2. domácí úkol

Vilém Zouhar

09. 12. 2017

1

a)

Za X_π označme počet obsazených kajut při náhodném výběru π

$X_\pi = I_{K_1} + I_{K_2} +_{...} + I_{K_n}$ $\quad$ (I_{K_i} indikuje obsazenost kajuty i)

$$E[X_\pi] = E\left[\sum_{i=1}^{n} I_{K_i}\right] = \sum_{i=1}^{n} E[I_{K_i}] = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j\in\{0,1\}} j \cdot P_{I_{K_i}}[j] = \sum_{i=1}^{n} (1 \cdot P[K_i] + 0 \cdot \overline{P[K_i]}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P[K_i] \quad \text{(z linearity střední hodnoty)}$$

$$P[K_i] = 1 - \overline{P[K_i]} \quad \text{(1-pravděpodobnost, že v kajutě } i \text{ nebude nikdo)} =$$

$$= 1 - \frac{\binom{2n-2}{n}}{\binom{2n-1}{n}} = 1 - \frac{n-1}{2n-1} \quad \text{(z počítání přes přihrádky; podíl příznivých jevů a všech)}$$

$$\Rightarrow E[X_\pi] = \sum_{i=1}^{n} \left[1 - \frac{n-1}{2n-1}\right] = n - n \cdot \frac{n-1}{2n-1}$$

b)

$$\text{Průměrný počet námořníků na jedné kajutě definujeme jako } \frac{\#\text{ námořníků}}{\#\text{ kajut}} = \frac{n}{n} = 1$$

2

b)

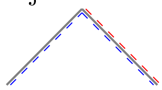
Pro dva libovolné vrcholy *x, y* ve stromu G platí, že existuje právě jedna cesta mezi nimi, která má buď sudou, nebo lichou délku. Tuto délku označme *d*, exponent matice *e*. Na a_{xy}^e se nachází počet sledů délky e z x do y.

Pokud je $e = d+2k$ (e, d mají stejnou paritu), pak sled existuje, neboť můžeme cestu prodloužit o sudý počet hran. Cestu: $(x, e_1, v_1, e_2, .., e_n, y)$ upravíme: $(x, e_1, v_1, [e_1, x, e_1, v_1], e_2, .., e_n, y)$, kde $[e_1, x, e_1, v_1]$ můžeme opakovat k-krát a prodloužíme tak sled o sudý počet hran.

Pokud je $e = d+2k+1$ (e, d mají jinout paritu), pak sled ve stromu neexistuje, neboť podsledem (odstranění opakujících se vrcholů) každého sledu délky e musí být ona jedinečná cesta, kterou dokážeme prodlužovat jen o sudý počet hran. Pokud bychom chtěli prodlužovat o lichý počet hran, museli bychom najít sled, který začíná a končí ve stejném vrcholu a má lichý počet hran. To bychom našli v kružnici, která však ve stromech není.

Nyní stačí ukázat, že v každém stromě o délky aspoň $n >= 3$ se vyskytují dvě cesty různých parit (ekvivalentní s tím, že se vyskytují dvě dvojice vrcholů, jejichž délky cest mají různé parity). To můžeme udělat dvěma způsoby:

- Méně elegantní je si všimnout, že všechny stromy délky 3 jsou izomorfní a větší stromy jej obsahují jako podgraf. A právě tento strom již obsahuje dvě cesty různých parit:

  Tedy i větší stromy budou mít tyto dvě cesty a tudíž se mocnina e neshodne s alespoň jednou z nich a na patřičném místě a_{xy}^e bude 0 (délka cesty x, y má jinou paritu než e).

- Důvtipnější je si všimnout jakým způsobem se vlastně tvoří stromy. Začneme grafem, který prohlásíme za strom a připojujeme k němu další listy. Pokud tedy délka cesty od kořene k k nějakému vrcholu v měla nějakou paritu, tak připojením listu l k vrcholu v vznikne cesta délky opačné parity. V novém grafu jsou tedy potřebné cesty.

Tímto jsme ukázali, že všechny stromy velikosti alespoň 3 (platí mimo jiné i pro 1 (matice je jednoprvková, nulová) a 2 (máme vždy jen jednu hranu, kterou můžeme rozšířit cestu)) splňují podmínku, že v každé mocnině matice sousednosti bude někde 0, neboť daný sled mezi danými vrcholy neexistuje.

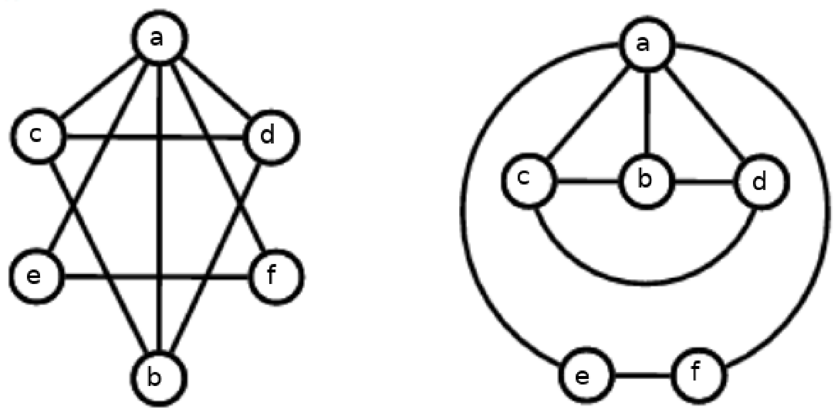
a)

Souvislé (neizomorfní grafy) na třech vrcholech jsou dva:

Z **2 b)** plyne, že si můžeme vybrat graf vlevo (strom), ten tuto podmínku splňuje.

3

Grafy 1, 2 jsou izomorfní, neboť při tomto pojmenování:



Jsou hrany obou grafů: $\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{a, e\}, \{a, f\}, \{e, f\}, \{c, b\}, \{c, d\}, \{b, d\}$ a množiny vrcholů stejné.
Relace být izomorfní je ekvivalence, tedy stačí ukázat, že třetí graf nepatří do stejné třídy jako graf 1. V prvním grafu existuje hrana mezi vrcholy stupně 2, ale ve třetím grafu není, tedy žádná bijekce (přejmenování), které by zachovalo strukturu, nemůže existovat.

4

a)

Z grafu vybereme nejkratší možný cyklus liché délky. Pokud není indukovaný, pak obbsahuje nějaké hrany navíc mezi uvažovanými vrcholy. Tím dělí cyklus na dva cykly, které by byly sudé délky pouze v případě, že původní cyklus byl sudý. Tedy jeden z nově vytvořených cyklů musí být liché délky, což je však spor s předpokladem, tedy původní cyklus byl nejkratší.

b)

Obecně je pravda jen jeden směr implikace (tedy původní výrok ne) a to: Pokud je posloupnost skóre nějakého grafu, pak se v ní lichá čísla vyskytují suděkrát. Opačnou implikaci můžeme vyvrátit protipříkladem $(0, 0, 7)$, což jistě není skóre grafu.
Z přednášky víme, že součet všech stupňů musí být sudý (každou hranu započítáváme dvakrát, máme přirozený počet hran). Tedy:

$$\sum deg(v) = 2|E| = \text{sudé číslo}$$

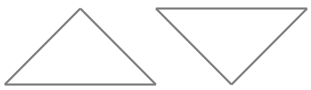
$$\sum_{\text{deg}(v_i)\text{ liché}} deg(v_i) + \sum_{\text{deg}(v_i)\text{ sudé}} deg(v_i) = \sum_{\text{deg}(v_i)\text{ liché}} deg(v_i) + \sum_{\text{deg}(v_i)\text{ sudé}} 2\frac{deg(v_i)}{2} = 2|E|$$

$$\sum_{\text{deg(v) liché}} deg(v) = 2\left(|E| - \sum_{\text{deg}(v_i)\text{ sudé}} \frac{deg(v_i)}{2}\right)$$

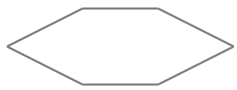
Sčítáme n lichých čísel, jejichž výsledek je sudý, tedy i n musí být sudé.

c)

Tvrzení vyvrátíme protipříkladem:



a



Tyto dva grafy zřejmě nejsou izomorfní, neboť jeden je souvislý a druhý ne (nutná podmínka izomorfismu).
Platí však jeden směr implikace a to: Pokud jsou grafy izomorfní, pak mají stejné skóre.

d)

Triviálně dokážeme opět vyvrátit protipříkladem: Z grafu $G = (V, E)$ vybereme podgraf $G' = (V, \varnothing)$. G' je souvislý jen pro strom velikosti 1, pak už obsahuje jen samostatné vrcholy, tedy je nesouvislý a nemůže být stromem.