

Напишете програма, която по зададени цели положителни числа  $x$ ,  $y$  и  $n$ , изчислява по ефективен начин  $x^y \bmod n$  (операцията  $^$  означава повдигане на степен, а не изключващо или - XOR).

Жокер: Няма как да сметнем  $x^y$  в реално време при  $y = 2147483647$ .

Тази задача е от теория на делимост на числата. Тук важат следните правила:

$$(a+b) \bmod n = ((a \bmod n) + (b \bmod n)) \bmod n$$

$$(a*b) \bmod n = ((a \bmod n) * (b \bmod n)) \bmod n$$

Също така ако имаме числата  $X$ ,  $K$  и  $N$ , така че  $N$  не дели  $X \wedge Q$ , и редицата  $E1(K) = (X^K) \bmod N$  то за дадено  $K = P \leq N/\text{НГОД}(N, X)$  ще получим остатък, както за  $E1(1) = X \bmod N$ , а след това стойностите ще се повтарят ротационно. Това е логично, тъй като повторения остатък ще умножаваме по едно и също число  $X \bmod N$  (тъй като  $E1(P+1) = X^{P+1} \bmod N = ((X^P) \bmod N)(X \bmod N) \bmod N = (((X^1) \bmod N)(X \bmod N)) \bmod N = (E1(1)(X \bmod N)) \bmod N$ ), както при  $E1(1)$ , за да получим следващия елемент от редицата.

Математически това изглежда така:  $E1(K) = E1(((K-1) \bmod (P-1)) + 1)$

Имаме подобно правило (не касае тази задача) и при умножение на  $K$  и  $X$ : Ако имаме числата  $X$ ,  $K$  и  $N$  и редицата  $E2(K) = (K*X) \bmod N$  за  $K = 1..(N/\text{НГОД}(N, X))$  ще получим различни стойности без повторения за  $E2$ , а след това стойностите ще се повтарят ротационно.

Математически това изглежда така:  $E2(K) = E2(K \bmod (N/\text{НГОД}(N, X)))$

Конкретната задача има три случая:

1) Ако  $n$  дели  $x$ , то резултатът е винаги 0.

2) Ако  $n$  дели  $x^q$  (пробваме за всяко  $q$  от 1 до  $n/\text{НГОД}(n, x)$  - може и до  $n$  ако имате достатъчно време за изпълнение на програмата и не ви се смята  $\text{НГОД}(n, x)$ , като в тази задача), където  $q$  е естествено число: На колко ще е равно:  $x^y \bmod n$  при  $y < q$  (пресмятаме го докато проверяваме дали  $n$  дели  $x^q$ ). А при  $y \geq q$  (веднага можем да дадем математически отговор, тъй като в този случай  $x^y \bmod n = x^q * x^{(y-q)} \bmod n = ((x^q \bmod n) * (x^{(y-q)} \bmod n)) \bmod n = (??? * (x^{(y-q)} \bmod n)) \bmod n = ???$

3) Ако  $n$  не дели  $x^q$  (всички останали различни от първия и втория случаи).

При кое число  $k$  ще е вярно:  $x^{(1)} \bmod n = x \bmod n = x^{(1+k)} \bmod n$

Това число го намираме програмно в стъпка 2 докато проверяваме дали  $n$  дели  $x^q$ .

На колко ще е равно:  $x^{(1+2*k)} \bmod n$

На колко ще е равно:  $x^{(1+3*k)} \bmod n$

...

На колко ще е равно:  $x^{(1+p*k)} \bmod n$

Където  $1+p*k$  е най-голямото цяло число по-малко или равно на  $y$ .

На колко ще е равно:  $x^y \bmod n$

Знаейки колко е  $x^{(1+p*k)} \bmod n$

Има и още по-ефективен алгоритъм:

<https://www.khanacademy.org/computing/computer-science/cryptography/modarithmetic/a/fast-modular>

## exponentiation

Прочетете го и се опитайте да го реализирате на C++ без да копи/паствате готов код от интернет.

### Input Format

Първият ред на входа започва с числото  $C$ , следват  $C$  реда съдържащи числата  $x$ ,  $y$  и  $n$ , разделени с интервал. Ред  $C + 1$  съдържа числото  $0$ .

### Constraints

$0 < C < 40$ ,  $1 < x, n < 2^{15} = 32768$ , и  $0 < y < 2^{31} = 2147483648$ .

### Output Format

Изходът трябва да съдържа  $C$  реда, като  $i$ -тия ред се намира положителното число  $z$ , такова че  $z = x^y \bmod n$  за зададените в  $i$ -тия тест  $x$ ,  $y$  и  $n$ .

### Sample Input 0

```
2
2 3 5
2 2147483647 13
0
```

### Sample Output 0

```
3
11
```