en orbite circulaire autour de l'étoile à neutrons.

3.3 Le Big Bang

3.3.1 Film des débuts

Exercice 37 : Nucléosynthèse primordiale ou non ?

Les éléments légers H, ^2H , ^3H , ^4He , ^7Li sont nés avec le Big Bang. Mais d'où proviennent tous les autres éléments « lourds », ceux qui entrent dans la composition des objets du quotidien ?

3.3.2 Expansion de l'Univers...

Exercice 38 : ... limitée par c ?

Plus une galaxie est éloignée de notre Voie Lactée, plus les astronomes lui trouvent une vitesse d'éloignement élevée. C'est l'expansion de l'Univers. Mais, quand la distance croît sans cesse, elle atteint un moment une valeur d_c telle que :

$$V = H_0 d_c > c$$

Étonnant, non ?

Exercice 39 : ... la même partout ?

La radiogalaxie 3C 171 (la 171e entrée dans le troisième catalogue de radiources établi par l'observatoire de Cambridge) est relativement lointaine ; entraînée par l'expansion de l'Univers, elle présente une vitesse de fuite de 63 000 km/s.

Montrer que malgré cela, l'astronome Pr. Snurp, qui a là-bas découvert l'expansion de l'Univers, comme Hubble l'a fait pour nous, a lui aussi trouvé une loi qui s'écrit :

$$v_0 = X_0 d_0,$$

v_0 étant la vitesse mesurée à partir de 3C 171 pour une galaxie lointaine située à la distance d_0 de 3C 171, et que la constante de Snurp X_0 partage la valeur de H_0 .

Ainsi, d'une planète de 3C 171, comme de la Terre, on observe la même expansion universelle, avec la même géométrie, et le même taux...

3.3.3 Constante de Hubble & Co.

Dans les exercices suivants, on supposera la constante de Hubble égale à $H_0 = 70 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$.

Exercice 40 : Le facteur d'expansion de l'espace

La constante de Hubble H_0 est usuellement exprimée en kilomètres par seconde et par mégaparsec, mais cela ne parle guère au sens commun. Quelle est la valeur de l'accroissement annuel d'un kilomètre ?

Exercice 41 : Temps de Hubble

Calculez le temps de Hubble $t_H = 1/H_0$. Quelle est sa signification physique ? Quelle conclusion pouvez-vous en tirer sur l'âge de l'Univers ?

Exercice 42 : Densité critique

Calculer la densité critique $\rho_C = \frac{3c^2 H_0^2}{8\pi G}$. En quelles unités s'exprime-t-elle ?

Exercice 43 : Âge de l'Univers

À partir de la définition de H_0 et de la relation $R \propto t^{2/3}$ entre le facteur d'échelle R et le temps t dans le cas d'un Univers euclidien ($k = 0$) dominé par la matière ($\Omega_M = 1$, $\Omega_\Lambda = 0$), trouver la relation entre H_0 et t .

3.4 Modèles cosmologiques

Exercice 44 : Modèle FLRW

Dans le cas d'un Univers de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker à courbure spatiale nulle ($k = 0$), on a :

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \frac{\Lambda}{3} + \frac{8\pi G}{3}\rho. \quad (3.1)$$

Par ailleurs, l'équation de conservation de l'énergie s'écrit toujours :

$$\dot{\rho} = -3\left(\rho + \frac{P}{c^2}\right)\frac{\dot{R}}{R}. \quad (3.2)$$

1. Que signifient les différents termes – R , Λ , ρ – de l'équation (3.1) ? Quelle est la dimension de \dot{R}/R ? Comment s'appelle cette quantité ?

2. Si l'on considère le fluide parfait dont l'équation d'état – reliant la pression P à la densité ρ – est donnée par $P = w\rho c^2$, que devient l'équation (3.2) ? Vérifier que l'on obtient alors, en notant $\rho(R_0) = \rho_0$:

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{R}{R_0} \right)^{-3(1+w)}.$$

3. Dans le cas où $\Lambda = 0$, en déduire que R est régi par une équation différentielle du type :

$$\dot{R} = \alpha R^{-\eta},$$

avec $\eta = (1 + 3w)/2$. Expliciter la valeur de α .

4. On peut montrer que la solution générale de l'équation différentielle précédente est de la forme :

$$\frac{R}{R_0} = \left(\frac{t}{t_0} \right)^\gamma.$$

Déterminer γ en fonction de η , puis de w .

5. Exprimer alors \dot{R}/R en fonction de t .
6. Dans le cas d'un Univers dominé par la matière ($w = 0$), comment est relié l'âge de l'Univers t_0 à la constante de Hubble H_0 ? Même question dans le cas d'un univers dominé par les radiations ($w = 1/3$).

Exercice 45 : *Redshift* cosmologique

La radiogalaxie 4C 41.17 montre une raie spectrale intense à 582,2 nm. Cette raie est identifiée comme la raie Lyman alpha de l'hydrogène. En laboratoire, sur la Terre, la longueur d'onde de cette raie est de 121,5 nm.

1. Quel est le redshift de la radiogalaxie 4C 41.17 ?
2. Quel était le facteur d'échelle de l'Univers à l'époque où les atomes d'hydrogène de 4C 41.17 émettaient cette raie ?
3. À quelle époque t_{em} la radiogalaxie 4C 41.17 de l'exercice précédent a-t-elle émis la lumière que nous recevons aujourd'hui à t_0 ? On supposera un Univers critique dominé par la matière, avec un âge de $t_0 = 13,5 \times 10^9$ ans.

Exercice 46 : Temps de vol, distance, et expansion...

Il y a dix milliards d'années, ce photon que nous recevons aujourd'hui a quitté une lointaine galaxie.

1. Cette galaxie se trouvait-elle à dix milliards d'années-lumière de nous au moment de l'émission ?
2. Cette galaxie se trouve-t-elle aujourd'hui à dix milliards d'années-lumière de nous ?

Chapitre 4

Retour sur Terre : nos repères dans le ciel

4.1 Se positionner dans le ciel

Exercice 47 : Repérage

1. Quelles sont les coordonnées horizontales des quatre points cardinaux ?
2. Peut-on définir les coordonnées horizontales pour un observateur installé au pôle Nord géographique ou au pôle Sud ?
3. Pour quelles valeurs de la hauteur et de la distance zénithale un astre est-il visible, c'est-à-dire au dessus de l'horizon ?

4.2 Mouvement diurne

Exercice 48 :

1. Dans quelle direction se trouve un astre au moment de sa culmination en un lieu de latitude $+50^\circ$?
2. Même question pour un lieu situé à l'équateur.
3. La hauteur d'un astre varie-t-elle au cours du mouvement diurne au pôle Nord ?

Exercice 49 : Mouvement diurne

1. Comment varie l'azimut d'un astre au cours du mouvement diurne, en un lieu de latitude $+50^\circ$? Et aussi -50° de latitude. Sur la Fig. 4.1, on a représenté la situation en un lieu de l'hémisphère Sud (latitude = -50°) ; P est alors en-dessous de l'horizon et P' est au-dessus.
2. Les astres se lèvent-ils du côté de l'Est et se couchent-ils du côté de l'Ouest aussi bien dans l'hémisphère Nord que dans l'hémisphère Sud ?
3. Dans quelle direction géographique un astre culmine-t-il en un lieu de latitude -50° ?
4. Le mouvement diurne est-il observé dans le même sens pour un observateur de l'hémisphère Nord ou un observateur de l'hémisphère Sud ?

Exercice 50 : Coordonnées horaires

1. Quelle est la relation entre la déclinaison et la distance polaire d'un astre ?
2. Quelles sont les coordonnées horaires des quatre points cardinaux en un lieu de latitude ϕ ?
3. Que vaut la déclinaison du zénith en fonction de la latitude du lieu ?

Exercice 51 : Coordonnées équatoriales

1. Une étoile traverse le méridien sud à une hauteur de 85° , et le méridien nord à 45° . Trouver la déclinaison de l'étoile et la latitude de l'observateur.
2. Où ces affirmations sont-elles vraies ?
 - (a) Castor (α -Gem, déclinaison $+31^\circ 54'$) est circumpolaire.
 - (b) Bételgeuse (α -Ori, $7^\circ 24'$) culmine au zénith.
 - (c) α -Cen ($-60^\circ 46'$) s'élève à une hauteur de 20° au méridien.

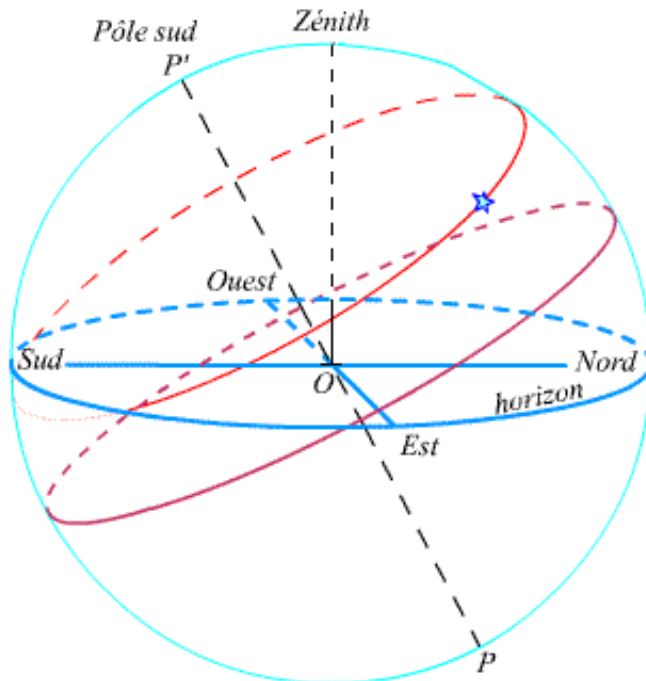


FIGURE 4.1 – Rotation d'une étoile vue de l'hémisphère sud (latitude = -50°).

4.3 Mouvement du Soleil

4.3.1 Année sidérale, année tropique

Exercice 52 : Mouvement du Soleil, jour solaire

1. Que valent la hauteur maximale et la hauteur minimale du Soleil en chacun des lieux considérés : 50° , 75° , 10° , 20° ?
2. À quelle condition doit satisfaire la latitude d'un lieu pour que le Soleil n'ait ni lever ni coucher ?
3. Comment comprendre l'expression « soleil de minuit » ?
4. À quelle condition doit satisfaire la latitude d'un lieu pour que le Soleil puisse passer à son zénith ?
5. Comment comprendre l'expression « tropique du Cancer » et « tropique du Capricorne » ? on pourra discuter cette question, en particulier, en consultant une carte céleste.