# 标题 副标题

姓名

华中科技大学

2024年9月24日

# 目录

① 选题背景

姓名 (HUST) 开题答辩

## Bernoulli 卷积简介

Bernoulli 卷积是一类简单而有趣的自相似测度。令 $\nu_{\lambda}$  为随机级数  $\sum_{0}^{\infty}\pm 1\lambda^{n}$  分布,其中的符号以概率  $\frac{1}{2}$  独立地取得。这正是测度  $\frac{1}{2}(\delta_{-\lambda^{n}}+\delta_{\lambda^{n}})$  的无穷卷积,因此叫 "Bernoulli 卷积"。关于这类测度的研究可以追溯到 1930 年,Bernoulli 卷积与调和分析,代数数理论,动力系统,以及 Hausdorff 维数的估计等领域有紧密的联系。

根据不同的研究领域, Bernoulli 卷积有不同的表示形式。[SixtyYears]

姓名 (HUST) 开题答辩 2024 年 9 月 24 日

### Bernoulli 卷积基本问题

根据 [DJFeng1],对  $\beta \in (1,2)$ , Bernoulli 卷积  $\nu_{\beta}$  可以定义为下面一族测度  $\nu_{\beta}^{n}$  的 weak-star 极限

$$u_{\beta}^{n} := \frac{1}{2} \sum_{a_{1} \cdots a_{n} \in \{0,1\}} \delta_{\sum_{i=1}^{n} a_{i} \beta^{-i}} \quad .$$

关于 Bernoulli 卷积基本问题是: 对于哪些  $\beta$ ,这个测度是绝对连续的,哪些是奇异的 (singular)。如果密度 (关于 Lebesgue 测度的 Radon-Nikodym 导数) 存在,那么它的光滑性如何 ( $L^{p^2}$ )? 然后就是 Bernoulli 卷积的 Hausdorff 维数如何,是否等于 1,怎样去估计 Hausdorff 维数。

其中有一个非常重要的结果就是,Erdös 证明如果  $\beta$  为 Pisot 数,那么相应的 Bernoulli 卷积的维数一定小于 1。

#### 一个 open 的问题

如果  $\nu_{\beta}$  奇异,那么是否一定有  $\beta$  为 Pisot 数?

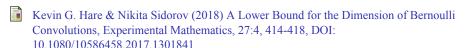
◆□▶◆@▶◆불▶◆불▶ 필급 외약

## 参考文献



- Shigeki Akiyama, De-Jun Feng, Tom Kempton, Tomas Persson; On the Hausdorff Dimension of Bernoulli Convolutions, International Mathematics Research Notices, , rny209, https://doi.org/10.1093/imrn/rny209
- FENG, DE-JUN. "SMOOTHNESS OF THE *L<sup>q</sup>*-SPECTRUM OF SELF-SIMILAR MEASURES WITH OVERLAPS." Journal of the London Mathematical Society, vol. 68, no. 1, 2003, pp. 102–118., doi:10.1112/S002461070300437X.
- De-Jun Feng, Yang Wang, 2004, 'Bernoulli convolutions associated with certain non-Pisot numbers', Advances in Mathematics, vol. 187, no. 1, pp. 173-194

## 参考文献



Falconer, K. J. Fractal Geometry. Wiley, 1990.

Mattila, Pertti. Geometry of Sets and Measures in Euclidean Spaces: Fractals and Rectifiability. Cambridge University Press, 1995.

# 谢谢!