Cvičení 8

Vilém Zouhar

1

$$\sum_{n=1}^{\infty} sin(\frac{\pi}{2} \cdot n) \leq 5 \tag{1}$$

$$\text{nezáporná: } \frac{n^2+2}{n^3+n} \geq 0 \tag{2}$$

$$\text{nerostoucí: } \frac{(n+1)^2+2}{(n+1)^3+n+1} \leq \frac{n^2+2}{n^3+n} \tag{3}$$

$$(n^2+2n+3)(n^3+n) \leq (n^2+2)(n^3+3n^2+4n+1) \tag{4}$$

$$n^5+2n^4+4n^3+2n^2+3n \leq n^5+3n^4+6n^3+7n^2+8n+2 \tag{5}$$

$$0 \leq 3n^4+2n^3+5n^2+8n+2 \tag{6}$$

$$\text{limita: } \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2}{n^3+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{2}{n^2}}{n+\frac{1}{n}} = 0 \text{ z aritmetiky limit} \tag{7}$$

Jsou splněny všechny požadavky pro dirichletovo kritérium, tedy řada $\sum_{n=1}^{\infty} sin(\frac{\pi}{2} \cdot n) \cdot \frac{n^2+2}{n^3+n}$ konverguje. Nyní ještě srovnávacím kritériem ukážeme, že nekonverguje absolutně.

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \left| sin(\frac{\pi}{2} \cdot n) \cdot \frac{n^2+2}{n^3+n} \right| \geq \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{n^2+2}{n^3+n} \cdot \frac{1}{10} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| \geq 0 \tag{8}$$

$$\text{neboť pro každou lichou a sudou dvojici po sobě jdoucích členů (n liché):} \tag{9}$$

$$\left| sin(\frac{\pi}{2} \cdot n) \cdot \frac{n^2+2}{n^3+n} \right| + \left| sin(\frac{\pi}{2} \cdot (n+1)) \cdot \frac{(n+1)^2+2}{(n+1)^3+n+1} \right| \geq \left| \frac{n^2+2}{n^3+n} \cdot \frac{1}{10} \right| + \left| \frac{(n+1)^2+2}{(n+1)^3+n+1} \cdot \frac{1}{10} \right| \tag{10}$$

$$10 \cdot \frac{n^2+2}{n^3+n} + 0 \geq \frac{n^2+2}{n^3+n} + \frac{(n+1)^2+2}{(n+1)^3+n+1} \tag{11}$$

$$\text{víme, že posloupnost je nerostoucí, tedy:} \tag{12}$$

$$10 \cdot \frac{n^2+2}{n^3+n} \geq \frac{n^2+2}{n^3+n} + \frac{n^2+2}{n^3+n} \geq \frac{n^2+2}{n^3+n} + \frac{(n+1)^2+2}{(n+1)^3+n+1} \text{ což je pravda} \tag{13}$$

$$\text{pro každou sudou a lichou dvojici po sobě jdoucích členů (n sudé):} \tag{14}$$

$$\left| sin(\frac{\pi}{2} \cdot n) \cdot \frac{n^2+2}{n^3+n} \right| + \left| sin(\frac{\pi}{2} \cdot (n+1)) \cdot \frac{(n+1)^2+2}{(n+1)^3+n+1} \right| \geq \left| \frac{n^2+2}{n^3+n} \cdot \frac{1}{10} \right| + \left| \frac{(n+1)^2+2}{(n+1)^3+n+1} \cdot \frac{1}{10} \right| \tag{15}$$

$$0 + 10 \cdot \frac{(n+1)^2+2}{(n+1)^3+n+1} \geq \frac{n^2+2}{n^3+n} + \frac{(n+1)^2+2}{(n+1)^3+n+1} \tag{16}$$

$$\text{ukážeme silněji (za pomocí toho, že posloupnost je nerostoucí):} \tag{17}$$

$$10 \cdot \frac{(n+1)^2+2}{(n+1)^3+n+1} \geq 2\frac{n^2+2}{n^3+n} \geq \frac{n^2+2}{n^3+n} + \frac{(n+1)^2+2}{(n+1)^3+n+1} \tag{18}$$

$$10(n^2+2n+3)(n^3+n) \geq 2(n^2+2)(n^3+3n^2+4n+2) \tag{19}$$

$$10(n^5+2n^4+4n^3+2n^2+3n) \geq 2(n^5+3n^4+6n^3+8n^2+8n+4) \tag{20}$$

$$8n^5+14n^4+24n^3+4n^2+14n \geq 8 \text{ což je pravda pro přirozená čísla} \tag{21}$$

$$\text{Obě řady jsou rostoucí, tedy nerovnost platí.} \tag{22}$$

Stačí nám tedy ukázat, že $\sum |b_n|$ nekonverguje. To uděláme srovnávacím kritériem:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\frac{n^2+2}{n^3+n} \cdot \frac{1}{10}|}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3+2n}{10n^3+10n} = \frac{1}{10} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| \text{ diverguje} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ nekonverguje absolutně} \tag{23}$$

Použili jsme tedy dvakrát srovnávací kritérium.

2

Nejprve srovnávacím kritériem ukážeme, že řada nekonverguje absolutně.

$$\sum \left| \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n} \right| = \sum \frac{1}{n+(-1)^n} \geq \sum \frac{1}{n+1} \tag{24}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \tag{25}$$

$$\tag{26}$$

Tedy $\sum \frac{1}{n+1}$ nekonverguje, proto $\sum \frac{1}{n+(-1)^n}$ nekonverguje a tudíž $\sum \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$ nekonverguje absolutně. Pro konvergenci nejprve ukážeme, že $\sum \frac{1}{n\cdot(n+(-1)^n)}$ a $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ konvergují.

$$\sum \frac{1}{n\cdot(n+(-1)^n)} \geq 0 \ \wedge \ \sum \frac{1}{n\cdot(n+(-1)^n)} \leq \sum \frac{1}{n\cdot(n-1)} = \sum \frac{1}{n^2-n} \leq \sum \frac{2}{n^2} \tag{27}$$

O $\sum \frac{2}{n^2}$ víme, že konverguje, tedy ze srovnávacího kritéria i původní řada konverguje.

$$\frac{1}{n} \geq 0, \frac{1}{n} \geq \frac{1}{n+1}, \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \tag{28}$$

Podmínky pro Leibnizovo kritérium jsou splněny, tedy řada $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ konverguje.

$$\sum \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n} = \sum \frac{(-1)^n}{n} + \sum \frac{-1}{n\cdot(n+(-1)^n)} \tag{29}$$

Víme, že obě řady konvergují, tedy konverguje i jejich součet.

3

Obměnou nutné podmínky pro konvergenci dostaneme, že $lim\ a_n \neq 0 \Rightarrow \sum a_n\ D$. Stačí tedy jen ukázat, že $\lim_{n\to\infty} sin(n) \neq 0$. Ukážeme, že neexistuje:

$$\text{pro spor: } \lim_{n\to\infty} sin(n) = L : \forall\epsilon : \exists n_0 : \forall n > n_0 : L-\epsilon < sin(n) < L+\epsilon \tag{30}$$

$$\text{zvolme } \epsilon = 0.1 : \tag{31}$$

$$\tag{32}$$

$$sin(n) \leq -0.5 \Rightarrow 0 \leq sin(n+3) \tag{33}$$

$$\text{pro krajní body } sin(2k\pi + \frac{\pi}{6} + \pi) = sin(2k\pi + \frac{5\pi}{6} + \pi) = -0.5 \tag{34}$$

$$sin(x) \leq -0.5 \Leftrightarrow x \in [2k\pi + \frac{\pi}{6} + \pi, 2k\pi + \frac{5\pi}{6} + \pi] = A \tag{35}$$

$$\forall y \in [2k\pi + \frac{\pi}{6} + \pi + \frac{5\pi}{6}, 2k\pi + \frac{5\pi}{6} + \pi + \frac{7\pi}{6}] = B : 0 \leq sin(y) \tag{36}$$

$$sin(n) \leq -0.5 \Rightarrow n \in A \Rightarrow n+3 \in B \Rightarrow sin(n+3) \geq 0 \tag{37}$$

$$\text{(to platí, neboť } \frac{5\pi}{6} < 3 < \frac{7\pi}{6} \text{ což ukazovat nebudeme)} \tag{38}$$

$$Pro\ -0.5 \leq sin(n) : L \in [-1.1, -0.4],\ \text{ale pro n+3: } L \in [-0.1, 1.1],\ \text{což je spor} \tag{39}$$

$$\tag{40}$$

$$sin(n) \geq 0.5 \Rightarrow 0 \geq sin(n+3) \tag{41}$$

$$\text{pro krajní body } sin(2k\pi + \frac{\pi}{6}) = sin(2k\pi + \frac{5\pi}{6}) = 0.5 \tag{42}$$

$$sin(x) \geq 0.5 \Leftrightarrow x \in [2k\pi + \frac{\pi}{6}, 2k\pi + \frac{5\pi}{6}] = A \tag{43}$$

$$\forall y \in [2k\pi + \frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{6}, 2k\pi + \frac{5\pi}{6} + \frac{7\pi}{6}] = B : 0 \geq sin(y) \tag{44}$$

$$sin(n) \geq 0.5 \Rightarrow n \in A \Rightarrow n+3 \in B \Rightarrow sin(n+3) \leq 0 \tag{45}$$

$$\text{(to platí, neboť } \frac{5\pi}{6} < 3 < \frac{7\pi}{6} \text{ což ukazovat nebudeme)} \tag{46}$$

$$Pro\ 0.5 \leq sin(n) : L \in [0.4, 1.1],\ \text{ale pro n+3: } L \in [-1.1, 0.1],\ \text{což je spor} \tag{47}$$

$$\tag{48}$$

$$0 \leq sin(n) \leq 0.5 \Rightarrow -0.5 \geq sin(n+4)\ \vee\ -0.5 \geq sin(n+2) \tag{49}$$

$$\text{pro krajní body } sin(2k\pi) = sin(2k\pi + \pi) = 0, sin(2k\pi + \frac{\pi}{6}) = sin(2k\pi + \frac{5\pi}{6}) = 0.5 \tag{50}$$

$$0 \leq sin(x) \leq 0.5 \Leftrightarrow x \in [2k\pi, 2k\pi + \frac{\pi}{6}] \cup [2k\pi + \frac{5\pi}{6}, 2k\pi + \pi] = A \tag{51}$$

$$\forall y_1 \in [2k\pi + \frac{7\pi}{6}, 2k\pi + \frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{3}] = B_1 : sin(y_1) \leq -0.5 \tag{52}$$

$$\forall y_2 \in [2k\pi + \frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{3}, 2k\pi + \pi + \frac{5\pi}{6}] = B_2 : sin(y_2) \leq -0.5 \tag{53}$$

$$sin(n) \geq 0.5 \Rightarrow n \in A \Rightarrow [n+4 \in B_1\ \vee\ n+2 \in B_2] \Rightarrow [sin(n+4) \geq 0.5\ \vee\ sin(n+2) \geq 0.5] \tag{54}$$

$$\text{(to platí, neboť } \frac{7\pi}{6} < 4 < \frac{5\pi}{3}\ \wedge\ \frac{\pi}{3} < 2 < \frac{5\pi}{6} \text{ což ukazovat nebudeme)} \tag{55}$$

$$Pro\ 0.5 \geq sin(n) \geq 0 : L \in [-0.1, 0.6],\ \text{ale pro n+4, nebo n+2: } L \in [-1.1, -0.4],\ \text{což je spor} \tag{56}$$

$$0 \geq sin(n) \geq -0.5 \Rightarrow 0.5 \leq sin(n+4) \ \vee \ 0.5 \leq sin(n+2) \tag{57}$$

$$\text{pro krajní body } sin(2k\pi) = sin(2k\pi+\pi) = 0, sin(2k\pi+\pi+\frac{\pi}{6}) = sin(2k\pi+\pi+\frac{5\pi}{6}) = -0.5 \tag{58}$$

$$0 \leq sin(x) \leq 0.5 \Leftrightarrow x \in [2k\pi+\pi, 2k\pi+\pi+\frac{\pi}{6}] \cup [2k\pi+\pi+\frac{5\pi}{6}, 2k\pi+2\pi] = A \tag{59}$$

$$\forall y_1 \in [2k\pi+\pi+\frac{7\pi}{6}, 2k\pi+\pi+\frac{\pi}{6}+\frac{5\pi}{3}] = B_1 : sin(y_1) \geq 0.5 \tag{60}$$

$$\forall y_2 \in [2k\pi+\pi+\frac{5\pi}{6}+\frac{\pi}{3}, 2k\pi+2\pi+\frac{5\pi}{6}] = B_2 : sin(y_2) \geq 0.5 \tag{61}$$

$$sin(n) \geq 0.5 \Rightarrow n \in A \Rightarrow [n+4 \in B_1 \ \vee \ n+2 \in B_2] \Rightarrow [sin(n+4) \leq -0.5 \ \vee \ sin(n+2) \leq -0.5] \tag{62}$$

$$\text{(to platí, neboť } \frac{7\pi}{6} < 4 < \frac{5\pi}{3} \ \wedge \ \frac{\pi}{3} < 2 < \frac{5\pi}{6} \text{ což ukazovat nebudeme)} \tag{63}$$

$$Pro\ 0.5 \geq sin(n) \geq 0 : L \in [-0.1, 0.6], \text{ ale pro n+4, nebo n+2: } L \in [-1.1, -0.4], \text{ což je spor} \tag{64}$$

Neexistuje žádné L, které by pojmulo všechny hodnoty. Pro všechny možné n najdeme nějaké větší m takové, že nebude ležet v epsilon okolí $sin(n)$. Jinými slovy: kdykoliv uzavřeme $sin(n) \in [L-\epsilon, L+\epsilon]$, pak najdeme nějaké $n > m : sin(m) \notin [L-\epsilon, L+\epsilon]$. Řada tedy nekonverguje.
Kdybychom pracovali s reálnými čísly, tak by stačily najít jen dvě podposloupnosti s různými limitami (třeba $2k\pi$ a $2k\pi+\pi$).