Cvičení 12

Vilém Zouhar

1

$$x \in (a,b) : f'(x) = \Big((x-a)^2(x-b)^2\Big)' = 2(x-a)(x-b)^2 + 2(x-b)(x-a)^2 = 2(x-a)(x-b)(2x-a-b)$$

$$f'_+(a) = \lim_{x\to a^+} \frac{(x-a)^2(x-b)^2 - (a-a)^2(a-b)^2}{x-a} = \lim_{x\to a^+} (x-a)(x-b)^2 = 0 \text{ (ze spojitosti polynomu)}$$

$$f'_-(b) = \lim_{x\to b^-} \frac{(x-a)^2(x-b)^2 - (b-a)^2(b-b)^2}{x-b} = \lim_{x\to b^-} (x-a)^2(x-b) = 0 \text{ (ze spojitosti polynomu)}$$

$$f'_-(a) = \lim_{x\to a^-} \frac{\frac{1}{e} - (a-a)^2(a-b)^2}{x-a} = \frac{1}{e} \lim_{x\to a^-} \frac{1}{x-a} = -\infty \text{ ("dělíme zápornou nulou")}$$

$$f'_+(b) = \lim_{x\to b^+} \frac{\frac{1}{e} - (b-a)^2(b-b)^2}{x-b} = \frac{1}{e} \lim_{x\to b^+} \frac{1}{x-b} = \infty \text{ ("dělíme kladnou nulou")}$$

$$x \in \mathbb{R}\backslash[a,b] : f'(x) = \left(\frac{1}{e}\right)' = 0$$

2

$$x \in (-1,1) : g'(x) = \Big(x^2 \cdot e^{-x^2}\Big)' = 2xe^{-x^2} - 2x^3 \cdot e^{-x^2} = 2x \cdot e^{-x^2}(1-x^2)$$

$$g'_+(-1) = \lim_{x\to -1^+} \frac{x^2 \cdot e^{-x^2} - (-1)^2 \cdot e^{-(-1)^2}}{x+1} = \lim_{x\to -1^+} \frac{x^2 \cdot e^{-x^2} - \frac{1}{e}}{x+1} = \lim_{x\to -1^+} \frac{2x \cdot e^{-x^2}(1-x^2)}{1} = 0$$

($x+1$ je v prstencovém okolí -1 nenulové, $\lim_{x\to -1^+}\left[x^2 \cdot e^{-x^2} - \frac{1}{e}\right] = 0$; poslední krok ze spojitosti)

$$g'_-(1) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2 \cdot e^{-x^2} - 1^2 \cdot e^{-1^2}}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2 \cdot e^{-x^2} - \frac{1}{e}}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{2x \cdot e^{-x^2}(1-x^2)}{1} = 0$$

($x-1$ je v prstencovém okolí 1 nenulové, $\lim_{x\to 1^-}\left[x^2 \cdot e^{-x^2} - \frac{1}{e}\right] = 0$; poslední krok ze spojitosti)

$$g'_-(-1) = \lim_{x\to -1^-} \frac{\frac{1}{e} - (-1)^2 \cdot e^{-(-1)^2}}{x+1} = \lim_{x\to -1^-} \frac{\frac{1}{e} - \frac{1}{e}}{x+1} = 0$$

$$g'_+(1) = \lim_{x\to 1^+} \frac{\frac{1}{e} - 1^2 \cdot e^{-1^2}}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\frac{1}{e} - \frac{1}{e}}{x-1} = 0$$

$$x \in \mathbb{R}\backslash[-1,1] : g'(x) = \left(\frac{1}{e}\right)' = 0$$

bonus

$h(x) = sin(x)^{|cos(x)|} \qquad \big(D_h = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} (k\cdot 2\pi, k\cdot 2\pi + \pi)\big)$

$ln(h(x)) = |cos(x)| \cdot ln(sin(x))$ (pokud se funkce rovnají, pak mají i stejné derivace)

$$\frac{h'(x)}{h(x)} = |cos(x)|' \cdot ln(sin(x)) + \frac{|cos(x)|}{sin(x)} \cdot cos(x)$$

$$A = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} (k\cdot 2\pi, k\cdot 2\pi + \frac{\pi}{2}]$$

$$B = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} (k\cdot 2\pi + \frac{\pi}{2}, k\cdot 2\pi + \pi), A \cup B = D_h$$

$x \in A : h'(x) = (-sin(x) \cdot ln(sin(x)) + cotan(x)|cos(x)|) \cdot sin(x)^{|cos(x)|}$

$x \in B : h'(x) = (\quad sin(x) \cdot ln(sin(x)) + cotan(x)|cos(x)|) \cdot sin(x)^{|cos(x)|}$

(výraz bychom mohli dále zjednodušit za pomocí funkce sgn, nebo triku:)

$$x \in D_h : h'(x) = (-sin(x) \cdot ln(sin(x)) \cdot \frac{cos(x)}{|cos(x)|} + cotan(x)|cos(x)|) \cdot sin(x)^{|cos(x)|}$$

$$C_+ = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \{k\cdot 2\pi\}$$

$$C_- = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \{k\cdot 2\pi + \pi\}$$

pro $c \in C_- \cup C_+$ můžeme dodefinovat $h(c) = 0$ a vypočítat jednostranné derivace

$$c \in C_+ : h'_+(c) = \lim_{x\to c^+} \frac{sin(x)^{|cos(x)|} - 0}{x - c} = \lim_{x\to c^+} (-sin(x) \cdot ln(sin(x)) + cotan(x)|cos(x)|) \cdot h(x) = 0$$

(z dodefinování $h(x)$)

(l'Hospital předpoklady jsou splněny: $x - c$ je v prstencovém okolí c nenulové, limita čitatele i jmenovatele je 0)

$$c \in C_- : h'_-(c) = \lim_{x\to c^-} \frac{sin(x)^{|cos(x)|} - 0}{x - c} = \lim_{x\to c^-} (-sin(x) \cdot ln(sin(x)) + cotan(x)|cos(x)|) \cdot h(x) = 0$$

(z dodefinování $h(x)$)

(l'Hospital předpoklady jsou splněny: $x - c$ je v prstencovém okolí c nenulové, limita čitatele i jmenovatele je 0)

Tímto jsme vypočítali derivaci na definičním oboru a jednostranné derivace v krajních, dodefinovaných bodech.