4. domácí úkol | Vilém Zouhar

1

Původní funkce je definovaná na: $\mathbf{R}\setminus \bigcup_{k\in\mathbf{Z}} \{k\pi\}$

$$\int \frac{1}{\sin^2(x)+\tan^2(x)}\mathrm{d}x = \left[sub.\ t=\tan(x), 1\cdot dx = \frac{1}{1+t^2}dt, \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}, \sin^2 x = 1-\frac{1}{t^2+1} = \frac{t^2}{t^2+1}\right] =$$

$$\int \frac{1}{\frac{t^2}{t^2+1}+t^2}\cdot\frac{1}{t^2+1}\mathrm{d}t = \int \frac{1+t^2}{(t^2+t^2+t^4)\cdot(1+t^2)}\mathrm{d}t = \int\frac{1}{t^2(2+t^2)}\mathrm{d}t =$$

$$\left[\frac{1}{2t^2+t^4} = \frac{A}{t}+\frac{B}{t^2}+\frac{Ct+D}{t^2+2} \Rightarrow (A,B,C,D) = (0,1/2,0,-1/2)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\int\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int\frac{1}{2+t^2}\mathrm{d}t =$$

$$\int\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t = \frac{-1}{t}+c_1$$

$$\int\frac{1}{2+t^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1+(\frac{t}{\sqrt{2}})^2}\mathrm{d}t = \left[sub.\ y=\frac{t}{\sqrt{2}}, y'=\frac{1}{\sqrt{2}}\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{1}{1+y^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(y)+c_2$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\frac{t}{\sqrt{2}})+c_2$$

$$= \frac{-1}{2t} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)+c = \frac{-1}{2\tan(x)} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{\tan(x)}{\sqrt{2}}\right)+c$$

Kvůli prvnímu zlomku je třeba vyloučit $k\pi$, navíc je limita arctan v $\pm\infty$ různá, proto i $k\pi+\pi/2$:

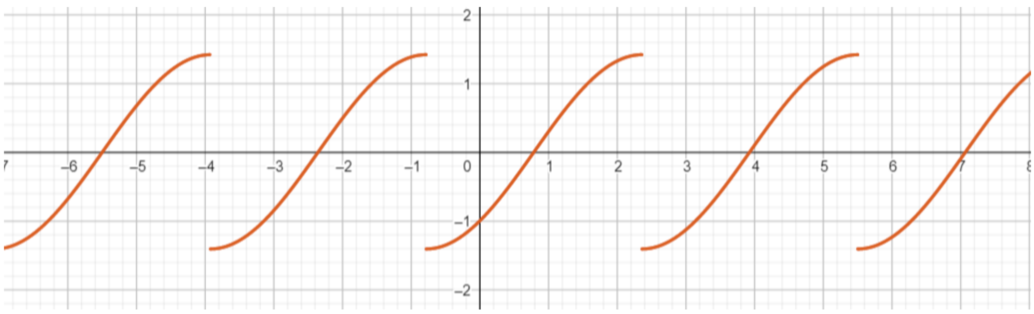
primitivní funkce na intervalech: $\mathbf{R}\setminus \bigcup_{k\in\mathbf{Z}} \{k\pi/2\}$

2

Původní funkce je definovaná na: $\mathbf{R}$

$$\int |\sin(x)+\cos(x)|\mathrm{d}t = [\text{dle integrování funkce v absolutní hodnotě}] = (\sin(x)-\cos(x))\cdot\mathrm{sgn}(\sin(x)+\cos(x))+c$$

Tato funkce je však nespojitá v bodech $k\pi-\pi/4$ (sgn převrací znaménko)



Označme části funkce: $F_i = (\sin(x)-\cos(x))\cdot\mathrm{sgn}(\sin(x)+\cos(x))+c+i\cdot M$ na intervalu $(i\cdot\pi+3\pi/4, i\cdot\pi+3\pi/4)$

Chybějící body v $i\cdot\pi-\pi/4$ dodefinujeme pro spojitost (kvůli nulovému sgn) jako $i\cdot M+q+c \quad q,c,M\in\mathbf{R}$

$F_0 = (\sin(x)-\cos(x))\cdot\mathrm{sgn}(\sin(x)+\cos(x))+c$

$F_1 = (\sin(x)-\cos(x))\cdot\mathrm{sgn}(\sin(x)+\cos(x))+c+M,\ldots$

Je třeba nyní najít správné konstanty M,q, které funkci poslepují do spojité.

Stačí přičíst rozdíl v bodech $i\cdot\pi-\pi/3$ a $i\cdot\pi+3\pi/4$, což je vždy $2\sqrt{2}=M$, pak $q=\sqrt{2}$.

Předpis pro funkci je tedy: $F(x) = \begin{cases} (\sin(x)-\cos(x))\cdot\mathrm{sgn}(\sin(x)+\cos(x))+c+i\cdot 2\sqrt{2} & x\in(i\cdot\pi-\pi/4, i\cdot\pi+3\pi/4) \\ i\cdot 2\sqrt{2}+\sqrt{2}+c & x = i\cdot\pi+3\pi/4 \end{cases}$

$i\in\mathbf{Z}, c\in\mathbf{R}, x\in\mathbf{R}$

3

Původní funkce je definovaná na: $\mathbf{R}\backslash\{1\}$

$$\int \frac{8+6x-2x^2}{x^4-4x+3}\mathrm{d}x = \int \frac{8+6x-2x^2}{(x-1)^2(x^2+2x+3)} = \mathrm{d}x$$

$$\left[\frac{8+6x-2x^2}{(x-1)^2(x^2+2x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+2x+3} \Rightarrow (A,B,C,D) = (-1,2,1,-1) \textit{ (za pomocí eliminace)}\right]$$

$$= -\int \frac{1}{x-1}\mathrm{d}x + 2\int \frac{1}{(x-1)^2}\mathrm{d}x + \int \frac{x-1}{x^2+2x+3}\mathrm{d}x =$$

$$= -\int \frac{1}{x-1}\mathrm{d}x + 2\int \frac{1}{(x-1)^2}\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+3} - 2\int \frac{1}{x^2+2x+3} = \mathrm{d}x$$

$$\int \frac{1}{x-1}\mathrm{d}x = \ln|x-1| + c_1$$

$$\int \frac{1}{(x-1)^2}\mathrm{d}x = -(x-1)^{-1} + c_2$$

$$\int \frac{2x+2}{x^2+2x+3}\mathrm{d}x = [\textit{sub. } y = x^2+2x+3, y' = 2x+2] = \int \frac{1}{y}\mathrm{d}y = \ln|y| + c_3 = \ln|x^2+2x+3| + c_3$$

$$\int \frac{1}{x^2+2x+3} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{(\frac{x+1}{\sqrt{2}})^2+1}\mathrm{d}x = [\textit{sub. } y = (x+1)/\sqrt{2}, y' = 1/\sqrt{2}] =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{1}{y^2+1}\mathrm{d}y = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(y) + c_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan((x-1)/\sqrt{2}) + c_4$$

$$= -\ln|x-1| - 2(x-1)^{-1} + \frac{1}{2}\ln|x^2+2x+3| - \sqrt{2}\arctan((x-1)/\sqrt{2}) + c$$

Kvůli zlomku a logaritmu je třeba vyloučit $x = 1$, proto je primitivní funkce definovaná na: $(-\infty, 1)$ *a* $(1, \infty)$