Matematická analýza | Vilém Zouhar

Krátké komentáře relevantní k přednášce a zkoušce z Matematické analýzy 2 přednášena v LS 2017/2018 Terezou Klimošovou.

Definition 1. Derivace funkce

$f'(a) := \lim_{t\to 0} \frac{f(a+t)-f(a)}{t}$

Definition 2. Primitivní funkce

F je primitivní funkce f na intervalu $I \Leftrightarrow \forall x \in I : F'(x) = f(x)$

Definition 3. Supremum, infimum

$sup(M) := min\{x : \forall m \in M : x \geq m\}$

Theorem 1. O množině primitivních funkcí

Všechny primitivní funkce k f na I jsou právě $\{F + c, c \in \mathbb{R}\}$, kde F je nějaká primitivní funkce k f na I
" $\subseteq$ " $H := F - G, H' = f' - f' = 0 \Rightarrow H = d \in \mathbb{R} \Rightarrow H = d = F - G \Rightarrow G = F - d$
" $\supseteq$ " $(F + c)' = F' + c' = f$

Theorem 2. Primitivní funkce je spojitá

F má vlastní derivaci $\forall \alpha \in I : F'(\alpha) = f(\alpha) \Rightarrow F$ na I spojitá. Ze ZS víme, že derivace implikuje spojitost.

Theorem 3. Linearita primitivní funkce

$\int \alpha f + \beta g dx = \alpha F + \beta G + c$
$(\alpha F + \beta G + c)' = \alpha F' + \beta G' + 0 = \alpha f + \beta g$

Theorem 4. Funkce s primitivní funkcí má Darbouxovu vlastnost (nabývá mezihodnot)

Uvažme mezihodnotu $c : f(x_1) < c < f(x_2)$ pro $x_1 < x_2 \in I$. $H(x) := F(x) - cx$ spojitá s derivací:
$H'(x) = (F(x) - cx)' = f(x) - c$. H někde nabývá svého minima $h^\star \in [x_1, x_2]$. Jelikož
$H'(x_1) < 0 \Rightarrow x \in (x_1, x_1 + \delta)H(x) < H(x_1) \Rightarrow x \neq x^\star$, stejně $H(x_2) \cdots x_2 \neq x^\star \Rightarrow x^\star \in (x_1, x_2)$. Podle kritéria minima $0 = H(x^\star) = f(x^\star) - c \Rightarrow f(x^\star) = c$

Theorem 5. Integrace per partes

$(f \cdot g)' = f'g + f'g \Rightarrow f \cdot g = \int f'g + \int fg' \Rightarrow \int f'g = f \cdot g - \int fg'$

Theorem 6. První věta o substituci

$[\phi : (\alpha, \beta) \to (a, b), f : (a, b) \to \mathbb{R}, \phi'((\alpha, \beta)) \in \mathbb{R}] \Rightarrow \int f(\phi)\phi' = F(\phi) + c$
Důkaz: $F'(\phi) = F'(\phi)\phi' = f(\phi)\phi'$

Theorem 7. Druhá věta o substituci

Pokud navíc $\phi((\alpha, \beta)) = (a, b) \wedge \phi' \neq 0 na (\alpha, \beta)$, pak $G = \int f(\phi)\phi'$ na $(\alpha, \beta) \Rightarrow \int f = G(\phi^{-1}) + c$ na (a, b)
Důkaz: Z podmínek je ϕ ostře rostoucí/klesající bijekce $(\alpha, \beta) \leftrightarrow (a, b) \Rightarrow \exists \phi^{-1}$, pak
$(G(\phi^{-1}))' = G'(\phi^{-1})(\phi^{-1})' = f(\phi(\phi^{-1}))\phi'(\phi^{-1}) \cdot \frac{1}{\phi'(\phi^{-1})} = f$ (zlomek z integrálu inverzní funkce)

Definition 4. Dělení intervalu

Pro $[a, b] : D := (a_0, \cdots, a_k) : a = a_0 < a_1 < \cdots < a_k = b$. Pro body $C : c_i \in [x_{i-1}, x_i)$???

Definition 5. Norma dělení

$\lambda(D) := max_{i\in[k]}\{|x_{i-1} - x_i\}$

Definition 6. Zjemnění dělení

$D = (a_0, a_1, \cdots, a_k), D' = (b_0, b_1, \cdots, b_k), \forall i \in [k] \exists j \in [l] : a_i = b_j (k < l),$ pak D' zjemňuje/je zjemněním D

Definition 7. Riemannova suma

$f : [a, b] \to \mathbb{R}, D, C \cdots R(f, D, C) = \sum_{i=1}^{k} |x_{i-1} - x_i| \cdot f(c_i) = \sum_{i=1}^{k} |I_i| \cdot f(c_i)$

Definition 8. Riemannův integrál

$(R)\int f_a^b = I \Leftrightarrow \forall\epsilon\exists\delta : \forall D : \lambda(D) < \delta \Rightarrow |I - R(f, D, C)| < \epsilon$

Definition 9. Zápis Riemannova integrálu, třída Riemannovsky integrovatelných funkcí

$I = (R)\int_a^b, \mathscr{R}(a, b)$ je třída integrovatelných funkcí na $[a, b]$

Definition 10. Horní a dolní sumy a integrály

Pro dělení intervalu $[a, b], D$ a funkci $f : [a, b] \to \mathbb{R}$:
Horní Riemannova suma je $S(f, D) = \sum_{i=1}^k |I_i| \cdot M_i$, kde $M_i = \sup_{x\in I_i} f(x)$.
Dolní Riemannova suma je $s(f, D) = \sum_{i=1}^k |I_i| \cdot m_i$, kde $M_i = \inf_{x\in I_i} f(x)$.
Horní Riemannův integrál je $\overline{\int_a^b} f = \inf_D S(f, D)$.
Dolní Riemannův integrál je $\underline{\int_a^b} f = \sup_D s(f, D)$.

Definition 11. Druhá definice Riemannova integrálu (Darbouxova)

Funkce má na intervalu $[a, b]$ $(R)\int f$, pokud $\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f$

Theorem 8. Zjemnění přibližuje

$s(f, D') \geq s(f, D) \wedge S(f, D') \leq S(f, D)$
Důkaz: Na papíře. 3/2. Není však požadován.

Theorem 9. $s \leq S$

$s(f, D) \leq s(f, D \cup D'), \leq S(f, D \cup D') \leq S(f, D')$

Theorem 10. Dolní integrál nejvýše horní

???

Theorem 11. Kritérium integrovatelnosti

$f \in \mathscr{R}(a, b) \Leftrightarrow \forall\epsilon > 0\exists D : 0 \leq S(f, D) - s(f, D) < \epsilon$
Důkaz: " $\Rightarrow$ " $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f = \int_a^b f, e > 0 : s(f, E_1) > \underline{\int_a^b} f - \frac{\epsilon}{2} = \int_a^b f - \frac{\epsilon}{2} \cdots S(f, E_1 \cup E_2) - s(f, E_1 \cup E_2) <$ $\int_a^b f + \frac{\epsilon}{2} - (\int_a^b f + \frac{\epsilon}{2}) = \epsilon$
" $\Leftarrow$ " $\overline{\int_a^b} f \leq S(f, D) < s(f, D) + \epsilon \leq \underline{\int_a^b} f + \epsilon \Rightarrow \overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f < \epsilon \Rightarrow \overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f \in \mathbb{R}$

Definition 12. Množina míry 0

$\sum_{i=1}^\infty |I_i| < \epsilon \wedge M \subset \bigcup_{i=1}^\infty I_i$. Konečné i spočetné množiny mají nulovou míru. Podmnožina množiny s nulovou mírou má také nulovou míru. Sjednocení množin s nulovou mírou má nulovou míru. Interval s kladnou délkou nemá nulovou míru.

Theorem 12. Lebesgueovo kritérium integrovatelnosti

Funkce $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ má Riemannův integrál, právě když je omezená a množina jejích bodů nespojitosti má nulovou míru.
Bez důkazu.

Theorem 13. Monotonie $\Rightarrow$ integrovatelnost

Důkaz: BÚNO f neklesá. $\forall[\alpha, \beta] \subset [a, b] : inf_{[\alpha,\beta]} f = f(\alpha), sup_{[\alpha,\beta]} f = f(\beta).\lambda(D) < \epsilon.S(f, D) - s(f, D) =$ $\sum(a_{i+1} - a_i)(sup_{I_i} f - inf_{I_i} f) = \sum(a_{i+1} - a_i)(f(a_{i+1}) - f(a_i)) \leq \epsilon\sum(f(a_{i+1}) - f(a_i)) = \epsilon(f(b) - f(a))$

Definition 13. Stejnoměrná spojitost

Na intervalu I: $\forall\epsilon > 0\exists\delta > 0 : x, x' \in I, |x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \epsilon$

Theorem 14. Na kompaktu spojitost $\Rightarrow$ stejnoměrná spojitost

Pro spor předpokládejme, že je funkce spojitá na intervalu $[a, b]$, ale není na něm stejnoměrně spojitá, tj. $\exists\epsilon > 0\forall\delta > 0\exists x, x' \in I : |x - x'| < \delta \wedge |f(x) - f(x')| > \epsilon$???

Theorem 15. Spojitost $\Rightarrow$ integrovatelnost

Dle předchozího tvrzení: $\delta > 0 : |f(x) - f(x')| < \epsilon, sup_{[\alpha,\beta]} f - int_{[\alpha,\beta]} f \leq \epsilon (\forall [\alpha, \beta] \subset [a, b], \beta - \alpha < \delta)$
Vezmeme libovolné dělení s
$\lambda(D) < \delta : S(f, D) - s(f, D) = \sum (a_{i+1} - a_i)(sup_{I_i} f - int_{I_i} f) \leq \epsilon \sum (a_{i+1} - a_i) = \epsilon(b - a) \Rightarrow f \in \mathscr{R}(a, b)$

Theorem 16. Linearita Riemannova integrálu

$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$ (pokud existují)

Definition 14. Newtonův integrál

$(N) \int_a^b f = F(b^-) - F(a^+)$ (limity)

Definition 15. Gamma funkce

$\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1} e^{-x}$

Theorem 17. Spojitost a stejnoměrná spojitost na kompaktu

???

Theorem 18. První základní věta analýzy

???

Theorem 19. Druhá základní věta analýzy

???

Theorem 20. Délka křivky

$d = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} = \int_a^b \sqrt{(\phi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}$

Theorem 21. Objem rotačního tělesa

$V = \pi \int_a^b f(t)^2 dt$

Theorem 22. Integrální kritérium konvergence

f nezáporná. $\sum f(n) K \Leftrightarrow \int_a^\infty f < +\infty$
Důkaz: $\sum_{a+1}^b f(i) = s(f, D) \leq \int_a^b f \leq S(f, D) = \sum_a^{b-1} f(i)$

Definition 16. Otevřená množina

$\Leftrightarrow \forall x \in M \exists r > 0 : B(x, r) \subset M, B(x, r) := \{y \in \mathbb{R}^n : d(x, y) < r\}$

Definition 17. Vícerozměrná spojitost

$\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : ||x - a|| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon$

Definition 18. Vícerozměrný interval - box

$I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n], a_i < b_i . |I| = \Pi(b_i - a_i)$

Definition 19. Vícerozměrné dělení

$I = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n], D = \{[c_1^{j_1}, c_1^{j_1+1}] \times [c_2^{j_2}, c_2^{j_2+1}] \times \cdots \times [c_n^{j_n}, c_n^{j_n}], (c_i^0, c_i^1, \cdots, c_i^{k_i})$ je dělení $[a_i, b_i], j_i \in [k_i - 1] \forall i\}$