10. domácí úkol | Vilém Zouhar

1 Funkce dvou proměnných

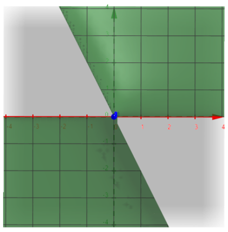
1.1 Definiční obor

$$\left|\frac{x}{x+y}\right| \leq 1 \Rightarrow \frac{x}{x+y} \leq 1 \wedge -1 \leq \frac{x}{x+y} \Rightarrow$$

$x+y>0(\Rightarrow x>-y)$	$x+y<0(\Rightarrow x<-y)$
$x \leq x+y \wedge -x-y \leq x$	$x \geq x+y \wedge -x-y \geq x$
$0 \leq y \wedge -y \leq 2x$	$0 \geq y \wedge -y \geq x$
$0 \leq y \wedge -y \leq 2x \wedge x > -y$	$0 \geq y \wedge -y \geq x \wedge x < -y$

$$\Rightarrow \quad (x>0 \wedge y>0)$$
$$\vee \quad (x<0 \wedge y<0)$$
$$\vee \quad (x>0 \wedge y<-2x)$$
$$\vee \quad (x<0 \wedge y>-2x)$$
$$\vee \quad [(x=0 \vee x=0) \wedge (x \neq 0 \vee y \neq 0)]$$

(osy kromě počátku)



1.2 Gradient

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{-\frac{x+y-x}{(x+y)^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{x+y}\right)^2}} = \frac{-y}{|x+y|\sqrt{(x+y)^2-x^2}}, \qquad x \neq -y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\frac{x}{(x+y)^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{x+y}\right)^2}} = \frac{x}{|x+y|\sqrt{(x+y)^2-x^2}}, \qquad x \neq -y$$

$$\Rightarrow \nabla f \text{v bodě } (1,1) = \left(\frac{-1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)$$

1.3 Totální diferenciál

Paricální derivace jsou v okolí bodu $(1,1)$ spojité, tedy funkce je v tomto bodě diferencovatelná.

$$Df_{(1,1)}(x,y) = \frac{-1}{2\sqrt{3}}(x-1) + \frac{1}{2\sqrt{3}}(y-1) + f(1,1) = \frac{-1}{2\sqrt{3}}(x-1) + \frac{1}{2\sqrt{3}}(y-1) + \frac{\pi}{3}$$

1.4 Aproximace

$$Df_{(1,1)}(1.04, 0.99) \approx 1.03$$

2 Anuloid

2.1 Popis

$$t = \sqrt{8\sqrt{x^2+y^2} - x^2 - y^2 - 12}, \qquad r = -\sqrt{8\sqrt{x^2+y^2} - x^2 - y^2 - 12}$$
$$A = t \cup r$$

2.2 Tečná rovina

Jelikož je třetí souřadnice kladná, zajímá nás funkce t v bodě $(0,3)$. Pro výpočet tečné roviny první určíme gradient této funkce a z toho vypočítáme totální diferenciál.

$$\frac{\partial t}{\partial x}(x,y) = -\frac{x}{\sqrt{-12 - x^2 - y^2 + 8\sqrt{x^2+y^2}}} + \frac{4x}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{-12 - x^2 - y^2 + 8\sqrt{x^2+y^2}}}$$
$$\frac{\partial t}{\partial y}(x,y) = \frac{-2y + \frac{8y}{\sqrt{x^2+y^2}}}{2\sqrt{-12 - x^2 - y^2 + 8\sqrt{x^2+y^2}}}$$

Parciální derivace jsou v okolí $(0,3)$ spojité, tedy můžeme vypočítat totální diferenciál.

$$Dt_{(0,3)}(x,y) = \frac{\partial t}{\partial x}(0,3)x + \frac{\partial t}{\partial y}(0,3)(y-3) + t(0,3)$$
$$= \frac{y-3}{\sqrt{3}} + \sqrt{3}$$

$\Rightarrow$ pokud jsme neudělali chybu v ověření spojitosti paricálních derivací, pak tečná rovina existuje.

3 Podíl souřadnic

3.1 Gradient

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{y}; \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-x}{y^2}$$
$$\nabla f = \left(\frac{1}{y}, \frac{-x}{y^2}\right), y \neq 0$$

gradient spojitý kromě y souřadnicové osy

3.2 Totální diferenciál

$$Df_{(a,b)}(x,y) = \frac{x-a}{b} + \frac{-a(y-b)}{b^2} + \frac{a}{b}, y \neq 0$$