深蓝学院
shenlanxueyuan.com

传感器数据处理I：

轮式里程计运动模型及标定

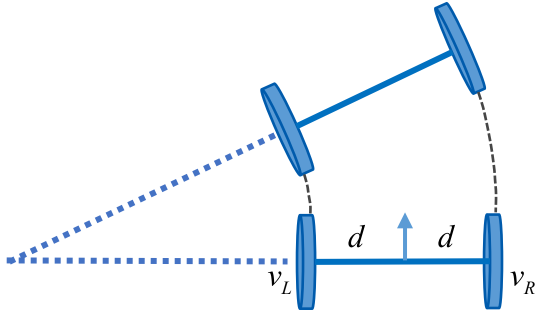
轮式里程计

轮式里程计是什么

轮式里程计：利用轮子转速来测量机器人行程的装置。

机器人领域通常使用光电编码器来测量轮子转速，轮子转动时光电编码器接收到脉冲信号，脉冲数乘以系数可以得知轮子转了多少圈。

两轮机器人，通过轮速不断的积分运算，可以得知机器人前进了多少，同时可以利用两轮速之差，算出机器人转了多少度，从而实现机器人的航迹推算定位。



资料：编码器工作原理 https://www.bilibili.com/video/BV1cv411z7ag

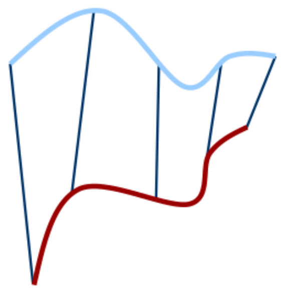
轮式里程计

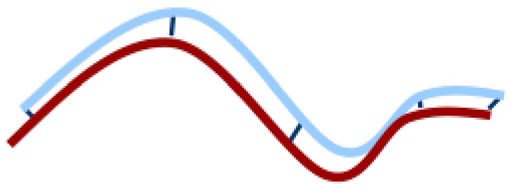
轮式里程计的作用

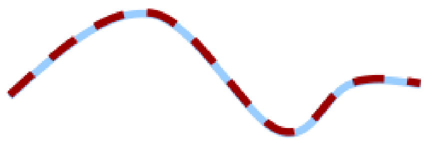
激光SLAM通过两个时刻的点云匹配得到这两个时刻的相对位姿。

轮式里程计的定位可以为激光SLAM提供两个时刻之间匹配的初值，初值准确的情况下可以提升激光SLAM的精度。此外，轮式里程计可以单独实现短距离航迹推算定位，激光SLAM也可以实现定位，两者融合可以加强定位的准确性和鲁棒性。

轮式里程计也可以解决一些激光难解决的问题，比如长走廊定位。







轮式里程计的标定

严格来说任何传感器都需要进行标定才能获得更准确的测量信息。

对于轮速计来说，需要标定哪些参数呢?

轮速计可以推算机器人前进了多少，同时可以利用两轮速之差，算出机器人转了多少度。这一前提是，已知车轮半径以及两轮间距。（本章第一部分的内容）

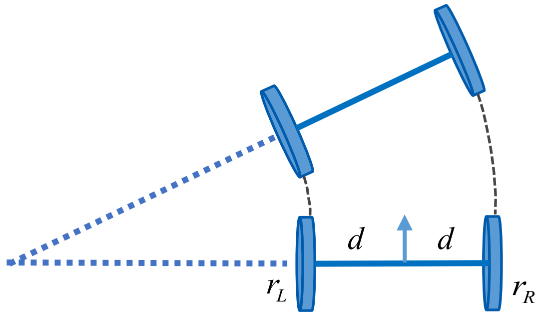
实际上，轮速计由于硬件变形，车轮半径以及两轮间距发生变化，或者脉冲信号到轮速转换系数不准等原因，尤其需要标定才能使用。

根据不同的传感器模型，比如激光雷达、相机、各种轮速计，实际过程中要根据各自的物理模型来进行标定。

在已知传感器物理模型时，需要采用基于模型的方法（白盒标定，精度高）；

在不知道传感器物理模型时，可尝试直接线性方法（黑盒标定，精度差）。

（本章第二部分的内容）



课程内容

轮式里程计模型

- 两轮差分底盘的运动学模型
- 航迹推算(Dead Reckoning)

轮式里程计标定

- 线性最小二乘的基本原理
- 线性最小二乘的直线拟合
- 线性最小二乘在里程计标定中的应用

课程内容

轮式里程计模型

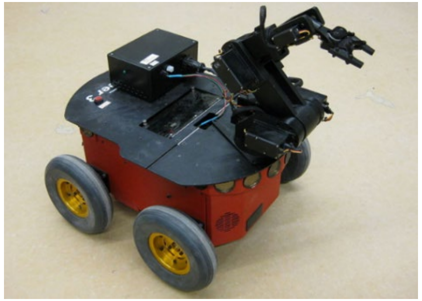
- 两轮差分底盘的运动学模型
- 航迹推算(Dead Reckoning)

轮式里程计标定

- 线性最小二乘的基本原理
- 线性最小二乘的直线拟合
- 线性最小二乘在里程计标定中的应用

两轮差速底盘的运动学模型

应用实例



优点

- 结构简单
- 便宜(2个电机)
- 模型简单

两轮差速底盘的运动学模型

运动解算

已知

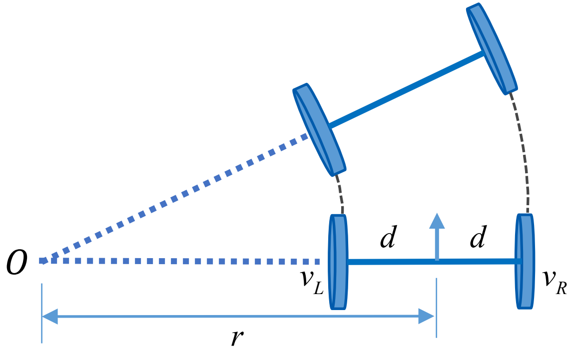
ω_R, ω_L： 两轮自转的角速度

v_R, v_L： 两轮的线速度

r_R, r_L： 两轮的半径

d： 轮子离底盘中心的距离

$D = 2d$： 两轮之间的距离



未知

v： 底盘中心的线速度

ω： 底盘中心的角速度

ω_r, ω_l： 两轮相对于车体旋转中心O转动的角速度

r： 底盘中心圆弧运动的半径

注：

直线运动可以看作圆周运动的特殊情况，即$r \to +\infty$。

直线运动时，$v_R = v_L$。

两轮差速底盘的运动学模型

运动解算——求解 r

已知

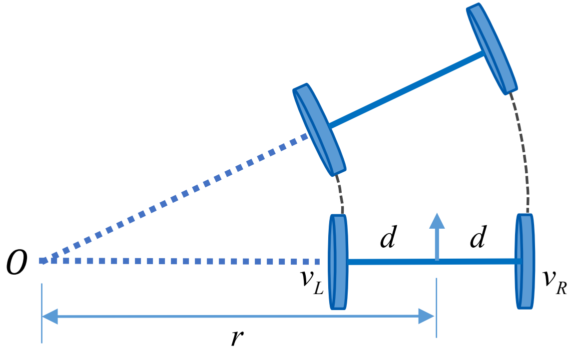
ω_R, ω_L： 两轮自转的角速度

v_R, v_L： 两轮的线速度

r_R, r_L： 两轮的半径

d： 轮子离底盘中心的距离

$D = 2d$： 两轮之间的距离



底盘中心相对于车体旋转中心O转动的角速度，与两轮相对于车体旋转中心O转动的角速度，是相等的。即，

$$\omega = \omega_l = \omega_r \Rightarrow \frac{v_L}{r-d} = \frac{v_R}{r+d} \Rightarrow v_L(r+d) = v_R(r-d)$$

进一步整理得：$(v_R - v_L)r = (v_R + v_L)d$

$$\Rightarrow r = \frac{(v_R + v_L)d}{(v_R - v_L)}$$

两轮差速底盘的运动学模型

运动解算——求解 ω

已知

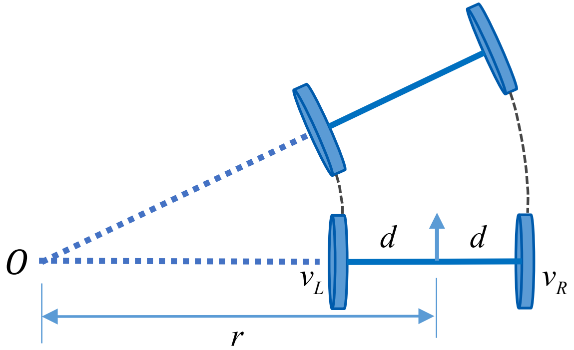
ω_R, ω_L： 两轮自转的角速度

v_R, v_L： 两轮的线速度

r_R, r_L： 两轮的半径

d： 轮子离底盘中心的距离

$D = 2d$： 两轮之间的距离



$$\left.\begin{aligned} \omega &= \frac{v_R}{r+d} \\ r+d &= \frac{(v_R+v_L)d}{(v_R-v_L)} + \frac{(v_R-v_L)d}{(v_R-v_L)} = \frac{2v_Rd}{(v_R-v_L)} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \omega = \frac{v_R-v_L}{2d}$$

思考：我们知道$\omega = \frac{v_R}{r+d}$成立，$\omega = \frac{v_L}{r-d}$也成立，试着$\omega = \frac{v_L}{r-d}$推导一下ω，是否与上述结论相同呢?

两轮差速底盘的运动学模型

运动解算

已知

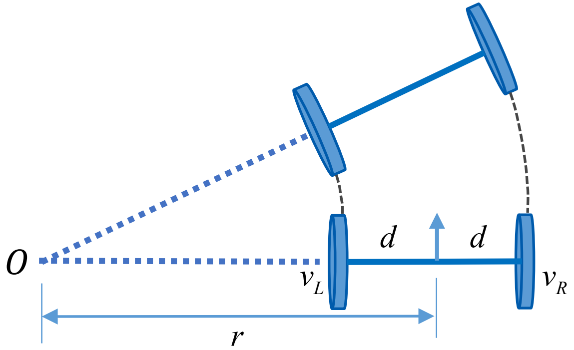
ω_R,ω_L： 两轮自转的角速度

v_R,v_L： 两轮的线速度

r_R,r_L： 两轮的半径

d： 轮子离底盘中心的距离

$D=2d$： 两轮之间的距离



已知 $\omega=\frac{v_R-v_L}{2d},r=\frac{(v_R+v_L)d}{(v_R-v_L)}$,

则 $v=\omega\times r=\frac{v_R-v_L}{2d}\frac{(v_R+v_L)d}{v_R-v_L}=\frac{v_R+v_L}{2}$。

$$v_R=w_R\cdot r_R \quad v_L=w_L\cdot r_L \Longrightarrow \begin{pmatrix} v \\ \omega \end{pmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{r_L}{2} & \frac{r_R}{2} \\ -\frac{r_L}{D} & \frac{r_R}{D} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \omega_L \\ \omega_R \end{pmatrix}=\mathbf{J}\begin{pmatrix} \omega_L \\ \omega_R \end{pmatrix}$$

里程计模型

轮式里程计模型

- 两轮差分底盘的运动学模型
- **航迹推算(Dead Reckoning)**

轮式里程计标定

- 线性最小二乘的基本原理
- 线性最小二乘的直线拟合
- 线性最小二乘在里程计标定中的应用

航迹推算

递推公式

(x',y',θ')：当前时刻位姿——世界坐标系

(x,y,θ)：上一时刻位姿——世界坐标系

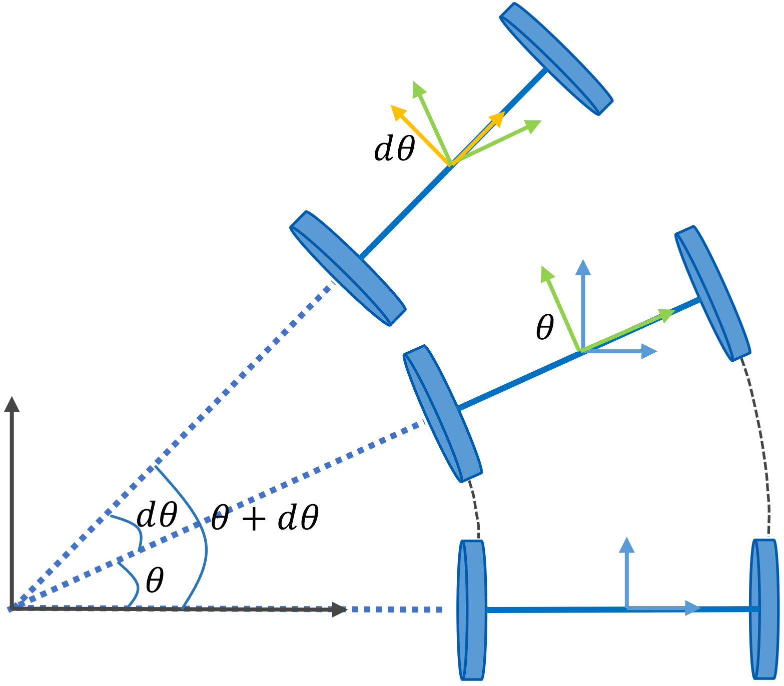
$(dx,dy,d\theta)$：运动增量——机器人坐标系

增量从机器人坐标系转换到世界坐标系：

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ \theta' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ d\theta \end{bmatrix}$$

加入噪声：

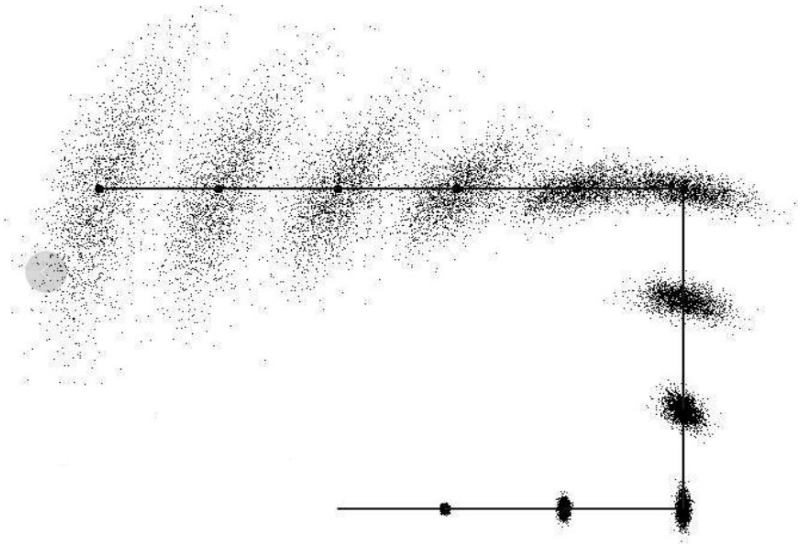
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ \theta' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx+\varepsilon_x \\ dy+\varepsilon_y \\ d\theta+\varepsilon_\theta \end{bmatrix}$$



航迹推算

里程计数据递推

- 里程计积分的累计误差无法消除
- 误差随着积分增大
- 时间趋于无穷时，位姿分布趋于均匀分布



课程内容

轮式里程计模型

- 两轮差分底盘的运动学模型
- 航迹推算(Dead Reckoning)

轮式里程计标定

- 线性最小二乘的基本原理
- 线性最小二乘的直线拟合
- 线性最小二乘在里程计标定中的应用

线性最小二乘

线性方程组

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$$

其中，$\boldsymbol{A}$为$m \times n$的矩阵，$\boldsymbol{x}$为$n \times 1$的向量；
m表示约束个数，n表示自变量个数。

- 当$m = n$时，适定方程组，方程组有唯一解
- 当$m < n$时，欠定方程组，方程组有无穷多解
- 当$m > n$时，超定方程组，方程组有通常无解

最小二乘解

- 绝大多数情况为m>n，超定方程组
- 多数约束自相矛盾，无解！
- 无解但是有最小二乘解
- 通解: $\boldsymbol{x}^* = (\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{b}$

线性最小二乘

最小二乘的求解—线性空间的角度

S表示$\boldsymbol{A}$的列向量张成的线性空间

$$\boldsymbol{Ax}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix}\cdot x_1+\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{bmatrix}\cdot x_2+\begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{bmatrix}\cdot x_3$$

- 无解：表示$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$对于任意的$\boldsymbol{x}$均不成立，即$\boldsymbol{b}$不在$S$中。
- 最小二乘解：线性空间S中，离$\boldsymbol{b}$最近的向量。

向量$\boldsymbol{b}$在线性空间S中的投影

线性最小二乘

最小二乘的求解—线性空间的角度

设：$\boldsymbol{Ax}^*$为向量$\boldsymbol{b}$在空间S中的投影，显然$(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{Ax}^*)$垂直于空间$S$。

则： $(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{Ax}^*)$跟矩阵$\boldsymbol{A}$的每一个列向量都垂直。

令$\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n]$， $\boldsymbol{a}_i$表示矩阵A的第i个列向量，

可得：$\boldsymbol{a}_i^T(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{Ax}^*)=0$

$$\Rightarrow \boldsymbol{A}^T(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{Ax}^*)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_1^T\\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n^T\end{pmatrix}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{Ax}^*)=\boldsymbol{0}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{b}=\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{Ax}^*$$

$$\Rightarrow \boxed{\boldsymbol{x}^*=(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{b}}$$

课程内容

轮式里程计模型

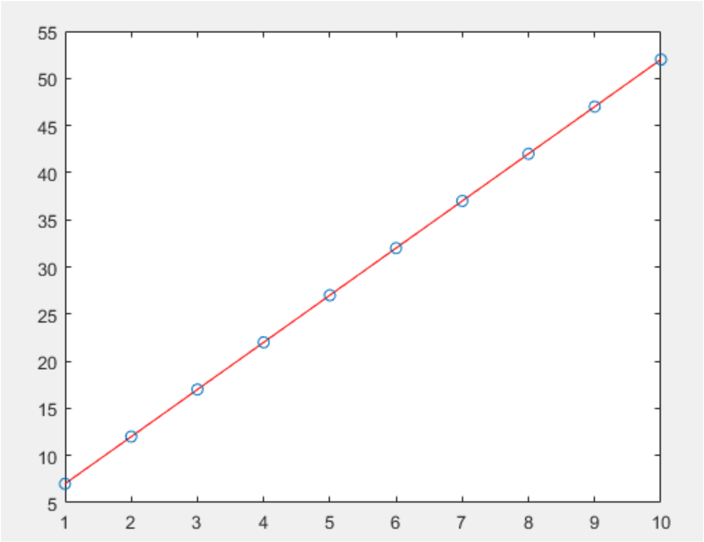
- 两轮差分底盘的运动学模型
- 航迹推算(Dead Reckoning)

轮式里程计标定

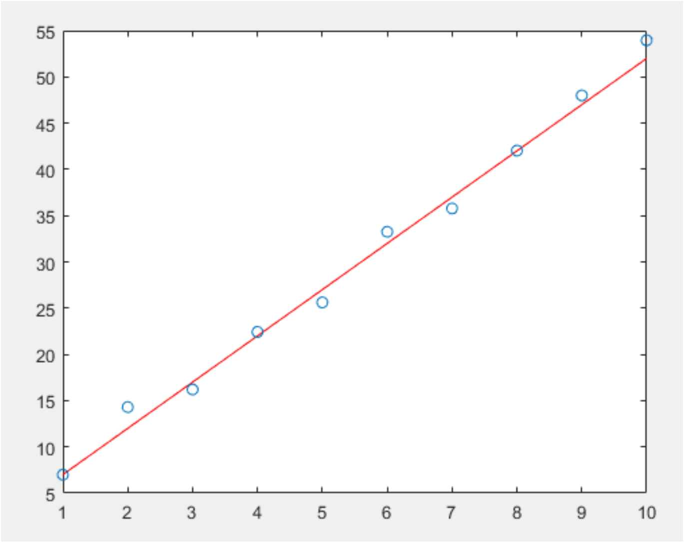
- 线性最小二乘的基本原理
- **线性最小二乘的直线拟合**
- 线性最小二乘在里程计标定中的应用

线性最小二乘

直线拟合



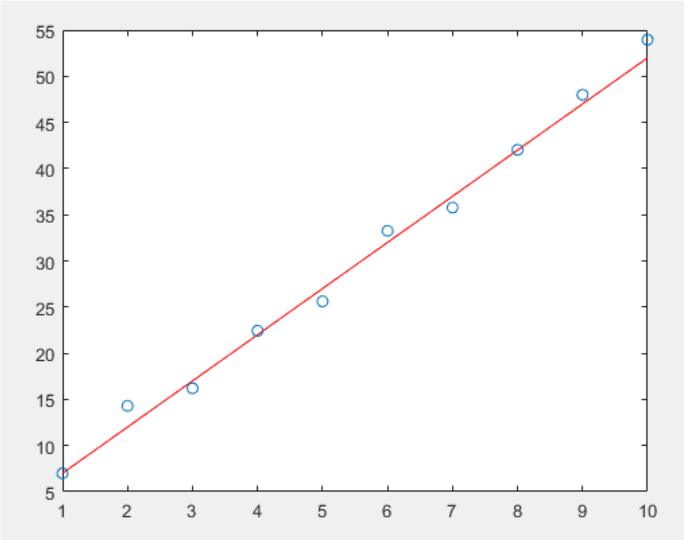
理想情况



混入采样噪声

线性最小二乘

直线拟合: $y = 5x + 2$



混入采样噪声

采样数据:

$x = (1,2,3,4,5,6,7,8,9,10)$

$y = (6.9918\,, 14.2987, 16.2019, 22.4263, 25.6191,$
$33.2563, 35.7755, 42.0298, 47.9954, 53.9545)$

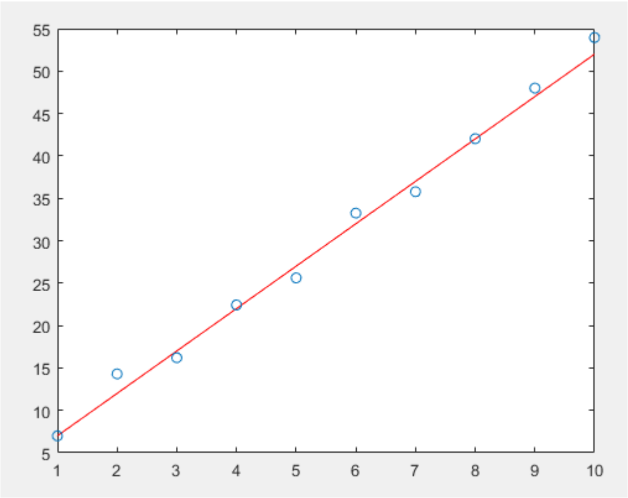
假设直线方程：$y = \mathrm{a}x + b$，带入数据可得

$$\begin{aligned} ax_1 + b &= y_1 \\ ax_2 + b &= y_2 \\ &\vdots \\ ax_n + b &= y_n \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

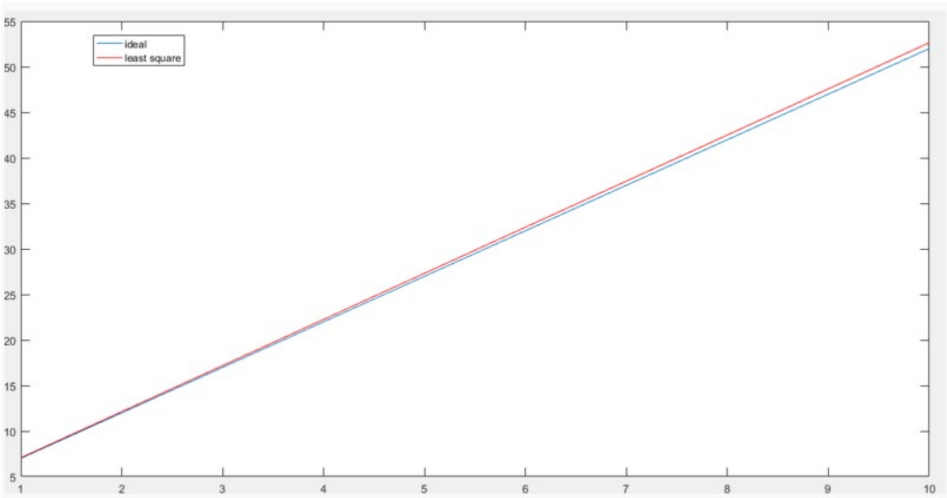
$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$$

线性最小二乘

直线拟合: $y = 5x + 2$



混入采样噪声



拟合对比

课程内容

轮式里程计模型

- 两轮差分底盘的运动学模型
- 航迹推算(Dead Reckoning)

轮式里程计标定

- 线性最小二乘的基本原理
- 线性最小二乘的直线拟合
- **线性最小二乘在里程计标定中的应用**

里程计标定

直接线性方法

- 通用性强
- 实现简单
- 精度不高

基于模型的方法

- 精度高
- 实现复杂
- 特异性高

根据不同的传感器模型，比如激光雷达、相机、各种轮速计，实际过程中要根据各自的物理模型来进行标定。以两轮差分底盘为例，需要计算其运动模型。

在已知传感器物理模型时，采用基于模型的方法（白盒标定）；

在不知道传感器物理模型时，可尝试直接线性方法（黑盒标定）。

里程计标定

直接线性方法

$\boldsymbol{u}_i^*$：激光雷达的scan-match数据作为真值

$\boldsymbol{u}_i$：里程计测量得到的数据

假设两者成线性关系$\boldsymbol{u}_i^* = \boldsymbol{X}\boldsymbol{u}_i$

其中：

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix}$$

对于第 i 组数据，可得：

$$u_{ix} * x_{11} + u_{iy} * x_{12} + u_{i\theta} * x_{13} = u_{ix}^*$$
$$u_{ix} * x_{21} + u_{iy} * x_{22} + u_{i\theta} * x_{23} = u_{iy}^*$$
$$u_{ix} * x_{31} + u_{iy} * x_{32} + u_{i\theta} * x_{33} = u_{i\theta}^*$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} u_{ix} & u_{iy} & u_{i\theta} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u_{ix} & u_{iy} & u_{i\theta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_{ix} & u_{iy} & u_{i\theta} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{A}_i} \underbrace{\begin{bmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{33} \end{bmatrix}}_{\vec{\boldsymbol{X}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} u_{ix}^* \\ u_{iy}^* \\ u_{i\theta}^* \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{b}_i}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{A}_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{A}_n \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{b}_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{b}_n \end{bmatrix} \quad \vec{\boldsymbol{X}} = (\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{b}$$

里程计标定

基于模型的方法

- 运动学模型

$$\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{r_L}{2} & \frac{r_R}{2} \\ -\frac{r_L}{D} & \frac{r_R}{D} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} w_L \\ w_R \end{pmatrix} = \mathbf{J} \begin{pmatrix} w_L \\ w_R \end{pmatrix}$$

$$\theta(t) = \int \omega(t) dt$$

$$x(t) = \int v(t) \cos(\theta(t)) dt$$

$$y(t) = \int v(t) \sin(\theta(t)) dt$$

标定的Δt时间内，假设匀速运动，则

$$\omega(t) = \omega = J_{21} w_L + J_{22} w_R$$

$$v(t) = v = J_{11} w_L + J_{12} w_R$$

其中 $J_{11} = \frac{r_L}{2}, J_{12} = \frac{r_R}{2}, J_{21} = -\frac{r_L}{D}, J_{22} = \frac{r_R}{D}$，那么

$$v(t) = -\frac{D}{2} J_{21} w_L + \frac{D}{2} J_{22} w_R$$

因此，已知两个轮子的角速度 w_L 和 w_R，需要求解两个轮子的半径 r_L 和 r_R，以及两轮之间的距离 D。

里程计标定

基于模型的方法

假设激光雷达位于车体的正中心，

S_x, S_y, S_θ: 激光雷达的匹配值，作为观测值

r_x, r_y, r_θ: 里程计的积分值，作为预测值

通过最小化预测值和观测值的差，即可得到里程计的待标定参数：
两个轮子的半径 r_L 和 r_R ，
两轮之间的距离D

已知 $\omega(t) = \omega = J_{21}w_L + J_{22}w_R$，

则角度积分表达式：

$$r_\theta(t) = \int \omega(t)dt = \int (J_{21}w_L + J_{22}w_R)dt$$

极短的ΔT时间内，假设匀速运动，则

$$r_\theta(t) = (J_{21}w_L + J_{22}w_R)\Delta T = (\Delta T w_L \ \Delta T w_R)\begin{pmatrix} J_{21} \\ J_{22} \end{pmatrix}$$

采集n组数据，得到线性方程组：

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \Delta T^{(0)}\omega_L^{(0)} & \cdots & \Delta T^{(0)}\omega_R^{(0)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta T^{(n)}\omega_L^{(n)} & \cdots & \Delta T^{(n)}\omega_R^{(n)} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} J_{21} \\ J_{22} \end{pmatrix}}_{\substack{\text{里程计预测值} \\ r_\theta}} = \underbrace{\begin{bmatrix} S_\theta^{(0)} \\ \vdots \\ S_\theta^{(n)} \end{bmatrix}}_{\substack{\text{激光雷达观测值} \\ S_\theta}}$$

里程计标定

$$v(t)=-\frac{D}{2}J_{21}w_L+\frac{D}{2}J_{22}w_R$$

基于模型的方法

$$\underbrace{\overset{\boldsymbol{A}}{\begin{bmatrix}\Delta T^{(0)}\omega_L^{(0)} & \cdots & \Delta T^{(0)}\omega_R^{(0)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta T^{(n)}\omega_L^{(n)} & \cdots & \Delta T^{(n)}\omega_R^{(n)}\end{bmatrix}}\overset{\boldsymbol{x}^*}{\begin{pmatrix}J_{21}\\J_{22}\end{pmatrix}}}_{\substack{\text{里程计预测值}\\ r_\theta}}=\underbrace{\overset{\boldsymbol{b}}{\begin{bmatrix}S_\theta^{(0)}\\ \vdots \\ S_\theta^{(n)}\end{bmatrix}}}_{\substack{\text{激光雷达观测值}\\ S_\theta}}$$

利用线性最小二乘的通解结论，求得：

$$\begin{pmatrix}J_{21}\\J_{22}\end{pmatrix}=(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{b}$$

(公式1)

在已知 J_{21} 和 J_{22} 的情况下，里程计的位置积分求解过程如下：

$$r_x(t)=\int v(t)\cos(r_\theta(t))dt$$

$$=\int\left(-\frac{D}{2}J_{21}w_L+\frac{D}{2}J_{22}w_R\right)\cos(r_\theta(t))dt$$

$$=D\left(-\frac{1}{2}J_{21}w_L+\frac{1}{2}J_{22}w_R\right)\int\cos(r_\theta(t))dt$$

$$r_y(t)=\int v(t)\sin(r_\theta(t))dt$$

$$=D\left(-\frac{1}{2}J_{21}w_L+\frac{1}{2}J_{22}w_R\right)\int sin(r_\theta(t))dt$$

里程计标定

基于模型的方法

$$r_x(t) = D\left(-\frac{1}{2}J_{21}w_L + \frac{1}{2}J_{22}w_R\right)\int \cos(r_\theta(t))dt = c_x \cdot D$$

$$r_y(t) = D\left(-\frac{1}{2}J_{21}w_L + \frac{1}{2}J_{22}w_R\right)\int sin(r_\theta(t))dt = c_y \cdot D$$

在已知 J_{21} 和 J_{22} 的情况下，里程计的位置积分和参数 D 呈线性关系。

由n组数据，得到线性方程组：

$$\begin{bmatrix} c_x^{(0)} \\ c_y^{(0)} \\ \vdots \\ c_x^{(n)} \\ c_y^{(n)} \end{bmatrix} D = \begin{bmatrix} S_x^{(0)} \\ S_y^{(0)} \\ \vdots \\ S_x^{(n)} \\ S_y^{(n)} \end{bmatrix} \Rightarrow \text{求得 } D \qquad \text{(公式2)}$$

里程计标定

基于模型的方法

已知参数J_{21}, J_{22}和 D，因此：

$$J_{21} = -\frac{r_L}{D} \qquad \Longrightarrow \qquad r_L = -J_{21} \cdot D$$

$$J_{22} = \frac{r_R}{D} \qquad \qquad \quad r_R = J_{22} \cdot D$$

（公式3）

至此，两轮半径 r_L, r_R 和轮间距 D 都已知，标定完毕。

里程计标定

基于模型的方法总结

收集n段数据，每段数据包含两个轮子的角速度 ω_L 和 ω_R，该段数据持续的时间Δt以及激光雷达的匹配值S_x, S_y, S_θ，

按照公式1，计算中间变量 J_{21} 和 J_{22}；

$$\begin{pmatrix} J_{21} \\ J_{22} \end{pmatrix} = (\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{b}$$

按照公式2，计算轮间距 D；

$$\begin{bmatrix} c_x^{(0)} \\ c_y^{(0)} \\ \vdots \\ c_x^{(n)} \\ c_y^{(n)} \end{bmatrix} D = \begin{bmatrix} S_x^{(0)} \\ S_y^{(0)} \\ \vdots \\ S_x^{(n)} \\ S_y^{(n)} \end{bmatrix}$$

按照公式3，计算两个轮子的半径 r_L, r_R 。

$$r_L = -J_{21} \cdot D$$

$$r_R = J_{22} \cdot D$$

参考资料

[1] Simultaneous calibration of odometry and sensor parameters for mobile Robots

作业

详细见说明文档

感谢聆听！

Thanks for Listening