

中国人民大学

硕士学位论文

(中文题目) 混合维度下多原子的稳定束缚态

(英文题目) Stable Heteronuclear Atoms Bound States in
Mixed Dimensions

作者学号: 2009101907

作者姓名: 殷涛

所在学院: 理学院物理学系

专业名称: 理论物理

导师姓名: 张威

论文主题词:
(3-5个) 混合维度, 少体束缚态, Efimov 态

论文提交日期:

独创性声明

本人郑重声明：所呈交的论文是我个人在导师指导下进行的研究工作及取得的研究成果。尽我所知，除了文中特别加以标注和致谢的地方外，论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果，也不包含为获得中国人民大学或其他教育机构的学位或证书所使用过的材料。与我一同工作的同志对本研究所做的任何贡献均已在论文中作了明确的说明并表示了谢意。

论文作者（签名）：_____日期：_____

关于论文使用授权的说明

本人完全了解中国人民大学有关保留、使用学位论文的规定，即：学校有权保留送交论文的复印件，允许论文被查阅和借阅；学校可以公布论文的全部或部分内容，可以采用影印、缩印或其他复制手段保存论文。

论文作者（签名）：_____日期：_____

指导教师（签名）：_____日期：_____

摘 要

超冷原子系统中, 具有短程相互作用的粒子在散射长度非常大的情况下, 系统的性质不依赖于具体的粒子结构以及相互作用势在短距离的细节, 从而表现出普适的性质。在普适区域中的三维系统, 会存在无穷多个三体束缚态 (Efimov态)。但是由于三维系统中三体复合效应的存在, 这些三体束缚态是一系列亚稳态。在本文中我们研究了混合维度系统中的少体问题。在我们的体系中两个或三个重原子被独立束缚在相互平行的一维管或者二维平面内, 同时一个轻原子在三维空间中自由运动。通过Born-Oppenheimer近似, 我们研究了由轻原子诱导出来的重原子间有效相互作用势的性质。然后我们计算并讨论了在一个很大的参数范围内系统中存在的稳定三体和四体束缚态。

本文共由五个章节构成。在第一章中我们介绍了超冷原子系统和混合维度系统中的一些基本概念和进展。在第二章我们介绍了两体散射问题的基本概念以及处理方法。在第三章我们发展了在Born-Oppenheimer近似下, 处理混合维度系统中多原子问题的一般性方法。在第四章我们将这个一般性方法运用到具有1D-1D-3D和2D-2D-3D结构的三体系统以及具有1D-1D-1D-3D结构的四体系统。我们分析了系统中重原子间的有效相互作用势, 并且求解了稳定的三体和四体束缚态。在第五章中我们总结了所得到的主要结论, 并且对进一步的工作进行了展望。

关键词：混合维度；少体束缚态；Efimov态

Abstract

In ultracold quantum systems, particles with short-range interactions and large scattering length have universal properties that do not depend on the details of their structure or their interactions at short distances. The three-dimensional system in this universal region may exist an infinite tower of shallow three-body bound states (Efimov states). Due to three-body recombination, the Efimov states in realized in 3D systems are only metastable states. In this dissertation, we studied few-body problems in mixed dimensions with $N \geq 2$ heavy atoms trapped individually in parallel one-dimensional tubes or two-dimensional disks, and a single light atom travels freely in three dimensions. By using the Born-Oppenheimer approximation, we studied the effective interaction potential between heavy atoms which induced by light atom. Finally, we found stable three- and four-body bound states for a broad region of heavy-light atom scattering length combinations.

This dissertation comes into five chapters. In chapter 1 we briefly introduce basic concepts and development of ultracold quantum system and mixed-dimensional system. In chapter 2 we show some basic concepts and methods for two body problem. In chapter 3 we develop the general formalism for studying Heteronuclear Atoms problems in arbitrary mixed-dimensional geometries within the Born-Oppenheimer approximation. In chapter 4 this general scheme is applied to three-body systems in 1D-1D-3D and 2D-2D-3D configuration and four-body systems in 1D-1D-1D-3D configuration. We analyze the effective interaction potential between heavy atoms and solve the three-body and four-body bound states. In chapter 5 we give the summary of our main conclusion and the prospect of the future work.

Key Words : Mixed Dimensional; Few-Body Bound States; Efimov States

目 录

摘 要	I
Abstract	II
第 1 章 导论	1
1.1 超冷原子中的Efimov态	1
1.2 受限维度中的超冷原子气体	4
1.3 混合维度下的超冷原子气体	6
第 2 章 超冷原子气体中的两体问题	10
2.1 两体相互作用的散射长度	10
2.2 两体散射作用的Bethe-Peierls边界条件	14
第 3 章 混合维度系统中的超冷原子气体	16
3.1 Born–Oppenheimer近似	16
3.2 混合维度下的两体散射长度	17
3.3 Born–Oppenheimer近似在混合维度的应用	22
第 4 章 混合维度下少体系统的稳定束缚态	25
4.1 1D-1D-3D系统中的有效相互作用势	25
4.2 1D-1D-3D系统中的三体稳定束缚态	33
4.3 2D-2D-3D系统中的三体稳定束缚态	37
4.4 1D-1D-1D-3D系统中的四体稳定束缚态	39
第 5 章 总结	49
参考文献	51
发表论文	55
致 谢	56

图表索引

1.1	磁场诱导Feshbach共振示意图	1
1.2	Efimov能级示意图	2
1.3	一维光晶格示意图	4
1.4	二维和三维光晶格示意图	5
1.5	混合维度共振(MDR)示意图	7
1.6	三原子构成的混合维度体系	8
3.1	两个重原子和一个轻原子之间的相对位置	22
4.1	Lambert W函数	28
4.2	1D-1D-3D系统中有效相互作用势在不同散射长度 a 下的形式 . . .	29
4.3	1D-1D-3D系统中有效相互作用势的深度 $D(a)$ 关于 $1/a$ 的形式 . . .	30
4.4	1D-1D-3D系统中三体束缚态的基态束缚能	34
4.5	1D-1D-3D系统中三体基态束缚能 E_{3b} 随 $1/a$ 的变化	35
4.6	1D-1D-3D系统中三体基态束缚能 E_{3b} 随约化质量 m_* 的变化	35
4.7	1D-1D-3D系统中三体束缚态的基态束缚能同严格解的对比	36
4.8	2D-2D-3D系统中三体束缚态的基态能	38
4.9	2D-2D-3D系统中三体束缚态的基态束缚能同严格解的对比	39
4.10	1D-1D-1D-3D系统中混合维度体系	40
4.11	1D-1D-1D-3D系统中有效相互作用势的取值	43
4.12	1D-1D-1D-3D系统中有效相互作用势的深度 $D(a)$	44
4.13	1D-1D-1D-3D系统中四体束缚能随 $1/a$ 的变化	46
4.14	1D-1D-1D-3D系统中重原子 $A_{1,2,3}$ 的波函数 $\phi(X, Y)$	46
4.15	1D-1D-1D-3D系统中四体和三体束缚态基态能量示意图	47
4.16	1D-1D-1D-3D系统中有效相互作用势在不同构型下的深度	48

第1章 导论

1.1 超冷原子中的Efimov态

超冷原子物理中，原子的能量通常远小于两个原子之间相互作用势特征长度 r_* 所界定的特征能量。在这样一个超低能区间里面，体系的物理性质通常只由少数参数决定，而与相互作用势在短距离的具体细节无关。在Bose气体和多分量的Fermi气体相互作用的参数中，最为重要的是两体 s 波散射长度 a_s ，通常简称为散射长度 a 。在两体系统中，当散射长度 $|a| \gg r_0$ ，系统的能量以及远处的波函数将只由散射长度决定，而不再依赖于其他参数。这时候，系统被认为是“普适的”(universal)，而依赖于发生相互作用的两个粒子是中子、原子或者其他具有短程相互作用势的粒子。在散射长度为正($a > 0$)且远远大于 r_0 的情况下，两体之间会形成一个能量接近于零($E = -\hbar^2/(2m_*a^2)$)的两体束缚态(dimer)，其中 m_* 为两体约化质量；而在散射长度为负($a < 0$)的情况下，系统中不会出现低能的两体束缚态。

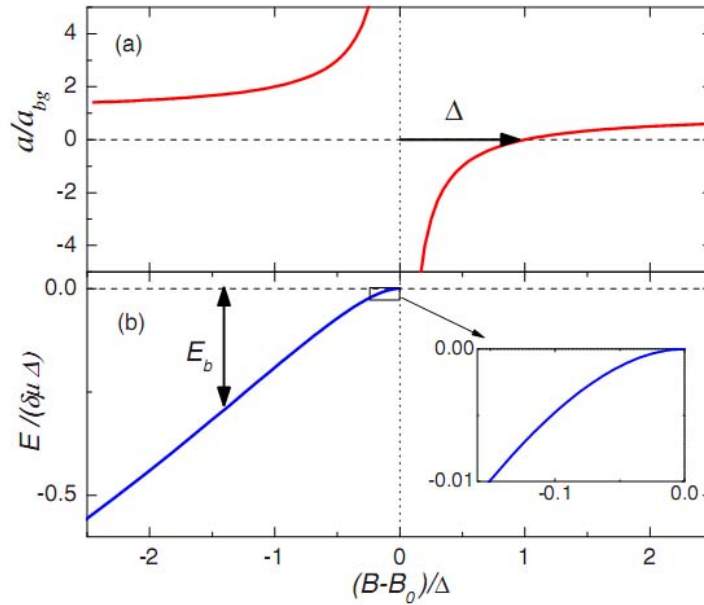


图 1.1: 磁场诱导的Feshbach共振示意图。(a)散射长度 a 随着磁场 B 的变化。(b)共振点附近 $a > 0$ 时两体束缚态能量。[4]

在通常的物理系统中，两体之间散射长度是一个确定值。对于具有Van der Waals相互作用的中性原子，它们之间的散射长度通常为 $30a_0$ (Li原子)

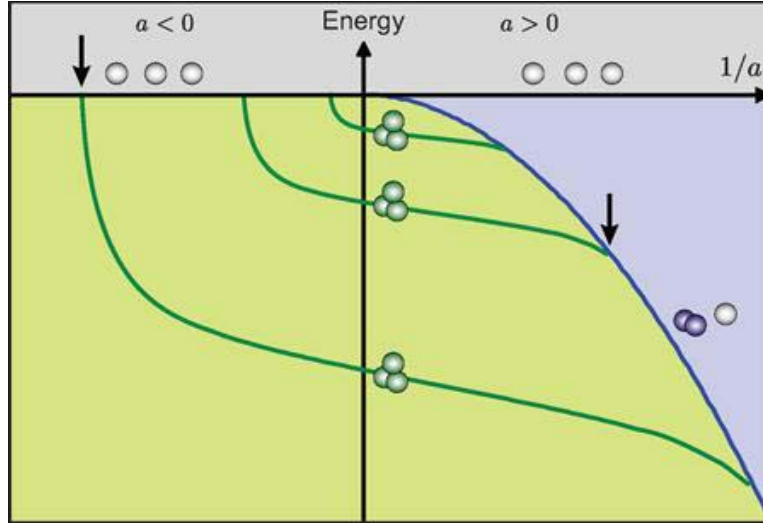


图 1.2: Efimov能级示意图：图中画出了三体束缚能相对于两体散射长度倒数 $1/a$ 的曲线。图中分为三个区域， $E > 0$ 的三体散射态（上侧）， $a > 0$ 且 $-\hbar^2/(ma^2) < E < 0$ 的单体-两体散射态（右侧），三体束缚态（左侧）。图中间三条线分别代表Efimov态的三个能级。箭头处指Efimov态在临界点，代表着共振的发生。 [5]

到 $100a_0$ （Cs原子）之间，其中 a_0 为波尔半径。在超冷原子体系中，我们可以通过磁场诱导的Feshbach共振（FR） [1]技术方便的对散射长度的大小和符号进行调节 [2,3]。散射长度对于磁场的依赖关系为

$$a(B) = a_{bg} \left(1 - \frac{\Delta}{B - B_0} \right). \quad (1.1)$$

其中 B_0 和 Δ 决定了系统中共振出现的位置和宽度，而 a_{bg} 称为系统的背景散射长度。通过调节外磁场的大小，可以将散射长度调节到任意需要的区域，从而可以在超冷原子体系中观察到非常丰富的物理现象 [4]。

在三个原子构成的体系处于普适区域时，系统只依赖于两体散射长度 a 和一个三体参数。V. Efimov预测在这个系统中会出现一系列具有几何对称性的三体束缚态，通常被称为Efimov态 [6-8]。

在散射长度接近于无穷的情况下，这些三体束缚态会形成一系列能谱，两个临近的束缚态的束缚能之间的比值是一个常数，这意味着系统中出现的分立的尺度效应，同时，这些Efimov态出现时的散射长度也同样具有尺度效

应 [9,10]:

$$\frac{E_T^{(n+1)}}{E_T^{(n)}} \rightarrow e^{-2\pi/s_0}, \quad \frac{a_T^{(n+1)}}{a_T^{(n)}} \rightarrow e^{\pi/s_0}. \quad (1.2)$$

对于三个全同Bose子构成的系统中, 这个尺度因子为 $s_0 \approx 1.0064$ 。

如图(2)中所示, 在 $E > 0$ 区域, 系统中存在三个具有一定动能的散射态原子; 而在 $E < 0$ 且 $a > 0$ 的区域里, 系统中存在一个能量为 $-\hbar^2/(2m_*a^2)$ 的两体束缚态; 而在图中左侧区域里, 会在一系列三体束缚态。特别需要指出的是, 在 $a < 0$ 的情况下, 两体之间不会产生束缚态, 但是在三体情况下却有Efimov束缚态存在。在 $|a| \rightarrow \infty$ 的普适区域, 系统的性质只由散射长度 a 和三体参数决定, 而三体参数决定着第一条束缚态出现的位置。

在Efimov做了最初的研究之后, Efimov态在很多领域都引起了极大的关注, 包括核物理 [11,12], ^4He 系统 [13,14], 以及一些分子系统 [15]。然而直到最近, 人们才通过超冷原子体系的实验第一次观察到了这类非平凡的束缚态的存在。通过调节磁Feshbach共振, 在原子气体之间的散射长度为正和负区域内, 都观察到了相当明显的三体束缚态。到目前为止, 很多实验小组已经在超冷原子体系中观测到了不同原子的Efimov态: 2005年, Innsbruck小组首先在 ^{133}Cs 玻色气体中观察到了Efimov态 [16,17]; 而Florence的小组最早验证了Efimov态中尺度效应的存在 [18]。

在最初的只考虑全同玻色子问题之后, 对三体物理的研究推广到一系列三体系统中, 包括具有不同的散射长度和(或)不同质量的可分辨粒子 [19–21], 两个全同费米子加上第三个原子 [22,23], 具有非零角动量的三体系统等 [24]。而其中尤其吸引注意的是超冷气体中三个不同态的 Li^6 原子形成的Efimov态。在这个体系中, 存在很宽的磁Feshbach共振区, 三个原子之间的散射长度都可以被同时调节到共振, 从而可以观测到很多少体系统的普适行为 [25–34]。另外在超冷气体中还可以通过Feshbach共振调节不同种类原子之间的相互作用, 从而研究不同种类原子的少体系统问题。

由于原子间相互作用的多通道性质, 三维超冷气体中的Efimov态只是一个亚稳态。通过三体复合效应, 三体束缚态中的两个原子会形成一个非常深的两体束缚态, 同时第三个原子会得到动能从势阱中逃离。为了制备稳定的三体束缚态, 需要设计一套机制来大幅降低甚至防止三体复合效应。因为三体复合效应只发生于三个原子全部同时存在于一个非常小的区域内, 一个防止三体复合效应的可能方法就是使用空间的约束, 将原子在空间上分离从而不会运动到同一区域。因此, 如果将三个原子中的两个分别约束到两个在空间上分离的一维

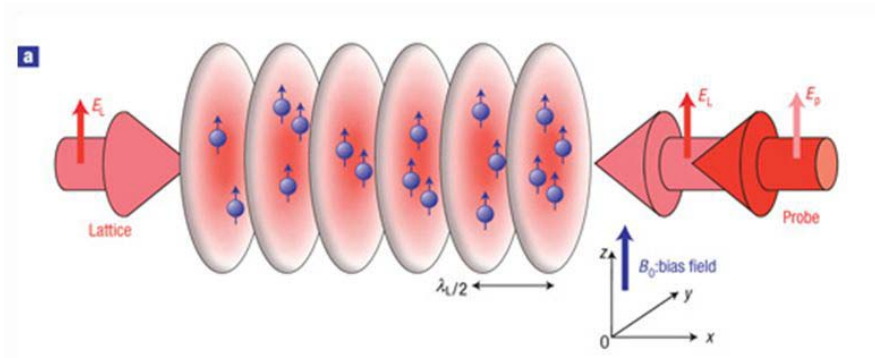


图 1.3: 一维光晶格示意图。

(1D) 管子或者二维 (2D) 平面上, 同时通过同三维空间中自由运动的第三个原子散射而实现诱导相互作用, 这样三体复合效应就可以被完全的禁止, 在这样混合维度约束下的三体束缚态就是一个稳定的束缚态 [35–37]。

1.2 受限维度中的超冷原子气体

超冷原子系统受到人们极大关注的原因之一就在于其高度的可操控性。这种可操控性表现在两个方面: 一方面, 如同前面介绍过的, 利用Feshbach共振技术, 人们可以方便的调节原子之间的散射长度, 从而控制原子之间的相互作用。另一方面, 借助光势阱和磁势阱, 人们可以控制原子空间运动所感受到的外势场。尤其是光势阱技术, 为人们对原子外势场的控制提供了广阔的空间。

通过在 x 方向对系统施加一组对射的相干激光, 会在空间形成一个驻波场, 光场同原子内诱导出的电子偶极距作用 [38], 可以在激光的方向上形成一个周期势

$$V_{\text{lat}}(x) = V_0 \sin^2(k_L x), \quad (1.3)$$

其中 $k_L = 2\pi/\lambda_L$ 为对射激光的波矢, 所以这个势场的周期为半个波长。通常情况下, 激光的频率被调节到离原子共振频率非常远, 这样就防止了原子在不同内态之间的跃迁。如图(1.3)这样一组对射激光就形成一维光晶格系统, 将原子约束在一系列二维平面内。

通过在不同的空间维度上增加更多激光, 可以实现在不同维度上对原子的约束势, 从而形成二维和三维光晶格 [39]。利用光晶格技术, 可以把原子牢固地约束在某一个或两个维度上面, 从而制备出低维或者准低维系统。在实验

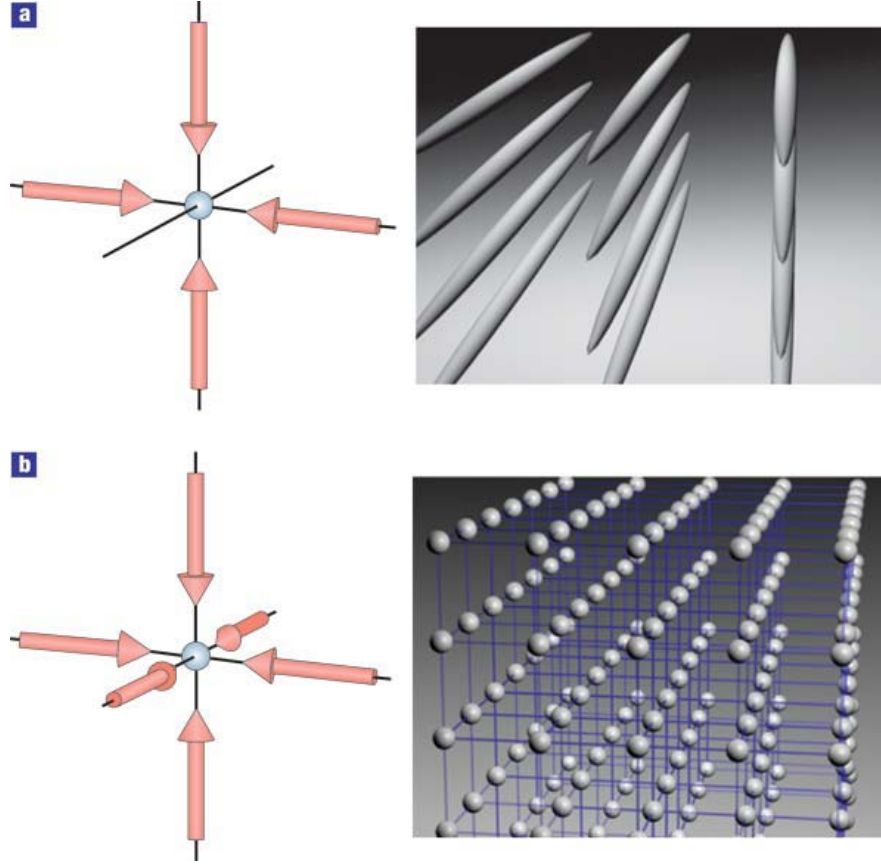


图 1.4: 二维和三维光晶格示意图。

上已经实现了1维和2维体系的玻色-爱因斯坦凝聚 [40,41]，准1维强关联费米气体 [42]等。

光晶格的另外一个巨大优势是势阱的几何结构和深度都是在实验中完全可控的。例如可以通过改变对射激光的角度来改变势阱的几何结构，从而形成Kagome格子 [43]，通过改变入射激光的频率强度，可以很方便的改变势阱的性质，从而可以改变系统中的参数。

在准一维系统中，通过两组垂直对射的激光，可以形成二维光晶格，从而将系统约束在一维空间。低维体系中的超冷原子之间的低能相互作用，也是由其所处维度上的散射长度决定的。通过改变约束势的频率和强度，可以将一维系统中的一维有效两体散射长度 a_{1D} 在 $\pm\infty$ 之间调节，从而改变一维系统中原子间相互作用，这种改变散射长度的方法被称作“约束诱导共振”（CIR） [44–46]。所以说，低维系统中的散射长度，既和此类原子在三维空间中的散射长度有关，也和把原子束缚在低维的横向势场参数有关。在实际操作

中，既可以通过磁诱导Feshbach共振技术 [4]，也可以通过对相关光势阱的操作来调节体系中原子散射长度。

光晶格的一个非常重要的应用就是可以模拟一些凝聚态体系中的模型，从而实现Feynman所提出的量子模拟。例如在光晶格中的玻色系统，可以用Bose-Hubbard模型来描述 [47]

$$H = -J \sum_{\langle ij \rangle} \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j + \frac{1}{2} U \sum_i \hat{n}_i (\hat{n}_i - 1). \quad (1.4)$$

根据Fisher最早的研究，这个模型在由弱相互作用区域($U/J \ll 1$)到强相互作用区域($U/J \gg 1$)过渡的时候会出现超流–Mott绝缘体相变 [48]。在冷原子实验中，通过调节外磁场和光晶格的参数，可以改变原子间散射长度以及原子动能，从而改变系统相互作用项 U 和跃迁项 J 之间的比值，最终观察到了超流–Mott绝缘体相变过程 [49]。近年来，光晶格技术已经成为超冷原子物理中非常重要的一个手段，极大推动了这个领域的发展。

1.3 混合维度下的超冷原子气体

前面说的这些工作，都是基于特定维度的体系的。事实上，在物理学中，还存在很多混合维度的体系，例如石墨烯就可以被认为是一个混合维度的体系，其电子被束缚在二维层面，在三维空间运动的声子诱导出电子之间的相互作用势 [50]。Casimir效应同样是一个混合维度体系，在这个二维-三维体系中，真空中两片平行的二维平坦金属板之间由于三维真空中零点能和电子涨落，会诱导出一个微弱的相互吸引势 [51–53]。最近一两年来，基于超冷原子混合维度体系的研究也逐渐兴起。

与确定维度的体系类似，实验上也可以利用光阱实现混合维度的超冷原子物理体系。我们可以在一个由A、B两种原子组成的系统中，施加一束特定频率的激光，使得A类原子能够感受到激光给予的很强的横向约束势，从而被束缚在一个特定的低维空间中。同时，由于大失谐的原因，这束激光可能对B类原子的空间运动几乎毫无影响。如果能做到这一点，我们就能将A、B两种原子分别约束在不同维度的空间，从而实现混合维度体系，这种方法称为SSDP(Species-Selective Dipole Potential)技术 [54–56]。2010年，LENS小组率先在实验上实现了由两种超冷玻色子 ^{41}K 和 ^{87}Rb 组成的混合维度系统，其中 ^{41}K 被束缚在二维平面中，而 ^{87}Rb 仍然在三维空间中运动 [57]。

在理论方面，2009年以来，Nishida和Tan等人对混合维度中超冷原子体系

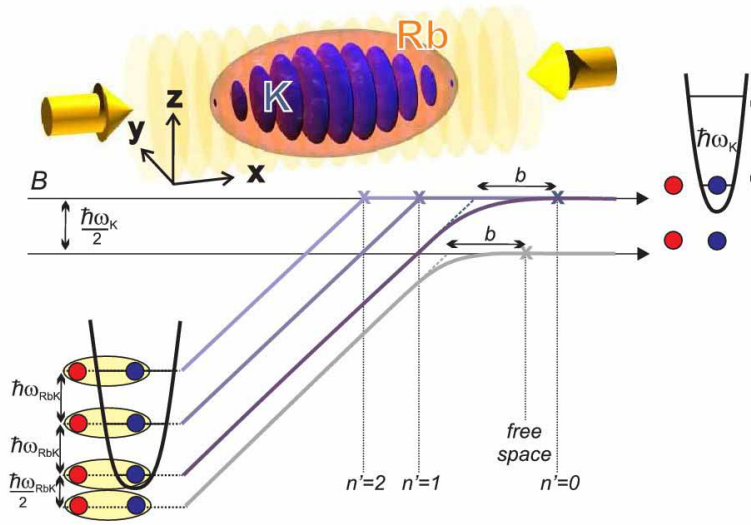


图 1.5: 利用SSDP技术实现的3D(Rb)-2D(K)混合维度系统。当闭道中的能级和开道中的能级交叉时，混合维度共振（MDR）就会发生。 [57]

进行了一系列探讨。他们的工作主要分为少体物理和多体物理两个方面。在少体物理方面，他们首先给出了混合维度下散射长度对于各种约束势的依赖关系，以及相应的约束诱导共振公式，然后探讨了混合维度体系中几类Efimov束缚态的存在性和稳定性。在多体物理中，他们探讨了各类混合维度体系中可能存在的各种量子相 [35–37]。可以预见，随着这类体系在实验上的成功实现，理论上的研究也会日益活跃。

我们研究的目标，是探讨混合维度体系中一类特殊的少体束缚态。我们注意到，三维空间中超冷原子形成的Efimov束缚态，存在两个并不十分有利的问题。第一是束缚态的能量和波函数，除了跟散射长度有关之外，还与一个“三体相互作用参数”有关。这个参数描述三个原子全部彼此靠近时候的物理情况，它由相互作用势在极短距离时候的行为决定，在实验上很难加以测量和调节。第二，当三个原子全部彼此靠近的时候，由于三体复合效应，其中两个原子会形成更稳定的两体束缚态，同时第三个原子会获得很大的动能而脱离约束势阱，这类非弹性散射的效应会使Efimov态成为一个寿命有限的亚稳态。

上面说的两个问题具有一个共同的根源，这就是在三维空间中的三个原子可能彼此靠近。而在混合维度体系中，我们有可能避免这一点，从而解决这两个问题。具体的说，如果两个原子 A_1 和 A_2 分别处在两个在空间上分开的低维势

场中，而原子B在三维空间中运动，那么这三个原子永远不会同时靠近到同一个区域。这样一来，这三个原子形成的Efimov束缚态，将完全由两体间散射长度决定，并且拥有无穷长的寿命。

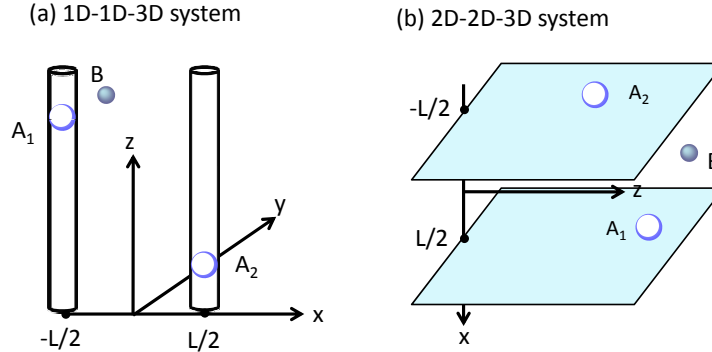


图 1.6: (a)1D-1D-3D的混合维度体系;(b)2D-2D-3D的混合维度体系。

在文献 [36]中，Nishida首先在一个特定的2D-3D系统中研究了这类稳定的束缚态的性质。他们考虑了两种不同的原子被约束在不同的维度中，在某些质量比范围内找到了三体束缚态。但是由于在低维度下的原子并不是在空间中分离的，这种构型同样会经历同样的三体复合效应，所以三体束缚态也是不稳定的。接下来，Nishida考虑了两个原子分别被束缚在两个分离的1维管子或者2维平面中，同在空中自由运动的第三个原子相互作用。由于低维空间中的两个原子在空间上分离，这种1D-1D-3D或者2D-2D-3D混合系统能够存在稳定的三体束缚态。

在本文中，我们将对这类束缚态以及系统中的有效相互作用势的特性进行更为广泛和深入的研究。我们将探讨1D-1D-3D体系和2D-2D-3D体系中稳定Efimov态的存在性，以及其束缚能对于散射长度和原子质量比的依赖关系。并且在此基础上的同类系统中研究四体系统1D-1D-1D-3D或更多原子的多体束缚态的性质。我们的工作中假设三维空间中自由运动的原子拥有较小的质量，而被约束在低维中的原子质量较大，这样一来，根据Born-Oppenheimer近似 [58]，我们可以半解析的对体系的运动方程进行求解，从而获得具有清晰物理图像的结果。

本文采用了基于Born-Oppenheimer近似的方法来研究不同的混合维度约束中稳定三体或四体束缚态的存在性和性质。在三体情况下，我们考虑了两个较重的原子被束缚在1维管子中（1D-1D-3D系统）或者2维平面中（2D-2D-3D系

统)，加上一个在三维空间中自由运动的较轻的原子。这个较轻的原子会和低维约束中的两个较重原子发生相互作用，从而在两个重原子之间诱导出一个有效相互作用。由于这个有效相互作用，两个较重的原子会彼此束缚而在一个较大的参数空间中形成一个三体束缚态。甚至在 s 波散射长度为负的情况下，这时候系统中没有两体束缚态，但是却存在三体束缚态。

在混合维度下的三体束缚态由于空间结构的约束还存在一些其他性质。当重原子和轻原子之间的两体散射长度和两个低维约束之间的距离接近时，两个重原子之间诱导的有效相互作用势变得最强。相应地，三体束缚态的基态束缚能达到最大值。在我们的研究中，Born-Oppenheimer近似可以给出一个非常清晰的物理图像，在这里三体束缚态的性质可以很好的被描述和研究。另外，我们将Born-Oppenheimer近似下的结果和通过对Schrödinger方程的精确求解所得的结果进行了对比，发现在很大的参数范围内，Born-Oppenheimer近似仍然能够给出相当可信的结果。

为了演示Born-Oppenheimer近似在一般少体问题中的优势，我们研究了四体的1D-1D-1D-3D系统，其中三个较重的原子分别被束缚在三个相互平行的一维管子中，较轻的第四个原子可以在空间中自由运动。在很大的散射长度范围，我们发现系统中都存在四体束缚态。并且当三个一维管约束在空间形成一个等边三角形，而散射长度和这个三角形的边长接近时，四体束缚态的基态束缚能达到最大。

最后，这类混合维度体系不仅可以研究少体问题所涉及的领域，而且可以模拟某些多体物理中关注的物理模型，例如可以提供一种原子之间新的配对方式，三维空间中运动的轻原子可以在被低维约束住的重原子之间诱导出一个长程有效相互作用势。可以预见，随着实验技术和理论研究的不断发展和成熟，超冷原子物理中的混合维度体系将会成为一个具有重要研究价值的领域。

第2章 超冷原子气体中的两体问题

2.1 两体相互作用的散射长度

在低能原子系统的相互作用中，最重要的参数是两体 s 波散射长度，通常也被简称为散射长度。它可以由散射振幅来定义。考虑两个有短程相互作用的原子，它们的质量分别为 m_1, m_2 ，约化质量为 $m_* = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ 。在质心坐标系中，这样两个原子之间的弹性散射可以由一个依赖于两原子之间距离 r 的定态波函数 $\psi(\vec{r})$ 来描述。假设相对运动的波矢为 \vec{k} ，系统总能量为 $E = \hbar^2 k^2 / 2m_*$ 。考虑单通道的球对称情况，这个定态波函数 $\psi(\vec{r})$ 在 $r \rightarrow \infty$ 的区域可以表示为入射的平面波和出射的球面波之和

$$\psi(\vec{r}) = e^{ikz} + f_k(\theta) \frac{e^{ikr}}{r}. \quad (2.1)$$

其中 $f_k(\theta)$ 为系统的散射振幅，它与散射角 θ 以及波矢 k 有关。系统微分散射截面可以被表示为

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f_k(\theta)|^2. \quad (2.2)$$

根据S矩阵的么正行，对于球对称的势，我们将散射振幅 $f_k(\theta)$ 表示为

$$f_k(\theta) = \frac{1}{k} \sum_{L=0}^{\infty} (2L+1) (e^{i\delta_L(k)} \sin \delta_L(k)) P_L(\cos \theta). \quad (2.3)$$

其中 $\delta_L(k)$ 表示系统第 L 分波的“相移”。

同样将入射波函数 e^{ikz} 展开为Legendre级数的形式

$$e^{ikz} = e^{ikr \cos \theta} = \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) i^\ell j_\ell(kr) P_\ell(\cos \theta). \quad (2.4)$$

其中 $j_\ell(kr)$ 为球Bessel函数，它的渐进行为为

$$j_\ell(kr) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{1}{kr} \sin(kr - \frac{1}{2}\ell\pi). \quad (2.5)$$

将上式同方程 (2.3) 代入方程 (2.1)，可得 $\psi(\vec{r})$ 的边界条件

$$\psi(\vec{r}) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{1}{kr} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) \left[i^\ell \sin(kr - \frac{1}{2}\ell\pi) + (e^{i\delta_L(k)} \sin \delta_L(k)) e^{ikr} \right] P_\ell(\cos \theta).$$

即

$$\psi(\vec{r}) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{1}{kr} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) i^{\ell} e^{2i\delta_{\ell}} \sin(kr - \frac{1}{2}\ell\pi + \delta_{\ell}) P_{\ell}(\cos\theta). \quad (2.6)$$

比较入射波和散射波所满足的边界条件(2.4),(2.6), 可以发现两者主要差别了一个 δ_{ℓ} , 相互作用势 $V(r)$ 对入射波函数的作用全部体现在相移 δ_{ℓ} 上。如果只关心系统在 $r \rightarrow \infty$ 时的性质, 那么只需要知道在每个分波上的相移 δ_{ℓ} , 就可以完全确定系统的散射性质。

接下来, 我们可以将散射振幅表示为

$$f_k(\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{2\ell+1}{k \cot \delta_{\ell}(k) - ik} P_{\ell}(\cos\theta). \quad (2.7)$$

通过将微分散射截面在全角度积分, 由方程 (2.2,2.3), 可以得到总的散射截面为

$$\sigma(E) = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) \sin^2 \delta_{\ell}(k). \quad (2.8)$$

将上式与方程 (2.7)对比, 可以得到

$$\sigma(E) = \frac{4\pi}{k} \text{Im} f_k(\theta=0). \quad (2.9)$$

如果原子之间通过一个短程的两体势发生相互作用, 在能量很低的区域 $k \rightarrow 0$, 系统中的相移 $\delta_{\ell}(k)$ 随着 $k^{2\ell+1}$ 趋向于零。所以系统中的s波($\ell=0$)散射在低能情况下占主导地位。但是如果两个原子为全同费米子, 由于泡利不相容远离, 系统的低能情况由P波($\ell=1$)散射所支配。在能量非常低的情况下, 我们可以将s波相移 $\delta_0(k)$ 展开为 k^2 的级数。这种方法称为有效距离展开, 通常采取如下的形式

$$k \cot \delta_0(k) = -\frac{1}{a} + \frac{1}{2} r_s k^2 + \dots. \quad (2.10)$$

其中 a 称作两体s波散射长度, 简称为散射长度。 r_s 被称作s波有效距离。

如果两体势是一个长程相互作用势, 随着 $1/r^n (n > 1)$ 趋向于零, 在低能情况下更高分波的散射效应并不如短程势中那么快的衰减。当 $\ell > (n-3)/2$, 相移 $\delta_{\ell}(k)$ 随着 k^{n-2} 趋向于零。这样在散射振幅的低能展开中, 这些分波的贡献都是 k^{n-3} 量级或者更大。例如在两个中性原子的基态情况下, 之间的相互作用

为van der Waals相互作用，随着 $1/r^6$ 趋向于零。对于 $\ell = 0, 1$ 分波的相移分别随着 k, k^3 趋向于零，这一点和短程势的结论是同样的。但是所有 $\ell \geq 2$ 分波的相移都随着 k^4 趋向于零。所以对于所有分波下的低能散射振幅都有不小于 k^3 量级的贡献 [59]。

假设两体相互作用势有一个特征长度 r_0 。在低能情况下，系统能量 $E = \hbar^2 k^2 / 2m_*$ 远远小于能量截断 $\hbar^2 / 2m_* r_0^2$ ，即波矢 $k \ll 1/r_0$ ，系统的性质只由s波散射相移所决定。在我们所关心的低能长波极限区域 $r_0 \ll r \ll 1/k$ ，如果系统的特征长度 $r_0 \rightarrow 0$ ，称为尺度极限，此时可以将s波散射长度表示为

$$k \cot \delta_0(k) = -1/a, \quad (2.11)$$

同时系统其它分波 ($\ell \neq 0$) 的相移 $k \cot \delta_\ell(k)$ 都可以被忽略。在这个极限下，系统的性质只依赖于散射长度 a 的大小，而与两体相互作用的具体形式没有关系。所以说，如果两个形式上不同的相互作用势能够给出相同的散射长度 a ，我们认为这两个相互作用势是相同的。

将散射长度所满足的方程(2.11)代入到散射振幅 $f_k(\theta)$ 所满足的方程(2.7)中，得到系统s波散射振幅为

$$f_k(\theta) = \frac{1}{-1/a - ik}. \quad (2.12)$$

根据方程(2.6)，系统的s波散射波函数可以表示为

$$\psi(\vec{r}) \propto \frac{1}{kr} \sin[kr + \delta_0(k)]. \quad (2.13)$$

在我们所关心的空间区域 $r_0 \ll r \ll 1/k$ 中， $\psi(\vec{r})$ 满足如下边界条件

$$\lim_{r \rightarrow 0} \psi(\vec{r}) \propto 1 - \frac{a}{r} + \mathcal{O}(1). \quad (2.14)$$

这个边界条件被称为Bethe-Peierls边界条件。

如果两体势有一个足够大的吸引相互作用，两个原子可能会形成束缚态。当这个两体束缚态的束缚能 E_D 远远小于系统的截断能量 $\hbar^2 / 2m_* r_0^2$ 时，这个束缚态被称为浅束缚态。对于散射长度 $a < 0$ 的情况，系统中不会出现浅束缚态，对于 $a > 0$ 的情况，系统中会存在一个浅两体束缚态。这个浅束缚态的能量为

$$E_D = \hbar^2 / 2m_* a^2 \quad (2.15)$$

在 $r_0 \ll r$ 的情况下，这个两体束缚态的波函数为

$$\psi_D(\vec{r}) = \frac{1}{r} e^{-r/a}. \quad (2.16)$$

上式在 $r \rightarrow 0$ 的极限下, 也同样满足Bethe-peierls边界条件(2.14)。

短程相互作用下的系统在低能长波极限 $r_0 \ll r \ll 1/k$ 下, 其散射性质只由 s 波散射长度所决定, 而不依赖于相互作用势在 $r \rightarrow 0$ 附近的具体形式。因此我们可以用一个短程相互作用赝势 $V_{\text{pseudo}}(r)$ 来等效代替真实的相互作用 [60]。如果只考虑系统的 s 波散射, 散射波函数的渐进行为满足方程(2.13), 所满足的Schrödinger方程为

$$\left(-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V_{\text{pseudo}}(r) \right) \psi(\vec{r}) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_*} \psi(\vec{r}). \quad (2.17)$$

其中 $m_* = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ 为约化质量, 赝势 $V_{\text{pseudo}}(r)$ 是一个短程相互作用势, 只在 $r \rightarrow 0$ 区域有作用。

将波函数方程(2.13)代入上式, 利用

$$-\nabla^2 \frac{\sin(kr + \delta_0)}{kr} = -\frac{\sin(kr + \delta_0)}{k} \nabla^2 \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \nabla^2 \frac{\sin(kr + \delta_0)}{k} - 2\nabla \frac{1}{r} \nabla \frac{\sin(kr + \delta_0)}{k}.$$

$$-\nabla^2 \frac{1}{r} = 4\pi \delta(\vec{r}).$$

得到

$$\left(-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m_*} \right) \psi(\vec{r}) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_*} \psi(\vec{r}); r > 0; \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} V_{\text{pseudo}}(r) \psi(\vec{r}) &= \frac{4\pi \hbar^2}{2m_*} \delta(\vec{r}) \frac{\sin(kr + \delta_0)}{k}; r \rightarrow 0 \\ &= \frac{4\pi \hbar^2}{2m_*} \frac{-1}{k \cot(\delta_0)} \delta(\vec{r}) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\sin(kr + \delta_0)}{k} \right). \end{aligned} \quad (2.19)$$

利用散射长度 a 的定义(2.11), 得到

$$\begin{aligned} V_{\text{pseudo}}(r) \psi(\vec{r}) &= \frac{4\pi a \hbar^2}{2m_*} \delta(\vec{r}) \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\sin(kr + \delta_0)}{kr} \right) \\ &= \frac{4\pi a \hbar^2}{2m_*} \delta(\vec{r}) \frac{\partial}{\partial r} r \cdot \psi(\vec{r}). \end{aligned} \quad (2.20)$$

这个赝势 $V_{\text{pseudo}}(r)$ 在冷原子系统通常所关心的 $r_0 \ll r \ll 1/k$ 区域内, 和Bethe-Peierls边界条件(2.14)所确定的系统性质是完全等价的。

2.2 两体散射作用的Bethe-Peierls边界条件

在本文的计算中，我们选用和赝势 $V_{\text{pseudo}}(r)$ 所等价的Bethe-Peierls边界条件

$$\lim_{r \rightarrow 0} \Psi(r) \propto 1 - \frac{a}{r} + \mathcal{O}(1). \quad (2.21)$$

来取代相互作用。这样我们的Hamiltonian中只包含动能，不包含任何相互作用势能，同时要求波函数 $\Psi(r)$ 满足这个边界条件。

计算证明，Bethe-Peierls边界条件可以在能量远低于 $\hbar^2/2m_*r_0^2$ 的时候给出正确的散射波函数（在 $r \gg r_0$ 的区域）。此外，这个边界条件还可以给出束缚能的绝对值远低于 $\hbar^2/2m_*r_0^2$ 的两体束缚态。具体来说：

(i) 如果散射长度 $a < 0$ ，那么根据Bethe-Peierls边界条件不会解出任何束缚态。而实际情况中，在 $a < 0$ 情况下也不存在束缚能远低于 $\hbar^2/2m_*r_0^2$ 的两体束缚态。实际的束缚态能量都在 $\hbar^2/2m_*r_0^2$ 量级或者更大。

(ii) 如果散射长度 $a > 0$ 且 $a \gg r_0$ ，此时Bethe-Peierls边界条件会解出一个束缚态，束缚态能量是 $\hbar^2/2m_*a^2$ ，满足 $\hbar^2/2m_*a^2 \ll \hbar^2/2m_*r_0^2$ 。也就是说这个束缚态满足方程组

$$-\frac{\hbar^2}{2m_*} \nabla^2 \Psi(\vec{r}) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m_*a^2} \right) \Psi(\vec{r}); \quad (2.22)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \Psi(r) \rightarrow 1 - \frac{a}{r}. \quad (2.23)$$

显然，有

$$\Psi(r) \propto \frac{e^{-r/a}}{r}. \quad (2.24)$$

在实际的体系中，确实存在这样一个束缚能为 $\hbar^2/2m_*a^2$ 的两体束缚态。这个束缚态的能量只和散射长度有关，而波函数主要集中在 $r \gg r_0$ ，也就是 $V(r) \sim 0$ 的地方，在这些地方，这个束缚态波函数就是公式(2.24)中的 $\Psi(\vec{r})$ 。这个束缚态的波函数和束缚能都只由散射长度 a 这一个参数决定，与 $V(r)$ 的其他细节无关。也就是说，如果有很多个形状完全不同的相互作用势，只要它们的散射长度 a 的取值相同，并且都远大于相互作用范围 r_0 ，那么这些势就会给出具有同样能量，并且波函数几乎相同的束缚态。所以我们说，这类束缚态是“普适的”(Universal)，并因此被大家感兴趣。

(iii) 如果 $a > 0$ 同时 $a \leq r_0$, 这时候Bethe-Peierls边界条件仍然会给出一个束缚能为 $\hbar^2/2m_*a^2$ 的束缚态。但是这个时候, 实际体系中并不存在这样一个束缚态。这个矛盾并不影响Bethe-Peierls边界条件的正确性。因为我们只需要Bethe-Peierls边界条件, 或者其他任何一种对稀薄超冷原子体系适用的有效相互作用势, 在我们所关心的能量区域 ($E \ll \hbar^2/2m_*r_0^2$) 中能够给出正确的结果。而在 $0 < a \leq r_0$ 的时候得到的这个“束缚态”, 其束缚能已经在 $\hbar^2/2m_*r_0^2$ 数量级或者更大, 这并不是我们所感兴趣的区域, 而在这么大的能量上有效势和真实情况有差别也是完全正常的。

最后需要强调的有两点:

第一, 包括Bethe-Peierls边界条件在内的所有的有效相互作用势 $V_{\text{eff}}(r)$, 都不是用来研究两体问题的。事实上, 只有对基于真实相互作用 $V(r)$ 的两体问题进行了精确计算之后, 才能得到正确的散射长度 a 的值, 而后才能写出正确的有效相互作用。而有效相互作用 $V_{\text{eff}}(r)$ 的提出, 是用来求解“多于两体”的问题的。这里面既包括了三体问题、四体问题等这样的少体问题, 也包括了热力学极限下的粒子数为无穷大的多体问题。在求解这些问题的时候, 我们在写系统总Hamiltonian的时候, 可以用 $V_{\text{eff}}(r)$ 来代替真实的两体相互作用势 $V(r)$, 从而简化计算。比如我们使用Bethe-Peierls边界条件作为有效相互作用, 那么我们的体系的Hamiltonian就只包括了每个粒子动能之和。而我们要求当任意两个有相互作用的粒子之间的距离 r 趋于零的时候, 体系的波函数满足边界条件 (2.21)。

第二, 有效相互作用势 $V_{\text{eff}}(r)$ 只能描述两体相互作用的物理效果。如果我们的体系中包含两个以上的原子, 那么这个体系中除了两体碰撞之外, 还可能有三体碰撞, 也就是三个原子跑到同一个小区域, 然后再彼此分开, 甚至还会有四体碰撞等等。在这些碰撞中, 会出现很多物理现象, 比如三个原子跑到一起, 然后其中的两个会形成一个紧束缚的分子, 同时第三个原子的动能被提高一大块。这类过程是不能通过有效相互作用势 $V_{\text{eff}}(r)$ 描述的。不过在稀薄超冷原子气体中, 原子间的平均距离远远大于相互作用势的特征长度 r_0 , 通常这类多体碰撞过程发生的概率比较小。而在我们将要研究的体系中, 由于其中两个原子 A_1, A_2 被分别束缚在两个相互独立的低维空间里, 所以永远不会产生三个粒子同时靠近在一起的情况, 避免了三体碰撞可能产生的影响。

第3章 混合维度系统中的超冷原子气体

3.1 Born–Oppenheimer近似

当在一个体系中存在一部分质量 M 很大的粒子（比如原子核），同时存在一部分质量 m 很小的粒子（比如电子），那么当两种粒子质量相差很大 $M \gg m$ ，并且大质量粒子运动十分缓慢的时候，我们可以认为质量轻的粒子总是被质量重的粒子带着走。即当质量大的粒子运动到任何一个位置，都认为质量小的粒子处在与该位置对应的本征态，当质量重的粒子位置发生变化时，质量小的粒子的状态也相应地发生变化 [62–64]。也就是说，小质量粒子的运动，不会诱发大质量粒子从基态到激发态的跃迁。当然这个近似只有在两种粒子质量相差很大，并且质量大的粒子运动比较缓慢的时候才成立。

作为严格的分析，我们把大质量粒子的坐标称为 \vec{R} ，小质量粒子的坐标称为 \vec{r} 。假设我们有Hamiltonian

$$H = -\frac{\hbar^2}{2M}\nabla_R^2 - \frac{\hbar^2}{2m}\nabla_r^2 + V_I(\vec{R}, \vec{r}). \quad (3.1)$$

其中 $V_I(\vec{R}, \vec{r})$ 描述了大质量和小质量粒子的相互作用，这个Hamiltonian所支配的含时间Schrödinger方程

$$i\hbar \frac{d}{dt} \Psi(\vec{R}, \vec{r}, t) = H \Psi(\vec{R}, \vec{r}, t). \quad (3.2)$$

很难求解。我们可以用下面的方法来处理：

（1）：我们先固定 \vec{R} ，然后对角化相应的小质量粒子的Hamiltonian，解出每个确定的 \vec{R} 所对应的小质量粒子的本征能量和本征波函数

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla_r^2 + V_I(\vec{R}, \vec{r}) \right] \psi_n(\vec{R}, \vec{r}) = E_n(\vec{R}) \psi_n(\vec{R}, \vec{r}) \quad (3.3)$$

（2）：由于小质量粒子的Hamiltonian是个Hermit算符，故而对于任何确定的 \vec{R} 而言，相应的本征波函数 $\{\psi_n(\vec{R}, \vec{r})\}$ 必然是小质量粒子量子态空间上一组正交归一完备的基矢。所以我们所有粒子总的波函数 $\Psi(\vec{R}, \vec{r}, t)$ 必然可以分解为

$$\Psi(\vec{R}, \vec{r}, t) = \sum_n \phi_n(\vec{R}, t) \psi_n(\vec{R}, \vec{r}). \quad (3.4)$$

(3)：我们把上式代入Schrödinger方程中，可以得到 $\phi_n(\vec{R}, t)$ 所满足的一组偏微分方程

$$i\hbar \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \phi_1(\vec{R}, t) \\ \phi_2(\vec{R}, t) \\ \dots \end{pmatrix} = \left\{ \frac{\hbar^2}{2M} \left[-i\vec{\nabla}_R + \vec{A}(\vec{R}) \right]^2 + E_n(\vec{R}) \right\} \begin{pmatrix} \phi_1(\vec{R}, t) \\ \phi_2(\vec{R}, t) \\ \dots \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

其中 $\vec{A}(\vec{R})$ 是一个矩阵

$$\vec{A}_{mn}(\vec{R}) = -i \int \psi_m^*(\vec{R}, \vec{r}) \nabla_R \psi_n(\vec{R}, \vec{r}) d\vec{r}. \quad (3.6)$$

在这组方程中，不同的 n 所对应的 $\phi_n(\vec{R}, t)$ 之间通过 $\vec{A}_{mn}(\vec{R})$ 的非对角元的相互耦合，这就使得这组方程很难精确求解。至此所有的过程都是严格的。

Born-Oppenheimer近似指的是，当大质量的粒子运动的很缓慢时，小质量粒子的运动不会诱导大质量粒子在不同能级上的跃迁。这个物理上的考虑，在数学上可以表达为，在低能情况下，我们可以忽略不同的 $\phi_n(\vec{R}, t)$ 之间的耦合，也就是忽略 $\vec{A}_{mn}(\vec{R})$ 的非对角元，从而把 $\phi_n(\vec{R}, t)$ 所满足的严格的偏微分方程组，近似组成一组各自独立的偏微分方程

$$i\hbar \frac{d}{dt} \phi_n(\vec{R}, t) = \left\{ \frac{\hbar^2}{2M} \left[-i\vec{\nabla}_R + \vec{A}_{nn}(\vec{R}) \right]^2 + E_n(\vec{R}) \right\} \phi_n(\vec{R}, t). \quad (3.7)$$

其中 $\vec{A}_{nn}(\vec{R})$ 是绝热诱导规范场。在 $\psi_n(\vec{R}, \vec{r})$ 是实数的时候，我们有 $\vec{A}_{nn}(\vec{R}) = 0$ 。

最后，我们可以从上面看到，Born-Oppenheimer近似的一个重要结论就是，小质量粒子的本征能量 $E_n(\vec{R})$ ，实际上充当了大质量粒子所感受到的“势能”。在物理上， $E_n(\vec{R})$ 描述了小质量粒子对大质量粒子的反作用。

3.2 混合维度下的两体散射长度

在这一节中我们讨论混合维度系统中的两体相互作用，并且在Born-Oppenheimer近似下，将两体之间的短程相互势用Bethe-Peierls边界条件等效代替。首先我们考虑1D-3D系统的两体散射问题，其中有一个较重的原子A被束缚在沿 z 方向的一维管中，同时第二个轻原子B在三维空间中自由运动。通过分析两体波函数在远处的行为，我们可以得到Bethe-Peierls边界条件的表达形式。作为第一性的讨论，我们首先完全考虑了原子A和B在三维空间中的运动，然后将所得的结果简化到混合维度系统中，即只考虑原子A在 z 方

向的一维自由度。在这里，我们用一个在 $x - y$ 平面内很强的谐振子势将 A 原子在 $x - y$ 平面上的运动约束，而可以在 z 方向自由运动。在混合维度的实验中，是通过在系统的 $x - y$ 平面分别施加一组特点频率的对射激光，使 A 原子感受到一个 $x - y$ 方向的光晶格，而使 B 原子几乎感受不到这束激光的作用。假定 A, B 原子的质量为 $m_{A,B}$ ，且 $m_A \gg m_B$ ，采用自然单位制 $\hbar = m_B = 1$ 。两个原子在三维空间中运动的总Hamiltonian为

$$H_{AB} = T_{Az} + T_{A\perp} + V_{A\perp} + T_B + V_{AB}(r_{AB}). \quad (3.8)$$

其中 $\vec{r}_{A,B} = (x_{A,B}, y_{A,B}, z_{A,B})$ 为原子 A, B 在三维空间中的坐标。 T_{Az} 为 A 原子在 z 方向的动能项

$$T_{Az} = -\frac{1}{2m_A} \frac{\partial^2}{\partial z_A^2}, \quad (3.9)$$

同样，原子 A 在垂直于 z 方向的横向动能以及 B 原子在三维空间中的动能为

$$T_{A\perp} = -\frac{1}{2m_A} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_A^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_A^2} \right); \quad (3.10)$$

$$T_B = -\frac{1}{2} \nabla_B^2. \quad (3.11)$$

在总Hamiltonian (3.8) 中我们定义对 A 原子在 $x - y$ 方向的约束为频率 ω_\perp 的二维各向同性的谐振子势

$$V_{A\perp} = \frac{m_A \omega_\perp^2}{2} (x_A^2 + y_A^2), \quad (3.12)$$

同时，在三维空间中两体相互作用势 $V_{AB}(r_{AB})$ 是两原子之间距离 $r_{AB} = |\vec{r}_A - \vec{r}_B|$ 的函数。由于 $V_{AB}(r_{AB})$ 是一个短程势，我们定义两体相互作用势的特征长度 r_* 。当两原子之间的距离满足 $r_{AB} \gg r_*$ 时 $V_{AB}(r_{AB}) \approx 0$ 。

当对 A 原子施加的横向约束非常强时，我们可以认为 A 原子在 $x - y$ 方向的运动远远快于 z 方向的运动。根据上一节Born-Oppenheimer近似的思想，我们可以将 A 原子在 z 方向的坐标(z_A)作为系统中的慢变量，而 A 原子在 $x - y$ 方向的坐标(x_A, y_A)和 B 原子在空间中的坐标 \vec{r}_B 作为系统的快变量。这样，对于每一个确定的(z_A)，我们都认为 (\vec{r}_B, x_A, y_A) 的运动都处在瞬时的本征态，并且随着(z_A)的变化而绝热的变化。可以将系统的总波函数表示为

$$\Psi(\vec{r}_A, \vec{r}_B) = \phi(z_A) \psi(\vec{r}_B, x_A, y_A; z_A), \quad (3.13)$$

其中 $\psi(\vec{r}_B, x_A, y_A; z_A)$ 为固定住慢变量 z_A 在某个值，快变量 (\vec{r}_B, x_A, y_A) 的波函数。 $\psi(\vec{r}_B, x_A, y_A; z_A)$ 的Hamiltonian以及所满足的本征方程分别为

$$H_F(z_A) = T_{A\perp} + V_{A\perp} + T_B + V_{AB}(r_{AB}); \quad (3.14)$$

$$H_F(z_A) \psi(\vec{r}_B, x_A, y_A; z_A) = E(z_A) \psi(\vec{r}_B, x_A, y_A; z_A). \quad (3.15)$$

为了求解方程 (3.15)，我们用A原子的横向Hamiltonian ($T_{A\perp} + V_{A\perp}$) 的本征函数来展开 ψ

$$\psi(\vec{r}_B, x_A, y_A; z_A) = \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n(x_A, y_A) \psi_n(\vec{r}_B; z_A). \quad (3.16)$$

其中 $\phi_n(x_A, y_A)$ 是 $T_{A\perp} + V_{A\perp}$ 的第 n 个本征态。

为了简化，我们取 $z_A = 0$ 的情况。这样轻原子B相应的波函数 $\psi_n(\vec{r}_B; 0)$ 所满足的本征方程为

$$[T_B + (n+1)\omega_{\perp}] \psi_n + \left[\sum_m V_{nm}(\vec{r}_B) \psi_m \right] = E(0) \psi_n. \quad (3.17)$$

其中相互作用势的矩阵元为

$$V_{nm}(\vec{r}_B) = \int dx_A dy_A \phi_n^*(x_A, y_A) V_{AB}(r_{AB}) \phi_m(x_A, y_A). \quad (3.18)$$

通过求解B原子的多通道散射方程(3.17)，我们可以将本征方程(3.15)求解，其中原子A的横向束缚态 $\phi_n(x_A, y_A)$ 作为系统中的散射通道。在低能情况($\omega_{\perp} < E < 2\omega_{\perp}$)下，横向态为 $\phi_0(x_A, y_A)$ 的基态通道成为系统中唯一的开通道(open channel)。

接下来我们考虑波函数在长距离极限($|\vec{r}_B| \gg (r_*, l_{\perp})$)的渐进行为，其中 $l_{\perp} = \sqrt{1/(m_A \omega_{\perp})}$ 为系统横向约束的特征长度。在这个区域，两个原子之间距离 r_{AB} 远远大于相互作用势的特征长度 r_* ，所以我们可以在这个距离忽略方程(3.14)中的相互作用 V_{AB} 。根据散射理论，在远距离时闭通道(closed channels)中 $n > 0$ 的波函数 $\psi_n(\vec{r}_B; 0)$ 随着 $|\vec{r}_B|$ 指数衰减，从而可以被忽略。在开通道中的波函数 $\psi_0(\vec{r}_B; 0)$ 的形式为

$$\begin{aligned} \psi_0(\vec{r}_B; 0) \sim & \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l C_{l,m} \frac{Y_{lm}(\theta_B, \phi_B)}{k |\vec{r}_B|} \\ & \times \left(\hat{j}_l(k |\vec{r}_B|) + k f_{l,m}(k) \hat{h}_l^{(+)}(k |\vec{r}_B|) \right), \end{aligned} \quad (3.19)$$

其中 $k = \sqrt{2(E - \omega_\perp)}$, $Y_{lm}(\theta, \phi)$ 是 \vec{r}_B 的方位角 (θ_B, ϕ_B) 的球谐函数。 $\hat{j}_l(z)$ 为 Riccati-Bessel 函数, $\hat{h}_l^{(+)}(z)$ 为 Riccati-Hankel 函数。 $\psi_0(\vec{r}_B; 0)$ 中的系数 $C_{l,m}$ 由边界条件给出。散射振幅 $f_{l,m}(k)$ 由方程(3.18)中定义的有效相互作用势确定。

在 k 比较小的低能区域, 我们可以忽略所有 $l > 0$ 的高分波的散射振幅 $f_{l,m}(k)$, 并且将 $l = 0$ 的 s 波散射振幅 $f_{0,0}(k)$ 近似为 $f_{0,0}(k = 0)$ 。这样波函数 ψ 在远程的行为为

$$\begin{aligned} \psi(\vec{r}_B, x_A, y_A; 0) &\simeq \phi_0(x_A, y_A) \psi_0(\vec{r}_B; 0) \\ &\sim \phi_0(x_A, y_A) \left[\frac{1}{k|\vec{r}_B|} (\sin(k|\vec{r}_B|) - ka_{AB}e^{ik|\vec{r}_B|}) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l C_{l,m} \frac{Y_{lm}(\theta_B, \phi_B)}{k|\vec{r}_B|} \hat{j}_l(k|\vec{r}_B|) \right] \end{aligned} \quad (3.20)$$

其中散射长度 a_{AB} 的定义为

$$a_{AB} = -f_{0,0}(k = 0). \quad (3.21)$$

在 $|\vec{r}_B|$ 范围为

$$[r_*, l_\perp] \ll |\vec{r}_B| \ll 1/k \quad (3.22)$$

的区域, 根据方程(3.20), 波函数 ψ 的形式为

$$\psi(\vec{r}_B, x_A, y_A; 0) \sim \phi_0(x_A, y_A) \left(1 - \frac{a_{AB}}{|\vec{r}_B|} \right). \quad (3.23)$$

这样, 我们可以将方程(3.8)中的真实的相互作用 $V_{AB}(r_{AB})$ 用如下的 Bethe-Peierls 边界条件来等效代替

$$\lim_{|\vec{r}_B| \rightarrow 0} \psi(\vec{r}_B, x_A, y_A; 0) \propto \phi_0(x_A, y_A) \left(1 - \frac{a_{AB}}{|\vec{r}_B|} \right). \quad (3.24)$$

在这个边界条件下, 对于方程

$$[T_{A\perp} + V_{A\perp} + T_B] \psi(\vec{r}_B, x_A, y_A; 0) = E \psi(\vec{r}_B, x_A, y_A; 0) \quad (3.25)$$

的解对于所有的 $|\vec{r}_B| \neq 0$ 都取方程(3.20)中的形式, 并且这个可以作为方程(3.15)一个合理的近似解。

在简化的混合维度模型下，重原子 A 的横向坐标 (x_A, y_A) 取确定值为 $(0, 0)$ ，加上 $z_A = 0$ 的假定，我们得到

$$|\vec{r}_B| = r_{AB}, \quad (3.26)$$

边界条件(3.24)可以被表示为

$$\lim_{r_{AB} \rightarrow 0} \psi(\vec{r}_B; 0) \propto \left(1 - \frac{a_{AB}}{r_{AB}}\right). \quad (3.27)$$

这里， $\psi(\vec{r}_B; 0)$ 是当重原子 A 被固定在 $z_A = 0$ 时，轻原子 B 的波函数。对于非零的 z_A ，方程(3.27)可以被推广为

$$\lim_{r_{AB} \rightarrow 0} \psi(\vec{r}_B; z_A) \propto \left(1 - \frac{a_{AB}}{r_{AB}}\right). \quad (3.28)$$

这就是在Born–Oppenheimer近似的框架下，混合维度中的Bethe–Peierls边界条件。在接下来的讨论中，我们都采用这个Bethe–Peierls边界条件和散射长度 a_{AB} 来处理1D-3D系统中的两体相互作用。

上述1D-3D系统中的Bethe–Peierls边界条件和散射长度 a_{AB} 的定义都可以很直接的推广到2D-3D系统中，使用一个 x 方向的很强的谐振子势将重原子 A 约束在 $y - z$ 平面内，而轻原子 B 在三维空间中运动。这样2D-3D系统中的Bethe–Peierls边界条件为

$$\lim_{r_{AB} \rightarrow 0} \psi(\vec{r}_B; y_A, z_A) \propto \left(1 - \frac{a_{AB}}{r_{AB}}\right). \quad (3.29)$$

其中散射长度定义为

$$a_{AB} = -f_{0,0}(k=0). \quad (3.30)$$

而散射振幅 $f_{0,0}(k=0)$ 是在方程(3.19)中定义的，它由相互作用势的矩阵元 $V_{nm}(\vec{r}_B)$

$$V_{nm}(\vec{r}_B) = \int dx_A \phi_n^*(x_A) V_{AB}(r_{AB}) \phi_m(x_A). \quad (3.31)$$

所确定，其中 $\phi_n(x_A)$ 为沿 x 方向对重原子 A 施加的谐振子势 $V_{Ax} = m_A \omega_x^2 x_A^2 / 2$ 的本征波函数。

3.3 Born–Oppenheimer近似在混合维度的应用

我们研究的体系是混合维度下的超冷原子系统，以三个原子的体系为例，令两个较重的原子 A_1 和 A_2 分别被束缚在两个相互独立的低维管或平面上，而较轻的第三个原子 B 可以在三维空间中运动（图(1.6)）。三个粒子的质量分别为 m_1, m_2, m_B ，空间位置为 $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_B$ ，三个粒子的相对位置如图(3.1)中所示。

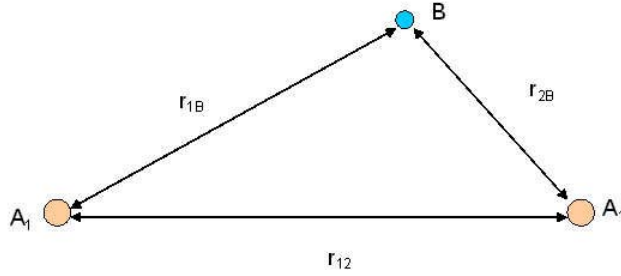


图 3.1: A_1, A_2, B 之间的相对位置。

在这个体系中，令 $m_1 = m_2$ 且 $m_1 \gg m_B$ 。则系统的Hamiltonian为

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m_1}\nabla_1^2 - \frac{\hbar^2}{2m_2}\nabla_2^2 - \frac{\hbar^2}{2m_B}\nabla_B^2 + V(r_{1B}) + V(r_{2B}) \quad (3.32)$$

其中 $V(r)$ 代表了A原子和B原子之间的相互作用。这个Hamiltonian量所满足的定态方程为

$$H\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_B) = E\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_B) \quad (3.33)$$

对于两个中性原子之间的短程相互作用势 $V(r)$ ，通常存在一个特征距离 r_0 ，当 $r \gg r_0$ ，也就是两个原子相距很远的地方，相互作用势趋近于零，即 $V(r \gg r_0) \rightarrow 0$ 。通常情况下，相互作用势 $V(r)$ 都是关于 r 的一个较为复杂的函数，所以如果直接求解方程(3.33)是非常困难的。

在这个体系中，两个大质量的原子 A_1, A_2 分别被束缚在两个独立的低维空间中，它们只分别与较轻的B原子相互作用，我们可以利用Born-Oppenheimer近似将波函数分离为两部分（公式 3.4），这样B原子在相互作用势 $V(r_{1B})$ 和 $V(r_{2B})$ 的作用下，感受到散射长度为 a_1 和 a_2 的相互作用。我们可以利用Bethe-Peierls边界条件（2.21）来等效地替代这个相互作用，在 a_1 和 a_2 满足某些条件时，就有可能出现一个B原子的束缚态，其束缚态能远小于 $\frac{\hbar^2}{2m_B r_0^2}$ 。根据Born-Oppenheimer近似的思想，这个束缚态能量就可以充当两个较重原

子 A_1 和 A_2 之间的“相互作用势能”，通过求解具有这个“相互作用势能”的 A_1 、 A_2 两原子组成的体系，进而就可以得到整个系统的波函数以及能量。如果在某些 a_1 和 a_2 下得到的B原子的束缚态和束缚能，也就是有效“相互作用势能”，能够支持原子 A_1 、 A_2 之间的束缚态，这样整个系统也是一个束缚态，那么就在所研究的这个超冷原子物理的混合维度体系中存在稳定的三体束缚态。

作为一般性的讨论，我们假设混合维度体系中存在 $N+1$ 个原子，其中有 $N(N \geq 2)$ 个较重的原子 $A_1 \cdots A_N$ ，它们被分别束缚在 N 个相互独立的低维空间中，这些低维约束之间的距离远远大于重原子之间相互作用的特征长度 r_0 ，以保证这些原子之间不会发生相互作用。同时，我们还假设有一个较轻的原子B在三维空间中运动，这样我们就可以写出系统总的Hamiltonian量：

$$H = - \sum_{i=1}^N \frac{\hbar^2}{2m_i} \nabla_i^2 - \frac{\hbar^2}{2m_B} \nabla_B^2 + \sum_{i=1}^N V(r_{iB}) \quad (3.34)$$

其中 $V(r_{iB})$ 代表轻原子B和第 i 个低维空间中的重原子 A_i 之间的相互作用势。由于重原子A被约束在低维空间中，所以相应的坐标就是在1D或2D空间中的坐标。

基于前面的分析，我们可以用Born-Oppenheimer近似来处理这个体系，将这个体系总的波函数 $\Psi(\vec{r}_B; \vec{s})$ 表示为下面的分离形式：

$$\Psi(\vec{r}_B; \vec{s}) = \phi(\vec{s}) \psi(\vec{r}_B; \vec{s}) \quad (3.35)$$

其中 \vec{s} 代表 N 个低维空间中重原子的空间坐标。

通过前面的分析可知，这个Hamiltonian量所满足的定态方程是非常难以精确求解的。但是在超冷原子系统中所关心的低能区域里，可以将相互作用势 $V(r_{iB})$ 用Bethe-Peierls边界条件来等效代替：

$$\psi(\vec{r}_{iB} \rightarrow 0) \propto \left(1 - \frac{a_i}{r_{iB}}\right) + \mathcal{O}(r_{iB}) \quad (3.36)$$

在这里， \vec{r}_{iB} 和 a_i 分别是重原子 A_i 和轻原子B之间相应的相对距离和混合维度下的散射长度。需要注意的是，这个散射长度 a_i 可以通过3D空间中的Feshbach共振调节 [4]，也可以通过混合维度中的约束诱导共振来进行调节 [44]。

这样B原子的波函数需要满足定态方程

$$-\frac{\hbar^2}{2m_B} \nabla_B^2 \psi(\vec{r}_B; \vec{s}) = V_{\text{eff}}(\vec{s}) \psi(\vec{r}_B; \vec{s}) \quad (3.37)$$

同时还要满足边界条件(3.36)。

波函数方程 (3.37) 的解为：

$$\psi(\vec{r}_B; \vec{s}) = \frac{e^{-\kappa(\vec{s})r_{1B}}}{r_{1B}} + \sum_{i=2}^N c_i \frac{e^{-\kappa(\vec{s})r_{iB}}}{r_{iB}} \quad (3.38)$$

为了得到原子B的束缚态，需要满足 $\kappa(\vec{s}) > 0$ 。通过在 $r_{iB} \rightarrow 0$ 处展开式(3.38)，并与Bethe-Peierls边界条件(3.36)对比，我们可以得到关于 $\kappa(\vec{s})$ 的方程组

$$\kappa(\vec{s}) - \sum_{j=2}^N c_j \frac{e^{-\kappa(\vec{s})r_{1j}}}{r_{1j}} = \frac{1}{a_1}; \quad (3.39)$$

$$\kappa(\vec{s})c_l - \frac{e^{-\kappa(\vec{s})r_{1l}}}{r_{1l}} - \sum_{i=2, i \neq l}^N c_i \frac{e^{-\kappa(\vec{s})r_{1i}}}{r_{1i}} = \frac{c_l}{a_l}. \quad (3.40)$$

通过求解上面的方程，如果我们可以得到满足 $\kappa(\vec{s}) > 0$ 的解，那么原子B的波函数就是一个束缚态波函数，它的束缚能为

$$V_{\text{eff}}(\vec{s}) = -\frac{\kappa^2(\vec{s})}{2} \quad (3.41)$$

最后，根据Born-Oppenheimer近似，将这个束缚能作为重原子之间的“有效作用势”，可以求解这些重原子所满足的N体定态方程：

$$\left[-\sum_{i=1}^N \frac{\hbar^2}{2m_i} \nabla_i^2 + V_{\text{eff}}(\vec{s}) \right] \phi(\vec{s}) = E\phi(\vec{s}) \quad (3.42)$$

如果上面的方程可以支持N体束缚态的解，则体系的N+1个原子的总波函数

$$\Psi(\vec{r}_B; \vec{s}) = \phi(\vec{s})\psi(\vec{r}_B; \vec{s})$$

也是一个束缚态波函数。它的能量就是方程(3.42)中得到的 E 。我们还可以定义系统的束缚能为 $E_b = V_{\text{eff}}(\infty) - E$ 来表示系统被束缚的强度。

需要强调的是，在Born-Oppenheimer近似的框架下处理这个问题时，轻原子B不同本征波函数之间的交叉项都被忽略，这个近似只有在B原子基态能量 V_{eff} 与其他本征能量之间的能隙足够大时才适用。当 V_{eff} 比较接近连续谱的低能级时，Born-Oppenheimer近似的精确度就会受到相当大的影响 [65, 66]。

第4章 混合维度下少体系统的稳定束缚态

4.1 1D-1D-3D系统中的有效相互作用势

在这一部分的工作中，基于上一章Born-Oppenheimer近似的一般性方法，我们研究了1D-1D-3D的混合维度体系下的三体问题（图(1.6.a)）。在这个体系中包含两个重原子 A_1 和 A_2 和一个较轻的原子 B ，它们的质量分别为 m_1, m_2, m_B ，在这里我们假定 $m_1 = m_2$ 且 $m_1 \gg m_B$ 。我们令这两个重原子分别束缚在两个相互独立且平行的沿 z 方向的1维管子里，两个1维管子的距离为 L ，同时轻原子 B 可以在三维空间中自由运动。考虑这个距离 L 远远大于两个原子 A_1, A_2 之间相互作用的特征长度 r_0 ，即 $L \gg r_0$ 的情况。如果原子 A_1, A_2 在1维空间中的水平位置为 z_1, z_2 ，由于这两个原子被束缚在相互平行的1维空间中，所以只需要知道 z_1, z_2 的值就可以完全确定它们的空间位置，所以系统可以用波函数 $\Psi(\vec{r}_B; z_1, z_2)$ 来描述， $\vec{r}_B = (x_B, y_B, z_B)$ 为 B 原子在三维空间中的坐标。令 $z_1 - z_2 = z$ ，我们有 $r_{12} = \sqrt{L^2 + z^2}$ ， $r_{12}^{\min} = L$ 。三个原子相对位置如前面图(3.1)中所示。在自然单位制下：

$$\hbar = m_B = L = 1$$

这个系统的总Hamiltonian量为：

$$H = -\frac{1}{2}\nabla_B^2 - \frac{1}{2m_1}\frac{\partial^2}{\partial z_1^2} - \frac{1}{2m_2}\frac{\partial^2}{\partial z_2^2} + V_{1B} + V_{2B}, \quad (4.1)$$

在这里， $m_{1,2}$ 是原子 $A_{1,2}$ 在自然单位制下的质量。 $V_{1B,2B}$ 是原子 $A_{1,2}$ 和原子 B 之间的相互作用。由于两个1维管子之间距离 L 远远大于两个原子 A_1, A_2 之间相互作用的特征长度 r_0 ，我们可以忽略原子 A_1-A_2 之间的相互作用。

在 $m_1 \gg m_B$ 的情况下，根据Born-Oppenheimer近似，可以将三体波函数 $\Psi(\vec{r}_B; z_1, z_2)$ 写为分离形式：

$$\Psi(\vec{r}_B; z_1, z_2) = \phi(z_1, z_2)\psi(\vec{r}_B; z_1, z_2) \quad (4.2)$$

其中 B 原子的波函数 $\psi(\vec{r}_B; z_1, z_2)$ 只和原子 A_1, A_2 在 z 方向的位置 (z_1, z_2) 有关，满足方程

$$\left(-\frac{1}{2}\nabla_B^2 + V_{1B} + V_{2B}\right)\psi(\vec{r}_B; z_1, z_2) = V_{\text{eff}}(z_1, z_2)\psi(\vec{r}_B; z_1, z_2) \quad (4.3)$$

接下来，我们采用Bethe-Peierls边界条件取代原子 $A_{1,2}$ 和原子 B 之间的相互作用，则 $\psi(\vec{r}_B; z_1, z_2)$ 应该满足如下边界条件：

$$\psi(r_{1B} \rightarrow 0) \propto \left(1 - \frac{a_1}{r_{1B}}\right) + \mathcal{O}(r_{1B}); \quad (4.4)$$

$$\psi(r_{2B} \rightarrow 0) \propto \left(1 - \frac{a_2}{r_{2B}}\right) + \mathcal{O}(r_{2B}). \quad (4.5)$$

在这里， $r_{1B,2B}$ 是重原子 $A_{1,2}$ 和轻原子 B 之间的相对距离， $a_{1,2}$ 分别是重原子 $A_{1,2}$ 和轻原子 B 在混合维度下的散射长度。同样，这个散射长度 $a_{1,2}$ 既可以通过三维空间中的Feshbach 共振调节，也可以通过混合维度中的约束诱导共振来进行调节。

在Bethe-Peierls边界条件下，轻原子 B 的波函数 $\psi(\vec{r}_B, z_1, z_2)$ 由如下本征方程描述：

$$-\frac{1}{2}\nabla_B^2\psi(\vec{r}_B, z_1, z_2) = V_{\text{eff}}(z_1, z_2)\psi(\vec{r}_B, z_1, z_2), \quad (4.6)$$

通过求解这个本征方程，在任何一个 $z_{1,2}$ 确定的情况下，轻原子 B 的波函数 $\psi(\vec{r}_B, z_1, z_2)$ 具体形式，以及相应的本征能量 $V_{\text{eff}}(z_1, z_2)$ 都可以被确定。根据Born-Oppenheimer近似的思想， $V_{\text{eff}}(z_1, z_2)$ 可以作为两个重原子 $A_{1,2}$ 之间的有效相互作用势，最后我们得到关于 $A_{1,2}$ 的本征方程

$$\left[-\frac{1}{2m_1}\frac{\partial^2}{\partial z_1^2} - \frac{1}{2m_2}\frac{\partial^2}{\partial z_2^2} + V_{\text{eff}}(z_1, z_2)\right]\phi(z_1, z_2) = E\phi(z_1, z_2), \quad (4.7)$$

这里所得到的 E 就是三体系统的总能量。计算中我们只考虑三体本征能量的基态，相应地，只需要考虑波函数 $\phi(z_1, z_2)$ 和 $\psi(\vec{r}_B, z_1, z_2)$ 的基态解。

通过上一节关于Born-Oppenheimer近似的分析，在1D-1D-3D系统中，在Bethe-Peierls边界条件下，轻原子 B 的波函数 $\psi(\vec{r}_B, z_1, z_2)$ 以及基态本征能量 $V_{\text{eff}}(z_1, z_2)$ 可以表示为以下形式：

$$\psi(\vec{r}_B, z_1, z_2) = \frac{e^{-\kappa(r_{12})r_{1B}}}{r_{1B}} + \xi(r_{12})\frac{e^{-\kappa(r_{12})r_{2B}}}{r_{2B}}; \quad (4.8)$$

$$V_{\text{eff}}(z_1, z_2) = -\frac{\kappa^2(r_{12})}{2}, \quad (4.9)$$

其中 $r_{12} = \sqrt{1 + (z_1 - z_2)^2}$ 为重原子 $A_{1,2}$ 在3维空间中的距离。

在这里，轻原子 B 的基态本征能量 $V_{\text{eff}}(z_1, z_2)$ 充当了重原子 $A_{1,2}$ 之间的有效相互作用势。这个有效相互作用的形式只和原子 A_1, A_2 在 z 方向的相对距

离 $z_{12} \equiv (z_1, z_2)$ 有关。所以重原子 $A_{1,2}$ 的波函数 $\phi(z_1, z_2)$ 也只和 z_{12} 相关。我们可以将有效相互作用势 $V_{\text{eff}}(z_1, z_2)$ 和波函数 $\phi(z_1, z_2)$ 分别重新写为 $V_{\text{eff}}(z_{12})$ 和 $\phi(z_{12})$ 。因此，重原子 $A_{1,2}$ 的波函数 $\phi(z_{12})$ 所满足的本征方程为：

$$\left[-\frac{1}{2m_*} \frac{\partial^2}{\partial z_{12}^2} + V_{\text{eff}}(z_{12}) \right] \phi(z_{12}) = E \phi(z_{12}), \quad (4.10)$$

其中 $m_* = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ 为两个重原子 $A_{1,2}$ 之间的约化质量。在这里我们可以看到， $V_{\text{eff}}(z_{12})$ 充当了两个重原子 $A_{1,2}$ 之间的有效相互作用能，并且决定着体系中是否会出现束缚态。接下来，我们在不同的散射长度范围 $a_{1,2}$ 的取值下具体研究了 $V_{\text{eff}}(z_{12})$ 的性质。

(i). $a_1 = a_2 = a > 0$

首先我们研究了 $a_1 = a_2 = a > 0$ 的情况，重原子 $A_{1,2}$ 和轻原子 B 之间有相同的正的散射长度 a 。对方程(4.3)直接求解,并取基态解，可以得到

$$\psi(\vec{r}_B, z_{12}) = \frac{e^{-\kappa r_{1B}}}{r_{1B}} + \frac{e^{-\kappa r_{2B}}}{r_{2B}} \quad (4.11)$$

$$V_{\text{eff}}(z_{12}) = -\frac{\kappa^2}{2} \quad (4.12)$$

如果要求B原子的波函数 $\psi(\vec{r}_B, r_{12})$ 为束缚态，必须有 $\kappa(r_{12}) > 0$ 。

根据Bethe-Peierls边界条件，公式(4.11)中的波函数 $\psi(\vec{r}_B, z_{12})$ 需要满足边界条件(4.4, 4.5)，在 $r_{1B} \rightarrow 0$ 区域展开方程(4.11)，可以得到

$$\kappa - \frac{e^{\kappa r_{12}}}{r_{12}} = \frac{1}{a} \quad (4.13)$$

解析求解这个方程，我们可以得到

$$\kappa = \frac{1}{a} + \frac{W(e^{-r_{12}/a})}{r_{12}} \quad (4.14)$$

其中 $W(x)$ 为Lambert W函数，其定义为方程 $x = We^W$ 的主值解（图(4.1)）。

最后得到有效相互作用势 $V_{\text{eff}}(z_{12})$ 的表达形式

$$V_{\text{eff}}(z_{12}) = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{W(e^{-r_{12}/a})}{r_{12}} \right)^2 \quad (4.15)$$

其中 $r_{12} = \sqrt{1 + z_{12}^2}$ 。

接下来，我们将有效相互作用势 $V_{\text{eff}}(z_{12})$ 写为两部分：

$$V_{\text{eff}}(z_{12}) = U(a; z_{12}) - \frac{1}{2a^2}, \quad (4.16)$$

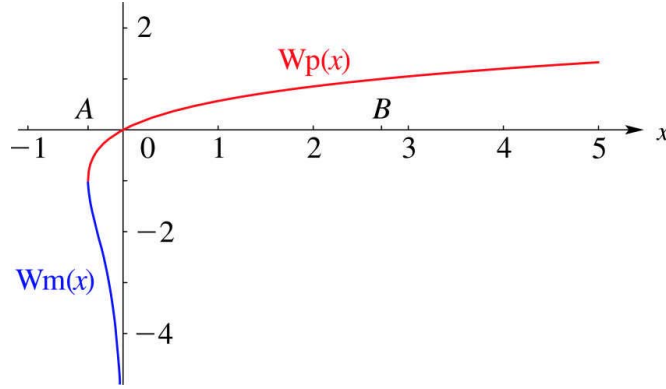


图 4.1: Lambert W函数。其中 $W_p(x)$ 称为主值解。

其中规范部分 $U(a; z_{12})$ 的表达式为：

$$U(a; z_{12}) = -\frac{1}{2} \frac{W\left(e^{-\sqrt{1+z_{12}^2}/a}\right)^2}{1+z_{12}^2} - \frac{1}{a} \frac{W\left(e^{-\sqrt{1+z_{12}^2}/a}\right)}{\sqrt{1+z_{12}^2}}, \quad (4.17)$$

$U(a; z_{12})$ 在 $|z_{12}| \rightarrow \infty$ 的极限下趋向于0，表示在两个重原子 $A_{1,2}$ 相距无穷远的情况下，他们之间的有效相互作用也趋向于零。这样，系统中束缚态的性质就只由 $U(a; z_{12})$ 的行为决定。

通过对Lambert W函数的性质进行分析和计算，得到在 $a > 0$ 的情况下，对于任意的 z_{12} ， $U(a; z_{12})$ 是一个关于 z_{12} 对称的势阱，即：

$$U(a, z_{12}) = U(a, -z_{12}) < 0. \quad (4.18)$$

在图(4.2)中，我们画出了 $U(a; z_{12})$ 在某些散射长度下关于 z_{12} 的形式。可以清楚地看到 $U(a; z_{12})$ 提供了两个重原子 $A_{1,2}$ 之间的一个简单的1维势阱形式。在这种情况下，重原子 $A_{1,2}$ 的本征方程至少会有一个束缚态的解，同时说明系统中存在至少一个三体束缚态。

在图(4.2)中我们看到，有效相互作用势 $U(a; z_{12})$ 的深度最大的地方出现在 $a = 1$ 的地方，在自然单位制中，这代表 $a = L$ 的情况。这个现象说明当氢原子 B 和重原子 A_{12} 之间的混合维度下的散射长度和两个1维约束之间的距离 L 相等时，由轻原子 B 诱导的重原子 A_{12} 之间的有效相互作用最为明显。

同时， $U(a; z_{12})$ 的性质可以通过对 W 函数的分析得到。对于给定的 a ，相互作用势 $U(a; z_{12})$ 都会在 $z_{12} = 0$ 处达到唯一的最小值。所以 $U(a; z_{12})$ 的深度可以取如下形式：

$$D(a) \equiv -U(a, 0) = \frac{1}{2} W\left(e^{-1/a}\right)^2 + \frac{1}{a} W\left(e^{-1/a}\right). \quad (4.19)$$

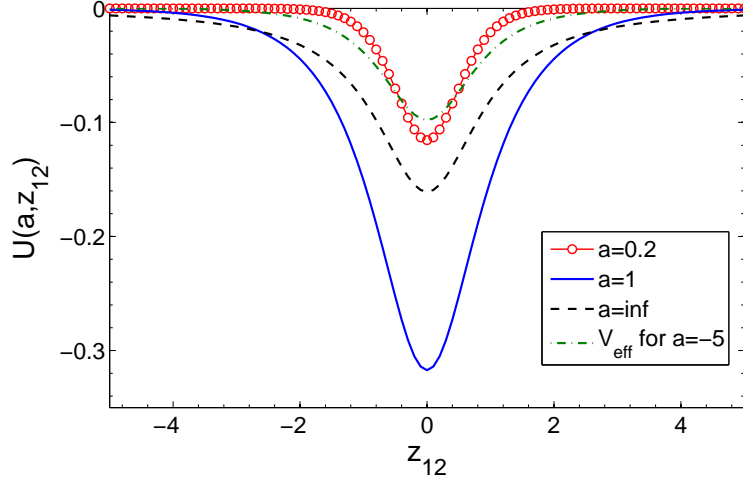


图 4.2: 两个重原子 $A_{1,2}$ 之间的有效相互作用势的规范部分 $U(a, z_{12})$ 在不同散射长度 ($a = 0.2, 1, \infty$) 下的形式。同时也画出了有效相互作用势 $V_{\text{eff}}(z_{12})$ 在 $a_1 = a_2 = -5$ 情况下的形式。图中采用自然单位制 $\hbar = m_B = L = 1$ 。

其中当 $a = 1$ 时, $D(a)$ 达到最大值。在图(4.3)中我们画出了相互作用势 $U(a; z_{12})$ 的深度 $D(a)$ 关于散射长度 $1/a$ 的函数。很容易发现 $D(a)$ 的峰值出现在 $a = 1$ 处。

(ii). $a_1 = a_2 = a < 0$

在 $a_1 = a_2 = a > 0$ 的情况下, 将轻原子 B 的波函数 $\psi(\vec{r}_B, z_{12})$ 直接求解。根据Bethe-Peierls边界条件, 波函数需要满足边界条件 (4.4, 4.5)。在 $r_{12} < |a|$ 的情况下, 将波函数在 $r_{1B} \rightarrow 0$ 区域展开, 与Bethe-Peierls边界条件对比, 可以得到关于 κ 的解析解

$$\kappa = \frac{1}{a} + \frac{W(e^{-r_{12}/a})}{r_{12}} \quad (4.20)$$

然而, 在 $r_{12} > |a|$ 情况下, 无法得到关于 κ 大于零的解。这说明在 $r_{12} > |a|$ 情况下, 满足Bethe-Peierls边界条件的Schrödinger方程无法支持氢原子 B 的束缚态 ψ , 因此, 在Born-Oppenheimer近似的框架下, 系统无法在重原子 $A_{1,2}$ 之间诱导出吸引的有效相互作用势。由于 $r_{12}^{\min} \geq 1$, 所以在 $|a| < 1$ 的情况下, 系统中不会有任何的三体束缚态出现。

另一方面, 在 $|a| > 1$ 的情况下, 通过Born-Oppenheimer近似可以给出系统

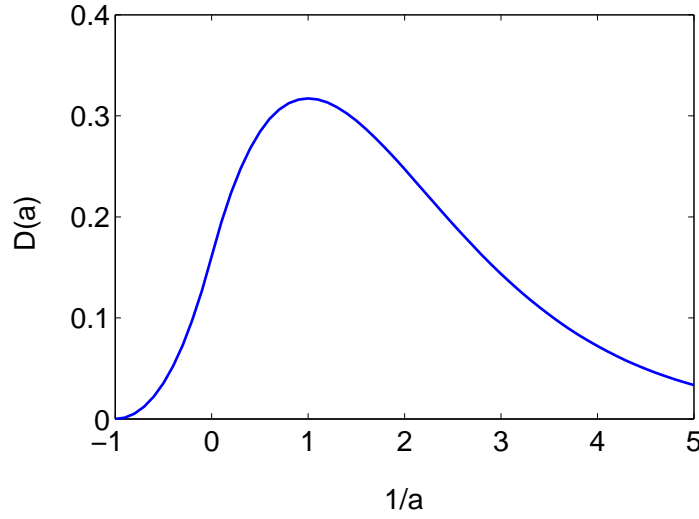


图 4.3: 两个重原子之间的有效相互作用势的规范部分 $U(a, z_{12})$ 的深度 $D(a)$ 关于 $1/a$ 的形式。可以看到在 $a = 1$ 处有效相互作用势的深度 $D(a)$ 达到最大值。

中的有效相互作用势

$$V_{\text{eff}}(z_{12}) = -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{a} + \frac{W\left(e^{-\sqrt{1+z_{12}^2}/a}\right)}{\sqrt{1+z_{12}^2}} \right]^2, \quad (4.21)$$

这个式子只有在 $r_{12} < |a|$ 即 $|z_{12}| < \sqrt{a^2 - 1}$ 情况下成立。在 $|z_{12}| > \sqrt{a^2 - 1}$ 的情况下，这个相互作用势变为零，即 $V_{\text{eff}}(z_{12}) = 0$ 。所以，在 $a_1 = a_2 = a < 0$ 的情况下，由轻原子 B 诱导出的有效相互作用势为

$$V_{\text{eff}}(z_{12}) = \begin{cases} -\kappa^2/2; & 1 < r_{12} < |a| \\ 0; & r_{12} > |a| \end{cases} \quad (4.22)$$

同样在图(4.2)中我们也画出了 $V_{\text{eff}}(z_{12})$ 在负的散射长度下的形式。

需要强调的是，Born-Oppenheimer近似只有在 $V_{\text{eff}}(z_{12})$ 与Schrödinger方程得到的连续能谱相距比较大时才可信。在 $r_{12} \sim |a|$ 即 $|z_{12}| \sim \sqrt{a^2 - 1}$ 的情况下， $V_{\text{eff}} \sim 0$ ，Born-Oppenheimer近似的成立条件被破坏。在这种情况下得到的有效相互作用势变得不再适用。相反，如果这个有效相互作用势足够深，重原子 $A_{1,2}$ 的基态波函数 ϕ 就会主要局域在 $z_{12} \sim 0$ 即 $r_{12} \ll |a|$ 的区域，也就是Born-Oppenheimer近似比较可信的区域。这样，由此基态波函数和相应的束缚能也是足够可信的。

与 $a > 0$ 情况下不同的是，在 $a < 0$ 情况，散射长度为负值， $A_{1,2}$ 和 B 原子之间不会形成两体束缚态。因此系统中可能出现的三体束缚态是一个非平庸的现象。

(iii). $0 < a_1 < a_2$ 或 $a_2 < 0 < a_1$

在这种情况下，由于 $a_1 \neq a_2$ ，所以 B 原子波函数 $\psi(\vec{r}_B, z_{12})$ 应该是如下形式：

$$\psi(\vec{r}_B, z_{12}) = \frac{e^{-\kappa r_{1B}}}{r_{1B}} + \xi \frac{e^{-\kappa r_{2B}}}{r_{2B}} \quad (4.23)$$

根据Behte-Peierls边界条件（4.4,4.5），我们可以得到其中系数 κ 和 ξ 所满足的方程

$$-\kappa + \xi \frac{e^{-\kappa r_{12}}}{r_{12}} = -\frac{1}{a_1} \quad (4.24)$$

$$-\kappa + \frac{1}{\xi} \frac{e^{-\kappa r_{12}}}{r_{12}} = -\frac{1}{a_2} \quad (4.25)$$

解得

$$\xi = \frac{-\Delta \pm \sqrt{\Delta^2 + 4e^{-2\kappa r_{12}}/r_{12}^2}}{2} (r_{12}e^{\kappa r_{12}}) \quad (4.26)$$

其中

$$\Delta \equiv \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2}$$

在 $0 < a_1 < a_2$ 或者 $a_2 < 0 < a_1$ 的情况下， $\Delta > 0$ 。由于 $0 < a_1 < a_2$ 或 $a_2 < 0 < a_1$ ，所以在 $r_{12} \rightarrow \infty$ 极限下，当 A_1 、 A_2 两个原子相隔很远的时候， B 原子会和 A_1 原子形成束缚态，所以有

$$\xi(r_{12} \rightarrow \infty) = 0$$

根据公式（4.26），得到

$$\xi = \frac{-\Delta + \sqrt{\Delta^2 + 4e^{-2\kappa r_{12}}/r_{12}^2}}{2} (r_{12}e^{\kappa r_{12}}) \quad (4.27)$$

代入公式（4.23）得

$$-\kappa + \frac{-\Delta + \sqrt{\Delta^2 + 4e^{-2\kappa r_{12}}/r_{12}^2}}{2} = -\frac{1}{a_1} \quad (4.28)$$

如果使B原子的波函数为束缚态，需要 $\kappa(r_{12}) > 0$ ，这样，通过求解 κ 所满足的方程，我们可以得到轻原子 A_1, A_2 之间的有效作用势

$$V_{\text{eff}}(z_{12}) = -\frac{\kappa^2}{2}$$

可以看到，对于任何的 $r_{12} > r_{12}^{\min}$ ，都会有 $V_{\text{eff}}(z_{12}) < 0$ 的解。

作为更加广泛的图像，这种情况其实代表了两体散射长度不相等且 a_1 、 a_2 至少有一个大于零的体系。需要注意的是在 $a_2 < 0 < a_1$ 情况下，对于原子 A_1 和原子B之间会有一个两体束缚态（ $a_1 > 0$ ，体系会支持一个低能束缚态），而 A_2 和B之前没有低能两体束缚态（ $a_2 < 0$ ），但是整个系统中却可以形成一个稳定的三体束缚态，所以说这也是一种非平庸的体系。

(iv). $0 < a_1 < a_2$ 或 $a_2 < 0 < a_1$

在这种情况下， $\Delta > 0$ ，为是轻原子B的波函数 $\psi(\vec{r}_B, z_{12})$ 为束缚态，需要有 $\kappa > 0$ 的解，根据 κ 和 ξ 所满足的公式（4.24），由于 $a_1 < 0$ ，需要有 $\xi > 0$ ，则 ξ 和 κ 分别取为

$$\xi = \frac{-\Delta + \sqrt{\Delta^2 + 4e^{-2\kappa r_{12}}/r_{12}^2}}{2} (r_{12}e^{\kappa r_{12}}) \quad (4.29)$$

$$-\kappa + \frac{-\Delta + \sqrt{\Delta^2 + 4e^{-2\kappa r_{12}}/r_{12}^2}}{2} = -\frac{1}{a_1} \quad (4.30)$$

若要方程（4.30）的解满足 $\kappa(r_{12}) > 0$ ，需要有

$$\frac{1}{a_1} + \frac{-\Delta + \sqrt{\Delta^2 + 4/r_{12}^2}}{2} > 0 \quad (4.31)$$

定义 r_{12}^* 为方程

$$\frac{1}{a_1} + \frac{-\Delta + \sqrt{\Delta^2 + 4/r_{12}^2}}{2} = 0 \quad (4.32)$$

的解。当 $r_{12} < r_{12}^*$ 时，方程（4.30）有一个 $\kappa > 0$ 的解，B原子的波函数会是一个束缚态。而当 $r_{12} > r_{12}^*$ 时，方程不会有 $\kappa > 0$ 的解。 r_{12}^* 的取值为

$$r_{12}^* = 2 \left[\left(\Delta - \frac{2}{a_1} \right)^2 - \Delta^2 \right]^{-1/2} \quad (4.33)$$

由于当 $r_{12} > r_{12}^*$ 时，方程不会有 $\kappa > 0$ 的解，系统中也不会诱导出一个 $A_{1,2}$ 之间的有效相互吸引势。因此我们可以将 r_{12}^* 认为是重原子 $A_{1,2}$ 之间有效相互作用势

的范围。当这个范围比两个一维管子之间的距离 L 小，即 $r_{12}^* < 1$ 的情况下，可以认为两个重原子 $A_{1,2}$ 之间的距离足够远，这样Born-Oppenheimer近似不会给出任何有效相互作用。相反的，在 $r_{12}^* > 1$ 情况下，两个重原子 $A_{1,2}$ 之间的有效相互作用可以定义为

$$V_{\text{eff}} = \begin{cases} -\kappa^2/2; & 1 \leq r_{12} \leq r_{12}^* \\ 0; & r_{12} > r_{12}^*. \end{cases} \quad (4.34)$$

类似于 $a_1 = a_2 = a < 0$ 的情况，在 $r_{12} \sim r_{12}^*$ 区域Born-Oppenheimer近似成立的条件被破坏，这个相互作用势也是不可信的。尽管如此，在这个区域附近，这个近似会给出一个几乎可以忽略的束缚态波函数 $\phi(z_{12})$ 。同样和 $a_{1,2} > 0$ 情况下不同的是，在 $a_{1,2} < 0$ 情况，散射长度为负值， $A_{1,2}$ 和 B 原子之间不会形成两体束缚态。因此系统中可能出现的三体束缚态是一个非平凡的现象。

4.2 1D-1D-3D系统中的三体稳定束缚态

在前面我们计算了轻原子 B 的瞬时束缚态波函数 ψ 和两个重原子 $A_{1,2}$ 之间的诱导有效相互作用势 $V_{\text{eff}}(z_{12})$ 。当 A, B 原子之间的两体散射长度接近于两个一维管子约束之间的距离时，这个有效相互作用势 V_{eff} 最为显著。接下来通过求解中原子 $A_{1,2}$ 的运动方程

$$\left[-\frac{1}{2m_*} \frac{\partial^2}{\partial z_{12}^2} + V_{\text{eff}}(z_{12}) \right] \phi(z_{12}) = E \phi(z_{12}), \quad (4.35)$$

我们计算在这个相互作用势 V_{eff} 下系统三体束缚态的波函数以及基态能量，并且对系统做进一步分析。

在图(4.4)中，我们画出了三体束缚态的束缚能 E_{3b} 随着 $1/a_1$ 和 $1/a_2$ 变化的取值。在自然单位制下，重原子的约化质量为 $m_* = 3.33, 9.5$ ，分别对应着 $(A_1 = A_2 = {}^{40}\text{K}, B = {}^6\text{Li})$ 和 $(A_1 = A_2 = {}^{133}\text{Cs}, B = {}^7\text{Li})$ 的情况。在这里，束缚能 E_{3b} 的定义是三体基态能量和有效相互作用在无穷远处渐进值之间的能量差

$$E_{3b} = V_{\text{eff}}(\infty) - E. \quad (4.36)$$

这个能量代表的就是三体能量和两体-单体连续能谱之间的能级间隔。

在图(4.4)中我们发现，和前面预期的一样，在散射长度从正到负的一个相当大的范围，系统中都存在至少一个三体束缚态。当两个两体散射长度 a_1, a_2 相

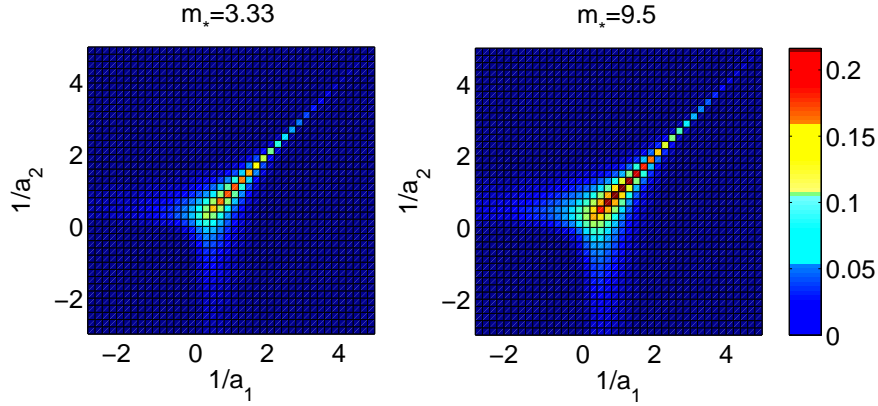


图 4.4: 1D-1D-3D系统中三体束缚态的基态束缚能。重原子的约化质量分别为 $m_* = 3.33, 9.5$ ，分别对应($A_1 = A_2 = {}^{40}\text{K}$, $B = {}^6\text{Li}$)和($A_1 = A_2 = {}^{133}\text{Cs}$, $B = {}^7\text{Li}$)的情况。

接近，特别是在 $a_1 \sim a_2 \sim 1$ 区域附近，系统的束缚能达到峰值。这一点和前面等效相互作用势 V_{eff} 的分析也是相同的，当两体散射长度和两个一维管约束之间的距离相等，即 $a_1 = a_2 = L$ 时，重原子 $A_1 - A_2$ 之间的有效相互作用是最强的。

为了进一步研究三体束缚能和两体散射长度之间的关系，我们集中讨论 $a_1 = a_2 = a$ 的情况。在图(4.5)画出了两个重原子 $A_{1,2}$ 不同约化质量 m_* 下基态束缚能 E_{3b} 随 $1/a$ 的变化情况。在不同的约化质量下，束缚能都在 $a = 1$ 区域附近达到最大值。另外，对于特定的散射长度 a ，束缚能 E_{3b} 随着约化质量的增大而增加，在 $m_* = \infty$ 时达到最大渐进值。同样在图(4.6)中我们画出了在 $a_1 = a_2 = a = 1$ 和 $a_1 = a_2 = a = \infty$ 情况下，三体基态束缚能 E_{3b} 随约化质量 m_* 变化的函数。

作为1D-1D-3D系统的一种特殊情况，在文献 [37]中，Nishida和Tan通过严格求解三体Schrödinger方程的方法研究了 $a_1 = a_2$ 时三体束缚态的性质。在图(4.7)中我们将用Born-Oppenheimer近似得到的三体基态束缚能和文献 [37]中通过严格解所得到的结果进行了比较，其中约化质量为 $m_* = 3.33$ ，散射长度 $a_1 = a_2 = a$ 。可以看到在 $a = 1$ 区域附近，同时也是束缚能 E_{3b} 比较大的时候，Born-Oppenheimer近似的结果和精确解符合的相当好。这也继续说明了在三体束缚能和渐进值相差越大时，Born-Oppenheimer近似越能给出可信的结果。

这样，我们通过用Bethe-Peierls边界条件以及Born-Oppenheimer近似方法

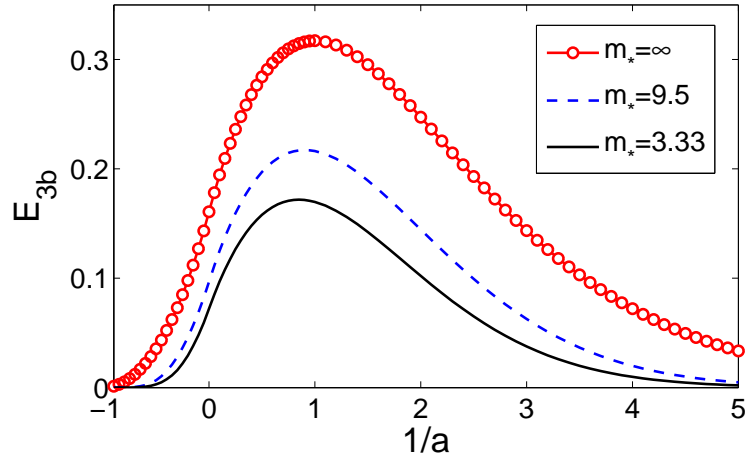


图 4.5: 三体基态束缚能 E_{3b} 随 $1/a$ 的变化 ($a_1 = a_2 = a$)。图中画出了不同约化质量($m_* = 3.33, 9.5, \infty$)相应的束缚能。

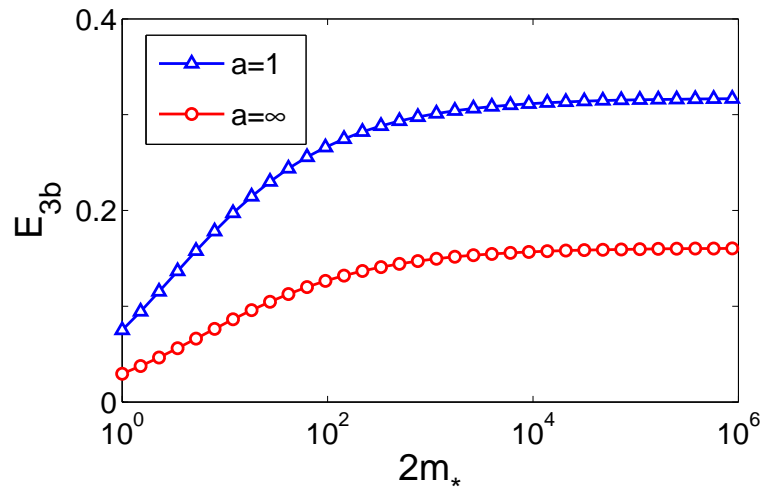


图 4.6: 三体基态束缚能 E_{3b} 在 $a_1 = a_2 = a = 1$ 和 $a_1 = a_2 = a = \infty$ 情况下，随约化质量 m_* 变化的函数。

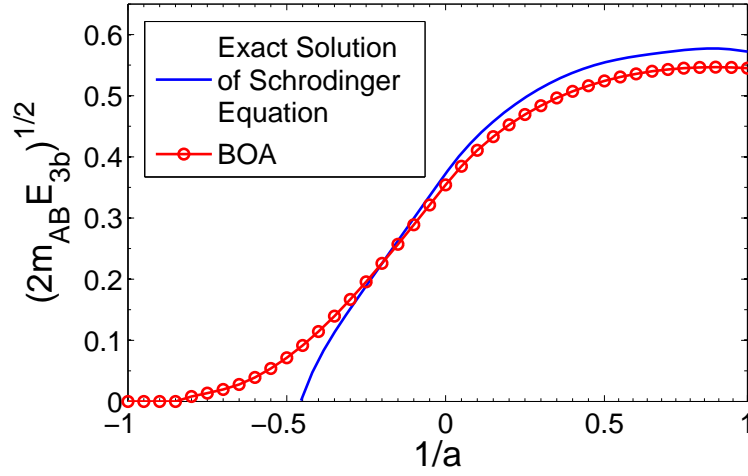


图 4.7: 1D-1D-3D系统中三体束缚态的基态束缚能在 $m_* = 3.33$ 和 $a_1 = a_2 = a$ 情况下的结果。通过比较Born-Oppenheimer近似同文献 [37] 中严格解的结果，发现在束缚能远离渐进值时，BOA可以给出相当可信的结果。

研究了1D-1D-3D的混合维度系统中的三体束缚态。这个体系中包含两个重原子 A_1, A_2 和一个较轻的原子 B ，它们的质量分别为 m_1, m_2, m_B 且 $m_1 = m_2 \gg m_B$ 。两个重原子 $A_{1,2}$ 分别被约束在两个相互独立且平行的沿 z 方向的1维管子里，两个1维管子的距离为 L 。轻原子 B 可以在三维空间中自由运动，并同重原子 $A_{1,2}$ 自己有相互作用，相应的散射长度为 $a_{1,2}$ 。我们发现在这个体系中，存在一个三体的束缚态，而且由于 A_1, A_2 原子被分别约束在独立的低维空间中，三个原子永远不可能同时靠近，这样就完全避免了由三体碰撞导致的三体复合效应，所以系统中出现的三体束缚态是一个稳定的束缚态，具有无穷长的寿命。在散射长度 $a < 0$ 时，任何两体之间都不能形成束缚态，而三体之间却存在这样一个稳定的束缚态，这是一个非平凡的情况。我们利用Born-Oppenheimer近似方法计算了这个三体束缚态在不同两体散射长度 a_1, a_2 已经不同的约化质量 m_* 下的束缚能量，并同 $a_1 = a_2 = a$ 情况下Schrödinger方程的严格解进行了对比。我们发现Born-Oppenheimer近似可以给我们一个非常清晰简洁的物理图像。甚至在约化质量 $m_* = 3.33$ ，即 $m_1/m_B = 6.67$ 左右，Born-Oppenheimer近似仍然可以给出相当可信的结果。

4.3 2D-2D-3D系统中的三体稳定束缚态

上一节对1D-1D-3D的混合维度系统中的三体束缚态的讨论和计算可以被直接推广到其他系统中。接下来我们考虑2D-2D-3D的混合维度系统（图(1.6)）。系统中有两个重原子 A_1 和 A_2 和一个较轻的原子 B ，质量分别为 m_1, m_2, m_B ，且 $m_1 = m_2 \gg m_B$ 。我们令这两个重原子分别被约束在两个相互独立且平行的 y, z 方向的2维平面里，两个2维平面在 $x = \pm L/2$ ，之间的距离为 L ，同时轻原子 B 可以在三维空间中自由运动。同样考虑这个距离 L 远远大于两个原子 A_1, A_2 之间相互作用的特征长度 r_0 ，即 $L \gg r_0$ 的情况，我们可以忽略重原子 $A_{1,2}$ 之间的相互作用。三个原子的坐标为 $A_1 : (L/2, y_1, z_1)$, $A_2 : (-L/2, y_2, z_2)$, $B : (x_B, y_B, z_B)$ ，所以系统可以用波函数 $\Psi(\vec{r}_B; y_1, y_2, z_1, z_2)$ 来描述。在此仍然使用自然单位制 $\hbar = m_B = L = 1$ 。这个系统的总Hamiltonian量为

$$H = -\frac{1}{2}\nabla_B^2 - \frac{1}{2m_1} \left(\frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} \right) - \frac{1}{2m_2} \left(\frac{\partial^2}{\partial y_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} \right) + V_{1B} + V_{2B}. \quad (4.37)$$

经过上一节的分析，我们发现轻原子 B 的束缚态波函数以及束缚能 V_{eff} 依赖于两个重原子在 y, z 平面的相对距离 $\rho = \sqrt{(y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$ 。根据Born-Oppenheimer近似我们同样可以将系统波函数写为

$$\Psi(\vec{r}_B; \rho) = \phi(\rho)\psi(\vec{r}_B, \rho), \quad (4.38)$$

其中 $\psi(\vec{r}_B, \rho)$ 为固定住 ρ 时 B 原子的瞬时束缚态。这样， B 原子的瞬时基态能 $V_{\text{eff}}(\rho)$ 就充当了重原子 $A_{1,2}$ 之间的有效相互作用。在这里，轻原子 B 同重原子 $A_{1,2}$ 之间相互作用的散射长度为 a_1, a_2 ，所以波函数 $\psi(\vec{r}_B, \rho)$ 也应该满足Bethe-Peierls边界条件 (4.4,4.5)。

通过和1D-1D-3D系统相类似的方法，我们求解了2D-2D-3D系统中轻原子 B 的基态波函数以及本征能量，即重原子 $A_{1,2}$ 之间的诱导有效相互作用 $V_{\text{eff}}(\rho)$ 。直接的计算可以发现 $V_{\text{eff}}(\rho)$ 具有和 $V_{\text{eff}}(z_{12})$ 相同的数学形式。不同的是， $V_{\text{eff}}(\rho)$ 是一个具有轴向对称性的二维相互作用势。同1D-1D-3D系统相应的， $V_{\text{eff}}(\rho)$ 同样在 $a_1 = a_2 = 1$ 处达到最大值。这也说明在2D-2D-3D系统中，当两题散射长度同两个二维平面约束之间的距离 L 相接近是，原子 $A_{1,2}$ 之间的有效相互作用最强。利用Born-Oppenheimer近似我们得到原子 $A_{1,2}$ 在有效相互作用势下的Hamiltonian量为

$$H = -\frac{1}{2m_1} \left(\frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} \right) - \frac{1}{2m_2} \left(\frac{\partial^2}{\partial y_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} \right) + V_{\text{eff}}. \quad (4.39)$$

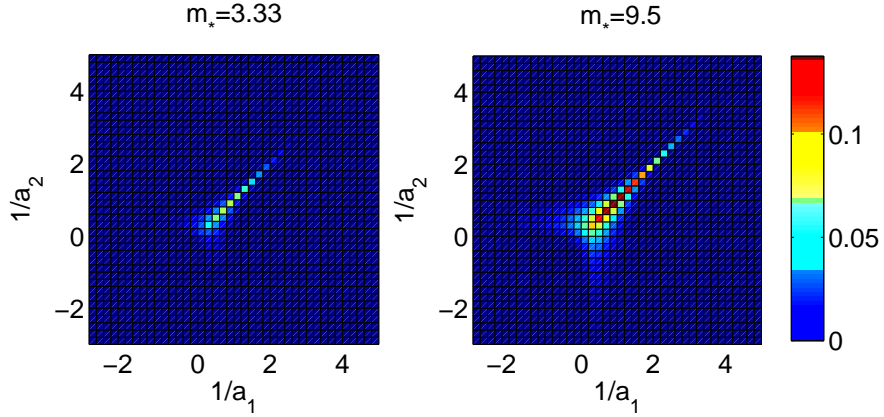


图 4.8: 在2D-2D-3D系统中三体束缚态的基态能随散射长度变化的情况, 约化质量分别为 $m_* = 3.33$ 和 9.5 。

需要注意的是, 这个Hamiltonian量具有和 V_{eff} 相同的 x 轴向对称性。这样原子 $A_{1,2}$ 之间相对运动的波函数 $\phi(\rho)$ 就会出现角动量分量, 可以将 $\phi(\rho)$ 表示成

$$\phi(\rho) = \sum_{\ell} \phi_{\ell}(\rho) e^{i\ell\theta}, \quad (4.40)$$

其中 $\tan \theta = (z_1 - z_2)/(y_1 - y_2)$ 是原子 $A_{1,2}$ 在 $y - z$ 平面上相对运动的极角。这样相对运动的径向波函数 $\phi_{\ell}(\rho)$ 满足如下的2维Schrödinger方程

$$\left[-\frac{1}{2m_*} \left(\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} - \frac{\ell^2}{\rho^2} \right) + V_{\text{eff}}(\rho) \right] \phi_{\ell}(\rho) = E_{\ell} \phi_{\ell}(\rho). \quad (4.41)$$

其中 $\ell = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 表示重原子 $A_{1,2}$ 在 x 轴向相对运动的角动量量子数。其中波函数 $\phi_{\ell}(\rho)$ 的 s 分量, 即 $\ell = 0$ 时的方程是重原子 $A_{1,2}$ 的基态波函数, 相应的能量也是系统的基态能。

类似于1D-1D-3D系统中的分析, 重原子 $A_{1,2}$ 的径向运动方程可以通过数值方法求解。对于 $\ell = 0$ 的 s 波方程, 我们在图(4.8)中画出了约化质量 $m_* = 3.33$ 和 9.5 情况下基态束缚能 E_0 随散射长度 $1/a_1, 1/a_2$ 变化的情况。我们同样发现在 $a_1 \sim a_2$ 区域, 束缚能显著地增加。当两题散射长度在 $a_1 \sim a_2 \sim 1$, 也就是两个二维平面之间的距离 L 时, 束缚能达到最大值。另外, 系统的束缚能也随着重原子 $A_{1,2}$ 之间约化质量 m_* 的增大而增大, 最后在 $m_* = \infty$ 时趋于渐进解。

最后, 在图(4.9)中我们比较了 $m_* = 3.33$ 和 $a_1 = a_2 = a$ 条件下, Born-Oppenheimer近似得到的结果和严格求解三体Schrödinger方程得到结果 [37], 发现在远离渐进值的区域, Born-Oppenheimer近似依然能得到比较可信的结果。

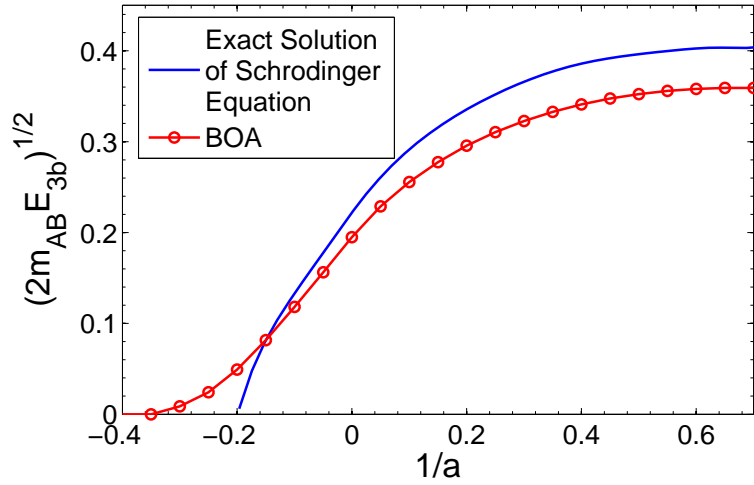


图 4.9: 2D-2D-3D系统中三体束缚态的基态束缚能在 $m_* = 3.33$ 和 $a_1 = a_2 = a$ 情况下的结果。通过比较Born-Oppenheimer近似同文献 [37] 中严格解的结果，发现在束缚能远离渐进值时，BOA仍然给出相当可信的结果。

4.4 1D-1D-1D-3D系统中的四体稳定束缚态

在前几节中，我们讨论了具有三个原子的混合维度体系，其中两个较重原子 A_1, A_2 被束缚在两个相互平行的一维管内或者两个相互平行的二维平面内，同时较轻的第三个原子 B 可以在三维空间中自由运动。由于两个平行一维管或者二维面之间的距离 L （同时也是两个重原子之间可能达到的最小距离）远远大于原子之间相互作用势特征长度 r_0 ，我们可以忽略两个重原子之间直接的相互作用。同时，轻原子 B 和重原子 $A_{1,2}$ 之间的相互作用用混合维度下的散射长度 $a_{1,2}$ 来刻画，而这个相互作用可以用Bethe-Peierls边界条件来等效代替。在原子 $A_{1,2}$ 的质量 $m_{1,2}$ 远大于原子 B 的质量 m_B （即在自然单位制 $\hbar = m_B = L = 1$ 下满足 $m_{1,2} \gg 1$ ）时，可以用Born-Oppenheimer近似将总的波函数分为轻原子 B 的运动方程和重原子 $A_{1,2}$ 的运动方程两部分，假定原子 $A_{1,2}$ 的运动足够缓慢，这样当原子 $A_{1,2}$ 处在任何一个运动位置时，原子 B 的状态都认为是处在瞬时的基态上。这样，就可以通过先固定 $A_{1,2}$ 的坐标来求解原子 B 的运动方程，得到原子 B 基态波函数关于 $A_{1,2}$ 位置的基态能量，而这个基态能量就作为一个与 $A_{1,2}$ 位置相关的有效相互作用势进入到原子 $A_{1,2}$ 的运动方程里。最后通过求解这个运动方程，就可以得到体系（1D-1D-3D以及2D-2D-3D）的基态束缚能量以及波函数。值得注意的是，束缚能量的最大值并非出现在散射长度 $a_{1,2} = \infty$ 的情况，而是在 $a_{1,2} \approx 1$ 附近。这说明当两体散射长度接近于两个

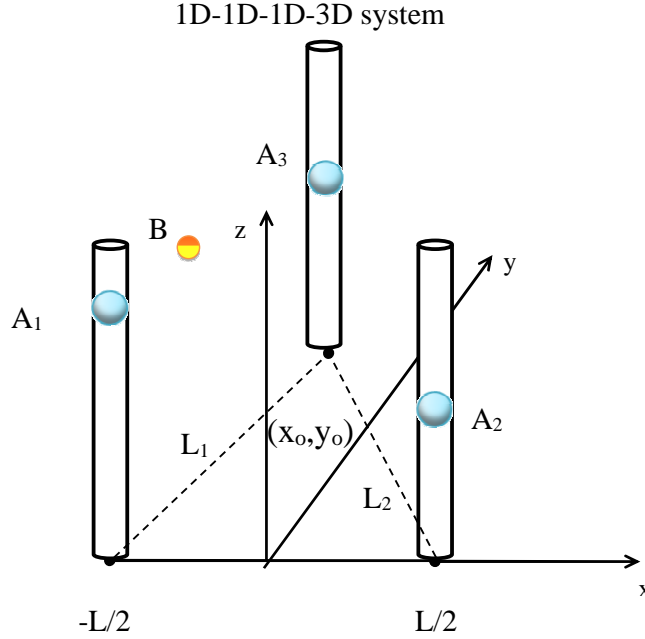


图 4.10: 四体1D-1D-1D-3D混合维度体系，其中三个重原子 $A_{1,2,3}$ 被约束在一维管，轻原子 B 在三维空间中自由运动。

平行一维管或者二维面之间的距离 L 时，系统中的基态束缚能被大大的增强。通过在 $a_1 = a_2 = a$ 情况下与严格求解三体Schrödinger方程得到的结果对比，我们发现在很大的散射长度范围和相对比较小的质量比下（即使在 $m_{1,2} \approx 6$ 的情况），BOA方法都可以得到比较满意的结果。另外通过前面对混合维度下Borm-Oppenheimer近似的一般性计算，说明这个方法可以直接推广到3个以上原子的混合维度系统中，并且给出比较可信的少体束缚态能量结果。

在这里，如图(4.4)所示，我们考虑体系中具有4个原子的1D-1D-1D-3D系统，其中有3个较重的原子 A_1, A_2, A_3 被束缚在三个相互平行的沿 z 方向的一维管中，较轻的第四个原子 B 在可以三维空间中自由运动。在体系中，令一维管沿 z 方向，它们与 $x - y$ 平面的交点分别在 $(L/2, 0), (-L/2, 0), (x_0, y_0)$ ，在 $x - y$ 平面上构成一个三角形。这样，原子 A_1, A_2, A_3 的空间位置将只依赖于它们的 z 方向坐标 z_1, z_2, z_3 。系统的状态可以用波函数 $\Psi(\vec{r}_B; z_1, z_2, z_3)$ 描述，其中 $\vec{r}_B = (x_B, y_B, z_B)$ 是 B 原子在三维空间中的坐标。

由于三个一维管与 $x - y$ 平面的三个交点所构成的三角形可以有多种形式。在这里我们定义三角形中最短的边长为 L ，而且 L 远远大于原子之间相互作用势特征长度 r_0 。同三原子体系中情况类似，我们假定三个一维管之间的距离 L 远

远大于原子之间相互作用势特征长度 r_0 ，这样可以忽略三个重原子之间的相互作用，而只考虑它们和轻原子 B 之间的作用。我们采取自然单位制

$$\hbar = m_B = L = 1$$

体系的总Hamiltonian可以表示为：

$$H_{1113} = -\frac{1}{2}\nabla_B^2 - \frac{1}{2m_1}\frac{\partial^2}{\partial z_1^2} - \frac{1}{2m_2}\frac{\partial^2}{\partial z_2^2} - \frac{1}{2m_3}\frac{\partial^2}{\partial z_3^2} + V_{1B} + V_{2B} + V_{3B}. \quad (4.42)$$

其中 $m_{1,2,3}$ 代表原子 $A_{1,2,3}$ 在自然单位制下的质量， V_{iB} 为轻原子 B 与重原子 A_i 直接的散射相互作用。

当重原子 $A_{1,2,3}$ 的质量远远大于轻原子 B 的质量时，我们可以利用Born-Oppenheimer近似来处理这个体系。假定重原子 $A_{1,2,3}$ 运动地足够缓慢，在 $A_{1,2,3}$ 处于任何位置上， B 原子都被认为处在它的基态。随着 A_1, A_2, A_3 的运动， B 原子的状态也随之相应改变，但保持在每一个时刻都处于基态上。这样， B 原子的瞬时基态能量就成为一个随着 A_1, A_2, A_3 运动而变化的量，这个量会作为 A_1, A_2, A_3 之间的等效相互作用势而进入到 A 原子的运动方程中。我们可以将系统波函数写为

$$\Psi(\vec{r}_B; z_1, z_2, z_3) = \phi(z_1, z_2, z_3)\psi(\vec{r}_B, z_1, z_2, z_3), \quad (4.43)$$

其中 $\psi(\vec{r}_B, z_1, z_2, z_3)$ 为轻原子 B 在确定的 z_1, z_2, z_3 下的瞬时本征态波函数，将轻原子 B 与重原子 $A_{1,2,3}$ 之间的相互作用用Bethe-Peierls边界条件来代替后， $\psi(\vec{r}_B, z_1, z_2, z_3)$ 满足如下的Schrödinger方程

$$-\frac{1}{2}\nabla_B^2\psi(\vec{r}_B, z_1, z_2, z_3) = V_{\text{eff}}(z_1, z_2, z_3)\psi(\vec{r}_B, z_1, z_2, z_3), \quad (4.44)$$

和边界条件

$$\psi(r_{1B} \rightarrow 0) \propto \left(1 - \frac{a_1}{r_{1B}}\right) + \mathcal{O}(r_{1B}); \quad (4.45)$$

$$\psi(r_{2B} \rightarrow 0) \propto \left(1 - \frac{a_2}{r_{2B}}\right) + \mathcal{O}(r_{2B}); \quad (4.46)$$

$$\psi(r_{3B} \rightarrow 0) \propto \left(1 - \frac{a_3}{r_{3B}}\right) + \mathcal{O}(r_{3B}). \quad (4.47)$$

其中 $r_{1B, 2B, 3B}$ 和 $a_{1,2,3}$ 分别代表重原子 $A_{1,2,3}$ 和轻原子 B 之间的相对距离以及混合维度下的散射长度。

在这里我们只关心系统中的束缚态，通过求解 $\psi(\vec{r}_B, z_1, z_2, z_3)$ 的束缚态结果，可以得到在某一个确定的 z_1, z_2, z_3 情况下，相对应的 B 原子基态束缚能 $V_{\text{eff}}(z_1, z_2, z_3)$ 。在BOA近似下，这个束缚能 $V_{\text{eff}}(z_1, z_2, z_3)$ 充当了三个重原子 A_1, A_2, A_3 之间的有效相互作用势。

对 $\psi(\vec{r}_B, z_1, z_2, z_3)$ 的Schrödinger方程(4.44)直接求解，我们得到 B 原子的本征波函数以及本征能量 $V_{\text{eff}}(z_1, z_2, z_3)$

$$\psi(\vec{r}_B, z_1, z_2, z_3) = \frac{e^{-\kappa r_{1B}}}{r_{1B}} + c_2 \frac{e^{-\kappa r_{2B}}}{r_{2B}} + c_3 \frac{e^{-\kappa r_{3B}}}{r_{3B}} \quad (4.48)$$

$$V_{\text{eff}}(z_1, z_2, z_3) = -\frac{\kappa^2}{2}, \quad (4.49)$$

其中 κ 是 z_1, z_2, z_3 以及 a_1, a_2, a_3 的一个函数。

将波函数带入到Bethe-Peierls边界条件(4.45,4.46,4.47)中，可以得到 κ 满足的方程组

$$\begin{aligned} \kappa - c_2 \frac{e^{-\kappa r_{12}}}{r_{12}} - c_3 \frac{e^{-\kappa r_{13}}}{r_{13}} &= \frac{1}{a_1}; \\ -\frac{e^{-\kappa r_{12}}}{r_{12}} + c_2 \kappa - c_3 \frac{e^{-\kappa r_{23}}}{r_{23}} &= \frac{c_2}{a_2}; \\ -\frac{e^{-\kappa r_{13}}}{r_{13}} - c_2 \frac{e^{-\kappa r_{23}}}{r_{23}} + c_3 \kappa &= \frac{c_3}{a_3}. \end{aligned} \quad (4.50)$$

其中 $r_{ij} = \sqrt{1 + (z_i - z_j)^2}$ 为原子 A_i 和 A_j 之间的距离。

由于我们只讨论系统中的基态束缚态，所以只需要计算 $\psi(\vec{r}_B, z_1, z_2, z_3)$ 最低的束缚态波函数已经相应的束缚能。通过数值求解的方法可以得到 κ 的值，进而得到 B 原子基态束缚能 $V_{\text{eff}}(z_1, z_2, z_3)$ ，这也是三个重原子 $A_{1,2,3}$ 之间的有效相互作用势。最后通过求解重原子 $A_{1,2,3}$ 所满足的Schrödinger方程

$$\left[-\sum_{i=1,2,3} \frac{1}{2m_i} \frac{\partial^2}{\partial z_i^2} + V_{\text{eff}}(z_1, z_2, z_3) \right] \phi(z_1, z_2, z_3) = E \phi(z_1, z_2, z_3), \quad (4.51)$$

可以得到系统的总能量 E 。

在后面的讨论中，我们只考虑系统中 $m_1 = m_2 = m_3 = m$ 和 $a_1 = a_2 = a_3 = a$ 的特殊情况。这也是在实验上最有意义和最关心的，因为将不同原子束缚在不同维度的SSDP方法和原子的种类已经内态有关。而被约束在一维管子中的重原子 $A_{1,2,3}$ 一般都是同种原子的相同量子态，因此它们具有相同的质量以及同 B 原子的散射长度。由于系统沿 z 轴方向具有平移不变性，我们从新定义系统

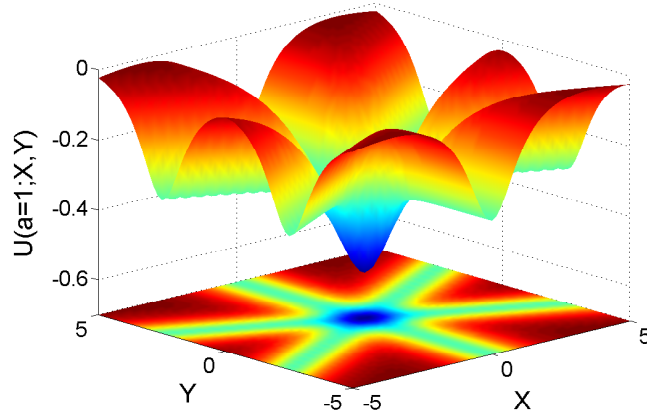


图 4.11: 1D-1D-1D-3D系统中正三角结构约束下有效相互作用势规则部分 $U(a = 1; X, Y)$ 在 $a_1 = a_2 = a_3 = a = 1$ 时的值。

的坐标

$$\begin{aligned} X &= z_1 - z_2, \\ Y &= z_3 - \frac{z_1 + z_2}{2}, \end{aligned} \quad (4.52)$$

原子 A_i 和 A_j 之间的距离分别为

$$r_{12} = \sqrt{X^2 + 1}; \quad r_{13} = \sqrt{(Y - X/2)^2 + 1}; \quad r_{23} = \sqrt{(Y + X/2)^2 + 1}.$$

这样， κ 的值只依赖于散射长度 a 以及坐标 X, Y ，进而得到新坐标下的有效相互作用势

$$V_{\text{eff}}(X, Y) = U(a; X, Y) - \frac{1}{2a^2}, \quad (4.53)$$

其中 $U(a; X, Y)$ 为有效相互作用势的规范部分。

首先我们考虑当三个一维管两两之间距离相等的情况，它们与 $x - y$ 平面相交于 $(L/2, 0), (-L/2, 0), (0, \sqrt{3}L/2)$ 处，构成一个边长为 L 的等边三角形。在图(4.11)中我们画出了在散射长度 $a = 1$ 情况下，这种结构的系统中有效相互作用势的规则部分 $U(a = 1; X, Y)$ 。我们发现 $U(a = 1; X, Y)$ 在全空间最小值出现在 $(X = 0, Y = 0)$ 或者 $z_1 = z_2 = z_3$ ，也就是三个重原子 $A_{1,2,3}$ 全都处在彼此之间可能距离的最低值。这时三个重原子构成一个平行于 $x - y$ 平面的一个边长为 $L = 1$ 的等边三角形。同时 $U(a = 1; X, Y)$ 也出现三条比较低的“谷”，这代表着三个重原子中的两个($A_{1,2}$)在空间中的距离为最小值 $L = 1$ 的情况。此时，轻原子 B 也可以在体系中诱导出一个较强的有效相互作用。

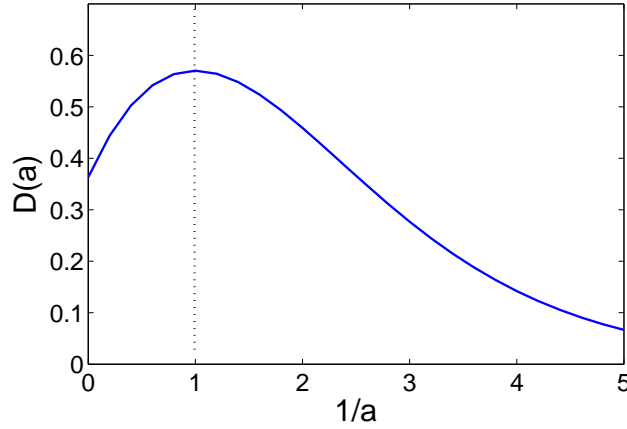


图 4.12: 1D-1D-1D-3D系统中有效相互作用势规范部分 $U(a; X, Y)$ 的深度 $D(a)$ 。散射长度取 $a_1 = a_2 = a_3 = a$ ，并且在 $a = 1$ 处 $D(a)$ 达到最大值。

在散射长度 $a \neq 1$ 的情况下， $U(a; X, Y)$ 在 X, Y 空间具有类似的形式，而且也在 $(X = 0, Y = 0)$ 处达到最低值。我们用 $D(a) = -U(a; 0, 0)$ 来表示有效相互作用势的强度。在图(4.12)中我们画出了 $a > 0$ 情况下 $D(a)$ 关于 $1/a$ 的函数。可以看到，同前面讨论过的1D-1D-3D以及2D-2D-3D体系类似，在 $a_1 = a_2 = 1$ 时 $D(a)$ 取的最大值。这说明有效相互作用势最强的地方出现在 $a = 1$ 附近而非在 $a = \infty$ ，也就是当散射长度等于三个一维管两两之间的距离 L 时，系统的诱导有效相互作用势也会被增强。

另外，通过对比图(4.12)和图(4.3)中1D-1D-3D系统的情况，我们发现1D-1D-1D-3D系统的相互作用势要强的多。这说明在这个体系中，由于轻原子 B 可以和三个重原子 $A_{1,2,3}$ 同时发生作用，诱导的有效相互作用势得到叠加而增强。

知道了重原子 A_1, A_2, A_3 之间的有效相互作用势 $V_{\text{eff}}(X, Y)$ 的具体形式，将它代入到重原子的所满足的Schrödinger方程 (4.51) 中，即可得到体系的基态能量以及重原子的基态波函数 ϕ 。

在坐标变换(4.52)下，

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z_1} &= \frac{\partial}{\partial X} + \frac{m_1}{M} \frac{\partial}{\partial C} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \frac{\partial}{\partial Y}; \\ \frac{\partial}{\partial z_2} &= \frac{-\partial}{\partial X} + \frac{m_2}{M} \frac{\partial}{\partial C} - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \frac{\partial}{\partial Y}; \\ \frac{\partial}{\partial z_3} &= \frac{\partial}{\partial Y} + \frac{m_3}{M} \frac{\partial}{\partial C}. \end{aligned}$$

我们得到:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{m_1} \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} &= \frac{1}{m_1} \frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{m_1}{M^2} \frac{\partial^2}{\partial C^2} + \frac{m_1}{(m_1 + m_2)^2} \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \\
 &\quad + \frac{2}{M} \frac{\partial^2}{\partial X \partial C} - \frac{2}{(m_1 + m_2)} \frac{\partial^2}{\partial X \partial Y} - \frac{2m_1}{M(m_1 + m_2)} \frac{\partial^2}{\partial C \partial Y}; \\
 \frac{1}{m_2} \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} &= \frac{1}{m_2} \frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{m_2}{M^2} \frac{\partial^2}{\partial C^2} + \frac{m_2}{(m_1 + m_2)^2} \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \\
 &\quad - \frac{2}{M} \frac{\partial^2}{\partial X \partial C} + \frac{2}{(m_1 + m_2)} \frac{\partial^2}{\partial X \partial Y} - \frac{2m_2}{M(m_1 + m_2)} \frac{\partial^2}{\partial C \partial Y}; \\
 \frac{1}{m_3} \frac{\partial^2}{\partial z_3^2} &= \frac{1}{m_3} \frac{\partial^2}{\partial Y^2} + \frac{m_3}{M^2} \frac{\partial^2}{\partial C^2} \\
 &\quad + \frac{2}{M} \frac{\partial^2}{\partial C \partial Y}.
 \end{aligned}$$

其中 $M = m_1 + m_2 + m_3$, $C = (m_1 z_1 + m_2 z_2 + m_3 z_3)/M$ 为三个重原子的质心坐标。

考虑 $m_1 = m_2 = m_3 = m$ 的情况, Hamiltonian 的动能项变为

$$-\sum_{i=1}^3 \frac{1}{2m_i} \frac{\partial^2}{\partial z_i^2} = -\frac{1}{m} \frac{\partial^2}{\partial X^2} - \frac{1}{6m} \frac{\partial^2}{\partial C^2} - \frac{3}{4m} \frac{\partial^2}{\partial Y^2}. \quad (4.54)$$

去掉原子 $A_{1,2,3}$ 质心运动, 重原子的运动方程(4.51)可表示为

$$\left[-\frac{1}{m} \frac{\partial^2}{\partial X^2} - \frac{3}{4m} \frac{\partial^2}{\partial Y^2} + V_{\text{eff}}(X, Y) \right] \phi(X, Y) = E \phi(X, Y). \quad (4.55)$$

通过数值计算, 我们得到了体系的基态束缚态以及能量。类似于前面的定义, 系统的四体束缚能被定义为本征能量 E 和有效相互作用势渐进值之间的能量差

$$E_{4b} = V_{\text{eff}}(\infty, \infty) - E. \quad (4.56)$$

通过图(4.13)我们画出了1D-1D-1D-3D系统中四体束缚能和散射长度 a 之间的关系。同三原子系统中类似, 束缚能最大的地方出现在散射长度趋近于一维管子约束之间的距离, 即 $a = 1$ 附近。这个结果进一步论证了在 $a \sim L$ 区域, 系统中重原子之间的有效相互作用被大大地增强。

最后, 在图(4.14)中, 我们画出重原子 A_1, A_2, A_3 的波函数在 X, Y 坐标下的图形 (在 $a = 1$ 情况下)。

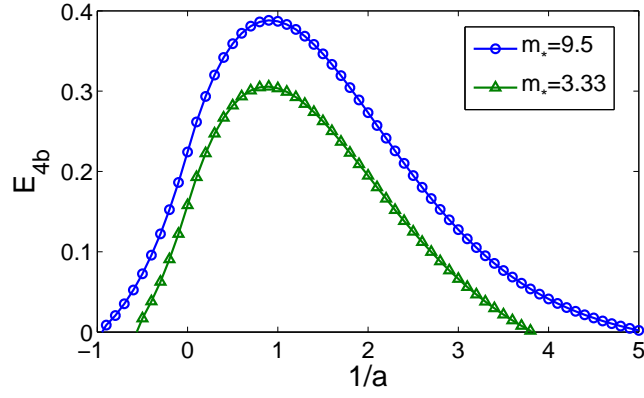


图 4.13: 1D-1D-1D-3D体系中, 不同A原子质量 m 情况下, 四体束缚能随 $1/a$ 的变化。

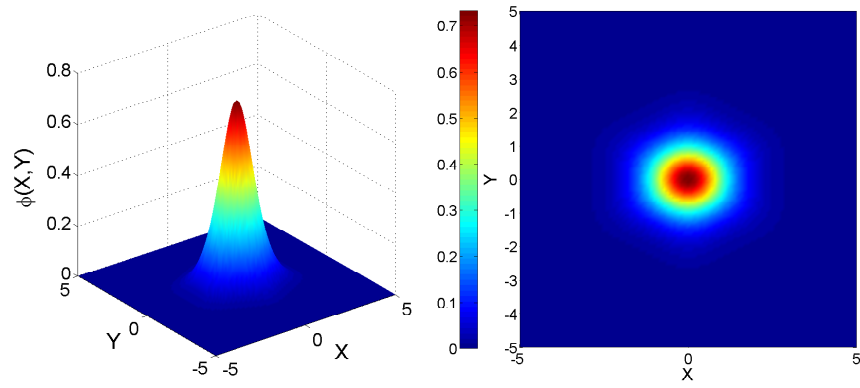


图 4.14: 1D-1D-1D-3D系统中重原子 $A_{1,2,3}$ 的波函数 $\phi(X, Y)$ 在 $a = 1$ 时的解。

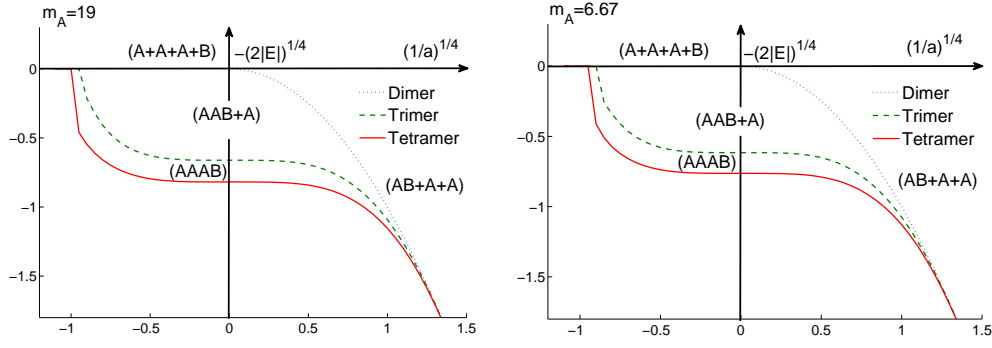


图 4.15: 1D-1D-1D-3D系统中四体和三体束缚态基态能量示意图

需要注意的是，不论是1D-1D-3D三体系统还是1D-1D-1D-3D四体系统，都可能存在不止一个多体束缚态。对于1D-1D-3D系统，系统中可能出现多个束缚能接近零的三体束缚态的激发态。而对于1D-1D-1D-3D系统，当四体束缚态的束缚能小于三体基态束缚态的束缚能时，系统中会有两个重原子A和轻原子B形成一个三体束缚态，不会形成束缚能接近零的四体束缚态激发态。在图(4.15)中我们画出了系统中四体束缚态基态和三体束缚态基态的能量示意图，在 $E > 0$ 区域，系统中只存在散射态。三体束缚态和四体束缚态在散射长度 $|a| > 1$ 附近区域出现，在 $a < 0$ 区域系统中不会形成两体束缚态，而会形成三体或者四体束缚态。随着能量的升高，四体束缚态会演变为三体束缚态。在 $a > 0$ 区域，随着能量的升高和散射长度的减小，三体束缚态和四体束缚态都会过渡到两体束缚态。

目前为止，我们只考虑了1D-1D-1D-3D系统中比较特殊的一种结构，即三个 z 方向的一维管约束两两之间距离相等，从而在 $x-y$ 平面形成一个等边三角形。当两题散射长度 a 和这个三角形的边长 L 接近时，四体束缚能量会达到最大值。我们猜测这种结构的1D-1D-1D-3D系统会支持一个最大的四体束缚能量，因为这个结构具有最高的对称性，散射长度可以同时和三个一维管约束之间的距离相匹配。为了验证这个猜测，我们考虑了比较一般的结构，三个一维管约束之间的距离分别为 L, L_1, L_2 ，这样它们在 $x-y$ 平面上会形成一个非等边的三角形。我们始终取三个距离之间最短的为自然单位长度，即 $L = 1, L_1 > 1, L_2 > 1$ 。在图 4.16 中我们展示了散射长度 $a = 1$ 时，不同的 L_1, L_2 情况下系统的有效相互作用势的深度。由前面的分析可知，系统中四体束缚能的大小是随着有效相互作用势的深度而变化的，在相互作用势最强

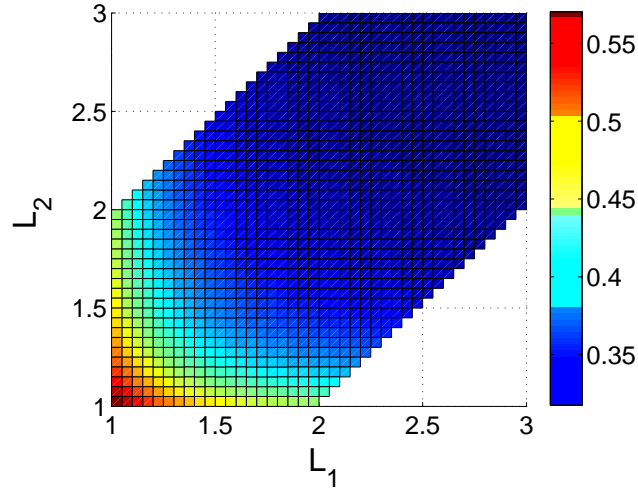


图 4.16: 1D-1D-1D-3D系统中有效相互作用势在不同构型下的深度

的地方，束缚能也相应地最强。很明显在 $L_1 = L_2 = L$ 时，也就是前面讨论的三个一维管约束两两之间距离相等的情况下，系统具有最大的束缚能，这也是1D-1D-1D-3D系统中具有最高对称性的构型。

第5章 总结

我们研究了混合维度下的超冷原子体系，即两个或三个重原子分别束缚在相互独立的低维空间，同时有一个轻原子在三维空间中自由运动。在这个体系中，由于重原子分别在相互独立的低维空间，它们之间是永远不可能彼此靠近的，只有通过轻原子运动导致的一个有效相互作用势联系起来。由于这种结构特性，在这个体系中只有两体相互作用，从而避免了三体复合效应以及其他多体现象，这就会导致产生很多和传统物理体系不同的性质。在本文中我们对这一类混合维度体系中存在的有效相互作用势的特性做了广泛和深入的研究，并且计算了体系中所存在的稳定束缚态的基态束缚能，并得到了一些比较有意义的结果。

首先我们推导了在Born-Oppenheimer近似框架下，混合维度下两体相互作用的Bethe-Peierls边界条件，并且定义了混合维度下散射长度 a 。接下来发展了Born-Oppenheimer近似处理混合维度中有多个重原子和一个轻原子的系统的一般性方法。在三体情况下，我们考虑了两个较重原子束缚在1维管子中（1D-1D-3D系统）或者2维平面中（2D-2D-3D系统），加上一个在三维空间中自由运动的较轻的原子。这个较轻的原子会在空间中被低维约束分离的两个较重原子中，诱导出一个有效相互作用。由于这个有效相互作用，两个较重的原子会彼此束缚而在一个较大的参数空间中形成一个三体束缚态。特别在 s 波散射长度为负的情况下，这时候系统中没有两体束缚态，但是却存在三体束缚态。

在混合维度下的三体束缚态由于空间结构的约束存在一些其他性质，当重原子和轻原子之间的两体散射长度和两个低维约束之间的距离接近时，两个重原子之间诱导的有效相互作用势变得最强。相应地，三体束缚态的基态束缚能达到最大值。在我们的研究中，Born-Oppenheimer近似可以给出一个非常清晰的物理图像，在这里三体束缚态的性质可以很好的被描述和研究。另外，我们将Born-Oppenheimer近似下的结果和通过对Schrödinger方程的精确求解所得的结果进行了对比，发现在很大的参数范围内，Born-Oppenheimer近似仍然能够给出相当可信的结果。

为了演示Born-Oppenheimer近似在一般少体问题中的优势，我们研究了四体的1D-1D-1D-3D系统，其中三个较重的原子分别被束缚在三个相互平行的一维管子中，较轻的第四个原子可以在空间中自由运动。在很大的散射长度范围，我们发现系统中都存在四体束缚态。并且当三个一维管约束在空间形成一个等边三角形，而散射长度和这个三角形的边长接近时，四体束缚态的基态束

缚能达到最大。

最后，这类混合维度体系不仅可以研究少体问题所涉及的领域，而且可以模拟某些多体物理中关注的物理模型，例如可以提供一种原子之间新的配对方式，三维空间中运动的轻原子可以在被低维约束住的重原子之间诱导出一个长程有效相互作用势。可以预见，随着实验技术和理论研究的不断发展和成熟，超冷原子物理中的混合维度体系将会成为一个具有重要研究价值的领域。

参考文献

- [1] H. Feshbach, Ann. Phys. **5**, 357 (1958).
- [2] S. Inouye, M. R. Andrews, J. Stenger, H.-J. Miesner, D. M. Stamper-Kurn, and W. Ketterle, Nature **392**, 151 (1998).
- [3] P. Courteille, R. S. Freeland, D. J. Heinzen, F. A. van Abeelen, and B. J. Verhaar, Phys. Rev. Lett. **81**, 69 (1998).
- [4] C. Chin, R. Grimm, P. Julienne, and E. Tiesinga, Rev. Mod. Phys. **82**, 1225 (2010).
- [5] F. Ferlaino and R. Grimm, Physics **3**, 9 (2010).
- [6] V. Efimov, Phys. Lett. B **33**, 563 (1970).
- [7] V. Efimov, Sov. J. Nuc. Phys. **12**, 589 (1971).
- [8] V. Efimov, JETP Lett. **16**, 34 (1972).
- [9] E. Braaten and H.-W. Hammer, Phys. Rep. **428**, 259 (2006).
- [10] S. Tölle, H.-W. Hammer, B.C. Metsch, Comptes Rendus Physique **12**, 59 (2011).
- [11] A. S. Jensen, K. Riisager, D.V. Fedorov, and E. Garrido, Rev. Mod. Phys. **76**, 215 (2004).
- [12] I. Mazumdar, A. R. P. Rau, and V. Bhasin, Phys. Rev. Lett. **97**, 062503 (2006).
- [13] T. K. Lim, S. K. Duffy, and W. C. Damer, Phys. Rev. Lett. **38**, 341 (1977).
- [14] R. Brühl, A. Kalinin, O. Kornilov, J.P. Toennies, G.C. Hegerfeldt, and M. Stoll, Phys. Rev. Lett. **95**, 063002 (2005).
- [15] I. Baccarelli, G. Delgado-Barrio, F. Gianturco, T. Gonzalez-Lezana, S. Miret-Artes, and P. Villarreal, Europhys. Lett. **50**, 567 (2000).
- [16] T. Kraemer, M. Mark, P. Waldburger, J. G. Danzl, C. Chin, B. Engeser, A. D. Lange, K. Pilch, A. Jaakkola, H.-C. Nägerl, and R. Grimm, Nature (London) **440**, 315 (2006).
- [17] S. Knoop, F. Ferlaino, M. Mark, M. Berninger, H. Schäbel, H.-C. Nägerl, and R. Grimm, Nature. Phys. **5**, 227 (2009).
- [18] M. Zaccanti, B. Deissler, C. D'Errico, M. Fattori, M. Jona-Lasinio, S. Müller, G. Roati, M. Inguscio, and G. Modugno, Nature Phys. **5**, 586 (2009).
- [19] R. D. Amado and J. V. Noble, Phys. Rev. D **5**, 1992 (1972).

- [20] A. C. Fonseca, E. F. Redish and P. E. Shanley, Nucl. Phys. A **320**, 273 (1979).
- [21] G. Barontini, C. Weber, F. Rabatti, J. Catani, G. Thalhammer, M. Inguscio, and F. Minardi, Phys. Rev. Lett. **103**, 043201 (2009).
- [22] D. S. Petrov, Phys. Rev. A **67**, 010703(R) (2003).
- [23] D. S. Petrov, C. Salomon, and G. V. Shlyapnikov, Phys. Rev. Lett. **93**, 090404 (2004); Phys. Rev. A **71**, 012708 (2005).
- [24] S. Endo, P. Naidon, and M. Ueda, Few-Body System **51**, 207 (2011).
- [25] T.B. Ottenstein, T. Lompe, M. Kohnen, A.N. Wenz, and S. Jochim, Phys. Rev. Lett. **101**, 203202 (2008).
- [26] J. H. Huckans, J. R. Williams, E. L. Hazlett, R. W. Stites, and K. M. O'ara, Phys. Rev. Lett. **102**, 165302 (2009).
- [27] J. R. Williams, E. L. Hazlett, J. H. Huckans, R. W. Stites, Y. Zhang, and K. M. O'ara, Phys. Rev. Lett. **103**, 130404 (2009).
- [28] E. Braaten, H.-W. Hammer, D. Kang, and L. Platter, Phys. Rev. Lett. **103**, 073202 (2009).
- [29] A. N. Wenz, T. Lompe, T. B. Ottenstein, F. Serwane, G. Zürn, and S. Jochim, Phys. Rev. A **80**, 040702(R) (2009).
- [30] S. Nakajima, M. Horikoshi, T. Mukaiyama, P. Naidon and M. Ueda, Phys. Rev. Lett. **105** 023201 (2010).
- [31] P. Naidon and M. Ueda, Comptes Rendus Physique **12**, 13 (2011).
- [32] S. Nakajima, M. Horikoshi, T. Mukaiyama, P. Naidon, and M. Ueda, Phys. Rev. Lett. **106**, 143201 (2011).
- [33] T. Lompe, T.B. Ottensetin, F. Serwane, K. Viering, A.N. Wenz, G. Zürn, and S. Jochim, Phys. Rev. Lett. **105**, 103201 (2010).
- [34] T. Lompe, T.B. Ottensetin, F. Serwane, A.N. Wenz, G. Zürn, and S. Jochim, Science **330**, 940 (2010).
- [35] Y. Nishida and S. Tan, Phys. Rev. Lett. **101**, 170401 (2008); Phys. Rev. A **79**, 060701 (2009); Phys. Rev. A **82**, 062713 (2010).
- [36] Y. Nishida, Phys. Rev. A **82**, 011605(R) (2010).
- [37] Y. Nishida and S. Tan, Few-Body Syst. **51**, 191 (2011).
- [38] R. Grimm, M. Weidemüller, and Y. B. Ovchinnikov, Adv. At. Mol. Opt. Phys. **42**, 95 (2000).

- [39] I. Bloch, J. Dalibard, and W. Zwerger, *Rev. Mod. Phys.* **80**, 885 (2008).
- [40] A. Görlitz, J. M. Vogels, A. E. Leanhardt, C. Raman, T. L. Gustavson, J. R. Abo-Shaeer, A. P. Chikkatur, S. Gupta, S. Inouye, T. Rosenband, and W. Ketterle, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 130402 (2001).
- [41] F. Schreck, L. Khaykovich, K. L. Corwin, G. Ferrari, T. Bourdel, J. Cubizolles, and C. Salomon, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 080403 (2001).
- [42] H. Moritz, T. Stöferle, K. Günter, M. Köhl, and T. Esslinger, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 210401 (2005).
- [43] L. Santos, M. A. Baranov, J. I. Cirac, H.-U. Everts, H. Fehrmann, and M. Lewenstein, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 030601 (2004).
- [44] M. Olshanii, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 938 (1998).
- [45] T. Bergeman, M. Moore, M. Olshanii, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 163201 (2003).
- [46] E. Haller, M. J. Mark, R. Hart, J. G. Danzl, L. Reichsöllner, V. Melezhik, P. Schmelcher, and H.-C. Nägerl, *Phys. Rev. Lett.* **104**, 153203 (2010).
- [47] D. Jaksch, C. Bruder, J. I. Cirac, C. W. Gardiner, and P. Zoller, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 3118 (1998).
- [48] M. P. A. Fisher, P. B. Weichman, G. Grinstein, D. S. Fisher, *Phys. Rev. B* **40**, 546 (1989).
- [49] M. Greiner, O. Mandel, T. Esslinger, T. W. Hänsch, and I. Bloch, *Nature* **415**, 39 (2002).
- [50] K. S. Novoselov, D. Jiang, F. Schedin, T. J. Booth, V. V. Khotkevich, S. V. Morozov, and A. K. Geim, *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.* **102**, 10451 (2005).
- [51] A. Bulgac, A. Wirzba, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 120404 (2001).
- [52] A. Recati, J. Fuchs, C. Peç̧a, and W. Zwerger, *Phys. Rev. A* **72**, 023616 (2005).
- [53] Y. Nishida, *Phys. Rev. A* **79**, 013629 (2010).
- [54] P. Massignan and Y. Castin, *Phys. Rev. A* **74**, 013616 (2006).
- [55] L. J. LeBlanc and J. H. Thywissen, *Phys. Rev. A* **75**, 053612 (2007).
- [56] J. Catani, G. Barontini, G. Lamporesi, F. Rabatti, G. Thalhammer, F. Minardi, S. Stringari, and M. Inguscio, *Phys. Rev. Lett.* **103**, 140401 (2009).
- [57] G. Lamporesi, J. Catani, G. Barontini, Y. Nishida, M. Inguscio, and F. Minardi, *Phys. Rev. Lett.* **104**, 153202 (2010).

- [58] M. Born and R. Oppenheimer, *Ann. Phys.* **84**, 457 (1927).
- [59] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Quantum Mechanics* (Pergamon, New York, 1980).
- [60] K. Huang and C. N. Yang, *Phys. Rev.* **105**, 767 (1957).
- [61] Y. N. Demkov and V. N. Ostrovskii. *Zero-Range Potentials and Their Applications in Atomic Physics* (Plenum Press, New York, 1988).
- [62] Y. Nishida, D. T. Son, and S. Tan, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 090405 (2008).
- [63] D. S. Petrov, G. E. Astrakharchik, D. J. Papoular, C. Salomon, and G. V. Shlyapnikov, *Phys. Rev. Lett.* **99**, 130407 (2007).
- [64] I. N. Levine, *Quantum Chemistry* (Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 2008).
- [65] C. A. Mead and D. G. Truhlar, *J. Chem. Phys.* **70**, 2284 (1979); C. A. Mead, *Phys. Rev. Lett.* **59**, 161 (1987).
- [66] C. P. Sun and M. L. Ge, *Phys. Rev. D* **41**, 1349 (1990).

发表论文

Tao Yin, Peng Zhang and Wei Zhang,
Stable Heteronuclear Few-atom Bound States in Mixed Dimensions,
Phys. Rev. A **84**, 052727 (2011).

致 谢

在此论文完成之际，首先要感谢我的导师张威副教授对我这几年的培养和支持。张老师深厚的数学功底，清晰的物理图像和敏锐的思维都给我留下了很深刻的印象。每次向张老师请教问题或参加组会，张老师都能从本质的物理图像切入，化繁为简，同时又能对工作中需要的各种物理和数学方法信手拈来，这一切都使我受益匪浅。尤其是张老师所教授的《超冷原子气体物理》课程，更让刚刚接触这个领域的我如获至宝。在此我向张威老师表达我由衷的感谢。

这篇文章中的工作能够顺利完成和发表，要特别感谢张芄教授的教导和帮助。在平时的讨论和交流中，张芄老师严谨的学术作风、深厚的理论功底，尤其是对学生循循善诱的指导，都让我在学习和科研中得到了很大的成长。特别感谢张老师在组会中和本学期为我们讲授的《量子光学》课程。在此我向张芄老师表达我诚挚的谢意。

感谢人民大学物理系给我提供良好的学习和生活环境。感谢同宁华老师，韩强老师，魏建华老师，刘玉良老师，李涛老师，卢忠毅老师在专业课程上对我的教导，这些课程将会是我知识体系中重要的基石。感谢班主任赵建芝老师在学习和生活中给予的关怀和帮助。感谢物理系的所有老师，谢谢老师们让我在物理系的三年中收获到了很多知识。

感谢Georgia理工学院Carlos教授对论文提出宝贵的意见，以及对我学习、科研上的鼓励和关心。

感谢课题组的张仁师兄，陈科技师弟，朱川洲师弟，王璟琨师弟，吴雁江师弟对我的帮助和关心；感谢胡智鑫，贺荣强，苏丹丹，李钰，王文超，张旦波，裴积全，韩康康等09级硕士班的所有同学；感谢高淼师兄，王庭师兄，吴俊鹏师兄，张安民师兄，余智明师兄等物理系的所有同学。谢谢你们在学习和生活上的陪伴，让我在物理系得到了很多快乐，

感谢所有关心和帮助过我的同学和朋友，在人民大学的三年给我留下了无数美好的回忆。

最后，将最真挚的爱和祝福献给我的父母。