

Popis

Nejprve vyřešíme problém pro hranovou k -souvistlost a pak vrcholovou souvislost převedeme na hranovou. Jestliže je graf hranově k -souvistlý, pak se po šikovném odebrání alespoň k hran stane nesouvistlým, tedy rozpadne se na alespoň dvě komponenty. Pokud se podíváme na původní graf, pak z vět z KG1 plyne, že mezi komponentami neexistovalo k vrcholově disjunktních cest.

Vyberme si tedy náhodný vrchol. Ten náleží do nějaké ze dvou množin vrcholů, které se po odebrání k hran stanou komponentami souvislosti. BÚNO $x \in K_1$. Pak $I(a, b) := \# \text{hranově disjunktních cest mezi } a, b$.

Pak graf má hranovou souvislost: $q = \min\{I(x, b), b \in V\}$.

Důkaz

Sporem předpokládejme, že graf má hranovou w -souvistlost $w \neq q$. Zcela jistě $q > w$, neboť jinak bychom použili oněch q disjunktních cest a graf by se nám rozpadl. Ani druhá nerovnost neplatí, neboť kdyby existovaly jiné dva vrcholy $(j, k) : w = I(j, k) < q$, pak po odebrání w hran dostaneme dvě komponenty $j \in K_1, k \in K_2$, ale $v \in K_1$ a mezi j, v v komponentě K_1 existuje alespoň q hranově disjunktních cest, neboť tak jsme q vypočítali. Potom ale $q = I(v, k) = I(j, k) = w$, což je spor s předpokladem nerovnosti.

Převedení problému

Každý vrchol v můžeme rozdělit na v', v'' . Každou sousedící hranu $\{u, v\}$ v původním grafu rozdělíme na dvě orientované: $(u, v'), (v'', u)$. Navíc zapojíme hranu (v', v'') . V takto vzniklém grafu odpovídá hranová souvislost vrcholové souvislosti v původním grafu, neboť odebráním (x', x'') hrany odebíráme vrchol a odebrání (x'', y') hrany si nepolepšíme, než kdybychom odebrali (x', x'') , nebo (y', y'') (až na patologické případy). Šla by též udělat o něco komplexnější konstrukce duálního grafu.

Algoritmus

1. Zkonstruujeme graf G^D dle popisu výše
2. Zvolíme náhodné x' a vypočítáme $\min\{I(x', b'), b' \in V'^D\}$ za pomoci hledání maximálního toku (každé hraně přiřadíme kapacitu 1)

Složitost

Krok 1 je lineární k počtu vrcholů a hran, tedy $O(m + n)$. Následně musíme spočítat $I(x', b')$, což trvá $O(n^2(n + m))$. To je zároveň složitost tohoto řešení.