5. domácí úkol | Vilém Zouhar

1

1.1 Popis

Budeme vždy hladově přidávat maximální hranu až dokud nepropojíme dva chtěné vrcholy. Některé hrany však přeskončíme, konkrétně ty mezi vrcholy, které jsme už někde potkali a jsou součástí našeho stromu. Ve stromě jsou už cesty jednoznačné, tedy je stačí projít BFS a tuto cestu najít. Je to vlastně Jarníkův algoritmus.

1.2 Korektnost

Pro korektnost se stačí jen zamyslet, které hrany opomeneme a musíme odargumentovat, že ty nemůžou být součástí správného řešení.

- Hrany, které jsou mezi již objevenými vrcholy by v našem stromě vytvořily cyklus (maximalita bez kružnic stromu), ale ta druhá strana cyklu musí nutně mít menší minimální hranu, tedy původní cesta nám stačí.
- Hrany, které jsou menší než všechny v našem stromě. Pokud existuje cesta v našem stromě, pak si rozhodně nepomůžeme, když přidáme nějaké menší hrany.

1.3 Pseudokód

```
tree = jarnik(G)
output( BFS(u, v, tree) )
```

1.4 Složitost

Děláme BFS a Jarníkův algoritmus. BFS trvá lineárně, ale Jarníkův algoritmus za pomocí matice sousednosti $O(n^2)$, za pomocí binární haldy $O((m+n)\cdot\log(n))$ a za pomocí fibonacciho haldy $O(m+n\cdot\log(n))$, celkově tedy $O(m+n\cdot\log(n))$. Neumím ukázat, že to nelze vyřešit lineárně, ale určitě nejde, protože je to pravda.

2

2.1 Popis

Každý cyklus (a,b,c,d) délky 4 můžeme rozbít na sjednocení dvou cest (a,c) a (c,a). Stačí tedy pro každou dvojici $\{a,c\}$ najít vhodné $\{c,d\}$, aby $w(a,b)+w(b,c)+w(c,d)+w(d,a)$ bylo co nejmenší. Cesty (a,c) a (c,a) můžeme ale hledat samostatně.

2.2 Korektnost

Pro každou dvojici zkoušíme všechna doplnění na čtyřcyklus, není co pokazit.

2.3 Pseudokód

```
t_min = 0
res = (/, /, /, /)
for vertex a in V:
    for vertex c in V:
        min_ac = infty
        min_ca = infty
        b, d = /, /
        for vertex x in V:
            if w(a,x) + w(x, c) < min_ac:
                min_ac = w(a,x) + w(x, c)
                b = x
            if w(c,x) + w(x, a) < min_ca:
                min_ca = w(c,x) + w(x, a)
                d = x
        if w(a,b) + w(b, c)+ w(c, d)+ w(d, a) < t_min:
```

```
        t_min = w(a,b) + w(b, c)+ w(c, d)+ w(d, a)
        res = (a, b, c, d)
output(res)
```

2.4 Složitost

Děláme tři vnořené for cykly délky n. Poslední for cyklus by šel vylepšit, pokud bychom procházeli jen sousedy a, nebo b, ale v úplném grafu bychom dopadli stejně lineárně s n, tedy celková složitost algoritmu je $O(n^3)$.