

Fascicule de TD

avec solutions

Université Claude Bernard Lyon1



FIGURE 1 – La gravure sur bois dite « de Flammarion ».

Astrophysique pour la licence
Université Lyon 1

Version du 23 avril 2014

Table des matières

1	Vie des étoiles	3
1.1	La lumière des étoiles	3
1.1.1	Photosphère et température effective	3
	Exercice 1 : Luminosité du Soleil	3
	Exercice 2 : Rayon des étoiles	3
	Exercice 3 : Équilibre radiatif de la Terre	3
1.1.2	Système de magnitudes	4
	Exercice 4 : Système binaire	4
1.2	Classification spectrale	4
1.2.1	Mesures des distances	4
	Parallaxe trigonométrique	4
	Exercice 5 : Incertitude	4
	Exercice 6 : Astrométrie spatiale	4
	Exercice 7 : Parallaxe et magnitude absolue	4
	Exercice 8 : Méthode du point convergent	5
1.2.2	Classification stellaire	5
	Exercice 9 : Types spectraux	6
	Exercice 10 : Diagramme HR	6
1.2.3	Mesure des rayons	6
	Exercice 11 : Interférométrie	6
1.2.4	Mesure de masse (étoiles doubles)	6
	Exercice 12 : Système binaire	6
	Exercice 13 : Le paradoxe d'Algol	7
1.3	Les systèmes planétaires	7
1.3.1	Les lois de Kepler	7
	Exercice 14 : Invariant de Runge-Lenz	7
	Exercice 15 : Orbite de Pluton	8
	Exercice 16 : Vitesses périhélique et aphélique	9
	Exercice 17 : Satellite géostationnaire	9
2	Vie des galaxies	10
2.1	Milieu interstellaire	10
2.1.1	Mise en évidence expérimentale	10
	Exercice 18 : Comptage d'étoiles	10
	Exercice 19 : Densité des galaxies dans l'Univers	10
2.1.2	Extinction sélective et rougissement	11
	Exercice 20 : Interprétation physique	11
	Exercice 21 : Rougissement et température	12
	Exercice 22 : Rougissement et couleur	12
	Exercice 23 : Excès de couleur	13
2.2	Galaxies	13
2.2.1	Classification morphologique des galaxies	13
	Exercice 24 : Propriétés « physiques » de la classification	13
2.2.2	Constituants des galaxies	14
	Exercice 25 : Les étoiles	14
	Exercice 26 : La matière noire	14
2.2.3	Exemple de galaxie : la Voie Lactée	15
	Exercice 27 : Le centre galactique	15
2.2.4	Le groupe local	15

	Exercice 28 : Recensement	15
2.2.5	Distribution des galaxies dans l'univers	15
	Exercice 29 : Fonction de luminosité	15
	Exercice 30 : Fréquence de collision dans un amas	17
2.2.6	Équilibre gravitationnel	17
	Exercice 31 : Théorème du Viriel scalaire	17
	Exercice 32 : Autres applications du théorème du Viriel	18
	Exercice 33 : Temps cinématique	18
3	Cosmologie	19
3.1	Espace et temps absolus	19
	Exercice 34 : La faiblesse de la force de gravitation	19
3.2	La rupture relativiste	19
3.2.1	Relativité générale	19
	Exercice 35 : L'équivalence gravité/accélération	19
3.2.2	Les tests	19
	Exercice 36 : Le décalage gravitationnel vers le rouge	19
3.3	Le Big Bang	20
3.3.1	Film des débuts	20
	Exercice 37 : Nucléosynthèse primordiale ou non ?	20
3.3.2	Expansion de l'Univers...	20
	Exercice 38 : ... limitée par c ?	20
	Exercice 39 : ... la même partout ?	21
3.3.3	Constante de Hubble & Co.	21
	Exercice 40 : Le facteur d'expansion de l'espace	21
	Exercice 41 : Temps de Hubble	21
	Exercice 42 : Densité critique	22
	Exercice 43 : Âge de l'Univers	22
3.4	Modèles cosmologiques	22
	Exercice 44 : Modèle FLRW	22
	Exercice 45 : <i>Redshift</i> cosmologique	23
	Exercice 46 : Temps de vol, distance, et expansion...	23
4	Retour sur Terre : nos repères dans le ciel	24
4.1	Se positionner dans le ciel	24
	Exercice 47 : Repérage	24
4.2	Mouvement diurne	24
	Exercice 48 :	24
	Exercice 49 : Mouvement diurne	25
	Exercice 50 : Coordonnées horaires	26
	Exercice 51 : Coordonnées équatoriales	26
4.3	Mouvement du Soleil	27
4.3.1	Année sidérale, année tropique	27
	Exercice 52 : Mouvement du Soleil, jour solaire	27

Chapitre 1

Vie des étoiles

1.1 La lumière des étoiles

1.1.1 Photosphère et température effective

Exercice 1 : Luminosité du Soleil

Calculer la luminosité du Soleil à partir de sa température effective $T_{\odot} \approx 5770$ K et de son rayon $R_{\odot} \approx 6,96 \times 10^8$ m.

Corrigé : En appliquant l'équation $T_e = \left(\frac{L}{4\pi R_p^2 \sigma} \right)^{1/4}$ avec la constante de Stefan $\sigma = 5,67 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$, on trouve la luminosité $L_{\odot} \approx 3,83 \times 10^{26} \text{ W}$.

Exercice 2 : Rayon des étoiles

Déterminer le rayon (en unité solaire), la longueur d'onde de Wien et la couleur « visible » des étoiles suivantes :

1. Naine blanche : $L = 10^{-2} L_{\odot}$, $T_e = 20000$ K
2. Géante rouge : $L = 10^2 L_{\odot}$, $T_e = 4200$ K
3. Supergéante : $L = 10^5 L_{\odot}$, $T_e = 6000$ K

Rappel de la loi de Wien : $\lambda_{\max} T = 2898 \text{ } \mu\text{m K}$.

Corrigé :

Type stellaire	$L [L_{\odot}]$	$T_e [\text{K}]$	$R [R_{\odot}]$	$\lambda_{\max} [\text{nm}]$	Couleur
Naine blanche	10^{-2}	20000	0,008	145	Blanc
Géante rouge	10^2	4200	18,8	690	Rouge
Supergéante	10^5	6000	291,7	483	Bleu

Exercice 3 : Équilibre radiatif de la Terre

Soit L la puissance lumineuse du Soleil, R le rayon de la Terre, D la distance Terre-Soleil et T_e la température effective à la surface de la Terre :

1. Écrire la relation entre L et $F(D)$, le flux lumineux à une distance D du Soleil. En déduire la puissance lumineuse totale P_r reçue par la Terre.
2. Utiliser la loi de Stefan et expliciter le flux lumineux F_e , puis la puissance totale P_e , rayonnés par la Terre.
3. Écrire l'égalité des puissance reçue et rayonnée à la surface de la Terre, en déduire l'expression de la température T_e en fonction des données du problème.
4. Application numérique, sachant que $L = 3,85 \times 10^{26} \text{ W}$, $R = 6400 \text{ km}$, $D = 1,500 \times 10^{11} \text{ m}$, $\sigma = 5,67 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$.
5. Commenter sur la validité et les limites de ce modèle.

Corrigé :

1. $F(D) = L/4\pi D^2$, $P_r = LR^2/(4D^2)$
2. $F_e = \sigma T_e^4$ et $P_e = 4\pi R^2 \sigma T_e^4$
3. $P_e = P_r$ d'où $T_e = [L/(16\pi D^2 \sigma)]^{(1/4)} = 278 \text{ K}$.

1.1.2 Système de magnitudes

Exercice 4 : Système binaire

Les deux composantes de l'étoile α du Centaure située à 1,32 pc de distance ont des magnitudes visuelles (magnitude apparente dans la bande V) de 0,30 et 1,70. On demande :

1. Le rapport des flux des deux étoiles dans la bande V .
2. La magnitude visuelle globale du système.
3. La correction qu'il faut apporter aux magnitudes apparentes de ce système pour obtenir les magnitudes absolues.

Corrigé : On rappelle que la magnitude apparente m est liée au flux F par $m = -2,5 \log_{10}(F/F_0)$.

1. Le rapport des flux des deux composantes de α Cen dépend de la différence de magnitudes et vaut :

$$F_2/F_1 = 10^{(m_1-m_2)/2,5} = 0,28$$

2. Pour obtenir la magnitude apparente visuelle globale du système m_{tot} , il faut calculer le flux total (les puissances émises par les deux composantes s'ajoutent) :

$$m_{tot} = -2,5 \log(F_1/F_0 + F_2/F_0) = -2,5 \log(10^{-m_1/2,5} + 10^{-m_2/2,5}) = 0,04$$

3. La correction qu'il faut apporter aux magnitudes apparentes m de ce système pour obtenir les magnitudes absolues M vaut :

$$\mu = m - M = 5 \log(D/10 \text{ pc}) = -4,4$$

1.2 Classification spectrale

1.2.1 Mesures des distances

Parallaxe trigonométrique

Exercice 5 : Incertitude

Relier l'incertitude sur la distance ΔD à celle sur la parallaxe Δp .

Corrigé : Il existe deux méthodes pour trouver le résultat demandé :

- En différenciant l'équation $D = 1/p$, on obtient $dD = -(1/p^2)dp$, d'où l'incertitude en prenant la valeur absolue :

$$\Delta D = \frac{1}{p^2} \Delta p = \frac{D}{p} \Delta p \quad \text{soit finalement} \quad \Delta D/D = \Delta p/p.$$

- On peut également prendre le logarithme de l'équation $D = 1/p$, ce qui donne $\ln D = -\ln p$, puis on différencie : $d \ln D = -d \ln p$, soit $dD/D = -dp/p$. En prenant la valeur absolue, on retrouve le résultat précédent.

Exercice 6 : Astrométrie spatiale

Considérons les deux missions d'astrométrie spatiale : Hipparcos (1989), avec une incertitude absolue sur la mesure de la parallaxe typique de $\Delta p = 2 \text{ mas}$, et Gaia (2013), avec $\Delta p = 7 \mu\text{as}$. Quelles sont les précisions obtenues à une distance de 100 pc ? de 1000 pc ? À quelle distance aura-t-on une erreur de 100% ?

Corrigé : Les étoiles situées à $D = 100 \text{ pc}$ ont une parallaxe $p = 1/100 = 0,01'' = 10 \text{ mas}$. La précision obtenue sera de

$$\text{Hipparcos : } \frac{\Delta D}{D} = \frac{\Delta p}{p} = \frac{2 \times 10^{-3}}{10^{-2}} = 2 \times 10^{-1} = 20\% \quad \text{Gaia : } \frac{\Delta D}{D} = \frac{\Delta p}{p} = \frac{7 \times 10^{-6}}{10^{-2}} = 7 \times 10^{-4} = 0,07\%$$

Pour des étoiles à $D = 1000 \text{ pc}$, $p = 1 \text{ mas}$, et les précisions deviennent 10 fois moins bonnes : 200% avec Hipparcos et 0,7% avec Gaia.

On aura une erreur de 100% quand $\Delta D = D$, soit $\delta p = p$. La distance correspondante s'obtient donc par

$$\text{Hipparcos : } D_{\max} = 1/p = 1/2 \times 10^{-3} = 500 \text{ pc} \quad \text{Gaia : } D_{\max} = 1/p = 1/7 \times 10^{-6} = 143 \text{ kpc}$$

Exercice 7 : Parallaxe et magnitude absolue

Le tableau suivant donne la magnitude apparente m_V et la parallaxe p de trois étoiles. Calculer leur distance D avec son incertitude, l'erreur relative sur la distance $\Delta D/D$ et leur magnitude absolue M_V .

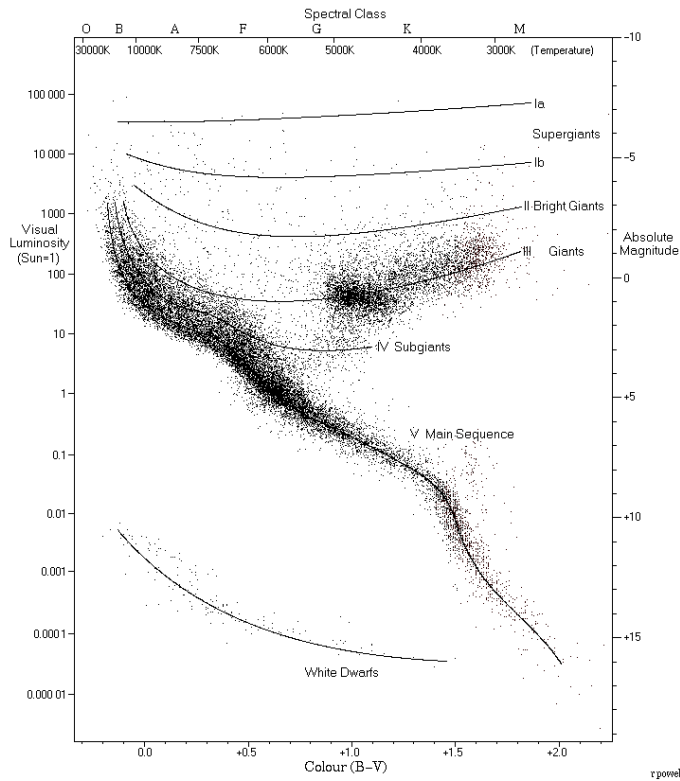


FIGURE 1.1 – Diagramme de Hertzsprung-Russell des 22000 étoiles du catalogue Hipparcos et de 1000 étoiles faiblement lumineuses du catalogue Gliese des étoiles proches.

	α CMa (Sirius)	α Tau (Aldebaran)	α Ori (Bételgeuse)
m_V	-1,47	0,85	0,58
p (mas)	$379,2 \pm 1,6$	$50,1 \pm 1,0$	$7,6 \pm 1,6$

Corrigé :

	α CMa	α Tau	α Ori
D (pc)	$2,637 \pm 0,012$	$19,96 \pm 0,40$	132 ± 28
$\Delta D/D$	0,4%	2%	21%
M_V	1,42	-0,65	-4,99

Étant donné la forme de la relation donnant la distance D à partir de la parallaxe p , leurs incertitudes relatives sont égales, ce qui permet d'avoir immédiatement $\Delta D/D$. Ces résultats illustrent bien la diminution de la précision lorsque la distance augmente. La magnitude absolue s'obtient par la relation $M_V = m_V - 5 \log(D/10 \text{ pc})$.

Exercice 8 : Méthode du point convergent

On veut déterminer la distance de l'amas des Pléiades par la méthode du point convergent.

- L'étude des trajectoires des étoiles de l'amas sur plusieurs années a permis de situer le point convergent à $\theta = 67,9 \pm 0,6^\circ$ de la direction de l'amas.
- L'observation du spectre de l'étoile Alcyone, faisant partie de cet amas, a permis de mesurer sa vitesse radiale $v_r = 10,1 \pm 0,3 \text{ km s}^{-1}$.
- Le mouvement propre apparent de cette même étoile vaut $\mu = 47,3 \pm 0,8 \text{ mas an}^{-1}$.

Déterminer la distance de l'amas.

Corrigé : Dans la formule donnant la distance de l'amas, il faut bien faire attention à exprimer l'angle μ en radians et à utiliser les mêmes unités de distance et de temps pour les autres grandeurs.

- $\mu = 47,3 \pm 0,8 \text{ mas an}^{-1} = (2,29 \pm 0,04) \times 10^{-7} \text{ rad an}^{-1}$
- $v_r = 10,1 \pm 0,3 \text{ km s}^{-1} = (1,02 \pm 0,03) \times 10^{-5} \text{ pc an}^{-1}$
- $\theta = 67,9 \pm 0,6^\circ = 1,19 \pm 0,01 \text{ rad}$, et donc $\tan \theta = 2,50 \pm 0,07$.
- Finalement, $D = v_r \tan \theta / \mu = 111 \pm 8 \text{ pc}$. L'erreur est obtenue via $dD = (\tan \theta / \mu) dv_r + (v_r / \mu)(1 - \tan^2 \theta) d\theta - (v_r \tan \theta / \mu^2) d\mu$.

1.2.2 Classification stellaire

Exercice 9 : Types spectraux

Donner approximativement le type spectral des étoiles dont le flux est maximal aux longueurs d'onde suivantes : 300 nm, 500 nm, et 1,2 μm . Peut-on déterminer la classe de luminosité ?

Rappel de la loi de Wien : $\lambda_{\text{max}} T = 2898 \mu\text{m K}$.

Corrigé : La loi de Wien permet de déterminer la température effective de chaque étoile, et ainsi d'en déduire une valeur approximative du type spectral. Ici seulement la première lettre est accessible, la détermination du chiffre suivant nécessiterait un tableau plus précis donnant les correspondances entre les sous-types et la température effective.

λ_{max}	$T_{\text{eff}}(K)$	Type spectral
300 nm	9660	A
500 nm	5796	G
1,2 μm	2415	M

On ne peut pas déterminer la classe de luminosité grâce à la longueur d'onde du maximum du flux. Pour ceci, il faudrait connaître soit la luminosité de l'étoile, soit sa gravité de surface, soit son rayon.

Exercice 10 : Diagramme HR

Classer par ordre de température effective croissante, puis de rayon croissant, et enfin de luminosité croissante les étoiles de types spectraux suivants : M5III, O2V, K7I, A0VII.

Corrigé : La séquence OBAFGKM décrit les types spectraux dans le sens des T_{eff} décroissantes, on aura donc dans le sens des T_{eff} croissantes : M5III, K7I, A0VII, et O2V.

La classe de luminosité définit des groupes d'étoiles de rayon différent, on aura donc dans l'ordre croissant : A0VII, O2V, M5III, et K7I.

Enfin, l'examen du diagramme HR montre qu'une étoile chaude de la séquence principale peut être plus lumineuse qu'une sous-géante froide, et on aura dans le sens des luminosités croissantes : A0VII, M5III, O2V, et K7I.

Ceci montre que le terme « classe de luminosité » peut être source d'erreur.

1.2.3 Mesure des rayons

Exercice 11 : Interférométrie

Le tableau suivant donne le diamètre apparent θ_* des étoiles de l'exercice 10, mesuré par interférométrie. Calculer leur rayon R (on rappelle les distances déterminées dans un exercice précédent) et, à l'aide de ce résultat, attribuer à chaque étoile sa classe de luminosité parmi les suivantes : I, III, V.

	α CMa	α Tau	α Ori
θ_* (mas)	5,89	24	67
d (pc)	2,64	20	130

Corrigé : Pour Sirius :

- Son diamètre apparent vaut $\theta_* = 5,89 \text{ mas} = 2,86 \times 10^{-8} \text{ rad}$.
- Son rayon vaut donc $R = \theta_* d / 2 = 3,8 \times 10^{-8} \text{ pc} = 1,2 \times 10^9 \text{ m} = 1,7 R_{\odot}$.

Le tableau suivant donne les résultats pour les 3 étoiles :

	α CMa	α Tau	α Ori
R/R_{\odot}	1,7	52	936
Classe de luminosité	V	III	I
Type spectral	A1V	K5III	M2I

Dans cet exemple, il est possible d'attribuer à chaque étoile sa classe de luminosité en utilisant le lien qui existe avec le rayon stellaire. Le type spectral complet est donné pour information.

1.2.4 Mesure de masse (étoiles doubles)

Exercice 12 : Système binaire

On observe une étoile double visuelle dont le plan de l'orbite est perpendiculaire à la ligne de visée.

- La parallaxe de ce système est de 100 mas.
- La plus grande séparation angulaire entre les deux composantes est de $5''$, et la plus petite de $1''$.
- La période de révolution est de 30 ans.

- L'étoile primaire se trouve au foyer de l'orbite observée, car il n'y a pas d'effet de projection.
- Le compagnon est toujours observé à une distance du centre de gravité 5 fois plus grande que celle de l'étoile primaire.

Déterminer la masse de chaque composante.

Corrigé : Les paramètres observés permettent de remonter aux données suivantes pour le système :

- La distance est $D[\text{pc}] = 1/p'' = 10 \text{ pc}$.
- La dimension angulaire du grand axe de l'orbite relative est de $5'' + 1'' = 6''$. Le demi-grand axe apparent est donc $\theta = 3'' = 1,45 \times 10^{-5} \text{ rad}$.
- Le demi-grand axe de l'orbite relative est donné par $a[\text{UA}] = \theta'' D[\text{pc}]$ soit $a = 30 \text{ UA} = 4,49 \times 10^{12} \text{ m}$.
- La 3ème loi de Kepler (en unités réduites) donne la somme des masses : $\tilde{M}_1 + \tilde{M}_2 = 30 M_\odot = 5,97 \times 10^{31} \text{ kg}$.
- Les distances des étoiles E_1 et E_2 au centre de gravité G vérifient $M_1 \times GE_1 = M_2 \times GE_2$. Le rapport des masses vaut donc $M_1/M_2 = GE_2/GE_1 = 5$.
- Finalement : $M_1 = 25 M_\odot$ et $M_2 = 5 M_\odot$

Exercice 13 : Le paradoxe d'Algol

Le tableau suivant rappelle les caractéristiques du système binaire à éclipse d'Algol (β Per) :

p (mas)	$35,14 \pm 0,90$	
T (jours)	2,8674	
θ_{rel} (mas)	2,283	
Composantes	A	B
Type spectral	B8V	K2IV
R (R_\odot)	2,74	3,60
θ_{abs} (mas)	1,872	

On supposera l'orbite circulaire, ainsi le demi-grand axe de l'ellipse projetée est égal au rayon de l'orbite.

1. Quelle est la distance (et son erreur) de ce système ?
2. Quelle est la séparation des deux étoiles ? Comparez-la à leurs rayons.
3. Quelle est la masse de chacune des étoiles ? Compte-tenu des types spectraux, décrire le *paradoxe d'Algol* et suggérer une solution.

Corrigé :

- Distance : $D[\text{pc}] = 1/p'' = 28,46 \pm 0,73 \text{ pc}$.
- Le demi-grand axe de l'orbite relative est donné par $a[\text{UA}] = \theta'' D[\text{pc}]$ soit $a = 0,065 \text{ UA} = 9,77 \times 10^9 \text{ m} = 13,96 R_\odot = 2,2(R_A + R_B)$.
- La 3ème loi de Kepler donne la somme des masses réduites ($\tilde{M} = M/M_\odot$) : $\tilde{M}_A + \tilde{M}_B = \tilde{a}^3/\tilde{T}^2 = 4,46$ (avec $\tilde{a} = a[\text{UA}]$ et $\tilde{T} = T[\text{an}]$)
- Le rapport des demi-grands axes apparents de l'orbite relative θ et de l'orbite absolue de l'étoile secondaire θ_B donne le rapport des masses : $\theta_B/\theta = a_B/a = M_A/(M_A + M_B) = 0,82$
- On obtient finalement les masses $M_A = 3,65 M_\odot$ et $M_B = 0,80 M_\odot$.

Le tableau suivant récapitule les données physiques du système :

D (pc)	$28,46 \pm 0,73$	
a (R_\odot)	13,96	
	A	B
M (M_\odot)	3,65	0,80

On remarque que l'étoile la plus évoluée, B (B est une sous-géante rouge, tandis que A est une étoile de la séquence principale) est pourtant la moins massive, ce qui est contre-intuitif en terme d'évolution stellaire (les étoiles les plus massives évoluent plus rapidement). On peut invoquer des transferts de masse au sein de ce système très serré pour expliquer ce paradoxe.

1.3 Les systèmes planétaires

1.3.1 Les lois de Kepler

Exercice 14 : Invariant de Runge-Lenz

On considère une particule P de masse m , animée d'un mouvement non relativiste par rapport à un repère d'origine O . Ce mouvement est dû à un champ de forces $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\mathbf{grad} U(r)$ dérivant d'un potentiel central $U(r)$, où $\mathbf{r} = \mathbf{OP}$. À l'instant t on note respectivement $\mathbf{v}(t)$, $\mathbf{a}(t)$ et $\mathbf{p}(t)$ la vitesse, l'accélération et la quantité de mouvement de la particule P .

1. Montrer que la force \mathbf{F} est radiale.
2. Montrer que le vecteur moment cinétique $\mathbf{L} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{p}$ est conservé au cours du mouvement. En déduire que la trajectoire de P est située dans un plan Π que l'on caractérisera.
3. Montrer que l'énergie mécanique $E = \frac{1}{2}mv^2 + U$ est une constante du mouvement.
4. Calculer L à l'aide des coordonnées polaires (r, θ) dans le plan Π et en déduire la loi des aires.

Dans toute la suite du problème, le potentiel est de la forme :

$$U(r) = -\frac{k}{r} \quad \text{avec} \quad k > 0$$

On définit le vecteur de Runge-Lenz :

$$\mathbf{A} = \frac{1}{k} \mathbf{v} \wedge \mathbf{L} - \frac{\mathbf{r}}{r}$$

5. Montrer que le vecteur \mathbf{A} est constant dans le temps, et qu'il appartient au plan Π .
6. Montrer que :

$$A^2 = 1 + 2 \frac{L^2 E}{mk^2}$$

(On pourra utiliser les coordonnées polaires : en particulier $\mathbf{v} = v_r \mathbf{e}_r + v_\theta \mathbf{e}_\theta$). En déduire, lorsque L est fixé, une borne inférieure pour l'énergie E . Montrer que pour un mouvement circulaire, E est égal à la borne inférieure.

7. Calculer le produit scalaire $\mathbf{A} \cdot \mathbf{r}$ en fonction de L , m , k et r . Établir alors l'équation polaire de la trajectoire sous la forme :

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$$

Indication : on définira l'angle θ à partir de l'axe polaire dirigé selon le vecteur \mathbf{A} .

Vérifier que : $e = \|\mathbf{A}\|$ et exprimer p en fonction de L , m et k .

8. Discuter la nature de la trajectoire suivant la valeur de E .

Dans la suite du problème on se restreint au cas des états liés : $E < 0$. La trajectoire est alors une ellipse.

9. Déterminer son demi-grand axe a et son demi-petit axe b en fonction de m , k , L et E .
10. Quelle est la valeur maximale L_0 de L , l'énergie E étant fixée ?
11. Quelle est la trajectoire pour $L = 0$, et pour $L = L_0$?
12. Calculer la période du mouvement en fonction de m , k et a .

Corrigé :

1. $\mathbf{F} = -(\partial U / \partial r) \mathbf{e}_r$.
2. $\mathbf{L} = mr^2 \dot{\theta} \mathbf{e}_z$ et $dS/dt = C/2$ avec $C \equiv r^2 \dot{\theta}$.
3. $r = \frac{L^2/km}{1 + A \cos \theta} = p/(1 + e \cos \theta)$
4. - Si $E < 0$: système lié, $e < 1$, trajectoire elliptique ;
- si $E = 0$: $e = 1$, trajectoire parabolique ;
- si $E > 0$: système ouvert, $e > 1$, trajectoire hyperbolique.

Exercice 15 : Orbite de Pluton

L'orbite de Pluton est très excentrique ($e = 0,248$). Son demi-grand axe vaut 39,43 unités astronomiques (L'unité astronomique est définie comme le demi grand axe de l'orbite de la Terre). Montrer que Pluton peut être plus proche du Soleil que Neptune dont le demi-grand axe de l'orbite vaut 30,06 UA et l'excentricité 0,009.

Corrigé :

		Neptune	Pluton
Demi-grand axe [UA]	a	30,06	39,43
Excentricité	e	0,009	0,248
Périhélie [UA]	$d = a(1 - e)$	29,79	29,65
Aphélie [UA]	$D = a(1 + e)$	30,33	49,21

Du fait de la très grande excentricité de son orbite, Pluton, à son périhélie, est plus proche que Neptune du Soleil : $d_P < d_N$.

Exercice 16 : Vitesses périhélique et aphélique

Montrer que la vitesse angulaire d'un objet décrivant une orbite elliptique autour du Soleil augmente lorsqu'il s'en rapproche. Montrer que le rapport des vitesses au périhélie (point le plus proche du Soleil) et à l'aphélie (point le plus éloigné du Soleil) ne dépend que de l'excentricité de l'orbite. Calculer ce rapport pour la Terre dont l'excentricité de l'orbite vaut 0,0167, puis pour la comète de Halley dont l'excentricité de l'orbite vaut 0,97.

Corrigé :

1. On a vu que $r^2\dot{\theta}$ est une constante. On a donc $\dot{\theta} = C/r^2$ et la vitesse angulaire augmente lorsque r diminue.
2. L'expression de la vitesse est : $\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{i} + r\dot{\theta}\mathbf{j}$
Le périhélie et l'aphélie correspondent à des extremum sur la trajectoire, c'est à dire que $dr/d\theta = 0$ et donc, puisque $\dot{r} = \dot{\theta} dr/d\theta$, $\dot{r} = 0$. La vitesse s'écrit donc bien $v = r\dot{\theta}$
3. Puisque $r^2\dot{\theta} = C$ et que $v = r\dot{\theta}$, on a $v = C/r$. En reprenant les résultats vus précédemment sur les ellipses, on trouve $r = a(1 - e)$ au périhélie, et $r = a(1 + e)$ à l'aphélie. Le rapport des vitesses v_p au périhélie et v_a à l'aphélie est donc :

$$\frac{v_p}{v_a} = \frac{1 + e}{1 - e}$$

Soit pour la Terre : $v_p/v_a = 1,034$, et pour la comète de Halley : $v_p/v_a = 65,67$.

Exercice 17 : Satellite géostationnaire

Sachant que la Lune décrit son orbite autour de la Terre en 27,32 jours et que le demi grand-axe de son orbite vaut 384400 km, calculer l'altitude d'un satellite géostationnaire. On supposera que la masse de la Lune est négligeable par rapport à celle de la Terre (la Terre est environ 80 fois plus massive que la Lune).

Corrigé : La troisième loi de Kepler, telle que nous venons de la démontrer s'applique bien sûr aussi pour le système Terre-Lune et on a :

$$\frac{a_L^3}{T_L^2} = \frac{G(M_T + M_L)}{4\pi^2}$$

Où a_L est le demi grand axe de l'orbite de la Lune, T_L sa période orbitale et M_L sa masse. Puisque la masse de la Lune peut être négligée par rapport à celle de la Terre, cette relation s'écrit :

$$\frac{a_L^3}{T_L^2} = \frac{GM_T}{4\pi^2}$$

De même, pour le satellite, l'hypothèse $M_S \ll M_T$ est encore plus justifiée, et on a :

$$\frac{a_S^3}{T_S^2} = \frac{GM_T}{4\pi^2} = \frac{a_L^3}{T_L^2}$$

La période d'un satellite géostationnaire est, par définition, de 23h56 (car un satellite géostationnaire reste toujours au dessus du même point de la Terre dont la période de rotation est de 23h56). On a donc

$$\begin{aligned} T_S &= 23 \times 60 + 56 = 1436 \text{ min} \\ T_L &= 27,3 \times 24 \times 60 = 39312 \text{ min} \end{aligned}$$

d'où l'on tire finalement $a_S = 42300$ km. Cette valeur correspond à la distance entre le centre de la Terre et le satellite. L'altitude du satellite est donc : $a_S = 42300 - 6378 = 35922$ km

Chapitre 2

Vie des galaxies

2.1 Milieu interstellaire

2.1.1 Mise en évidence expérimentale

Exercice 18 : Comptage d'étoiles

Dans une observation de comptage d'étoiles, toutes de même type, on constate que :

- pour $m \leq 7$, $\log N(m) = 0,6m + 3$
- pour $m \geq 9$, $\log N(m) = 0,6m + 2,4$

1. Déterminer l'extinction en magnitude A due au nuage traversé quand on passe de $m = 7$ à $m = 9$.
2. On sait que la magnitude absolue des étoiles de ce type est $M = 5$. Déterminer :
 - La distance r_1 du front proche du nuage.
 - L'épaisseur $r_2 - r_1$ du nuage.

Corrigé :

1. On rappelle l'expression du module de distance $m - M = 5 \log(D/10 \text{ pc})$ soit $\log(D/10 \text{ pc}) = 0,2(m - M) + 1$. Le nombre $N(m)$ d'étoiles de magnitude inférieure à m correspond, en l'absence d'extinction, au nombre d'étoiles dans une sphère de rayon $D(m)$, càd $N(m) \propto D(m)^3$, soit $\log N(m) = 0,6m + \beta$. En présence d'extinction, on a $\log N(m) = 0,6(m - A) + \beta$.
2. L'extinction est nulle jusqu'à la distance r_1 du front du nuage, donc :

$$\log N(m) = 0,6(7 - 0) + \beta = 0,6 \times 7 + 3 \quad \text{soit} \quad \beta = 3.$$

À la distance r_2 du bord éloigné du nuage, pour laquelle $m = 9$, et l'extinction A :

$$\log N(m) = 0,6(9 - A) + \beta = 0,6 \times 9 + 2,4 \quad \text{d'où} \quad A = 1 \text{ mag.}$$

3. En écrivant l'équation du module de distance avec $M = 5$:
 - pour $m = 7 = 5 \log r_1/10 \text{ pc} + M$ d'où $r_1 = 25,1 \text{ pc}$ = distance du front proche du nuage
 - pour $m = 9 = 5 \log r_2/10 \text{ pc} + M + A$ avec $A = 1$ d'où $r_2 = 39,8 \text{ pc}$

Épaisseur du nuage : $r_2 - r_1 = 39,8 - 25,1 = 14,7 \text{ pc}$

Exercice 19 : Densité des galaxies dans l'Univers

E. Hubble (1934, *The Distribution of Extra-Galactic Nebulae*, ApJ, **79**, 8) a mesuré que le nombre de galaxies $N(m)$ jusqu'à une certaine magnitude limite m par degré carré décroît avec la latitude galactique¹ b (pour $|b| > 15^\circ$). Ainsi, la densité de galaxies semble diminuer à mesure que l'on s'éloigne des pôles de la Galaxie ($b = \pm 90^\circ$). Cela ne reflète évidemment pas la distribution intrinsèque des galaxies dans l'Univers, mais résulte d'un effet d'absorption de la lumière par les particules de poussière contenues dans notre propre Galaxie.

On suppose d'une part que la poussière est répartie de façon homogène dans le disque galactique ($b = 0$) d'épaisseur $2h$, et d'autre part que toutes les galaxies sont des sources ponctuelles de même magnitude absolue M et uniformément distribuées dans l'espace avec une densité ρ .

1. Exprimer l'épaisseur ℓ de poussière traversée à une latitude b . En déduire l'extinction interstellaire $A(b)$, en notant A_0 l'atténuation en magnitude aux pôles galactiques.

1. L'angle entre le plan galactique et l'objet considéré, compté positivement vers le pôle nord galactique.

2. Dans ces conditions, montrer que le nombre cumulé $N(m, b)$ de galaxies par degré carré à la magnitude apparente m et à la latitude b est donné par :

$$\log N(m, b) = 0,6 m - 0,6 \frac{A_0}{\sin b} + K.$$

Exprimer la constante K en fonction des données du problème.

3. Hubble (1934) a mesuré, pour des galaxies de magnitude absolue moyenne $M = -14$:

$$\log N(m, b) = 0,6 m - 0,15 \frac{1}{\sin b} - 4,50.$$

En déduire la densité moyenne ρ des galaxies dans l'Univers (en Mpc^{-3}).

Corrigé :

1. $\ell = h / \sin b$ et $A = A_0 / \sin b$.
2. $N(m, b) = \rho \times 4\pi d^3 / 3$ avec $\log(d/\text{pc}) = 1 + 0,2(m - M - A)$ donc $\log N(m, b) = 0,6m - 0,6A - 0,6M + \log(\rho/\text{pc}^3) + \log(4\pi/3) + 3$.
3. $\log(\rho/\text{pc}^3) = -16,52$ soit $\rho = 30 \text{ Mpc}^{-3}$.

2.1.2 Extinction sélective et rougissement

Exercice 20 : Interprétation physique

Une étoile est située à 2 kpc de l'observateur sur une ligne de visée représentative des conditions moyennes du MIS, pour lesquelles l'extinction moyenne en bande V est de 0,3 mag/kpc. En admettant que cette extinction n'est due qu'à des grains dont les caractéristiques suivent :

- rayon $a = 0,1 \mu$,
- $Q_{ext} = 1$,
- masse volumique : 1 g/cm^3 ,
- répartition des grains uniforme sur la ligne de visée ;

calculer :

1. la profondeur optique, puis la densité de colonne des grains le long de la ligne de visée,
2. Le nombre de grain par unité de volume sur cette ligne de visée,
3. la masse volumique des grains dans le MIS.

En admettant que la densité moyenne d'atomes d'Hydrogène est de l'ordre de 8 atomes par cm^3 , et en négligeant la présence des atomes d'autres éléments, calculer (on donne la masse du proton $m = 1,67 \times 10^{-24} \text{ g}$) :

4. la masse volumique du gaz dans le MIS,
5. le rapport (masse volumique des grains)/(masse volumique du gaz).

Qu'en concluez vous sur le rôle des grains dans la matière du MIS ?

Corrigé :

$$\text{Distance de l'étoile : } L = 2 \text{ kpc} = 6,17 \times 10^{21} \text{ cm}$$

$$\text{Section d'un grain : } s_g = \pi a^2 = \pi (10^{-5})^2 = \pi 10^{-10} [\text{cm}^2]$$

$$\text{Extinction en V sur la ligne de visée : } A_V = 0,3 \text{ mag/kpc} \times 2 \text{ kpc} = 0,6 \text{ mag}$$

$$\text{d'où la profondeur optique : } \tau = \frac{0,6}{1,086} = 0,55 = n_g s_g L$$

La densité de colonne est le nombre de grains dans un cylindre de longueur L et de section unité. Si la densité de grains n_g est constante, la densité de colonne est donc égale à $n_g L$

$$n_g L = \frac{\tau}{s_g} = \frac{0,55}{\pi 10^{-10}} = 1,75 \times 10^9 [\text{grain/cm}^2]$$

On déduit de l'expression précédente la densité de grains n_g :

$$n_g = \frac{1,75 \times 10^9}{6 \times 10^{21}} = 2,82 \times 10^{-13} [\text{grain/cm}^3]$$

Masse volumique des grains dans le MIS :

$$1[\text{g/cm}^3] \times \frac{4\pi a^3}{3} [\text{cm}^3/\text{grain}] 2,9 \times 10^{-13} [\text{grain/cm}^3] = 1,18 \times 10^{-27} [\text{g/cm}^3]$$

Masse volumique du gaz dans le MIS :

$$8 [\text{atomes/cm}^3] 1,67352 \times 10^{-24} [\text{g/atome}] = 1,34 \times 10^{-23} [\text{g/cm}^3]$$

$$\frac{\text{Masse volumique des grains}}{\text{Masse volumique du gaz}} = \frac{1,18 \times 10^{-27} [\text{g/cm}^3]}{1,34 \times 10^{-23} [\text{g/cm}^3]} = 8,8 \times 10^{-5}$$

Conclusion : les grains ne représentent qu'une fraction très faible de la masse de matière dans le MIS.

Exercice 21 : Rougissement et température

En admettant que l'on observe un objet à la température T , dont le spectre est donné par la loi de Planck :

$$W(\lambda) = C \lambda^{-5} \left[\exp\left(\frac{hc}{\lambda kT}\right) - 1 \right]^{-1}$$

En présence d'une extinction $A(\lambda) = a/\lambda$, montrez que :

1. pour $\lambda \ll hc/kT$ (limite de Wien), dans la partie bleue du spectre, le spectre observé est celui d'un corps noir à une température T' , que l'on déterminera.
2. pour $\lambda \gg hc/kT$ (limite de Rayleigh-Jeans), dans la partie rouge du spectre, le spectre observé est identique à celui de la source.

Corrigé : $W(\lambda)$, donné par la formule de Planck, représente le flux de l'étoile en l'absence d'extinction. Si $W'(\lambda)$ représente le flux de l'étoile en présence d'une extinction en magnitude de la forme $A(\lambda) = a/\lambda$, on a : $A(\lambda) = 2,5 \log W/W'$ soit, en posant $a' = a \times 0,4 \ln 10$: $W' = W \exp(-a'/\lambda)$.

1. Pour la partie du spectre aux courtes longueurs d'onde (régime de Wien), on a $hc/\lambda kT \gg 1$ d'où :

$$\begin{aligned} W &\simeq C \lambda^{-5} \exp\left(-\frac{hc}{\lambda kT}\right) \quad \text{pour } \lambda \ll hc/kT \\ \text{donc } W' &\simeq C \lambda^{-5} \exp\left(-\frac{hc}{\lambda kT}\right) \exp\left(-\frac{a'}{\lambda}\right) \\ &\simeq C \lambda^{-5} \exp\left(-\frac{hc}{\lambda kT'}\right) \quad \text{avec } \frac{1}{T'} = \frac{1}{T} + \frac{ka'}{hc} \end{aligned}$$

On retrouve pour W' la forme de la formule de Planck (dans la limite de Wien), mais cette fois pour un corps à une température $T' < T$.

2. Pour la partie du spectre aux grandes longueurs d'onde (régime de Rayleigh-Jeans), le terme $\exp(a'/\lambda)$ tend progressivement vers 1, donc W' devient égal à W . Les spectres rougis et non rougis sont identiques.

Exercice 22 : Rougissement et couleur

Une étoile $G5V$ a une magnitude absolue $M_V = 5$, et un indice de couleur intrinsèque $(B - V)_0 = 0,7$. On observe une étoile de ce type spectral, située à une distance de 5 kpc

1. Calculer les magnitudes apparentes m_{V_0} et m_{B_0} qu'aurait cette étoile s'il n'y avait aucune extinction.
2. L'étoile est située dans une région où l'extinction du MIS peut être caractérisée par :
 - une extinction de 0,3 mag/kpc en bande V ,
 - une loi d'extinction de la forme : $A(\lambda) = A_V \times (\lambda_V/\lambda)$
 Calculer les extinctions A_V et A_B qu'elle subit du fait de cette loi d'extinction
3. Calculer l'excès de couleur E_{B-V} de cette étoile par rapport à une étoile très proche de même type spectral.
4. Calculer l'indice $(B - V)$ observé en présence d'extinction.
5. À l'aide du diagramme HR, déterminer le type spectral apparent de l'étoile.
6. Qu'en concluez vous sur l'effet de l'extinction sélective sur la « couleur » d'une étoile.

On rappelle les longueurs d'onde effectives des bandes V et B : $\lambda_V = 550 \text{ nm}$ et $\lambda_B = 440 \text{ nm}$.

Corrigé :

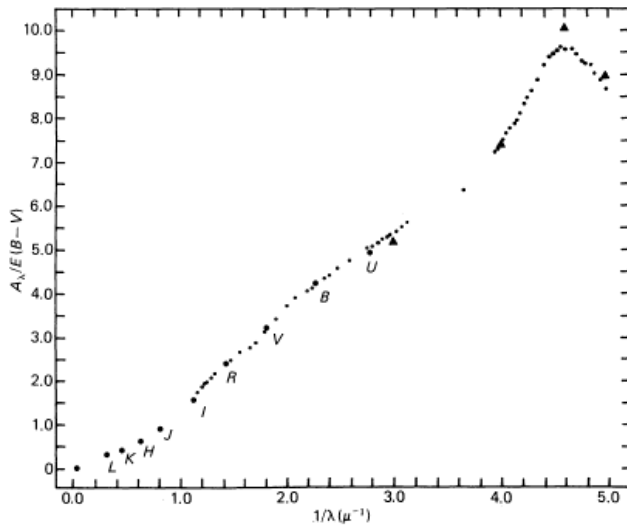


FIGURE 2.1 – Loi de couleur : A_λ/E_{B-V} en fonction de $1/\lambda$. On y lit p.ex. que $A_V/E_{B-V} = 3,1$.

1. Magnitudes apparentes sans extinction

$$m_{V_0} = M_V + 5 \log(5 \text{ kpc}/10 \text{ pc}) = 18,5$$

$$m_{B_0} = m_{V_0} + (B - V)_0 = 19,2$$

2. Calcul des extinctions

$$A_V = 5 \text{ kpc} \times 0,3 \text{ mag/kpc} = 1,5$$

$$A_B = 1,5 \times \frac{0,55}{0,44} = 1,88$$

3. Calcul de l'excès de couleur : $E_{B-V} = A_B - A_V = 1,88 - 1,5 = 0,38$

4. Calcul de l'indice de couleur : $(B - V) = (m_{B_0} + A_B) - (m_{V_0} + A_V) = (B - V)_0 + (A_B - A_V) = 0,7 + 0,38 = 1,08$

5. Le type spectral apparent sera celui d'une étoile environ K5. Comme l'extinction ne change pas la profondeur des raies de l'étoile, sa classe de luminosité apparente restera celle d'une naine V. L'étoile apparaîtra donc comme une K5V.

6. L'étoile paraît plus rouge que s'il n'y avait pas d'extinction.

Exercice 23 : Excès de couleur

On a déterminé par spectroscopie le type spectral $B2V$ pour une étoile lointaine. L'indice de couleur intrinsèque de ce type d'étoiles est $(B - V)_0 = -0,25$. Par photométrie on a déterminé un indice de couleur observé $(B - V) = 2,25$.

1. Déterminer l'extinction A_V de cette étoile à partir de la loi de variation de A_V/E_{B-V} en fonction de $1/\lambda$ (Fig. 2.1).
2. Quelle sera l'extinction de cette étoile dans la bande photométrique infrarouge K ?
3. Qu'en concluez vous sur l'effet de l'extinction dans l'infrarouge, comparé à celui dans le visible ?

Corrigé :

1. Calcul de l'extinction : $E_{B-V} = (A_B - A_V) = (B - V) - (B - V)_0 = 2,25 - -0,25 = 2,5$. Le graphique donne $A_V \simeq 3,1 E_{B-V}$, d'où $A_V = 3,1 \times 2,5 = 7,75$.
2. Le graphique donne $A_K \simeq 0,5 \times E_{B-V}$, d'où $A_K = 0,5 \times 2,5 = 1,25$.
3. L'extinction est beaucoup plus faible dans l'IR que dans le visible.

2.2 Galaxies

2.2.1 Classification morphologique des galaxies

Exercice 24 : Propriétés « physiques » de la classification

En vous servant du tableau 2.1, répondez aux questions suivantes :

TABLE 2.1 – Propriétés quantitatives de la séquence de Hubble.

Propriétés	E,S0	S0a,Sa	Sab,Sb	Sbc,Sc	Scd,Sd	Sm,Im
$M_{\text{totale}} (10^{10} M_{\odot})$		22,6	32,4	19,0	7,9	1,6
$M_{\text{gaz}} (\text{H neutre en } 10^9 M_{\odot})$	1,24	5,62	15,14	15,85	9,33	2,40
Diamètre (kpc)	21,1	19,8	25,1	22,4	17,7	8,5

1. Que peut-on dire sur la fraction de gaz dans les galaxies selon le type morphologique ?
2. Que peut-on dire de la densité surfacique de masse, en supposant que toute la masse des galaxies est concentrée dans un disque mince ?

Corrigé :

1. La fraction de masse de gaz est donnée par le rapport de la masse de gaz à la masse totale. Ce rapport augmente des S0 aux irrégulières.
2. La densité surfacique de masse est $S = M/\pi R^2$. Elle diminue des S0 aux irrégulières.

Dans le tableau ci-dessous, les valeurs de $M_{\text{gaz}}/M_{\text{totale}}$ et de S sont obtenues statistiquement sur un échantillon de plusieurs milliers de galaxies. Ce ne sont donc pas les valeurs obtenues par le calcul direct sur les médianes, mais le comportement reste le même.

Propriétés	E,S0	S0a,Sa	Sab,Sb	Sbc,Sc	Scd,Sd	Sm,Im
$M_{\text{gaz}}/M_{\text{totale}}$	0,03	0,05	0,08	0,11	0,15	
$S (M_{\odot}/\text{pc}^2)$	188,9	154,7	124,2	91,4	74,5	

2.2.2 Constituants des galaxies**Exercice 25 : Les étoiles**

Si l'on considère une sphère de rayon 10 kpc peuplée par 10^{11} étoiles dont le rayon est égal à celui du Soleil, calculez la fraction de volume occupé par les étoiles.

Corrigé : La fraction est de $10^{11} \times \left(\frac{0,7 \times 10^6}{10 \times 3,08 \times 10^{16}} \right)^3 \approx 10^{-24}$.

Exercice 26 : La matière noire

On considère une galaxie et ses étoiles réparties uniformément en fonction de la distance au centre de la galaxie. On désigne par $M(R)$ la masse totale des étoiles contenues à l'intérieur de la sphère de rayon R .

1. Si les étoiles sont animées d'un mouvement de rotation uniforme autour du centre de la galaxie, donner la relation entre l'accélération normale a d'une étoile située à la distance R de ce centre et sa vitesse V .
2. Écrire la relation fondamentale de la dynamique pour cette étoile. En déduire la relation entre V et R . Comment varie alors V en fonction de R ?
3. Dans les galaxies spirales, on observe au-delà d'un certain rayon R_0 que la vitesse de rotation du gaz et des étoiles atteint une valeur limite $V_0 > 0$. Commentez.
4. Quelle forme de la densité de masse $\rho(R)$ doit-on présumer pour atteindre une valeur constante de V quand R augmente ? On note que, sous l'hypothèse de symétrie sphérique, $dM/dR = 4\pi R^2 \rho(R)$

Corrigé :

1. Accélération centripète : $a = V^2/R$
2. PFD : $mV^2/R = GmM(R)/R^2$, soit $V^2 = GM(R)/R$ (orbite circulaire). Si $M(R)$ tend vers une valeur limite (la masse totale de la galaxie), V doit alors décroître avec R avec la puissance $-1/2$ (décroissance képlérienne) donc tendre vers zéro.
3. Si la vitesse tend vers une valeur plateau $V_0 > 0$, la repartition de masse dans la galaxie est à revoir : on introduit ainsi la notion de matière noire, qui n'est perceptible que par ses effets gravitationnels.
4. $dM(R)/dR = 4\pi R^2 \rho(R) \stackrel{\text{PFD}}{=} d(RV_0^2/G)/dR$ d'où $\rho(R) = (1/4\pi R^2)(V_0^2/G) \propto 1/R^2$.

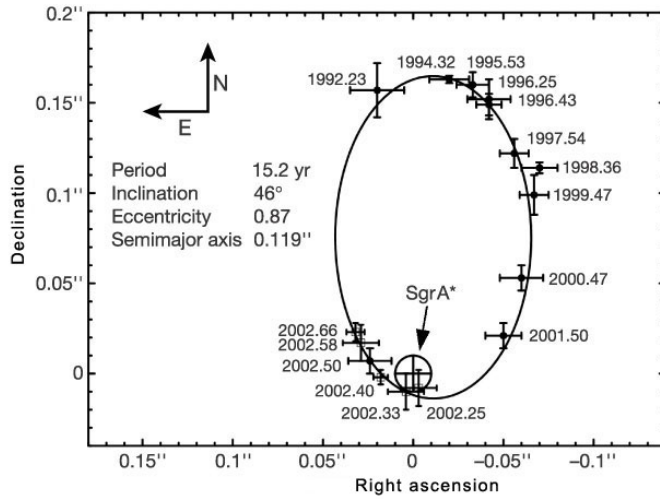


FIGURE 2.2 – Orbite de l'étoile S2 autour du centre galactique SgrA* (Schödel et al. 2002).

2.2.3 Exemple de galaxie : la Voie Lactée

Exercice 27 : Le centre galactique

La Fig. 2.2 montre l'orbite de l'étoile ayant la plus grande vitesse autour du centre galactique. À partir des caractéristiques de cette orbite (période de $T = 15,2$ ans, et demi grand-axe de $a = 0''.119$), retrouver l'estimation de la masse incluse dans ce rayon au centre de notre Galaxie en utilisant la troisième loi de Kepler. On rappelle que nous sommes à environ $R = 8,5$ kpc du centre galactique.

La masse *visible* au centre galactique étant estimée à environ 10^6 masses solaires, en déduire une estimation de la masse centrale invisible de notre Galaxie. Proposer une explication.

Corrigé : En écrivant la 3^e loi de Kepler dans le système Terre+Soleil et dans le système S2+SgrA*, nous obtenons :

$$\frac{(a/a_{\oplus})^3}{(T/T_{\oplus})^2} = M_{\text{SgrA}^*}/M_{\odot} \quad \text{avec} \quad a [\text{UA}] = a [1''] \times R [1 \text{ pc}] = 1,011 \times 10^3$$

d'où $M_{\text{SgrA}^*} = 4,5 \times 10^6 M_{\odot}$.

2.2.4 Le groupe local

Exercice 28 : Recensement

Dans la Table 2.2, compter le nombre de galaxies ayant un diamètre plus petit que 6 kpc, et celles ayant un diamètre plus grand. Quelles sont les galaxies qui dominent en nombre ? Et en luminosité totale ?

Corrigé : Il y a 26 petites galaxies – dites « naines » – sur les 30 galaxies dont on nous donne la taille, et seulement 2 galaxies avec un diamètre de plus de 30 kpc : M 31 et la Voie Lactée. Ce sont donc les galaxies naines qui dominent en nombre, mais pas en luminosité totale.

2.2.5 Distribution des galaxies dans l'univers

Exercice 29 : Fonction de luminosité

La fonction de luminosité $\Phi(L)$ des galaxies s'exprime généralement à l'aide de la fonction de Schechter (1976) :

$$\Phi(L) = \frac{\Phi^*}{L^*} \left(\frac{L}{L^*} \right)^{\alpha} \exp \left(-\frac{L}{L^*} \right)$$

où $\Phi(L)dL$ est le nombre de galaxies de luminosité comprise entre L et $L + dL$ par unité de volume (p.ex. par Mpc^3). Pour les galaxies de champ, on a $\alpha \sim -5/4$, $L_B^* \sim 2 \times 10^{10} L_{\odot}$ et $\Phi^* \sim 5 \times 10^{-3} \text{ Mpc}^{-3}$.

1. Quelle est la signification physique de la loi de Schechter ?
2. Exprimer la loi de Schechter en magnitudes absolues.

Corrigé :

TABLE 2.2 – Galaxies du Groupe Local, avec leurs noms, leurs positions sur le ciel, le type de Hubble, la distance, les diamètres physiques et angulaires.

Nom	RA	Dec (J2000)	Type Hubble	Mag. Bleue	Distance $\times 10^6$ ly	Diamètre $\times 10^3$ ly	Taille arcmin
WLM	0 02.0	-15 28	lrr	11.3	2.0	7	12
IC 10	0 20.3	59 19	lrr	11.7	4.0	6	5
NGC 147	0 33.1	48 31	E5	10.4	2.2	10	16
Andromeda III	0 35.3	36 31	E5		2.2	3	5
NGC 185	0 38.9	48 20	E3	10.1	2.2	6	9
NGC 205 (M110)	0 40.3	41 41	E5	8.6	2.2	10	16
Andromeda IV	0 42.5	40 34					
NGC 221 (M32)	0 42.7	40 52	E2	9.0	2.2	5	8
NGC 224 (M31)	0 42.7	41 16	Sb	4.4	2.2	200	312
Andromeda I	0 45.7	38 00	E3	14.4	2.2	2	3
SMC	0 52.7	-72 54	lrr	2.8	0.3	15	172
Sculptor	0 59.9	-33 42	E3	9.1	0.2	1	17
Pisces	1 03.7	22 03	lrr	15.5	3.0	0.5	1
IC 1613	1 04.9	02 07	lrr	10.0	2.5	12	17
Andromeda II	1 16.3	33 25	E2		2.2	2	3
NGC 598 (M33)	1 33.9	30 39	Sc	6.3	2.5	45	62
Fornax	2 39.6	-34 31	E3	8.5	0.5	3	21
UGCA 86	3 59.9	67 08					
LMC	5 23.6	-69 47	lrr	0.6	0.2	20	343
Carina	6 41.7	-50 58	E4		0.3	0.5	6
Leo A	9 59.4	30 45	lrr	12.7	5.0	7	5
Antlia	10	-30	E				
Leo I	10 08.5	12 18	E3	11.8	0.6	1	6
Sextans A	10 11.1	-04 43	lrr				
Sextans I	10 12.8	-01 41	E		0.3	3	34
Leo II	11 13.5	22 10	E0	12.3	0.6	0.5	3
GR8	12 59.2	14 09	lrr	14.6	4.0	0.2	
Ursa Minor	15 08.8	67 07	E5		0.3	1	11
Draco	17 20.2	57 55	E3		0.3	0.5	6
Milky Way	17 45.7	-29 00	Sbc		0.03	130	
SagDEG	18 55.0	-30 30	E		0.08		
SagDIG	19 30.0	-17 41	lrr	15.6	4.0	5	4
NGC 6822	19 44.9	-14 46	lrr	9.3	1.7	8	16
DDO 210	20 47.0	-12 51	lrr	15.3	3.0	4	5
IC 5152	22 02.9	-51 17	lrr	11.7	2.0	5	9
Tucana	22 41.9	-64 25					
Pegasus	23 28.6	14 46	lrr	12.4	5.0	8	6

1. Cette fonction empirique montre bien la prédominance des galaxies de faible luminosité intrinsèque. Noter que le nombre total de galaxies $N_T = \int_0^\infty \Phi(L) dL = \Phi^* \Gamma(\alpha + 1)$ diverge pour $\alpha \leq -1$, mais que la luminosité totale $L_T = \int_0^\infty L \Phi(L) dL = \Phi^* L^* \Gamma(\alpha + 2)$ reste finie.
2. On a $\Phi(L) dL = \Phi(M) dM$ avec $M = -2,5 \log L/L_0$, d'où :

$$\Phi(M) = 0,4 \ln 10 \times \Phi^* 10^{0,4(\alpha+1)(M^*-M)} \exp \left(-10^{0,4(M^*-M)} \right)$$

Exercice 30 : Fréquence de collision dans un amas

On considère un amas de galaxies ayant les caractéristiques suivantes :

- il est supposé sphérique, de diamètre D_a ,
 - il contient N_g galaxies identiques et réparties uniformément dans l'amas,
 - les galaxies sont supposées animées d'une vitesse quadratique moyenne $v_g/\sqrt{2}$ (la vitesse *relative* quadratique moyenne est donc v_g).
1. Donner l'expression de la densité numérique de galaxies (le nombre par unité de volume) n_g dans l'amas.
 2. On suppose que les galaxies ont un diamètre typique d_g . En modélisant les galaxies comme des sphères dures (« boules de billard »), donner l'expression de la section efficace S_{eff} lors d'une interaction (collision) entre deux galaxies.
 3. Donner l'expression du nombre d'interactions que subit une galaxie de l'amas pendant un temps Δt . En déduire, pour une galaxie, le temps caractéristique de collision τ_c et le libre parcours moyen ℓ_c .
 4. En déduire le temps T_c entre deux interactions au sein de l'amas.
 5. Application numérique : considérons un amas avec $D_a = 7$ Mpc, $N = 850$ galaxies, $d_g = 20$ kpc et $v_g = 650$ km/s. Explicitez le calcul numérique du temps moyen entre deux collisions pour cet amas.

Corrigé :

1. Le volume de l'amas est $V_a = \pi D_a^3/6$ et la densité numérique de galaxies est donc $n_g = N_g/V_a = 6N_g/\pi D_a^3$.
2. Deux galaxies entreront en collision lorsqu'elle passent à une distance $< d_g$ l'une de l'autre. La section efficace de collision est donc l'aire du disque de rayon d_g : $S_{\text{eff}} = \pi d_g^2$.
3. Considérons une galaxie. Le volume utile « balayé » par cette galaxie pendant le temps Δt est $\Delta V = v_g \times S_{\text{eff}} \times \Delta t$. Le nombre de collisions que subira cette galaxie pendant le temps Δt est donc égal au nombre de galaxies dans le volume ΔV : $N_c = n_g \Delta V$. Le temps caractéristique de collision τ_c correspond au Δt tel que $N_c = 1$; le libre parcours moyen est $\ell_c = v_g \times \tau_c$:

$$\tau_c = \frac{D_a^3}{6N_g d_g^2 v_g}, \quad \ell_c = \frac{D_a^3}{6N_g d_g^2}$$

4. Application numérique : $v_g = 650$ km/s = 665 kpc/Gan, $\tau_c = 253$ Gan, $T_c = \tau_c/N_g = 297$ Man.

2.2.6 Équilibre gravitationnel

Exercice 31 : Théorème du Viriel scalaire

On considère le système Terre-Soleil. Le Soleil, de masse M_\odot , est pris comme référence du mouvement ($v_\odot = 0$). On note M_\oplus et v_\oplus la masse et la vitesse de la Terre.

1. Écrire l'expression de l'énergie cinétique du système Terre-Soleil.
2. Énoncer le théorème du Viriel. En déduire l'expression de la distance D d'équilibre entre la Terre et le Soleil. Faire l'application numérique, sachant que $M_\odot = 2 \times 10^{30}$ kg, $M_\oplus = 5,97 \times 10^{24}$ kg et $v_\oplus = 30$ km/s.
3. On considère un système d'étoiles binaires en équilibre. Pour simplifier, les étoiles sont prises de masses égales $M_1 = M_2 = M_\odot$ et leurs vitesses sont considérées comme égales $v_1 = v_2 = v$.
Expliciter la relation entre la distance entre ces deux étoiles et leur vitesse et calculer cette vitesse v pour les distances d'équilibre D suivantes : 1 UA, 10 UA et 100 UA.

Corrigé :

1. $K = 1/2 M_\oplus v_\oplus^2$
2. Théorème du Viriel : $2K + U = 0$ avec $U = -GM_\odot M_\oplus/D$ d'où $D = GM_\odot/v_\oplus^2 = 1$ UA.
3. $K = 1/2 M_1 v_1^2 + 1/2 M_2 v_2^2 = M_\odot v^2 \stackrel{\text{Viriel}}{=} -U/2 = +GM_\odot^2/(2D)$ d'où $v = \sqrt{GM_\odot/(2D)}$, soit :
- pour $D = 1$ UA : $v = 21,1$ km/s

- pour $D = 10$ UA : $v = 6,7$ km/s
- pour $D = 100$ UA : $v = 2,1$ km/s

Exercice 32 : Autres applications du théorème du Viriel

On va maintenant utiliser le théorème du Viriel pour remplir le tableau ci-dessous, donnant les rayons, masses et vitesse caractéristiques de différents systèmes stellaires.

Système	R	V (km/s)	M (M_{\odot})
Amas globulaire	10 pc	10	
Galaxie	15 kpc	200	
Amas de galaxies	1 Mpc	1000	

Corrigé : On a $U = -GM^2/(2R)$ et $K = 1/2 MV^2$ d'où $M = 2RV^2/G$, avec $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2} = 4,302 \times 10^{-3} \text{ km}^2 \text{ s}^{-2} \text{ pc } M_{\odot}^{-1}$ soit :

Système	R	V (km/s)	M (M_{\odot})
Amas globulaire	10 pc	10	$4,6 \times 10^5$
Galaxie	15 kpc	200	$2,8 \times 10^{11}$
Amas de galaxies	1 Mpc	1000	$4,6 \times 10^{14}$

Exercice 33 : Temps cinématique

On va maintenant calculer le temps cinématique t_c pour différents systèmes stellaires.

Système	R	M (M_{\odot})	t_c (ans)
Amas ouvert	1 pc	500	
Amas globulaire	10 pc	10^5	
Galaxie	15 kpc	10^{11}	

Que remarquez-vous sur ces temps cinématiques pour les différents systèmes ?

Corrigé : $t_c = R/V = \sqrt{2R^3/GM}$ avec $G = 4,500 \times 10^{-15} \text{ pc}^3 M_{\odot}^{-1} \text{ an}^{-2}$ donc :

Système	R	M (M_{\odot})	t_c (ans)
Amas ouvert	1 pc	500	$9,4 \times 10^5$
Amas globulaire	10 pc	10^5	$2,1 \times 10^6$
Galaxie	15 kpc	10^{11}	$1,2 \times 10^8$
Amas de galaxies	1 Mpc	10^{14}	$2,1 \times 10^9$

Les temps cinématiques pour un amas ouvert et un amas globulaire ne sont pas vraiment différents malgré leurs tailles respectives très différentes. De même entre une galaxie et un amas globulaire : il ne faut qu'environ $100 \times$ plus de temps à une étoile avec une vitesse typique pour traverser une grosse galaxie qu'un amas globulaire (bien sur les vitesses caractéristiques ne sont pas les mêmes pour ces deux systèmes).

Chapitre 3

Cosmologie

3.1 Espace et temps absolus

Exercice 34 : La faiblesse de la force de gravitation

Marcel et Naomi ressentent l'un pour l'autre une certaine attirance ; quelle part en revient tout bêtement à la force de gravitation universelle, lorsque leurs centres de gravité respectifs sont distants de 1 mètre ? Quelle masse m , au même point de la Terre, présente un poids égal à cette force ? Marcel pèse, à Lyon, 700 N, et Naomi 580 N. Le rayon de la Terre à Lyon sera supposé égal à $R_{\oplus} = 6375$ km, et la masse de la Terre est de $M_{\oplus} = 5,97 \times 10^{24}$ kg.

Corrigé : Il s'agit d'appliquer la formule de Newton deux fois pour trouver les masses respectives de Marcel et Naomi, puis une troisième fois pour calculer l'attraction qui s'exerce entre eux :

$$F_{MN} = G \frac{m_M m_N}{d^2} = G \frac{m M_{\oplus}}{R_{\oplus}^2}.$$

Pour Marcel, $P_M = GM_M M_{\oplus} / R_{\oplus}^2$ soit $M_M = P_M R_{\oplus}^2 / (GM_{\oplus}) = 71,3$ kg. Pour Naomi, on peut utiliser le fait que $M_N / M_M = P_N / P_M$, puisque les deux personnes sont soumises au même champ de gravité, donc $M_N = M_M \times P_N / P_M = 71,3 \times 580 / 700 = 59,1$ kg d'où $F_{NM} = 2,81 \times 10^{-7}$ N. La masse qui présente un poids égal à cette valeur en cet endroit est de : $m = F_{MN} R_{\oplus}^2 / (GM_{\oplus}) = 2,87 \times 10^{-8}$ kg = 28,7 μ g.

L'attraction gravitationnelle est une force *très faible*, c'est même la plus faible des quatre forces fondamentales de l'Univers.

3.2 La rupture relativiste

3.2.1 Relativité générale

Exercice 35 : L'équivalence gravité/accélération

On dit que, pour la Relativité Générale, gravitation et accélération sont équivalentes, mais que cette équivalence n'est que locale. C'est à dire qu'aucune expérience de physique ne permet de distinguer les effets de l'une de ceux de l'autre, mais seulement tant qu'on se limite à un très petit domaine spatial. En gros, c'est à peu près vrai dans un dé à coudre, cela ne l'est plus vraiment dans un stade de foot.

En reprenant l'exemple simple de l'ascenseur d'Einstein, pouvez-vous montrer qu'en effet il est facile de distinguer pesanteur et accélération par la fusée si on abandonne la localité. Il suffit de modifier l'ascenseur...

Corrigé : À grande échelle, le champ de gravité qui environne un corps massif reste en général tout à fait discernable d'une accélération constante. Par exemple, dans l'image de l'ascenseur utilisée dans le cours, il ne faut pas que la cabine soit trop étendue. Sinon, le parallélisme ou le non-parallélisme des actions sur des masses très éloignées l'une de l'autre trahirait la « vraie » nature du champ. La cabine de gauche, supposée à grande distance de la planète, et accélérée vers le haut (flèche bleue), produit des actions parallèles (flèches rouges) sur les deux masses-test. La cabine de droite, immobile dans le champ de gravitation de la Terre, montre des actions convergentes vers le centre de la Terre (flèches vertes). Rusés comme ils le sont parfois, les physiciens de l'ascenseur finiraient par s'en apercevoir... (Fig. 3.1)

3.2.2 Les tests

Exercice 36 : Le décalage gravitationnel vers le rouge

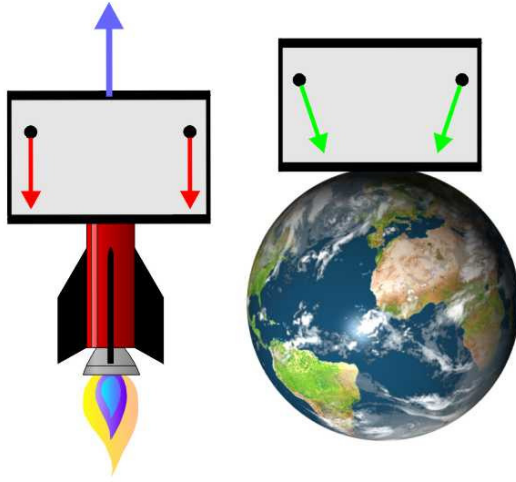


FIGURE 3.1

Une lampe spectrale émettant dans la raie $H\alpha$ ($\lambda_0 = 656,3 \text{ nm}$) est utilisée pour communiquer à partir d'une capsule en orbite serrée autour d'une étoile à neutrons. Le rayon de l'orbite est $R = 1000 \text{ km}$, la masse de l'étoile de $M = 1,5 M_\odot$. À quelle longueur d'onde λ le vaisseau qui a lancé la capsule, et se tient prudemment à grande distance, doit-il rechercher les signaux ?

Comparer cet effet gravitationnel au décalage par effet Doppler du signal de la sonde en orbite circulaire autour de l'étoile à neutrons.

Corrigé : Le décalage gravitationnel subi à la distance R d'un corps de masse M s'écrit :

$$z_G = \frac{GM}{c^2 R} = \frac{6,672 \times 10^{-11} \times 1,5 \times 1,989 \times 10^{30}}{299792458^2 \times 10^6} = 2,216 \times 10^{-3}$$

$$= \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0}$$

d'où $\lambda = (1 + z_G)\lambda_0 = 1,00221 \times 656,3 = 657,75 \text{ nm}$.

La vitesse de l'orbite circulaire de rayon R autour d'une masse M est donnée (dans l'approximation non-relativiste) par :

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R}} = 14112 \text{ km/s} \simeq 4,71 \times 10^{-2} \times c$$

Le décalage par effet Doppler (dans la même approximation non relativiste) est donc $z_D = v/c = \sqrt{z_G} \gg z_G$.

3.3 Le Big Bang

3.3.1 Film des débuts

Exercice 37 : Nucléosynthèse primordiale ou non ?

Les éléments légers H , 2H , 3H , 4He , 7Li sont nés avec le Big Bang. Mais d'où proviennent tous les autres éléments « lourds », ceux qui entrent dans la composition des objets du quotidien ?

Corrigé : Les chapitres traitant des modèles stellaires et de l'évolution stellaire nous fournissent la réponse :

- Jusqu'au ^{56}Fe , les noyaux sont produits par les étoiles. La source d'énergie de celles-ci est d'origine thermonucléaire, et elles sont des usines à fabriquer, par fusion, des noyaux lourds à partir de noyaux plus légers.
- Au-delà, seules les explosions de supernovae atteignent des températures suffisantes (plusieurs 10^9 K) pour pouvoir synthétiser les noyaux très lourds, jusqu'aux éléments transuraniens.
- Quelques noyaux particuliers (6Li , 9Be , ^{10}B) sont sans doute formés lors des collisions des rayons cosmiques avec la matière interstellaire.

3.3.2 Expansion de l'Univers...

Exercice 38 : ... limitée par c ?

Plus une galaxie est éloignée de notre Voie Lactée, plus les astronomes lui trouvent une vitesse d'éloignement élevée. C'est l'expansion de l'Univers. Mais, quand la distance croît sans cesse, elle atteint un moment une valeur d_c telle que :

$$V = H_0 d_c > c$$

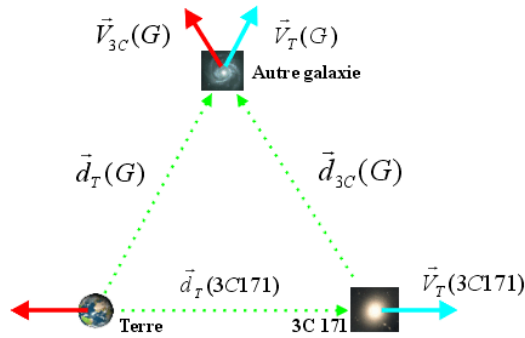


FIGURE 3.2

Étonnant, non ?

Corrigé : Il est interdit par la Relativité Générale de mesurer une vitesse égale ou supérieure à c pour un objet de masse non nulle, comme une galaxie. Cependant, cette limite ne s'applique pas à l'expansion de l'Univers, où les objets (p.ex. les galaxies) sont immobiles dans un espace dont la géométrie s'étire. Les galaxies très lointaines voient effectivement leur vitesse apparente atteindre celle de la lumière, et disparaissent alors de l'Univers observable. Ceci n'enlève rien au fait qu'elles continuent à s'éloigner de nous à des vitesses supérieures à c . Signalons que nos moyens d'observation actuels sont loin de nous permettre d'observer les objets qui s'approchent de cette limite.

Exercice 39 : ... la même partout ?

La radiogalaxie 3C 171 (la 171e entrée dans le troisième catalogue de radiources établi par l'observatoire de Cambridge) est relativement lointaine ; entraînée par l'expansion de l'Univers, elle présente une vitesse de fuite de 63 000 km/s.

Montrer que malgré cela, l'astronome Pr. Snurp, qui a là-bas découvert l'expansion de l'Univers, comme Hubble l'a fait pour nous, a lui aussi trouvé une loi qui s'écrit :

$$v_0 = X_0 d_0,$$

v_0 étant la vitesse mesurée à partir de 3C 171 pour une galaxie lointaine située à la distance d_0 de 3C 171, et que la constante de Snurp X_0 partage la valeur de H_0 .

Ainsi, d'une planète de 3C 171, comme de la Terre, on observe la même expansion universelle, avec la même géométrie, et le même taux...

Corrigé : Désignons par v_T et d_T les vitesses et distances mesurées à partir de la Terre, v_{3C} et d_{3C} celles mesurées à partir de 3C 171. La vitesse de récession de 3C 171 mesurée de la Terre est donc $v_T(3C\ 171) = 63\ 000$ km/s.

Considérons une autre galaxie, G , observée à la fois de la Terre et de 3C 171. On peut écrire :

$$\begin{aligned} v_{3C}(G) &= v_{3C}(T) + v_T(G) \\ &= -v_T(3C\ 171) + v_T(G) \\ &= -H_0 d_T(3C\ 171) + H_0 d_T(G) \\ &= H_0 [d_T(G) - d_T(3C\ 171)] \\ &= H_0 d_{3C}(G) \end{aligned}$$

et donc, à partir de 3C 171 comme de la Terre, toute les galaxie observée semble s'enfuir avec une vitesse proportionnelle à sa distance, et le facteur de proportionnalité (la constante de Snurp) est universel : $X_0 = H_0$ (Fig. 3.2).

3.3.3 Constante de Hubble & Co.

Dans les exercices suivants, on supposera la constante de Hubble égale à $H_0 = 70$ km s⁻¹ Mpc⁻¹.

Exercice 40 : Le facteur d'expansion de l'espace

La constant de Hubble H_0 est usuellement exprimée en kilomètres par seconde et par mégaparsec, mais cela ne parle guère au sens commun. Quelle est la valeur de l'accroissement annuel d'un kilomètre ?

Corrigé : 1 Mpc = $3,09 \times 10^{19}$ km et 1 an = $3,16 \times 10^7$ s, donc 71 km s⁻¹ Mpc⁻¹ = $2,27 \times 10^{-18}$ km s⁻¹ km⁻¹ = $71,6$ nm an⁻¹ km⁻¹.

Exercice 41 : Temps de Hubble

Calculez le temps de Hubble $t_H = 1/H_0$. Quelle est sa signification physique ? Quelle conclusion pouvez-vous en tirer sur l'âge de l'Univers ?

Corrigé : Le temps de Hubble est défini par $1/t_H = H_0 = 70 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} = 2,27 \times 10^{-18} \text{ s}^{-1}$ d'où $t_H = 4,41 \times 10^{17} \text{ s} \simeq 13,97 \times 10^9 \text{ ans}$. Il représente l'âge de l'Univers dans le cas d'un taux d'expansion *constant*. On peut donc penser que l'Univers est âgé d'environ 14 Gans.

Exercice 42 : Densité critique

Calculer la densité critique $\rho_C = \frac{3c^2 H_0^2}{8\pi G}$. En quelles unités s'exprime-t-elle ?

Corrigé : $\rho_C \simeq 8,27 \times 10^{-10} \text{ J m}^{-3} \simeq 5,5 \text{ nucléons/m}^3$

Exercice 43 : Âge de l'Univers

À partir de la définition de H_0 et de la relation $R \propto t^{2/3}$ entre le facteur d'échelle R et le temps t dans le cas d'un Univers euclidien ($k = 0$) dominé par la matière ($\Omega_M = 1, \Omega_\Lambda = 0$), trouver la relation entre H_0 et t .

Corrigé :

$$\begin{aligned} H_0 &\hat{=} \frac{1}{R} \frac{dR}{dt} \\ &= \left(\frac{t}{t_0} \right)^{-2/3} \times \frac{d(t/t_0)^{2/3}}{dt} = \left(\frac{t}{t_0} \right)^{-2/3} \times \left(\frac{t}{t_0} \right)^{-1/3} \frac{2}{3} \frac{1}{t_0} = \left(\frac{t}{t_0} \right)^{-1} \times \frac{2}{3t_0} \\ &= \frac{2}{3t} \\ \text{donc } t &= \frac{2}{3H_0} \end{aligned}$$

Pour un Univers critique dominé par la matière, l'âge de l'Univers est égal aux deux-tiers du temps de Hubble.

3.4 Modèles cosmologiques

Exercice 44 : Modèle FLRW

Dans le cas d'un Univers de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker à courbure spatiale nulle ($k = 0$), on a :

$$\left(\frac{\dot{R}}{R} \right)^2 = \frac{\Lambda}{3} + \frac{8\pi G}{3} \rho. \quad (3.1)$$

Par ailleurs, l'équation de conservation de l'énergie s'écrit toujours :

$$\dot{\rho} = -3 \left(\rho + \frac{P}{c^2} \right) \frac{\dot{R}}{R}. \quad (3.2)$$

1. Que signifient les différents termes – R , Λ , ρ – de l'équation (3.1) ? Quelle est la dimension de \dot{R}/R ? Comment s'appelle cette quantité ?
2. Si l'on considère le fluide parfait dont l'équation d'état – reliant la pression P à la densité ρ – est donnée par $P = w\rho c^2$, que devient l'équation (3.2) ? Vérifier que l'on obtient alors, en notant $\rho(R_0) = \rho_0$:

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{R}{R_0} \right)^{-3(1+w)}.$$

3. Dans le cas où $\Lambda = 0$, en déduire que R est régit par une équation différentielle du type :

$$\dot{R} = \alpha R^{-\eta},$$

avec $\eta = (1 + 3w)/2$. Expliciter la valeur de α .

4. On peut montrer que la solution générale de l'équation différentielle précédente est de la forme :

$$\frac{R}{R_0} = \left(\frac{t}{t_0} \right)^\gamma.$$

Déterminer γ en fonction de η , puis de w .

5. Exprimer alors \dot{R}/R en fonction de t .

6. Dans le cas d'un Univers dominé par la matière ($w = 0$), comment est relié l'âge de l'Univers t_0 à la constante de Hubble H_0 ? Même question dans le cas d'un univers dominé par les radiations ($w = 1/3$).

Corrigé :

1. R : facteur d'échelle, Λ : constante cosmologique, ρ : densité massique. \dot{R}/R a la dimension de l'inverse d'un temps, c'est la constante de Hubble H .
2. $\dot{\rho} = -3(1+w)H$. On vérifie que $\rho/\rho_0 = (R/R_0)^{-3(1+w)}$ est bien solution de cette équation.
3. En introduisant la solution précédente dans l'éq. (3.1), on obtient $\dot{R} = \alpha R^{-\eta}$ avec

$$\alpha = \left(\frac{8\pi G}{3} \rho_0 R_0^{3(1+w)} \right)^{1/2} \quad \text{et} \quad \eta = \frac{1+3w}{2}$$

4. En égalisant les expressions de \dot{R} , on obtient

$$\gamma = \frac{1}{1+\eta} = \frac{2}{3(1+w)}.$$

5. On a

$$H = \frac{\dot{R}}{R} = \frac{\gamma}{t} = \frac{2}{3(1+w)} \frac{1}{t}.$$

6. Pour $w = 0$, $t_0 = 2/(3H_0)$; pour $w = 1/3$, $t_0 = 1/(2H_0)$.

Exercice 45 : Redshift cosmologique

La radiogalaxie 4C 41.17 montre une raie spectrale intense à 582,2 nm. Cette raie est identifiée comme la raie Lyman alpha de l'hydrogène. En laboratoire, sur la Terre, la longueur d'onde de cette raie est de 121,5 nm.

1. Quel est le redshift de la radiogalaxie 4C 41.17?
2. Quel était le facteur d'échelle de l'Univers à l'époque où les atomes d'hydrogène de 4C 41.17 émettaient cette raie?
3. À quelle époque t_{em} la radiogalaxie 4C 41.17 de l'exercice précédent a-t-elle émis la lumière que nous recevons aujourd'hui à t_0 ? On supposera un Univers critique dominé par la matière, avec un âge de $t_0 = 13,5 \times 10^9$ ans.

Corrigé :

1. $1+z = \lambda_{\text{observé}}/\lambda_{\text{émis}} = 582,2/121,5 = 4,792$ donc $z = 3,792$.
2. Par ailleurs, $1+z = \lambda_{\text{observé}}/\lambda_{\text{émis}} = R_0/R_{\text{émission}}$, soit $R_e/R_0 = \lambda_0/\lambda = 121,5/582,2 = 0,209$. À l'époque où 4C 41.17 émettait la lumière qui nous parvient aujourd'hui, l'Univers était cinq fois moins « étiré » qu'aujourd'hui.
3. Pour un Univers critique dominé par la matière, $R(t)/R_0 = (t/t_0)^{2/3}$, et donc $t_e = t_0 \times (R_{em}/R_0)^{3/2}$, soit $t_e = 13,5 \times 0,209^{3/2} = 1,29 \times 10^9$ années. 4C 41.17 émettait la lumière qui nous parvient aujourd'hui alors que l'Univers n'était âgé que de 1,29 milliards d'années.

Exercice 46 : Temps de vol, distance, et expansion...

Il y a dix milliards d'années, ce photon que nous recevons aujourd'hui a quitté une lointaine galaxie.

1. Cette galaxie se trouvait-elle à dix milliards d'années-lumière de nous au moment de l'émission?
2. Cette galaxie se trouve-t-elle aujourd'hui à dix milliards d'années-lumière de nous?

Corrigé :

1. Le photon a voyagé pendant dix milliards d'années en luttant contre l'expansion de l'espace qui contrariait son mouvement; tout se passe comme s'il avait parcouru à la vitesse c une distance supérieure à celle qui séparait la galaxie de nous au moment de l'émission. Au moment de l'émission, la galaxie était donc à moins de dix milliards d'années-lumière de nous.
2. Depuis que le photon a quitté la galaxie, celle-ci, entraînée par l'expansion, a continué à s'éloigner de nous. Le photon a bien parcouru (de son point de vue, en admettant qu'il en ait un) dix milliards d'années-lumière, puisque sa vitesse par rapport à l'espace est à tout instant égale à c , mais la galaxie a continué sa route pendant tout ce temps, et se trouve aujourd'hui à plus de dix milliards d'années-lumière de nous...

Chapitre 4

Retour sur Terre : nos repères dans le ciel

4.1 Se positionner dans le ciel

Exercice 47 : Repérage

1. Quelles sont les coordonnées horizontales des quatre points cardinaux ?
2. Peut-on définir les coordonnées horizontales pour un observateur installé au pôle Nord géographique ou au pôle Sud ?
3. Pour quelles valeurs de la hauteur et de la distance zénithale un astre est-il visible, c'est-à-dire au dessus de l'horizon ?

Corrigé :

1. Les points cardinaux étant par définition sur l'horizon, leurs hauteurs sont nulles. Les directions Est-Ouest et Nord-Sud étant orthogonales, on a à partir de l'origine la direction Sud (Fig. 4.1a) :

	Azimut	Hauteur
Nord	180°	0
Est	270°	0
Sud	0°	0
Ouest	90°	0

Remarque : L'azimut des marins est décalé de 180° par rapport à celui des astronomes. L'origine des azimuts est le Nord.

2. Seule la hauteur d'un astre au-dessus de l'horizon peut être définie. L'azimut ne l'est pas, la ligne Nord-Sud ou le plan méridien étant indéterminé. La verticale du lieu est confondue avec l'axe de rotation de la Terre et tout plan passant par la verticale du pôle répond à la définition du plan méridien.
3. Un astre n'est visible que s'il est au-dessus de l'horizon. Sa hauteur doit être positive par définition. Sa distance zénithale ($90^\circ - h$) par conséquent est plus petite que 90° . Un astre sous l'horizon a sa distance zénithale plus grande que 90° (Fig. 4.1b).

4.2 Mouvement diurne

Exercice 48 :

1. Dans quelle direction se trouve un astre au moment de sa culmination en un lieu de latitude $+50^\circ$?
2. Même question pour un lieu situé à l'équateur.
3. La hauteur d'un astre varie-t-elle au cours du mouvement diurne au pôle Nord ?

Corrigé :

1. Lors du mouvement diurne, la culmination d'un astre se produit lorsque sa hauteur est maximale. Suivant sa position de l'objet sur la sphère céleste (donc sa déclinaison), l'astre passera entre le zénith et le pôle (Nord pour un habitant de l'hémisphère nord et Sud pour...) soit entre le zénith et l'horizon opposé au pôle visible. À la latitude de 50° , les étoiles dont la déclinaison est plus petite que la latitude, la culmination se fera du côté Sud de l'observateur. Pour les autres étoiles, la culmination sera du côté Nord (Fig. 4.2a)

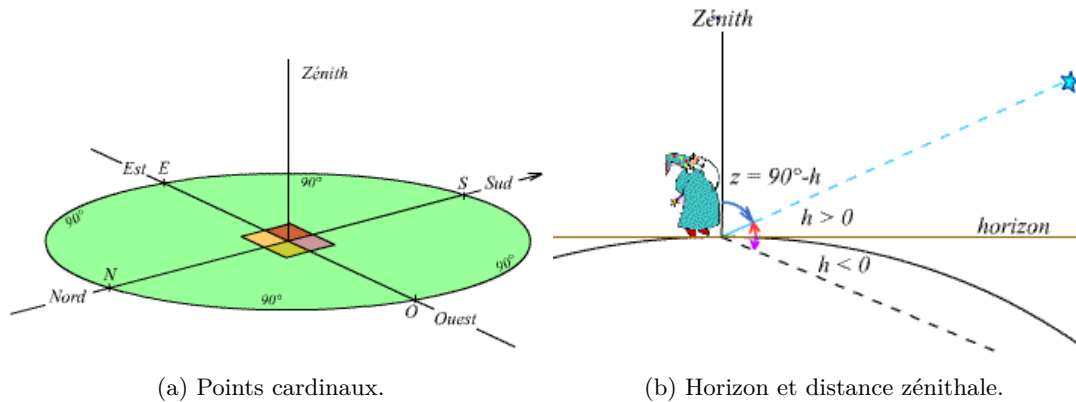


FIGURE 4.1

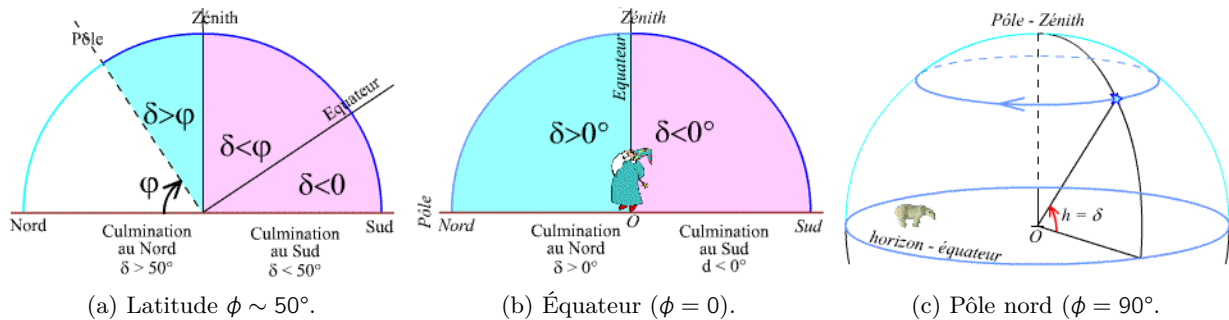


FIGURE 4.2 – Mouvement diurne.

2. L'équateur passant par le zénith, toutes les étoiles de déclinaisons positives culminent au Nord et les étoiles de déclinaisons négatives au Sud. Les étoiles de déclinaisons nulles passent au zénith (Fig. 4.2b).
3. La verticale étant confondue avec l'axe du pôle, et l'horizon avec l'équateur, la déclinaison est égale à la hauteur de l'astre qui reste constante lors de la rotation diurne. Seuls les objets de déclinaisons positives sont visibles. C'est pourquoi le Soleil dans son mouvement apparent durant l'année donne 6 mois consécutifs de jour et 6 mois consécutifs de nuit (Fig. 4.2c).

Exercice 49 : Mouvement diurne

1. Comment varie l'azimut d'un astre au cours du mouvement diurne, en un lieu de latitude $+50^\circ$? Et aussi -50° de latitude. Sur la Fig. 4.3, on a représenté la situation en un lieu de l'hémisphère Sud (latitude $= -50^\circ$); P est alors en-dessous de l'horizon et P' est au-dessus.
2. Les astres se lèvent-ils du côté de l'Est et se couchent-ils du côté de l'Ouest aussi bien dans l'hémisphère Nord que dans l'hémisphère Sud?
3. Dans quelle direction géographique un astre culmine-t-il en un lieu de latitude -50° ?
4. Le mouvement diurne est-il observé dans le même sens pour un observateur de l'hémisphère Nord ou un observateur de l'hémisphère Sud?

Corrigé :

1. **Observateur de l'hémisphère Nord (latitude $+50^\circ$)** On n'envisagera que le cas des étoiles visibles par l'observateur, c'est-à-dire celles dont $\delta > -(\pi/2 - \phi)$. Deux critères sont à envisager :
 - l'étoile a une déclinaison plus grande que la latitude $\delta > \phi$ ou $\delta < \phi$
 - l'étoile est circumpolaire $\delta > \pi/2 - \phi$
 Par la première condition, si $\delta < \phi$, l'azimut de l'étoile varie de 0 à 360° , sinon, son azimut oscille entre une valeur comprise α entre 90 et 180° suivant sa position au passage au méridien et $360^\circ - \alpha$. L'étoile oscille donc entre α , 180° et $360^\circ - \alpha$.
 Le deuxième critère (circumpolarité) indique si l'étoile a un lever ou un coucher, son azimut varie alors entre les positions des levers et couchers et celles définies par le premier critère.
 L'observateur orienté vers le Nord voit tourner les étoiles dans le sens direct autour du pôle Nord.
- Observateur de l'hémisphère Sud (latitude -50°)** Les mêmes critères s'appliquent pour les limitations des azimuts et des levers et couchers, à la différence que l'azimut va osciller autour de la valeur 0° et que regardant le pôle Sud, il verra tourner les étoiles dans le sens rétrograde (Fig. 4.3).

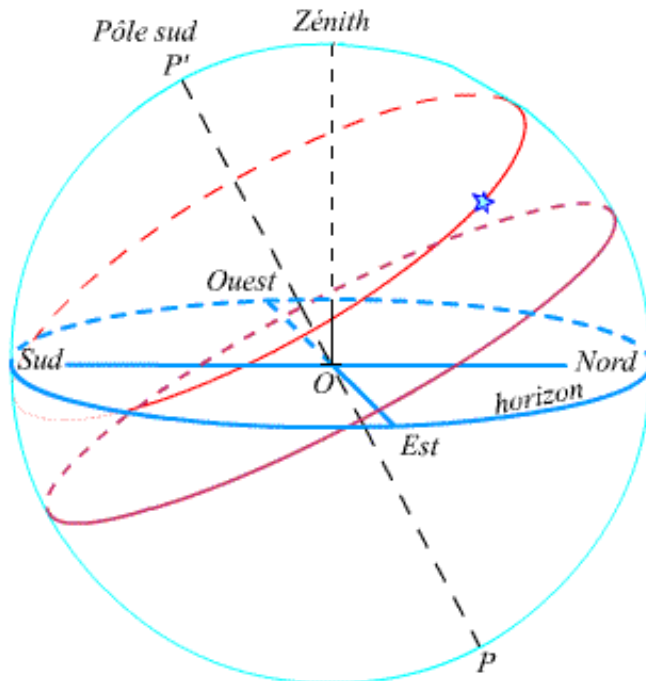


FIGURE 4.3 – Rotation d’une étoile vue de l’hémisphère sud (latitude = -50°).

- Oui. Que l’on soit dans l’hémisphère Nord ou Sud, le sens de rotation de la Terre est le même. Les objets apparaissent à l’Est et se couchent à l’Ouest.
- Au Nord si sa déclinaison est plus grande que la latitude, autrement au Sud (Voir exercice 1 du même chapitre).
- Non (Voir exercice 4 du chapitre II).

Exercice 50 : Coordonnées horaires

- Quelle est la relation entre la déclinaison et la distance polaire d’un astre ?
- Quelles sont les coordonnées horaires des quatre points cardinaux en un lieu de latitude ϕ ?
- Que vaut la déclinaison du zénith en fonction de la latitude du lieu ?

Corrigé :

- Comme son nom l’indique, la distance polaire est l’angle entre la direction du pôle nord et la direction de l’objet, donc $p = 90^\circ - \delta$
- Table 2 et Fig. 4.4a

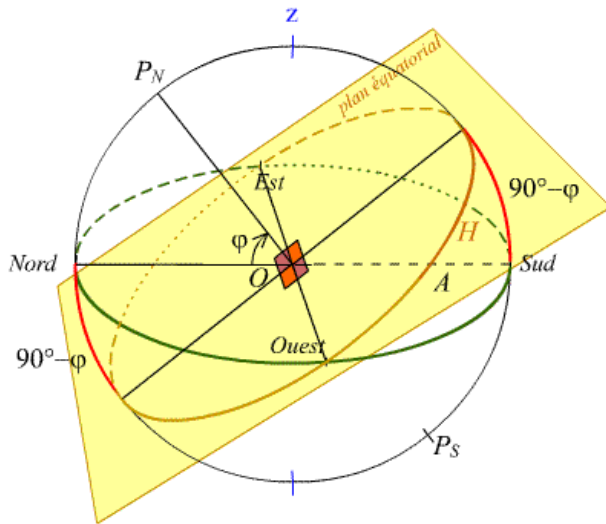
	Angle horaire	Déclinaison
Sud	0 h	$\phi - 90^\circ$
Ouest	6 h	0
Nord	12 h	$90^\circ - \phi$
Est	18 h	0

- La déclinaison du zénith vaut la latitude (positive pour l’hémisphère Nord et négative pour l’hémisphère Sud), voir Fig. 4.4b.

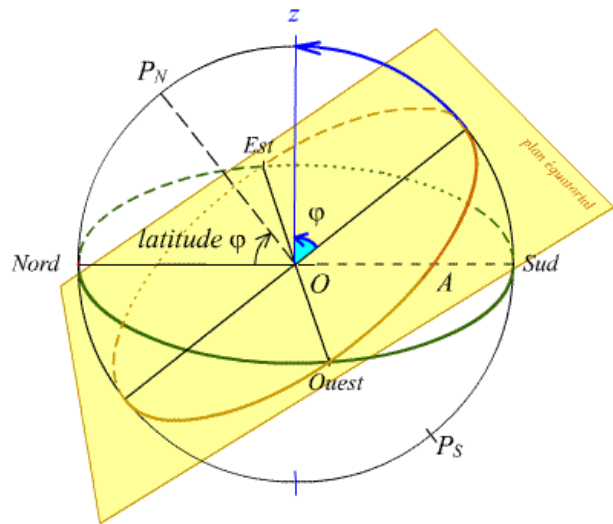
Exercice 51 : Coordonnées équatoriales

- Une étoile traverse le méridien sud à une hauteur de 85° , et le méridien nord à 45° . Trouver la déclinaison de l’étoile et la latitude de l’observateur.
- Où ces affirmations sont-elles vraies ?
 - Castor (α -Gem, déclinaison $+31^\circ 54'$) est circumpolaire.
 - Bételgeuse (α -Ori, $7^\circ 24'$) culmine au zénith.
 - α -Cen ($-60^\circ 46'$) s’élève à une hauteur de 20° au méridien.

Corrigé :



(a) Points cardinaux.



(b) Zénith.

FIGURE 4.4 – Coordonnées horaires.

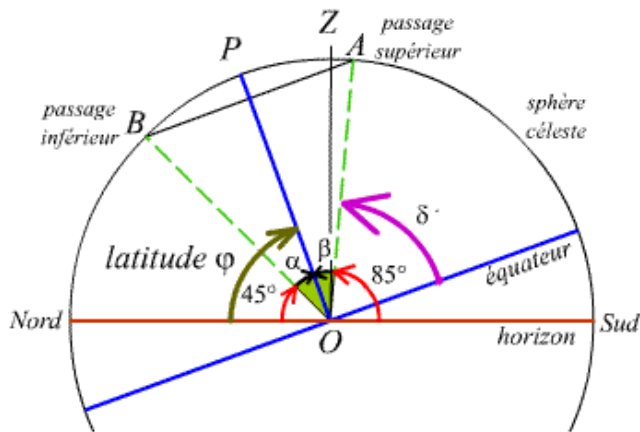


FIGURE 4.5 – Coordonnées horaires.

1. L'étoile tournant autour de la direction du pôle, les deux directions OA et OB des passages supérieur et inférieur, sont symétriques par rapport à l'axe OP . L'angle α égale l'angle β et

$$\alpha + \beta + 180^\circ - 45^\circ - 85^\circ = 50^\circ \quad \text{donc} \quad \alpha = \beta = 25^\circ$$

α et β sont tous deux les compléments de la déclinaison de l'étoile :

$$\beta + \delta = 90^\circ \quad \text{donc} \quad \delta = 65^\circ$$

On calcule la latitude qui vaut la hauteur du pôle au dessus de l'horizon : $\phi = \alpha + 45^\circ = 70^\circ$.

2. **Castor (Gem, $\delta = +31^\circ 56'$) circumpolaire** : L'étoile sera juste circumpolaire, c'est-à-dire passera tangent à l'horizon Nord, si sa déclinaison est le complément de la latitude. Pour toute latitude plus grande, l'étoile sera plus élevée sur l'horizon et ne disparaîtra pas derrière celui-ci (Fig 4.6a) : $\phi \geq 90^\circ - \delta$

Bételgeuse (Ori, $\delta = +7^\circ 24'$) culmine au zénith : Si l'étoile est au moment de sa culmination au zénith (nécessairement), sa déclinaison est égale à la latitude (Fig. 4.6b) : $\phi = 7^\circ 24'$

α -Cen ($\delta = -60^\circ 46'$) s'élève à une hauteur de $+20^\circ$: À son passage supérieur, l'étoile se trouve dans la configuration Fig. 4.6c. La latitude est l'angle PON qui est égal à $P'OS$. En appliquant la relation de Chasles entre $P'OS$ la hauteur de l'astre 20° et la déclinaison, on obtient : $P'OS = 90^\circ + \delta - 20^\circ$ d'où $\phi = 9^\circ 14'$

4.3 Mouvement du Soleil

4.3.1 Année sidérale, année tropique

Exercice 52 : Mouvement du Soleil, jour solaire

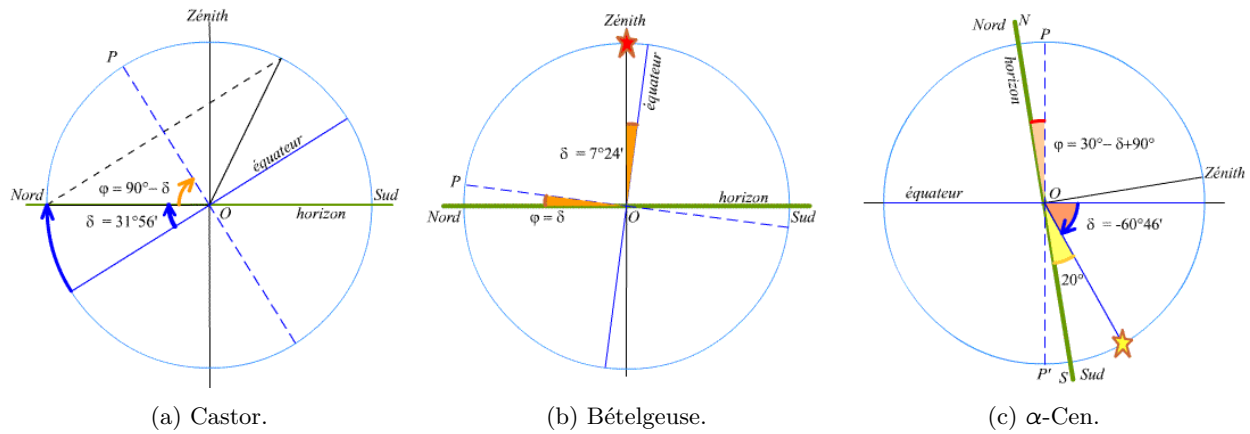


FIGURE 4.6 – Coordonnées équatoriales.

1. Que valent la hauteur maximale et la hauteur minimale du Soleil en chacun des lieux considérés : 50°, 75°, 10°, 20° ?
2. À quelle condition doit satisfaire la latitude d'un lieu pour que le Soleil n'ait ni lever ni coucher ?
3. Comment comprendre l'expression « soleil de minuit » ?
4. À quelle condition doit satisfaire la latitude d'un lieu pour que le Soleil puisse passer à son zénith ?
5. Comment comprendre l'expression « tropique du Cancer » et « tropique du Capricorne » ? on pourra discuter cette question, en particulier, en consultant une carte céleste.

Corrigé :

1. Inclinaison de l'écliptique sur l'équateur : $\epsilon = 23^\circ 27'$. On détermine les relations qui relient la latitude ϕ , les hauteurs minimum et maximum avec les deux positions du Soleil en déclinaison $\pm\epsilon$.
 - Position solstice hiver : $SOm = SOE - \epsilon = (90^\circ - \phi) - \epsilon$
 - Position solstice été : $SOm = SOE + \epsilon = (90^\circ - \phi) + \epsilon$
 ou le supplément si le Soleil sous les tropiques est passé de l'autre côté.

Latitude ϕ	50°	75°	10°	–20°
Hauteur max.	63°27'	38°27'	90°	90°
Hauteur min.	16°33'	–08°27'	56°33'	46°33'

Attention aux positions entre les tropiques, le Soleil au solstice d'été pour les latitudes nord (solstice d'hiver pour les latitudes sud) est passé au Sud (au Nord) et de ce fait est plus bas que le jour où il passe au zénith au méridien (Fig. 4.7a).

2. Ceci se produit dans l'hémisphère nord en été quand le Soleil a une déclinaison suffisamment positive. On appelle ce phénomène le « soleil de minuit ». Sur la figure ci-contre (cas de l'hémisphère Nord), lorsque au passage inférieur, l'angle NOD est positif, le Soleil ne se couche pas, son mouvement est circumpolaire.

$$\begin{aligned}
 NOD &= NOE' + E'OD > 0 \\
 90^\circ - \phi &< \delta_\odot \\
 \phi &> 90^\circ - \delta_\odot
 \end{aligned}$$

Au jour des solstices ($\delta_\odot = \pm 23^\circ 27'$) il suffit d'être à une latitude $\phi > 66^\circ 33'$ (en été pour l'hémisphère Nord) ou $\phi < -66^\circ 33'$ (en hiver pour l'hémisphère Sud) ; les lieux de latitude ϕ égale à $\pm 66^\circ 33'$ définissent sur le globe terrestre les parallèles appelés « cercles polaires » (respectivement boréal et austral) (Fig. 4.7b).

3. Vers les pôles, lors de son passage inférieur dans le plan méridien, le Soleil est au-dessus de l'horizon et son angle horaire ayant augmenté de 180° depuis sa culmination (par définition, il s'agit alors de « midi », 0 h temps solaire) vaut 12 h, cela correspond bien à « minuit ». À noter que le Soleil de minuit s'observe au Nord dans l'hémisphère boréal et au Sud dans l'hémisphère Sud.
4. Pour que le Soleil passe au zénith, il faut que la déclinaison du zénith (qui est aussi la latitude du lieu) soit égale à celle du Soleil ; comme cette dernière ne peut varier qu'entre $+23^\circ 27'$ et $-23^\circ 27'$, les lieux en question sont ceux de latitude comprise entre $-23^\circ 27'$ et $+23^\circ 27'$. Le Soleil passe au zénith de ces lieux deux fois dans le cours d'une année, au printemps et en été dans l'hémisphère Nord et en automne et en hiver dans l'hémisphère Sud. Les zones de la Terre qui correspondent à cette propriétés sont appelées les zones tropicales car situées entre le tropique nord du Cancer et le tropique sud du Capricorne.

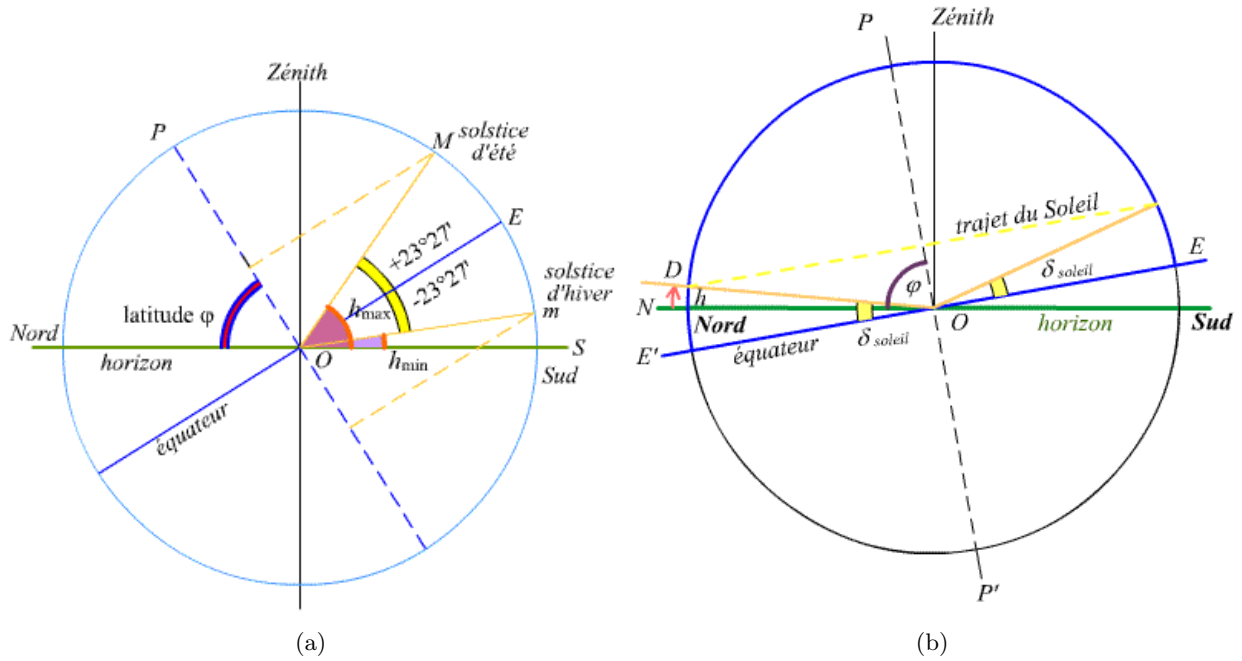


FIGURE 4.7

5. Pour les lieux de latitude égale à $+23^{\circ}27'$ et $-23^{\circ}27'$, le Soleil passe au zénith au moment des solstices. Ces lieux définissent sur le globe terrestre les parallèles appelés « tropiques » (du Cancer pour l'hémisphère Nord et du Capricorne pour l'hémisphère Sud). Si l'on se reporte à une carte du ciel, on voit qu'au moment des solstices le Soleil se trouve dans la direction de la constellation des Gémeaux (été) ou du Sagittaire (hiver). Il faudrait donc désigner les lieux en question par les noms : « tropique des Gémeaux » au lieu de tropique du Cancer et de même « tropique du Sagittaire » au lieu de tropique du Capricorne. L'appellation en usage a été définie il y a environ 3 000 ans à une époque où le point γ était dans la direction de la constellation du Bélier ; au solstice d'été le Soleil était bien dans la direction du Cancer et au solstice d'hiver dans la direction du Capricorne. Ce glissement est produit par la précession des équinoxes au rythme de 360° pour 26 000 ans, ce qui donne un effet de 42° , (soit environ un angle de 3 h) sur 3 000 ans, comme on peut le lire sur la carte.