Cvičení 10

Vilém Zouhar

1

využijeme vzorce $c^k - d^k = (c-d)\left(\sum_1^k c^{k-i}d^{i-1}\right)$, kde $c = \sqrt[k]{(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_n)}, d = x$

$$\sqrt[k]{(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_n)} - x = \frac{(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_n) - x^k}{\sum_1^k c^{k-i}x^{i-1}} =$$

$$= \frac{\sum_{i=0}^k x^{k-i}\alpha_i - x^k}{\sum_1^k c^{k-i}x^{i-1}} = \frac{x^{k-1}\left[\sum_{i=1}^k x^{1-i}\alpha_i\right]}{\left[\sum_1^k \left(x\sqrt[k]{1+\frac{\alpha_2}{x}+\frac{\alpha_3}{x^2}+\cdots}\right)^{k-i} x^{i-1}\right]} \qquad \alpha_i = \sum_{I\subset\binom{[k]}{i}} \prod_{j\in I} a_j$$

(koeficient při roznásobování závorek je pro přehlednost takto nahrazen, stačí, že $\alpha_i \in \mathbb{R}$)

$$= \frac{x^{k-1}\left[\sum_{i=1}^k x^{1-i}\alpha_i\right]}{x^{k-1}\left[\sum_1^k \left(\sqrt[k]{1+\frac{\alpha_2}{x}+\frac{\alpha_3}{x^2}+\cdots}\right)^{k-i}\right]} = \frac{\sum_{i=1}^k x^{1-i}\alpha_i}{\sum_1^k \left(\sqrt[k]{1+\frac{\alpha_2}{x}+\frac{\alpha_3}{x^2}+\cdots}\right)^{k-i}}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\left[\sqrt[k]{(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_n)} - x\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^k x^{1-i}\alpha_i}{\sum_1^k \left(\sqrt[k]{1+\frac{\alpha_2}{x}+\frac{\alpha_3}{x^2}+\cdots}\right)^{k-i}} =$$

$$= \text{ (z aritmetiky limit a limity fixní odmocniny)} = \frac{\lim_{x\to\infty}\sum_{i=1}^k x^{1-i}\alpha_i}{\sum_1^k \left(\sqrt[k]{\lim_{x\to\infty}(1+\frac{\alpha_2}{x}+\frac{\alpha_3}{x^2}+\cdots)}\right)^{k-i}} =$$

$$= \frac{\sum_{I\subset\binom{[k]}{1}}\left(\prod_{j\in I} a_j\right)}{\sum_1^k \left(\sqrt[k]{1}\right)^{k-i}}$$ (v čitateli v sumě byli všechny prvky až na první ve tvaru $\frac{\alpha_i}{x^{i-1}}, i > 1$, tedy s limitou 0)

$$= \frac{\sum_{i=1}^k a_i}{k}$$

2

podíváme se nejdříve na limitu $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+1}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}} = \dfrac{\lim_{x\to\infty}[1+\frac{1}{x^2}]}{\lim_{x\to\infty}[1-\frac{1}{x^2}]} = 1$

funkce $\gamma(y) = y^2$ je v bodě $y = 1$ spojitá a $\gamma(1) = 1$, tedy $1 = \lim\limits_{y\to 1} \gamma(y) = \lim\limits_{\frac{x^2+1}{x^2-1}\to 1} \gamma\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right) =$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)^2 \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)^2 = 1$

(šlo by řešit i jednoduchým umocněním čitatele a jmenovatele)

3

nejprve si všimneme, že $arctan(x)$ má dvě horizontální asymptoty $\lim\limits_{y\to\pm\infty} arctan(y) = \pm\dfrac{\pi}{2}$

pak se podíváme na jednostranné limity $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{1}{2-x} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{1}{2-x} = -\infty$

$\lim\limits_{y\to\infty} arctan^2(y) = \lim\limits_{y\to-\infty} arctan^2(y) = \dfrac{\pi^2}{4}$ (neboť funkce $\gamma(x) = x^2$ je v bodech $\pm\dfrac{\pi}{2}$ spojitá)

$\lim\limits_{x\to 2^-} arctan^2\left(\dfrac{1}{2-x}\right) = \lim\limits_{\frac{1}{2-x}\to+\infty} arctan^2\left(\dfrac{1}{2-x}\right) = \dfrac{\pi^2}{4}$

$\lim\limits_{x\to 2^+} arctan^2\left(\dfrac{1}{2-x}\right) = \lim\limits_{\frac{1}{2-x}\to-\infty} arctan^2\left(\dfrac{1}{2-x}\right) = \dfrac{\pi^2}{4}$

to udělat můžeme, neboť platí druhá podmínka ve větě o limitě složené funkce $\left(\forall\delta : x \in P(2,\delta) : \dfrac{1}{2-x} \neq \infty\right)$

jelikož se pravá i levá limita rovnají, tak je to i limita: $\dfrac{\pi^2}{4}$