8. domácí úkol | Vilém Zouhar

1

Jedná se o podíl dvou polynomů více proměnných, kde polynom ve jmenovateli má jeden reálný kořen $(0,0)$. Definiční obor tedy tvoří $(\mathbf{R}\backslash\{0\})^2$, kde je funkce spojitá (aritmetické operace zachovávají spojitost). Stačí zjistit, zdali lze v počátku funkci spojitě dodefinovat. Budeme se blížit $x \to 0$ a y po přímce kx.

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to kx}\frac{2x^2y}{x^4+y^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2kx^3}{x^4+k^2x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2kx}{x^2+k^2}$$

Existuje pro $k \neq 0$, což ale činí problém, tedy existuje přímka, která vede na neexistující limitu. $\Rightarrow$
Původní limita neexistuje a nelze tak funkci spojitě dodefinovat

2

V čitateli je součin spojitých funkcí, ve jmenovateli polynom s kořeny $(a,-a)$. Definičním oborem je rovina bez osy druhého a čtvrtého kvadrantu $(\mathbf{R}^2\backslash\{(a,-a), a\in\mathbf{R}\})$.

$$\lim_{y\to -x}\frac{\sin(x)+\sin(y)}{x+y} = \lim_{y\to -x}\frac{2\sin((x+y)/2)\cos((x-y)/2)}{x+y} = \text{AL} = \lim_{y\to -x}\cos((x-y)/2)\cdot\lim_{y\to -x}\frac{\sin((x+y)/2)}{(x+y)/2}$$

$$= (\text{ze spojitosti } cos)\ \cos((x+x)/2)\cdot\lim_{(x+y)/2=\alpha\to 0}\frac{\sin(\alpha)}{\alpha} = \cos(x)\cdot 1$$

Na ose druhého a třetího kvadrantu tedy můžeme funkci spojitě dodefinovat jako $\cos(x)$.

3

Definice otevřené množiny: A otevřená $\Leftrightarrow \forall x\in A: \exists\epsilon>0: U_\epsilon(x)\subseteq A$.
Platí, že: $\forall x\in\mathbf{R}^n: \forall\epsilon>0: \exists\delta>0: \forall y: |x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\epsilon$ Za ϵ volíme $-f(x)$, což je kladná hodnota. Pak: $\forall x\in\mathbf{R}^n: \exists\delta>0: \forall y: |x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<-f(x)$ Nyní dva případy:

1. $f(x)-f(y)\leq 0$: Pak druhá část výroku (nerovnost): $-f(x)+f(y)<-f(x)\Rightarrow f(y)<0\Rightarrow y\in M$
2. $f(x)-f(y)>0$: Pak $f(x)>f(y)$, ale víme, že $f(x)<0$, tedy $0>f(x)>f(y)\Rightarrow y\in M$ (neřešíme ϵ)

Ze spojitosti máme zaručené, že delta okolí, kde všechny funkční hodnoty jsou záporné, vždy existuje a z toho tedy je M otevřená.