Poznámky ke zkoušce z kombinatoriky a grafů 1. | Vilém Zouhar

Na zkoušce bude zkoušena znalost tří definic, věty s důkazem, přehledu z jednoho tématu a ktomu několik jednoduchých doprovodných úloh. Seznam není kompletní ani závazný — může být požadována znalost pojmů a fakt neuvedených v tomto seznamu.

Definujte pojem vytvořující funkce posloupnosti

Vytvořující funkce posloupnosti $(a_i)_1^\infty$ je mocninná řada $\sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot x^0 = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \ldots$. Z mocninné řady f můžeme vydobýt členy posloupnosti za pomocí derivace: $a_i = \frac{f^{(i)}(0)}{i!}$. Různé operace s funkcí ovlivní posloupnost, kterou vytvořuje. Chová se lineárně k základním operacím. Zajímavá je např. derivace: $b_i = i \cdot a_{i+1}$. $\boxed{\text{s. 4}}$

Definujte zobecněný binomický koeficient

$r \in \mathbf{R}, k \in \mathbf{N}_0, \binom{r}{k} = \frac{r\cdot(r-1)\cdot(r-2)\cdot(r-3)\cdot\cdots\cdot(r-(k-1))}{k!}$ $\boxed{\text{s. 4}}$

Defingujte zobecněnou binomickou větu

$r, x \in \mathbf{R}, (1+x)^r = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r}{k} x^k$, funkce vytvořuje posloupnost binomických koeficientů. Důkaz: podívejme se na taylorův rozvoj dané funkce v bodě 0. Koeficienty jsou přesně daná kombinační čísla. $\boxed{\text{s. 4}}$

Definujte pojem projektivní rovina a její řád

(V, P)je konečná projektivní rovina $\Leftrightarrow P \subseteq 2^V$ a platí tři axiomy/podmínky:
$P0 : \exists č \subseteq V : |č| = 4 \wedge \forall p \in P : |č \cap p| \leq 2$
$P1 : \forall p, q \in P, p \neq q : |p \cap q| = 1$
$P2 : \forall a, b \in V, a \neq b : \exists p \in P : \{a, b\} \subseteq p$
Řád projektivní roviny je *velikost libovolné přímky* -1. Nezáleží na tom jaké, páč jsou všechny stejně velké (důkaz později). $\boxed{\text{s. 7}}$

Definujte pojem duální množinový systém

Duální množinový systém konečné projektivní roviny je konečná projektivní rovina, kde jsou role bodů a přímek prohozeny. $(V, P) \to (P, P') : P' := \{\{q : v \in q, q \in P\}, v \in V\}$ $\boxed{\text{s. 9}}$

Definujte pojem reálná projektivní rovina

Za body volíme přímky procházející počátkem, za přímky roviny, které nimi prochází. Formálně: $V = \{\{(\alpha a, \alpha b, \alpha c), \alpha \neq 0\} : a, b, c \in \mathbf{R}\},\ P = \{a, b, c : a + b + c = 0, a, b, c \neq 0\}$ $\boxed{\text{s. 10}}$

Definujte pojem latinský čtverec a ortogonální latinské čtverce

Latinský čtverec búno na symbolech $[n]$ je matice, která v každém řádku a každém sloupci obsahuje každý symbol z dané množiny právě jednou. Latinské čtverce M, N jsou ortogonální, pokud $\forall m \in s(M), nins(N) \exists i, j : M_{i,j} = m \wedge N_{i,j} = n$ $\boxed{\text{s. 10}}$

Definujte pojem kostry grafu

Kostra grafu G je jeho podgraf na všech vrcholech, který je strom. $\boxed{\text{s. 13}}$

Definujte Laplaceovu matici

Laplaceova matice multigrafu $G = (V, E)$ je rozměrů $|V| \times |V|$:

$$L_{i,j} = \begin{cases} deg(v) & i = j \\ -\#\text{hran mezi } v_i \text{ a } v_j & i \neq j \end{cases}$$

$\boxed{\text{s. 16}}$

Definujte pojmy hranové a vrcholové dvousouvislosti grafu
Graf je vrcholově, resp. hranové dvousouvislý právě tehdy pokud nemá artikulaci, resp. most. $\boxed{\text{s. } 17}$

Definujte pojmy vrcholové k-souvislosti grafu
Vrcholová souvislost

$$K_v(G) = \begin{cases} min|S| & S \subseteq V : G \backslash S \text{nesouvislý}, (\text{vrcholový řez}) \\ n-1 & \text{pro } G = K_n \\ 1 & \text{pro } G = K_1 \end{cases}$$

Graf je vrcholově t-souvislý právě tehdy, pokud vrcholová souvislost $K_v(G) \geq t$. Pomůcka: každý 7-souvislý graf je zároveň 2-souvislý a 1-souvislý (souvislý). $\boxed{\text{s. } 17}$

Definujte pojmy hranovék-souvislosti grafu
Hranová souvislost

$$K_e(G) = \begin{cases} min|F| & S \subseteq V : G \backslash F \text{nesouvislý}, (\text{hranový řez}) \\ 1 & \text{pro } G = K_1 \end{cases}$$

Graf je hranově t-souvislý právě tehdy, pokud hranová souvislost $K_e(G) \geq t$. $\boxed{\text{s. } 17}$

Definujte pojmy artikulace a most
Artikulace, resp. most je vrcholový, resp. hranový řez velikosti 1. $\boxed{\text{s. } 17}$

Definujte pojmy síť a tok
Síť je ohodnocený orientovaný graf s dvěma význačnými vrcholy. Formálně je to čtveřice (G, c, z, s), kde G je patřičný orientovaný graf, $c : E(G) \to \mathbf{R}^+$ jsou kapacity hran, z, s je zdroj a stok.
Tok je přiřazení hodnot hranám v síti tak, že jsou v rozmezí $(0, \text{kapacita})$ a pro každý vrchol kromě zdroje a stoku platí, že to co přiteče opět odteče. $\boxed{\text{s. } 18}$

Definujte pojmy řez a elementární řez
Řez R v síti je taková podmnožina hran, že každá cesta vedoucí $z \to s$ nějakou hranu z R. Elementární řez $R_A = \{(a, b) : a \in A \wedge b \notin A, A \subset V : z \in A, s \notin A\}$. $\boxed{\text{s. } 18}$

Definujte pojem zlepšující cesta
Obvykle k cestě $f : (z, \ldots, s)$. Spočítáme

$$s := min_{e \in E(G)} \begin{cases} c(e) - f(e) & e \text{je hrana ve směru původní cesty} \\ f(e) & e \text{je hrana proti směru} \end{cases}$$

Pokud je $s > 0$, pak se jedná o zlepšující cestu, kde Pak nová cesta $f' : z, \ldots, s$ je definovaná:

$$f'(e) = \begin{cases} f(e) + s & \text{po směru} \\ f(e) - s & \text{proti směru} \end{cases}$$

Adekvátně můžeme upravit původní tok a tím jej zlepšit o s. $\boxed{\text{s. } 22}$

Definujte systém různých reprezentantů
SRR množinového systému $\mathbf{M}$ je prosté zobrazení: $z : \mathbf{M} \to \cup M_i : z(M_i) \in M_i$ $\boxed{\text{s. } 23}$

Definujte pojem párování v grafu
Párování v grafu (V, E) je graf (V, E'), kde stupeň každého vrcholu je nejvýše 1. U perfektní párování požadujeme 1-regularitu grafu.

Definujte Ramseyovo číslo

$R(k, l)$ je nejmenší n takové, že každý graf na n vrcholech obsahuje buď nezávislou množinu velikosti alespoň k, nebo kliku velikosti alespoň l. $\boxed{\text{s. } 26}$

Definujte Hammingovu vzdálenost

Počet symbolů ve kterých se dvě slova stejné délky liší. $dst(x, y) = |\{i : x_i \neq y_i\}|$. Splňuje $\triangle$ nerovnost. Pokud odešleme x a přijmeme y, tak $dst(x, y)$ je počet chyb. $\boxed{\text{s. } 29}$

Definujte kombinatorickou kouli

Se středem x a poloměrem t je $B(x, t) := \{y : dist(x, y) \leq t\}$. $\boxed{\text{s. } 30}$

Nadefinujte Hadamardův kód a určete jeho parametry

Z Hadamardovy matice $HH^T = n \cdot I$ a doplňku $-H$ vezmeme řádky. Takto jsme vytvořili $2n$ slov délky n. Parametry jsou: $(n, 1 + \log_2(n), n/2)_2$ $\boxed{\text{s. } 30}$

Definujte pojem lineární kód o parametrech $[n, k, d]_q$

Kód C, jehož prvky jsou podprostorem $\mathbb{K}^n$, $|C| = q^k, d := min_{x \neq y}\{dist(x, y)\} = min\{dist(x, 0)\}$

Definujte pojmy duální kód a kontrolní matice kódu

Duální kód $C^\perp$ z lineárního kódu C je tvořen vektory $y : \forall x \in C : y^T \cdot x = 0$.
Kontrolní matice C je generující matice $C^\perp$. Je-li generující matice C tvořena $(I_k B)$, pak kontrolní matici vytvoříme jako $S := (-B^T I_{n-k})$. Poté $\forall x \in C : S \cdot x = 0$.

Uveďte a dokažte horní a dolní odhady faktoriálu $n!$ takové, že se liší o fator n
$e \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq ne \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n$ Pravou nerovnost lze ukázat indukcí, u té první je to problematické. Proto je snazší dělat odhad pomocí integrálu.

$$\ln n! = \sum_{1}^{n} \ln i \geq \int_1^n \ln i \, \mathrm{d}i = [i \ln i - i]_1^n = n \ln n - n + 1 \Rightarrow n! \geq e^{n \ln n - n + 1} = e \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

$$\ln n! = \sum_{1}^{n} \ln i \leq \int_1^{n+1} \ln i \, \mathrm{d}i = [i \ln i - i]_1^{n+1} = (n+1)\ln(n+1) - (n+1) + 1 \ldots \text{pro } (n-1)! \to n \ln n - n + 1$$

$$\Rightarrow n \cdot (n-1)! \leq n \cdot e^{n \ln n - n + 1} = ne \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n \quad \square$$

Uveďte a dokažte horní a dolní odhady kombinačního čísla $\binom{2m}{m}$ takové, že se liší o faktor $\sqrt{2}$
$\frac{2^{2n}}{2\sqrt{n}} \leq \binom{2n}{n} \leq \frac{2^{2n}}{\sqrt{2n}}$. Ukážeme jen první nerovnost. Druhá lze podobně, doknce snadněji.

$$P_n := \frac{1 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot 2n} = \frac{(2n)!}{(2 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot 2n)^2} = \frac{(2n)!}{2^{2n} \cdot n!^2} \Rightarrow \text{ chceme } \frac{1}{2\sqrt{n}} \leq P_n$$

$$1 > \left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\left(1 - \frac{1}{5^2}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{(2n-1)^2}\right) = \frac{2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot 2n}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)} = \frac{1}{4n \cdot P_n^2} \Rightarrow P_n \geq \frac{1}{2\sqrt{n}} \quad \square$$

Zformulujte a dokažte větu o počtu bodů a přímek projektivní roviny řádu n
V KPR řádu n je $n^2 + n + 1$ přímek a bodů. Stupeň každého vrcholu je $n + 1$. Zvolíme přímku p a bod x mimo ni (pro každé x z P0 taková dvojice musí existovat). Přímka p má $n + 1$ bodů, každý bod má s x právě jednu společnou přímku. Tedy stupeň je alespoň $n + 1$. Pokud by x procházela nějaká přímka navíc, pak by se musela protnout s p, ale všechny její body jsme již vyčerpali.
Pro počet bodů uvažme všechny body, které jsme v předchozím postupu potkali. Napočítali jsme $n + 1$ na p, pak 1 za x, ale také $n - 1$ za každou přímku x procházející. Tedy alespoň $n + 1 + 1 + (n - 1)(n + 1) = n^2 + n + 1$. Kdyby někde existoval bod, který jsme nezapočítali, tak by musel mít s x společnou přímku, to ale už nemůže, neboť jsme x již nasytili. $\square$

Zformulujte a dokažte větu o duálním systému k projektivní rovině
A je KPR $\Rightarrow \underline{d(A)}$ je KPR. Platí i ekvivalence, neboť duál duálu je původní KPR.
1. P0: č $= \{\overline{ab}, \overline{ad}, \overline{bc}, \overline{cd}\}$. Průnik jakýchkoliv tří je prázdný.
2. P1: $\forall p_1^d, p_2^d \in P_d | p_1^d \cap p_2^d| = 1$, plyne z původního P2: $\forall v_1, v_2 \in V = P_d \exists! p \in P = V_d : \{v_1, v_2\} \in p$
3. P2: $\forall v_1^d, v_2^d \in V_d \exists! p_d \in P^d : \{v_1^d, v_2^d\} \in p_d$, plyne z původního P1: $\forall p_1, p_2 \in P = V_d | p_1 \cap p_2| = 1$ $\square$

Zformulujte a dokažte větu o konstrukci projektivní roviny z algebraického tělesa
$\exists T_n$ konečné algebraické těleso řádu n, pak $\exists$ KPR řádu n.
$V := \{\{(\alpha a, \alpha b, \alpha c) : \alpha \neq 0\} : a, b, c \in T_n, (a, b, c) \neq (0, 0, 0)\}, P := \{\{xa + yb + zc = 0 : (a, b, c) \in V\}, (x, y, z) \in T_n^3\}$
$|V| = \frac{n^3-1}{n-1} = n^2 + n + 1$
P0: č $= \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 1)\}$
P1: $\forall p_1, p_2 \in P : |p_1 \cap p_2| = 1 \Leftarrow xa + yb + zc = 0 \wedge x'a + y'b + z'c = 0$ má kernel dimenze 1, tedy definuje jednu třídu bodu.
P1: $\forall v_1, v_2 \in V \exists p \in P : \{v_1, v_2\} \in p \Leftarrow xa + yb + zc = 0 \wedge xa' + yb' + zc' = 0$ má kernel dimenze 1, tedy definuje jednu třídu přímky (opět se leší jen alfanásobkem). $\square$

Zformulujte a dokažte větu o vztahu mezi projektivními rovinami a latinskými čtverci
Existuje $n - 1$ ortogonálních latinských čtverců rozměru n právě tehdy když existuje KPR řádu n. Nejprve zleva doprava. Vytvoříme si body $r, s, l_1, l_2, \ldots, l_{n-1}, m_{1,1}, m_{1,2}, \ldots, m_{1,n}, \ldots, m_{n,n}$. Dále přímky čtyř typů: I. $\{r, s, l_1, l_2, \ldots, l_{n-1}\}$
II. $\{r, m_{1,1}, m_{1,2}, \ldots, m_{1,n}\}, \{r, m_{2,1}, m_{2,2}, \ldots, m_{2,n}\}, \ldots, \{r, m_{n,1}, m_{n,2}, \ldots, m_{n,n}\}$

III. $\{s, m_{1,1}, m_{2,1}, \dots, m_{n,1}\}, \{r, m_{1,2}, m_{2,2}, \dots, m_{n,2}\}, \dots, \{r, m_{1,n}, m_{2,n}, \dots, m_{n,n}\}$
IV. $\{\{l_i, m_{i,s(i,s,r)} : s, r \in [n]\}, i \in [n-1]\}$, kde $r(i,s,r) =$ pozice symbolu s v i. latinském čtverci v řádku r.
Ověříme axiomy:
P0: č $= \{r, s, m_{1,1}, m_{2,2}\}$
P1:
I a II, III, nebo IV $\rightarrow$ průsečíkem je r, s, resp. l_i.
II a III $\rightarrow$ patřičné místo v matici
IV a II, nebo III $\rightarrow$ každý symbol je v řádku, resp. sloupci právě jednou
P2:
Triviální. Zajímavé jsou pouze $m_{a,b}, m_{c,d}$ v obecné poloze. Pokud určují různé symboly, pak z lemma pro $n-1$ ortogonálních latinských čtverců plyne, že pro každé dvě okénka $(a,b), (c,d)$ existuje latinský čtverec, ve kterém si jsou hodnoty rovny $\rightarrow$ IV.
Obráceně si vezmeme z KPR libovolnou přímku a její body označíme $\{r, s, l_1, \dots, l_{n-1}\}$ Zbytek bodů označme za $m_{i,j}$, těch musí být n^2. Získáme takto latinské čtverce z principu popsaného výše. Jedná se o latinské čtverce, neboť průnik každé symbolové přímky z l_i je s řádkem a sloupcem jednoznačný. Jednoznačné průniky IV nám dávají ortogonalitu všech čtverců. $\square$

Zformulujte a dokažte větu o počtu koster grafu K_n prostřednictvím zakořeněných stromů
Počet koster grafu K_n je n^{n-2}.
Dvěma způsoby spočítáme počet zakořeněných koster, tj. trojice (kostra, kořen, očíslování).
1. #koster $\cdot n \cdot (n-1)!$
2. Pomocí povykos. $\prod_1^n n \cdot (n-i)$, vybereme kam bude směřovat šipka (může kamkoliv), pak odkud (pouze z vrcholu, který zatím nemá výstupní hranu). $= n^{n-1}(n-1)! \Rightarrow \#koster = n^{n-2}$ $\square$

Počet koster za pomocí Laplaceovy matice $\star$
Pozorování 1: $\kappa(G) = \kappa(G \backslash e) + \kappa(G \circ e)$
Pozorování 2:

$$L' = L - \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots 0 \\ 0 & \cdots & \\ \vdots & & \end{bmatrix} \Rightarrow |L| = |L^{1,1}| + |L'|$$

Důkaz indukcí. Platí pro malý případ, pak indukční krok, ve kterém odebereme hranu.

$$L' = L - \begin{bmatrix} 1 & -1 & \cdots 0 \\ -1 & 1 & 0 \cdots \\ 0 & \vdots & \end{bmatrix} = \text{Laplaceova matice grafu } G \backslash e$$

$$L^{1,1} = \text{Laplaceova matice grafu } G \circ e$$

$$|L^{1,1}| = |(L^{1,1})^{1,1}| + |L'^{1,1}| = K(G \circ e) + K(G \backslash e) = K(G) \ \square$$

Zformulujte a dokažte větu o počtu koster grafu K_n prostřednictvím determinantů
Počet koster grafu K_n je n^{n-2}.
Laplaceova matice je

$$\begin{bmatrix} n-1 & -1 & \cdots -1 \\ -1 & n-1 \cdots & \\ \vdots & & \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots 1 \\ -1 & n-1 & -1 \cdots \\ -1 & -1 \vdots & \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots 1 \\ 0 & n & 0 \cdots \\ 0 & 0 & n \quad \vdots \end{bmatrix}$$

Dostali jsme se k dolní trojúhelníkové matice, jejíž součin na diagonále je n^{n-2}, což je zároveň její determinant a z předchozí věty i počet koster grafu K_n. $\square$

Zformulujte a dokažte větu o počtu stromů s předepsaným skóre
Graf G má $\frac{(n-2)!}{(d_1-1)!(d_2-1)!\cdots(d_n-1)!}$ koster se skóre $(d_1, d_2, \cdots, d_n)$
Důkaz indukcí podle hran. Pokud je graf např. cesta pak tvrzení platí. Jinak vybereme vrchol stupně 1

(takový musí existovat, bůno je poslední), který odebereme. Mohli jsme jej ale odebrat od $n-1$ ostatních vrcholů, proto: $\sum_1^{n-1} \frac{(n-3)!}{(d_1-1)!\cdots(d_i-2)!\cdots(d_{n-1}-1)!} = \frac{(n-3)!(d_1+d_2+\cdots+d_{n-1}-(n-1))}{(d_1-1)!(d_2-1)!\cdots(d_n-1)!} = \frac{(n-3)!(2n-3-(n-1))}{(d_1-1)!(d_2-1)!\cdots(d_n-1)!} = \frac{(n-2)!}{(d_1-1)!(d_2-1)!\cdots(d_n-1)!}$ $\square$

Zformulujte a dokažte větu o počtu nezávislých množin v množinovém systému (Spernerova)
Pokud je nějaký množinový systém uspořádán inkluzí, pak je velikost největšího antiřetězce nejvýše $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.
Dvojím způsobem spočítáme (M, R), kde M je prvkem nejdelšího antiřetězce a R je nejdelší antiřetězec. 1. $\#(M,R) \leq \#R = n!$, neboť pokud by (M_i, R) a zároveň (M_j, R), pak M_i, M_j nejsou neporovnatelné. Každý řetězec odpovídá jednoznačné permutaci. 2. $\#(M,R) = \sum |M_i|!(n-|M_i|)! \Rightarrow \sum |M_i|!(n-|M_i|)! \leq n! \Rightarrow \sum \binom{n}{|M_i|}^{-1} \leq 1 \Rightarrow \#M \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^{-1} \leq 1 \Rightarrow \#M \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^{-1}$ $\square$

Zformulujte a dokažte větu o maximálním počtu hran v n-vrcholovém grafu bez čtyřcyklů
Graf bez čtyřcyklů má nejvýše $(n^{3/2}+n)/2$ hran.
Dvojím způsobem budeme počítat vidličky. 1. $\#V \leq \binom{n}{2}$. 2. Z vidličkosti $\#V = \sum \binom{deg(v_i)}{2}$

$$\Rightarrow \sum \binom{deg(v_i)}{2} \leq \binom{n}{2}$$
$$\sum_1^n (deg(v_i)-1)^2 \leq n^2$$
$$a := (deg(v_i)-1, deg(v_i)-1, deg(v_i)-1, \cdots, deg(v_i)-1), b = (1,1,1,\cdots,1)$$
$$< a, b > \leq ||a|| \cdot ||b|| \Rightarrow \sum (deg(v_i)-1) \leq \sqrt{n}\sqrt{\sum (deg(v_i)-1)^2} \leq \sqrt{n} \cdot |n|$$
$$2|E| - n \leq \sqrt{n} \cdot |n| \quad \square$$

Zformulujte a dokažte větu, která popisuje, jak vytvořit všechny 2-souvislé grafy, a dokažte ji
Graf je 2-souvislý právě tehdy, jestliže lze vytvořit z nějakého cyklu přidáváním uší.
Implikace zprava doleva je triviální. Cyklus je dvousouvislý a přidáním ucha nevznikne artikulace.
Naopak uvažme největší graf H, který lze vytvořit z 2-souvislého grafu přidáváním uší. Takový jistě existuje, neboť v původním grafu musí exitsovat alespoň jedna kružnice. Pro spor $H \neq G$, vezmeme $x \in G \backslash H$ takový, že x má souseda y v H. Odebereme y, pak jistě ale musí do zbytku H vést z x nějaká cesta. Tím jsme však vytvořili ucho. $\square$

Zformulujte a dokažte větu, která popisuje grafy, v nichž dvojice vrcholů určují kružnice
Jedná se o dvousouvislé grafy. Indukcí podle počtu uší. Z G odebereme libovolné ucho a rozebereme případy:
$x \in U, y \in U$, pak existuje jedna cesta v uchu, druhá mezi koncovými body ucha $\rightarrow$ kružnice.
$x \notin Y, y \notin U$, pak z indukčního předpokladu existuje kružnice.
$x \in U, y \notin U$, pak z jednoho konce ucha k_1 vede kružnice do y, z druhého konce ucha k_2 taky, ale co když se nám kružnice protnou? V tom případě zvolíme patřičné části kružnice. To funguje i tehdy, neexistuje dvojice částí kružnic, které by byly disjunktní (seskládáme z polovin kružnic). $\square$

Zformulujte a dokažte větu, která charakterizuje vrcholově t-souvislé grafy (Mengerova) $\frown$
Graf je vrcholově t-souvislý právě tehdy když pro každou dvojici vrcholů existuje t vrcholově disjunktních cest mezi nimi.
Implikace zprava doleva je zřejmá, neboť jakýkoliv řez by musel mít velikost alespoň t, aby přerušil všechny cesty. Pro druhou implikaci nejprve dokážeme pomocné tvrzení, které je silnější: Pokud pro $|A| = |B| = t$ neexistuje (A, B) řez velikosti menší, než t, pak $\exists t$ disjunktních cest mezi A a B.
Indukcí podle $|E|$: aby neexistoval (A, B) řez velikosti t, pak $A = B$, tedy $\exists t$ disjunktních cest. Jinak uvažme nějakou hranu e. Pokud $G \backslash e$ nemá žádný (A, B) řez velikosti $< t-1$, pak jsme z IP vyhráli. Pokud $\exists$ velikosti $t-1$, pak každá cesta (A, B) prochází buď daným řezem, nebo hranou e a to vždy stejným směrem. Konce e budiž u, v. Pak G nemá (A, S_u) řez velikosti menší $t-1$. Pokud by měl, pak by to byl i řez v (A, B). Dále $G \backslash e$ nemá (A, S_u) řez velikosti menší $t-1$. Pokud by měl, pak by existovala cesta v G, která by protla S, pak v, pak u, což je alespor s minimalitou řezu. Pak ale z IP existuje t disjunktních cest mezi A a S_u, stejně jako S_v

a B. Ty můžeme spojit a máme chtěné cesty.
Za využití pomocného tvrzení vybereme $A = N(x), B = N(y)$ (pro případ, kdy x sousedí s y tuto hranu budeme považovat za jednu cestu). Pak $|A| = |B| = t$, jinak by stupeň vrcholu byl méňě než t. Použijeme předchozí lemma a našli jsme t disjunktních cest. $\square$

Zformulujte a dokažte větu, která charakterizuje hranově t-souvislé grafy (Ford-Fulkersonova)
Graf je hranově t-souvislý právě tehdy když pro každou dvojici vrcholů existuje t hranově disjunktních cest mezi nimi.
Za každý vrchol připojíme list. Pak vytvoříme line graph, na který použijeme Mengerovu větu. Je-li line graph vrcholově t-souvislý, pak je hranově t-souvislý i původní graf (naopak neplatí). $\square$

Zformulujte a dokažte větu, která dává do vztahu toky a řezy v sítích $\frown$
Jedná se o dvě věty: $\forall$ tok $f, \forall$ elem. řez R_A: $w(f) = \sum_{u \in A, v \notin A} f(u,v) - \sum_{u \in A, v \notin A} f(v,u)$.
Důkaz za pomocí definice toku a vlastnosti každého vrcholu. $w(f) = \sum_{(z,v)\in E} f(z,v) - \sum_{(v,z)\in E} f(v,z), \forall v \neq z, s : 0 = \sum_{u:(v,u)\in E} f(v,u) - \sum_{u:(u,v)\in E} f(u,v) \Rightarrow w(f) = \sum_{u\in A}(\sum_{u:(v,u)\in E} f(v,u) - \sum_{u:(u,v)\in E} f(u,v)) = \sum_{u,v\in A,(u,v)\in E(f(u,v)-f(v,u)} + \sum_{u\in A, v\notin A} f(u,v) - \sum_{u\in A,v\notin A} f(v,u) = \sum_{u\in A,v\notin A} f(u,v) - \sum_{u\in A,v\notin A} f(v,u)$

Druhá: (minimaxová): Velikost největšího toku odpovídá velikosti nejmenšího řezu.
První ukážeme nerovnost, pak rovnost v určitém případě, nakonec existenci.
1. Pro R volíme R_A: $w(f) = \sum_{u\in A,v\notin A} f(u,v) - \sum_{u\in A,v\notin A} f(v,u) \leq \sum_{u\in A,v\notin A} f(u,v) \leq \sum_{u\in A,v\notin A} c(u,v) = c(R_A) \leq c(R)$
2. Dokud lze, tak nacházíme zlepšující cesty, tím se přibližujeme ke kapacitě řezu, kterou přesáhnout nelze.
3. Jestliže vybíráme z celých, nebo racionálních čísel, tak po konečném počtu kroků skončíme. V reálných to platit nemusí. $\square$

Zformulujte a dokažte větu o existenci systému různých reprezentantů (Hallova) $\frown$
$\mathbf{M}$ má SRR $\Leftrightarrow \forall J \subseteq I : |\cup_{j\in J} M_j| \geq |J|$
Implikace zleva doprava je triviální obměnou. Pokud by to neplatilo, tedy bychom našli nějaké množiny, jejichž sjednocení je méně, než jejich počet, pak rozhodně nemůže existovat SRR.
Obráceně vytvoříme z grafu incidence síť, kde za $\mathbf{M}$ připojíme ke všem množinám z a za sjednocení prvků připojíme s. Všechny hrany mají kapacitu 1. Prvním odhadem zjistíme, že nejmenší řez nemůže být větší než $min\{deg(z), deg(s)\} \geq$ (z podmínky) $|M| = |I|$. Pak každou hranu v řezu, která by byla mezi A a B (množiny a sjednocení) můžeme beztrestně nahradit hranou mezi z, A, nebo B, s. Tím si totiž nikdy nepohoršíme. Označme A_r, B_r vrcholy v A, B, které jsou incidentní s hranami v řezu. Jistě nevede žádná hrana mezi $A \backslash A_r$ do $B \backslash B_r$, jinak by to nebyl řez. Velikost nejmenšího řezu je $|A| + |B|$, ale jelikož všechny hrany z $A \backslash A_r$ vedou do B, tak z Hallovy podmínky $|A \backslash A_r| \leq |B|$, tedy $w(f) \geq |A| + |A \backslash A_r| = |I|$. Velikost toku nemůže být víc jak $|I|$, tedy jsme našli párování a SRR. $\square$

Zformulujte a dokažte větu o hranové barevnosti bipartitních grafů
k-regulární bipartitní graf je také k-barevný.
Indukcí dle k. Pro $k = 0, 1$ triviální (máme 0, 1 barvu). Jinak v bipartitním grafu nalezneme párování (z A vede $|A| \cdot k$ hran, což se musí trefit do alespoň $|A|$ vrcholů v B), toto párování obarvíme barvou k, odebereme jej a zbytek obarvíme $k-1$ barvami z IP. $\square$

Zformulujte a dokažte větu o doplnění latinských obdelníků
Jakýkoliv latinský obdelník o rozměrech $n \times k$ lze doplnit na latinský čtverec.
Vytvoříme bipartitní graf, kde $A =$ sloupce, $B = [n]$ a hrana existuje, pokud sloupec daný symbol ještě neobsahuje. Jedná se o $n-k$ regulární bipartitní graf. Tedy jej můžeme obarvit. Každá barva je pak další řádek. $\square$

Zformulujte a dokažte větu o vztahu bistochastických a permutačních matic $\frown$
Bistochastická matice má sloupcové i řádkové sloupce rovny 1 ($Aj = A^T j = j, a_{ij} \in < 0, 1 >$). Permutační matice je jednotková s proházenými řádky (permutační s prvky 0, nebo 1).
Bistochastické matice tvoří konvexní obal permutačních matic (každá bistochastická matice je konvexní kombi-

nací permutačních matic).
Pomocné tvrzení: Z každého řádku a sloupce bistochastické matice si chceme vybrat nenulový prvek (v bistochastické matici je to kladný prvek). Formálně pro každou bistochastickou matici (se součtem s) $A\exists\pi \in S_n$: $\forall i : a_{i\pi(i)} > 0$.
Sestavíme pomocný graf na $I = X = [n]$ takový, že $(i,x) \in E \Leftrightarrow a_{ix} > 0$. Ověříme Hallovu podmínku. $\forall J \subseteq I : \sum_{i\in J,(i,x)\in E} a_{ix} = |J| \cdot s \leq \sum (i',x) \in E, x \in N(J) = \cup M_i' a_{ix} = |\cup M_i'| \cdot s$ (součet každého řádku je s, řádků máme $|J|$, součet každého sloupce je s, součet sloupců je tedy vyšší, ale roven s). $\Rightarrow |J| \leq |\cup M_i| \Rightarrow$ splněna Hallova podmínka, tedy existuje párování a našli jsme permutaci π.
Důkaz indukcí podle počtu nenulových prvků. Pro A se součty s nalezneme pomocí předchozího tvrzení pomocnou permutaci A_π, určíme $m := min_i a_{i\pi(i)}$ a odečteme od A matici $m \cdot A_\pi$. Výsledná matice má řádkové i sloupcové součty stále stejné (o s) a o alespoň jeden nulový prvek více, tedy z IP. Ještě zbývá ukázat, že kombinace je konvexní. Nemůžeme ale z řádku odečíst víc, než je jeho součet, což je však přesně 1. □

Zformulujte a dokažte Ramseyovu větu pro grafy a k barev (včetně případu k = 2) ⌢
Pozorování 1: $R(k,1) = R(1,l) = 1$
Pozorování 2: $\forall k,l \geq 2 : R(k,l) \leq R(k-1,l) + R(k,l-1)$. Mějme graf G na $R(k-1,l)+R(k,l-1)$ vrcholech, $u \in V, B = N(u), A = V \backslash N(u)$, pak $A \geq R(k-1,l)$, nebo $B \geq R(k,l-1)$, jinak bychom nedosáhli chtěného počtu vrcholů. Buď v A existuje klika velikosti l, nebo nezávislá množina velikosti $k-1$, do které pak můžeme přidat u. U B symetricky opačně. □
Pozorování 3: $R(k,l) \leq \binom{k+l-2}{k-1}$. Indukcí $R(k,l) \leq R(k-1,l) + R(k,l-1) \leq \binom{k+l-3}{k-2} + \binom{k+l-3}{k-1} = \binom{k+l-2}{k-1}$
První věta: $\forall k,r \in \mathbb{N}\exists n \in \mathbb{N}$: obarvíme-li hrany K_n pomocí r barev, pak v něm existuje k vrcholů, které indukují jednobarevný podgraf (klika a nezávislá množina je jen pro $r=2$). Značení: $n_{r,k}$.
Důkaz indukcí dle počtu barev (r): $n_{1,k} = k$.
$n_{r,k} \leq R(k, n_{r-1,k})$ Jednu barvu označíme jako bílou, zbylé slijeme dohromady. Pak jistě nalezneme buď bílý podgraf velikosti k, nebo duhový podgraf velikosti $n_{r-1,k}$, což máme zajištěno, že na něm nějaká klika velikosti k existuje. □

Zformulujte a dokažte Ramseyovu větu pro systémy p-tic ⌢
Druhá věta: neobarvujeme dvojice, ale p-tice: $\forall k,p,r \in \mathbb{R}\exists n \in \mathbb{N}$: obarvíme-li $\binom{\lfloor n \rfloor}{p}$ pomocí p barev, potom $\exists A \subseteq \lfloor n \rfloor : \binom{A}{p}$ je jednobarevná.
Důkaz indukcí podle p. $p=1$ Dirichletův princip, $p=2$ 1. zobecnění Ramseyho čísla.
Pro indukční krok nejprve lemma: $\forall r$-obarvení p-tic množiny $B : |B| = 1 + n_{r,p-1}(k).(n_{r,p}(k) = n_{r,k}$ pro p-tice). A pro $\forall x \in B\exists B' \subseteq B : |B'| = k : x \notin B' : \forall t \in \binom{B'}{p-1} \cup \{x\}$ mají stejnou barvu . Pro dostatečně velké B a libovolné $x \in B\exists B' : p-1$-tice z B' a x mají stejnou barvu.
Důkaz: $c : \binom{B}{p} \to [r], def c := \binom{B\backslash x}{p-1} \to [r] : c'(Y) := c(Y \cup \{x\})$. Z IP: $B\backslash x$ obsahuje $B' : |B'| = k : c$ je konstantní na $\binom{B'}{p-1}$. p-tice v B' mají stejnou barvu. Barva takové $p-1$ tice je jako barva $p - tice$ s x. Z konstrukce c' plyne, že B' je hledaná množina.
Nyní ukážeme $n_{r,p}(k) \leq 1 + n_{r,p-1}(1 + n_{r,p-1}(1 + \cdots (n_{r,p-1}(p-1))) \cdots) = n^\star_{r,p}(k)$. Hloubka je $t = r \cdot (r-p) + 1$. Dostaneme obarvení $B_0 : [n^\star_{r,p}(k)]$ a $c : \binom{B_0}{p} \to [r]$. Nyní aplikujeme to lemma t-krát a konstruujeme posloupnost prvků x_i, barev r_i, množin B_i, $B_i := B'_{i-1}$, x_i je prvek zvolený v i-tém kroku, r_i je barva, že všechny p-tice z x_i do B_i jsou barvy r_i. Opakujeme tvoření vějířů. Z Dirichletova principu pro posloupnost barev $b_1, \cdots, b_t$ implikuje, že alespoň jedna z barev se vyskytne $k-p+1$ krát. Prvky x_i odpovídající této barvě tvoří množinu $C = x_{i_1}, \cdots x_{i_l}, |C| \geq k-p+1$, pak hledanou množinu A lze vzít libovolnou z $C \cup B_t$ velikosti k. $|C \cup B_t| \geq (k-p+1) + p - 1 = k$. Libovolná $p$tice z $\binom{A}{p}$ obsahuje prvek z C, ale z volby má stejnou barvu jako všechny ostatní. Důležité je si uvědomit, že se vždy zanořujeme do množiny, která je obarvená zeshora. □

Zformulujte a dokažte větu o existenci bodů v konvexní poloze (Erdős–Szekeresova věta)⌢
$\forall k\exists n$: každá n-tice bodů v $\mathbb{R}^2$ v obecné poloze obsahuje k bodů v konvexní poloze.
Pozorování: Každých 5 bodů obsahuje konvexní 4-úhelník. Pokud konvexní obal přímo tvoří 5,4-úhelník, tak máme vyhráno. Opačně tvoří trojúhelník s dvěma body uvnitř. Vezmeme tedy rozumnou stranu trojúhelníka a tyto dva body a máme 4-úhelník (dvěma body uděláme přímku a dva vrcholy leží na nějaké straně).
Důkaz: $n := n_{2,4}(k)$. Červená barva čtveřice $\to$ jsou v konvexní poloze, modrá barva čtveřice $\to$ nejsou v konvexní poloze. Z 2. zobecnění Ramseyho věty najdeme k bodů stejné barvy. Ale pokud je $k \geq 5$, pak z pozorování víme, že musí vytvářet konvexní 4-úhelník. Tedy jediná jednobarevná množina čtveřic celkově k bodů je ta červená. Pokud víc jak pětice není v konvexní poloze, tak je to kvůli tomu, že nějaká čtveřice není v konvexní poloze (triangulace). □

Zformulujte a dokažte větu o dolním odhadu Ramseyových čísel $\frown$
Horní odhad: $R(k,k) \leq \binom{2k-2}{k-1} \leq 4^k$

Dolní odhad: $R(k,k) \geq \sqrt{2}^k \rightarrow$ Pro každé $k \geq 3$ existuje graf na $2^{k/2}$ vrcholech takový, že $\omega(G) < k \wedge \alpha(G) < k$
Důkaz pravděpodobnostní: Zvolíme náhodný graf, kde $p := \frac{1}{2}$ pravděpodobnost výběru hrany. Vybereme $K \subseteq V, |K| = k, A_K$ je jev, že $G|_K$ je klika. $p(A_K) = 2^{-\binom{k}{2}}$, B_K je jev, že $G|_K$ je nezávislá. $p(B_K) = 2^{-\binom{k}{2}}$. $p(\omega(G)) \geq k \vee p(\alpha(G)) \geq k \leq \sum_{K \subseteq G} p(A_K) + p(B_K) = \binom{2^{k/2}}{k} \cdot 2^{-\binom{k}{2}} \cdot 2 < 1$ (z horního odhadu kombinačního čísla) $\Rightarrow$ existuje graf, který nemá ani dostatečně velkou kliku, ani nezávislou množinu.

Zformulujte a dokažte větu o horním odhadu na velikost samoopravného kódu $\frown$
$|C| \leq \frac{q^n}{V(t)}$
Plyne triviálně z hladového hledání kódu. Kdybychom hledali náhodou nejlépe, tak koule, které odstraňujeme jsou vždy disjunktní. Pokud nastane rovnost, nazýváme kód perfektním. Dolní odhad podobně, ale bereme vždy plnou kombinatorickou kouli $V(d=1)$ $\square$

Zformulujte postup, jakým se kódují a dekódují lineární kódy a dokažte, že tento postup je korektní. $\frown$
Nejprve lemma: s je na $B(0,t)$ prosté.
Důkaz: kdyby ne, pak $\exists y, y' \in B(0,t) : s(y) = s(y') \Rightarrow 0 = s(y-y') \Rightarrow y - y' \in C \Rightarrow dist(y-y', 0) = dist(y, y') \geq 2t+1$, ale $dist(y,y') \leq dist(y,0) + dist(y',0) = 2t \Rightarrow$ spor $\square$.
Za pomocí syndromu a následujících kroků:
1. $y \in B(x,t) \Rightarrow s(x-y) \in B(0,t) \Rightarrow s^{-1}(s(x-y)) = x - y$ (z lemma)
2. $x \in C : s(y-x) = s(y) - s(x) = s(y)$
3. $x = y - (y-x) = y - s^{-1}(s(y-x)) = y - s^{-1}(s(y) - s(x)) = y - s^{-1}(s(y))$

Sepište přehledově, co víte o odhadu faktoriálu
Faktoriál umíme odhadnout dvěma způsoby (i s důkazy), aproximovat jedním. Binomický koeficient obecně jedním odhadem. Prostřední binomický koeficient dvakrát.

Sepište přehledově, co víte o vytvořujících funkcích
Řešení rekurencí, slovní úlohy, kde nás zajímají výběry, vliv operací funkce na posloupnost a naopak.

Sepište přehledově, co víte o řešení rekurentních rovnic
Vytvoření charakteristického polynomu, např. Fibonacci. Lze řešit maticově (diagonalizace).

Sepište přehledově, co víte o projektivních rovinách a latinských čtvercích
Zmíněné věty a lemmata, zejména vztah OLČ a KPR. Nakreslení roviny, reálná projektivní rovina, aplikace LČ.

Sepište přehledově, co víte o počítání koster v grafu
S předepsaným skóre, jako determinant, cayleyho formule třemi způsoby, rekurentně.

Sepište přehledově, co víte o mírách souvislosti grafu
Zejména Mengerova a Ford-Fulkersonova věta. Lze si pomoct Hallovou podmínkou a toky v sítích.

Sepište přehledově, co víte o tocích v sítích
Minimaxová věta, kapacita toku přes řez.

Sepište přehledově, co víte o systémech různých reprezentantů
Hallova podmínka, lze si pomoct toky v sítích.

Sepište přehledově, co víte o Ramseyově teorii
Ramseyho číslo, zobecnění holubníku, dirichletova principu, 1. zobecnění, 2. zobecnění. Použití v důkazu ES věty.

Sepište přehledově, co víte o samoopravných kódech
Opakovaný kód, kód z KPR, hammingova vzdálenost, definice kódu. Transmission noise simulator - opakování znaků a slov: miniprojekt ze střední.

Přehledově vše z poznámek:

Odhady faktoriálu a binomických koeficientů
Tři odhady faktoriálu a tři odhady binomického koeficientu. $\boxed{\text{s. }0}$

Vytvořující funkce
Definice vyvořující funkce ($\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = a(x)$), operace s vytvořující funkcí (součet, násobení skalárem, posun vpravo, vlevo o k pozic, dosazení αx, dosazení x^k, derivace, integrál, součin (konvoluce)).
Definice reálného binomického koeficientu, zobecnění binomické věty, důsledek pro $(1-x)^{-n}$, řešení rekurentně zadaných posloupností, počet binárních stromů. $\boxed{\text{s. }3}$

Konečné projektivní roviny
Definice konečné projektivní roviny, věta o stejně velkých přímkách, definice řádu projektivní roviny, věta o počtech v konečné projektivní rovině.
Definice grafu incidence, definice duálního množinového systému a věta o jeho KPR, věta o KPR řádu algebraického tělesa.
Reálná projektivní rovina $\frown$ $\boxed{\text{s. }6}$

Latinské čtverce
Definice latinského čtverce a ortogonality, čtyři drobná pozorování o ortogonalitě, lemma o nejvýše $n-1$ ortogonálních latinských čtverců, věta o konstrukci mezi KPR a OLČ. $\boxed{\text{s. }10}$

Kostry
Definice kostry, tři důkazy Cayleyho formule, omezení bez C_4, Spernerova věta o nejdelším antiřetězci, počet koster s předepsaným skóre, rekurence pro počet koster.
Definice Laplaceovy matice, trik s linearitou determinantu, počet koster jako determinant. $\boxed{\text{s. }13}$

Souvislost
Definice vrcholového a hranového řezu, vrcholové a hranové souvislosti, lemma o porovnání vrcholové a hranové souvislosti, definice artikulace a mostu, ušaté lemma, důsledek dva na kružnici.
Mengerova věta a její zobecnění, Ford-Fulkersonova věta, definice (A, B) řezu $\boxed{\text{s. }17}$

Toky v sítích
Definice sítě, toku, řezu v síti, kapacity řezu, elementárního řezu. Pozorování o inkluzi elementárního řezu ($R_A \subseteq R$), velikost toku přes řez, minimaxová věta. $\boxed{\text{s. }20}$

Sytémy různých reprezentantů
Definice systému různých reprezentantů, incidenčního grafu, párování, Hallova podmínka, definice vrcholového pokrytí, Kőnigova věta, důsledek o k barevnosti úplného k-regulárního bipartitního grafu.
Definice latinského obdelníka, věta o doplnění obdelníka, definice bistochastické matice, Birkhoff-von Neumannova věta o bistochastických maticích, definice konvexní kombinace. $\boxed{\text{s. }23}$

Ramseyova teorie
Definice Ramseyova čísla, konečnost $R(k, l)$ (rekurentně) a omezení ze shora binomicky, 1. zobecnění (na k barevnost) a patřičná konečnost, 2. zobecnění (na p-tice), Erdős–Szekeresova věta ($\Rightarrow er(\text{Erdős}) = 0$, $er(\text{Szekeres}) \leq 1$), horní a dolní odhad $R(k, k)$. $\boxed{\text{s. }26}$

Samoopravné kódy

Definice abecedy, slova, množiny všech slov, Hammingova vzdálenost, (blokový) kód a jeho parametry, triviální kódy z opakování a KPR, definice Hadamardových kódů a tvorba pro mocniny 2, pozorování o efektu permutací a bijekcí na parametry kódu, definice kombinatorické koule, vzdálenosti, pozorování o $(B(x,t) \cap B(y,t) = \emptyset \Leftrightarrow dist(x,y) \geq 2t+1$.

Tvrzení o objemu kombinatorické koule, Hammingův odhad, Gilbert-Varshamova mez, definice lineárního kódu, pozorování o měření vzdálenosti, definice syndromu, lemma o prostém syndromu, postup dekódování lineárního kódu, definice generující matice, dekódování maticově (tvorba syndromu), definice duálního kódu, definice kontrolní matice, Hammingovy kódy a jejich pomocné tvrzení. $\boxed{\text{s. 29}}$