# Borna Gajić

**Zadatak 1.**
Provedite BFS algoritam na danom grafu i ispišite vrijednosti za $d$ i $\pi$ ako algoritam kreće iz vrha $u$.

**Rješenje**

| vrh | u | t | y | x | w | s | r | v |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| d | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| $\pi$ | NIL | u | u | u | t | w | s | s |

**Zadatak 2.**
Pokažite da je korištenje jednog bita za spremanje svake boje vrha dovoljno u smislu da će BFS algoritam vratiti isti rezultat i ako se ukloni redak 18 u pseudokodu za BFS. (Pseudo-kod se nalazi na stranici 595 u knjizi Introduction to Algorithms.)

**Rješenje**
Ako za spremanje podatka boje čvora pretvorimo u tip podatka Charonda trošimo svega 1 bit memorije, gdje prvo slovo svake boje predstavlja tu boju. Izbacivanjem linije 18 u kodu BFS-a nismo ništa promijenili jer nam je jedino bitan podatak jel čvor bijel, odnosno jel ikada bio posjećen. Pa je iz tog razloga tip podatka koji sprema boju čvora mogao isto tako biti i Bool jer su nam bitne samo dvije boje (u kodu sa stranice 595), a to su bijela i siva. Algoritam BFS radi ne promijenjeno.

**Zadatak 3.**
Koliko je vrijeme izvršavanja BFS algoritma ako je graf na ulazu reprezentiran matricom susjedstva te modificiramo algoritam tako da može podnijeti ovakav oblik unosa?

**Rješenje**
Vrijeme izvršavanja BFS algoritma je $O(V^2)$, ako koristimo reprezentaciju grafa uz pomoć matrice, jer da saznamo jel $v$ susjed čvora $u$ potrebno je proći kroz cijeli red matrice i tako za svaki čvor unutar grafa.

**Zadatak 4.**
Dokažite navedeni teorem.Neka je $T$ graf. Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:

i) $T$ je stablo,

ii) bilo koja dva vrha u $T$ povezana su jedinstvenim putom u $T$,

iii) $T$ je minimalno povezan, tj.$T$ je povezan, no $T - e$ je nepovezan za svaki brid $e \in T$,

iv) $T$ je maksimalno acikličan, tj. $T$ ne sadrži ciklus, ali $T + xy$ sadrži ciklus za bilo koja dva nesusjedna vrha $x, y \in T$.

**Rješenje**

Ako je $T$ stablo onda su bilo koja dva vrha u $T$ jedinstveno povezana.

Dokaz
Neka je $T$ graf definiran s $n$ vrhova. Kažemo da je graf povezan ako ima baren $n-1$ bridova; ako ima točno $n-1$ bridova onda za takav graf kažemo da je stablo, u suprotnom, ako ima više od $n-1$ bridova onda je ciklički. Iz prethodne definicije zaključujemo da graf $T$ ima točno $n-1$ bridova, te zbog toga nema ciklusa. Prema tome, sigurno ne postoji više od jednog puta od vrha $u \in T$ do $v \in T$, što znači da su oni jedinstveno povezani.

Ako su bilo koja dva vrha u $T$ jedinstveno povezana onda je $T$ minimalno povezan.

Dokaz
Pošto su bilo koja dva vrha u $T$ jedinstveno povezana to znači da u grafu $T$ ne postoje ciklusi, stoga je taj graf stablo. Oduzmemo li jedan brid dobivamo kontradikciju s prvom tvrdnjom, više ne postoji put od $u \in T$ do $v \in T$. Dodamo li novi brid, dobivamo kontradikciju s činjenicom da je $T$ stablo, odnosno u tom će slučaju postojati više od jednog puta kojim možemo doći do određenog vrha. Iz navedenih činjenica zaključujemo da dodavanjem odnosno oduzimanjem bridova, početna tvrdnja ne vrijedi, u suprotnom je istinita.

Ako je T minimalno povezan onda je T maksimalno cikličan

Dokaz
Pošto je $T$ minimalno povezan idućim oduzimanjem brida dobivamo ne povezani graf; što znači da u grafu ne postoji više od jednog puta od vrha $u \in T$ do $v \in T$. Graf je maksimalno acikličan ako $T + xy$ sadrži ciklus za bilo koja dva nesusjedna vrha $x, y \in T$. Ukoliko dodamo novi brid $xy$, $x \in T$, $y \in V$ pri čemu je $V$ skup svih vrhova, graf ostaje minimalno povezan pa tako i maksimalno acikličan, no dodavanjem novog brida $xy$, $x, y \in T$ narušavamo minimalnu povezanost od $T$, i dobivamo ciklus te smo s tim također narušili i svojstvo maksimalne acikličnosti od $T$. Prema tome, ako je graf minimalno povezan onda je on i maksimalno acikličan.

**Zadatak 5.**
Pokažite kako DFS radi na grafu sa slike. Pretpostavite da prilikom prolaska kroz vrhove prije dolaze oni koji su prije po abecedi i da su liste susjedstva također sortirane uzlazno prema abecedi. Napišite koja su vremena kada je svaki vrh otkriven i kada je svaki vrh istražen. Za svaki brid napišite klasifikaciju nakon izvršavanja algoritma pretraživanja udubinu.

**Rješenje**

| vrh | q | r | s | t | u | v | w | x | y | z |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| d | 1 | 17 | 2 | 8 | 18 | 3 | 4 | 9 | 13 | 10 |
| f | 16 | 20 | 7 | 15 | 19 | 6 | 5 | 12 | 14 | 11 |

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| T-bridovi | (q, s) | (s, v) | (v, w) | (q, t) | (t, x) | (x, z) | (t, y) | (r, u) |
| B-bridovi | (w, s) | (z, x) | (y, q) | (r, y) | (u, y) | | | |
| F-bridovi | (r, y) | (u, y) | | | | | | |

**Zadatak 6.**
Dajte algoritam koji će za dani graf $G = (V, E)$ u $O(V)$ vremenu (neovisno o broju bridova $E$) odrediti sadrži li $G$ cikluse ili ne.

**Rješenje**

```
def Is_Cyclic (G, x)
    count = 0
    x.color = blue
    for each v in G.adj[x] do
        if v.color == white then
            v.color = blue
            result = Is_Cyclic(G, v)
            if result == true then
                return true
            end if
        else if v.color == blue then
            count = count + 1
        end if
        if count == 2 then
            return true
        end if
    end for
    return false
```