# Domácí úkol LA 1

Vilém Zouhar

31. říjen 2017

## Úvod

Rovnost řádků $a_{i*}$ a sloupců $a_{*j}$ definujeme jako $a_{i*} = a_{*j} \Leftrightarrow a_{*j} = a_{*j}^T$, tedy nepoužíváme pro jednoduchost transponování sloupcových a řádkových vektorů.

## 1 Matice pro výpočet lineárních rekurencí

### 1.1

Řešením je matice ve tvaru

$$A = \begin{bmatrix} k_n & k_{n-1} & k_{n-2} & \dots & k_2 & k_1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad A \in R^{n \times n}$$

Kde $n$ je počet předchozích členů pro vypočítání dalšího prvku. Vynásobením zprava vektorem $V$:

$$V_l = \begin{bmatrix} a_{l+n} \\ a_{l+n-1} \\ a_{l+n-2} \\ \dots \\ a_l \end{bmatrix} \qquad A \times V_l = \begin{bmatrix} k_n \cdot a_{l+n} + k_{n-1} \cdot a_{l+n-1} + k_{n-2} \cdot a_{l+n-2} \dots k_1 \cdot a_l \\ a_{l+n} \\ a_{l+n-1} \\ \dots \\ a_{l+1} \end{bmatrix} = V_{l+1}$$

čímž v prvním prvku dostaneme (l+n+1)-tý člen, v druhém prvku (l+n)-tý člen, v dalším (l+n-1)-tý člen, atd.. Platí tedy $V_{l+1}[t+1] = V_l[t]$ a $V_{l+1}[1] = k_n \cdot V_l[1] + k_{n-1} \cdot V_l[2] + k_{n-2} \cdot V_l[3] + \dots + k_1 \cdot V_l[n]$, což odpovídá předpisu pro lineární rekurenci.

## 2 Permutační matice

### 2.1

Vynásobení permutační maticí zleva permutuje celé řádky. Vynásobení permutační maticí zprava permutuje celé sloupce. Mějme permutační matici $P$, obecnou matici $A$ (vhodných rozměrů) a $B = T \cdot A, C = A \cdot T$

Násobení zleva: $b_{ij} = \sum_{k=1}^{n} p_{ik} \cdot a_{kj}$. Právě jedno z $p_{i*}$ je 1 (ostatní 0). Takové číslo sloupce označme třeba $m$. Pro každý řádek je $m$ jiné, což odpovídá bijekci $f : i \to m$ tedy $b_{ij} = a_{mj} \Leftrightarrow b_{ij} = a_{f(i)j}$ což je permutace řádků, neboť $b_{i*} = a_{f(i)*}$.

Násobení zprava funguje obdobně: $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot p_{kj}$. Právě jedno z $p_{*j}$ je 1 (ostatní 0). Takové číslo řádku označme třeba $n$. Pro každý sloupec je $n$ jiné, což odpovídá bijekci $f : j \to n$ tedy $c_{ij} = a_{im} \Leftrightarrow c_{ij} = a_{if(j)}$ což je permutace sloupců, neboť $c_{*j} = a_{*f(j)}$.

### 2.2

Mějme permutační matice $P^1, P^2$, pak $P^3 = P^1 \cdot P^2$ je také permutační matice, neboť v $p^3_{i*}$ se nachází právě jedna 1 a pro $i_a \neq i_b$ jsou jedničky na jiných místech.

$p^3_{ij} = \sum_{k=1}^{n} p^1_{ik} \cdot p^2_{kj}$ Jednička v násobení nastane pouze v případě, kdy řádek $p^1_{i*}$ je roven sloupci $p^2_{*j}$, což nastane právě jednou, neboť všechny sloupce v jedné permutační matici jsou navzájem různé a tyto různé sloupce "porovnáváme" s jedním konkrétním řádkem.

Nyní stačí jen ukázat, že na různých řádcích nové matice $P^3$ budou jedničky na různých místech. Pro spor předpokládejme, že třeba na $p^3_{mo}, p^3_{no} (m \neq n)$ jsou jedničky (tedy v různých řádcích na jiném místě). Potom by to znamenalo, že $p^1_{m*} = p^2_{*o}$ a zároveň $p^1_{n*} = p^2_{*o}$, tedy $p^1_{m*} = p^2_{n*}$, což je spor.

### 2.3

Inverní matice k permutační matici $P$ je matice $P'$, což ukážeme následovně. $A = P \cdot P'$: $A_{ij} = \sum_{k=1}^{n} p_{ik} \cdot p'_{kj}$. Součin $p_{ik} \cdot p'_{kj} = p_{ik} \cdot p_{jk}$ bude 1 právě a jen tehdy, když $i = j$ a zároveň $k$ nabývá jedné konkrétní hodnoty. Pro ostatní $k$ na ostatních pozicích zůstávají nuly, tedy 1 budou jen na diagonálách. Z toho $A = I$ a tedy $P$ má inverzi $P'$.

### 2.4

Násobíme-li $P \cdot P$, dostaneme výsledek rozdílný od $P$. Jediná permutační matice, u které to neplatí je identita:

$$\begin{aligned} P \cdot P &= P \\ P^{-1} \cdot P \cdot P &= P^{-1} \cdot P \\ 1 \cdot P &= 1 \\ P &= 1 \end{aligned}$$

Jelikož existuje jen konečný počet permutací, permutace identity je jedna z nich a nikdy nedostaneme tu stejnou permutaci mocněním, musí existovat taková mocnina $k$, že $P^k = I$.

$$\begin{aligned} P \cdot P^{l-1} &= P \\ P^{-1} \cdot P \cdot P^{l-1} &= P^{-1} \cdot P \\ 1 \cdot P^{l-1} &= 1 \\ P^{l-1} &= 1 \end{aligned}$$

Pokud by $P^l = P$, pak $P^{l-1} = 1$ a tedy $k = l - 1$. Zároveň je to takový počet permutací, které se dají provést na sebe, než se z výsledku stane identická permutace. Pokud totiž provedeme $x \cdot k$ mocnění ($x \in \mathbb{N}$), z asociativy násobení víme, že dostaneme tvar $P^{x \cdot k} = P^k \cdot P^k \cdot \ \dots \ \cdot P^k = I \cdot I \cdot \ \dots \ \cdot I = I$.

Násobení $P \cdot P$ posune všechny prvky dál ve svých cyklech (rotace). Pro cyklus délky $x_i$ je třeba právě $x_i$ těchto rotací (nebo jakýkoliv jejich celočíselný násobek). Hledáme tedy takové nejmenší přirozené $y$, že $\forall i \ x_i | y$, tedy $y$ je nejmenší společný násobek délek všech cyklů. $y$ je tedy naše hledané $k$, neboť $P^{k+1} = P$ a tedy $P^k = I$. Tímto způsobem je také definovánas Landauova funkce (pro nejhorší případy cyklů).

## 3 Matice Pascalova trojúhelníku

### 3.1

$$L_5 \cdot U_5 = L_5 \cdot L_5^T = S_5 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 15 \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 35 \\ 1 & 5 & 15 & 35 & 70 \end{bmatrix}$$

### 3.2

Je třeba ukázat, že:

$$s_{ij} = \sum_{k=1}^{n} l_{ik} \cdot u_{kj} \qquad n = min(i,j)$$
$$\binom{i+j}{i} = \sum_{k=1}^{n} \left[ \binom{i}{k} \cdot \binom{j}{k} \right]$$

Důkaz bude kombinatorický. $i + j$ prvků si rozdělme do dvou skupin $i, j$. Z první vybereme $k$ prvků, z druhé taky. To můžeme udělat $\binom{i}{k}, \binom{j}{k}$ způsoby pro každou množinu. Dohromady tedy $\binom{i}{k} \cdot \binom{j}{k}$ pro nějaké pevné $k$. Stačí jen sečíst pro všechny možnosti $k$ (sumítko, což dává kýžený výsledek $\binom{i+j}{i}$.