1. domácí úkol

Vilém Zouhar

07. 11. 2017

1

Relace R je ekvivalence, neboť

1. R je reflexivní:

$$\forall (a,b) \in X : \frac{a}{b} = \frac{a}{b} \quad \Rightarrow \quad (a,b)R(a,b)$$

2. R je symetrická:

$$\forall (a,b),(c,d) \in X : \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \Rightarrow \quad \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \Rightarrow$$
$$(a,b)R(c,d) \Rightarrow (c,d)R(a,b)$$

3. R je tranzitivní:

$$\forall (a,b),(c,d),(e,f) \in X : \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \wedge \quad \frac{c}{d} = \frac{e}{f} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{e}{f}$$
$$(a,b)R(c,d) \wedge (c,d)R(e,f) \Rightarrow (a,b)R(e,f)$$

Třídy ekvivalence jsou charakterizovány zlomky v základním tvaru. Pokud máme dva různé zlomky, (ty obecně můžeme vyjádřit jako: $\frac{ka}{kb}$, kde $\frac{a}{b}$ je zlomek v základním tvaru), pak náleží rozkladu jen když mají stejný tvar v základním tvaru: ($\frac{c}{d}$ je zlomek v základním tvaru)

$$\frac{kc}{kd} \in R_{[a,b]} \Leftrightarrow \frac{kc}{kd} = \frac{a}{b} \Leftrightarrow \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \Leftrightarrow [c = a \wedge d = b] \quad \text{pro nesoudělné dvojice } (a,b),(c,d)$$

2

- $T = R \cap S$ je také symetrická, neboť aby se porušila symetrie T, muselo by jí náležet (x,y), ale ne (y,x) $(x \neq y)$. Tento případ ale nikdy nenastane, neboť případy:
  - $(x,y) \in R,S$, pak také $(y,x) \in R,S$, tedy $\{(x,y),(y,x)\} \subseteq T$
  - $\{(x,y),(y,x)\} \subseteq R$, ale $(x,y) \notin S$, pak také $(y,x) \notin S$, tedy $(x,y) \notin T, (y,x) \notin T$
  - ditto
- $T = R \setminus S$ je také symetrická, neboť aby se porušila symetrie T, muselo by jí náležet (x,y), ale ne (y,x) $(x \neq y)$. Tento případ ale nikdy nenastane, neboť případy:
  - $(x,y) \in R,S$, pak také $(y,x) \in R,S$, tedy $(x,y) \notin T, (y,x) \notin T$
  - $\{(x,y),(y,x)\} \subseteq R$, ale $(x,y) \notin S$, pak také $(y,x) \notin S$, $\{(x,y),(y,x)\} \subseteq T$
  - $\{(x,y),(y,x)\} \subseteq S$, ale $(x,y) \notin R$, pak odečtením nic nezměníme: $(x,y) \notin T, (y,x) \notin T$
- $T = R \circ S$ není symetrická. Ukážeme příkladem trojice (x,y,z): $xRy \wedge yRx \wedge ySz \wedge zSy$, pak xTz, ale ne zTx, tedy T není symetrická.
- $T = R^{-1}$ je také symetrická relace, neboť ze symetričnosti R: $xRy \Leftrightarrow yRx$, tedy $yR^{-1}x \Leftrightarrow xR^{-1}y$.

3

K výrazu odečteme 0, což jej nezmění, pak budeme dělat další elementární úpravy. Předpokládáme, že binomická věta byla již dokázaná, jinak je možné ji ukázat pomocí matematické indukce. Ke konci jsme posunuli indexy sumy, ale zrovna tak, že jsme její součet nezměnili.

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{n} k\cdot(k-1)\binom{n}{k} = \sum_{k=2}^{n} k\cdot(k-1)\binom{n}{k} + 1\cdot(1-1)\binom{n}{1} = \\
&= \sum_{k=2}^{n} k\cdot(k-1)\binom{n}{k} = \sum_{k=2}^{n} \frac{k\cdot(k-1)\cdot n\cdot(n-1)\cdot(n-2)!}{(n-k)!\cdot k\cdot(k-1)\cdot(k-2)!} = \\
&= n\cdot(n-1)\cdot\sum_{k=2}^{n}\frac{(n-2)!}{(n-k)!\cdot(k-2)!} = n\cdot(n-1)\cdot\sum_{k=2}^{n}\binom{n-2}{k-2} = \\
&= n\cdot(n-1)\cdot\left[\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k} + \binom{n-2}{n-2} + \binom{n-2}{n-3} - \binom{n-2}{0} - \binom{n-2}{1}\right] = \\
&= n\cdot(n-1)\cdot\left[\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k} + 1 + (n-2) - 1 - (n-2)\right] = n\cdot(n-1)\cdot\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k} \\
&= n\cdot(n-1)\cdot(1+1)^{n-2} = n\cdot(n-1)\cdot 2^{n-2}
\end{aligned}
$$

4

Předpokládám, že délka slova je vždy 7, tedy slovo je permutací písmen $ABDHORU$. Počet dobrých slov D je tedy: $|D| = |V| - |S|$, kde $|V|$ je počet všech slov a $|S|$ je počet špatných slov.

$$|V| = 7!,\ \ |S| = |S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4 \cup S_5|$$

S_1 jsou slova, která po odškrtání vytvoří DUO
S_2 jsou slova, která po odškrtání vytvoří $HORA$
S_3 jsou slova, která po odškrtání vytvoří $BOUDA$
S_4 jsou slova, která po odškrtání vytvoří $HOUBA$
S_5 jsou slova, která po odškrtání vytvoří $NAROD$

$\lvert S_1\rvert = 840$	Písmena 1. slova jsou zafixovaná, zbytek permutujeme s přepážkami: $\frac{7!}{3!}$
$\lvert S_2\rvert = 210$	Písmena 2. slova jsou zafixovaná, zbytek permutujeme s přepážkami: $\frac{7!}{4!}$
$\lvert S_3\rvert = 42$	Písmena 3. slova jsou zafixovaná, zbytek permutujeme s přepážkami: $\frac{7!}{5!}$
$\lvert S_4\rvert = 42$	Písmena 4. slova jsou zafixovaná, zbytek permutujeme s přepážkami: $\frac{7!}{5!}$
$\lvert S_5\rvert = 0$	N není v abecedě

$\lvert S_1 \cap S_2\rvert = 21$	$.D.U.ORA$ jsou zafixovaná, H vložíme 3 způsoby, B 7
$\lvert S_1 \cap S_3\rvert = 0$	DUO požaduje, aby U bylo před O, ale $BOUDA$ přesně naopak
$\lvert S_1 \cap S_4\rvert = 0$	DUO požaduje, aby U bylo před O, ale $HOUBA$ přesně naopak
$\lvert S_1 \cap S_5\rvert = 0$	N není v abecedě
$\lvert S_2 \cap S_3\rvert = 6$	$..O.U.D.A$ jsou zafixovaná, HB na prvních místech 2 způsoby a R na zbylých 3 pozicích
$\lvert S_2 \cap S_4\rvert = 21$	$HO.U.B.A$ jsou zafixovaná, R vložíme na tečky 3 způsoby, písmeno D kamkoliv 7 způsoby
$\lvert S_2 \cap S_5\rvert = 0$	N není v abecedě
$\lvert S_3 \cap S_4\rvert = 0$	$HOUBA$ požaduje, aby U bylo před B, ale $BOUDA$ přesně naopak
$\lvert S_3 \cap S_5\rvert = 0$	N není v abecedě
$\lvert S_4 \cap S_5\rvert = 0$	N není v abecedě

Kandidáti na neprázdné trojice průniků jsou:

$|S_1 \cap S_2 \cap S_3| = 0 \quad \text{neboť} \quad |S_1 \cap S_3| = 0$
$|S_1 \cap S_2 \cap S_4| = 0 \quad \text{neboť} \quad |S_1 \cap S_4| = 0$ Všechny trojice, čtveřice a pětice průniků jsou tedy nulové

Z PIE: (relevantní pro $k \in 1, 2$, zbytek jsou nuly)

$$|S| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{I \subseteq \binom{[n]}{k}} |\bigcap_{i \in I}| = \sum_{I \subseteq \binom{[n]}{1}} |\bigcap_{i \in I}| - \sum_{I \subseteq \binom{[n]}{2}} |\bigcap_{i \in I}| =$$

$$= |S_1| + |S_2| + |S_3| + |S_4| + |S_5| - |S_1 \cap S_2| - |S_2 \cap S_3| - |S_2 \cap S_4| =$$

$$= 840 + 210 + 42 + 42 - 21 - 6 - 21 = 1086$$

$$\Rightarrow |S| = 1128$$

$$|D| = |V| - |S| = 7! - 1086 = 5040 - 1086 = 3954$$

Počet slov, po jejichž vyškrtání nevznikne žádné ze slov je tedy **3954**.

Poznámka 1: výpočet $|S_i|$

Můžeme si představit, že zafixujeme písmena i-tého slova a permutujeme ta zbylá. To je jako bychom permutovali úplně všechna písmenka, ale odebrali ta, která mají být zafixovaná, tedy: $\frac{7!}{|SL_i|!}$, kde $|SL_i|$ je délka i-tého slova.

Poznámka 2:

Spoustu věcí si lze vypočítat hrubou silou, např. průniky $|S_i \cap S_j \cap ...|$. Třeba tímto skriptem:

```
#!/usr/bin/python3
import itertools

all_words = ["".join(p) for p in itertools.permutations("ABDHORU")]
r = [list(p) for p in itertools.product([0,1], repeat=7)]

words = ["DUO", "HORA", "BOUDA", "HOUBA", "NAROD"]
n = 0
m = 0
for word in all_words:
    words_dup = set(words)
    for t in r:
        new_word = ""
        for i in range(len(t)):
            if t[i] == 1:
                new_word += word[i]
        if new_word in words_dup:
            words_dup.remove(new_word)
    if len(words_dup) == 0:
        n += 1
    elif len(words_dup) == len(words):
        m += 1

print("obsahuji vsechna ze slov: ", n)
print("neobsahujici zadne ze slov: ", m)
```

Počet slov, které po různém vyškrtání dají buď DUO nebo $HORA$ je 21, což jsme předtím ukázali. Přidáním všech pěti nechtěných slov zjistíme, že počet výsledných slov je opravdu **3954**.