5. domácí úkol | Vilém Zouhar

1

$$\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}\ dx = [sub.:\ u^2 = x^2 - 9 \Rightarrow x = \sqrt{u^2+9}, "dx = \frac{u}{\sqrt{u^2+9}}du"] = \int \frac{u}{\sqrt{u^2+9}} \cdot \frac{u}{\sqrt{u^2+9}}du =$$

$$\int \frac{u^2}{u^2+9}du = \int 1\ du - 9\int \frac{1}{u^2+9}du =$$

$$\int \frac{1}{u^2+9}du = [sub.:\ y = u/3, "du = 3\ dy"] = \frac{1}{3}\int \frac{1}{y^2+1}dy = \frac{1}{3}\arctan(u/3) + C$$

$$= u - 3\arctan(u/3) + C = \sqrt{x^2-9} - 3\arctan(\frac{\sqrt{x^2-9}}{3}) + C$$

Počítáme Newtonův integrál. Funkce je na $[3, 5]$ spojitá, tedy:

$$\int_3^5 \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}\ dx = \left[\sqrt{x^2-9} - 3\arctan(\frac{\sqrt{x^2-9}}{3})\right]_3^5 =$$

$$\lim_{x\to 5^-}(\sqrt{x^2-9} - 3\arctan(\frac{\sqrt{x^2-9}}{3}) - \lim_{x\to 3^+}(\sqrt{x^2-9} - 3\arctan(\frac{\sqrt{x^2-9}}{3}) = \text{(z AL + jednostranných spojitostí)}$$

$4 - 3\arctan(4/3) \approx 1.21811435...$

2

$$\int x^n \cdot e^{-x}\ dx = [per\ partes] = x^n \cdot e^{-x} + n \cdot \int x^{n-1}e^{-x}\ dx$$

z toho rekurentní vzorec: $F_n(x) = x^n \cdot e^{-x} + n \cdot F_n(x),\ F_0(x) = -e^{-x} + C$

z toho suma: $F_n(x) = e^{-x} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \frac{n! \cdot x^{n-i}}{(n-i)!} - e^{-x} + C = e^{-x} \cdot [\sum_{i=1}^{n} \frac{n! \cdot x^i}{i!} - n!] + C$

Newtonův integrál: (sčítáme všude spojité funkce) $I = \int_0^\infty x^n \cdot e^{-x}\ dx = \left[e^{-x} \cdot [\sum_{i=1}^{n} \frac{n! \cdot x^i}{i!} - n!]\right]_0^\infty =$

$\lim_{x\to\infty}\left[e^{-x} \cdot [\sum_{i=1}^{n} \frac{n! \cdot x^i}{i!} - n!]\right] - \lim_{x\to 0^+}\left[e^{-x} \cdot [\sum_{i=1}^{n} \frac{n! \cdot x^i}{i!} - n!]\right]$(N je libovolné konečné, tedy můžeme použít AL)

$\lim_{x\to\infty} \frac{x^l}{e^x} = 0$ (můžeme třeba l-krát použít l'Hospitalovo pravidlo, nebo porovnat polynom s exponenciálou)

$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^l}{e^x} =$ ze spojitostí funkcí: $= 1(l = 0),\ 0(l \neq 0)$

$$\Rightarrow I = n! \cdot \left[[\sum_{i=1}^{n} \frac{\lim_{x\to\infty} e^{-x} \cdot x^i}{i!} - \lim_{x\to\infty} e^{-x}]\right] - n! \cdot \left[[\sum_{i=1}^{n} \frac{\lim_{x\to 0^+} e^{-x} \cdot x^i}{i!} - \lim_{x\to 0^+} e^{-x}]\right] = n![\sum 0 - 0] - n![\sum 0 - 1]$$

$= n!$

3

$$\int |\cos x|\ dx \to \sin x \cdot sgn(\cos x) + C \quad \text{(nespojitá v } \pi/2 + k\pi\text{, je třeba slepit)}$$

Části hledané spojité funkce označíme: $F_k(x) = \sin x \cdot sgn(\cos x) + kL$ na $(-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi)$

$F_k(x) = -1 + kL$ pro $x = -\pi/2 + k\pi$, Rozdíl funkčních hodnot je 2, tedy $L = 2$

$$\int_0^a |\cos x|\ dx = [F(x)]_0^{49/6\pi} = F_8(49/6\pi) - F_0(0) = \frac{1}{2} + 2 \cdot 8 - 0 = 16.5$$