Случайные графы и интернет

Подготовили студенты гр. 1308

СПбГЭТУ «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина)

Алексей Лепов

Даниил Мельник

Задание

1. Прочитать и разобрать статью в журнале “Квант”: Математические модели интернета
2. По книге А.М.Райгородского “Случайные графы” разобрать модели случайных графов и построить их программные реализации;
3. Проиллюстрировать выведенные в книге теоретические формулы экспериментальными статистическими оценками на случайных графах;
4. Найти визуализатор больших графов и дополнить созданные модели программой-калькулятором для вычисления характеристик случайных графов с визуализацией этих графов.

Граф в контексте проекта

Понятие “граф” по книге А. Райгородского:

“произнося слово “граф”, мы подразумеваем, что в нашем графе нет петель, кратных рёбер и ориентации”.

То есть, мы имеем самый простой вариант графа: неориентированный, без петель и кратных рёбер. Напомним, что граф с петлями называется “псевдограф”, граф с кратными рёбрами называется “мультиграф”, граф граф с ориентацией называется “орграф”.

Представление интернета в виде графа

Представление сети «интернет» в виде графа: всё вполне логично, вершина – сайт, ребро – связь.

При этом для некоторых моделей могут существовать петли (=>псевдографы, сайт ссылается на свои же страницы), кратные рёбра (=> мультиграф, сайт даёт несколько ссылок на предшественника).

Рассмотренные модели

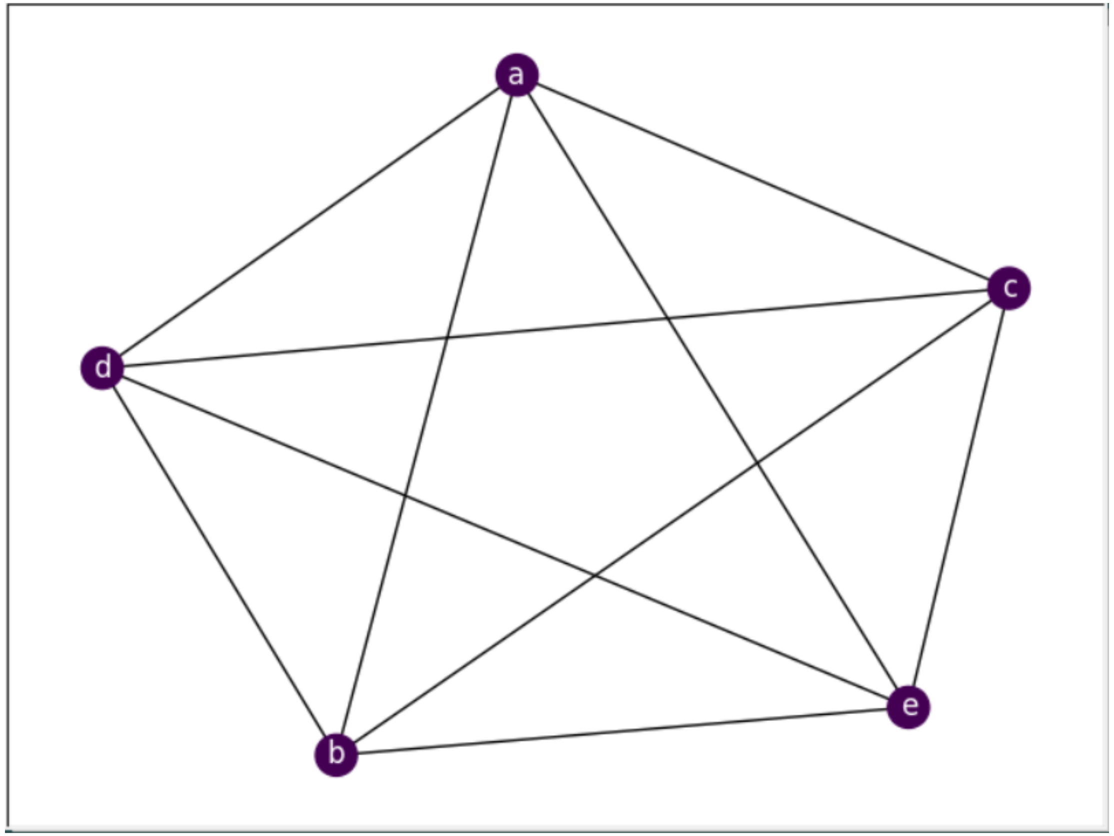
- Модель Эрдёша-Реньи
- Модель Барабаши-Альберт
- Модель Баллобаша-Реньи

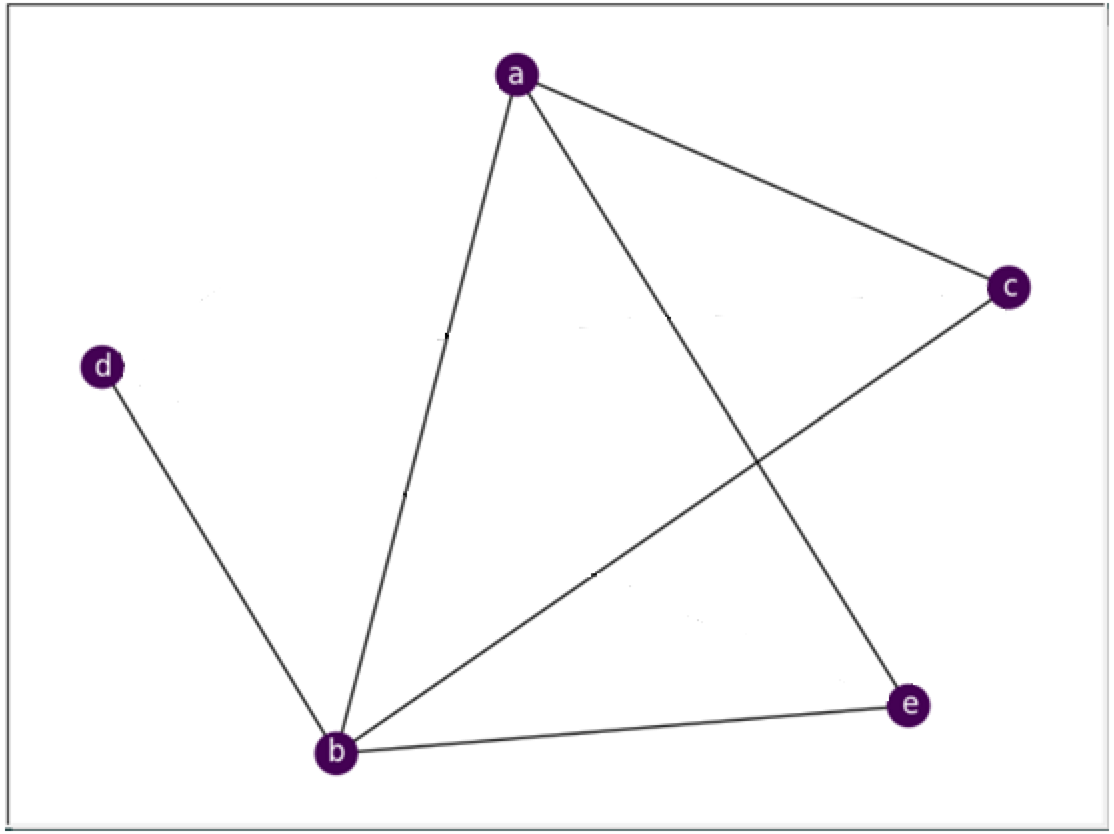
Модель Эрдёша-Реньи

Случайный граф модели Эрдёша-Реньи можно получить из любого полного графа на n вершинах, «выкидыванием» некоторых рёбер из этого полного графа.

Основные недостатки: отсутствие петель и кратных рёбер. Из-за их отсутствия, случайный граф не отражает внутренних ссылок в сайтах, а так же нескольких ссылок с одного сайта на другой (то есть, социальные сети, например, реализовать не получится).

Модель Эрдёша-Реньи пример построения





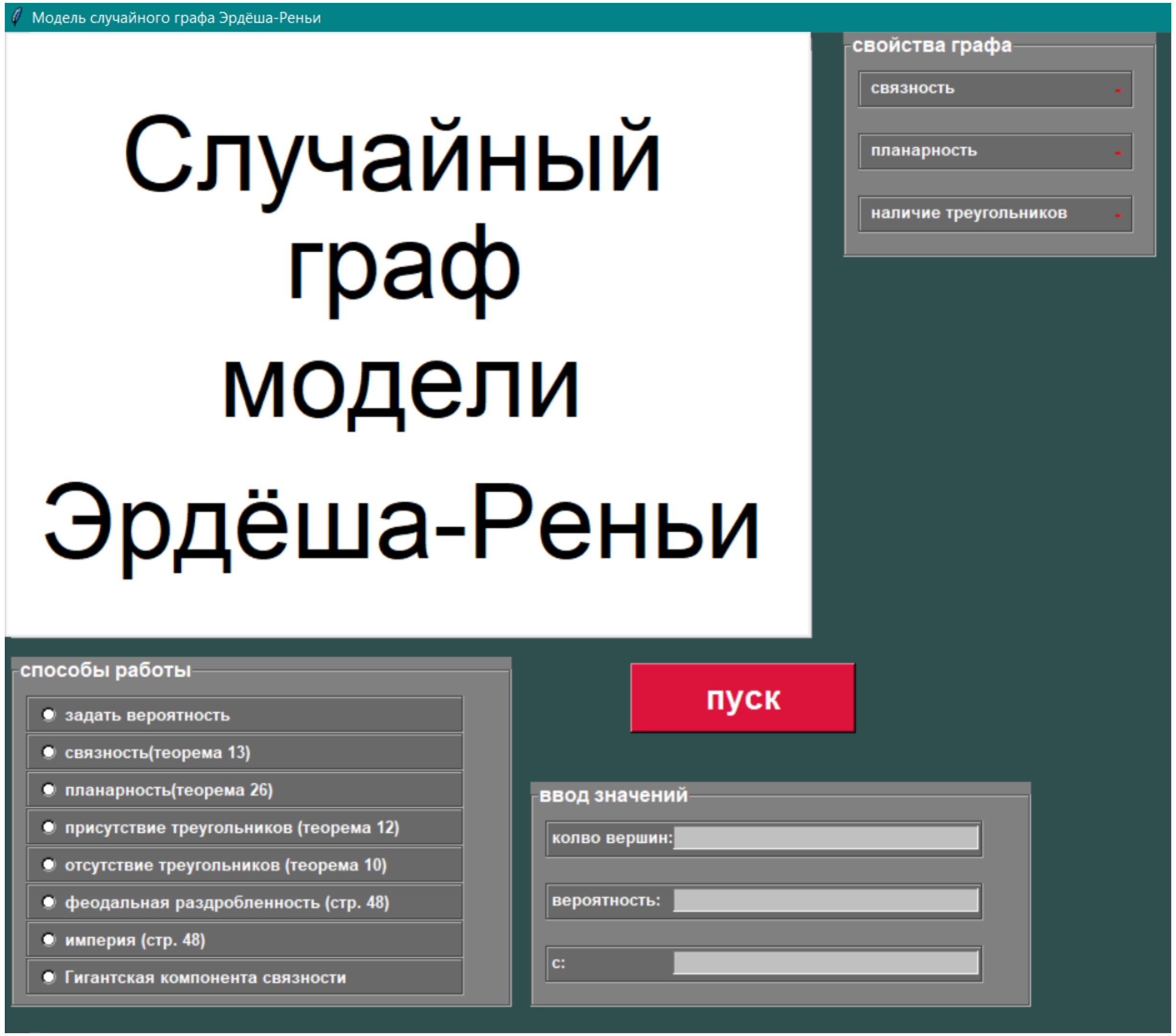
Генератор случайного графа Эрдёша-Реньи

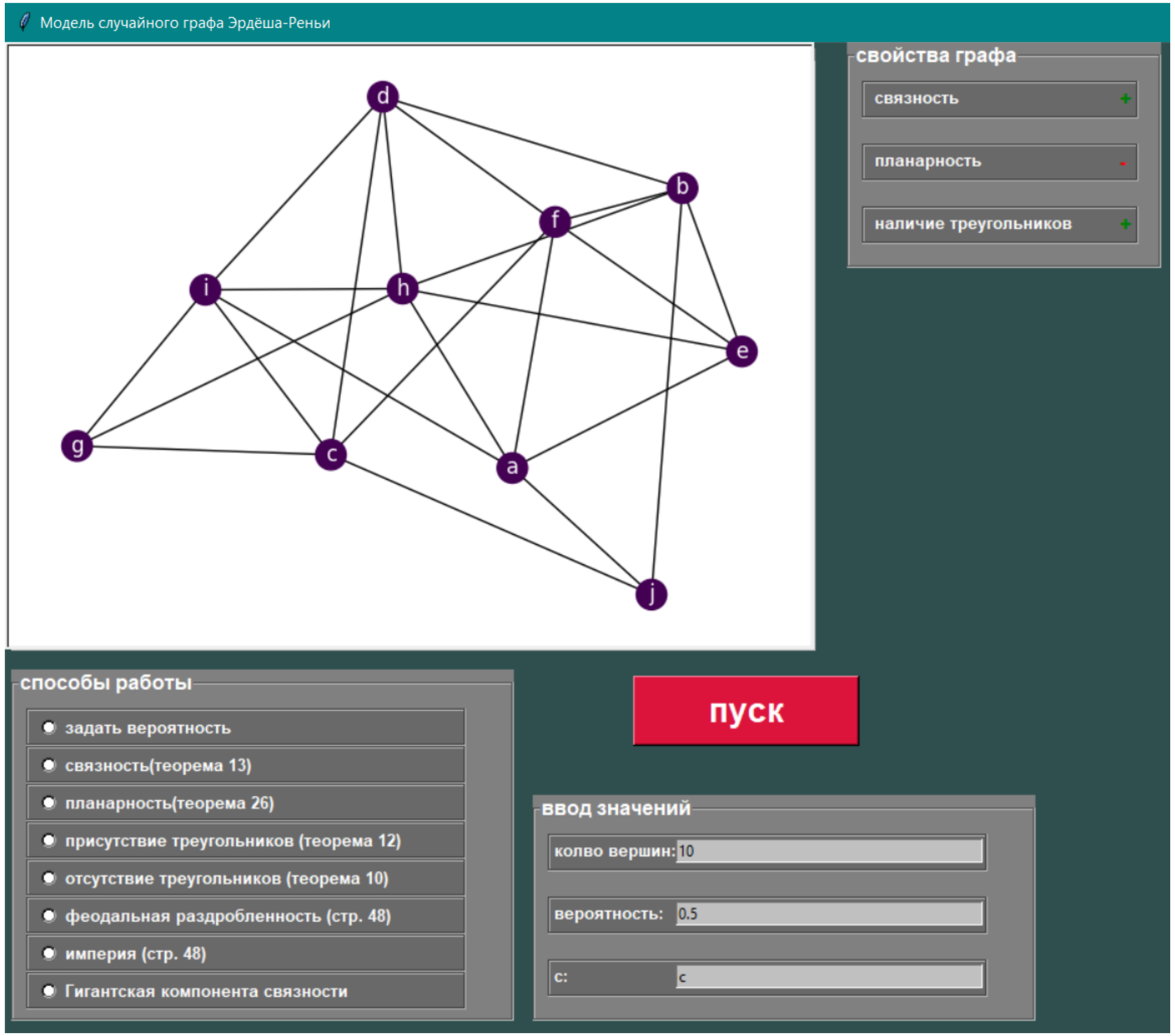
Работа генератора построена на формировании числа вероятности p возникновения ребра в графе. Далее формируется множество вершин графа, состоящее из n элементов.

Далее выполняется перебор всех рёбер, для каждого ребра датчик случайных чисел выдаёт число, оно сравнивается с числом p. При положительном исходе ребро добавится в граф, иначе – нет.

После перебора всех рёбер полного графа мы получим граф с известным набором вершин и случайным набором рёбер.

Модель Эрдёша-Реньи программная реализация





Модель Эрдёша-Реньи калькулятор

В данном калькуляторе пользователю представляется возможность выполнять генерацию случайного графа в разных режимах:

- Ручное задание вероятности (ввести число от 0 до 1 в поле «вероятность»)
- Генерировать гарантировано связный/несвязный граф для иллюстрации теоремы 13 (для этого следует задать константу c в поле «c:»)
- Генерировать гарантированно планарный/непланарный граф для иллюстрации теоремы 26 (для этого следует задать константу c в поле «c:»)
- Генерировать граф с/без треугольников (иллюстрация теорем 10, 12)
- Вывод интересных свойств графов: т.н. «феодальную раздробленность» и «империю»
- Показать гигантскую компоненту связности.

Модель Барабаши-Альберт

Главным отличием модели Барабаши-Альберт от модели Эрдёша-Реньи является идея предпочтительного присоединения новых вершин к уже существующему графу.

Идея предпочтительного присоединения заключается в следующем: каждая новая вершина «стремится» связаться с уже существующими вершинами, причём наиболее «востребованными».

Модель графа Барабаши – Альберт (граф БА) представляет собой алгоритм генерации случайных безмасштабных сетей с использованием правила предпочтительного связывания (ПС).

Модель Барабаши-Альберт правило предпочтительного присоединения

Правило предпочтительного связывания говорит, что чем большую степень связности имеет вершина, тем выше вероятность присоединения к ней новых вершин.

Если для присоединения выбирать вершину случайным образом, то вероятность выбора определённой вершины будет пропорциональна её степени связности.

Данное правило соответствует принципу «богатый становится богаче».

Модель Барабаши-Альберт генератор

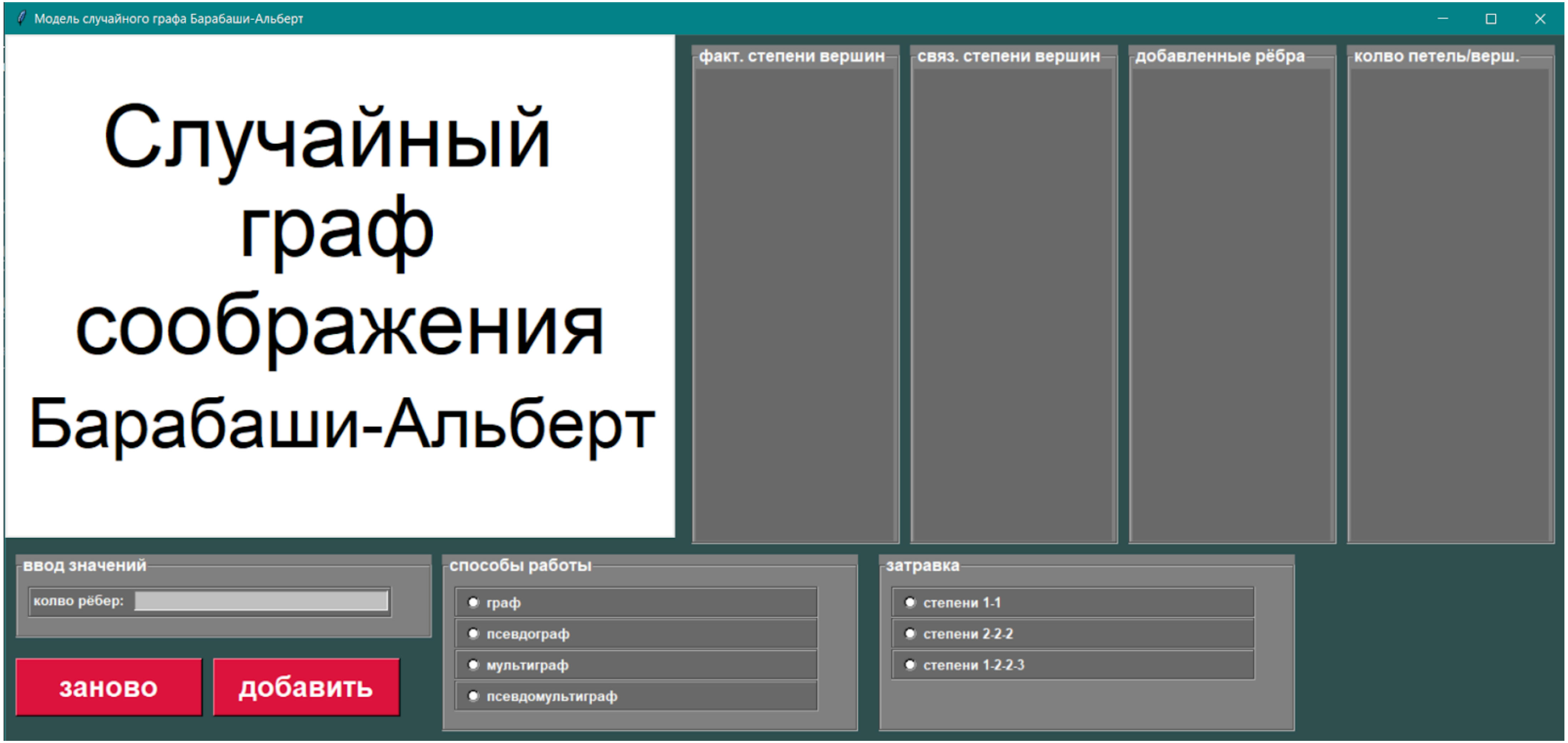
Случайный граф данной модели выращивается из графа-затравки. Граф-затравку можно интерпретировать как некий «базовый» интернет. Возникает новый сайт и присоединяется к этому «базовому» интернету.

Для генерации необходимо иметь следующую информацию: количество рёбер в графе, степень каждой вершины с учётом кратных рёбер и петель для каждой вершины.

На основании этих данных вычисляются наиболее «богатые» вершины, к которым и «отбрасываются связи» от нового сайта к интернету.

В программной реализации учтены возможности построения графа от разных «затравок» (название затравки – последовательность степеней её вершин), а также наличие кратных рёбер и петель.

Модель Барабаши-Альберт программная реализация



Модель Барабаши-Альберт описание программной реализации

Для работы в калькуляторе сперва необходимо выбрать вариант затравки и нажать на кнопку «заново».

Далее выбрать режим добавления ребра («граф», «псевдограф», «мультиграф», «псевдомультиграф»), согласно которому будут добавляться рёбра.

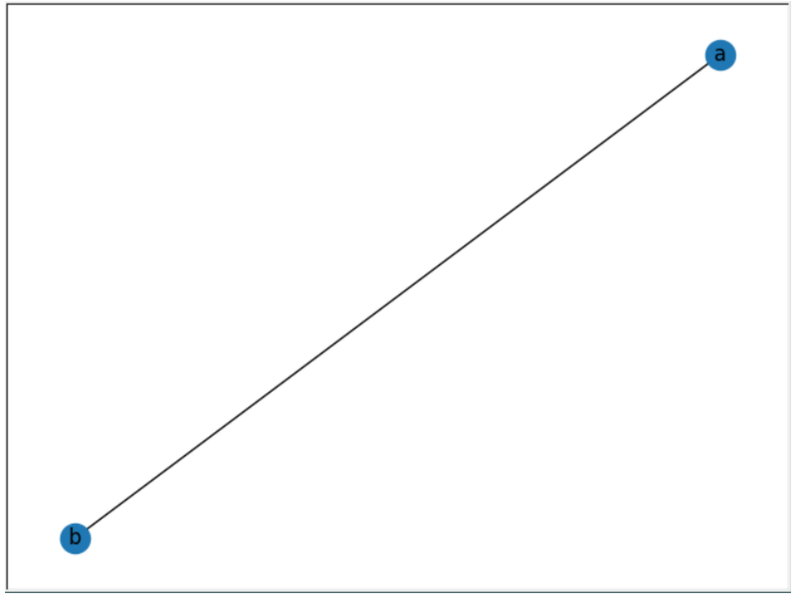
Количество «ссылок» (рёбер) отбрасываемых «сайтом» (новой вершиной) пользователь задаёт в специальном поле (причём в это количество входят как кратные рёбра, так и петли)

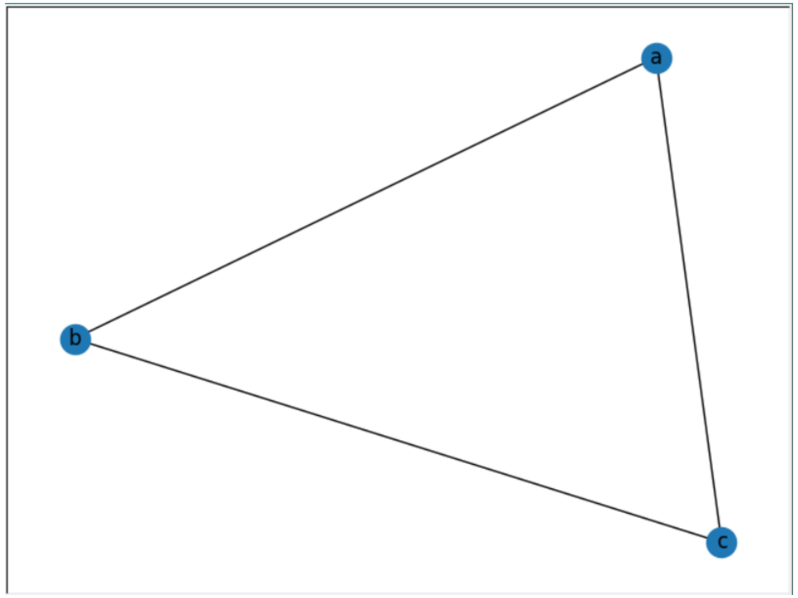
Для удобства предсказания ссылок выведены поля со степенями каждой вершины: фактические и логические (логические – исходя из логики предпочтительного соединения – ссылка «сам на себя» не может дать предпочтительности сайту)

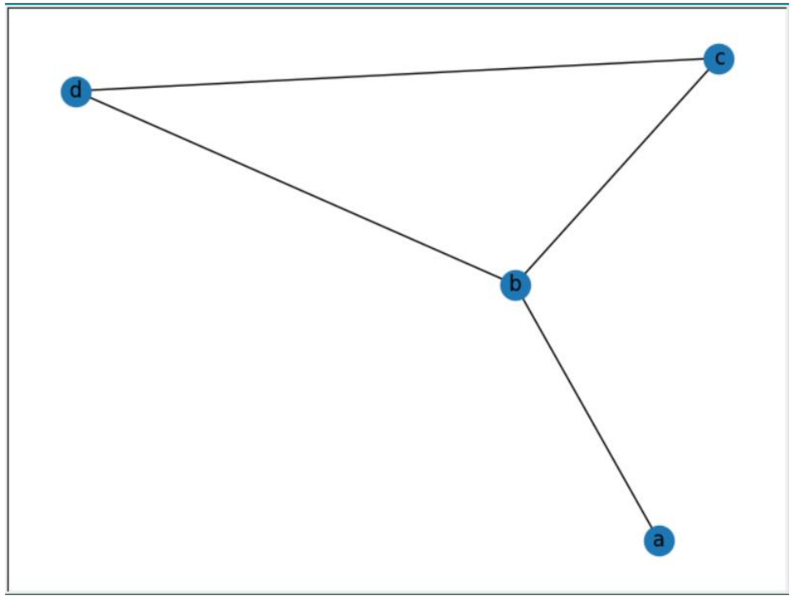
Для оценки добавленных рёбер добавлено спец. поле.

Для оценки количества петель у вершин добавлено поле.

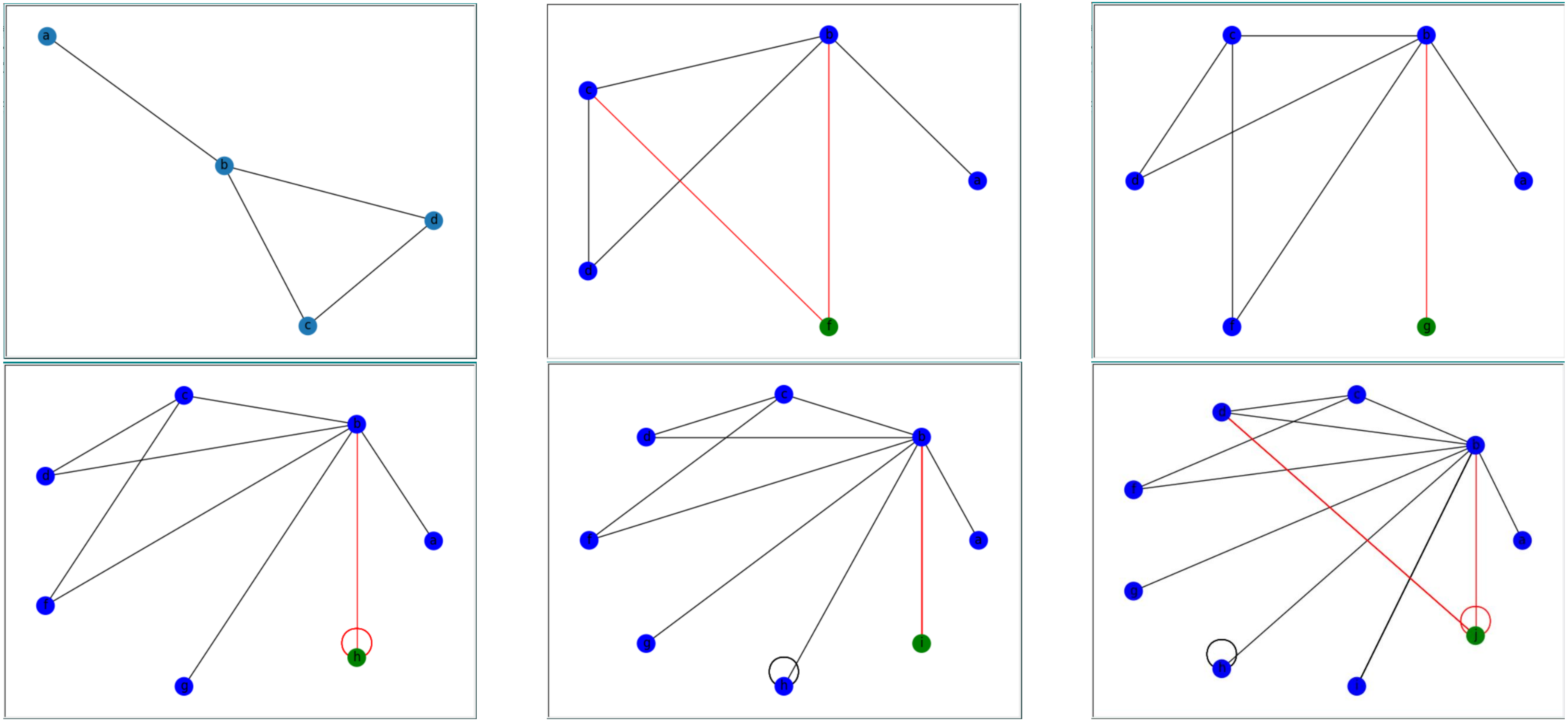
Модель Барабаши-Альберт затравки







Модель Барабаши-Альберт пример генерации графа



Модель Боллобаша-Риордана

Модель Боллобаша-Риордана является дальнейшим развитием модели Барабаши-Альберт, с одним условием: модель Боллобаша-Риордана – модель Барабаши-Альберт, в которой на каждую из n вершин приходится k рёбер (таким образом, случайный граф Боллобаша-Реньи содержит n вершин и kn рёбер)

Для создания такого графа мы можем построить граф модели Барабаши-Альберт, в котором каждая новая вершина отбрасывает только одно ребро. Построить такой граф на kn вершинах.

Множество kn вершин делим на n частей по k штук. Каждое подмножество объявляется вершиной в новом графе. Получено новое множество из n вершин. Все рёбра старого графа внутри новых вершин становятся петлями новой вершины, рёбра между подмножествами – рёбрами между новыми вершинами. Таким образом пулучен граф на n вершинах при kn рёбрах.

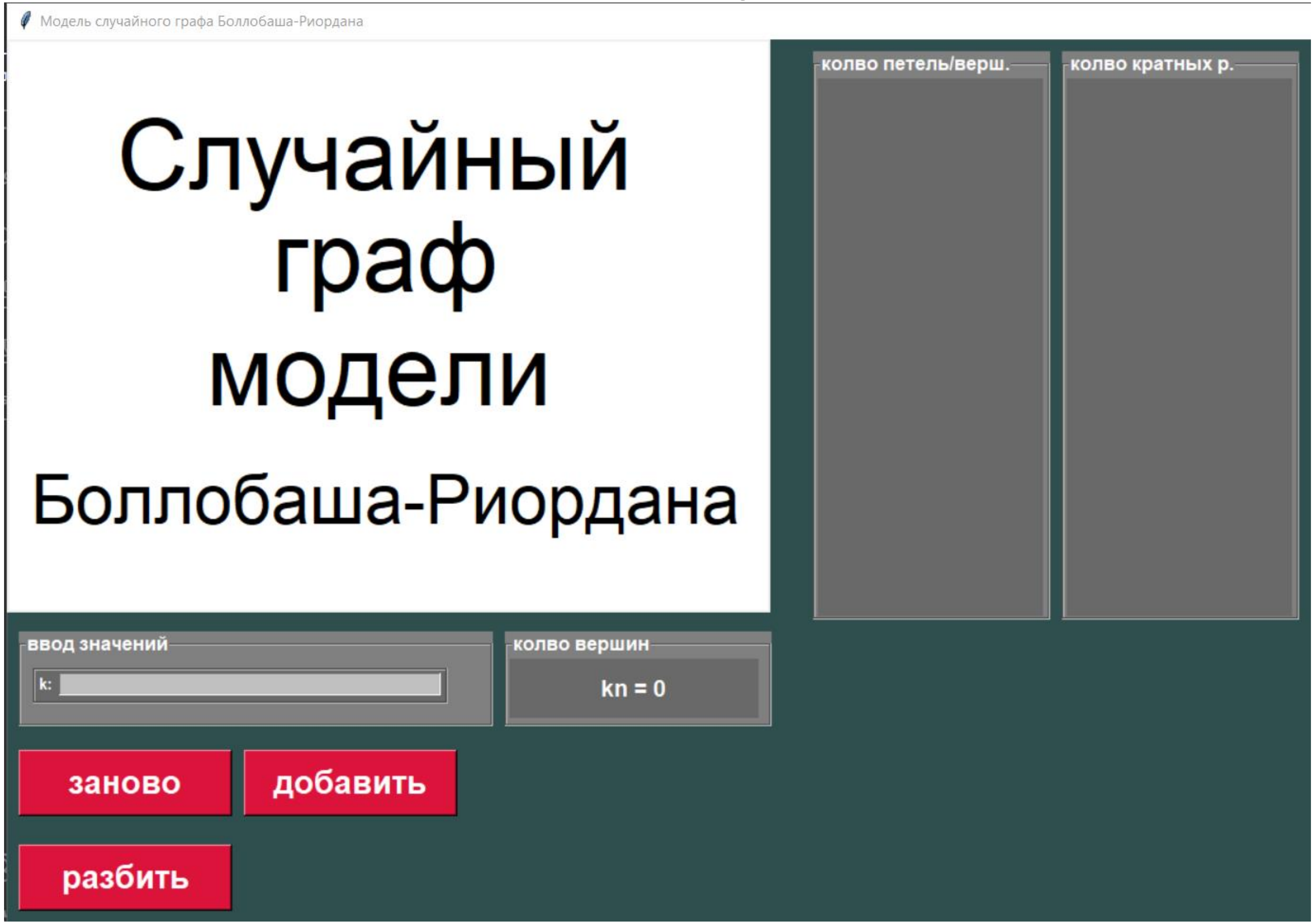
Модель Боллобаша-Риордана генератор

Для генерации начального графа применяется генератор Барабаши-Альберт с количеством добавляемых рёбер равным единице. Так получим граф с kn вершинами и kn рёбрами.

Далее множество вершин разбивается на n подмножеств размером k (двумерный массив).

Далее оцениваются связи между подмножествами: внутренние связи превращаются в петли, связи между подмножествами – в кратные рёбра между новыми вершинами-подмножествами.

Модель Боллобаша-Риордана программная реализация



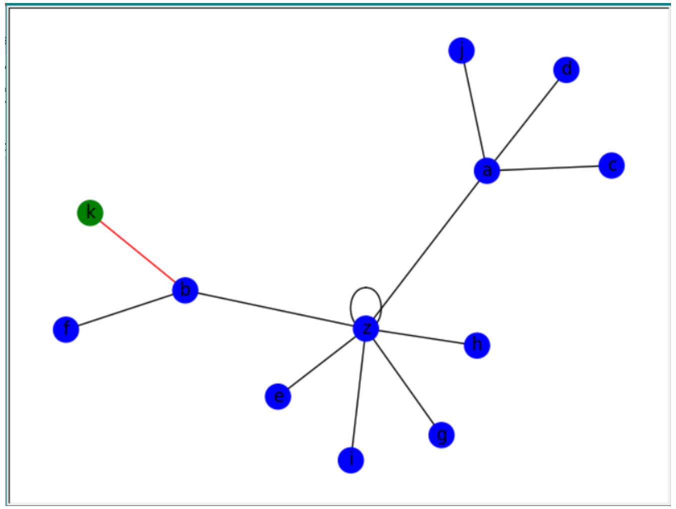
Модель Боллобаша-Риордана описание программной реализации

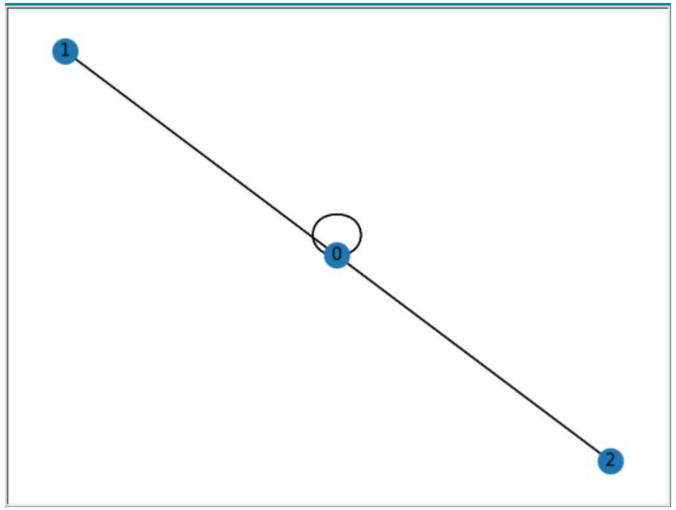
Для начала работы в калькуляторе пользователю необходимо создать базовый граф: нажать кнопку «заново» и далее добавлять вершины (кнопка «добавить»).

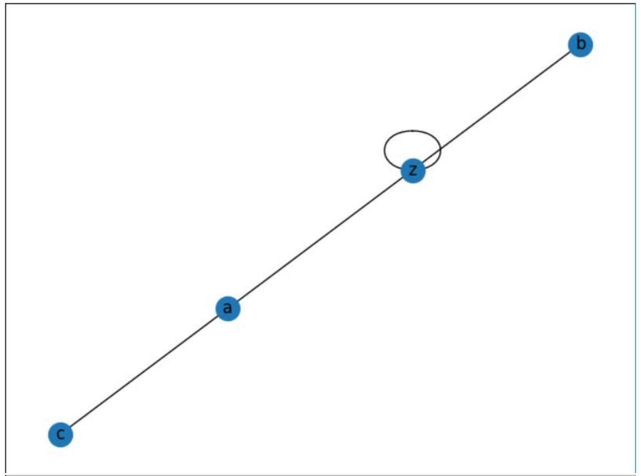
Далее пользователю необходимо ввести число k (размер подмножества) и нажать на кнопку «разбить»

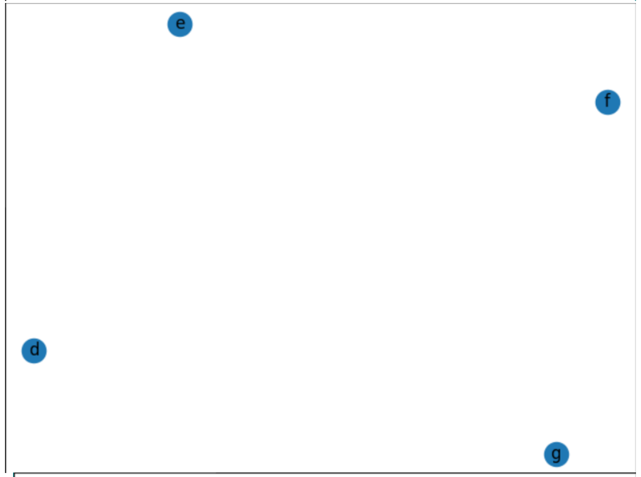
Пользователь смотрит компоненты, на которые разбивается начальный граф и в конце он наблюдает граф на n вершинах и kn рёбрах

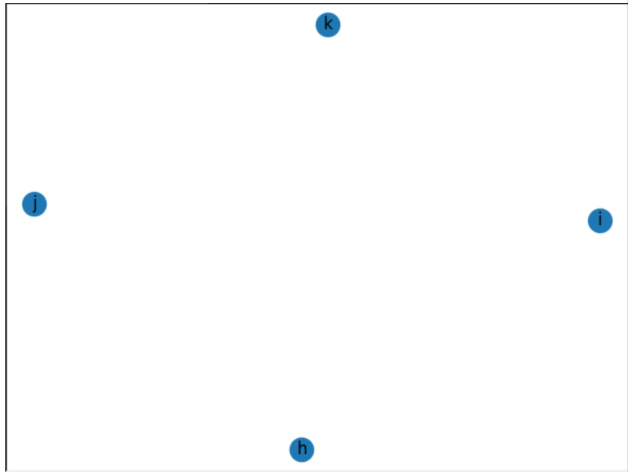
Модель Боллобаша-Риордана работа программы











Закономерности модели Эрдёша-Реньи по книге

Теорема 10. *Пусть* α — *любая функция натурального аргумента* n, *стремящаяся к нулю при* $n \to \infty$. *Предположим,* $p(n) = \frac{\alpha(n)}{n}$ *для каждого* $n \in \mathbb{N}$. *Тогда почти наверное* $T_{3,n} = 0$ (*т. е. граф не содержит треугольников*).

Теорема 12. *Пусть* ω — *любая функция натурального аргумента* n, *стремящаяся к бесконечности при* $n \to \infty$. *Предположим,* $p(n) = \frac{\omega(n)}{n}$ *для каждого* $n \in \mathbb{N}$. *Тогда почти наверное* $T_{3,n} \geqslant 1$ (*т. е. граф содержит треугольники*).

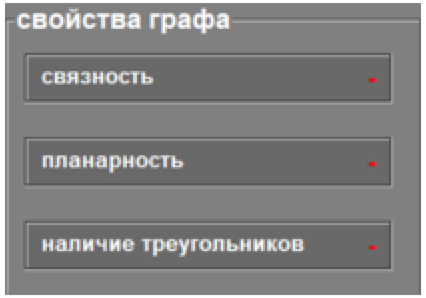
Теорема 13. *Пусть* $p = \frac{c \ln n}{n}$. *Если* $c > 1$, *то почти наверное случайный граф связен. Если* $c < 1$, *то почти наверное случайный граф связным не является.*

Теорема 26. *Пусть* $p = \frac{c}{n}$. *Тогда при* $c < 1$ *почти наверное случайный граф планарен, а при* $c > 1$ *почти наверное планарности нет.*

Статистика и эксперементы.

Для работы со статистикой в калькуляторе графов модели Эрдёша-Реньи предусмотрены встроенные функции с вводом константы «с» (теоремы 13, 26). Для статистики теорем 10, 12 выбраны соответствующие функции: бесконечно большая функция – квадратичная, бесконечно малая – 1/n. Проводить эксперементы внутри калькулятора намного удобнее.

Для контроля статистики выделено поле характеристик графа, которое независимо показывает свойства графа, подверженные измерению.



Созданные и использованные программные средства.

Использованные технологии:

- 9.1 Язык программирования: Python (IDE: VS Code)
- 9.2 Визуализатор и конструктор графов: библиотека networx
- 9.3 Графический интерфейс GUI : библиотека tkinter

Следует отметить, что библиотека networx включает в себя генераторы случайных графов, но их использование противоречит заданию на разработку, а также противоречит детальному изучению темы.

Созданные средства:

Калькуляторы–генераторы случайных графов трёх моделей с визуализацией, выводом свойств графов, позволяющие детально изучить модели случайных графов.