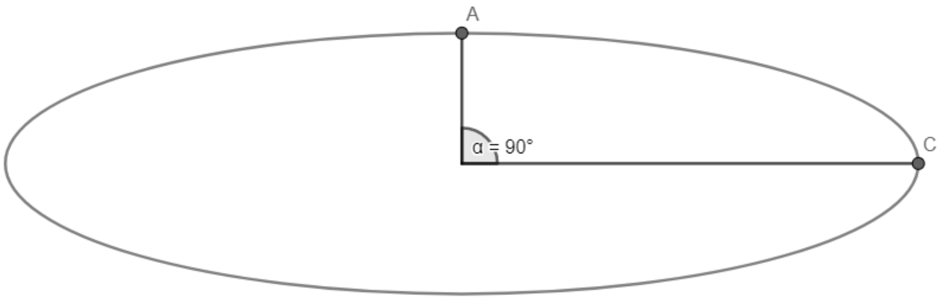
6. domácí úkol | Vilém Zouhar

1

Elipsa je definovaná buď implicitně: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, nebo parametricky: $x = a \cdot cos(\alpha)$; $\quad y = b \cdot sin(\alpha)$. Pro výpočet plochy pod křivkou bude parametrická definice mnohem přívětivější.

$$x = \phi(\alpha) = a \cdot \cos(\alpha) \qquad y = \psi(\alpha) = b \cdot \sin(\alpha)$$
$$\phi'(\alpha) = -a \cdot \sin(\alpha) \qquad \psi'(\alpha) = b \cdot \cos(\alpha)$$

Budeme zkoumat pouze jednu čtvrtinu elipsy, tedy meze $\frac{\pi}{2}$ a 0. Je však třeba vyřešit smysl úhlu, tedy uspořádání mezí.



Pro $\alpha = 0$ defijnuje parametrické vyjádření bod B, pro $\alpha = \frac{\pi}{2}$ se definuje bod A. Abychom šli ve směru osy x, potřebujeme integrovat od $\alpha = \frac{\pi}{2}$ po $\alpha = 0$: $\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} b \cdot \sin(\alpha) \cdot a(-1)\sin(\alpha)\ \mathrm{d}\alpha = ab \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(\alpha)\ \mathrm{d}\alpha$

$$I = \int \sin^2(\alpha)\ \mathrm{d}\alpha = [\textit{per partes}] = -\sin(\alpha)\cos(\alpha) + \int \cos^2(\alpha)\ \mathrm{d}\alpha = -\sin(\alpha)\cos(\alpha) + \int 1\ \mathrm{d}\alpha - \int \sin^2(\alpha)\ \mathrm{d}\alpha$$

$$\Rightarrow 2I = -\sin(\alpha)\cos(\alpha) + \alpha + Q \Rightarrow \int \sin^(\alpha)\ \mathrm{d}\alpha = \frac{-\sin(\alpha)\cos(\alpha) + \alpha}{2} + C$$

$$ab \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(\alpha)\ \mathrm{d}\alpha = ab \cdot \left[\frac{-\sin(\alpha)\cos(\alpha) + \alpha}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = ab\left[\frac{0 + \frac{\pi}{2}}{2} - \frac{0+0}{2}\right] = ab\frac{\pi}{4}$$

Tím jsme vypočítali jednu čtvrtinu, tedy celkový obsah je: πab

2

$$y = \frac{a}{2}(e^{x/a} + e^{-x/a}),\ y' = \frac{e^{x/a} - e^{-x/a}}{2},\ (y')^2 = \frac{e^{2x/a} + e^{-2x/a} - 2}{4},\ 1 + (y')^2 = \frac{e^{2x/a} + e^{-2x/a} + 2}{4} = \left(\frac{e^{x/a} + e^{-x/a}}{2}\right)^2$$

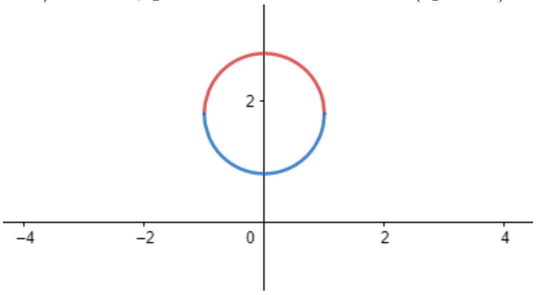
$$\Rightarrow \sqrt{1 + (y')^2} = |\frac{e^{x/a} + e^{-x/a}}{2}| = \frac{e^{x/a} + e^{-x/a}}{2} = \cosh(x/a)$$

$$\int \frac{e^{x/a} + e^{-x/a}}{2}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int e^{x/a}\ \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int e^{-x/a}\ \mathrm{d}x = [sub.\ z = x/a] = \frac{a}{2}\int e^z\ \mathrm{d}z + \frac{a}{2}\int e^{-z}\ \mathrm{d}z = \frac{a}{2}e^z - \frac{a}{2}e^{-z} + C =$$
$$\frac{a}{2}e^{x/a} - \frac{a}{2}e^{-x/a} + C = a\sinh(x/a) + C$$

Délka křivky: $\int_0^{\gamma} [\frac{e^{x/a} + e^{-x/a}}{2}]\ \mathrm{d}x = [\frac{a}{2}e^{x/a} - \frac{a}{2}e^{-x/a}]_0^{\gamma} = \frac{a}{2}[e^{x/a} - e^{-x/a}]_0^{\gamma} = \frac{a}{2}[e^{\gamma/a} - e^{-\gamma/a}] = a\sinh(\gamma/a)$

3

Kružnice posunutá ve směru osy y je popsaná implicitně: $(y-R)^2+x^2=r^2$ a můžeme ji rozdělit na:
$y_{+1}=\sqrt{r^2-x^2}+R$, $y_{-1}=-\sqrt{r^2-x^2}+R$, obecně se znamínkem s: $y_s=s\sqrt{r^2-x^2}+R \quad (s=\pm 1)$
Pro $s=+1$, se jedná o červenou (horní) křivku, pro $s=-1$ o modrou (spodní):



Pokud bychom si představili obsah pod červenou křivkou a ten rotovali kolem osy x, pak bychom dostali torus bez díry uprostřed (objem V_{+1}). To spravíme tak, že od původního objemu odečteme objem vzniklý rotací obsahu pod modrou křivkou kolem osy x (objem V_{-1}). Integrály pro výpočet budou velmi podobné a spousta členů se od sebe odečte, proto budeme hned ze začátku dělat rozdíl dvou integrálů. Navíc si upravíme meze vždy jen polovinu (od 0 po r) a celkový objem vynásobíme dvěmi (neboť křivky jsou symetrické podle osy y):

$$V=V_{+1}-V_{-1}=\left[2\pi\int_0^r(+1\sqrt{r^2-x^2}+R)^2\ \mathrm{d}x-2\pi\int_0^r(-1\sqrt{r^2-x^2}+R)^2\ \mathrm{d}x\right]$$

$$=[\textit{z linearity integrálů se členy odečtou}]=2\pi\left[\int_0^r 2R\sqrt{r^2-x^2}\ \mathrm{d}x-\int_0^r -2R\sqrt{r^2-x^2}\ \mathrm{d}x\right]$$

$$=8\pi R\int_0^r\sqrt{r^2-x^2}\ \mathrm{d}x=[\textit{substituce } z=x/r]=8\pi Rr^2\int_0^1\sqrt{1-z^2}\ \mathrm{d}z=$$

$$=[\textit{sub. } z=\sin(\alpha),\ \textit{"}dz=\cos(\alpha)\ \ d\alpha\textit{"}]=8\pi Rr^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2(\alpha)}\cos(\alpha)\ \mathrm{d}\alpha=$$

$$=8\pi Rr^2\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}1\ \mathrm{d}\alpha-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2(\alpha)\ \mathrm{d}\alpha\right]=8\pi Rr^2\left[\alpha-\frac{-\sin(\alpha)\cos(\alpha)+\alpha}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\ \textit{(výpočet }\int\sin^2(x)\ dx\textit{ z 1. příkladu)}$$

$$8\pi Rr^2\left[\frac{\sin(\alpha)\cos(\alpha)+\alpha}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=8\pi Rr^2\left[\frac{0+\frac{\pi}{2}}{2}-0\right]=2\pi^2Rr^2$$