7. domácí úkol | Vilém Zouhar

1

Zadaná funkce je prostá → můžeme najít inverzi → můžeme prohodit osy a rotovat kolem osy x. Z původní funkce $y = x^{\frac{1}{3}}$ dostaneme po prohození $y = x^3$. Pak použijeme vzorec na rotaci kolem osy x.

$$V = \pi \int_1^2 (x^3)^2 dx = \pi \left[\frac{x^7}{7}\right]_1^2 = \frac{127}{7}$$

2

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{-1}{x^2}; \quad \left(\left(\frac{1}{x}\right)'\right)^2 = \frac{1}{x^4}$$

Obecně:

$$\int \frac{1}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}dx = \int \frac{\sqrt{1+x^4}}{x^3}dx = [sub. z = x^2, "dz = 2xdx"] = \int \frac{\sqrt{1+z^2}}{2z^2}dz =$$

$$\int \frac{1}{z^2\sqrt{z^2+1}}dz = [sub. z = \tan(\alpha), "dz = 1/\cos^2(\alpha)] =$$

$$\int \frac{1}{\tan^2(\alpha)\sqrt{1+\tan^2(\alpha)}}d\alpha = \int \frac{1}{\tan^2(\alpha)\sqrt{1+\tan^2(\alpha)}}d\alpha =$$

$$\int \frac{\cos(\alpha)\cos^2(\alpha)}{\sin^2(\alpha)\cos^2(\alpha)}d\alpha = \int \frac{\cos(\alpha)}{\sin^2(\alpha)}d\alpha = [sub. u = \sin(\alpha); "du = \cos(\alpha)d\alpha"] =$$

$$\int \frac{1}{u^2}du = \frac{-1}{u} + C = \frac{-1}{\sin(\alpha)} + C = \frac{-\sqrt{1+z^2}}{z} + C$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int \frac{1}{\sqrt{z^2+1}}dz + \int \frac{1}{z^2\sqrt{z^2+1}}dz\right] = \frac{1}{2}\left[\sinh^{-1}(z) - \frac{\sqrt{z^2+1}}{z}\right] + C =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sinh^{-1}(x^2) - \frac{\sqrt{x^4+1}}{x^2}\right] + C$$

Nyní určitý integrál:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}dx = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{2}\left[\sinh^{-1}(x^2) - \frac{\sqrt{x^4+1}}{x^2}\right] - \lim_{x\to 1}\frac{1}{2}\left[\sinh^{-1}(x^2) - \frac{\sqrt{x^4+1}}{x^2}\right] =$$

$\frac{1}{2}\left[\lim_{x\to\infty}\sinh^{-1}(x^2) - \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^4+1}}{x^2} - K\right]$(původní pravá limita je ze spojité funkce, tedy nějaké konečné reálné K) =

$$\frac{1}{2}\left[\lim_{x\to\infty}\sinh^{-1}(x^2) - 1 - K\right] = \frac{1}{2}\left[\lim_{x\to\infty}\ln(x+\sqrt{x^2+1}) - 1 - K\right] = \infty$$

Z toho usoudíme, že povrch je nekonečný. Místo pracného výpočtu integrálu jsme však mohli použít integrační kritérium, které je ve skutečnosti tvaru ekvivalence a zjistili bychom, že povrch je ∞.

(z kritéria a pozorování, že $\frac{\sqrt{1+x^4}}{x^3}$ je skoro $\frac{\sqrt{x^4}}{x^3} = \frac{1}{x}$, což víme, že tvoří nekonvergující řadu pro přirozená x, tedy daný integrál (pro konečnou spodní mez a nekonečnou horní) je nekonečno)

3

$$\int_{\frac{1}{a}}^a \frac{\ln(x)}{x}dx = [sub. z = \ln(x); "dz = \frac{1}{x}dx"] = \int_{\ln(\frac{1}{a})}^{\ln a} z \quad dz =$$

$$\frac{1}{2}\left[z^2\right]_{\ln(a)}^{\ln(\frac{1}{a})} = \frac{\ln^2(a)}{2} - \frac{\ln^2(a^{-1})}{2} = \frac{\ln^2(a)}{2} - \frac{(-\ln(a))(-\ln(a))}{2} =$$

$$\frac{\ln^2(a)}{2} - \frac{(\ln^2(a)}{2} = 0$$