

Borna Gajić

Zadatak 1.

Provedite BFS algoritam na danom grafu i ispišite vrijednosti za d i π ako algoritam kreće iz vrha u .

RJEŠENJE

vrh	u	t	y	x	w	s	r	v
d	0	1	1	1	2	3	4	5
π	NIL	u	u	u	t	w	s	s

Zadatak 2.

Pokažite da je korištenje jednog bita za spremanje svake boje vrha dovoljno u smislu da će BFS algoritam vratiti isti rezultat i ako se ukloni redak 18 u pseudokodu za BFS. (Pseudo-kod se nalazi na stranici 595 u knjizi Introduction to Algorithms.)

RJEŠENJE

Ako za spremanje podatka boje čvora pretvorimo u tip podatka Charonda trošimo svega 1 bit memorije, gdje prvo slovo svake boje predstavlja tu boju. Izbacivanjem linije 18 u kodu BFS-a nismo ništa promijenili jer nam je jedino bitan podatak jel čvor bijel, odnosno jel ikada bio posjećen. Pa je iz tog razloga tip podatka koji sprema boju čvora mogao isto tako biti i Bool jer su nam bitne samo dvije boje (u kodu sa stranice 595), a to su bijela i siva. Algoritam BFS radi ne promijenjeno.

Zadatak 3.

Koliko je vrijeme izvršavanja BFS algoritma ako je graf na ulazu reprezentiran matricom susjedstva te modificiramo algoritam tako da može podnijeti ovakav oblik unosa?

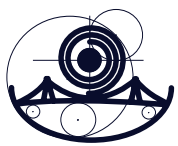
RJEŠENJE

Vrijeme izvršavanja BFS algoritma je $O(V^2)$, ako koristimo reprezentaciju grafa uz pomoć matrice, jer da saznamo jel v susjed čvora u potrebno je proći kroz cijeli red matrice i tako za svaki čvor unutar grafa.

Zadatak 4.

Dokažite navedeni teorem. Neka je T graf. Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:

- T je stablo,
- bilo koja dva vrha u T povezana su jedinstvenim putom u T ,
- T je minimalno povezan, tj. T je povezan, no $T - e$ je nepovezan za svaki brid $e \in T$,
- T je maksimalno acikličan, tj. T ne sadrži ciklus, ali $T + xy$ sadrži ciklus za bilo koja dva nesusjedna vrha $x, y \in T$.

**RJEŠENJE**

Ako je T stablo onda su bilo koja dva vrha u T jedinstveno povezana.

DOKAZ

Neka je T graf definiran s n vrhova. Kažemo da je graf povezan ako ima barem $n - 1$ bridova; ako ima točno $n - 1$ bridova onda za takav graf kažemo da je stablo, u suprotnom, ako ima više od $n - 1$ bridova onda je ciklički. Iz prethodne definicije zaključujemo da graf T ima točno $n - 1$ bridova, te zbog toga nema ciklusa. Prema tome, sigurno ne postoji više od jednog puta od vrha $u \in T$ do $v \in T$, što znači da su oni jedinstveno povezani.

Ako su bilo koja dva vrha u T jedinstveno povezana onda je T minimalno povezan.

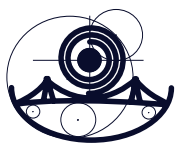
DOKAZ

Pošto su bilo koja dva vrha u T jedinstveno povezana to znači da u grafu T ne postoje ciklusi, stoga je taj graf stablo. Oduzmemo li jedan brid dobivamo kontradikciju s prvom tvrdnjom, više ne postoji put od $u \in T$ do $v \in T$. Dodamo li novi brid, dobivamo kontradikciju s činjenicom da je T stablo, odnosno u tom će slučaju postojati više od jednog puta kojim možemo doći do određenog vrha. Iz navedenih činjenica zaključujemo da dodavanjem odnosno oduzimanjem bridova, početna tvrdnja ne vrijedi, u suprotnom je istinita.

Ako je T minimalno povezan onda je T maksimalno cikličan

DOKAZ

Pošto je T minimalno povezan idućim oduzimanjem brida dobivamo ne povezani graf; što znači da u grafu ne postoji više od jednog puta od vrha $u \in T$ do $v \in T$. Graf je maksimalno acikličan ako $T + xy$ sadrži ciklus za bilo koja dva nesusjedna vrha $x, y \in T$. Ukoliko dodamo novi brid xy , $x \in T$, $y \in V$ pri čemu je V skup svih vrhova, graf ostaje minimalno povezan pa tako i maksimalno acikličan, no dodavanjem novog brida xy , $x, y \in T$ narušavamo minimalnu povezanost od T , i dobivamo ciklus te smo s tim također narušili i svojstvo maksimalne acikličnosti od T . Prema tome, ako je graf minimalno povezan onda je on i maksimalno acikličan.

**Zadatak 5.**

Pokažite kako DFS radi na grafu sa slike. Pretpostavite da prilikom prolaska kroz vrhove prije dolaze oni koji su prije po abecedi i da su liste susjedstva također sortirane uzlazno prema abecedi. Napišite koja su vremena kada je svaki vrh otkriven i kada je svaki vrh istražen. Za svaki brid napišite klasifikaciju nakon izvršavanja algoritma pretraživanja udubinu.

RJEŠENJE

vrh	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z
d	1	17	2	8	18	3	4	9	13	10
f	16	20	7	15	19	6	5	12	14	11

T-bridovi	(q, s)	(s, v)	(v, w)	(q, t)	(t, x)	(x, z)	(t, y)	(r, u)
B-bridovi	(w, s)	(z, x)	(y, q)	(r, y)	(u, y)			
F-bridovi	(r, y)	(u, y)						

Zadatak 6.

Dajte algoritam koji će za dani graf $G = (V, E)$ u $O(V)$ vremenu (neovisno o broju bridova E) odrediti sadrži li G cikluse ili ne.

RJEŠENJE

```
1 def Is_Cyclic (G, x)
2     count = 0
3     x.color = blue
4     for each v in G.adj[x] do
5         if v.color == white then
6             v.color = blue
7             result = Is_Cyclic(G, v)
8             if result == true then
9                 return true
10            end if
11        else if v.color == blue then
12            count = count + 1
13        end if
14        if count == 2 then
15            return true
16        end if
17    end for
18    return false
```