1

1.1

Zadání interpretuji tak, že si každý kamarády vybírá náhodný zákusek, nikoliv náhodný druh. Spočítáme počet příznivých výsledků kýženého jevu a pak celkový počet. Podmínku splníme tak, že první tři lidé si vezmou od každého jeden a pak zbytek libovolné různé. Jsou to jevy disjunktní, takže vynásobíme třemi. Celkový počet výsledků je jednoduše výběr z 9 zákusků 5 lidmi.

$$P = \frac{3 \cdot \binom{6}{2}}{\binom{9}{5}} = \frac{5}{14}$$

1.2

Z každého druhu si musí vzít lidé dohromady 2.

$$P = \frac{\binom{3}{2}^3}{\binom{9}{6}} = \frac{9}{28}$$

Jinou úvahou můžeme spočítat opačný jev (zaplníme alespoň jeden ze zákusků)

$$P = 1 - \frac{3 \cdot (\binom{6}{3} - 2) + 3}{\binom{9}{6}} = 1 - \frac{19}{28}$$

1.3

Jestliže zůstal jen jeden věneček, tak zbyly i zároveň i 3 další zákusky. Pokud si tedy Adam vybere, tak si musí vzít jeden z těch tří, aby zůstal věneček. Jelikož si vybírá náhodně uniformně, tak triviálně je z toho pravděpodobnost $\frac{3}{4}$.

2

2.1

Marginální rozdělení nalezneme v posledním sloupci/posledním řádku. Sdružené rozdělení je popsáno vevnitř.

$X\backslash Y$	0	1	2	
0	$\frac{105}{248}$	$\frac{63}{496}$	$\frac{3}{496}$	$\frac{69}{124}$
1	$\frac{147}{496}$	$\frac{21}{248}$	$\frac{3}{496}$	$\frac{12}{31}$
2	$\frac{21}{496}$	$\frac{7}{496}$	0	$\frac{7}{124}$
	$\frac{189}{248}$	$\frac{7}{31}$	$\frac{3}{248}$	1

2.2

$$
\begin{aligned}
&E[X] = \frac{12}{31} + \frac{2 \cdot 7}{124} = \frac{1}{2} \\
&E[Y] = \frac{7}{31} + \frac{2 \cdot 3}{248} = \frac{1}{4} \\
&E[XY] = \frac{21}{248} \cdot 1 \cdot 1 + \frac{3}{496} \cdot 1 \cdot 2 + \frac{7}{496} \cdot 1 \cdot 2 = \frac{1}{8} \\
&cov(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y] = 0 \Rightarrow corr(X,Y) = 0 \\
&P[X=2] \neq 0, P[Y=2] \neq 0, P[X=2, Y=2] = 0 \neq P[X]P[Y] \Rightarrow P[XY] \neq P[X]P[Y] \Rightarrow \text{ závislé}
\end{aligned}
$$

2.3

	Z^a
0	$\frac{(24-a)(23-a)}{552}$
1	$\frac{a(24-a)}{276}$
2	$\frac{a \cdot (a-1)}{552}$

$$
\begin{aligned}
&P[a=i] = \frac{\binom{8}{i} \cdot \binom{24}{8-i}}{\binom{32}{8}} \\
&E[Z^a] = P[Z^a = 1] + 2 \cdot P[Z^a = 2] = \frac{a(24-a)}{276} + 2 \cdot \frac{a \cdot (a-1)}{552} = \frac{a}{12}
\end{aligned}
$$

2.4

Máme zajištěný nestranný odhad střední hodnoty:

$$
\frac{1}{n} \sum Z_i = \widehat{EZ} = \frac{a}{12} \Rightarrow \hat{a} = 12 \cdot \widehat{EZ}
$$

Zaokrouhlujeme nahoru, neboť pokud dostaneme alespoň jednu nenulovou Z_i, pak rozhodně $a \neq 0$.

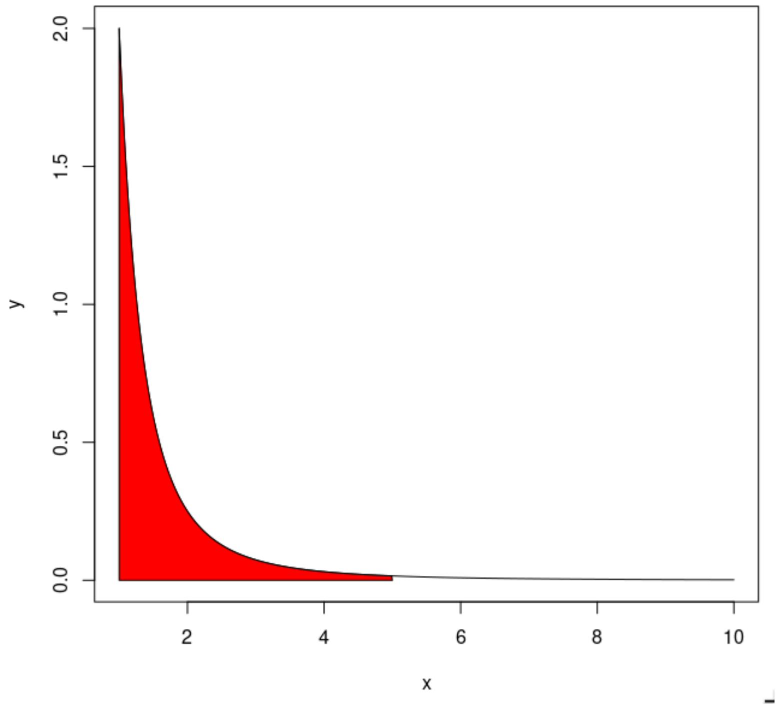
2.5

Provedeno 10000 takových pokusů (pro $n = 20$). Průměrný součet rozdílů reálné a odhadované hodnoty vyšel -0.004298, což je číslo blízko nuly a naznačuje to, že odhad je nestranný. (viz. kód)

3

3.1

$$F(a) = \int_1^a \frac{2}{x^3} dx = [\frac{-1}{x^2}]_1^a = 1 - \frac{1}{a^2}$$
$$P[x \leq 5] = F(5) = 1 - \frac{1}{25} = \frac{24}{25}$$



Jedná se o plochu grafu pod křivkou pro $f(x), x \leq 5$

3.2

$$E[X] = \int_1^\infty x \cdot \frac{2}{x^3} dx = \int_1^\infty \frac{2}{x^2} dx = [\frac{-2}{x}]_1^\infty = 2$$

3.3

$$E[X^2] = \int_1^\infty x^2 \cdot \frac{2}{x^3} dx = [2\ln(x)]_1^\infty = \infty, E[X] \neq \infty \Rightarrow var(X) = \infty$$

3.4

$f_U = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$

$F_U = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x & x \in (0,1) \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$

$X = 1 - \frac{1}{U^2} \to F_X(u) = P[1 - \frac{1}{U^2} \leq u] = P[1 - u \leq \frac{1}{U^2}] = P[U^2 \leq \frac{1}{1-u}] = P\left[U \leq \frac{\pm 1}{\sqrt{1-u}}\right] = F_U\left(\frac{\pm 1}{\sqrt{1-u}}\right)$

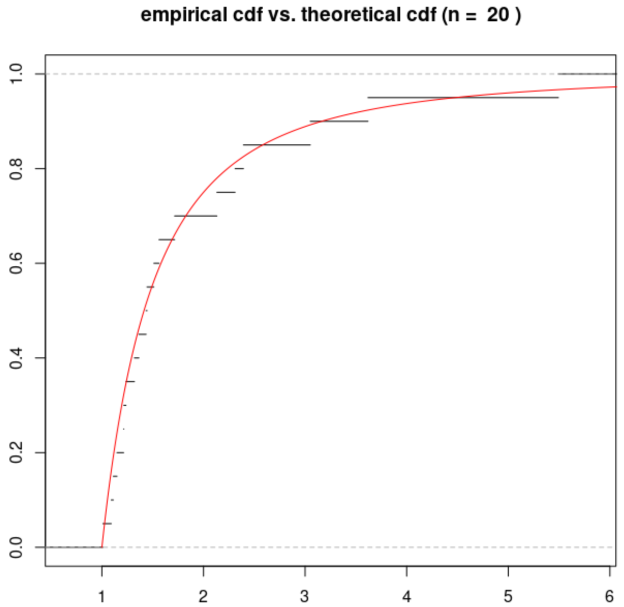
Volíme znamínko $+$, neboť tak jedině bude dávat výraz smysl. Pro dané u bereme: $x = \frac{1}{\sqrt{1-u}}$.

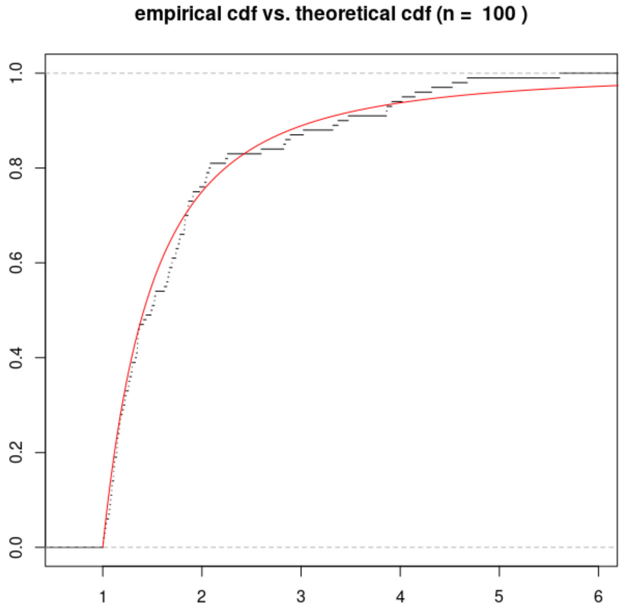
Výraz omezujeme pro $u \in (0,1]$, ale to nevadí, neboť $P[u = 0] = 0$

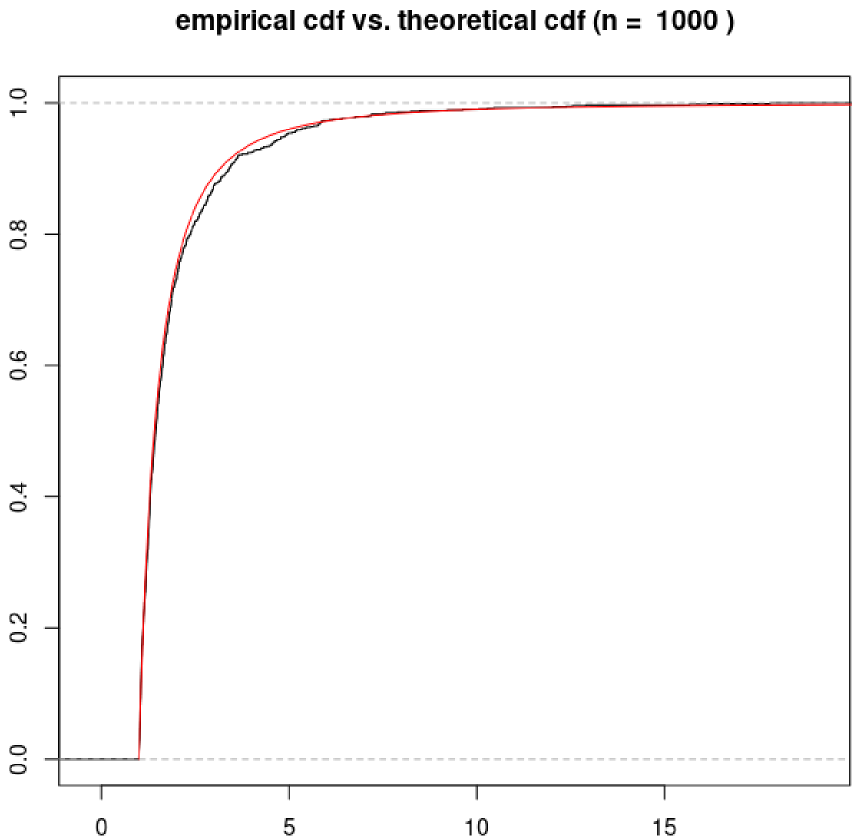
3.5

$$\begin{aligned} mean(X_1, \ldots, X_{20}) &= 2.53213806654802 \\ mean(X_1, \ldots, X_{100}) &= 1.85682741732373 \\ mean(X_1, \ldots, X_{1000}) &= 1.95906747082822 \end{aligned}$$

Odhady vypadají konzistentně - se zvyšujícím počtem pokusů se odhad střední hodnoty zlepšuje.







Code

```
# 2.e
mean(sapply(1:10000, function(i) {
        # 1 - hearts, 0 otherwise
        cards = sample(c(rep(0, 24), rep(1, 8)), 32)[1:24]
        resC = sapply(1:20, function(i) sum(sample(cards, 2)))
        p_a = 12 * mean(resC)
        r_a = sum(cards)
        return(r_a-p_a)
}))

# 3.a
f = function(x) { if(x >= 1) { return(2/x^3);}  else { return(0); } }
F = function(x) { return(1-1/x^2); }

x = seq(1, 20, 0.001)
y = sapply(x, f)
Y = sapply(x, F)

plot(x, y, type='l')
polygon(c(1, x[x<5], 5),  c(0, y[x<5], 0), col="red")

# 3.e
U = function() sample(seq(10^-6, 1, 10^-6), 1)
X = function(u) 1/sqrt(1-u)

trial = function(n) {
        resX = sapply(1:n, function(i) X(U()))
        # drop results > 20, this is not correct, but makes the graph more readable
        resX = resX[resX < 20]
        plot(ecdf(resX), do.points=FALSE,
                main=paste('empirical cdf vs. theoretical cdf (n = ', n, ')'))
        lines(x, Y, type='l', col='red')
        message(n, ' : ', mean(resX))
}
trial(20)
trial(100)
trial(1000)
```