数学期望

- 数学期望是指：对于每个可能发生的事件x，对答案造成w(x) × P(x)的贡献。
  其中w(x)是x的价值，P(x)是x发生的概率。

- 扔硬币一次。记抛中正面为得一分，反面不得分。求得分的期望。
- 依据定义，我们可以得到答案：
  - 抛中正面，对答案的贡献是1×0.5=0.5.
  - 抛中反面，对答案的贡献是0×0.5=0.
- 故最终答案为：E=0.5
-

数学期望

青藤编程营
qingtengbc.com

- 数学期望是对事件长期价值的数字化衡量

- 一个离散性随机变量 X 的 数学期望 是其每个取值乘以该取值对应概率的总和，记为 E(X) 。

$$E(X)=\sum_{\alpha\in I(X)}\alpha\cdot P(X=\alpha)=\sum_{\omega\in S}X(\omega)P(\omega)$$

- 其中 I(X) 表示随机变量 X 的值域， S 表示 X 所在概率空间的样本集合。

数学期望

- 数学期望是对事件长期价值的数字化衡量
- 抛3次硬币，正面向上的期望次数:
- $\mathrm{E(X)} = \frac{1}{8}\left(X(zzz) + X(zzf) + X(zfz) + X(fzz) + X(ffz) + X(fzf) + X(zff) + X(fzz)\right)$
- $= \frac{1}{8}(3+2+2+2+1+1+1+0) = \frac{3}{2}$

数学期望

- 魔球理论
- 篮球有三种得分方式:篮下进攻和中距离投中都是2分， 而三分球投中得3分。
- 当然，距离越远投篮命中率一般就会越低。总之，篮下投篮命中率为55%，中距离投篮命中率为45%，三分投篮命中率35%，但是得分高。哪种得分方式更有效率呢?

数学期望

- 魔球理论
- 篮球有三种得分方式:篮下进攻和中距离投中都是2分， 而三分球投中得3分。
- 当然，距离越远投篮命中率一般就会越低。总之，篮下投篮命中率为55%，中距离投篮命中率为45%，三分投篮命中率35%，但是得分高。哪种得分方式更有效率呢?

- E(篮下) = 2*55% + 0*45% = 1.1;
- E(中距离) =2 *45% + 0*55% = 0.9;
- E(三分球) = 3*35% + 0*65% = 1.05。
-

数学期望

- 抛硬币问题(1):
- 有1个硬币，抛n次，问正面向上的期望是多少?

数学期望

- 抛硬币问题(2)：
- 连续抛硬币，直到出现连续三次正面为止停下来，请问抛硬币的期望次数是多少？

数学期望

- 抛硬币问题(2):
- 连续抛硬币，直到出现连续三次正面为止停下来，请问抛硬币的期望次数是多少?
- 解：设抛硬币的期望次数 E
- $E = \frac{1}{2}(E+1) + \frac{1}{2} * \frac{1}{2} * (E+2) + \frac{1}{2} * \frac{1}{2} * \frac{1}{2} * (E+3) + \frac{1}{2} * \frac{1}{2} * \frac{1}{2} * 3$
- 得 E = 14

数学期望

- 连续型概率入门:
- 之前的例子，可能发生的事情种类是有限的，我们可以直接枚举所有情况进行计算，例如古典概型。
- 但是还有些问题，例如几何概型，可能发生的事情种类是无限的!

- 从数轴[0,1]上随机取一个实数x，求x的期望。

数学期望

- 连续型概率入门:
- 从数轴[0, 1]上随机取一个实数x，求x的期望。
- [0, 1]做n个等距的点，并且规定只能在这些点上取。那么取到每个点的概率都是 $\frac{1}{n}$.

  考虑取x的价值，显然是w(x)=x. 因此第i个点的价值是$\frac{1}{n} * i = \frac{i}{n}$ 因此期望是:

$$E(x) \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \frac{i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} i}{n^2} = \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}.$$

数学期望

- 连续型概率入门:
- 显然，我们将点取得越多，这个结果就越精确。当点取到无限多时，上面的结果已经无限接近于真实情况。故最后的答案是

$$E(x) = \lim_{n\to\infty}(0.5 + \frac{1}{2n}) = 0.5.$$

- 上面的求解方式已经相当类似于微积分的表述了

应用

SP1026 FAVDICE - Favorite Dice

- 题目大意：
- 一个n面的骰子，求期望掷几次能使得每一面都被掷到。

SP1026 FAVDICE - Favorite Dice

- 题目大意：
- 一个n面的骰子，求期望掷几次能使得每一面都被掷到。

SP1026 FAVDICE - Favorite Dice

- 题目大意：
- 递推：设 f[i] 表示已经掷到过 i 面，还期望掷多少次骰子使每一面都被掷到
- 显然 f[n] = 0
- 现在掷一次骰子，有两种情况
- 有 $\frac{i}{n}$的概率掷到已经掷到过的面，此时仍然还要掷 f[i] 次骰子
- 有 $\frac{n-i}{n}$的概率掷到没掷到过的面，此后就掷到过 i+1 个面了，还需掷f[i+1]次骰子
- 需要注意的是，无论是掷到以上哪种情况，都需要掷一次骰子 所以有

$$f[i]=\frac{i}{n}f[i]+\frac{n-i}{n}f[i+1]+1$$

SP1026 FAVDICE - Favorite Dice

$$f[i] = \frac{i}{n} f[i] + \frac{n-i}{n} f[i+1] + 1$$

- 化简后可得：

$$f[i] = f[i+1] + \frac{n}{n-i}$$

- 从 f[n] 递推到 f[0] 即可，答案即为 f[0]

CF518D Ilya and Escalator

- 题目大意：
- 有n 个人排成一列,,每秒中队伍最前面的人p 的概率走上电梯(一旦走上就不会下电梯)，或者有1-p 的概率不动
- 问你 T 秒过后,， 在电梯上的人的数量的期望
- N ，T <= 2000，source： luogu CF518D

CF518D Ilya and Escalator

青藤编程营
qingtengbc.com

- 分析：设 f[i][j] 表示当前考虑第 i 个人，在jj时刻电梯里的期望人数，那么很容易得到递推式子：

- 第一种可能：进来一个人，概率为p
- 第二种可能：没进来人，概率为 1 - p

$$f[i][j] = (f[i-1][j-1]+1) * p + f[i-1][j] * (1-p)$$

邮票收集

- 题目大意：
- 有n种不同的邮票，皮皮想收集所有种类的邮票。唯一的收集方法是到同学凡凡那里购买，每次只能买一张，并且买到的邮票究竟是n种邮票中的哪一种是等概率的，概率均为1/n。但是由于凡凡也很喜欢邮票，所以皮皮购买第k张邮票需要支付k元钱。
  现在皮皮手中没有邮票，皮皮想知道自己得到所有种类的邮票需要花费的钱数目的期望。

- N<=10000，source： luogu P4550

收集邮票

- 分析：
- 用f[i] 表示现在取到i张邮票,要取完剩下邮票的期望次数 显然 f[n]=0

$$f[i] = \frac{i}{n} * f[i] + \frac{n-i}{n} * f[i+1] + 1$$

- 化简得： $f[i] = f[i+1] + \frac{n}{n-i}$

收集邮票

青藤编程营
qingtengbc.com

- 分析：
- 用g[i]表示现在取到i张邮票，要取完剩下邮票的期望价格 显然g[n]=0

$$g[i] = \frac{i}{n} * (g[i] + f[i] + 1) + \frac{n-i}{n} * (g[i+1] + f[i+1] + 1)$$

- 化简得： $g[i] = \frac{i}{n-i} * f[i] + g[i+1] + f[i+1] + \frac{n}{n-i}$