# COMPLEXITĂȚI

1) "$O$": SPUNEM CĂ $f \in O(g)$ DACĂ $(\exists)\ c, n_0$ (CONSTANTE) $>0$ a.î. $(\forall)\ n \geq n_0$ AVEM $f(n) \leq c \cdot g(n)$. (FUNCȚIA SĂ FIE MĂRGINITĂ SUPERIOR DE LA UN ANUMIT RANG ÎNCOLO).

Ex: $3n^3 \in O(n^3)$; $n^2 \in O(n^3)$; $\log(n) + 3 \in O(n)$ $\boxed{O: \text{"}\leq\text{"}}$

2) "$\Omega$": SPUNEM CĂ $f \in \Omega(g)$ DACĂ $(\exists)\ c, n_0$ (CONST.) $>0$ a.î. $(\forall)\ n \geq n_0$ AVEM $f(n) \geq c \cdot g(n)$. (MĂRGINITĂ INFERIOR)

Ex: $n^3 \in \Omega(n^3)$; $\frac{n^3}{2} \in \Omega(n^3)$; $n^2 \in \Omega(n^3)$; $n^2 - 4n + 17 \notin \Omega(n^3)$

$\boxed{\Omega: \text{"}\geq\text{"}}$

3) "$\theta$": SPUNEM CĂ $f \in \theta(g)$ DACĂ $(\exists)\ c1, c2, n_0$ (CONST.) $>0$ a.î. $(\forall)\ n \geq n_0$ AVEM $c1 \cdot g(n) \leq f(n) \leq c2 \cdot g(n)$. $\boxed{\theta: \text{"}=\text{"}}$

Ex: $n^2 - 2n \cdot \log(0,5n) \in \theta(n^2)$

4) "$o$": SPUNEM CĂ $f \in o(g)$ DACĂ $(\forall)\ c > 0, (\exists)\ n_0$ a.î. $(\forall)\ n \geq n_0$ AVEM $f(n) < c \cdot g(n)$!

$\boxed{o: \text{"}<\text{"}}$ → MĂRGINITĂ STRICT SUPERIOR

Ex: $n^3 \notin o(n^3)$ $\quad n^2 \in o(n^3)$

$\frac{n^3}{2} \notin o(n^3)$

5) "$\omega$": SPUNEM CĂ $f \in \omega(g)$ DACĂ $(\forall)\ c > 0, (\exists)\ n_0$ a.î. $n \geq n_0$ AVEM $f(n) > c \cdot g(n)$.

$\boxed{\omega: \text{"}>\text{"}}$ → MĂRGINITĂ STRICT INFERIOR

Ex: $n^3 \notin \omega(n^3)$; $n^4 \notin \omega(n^4)$; $n^4 \in \omega(n^3)$; $n \cdot \log n \in \omega(n)$

---

$\begin{cases} O(g): \text{"}\leq\text{"} \\ o(g): \text{"}<\text{"} \end{cases}$ $\quad \theta(g): \text{"}=\text{"} \quad$ $\begin{cases} \Omega(g): \text{"}\geq\text{"} \\ \omega(g): \text{"}>\text{"} \end{cases}$

* ÎN $\Omega(g)$ SE AFLĂ TOATE FUNCȚIILE CU TERMENUL DOMINANT "$\geq$" CEL DIN "$g$";
* ÎN $O(g)$ " ——— " ——— " " $\leq$ " " — " — ";
* ÎN $\theta(g)$ " ——— " ——— " " $=$ " " — " — ".

EX:

| $O(n^3)$ | $\theta(n^3)$ | $\Omega(n^3)$ |
|---|---|---|
| $n^2$ | $n^3$ | $n^4$ |
| $3n^2 + n \cdot \log(n^4)$ | $3n^3 + n + \log n$ | $2^n - n^4$ |
| $11n$ | $n^3 + \log(n^{99})$ | $4n^3 + 4n^2$ |
| $n\sqrt{n}$ | | $n^3\sqrt{n}$ |

## CRESTERE ASIMPTOTICĂ:

$$1 < \log n < n < n \cdot \log n < n^2 < n^2 \log n < \ldots < 2^n$$

## = RECURENTE =

ÎN GENERAL, PT. UN ALGORITM RECURSIV, AVEM URMĂTORUL TIMP DE RULARE:

$$T(n) = T(\text{SUBPROBLEMĂ } 1) + T(\text{SUBPROBLEMĂ } 2) + \ldots + T(\text{SUBPROBLEMĂ } n) + \underbrace{D(n)}_{\text{TIMP DIVIZIUNE}} + \underbrace{C(n)}_{\text{TIMP COMBINARE}}$$

❗ $T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + 1 \Rightarrow O(n)$

❗ $T(n) = T\left(\frac{n}{a}\right) + T\left(\frac{(a-1)n}{a}\right) + O(n) \to O(n \cdot \log n)$ ; $T(n) = T\left(\frac{n}{b}\right) + 1 \Rightarrow \Theta(n \cdot \log n)$

---

MERGE SORT: $T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + O(n) \to O(n \cdot \log n)$

INSERTION SORT: $T(n) = T(n-1) + n \to O(n^2)$

CĂUTARE BINARĂ: $T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + 1 \to O(\log n)$

---

## = TEOREMA MASTER =

APLIC PE RECURENTE DE FORMA $\boxed{T(n) = a \cdot T\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)}$.

1) DACĂ $f(n) \in O(n^{\log_b a - \varepsilon})$, $\varepsilon > 0 \Rightarrow T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$

2) DACĂ $f(n) \in \Theta(n^{\log_b a}) \Rightarrow T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \cdot \log_2 n)$

3) DACĂ $f(n) \in \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon})$, pt $\varepsilon > 0$, $\Rightarrow T(n) \in \Theta(f(n))$

---

❗ $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} \approx \ln n$

EXERCIȚII:

1) $n^3 \in ? \Rightarrow n^3 \in O(n^3)$

$g(n) = n^3$

$f \in O(g) \Leftrightarrow (\exists)\ c, n_0 > 0$ a.î. $(\forall)\ n \geq n_0,\ f(n) \leq c \cdot g(n)$

ALEGEM $c = 1;\ n_0 = 1 \Rightarrow n^3 \leq 1 \cdot n^3$ (A), $(\forall)\ n \geq 1$

2) $200 n^3 \in O(n^3)$

$g(n) = n^3;\ f(n) = 200 n^3$

$f \in O(g) \Leftrightarrow (\exists)\ c, n_0 > 0$ a.î. $(\forall)\ n \geq n_0,\ f(n) \leq c \cdot g(n)$

ALEGEM $c = 201,\ n_0 = 1 \Rightarrow 200 n^3 \leq 201 \cdot n^3$ (A), $(\forall)\ n \geq 1$

*3) $n \cdot \log_2 n \in \Theta(\log_2 n!) \Leftrightarrow \log_2 n! \in \Theta(n \cdot \log_2 n)$

$f(n) = n \cdot \log_2 n$

$g(n) = \log_2 n!$

$f \in \Theta(g) \Leftrightarrow (\exists)\ c_1, c_2, n_0 > 0$ a.î. $(\forall)\ n \geq n_0,\ c_1 \cdot g(n) \leq f(n) \leq c_2 \cdot g(n)$

a) $c_1 \cdot g(n) \leq f(n)$

$c_1 \cdot \log_2 n! \leq n \cdot \log_2 n = \log_2 n^n$

Alegem $c_1 = 1,\ n_0 = 1 \Rightarrow \log_2 n! \leq \log_2 n^n \Leftrightarrow n! \leq n^n$ (A)

DEM. PRIN INDUCȚIE;

$n = 1 \Rightarrow 1! = 1 \leq 1^1$ (A)

$P(k) \rightarrow P(k+1)$

$P(k):\ k! \leq k^k$ A

$P(k+1):\ (k+1)! \leq (k+1)^{k+1}$

$k!\cancel{(k+1)} \leq (k+1)^k \cdot \cancel{(k+1)}$

$k! \leq (k+1)^k$ (A) $(k! \leq k^k)$

b) $f(n) \leq c_2 \cdot g(n)$

$\log_2 n^n \leq c_2 \cdot \log_2 n!$

$\log_2 n! = \log_2 1 + \ldots + \log_2 n \geq \log_2 \frac{n}{2} + \ldots + \log_2 n \geq \frac{n}{2} \log_2(n/2) =$

$= \frac{n}{2}(\log_2 n - 1) \geq c_2 \cdot n \cdot \log_2 n$

$c_2 = \frac{1}{4};\ n_0 = 4$

4) $f(n)+g(n)\in\Theta(\max\{f(n);g(n)\})$

$(\exists)\ c_1, c_2, n_0>0$ a.î. $(\forall)\ n\geq n_0 \Rightarrow c_1\cdot g(n)\leq f(n)\leq c_2\cdot g(n) \rightarrow$ CAZ GENERAL

a) $\left.\begin{array}{l} c_1\cdot\max\{f(n);g(n)\}\leq f(n)+g(n) \\ c_1=1;\ n_0=1 \end{array}\right\}\Rightarrow A$

b) $\left.\begin{array}{l} f(n)+g(n)\leq c_2\cdot\max\{f(n),g(n)\} \\ c_2=2;\ n_0=1 \end{array}\right\}\Rightarrow A$

5) $\left.\begin{array}{l} f\in O(g) \\ g\in O(h) \end{array}\right\}\Rightarrow f\in O(h)$

$\left.\begin{array}{l} f\in O(g)\Leftrightarrow(\exists)\ c_1, n_0>0 \text{ a.î. } (\forall)\ n\geq n_0,\ f(n)\leq c_1\cdot g(n) \\ g\in O(h)\Leftrightarrow(\exists)\ c_2, n_0'>0 \text{ " — " — "};\ g(n)\leq c_2\cdot h(n) \end{array}\right\}\Rightarrow$

$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow f(n)\leq c_1\cdot g(n)\leq c_1\cdot c_2\cdot h(n)\Rightarrow f(n)\leq c_1\cdot c_2\cdot h(n) \\ f\in O(h)\Leftrightarrow(\exists)\ c, n_0>0 \text{ a.î. } (\forall)\ n\geq n_0,\ f(n)\leq c\cdot h(n) \end{array}\right\}\Rightarrow f\in O(h)$

6) $o(f(n))\cap\omega(f(n))=\emptyset$

$g\in o(f(n))\Leftrightarrow(\forall)\ c_1>0, (\exists)\ n_0$ a.î. $(\forall)\ n>n_0;\ g(n)<c_1\cdot f(n)$

$g\in\omega(f(n))\Leftrightarrow(\forall)\ c_2>0, (\exists)$ " — " — "; $g(n)>c_2\cdot f(n)$

PRESUPUN PRIN ABSURD CĂ $g(n)\in(o(f(n))\cap\omega(f(n)))\Rightarrow$

$\Rightarrow\begin{cases} g(n)\in o(f(n))\Rightarrow g(n)<c_1 f(n) \\ g(n)\in\omega(f(n))\Rightarrow g(n)>c_2 f(n) \end{cases}\ (\forall)\ c_1, c_2$

Aleg $c_1=c_2=1\Rightarrow\begin{cases} g(n)<f(n) \\ g(n)>f(n) \end{cases};\ (\forall)\ n>n_0;n_0'$

Aleg $n''>\max(n_0 \text{ și } n_0')\Rightarrow\left.\begin{cases} g(n'')<f(n'') \\ g(n'')>f(n'') \end{cases}\right\}\Rightarrow$ ∡

7) $(n+a)^b \in \Theta(n^b)$; $a>0$; $b>1$

$f \in \Theta(g) \Rightarrow (\exists)\, c_1; c_2; n_0 > 0$ a.î. $(\forall)\, n > n_0 \Rightarrow c_1 \cdot g(n) \le f(n) \le c_2 \cdot g(n)$

a) $c_1 \cdot n^b \le (n+a)^b$

$$\left.\begin{array}{l} c_1 \cdot n^b \le n^b + C_b^1 n^{b-1} a + \ldots + C_b^b a^b \\ c_1 = 1 \text{ și } n_0 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow (A) \Rightarrow 0 \le C_b^1 n^{b-1} a + \ldots + C_b^b a^b$$

b) $(n+a)^b \le c_2 \cdot n^b$

$$(n+a)^b = n^b + C_b^1 n^{b-1} a + \ldots + C_b^b a^b \le n^b (1 + C_b^1 a + \ldots + C_b^b a^b) \le$$

$$\le n^b \cdot a^b (1 + C_b^1 + C_b^2 + \ldots + C_b^b) = n^b \cdot a^b \cdot 2^b (b+1)$$

$c_2 = a^b \cdot 2^b (b+1)$; $n_0 = 1 \Rightarrow A$

8) $f(n) + o(f(n)) \in \Theta(f(n))$

$f \in \Theta(g) \Leftrightarrow (\exists)\, c_1, c_2, n_0 > 0$ a.î. $(\forall)\, n > n_0 \Rightarrow c_1 \cdot g(n) \le f(n) \le c_2 \cdot g(n)$

a) $c_1 \cdot f(n) \le f_n + o(f(n))$

$c_1 = 1 \Rightarrow A$, $(\forall)\, n > n_0$

b) $f(n) + o(f(n)) \le c_2 \cdot f(n)$

$g \in o(f(n)) \Rightarrow (\forall)\, c > 0, (\exists)\, n_0$ a.î. $(\forall)\, n > n_0 \Rightarrow g(n) < c \cdot f(n)$

$$\left.\begin{array}{l} f(n) + o(f(n)) < f(n) + c \cdot f(n) \le 2 \cdot f(n) \\ c_2 = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow A$$

---

1) $T(n) = T\left(\frac{n}{a}\right) + T\left(\frac{(a-1)n}{a}\right) + \overset{O(n)}{n} \in O(n \cdot \log n) \rightarrow$ MERGESORT

$T(n) = T\left(\frac{n}{3}\right) + T\left(\frac{2n}{3}\right) + n$

PRESUPUN CĂ $T\left(\frac{n}{3}\right) \le c \cdot \frac{n}{3} \cdot \log_2 \frac{n}{3}$

TB. SĂ ARĂTĂM CĂ $T(n) \le c \cdot n \cdot \log_2 n$

$$T(n) = T\left(\frac{n}{3}\right) + T\left(\frac{2n}{3}\right) + n \le c \cdot \frac{n}{3} \cdot \log_2 \frac{n}{3} + 2c \cdot \frac{n}{3} \cdot \log_2 \frac{2n}{3} + n =$$

$$= c \cdot \frac{n}{3} \left(\log_2 n - \log_2 3 + 2 \cdot (\underbrace{\log_2 2}_{1} + \log_2 n - \log_2 3)\right) + n =$$

$$= c \cdot \frac{n}{3} (3 \cdot \log_2 n - 3 \cdot \log_2 3 + 2) + n = cn\left(\log_2 n - \log_2 3 + \frac{2}{3}\right) + n =$$

$$= c \cdot n \cdot \log_2 n - cn\underbrace{\left(\log_2 3 - \frac{2}{3} - \frac{1}{c}\right)}_{>0} \le c \cdot n \cdot \log_2 n \checkmark$$

2) $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + 1 \in O(n)$

PRESUPUN $T(\frac{n}{2}) \leq c \cdot \frac{n}{2} - b$

TB. SĂ DEM. $T(n) \leq c \cdot n - b$

$T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + 1 \leq \cancel{2}c \cdot \frac{n}{\cancel{2}} - 2b + 1 = cn - 2b + 1 \leq cn - b \Big\} \Rightarrow \checkmark$

$b > 1$

3) $T(n) = T(n/2) + n \in O(n)$

PRESUPUN $T(n/2) \leq c \cdot \frac{n}{2}$

TB. SĂ DEM. $T(n) \leq c \cdot n$

$T(n) = T(n/2) + n \leq c \cdot \frac{n}{2} + n = n(1 + \frac{c}{2}) \leq c \cdot n$, $(\forall)\ c \geq 2$

4) $T(n) = T(n-1) + 1 \in O(n)$

PRESUPUN $T(n-1) \leq c(n-1)$

TB. SĂ DEM. $T(n) \leq c \cdot n$

$T(n) = T(n-1) + 1 \leq c(n-1) + 1 = cn - (c-1) \leq cn$, $(\forall)\ c \geq 1$

5) $T(n) = T(n-1) + \overset{O(n)}{n} \in O(n^2) \rightarrow$ INSERTION SORT

PRESUPUN $T(n-1) \leq c \cdot (n-1)^2$

TB. SĂ DEM $T(n) \leq c \cdot n^2$

$T(n) = T(n-1) + n \leq c(n-1)^2 + n = c(n^2 - 2n + 1) + n = \cancel{c \cdot n^2} - 2 \cdot c \cdot n + c + n \leq \cancel{cn^2}$

$-2 \cdot c \cdot n + c + n \leq 0 \Rightarrow 2 \cdot c \cdot n - c - n \geq 0$

$n(2c - 1 - \frac{c}{n}) \geq 0$, A, $(\forall)\ c \geq 1$

6) $T(n) = T(\frac{n}{2}) + 1 \in O(\log n)$

PRESUPUN $T(\frac{n}{2}) \leq c \cdot \log_2 \frac{n}{2}$

TB. SĂ DEM: $T(n) \leq c \cdot \log_2 n$

$T(n) = T(\frac{n}{2}) + 1 \leq c \cdot \log_2 \frac{n}{2} + 1 = c(\log_2 n - \overbrace{\log_2 2}^{1}) + 1 = c \cdot \log_2 n - (c-1) \leq$

$\leq c \cdot \log_2 n$, $(\forall)\ c \geq 1$

7) $T(n) = 2T(n-1) + 1 \in O(2^n)$

PRESUPUN $T(n-1) \leq c \cdot 2^{n-1} - b$

TB. SĂ DEM $T(n) \leq c \cdot 2^n - b$

$T(n) = 2T(n-1) + 1 \leq 2 \cdot c \cdot 2^{n-1} - 2b + 1 = c \cdot 2^n - 2b + 1 \leq c \cdot 2^n - b$, $(\forall)\ b \geq 1$

# = SORTĂRI =

$O(n^2)$: BUBBLE / INSERTION / SELECTION SORT

$O(n \cdot \log n)$: MERGE / QUICK / HEAP SORT

$O(n)$: COUNT / RADIX SORT

---

## 1) BUBBLESORT:

5 1 4 2 8 9 (LUĂM GRUPURI DE 2 ELEMENTE)

1<5 => ÎNTERSCHIMB

1 5 4 2 8 9

4<5 => SWAP

1 4 5 2 8 9

2<5 => SWAP

1 4 2 5 8 9

PARCURGI LISTA PÂNĂ CÂND E ORDONATĂ. IEI "ok=0" CA SĂ VERIFICI DACĂ S-AU PRODUS ÎNTERSCHIMBĂRI. ok=1 => STOP.

1 2 4 5 8 9 → SORTAT

## 2) ÎNSERTION SORT:

SORTAT | ZONA NESORTATĂ

7 | 8 5 2 4 6 3

7<8 → NU SE ÎNTERSCHIMBĂ

7 8 | 5 2 4 6 3

8>5; 7>5

5 7 8 | 2 4 6 3

2<8; 2<7; 2<5

2 5 7 8 | 4 6 3

4<8; 4<7; 4<5; 4>2

2 4 5 7 8 | 6 3

6<8; 6<7; 6>5

2 4 5 6 7 8 | 3

3<8 .... 3<4; 3>2

2 3 4 5 6 7 8 → SORTAT

## 3) SELECTION SORT:

SORTAT | NESORTAT

| 64 25 12 22 11

SWAP

PARCURGEM VECTORUL ȘI GĂSIM MINIMUL.

11 | 25 12 22 64

11 12 | 25 22 64

11 12 22 | 25 64

11 12 22 25 64 → SORTAT

---

## 4) MERGESORT: (DIVIDE ET IMPERA) ⇒ $T(n) = 2T(n/2) + O(n) \in O(n \cdot \log n)$

38 27 43 3 | 9 82 10

38 27 | 43 3      9 82 | 10

38 | 27      43 | 3      9 | 82      10

38 > 27      43 > 3      9 < 82      10

DIVIDE

27 38      3 43      9 82      10

3 27 38 43      9 10 82

(27 > 3; 27 < 43; 38 < 43)      (9 < 10; 82 > 10)

3 9 10 27 38 43 82 ⇒ SORTAT

(3 < 9; 27 > 9; 27 > 10; 27 < 82 ....)

MERGE

5) QUICKSORT: $\Rightarrow T(n) = T\left(\frac{n}{a}\right) + T\left(\frac{(a-1)n}{a}\right) + O(n) \in O(n \cdot \log n)$

⇓

DIVIDE ET IMPERA

PIVOT (TOATE EL. { DIN STÂNGA ⇒ "≤" ; DIN DREAPTA ⇒ ">" })

5 11 22 7 4 900 100 1 32 $\boxed{13}$

$i=0$, $i=1$, $i=2$; $j=0$

$5<13$ ; $11<13$ ; $22 \not< 13 \to$ SWAP (22;13)

5 11 $\boxed{13}$ 7 4 900 100 1 32 22

$j=1$, $j=2$

$13<32$; $13 \not< 1 \to$ SWAP (13;1)

5 11 1 7 4 900 100 $\boxed{13}$ 32 22

$i=3$, $i=4$, $i=5$

$7<13$; $4<13$ ; $900 \not< 13 \to$ SWAP (900, 13)

5 11 1 7 $\boxed{4}$ | $\boxed{13}$ | 100 900 32 $\boxed{22}$ (13<100 ✓)

$j=3$

APLICĂM ACEIAȘI PAȘI PT PARTEA STÂNGĂ ȘI APOI PT. PARTEA DR..

5 11 1 7 $\boxed{4}$

$i=0$, $j=0$

$5 \not< 4 \to$ SWAP

$\boxed{4}$ 11 1 7 5

$j=1$, $j=2$

$4<7$; $4 \not< 1 \to$ SWAP

1 11 $\boxed{4}$ 7 5

$i=1$

$11 \not< 4 \to$ SWAP

$\boxed{1}$ | $\boxed{4}$ | 11 7 $\boxed{5}$

$i=0$, $j=0$

SORTAT

$\boxed{5}$ | 7 $\boxed{11}$

100 900 32 $\boxed{22}$

$i=0$, $j=0$

$100 \not< 22 \to$ SWAP

$\boxed{22}$ | 900 32 $\boxed{100}$

$j=1$, $j=2$

$22<32$; $22<900$

900 32 $\boxed{100}$

$i=0$, $j=0$

$900 \not< 100 \to$ SWAP

$\boxed{100}$ 32 900

$j=1$

$100 \not< 32 \to$ SWAP

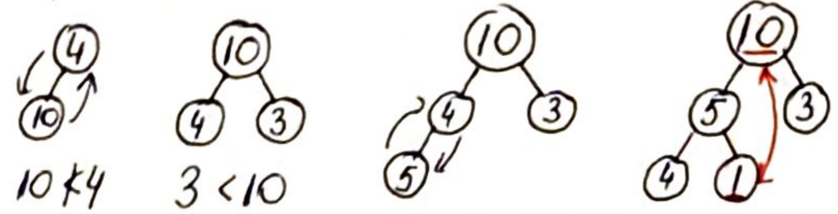
32 | $\boxed{100}$ | 900

⇓

1 4 5 7 11 13 22 32 100 900 ⇒ SORTAT

## 6) HEAPSORT: $\Rightarrow \in O(n \cdot \log n)$

CREĂM HEAP CU ELEMENTELE DATE: 4 10 3 5 1 (MAX HEAP)

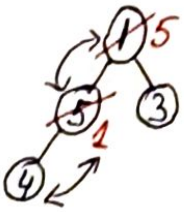


$10 \nless 4$ $\quad 3 < 10$ $\quad 5 \nless 4 ; 5 < 10$ $\quad 1 < 5$

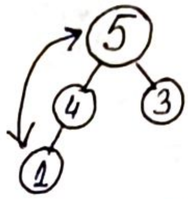
VECTORUL: 10 5 3 4 1

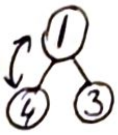
SWAP PRIMUL ȘI ULTIMUL ELEMENT DIN HEAP ȘI ELIMINĂM ULTIMUL ELEMENT

VECTOR: 1 5 3 4 ¦ 10 $\qquad$ VECTOR: 5 4 3 1 ¦ 10



(REARANJĂM HEAP) $\Rightarrow$





VECTOR: 1 4 3 ¦ 5 10 $\Rightarrow$

V: 4 1 3 ¦ 5 10

VECTOR: 3 1 ¦ 4 5 10 $\Rightarrow$ 1 $\qquad$ V: 1 ¦ 3 4 5 10

$\Rightarrow$ V: 1 3 4 5 10 $\Rightarrow$ SORTAT

7) COUNTING SORT: => O(n) => { DACĂ AM UN ȘIR DE "n" ELEMENTE ÎN CARE FIECARE ELEMENT ARE MAX. "K" APARIȚII => O(n+K)

INPUT: 1 4 1 2 7 5 2 => CHEILE $\in [0,9] \cap \mathbb{N}$

| INDEX: | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 2 | 2 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |

VECTOR FRECVENȚĂ => DE CÂTE ORI APAR CHEILE

0+2  2+2  4+0  4+1  5+1  6+0  6+1  7+0  7+0

| INDEX: | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | $\boxed{2}$ | 4 | 4 | 5 | 6 | 6 | 7 | 7 | 7 |

=> SUMA APARIȚII

↳ 1 apare la poziția 2; 2-1=1

AVEM 7 ELEMENTE ÎN INPUT => VECTOR DE POZIȚII CU 7 ELEMENTE.

| POZIȚII: | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 1 | 2 | 2 | 4 | 6 | 7 |

=> SORTAT

INPUT: 1 4 1 2 7 5 2 (PARCURGEM INPUT PAS CU PAS ȘI FACEM MODIFICĂRI ÎN "INDEX")

POZ: 2
2-1=1

POZ: 5 => 5-1=4

POZ: 1
1-1=0

2 la poz: 4
4-1=3

NU E OPTIM PENTRU VALORI MARI.

SE FOLOSEȘTE ÎMPREUNĂ CU RADIXSORT.

```
for(i=0;i<n;i++)
    frecvența[v[i]]++;
for(i=1;i<=EL_MAX;i++)
    frecvența[i]+=frecvența[i-1];
for(i=0;i<n;i++)
{ output[frecvența[v[i]]-1]=v[i];
    frecvența[v[i]]--;
}
```

## 8) RADIXSORT: $\Rightarrow O(n)$ $(O(n+k))$

INPUT: 170 45 75 90 802 24 2 66

ÎNCEPEM DE LA CEL MAI NESEMNIFICATIV BIT (CIFRA UNITĂȚILOR).

LE SORTĂM FOLOSIND COUNTING SORT. (DACĂ (∃) CIFRE EGALE, SE PĂSTREAZĂ ORDINEA ORIGINALĂ.

170 90 802 2 24 45 75 66

802 2 24 45 66 170 75 90

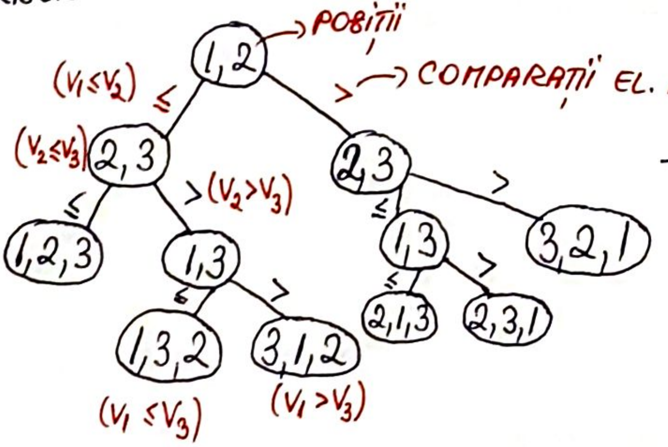
2 24 45 66 75 90 170 802 ⇒ SORTAT

---

ORICE ALGORITM DE SORTARE BAZAT PE COMPARAȚII ÎNTRE CHEI ARE TIMP DE RULARE (ÎN CEL MAI DEFAVORABIL CAZ)

$\boxed{\Omega(n \cdot \log n)}$

ALGORITMII DE SORTARE BAZAȚI PE COMPARAȚIA DINTRE CHEI POT FI REPREZENTAȚI CA ARBORI DE DECIZIE.




⇒ ARB. DE DECIZIE PT. 3 ELEMENTE. SUNT POSIBILE $3! = 6$ = PERMUTĂRI (= FRUNZE)

ÎN CEL MAI DEFAVORABIL CAZ, NR. DE COMPARAȚII REALIZAT DE ARBORELE DE DECIZIE ESTE EGAL CU CEL MAI LUNG DRUM DE LA RĂDĂCINĂ, LA FRUNZE; ADICĂ ESTE EGAL CU ÎNĂLȚIMEA ARBORELUI.

ARB. BINAR CU ÎNĂLȚIMEA "h" NU ARE MAI MULT DE $2^h$ FRUNZE.

$$n! \le 2^h \mid \log_2$$

$$\log_2 n! \le \log_2 2^h = h$$

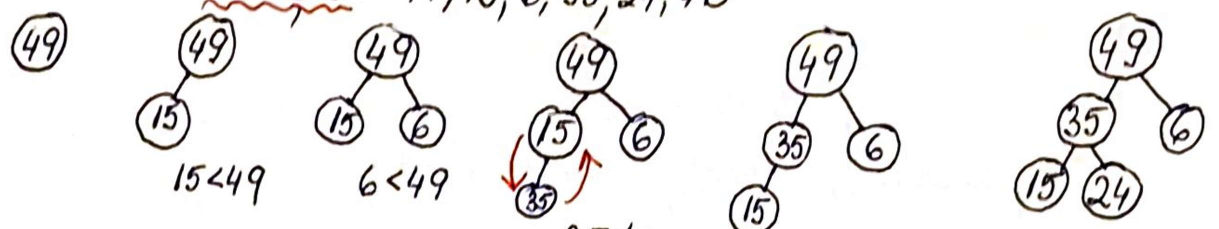
PRIN APROXIMAREA LUI STIRLING $\left(n! \gtrsim \left(\frac{n}{e}\right)^n\right) \Rightarrow h \ge \log\left(\frac{n}{e}\right)^n = n \cdot \log n - n \log e = \Omega(n \cdot \log n)$

# HEAP-URI

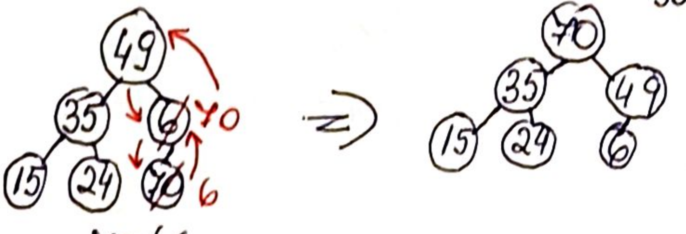
**HEAP** = STRUCT DATE CE PERMITE:
1) INSERȚIA => $O(\log n)$
2) RETURN MAX/MIN (= RĂDĂCINA) => $O(1)$
3) ȘTERGERE " — " — " => $O(\log n)$

- MAX-HEAP: NODUL MAX = RĂDĂCINĂ (TOȚI FII SUNT MAI MICI DECÂT NODUL TATĂ)
- MIN-HEAP: NODUL MIN = RĂDĂCINĂ

Ex: MAX-HEAP → INSERȚIE: 49, 15, 6, 35, 24, 70



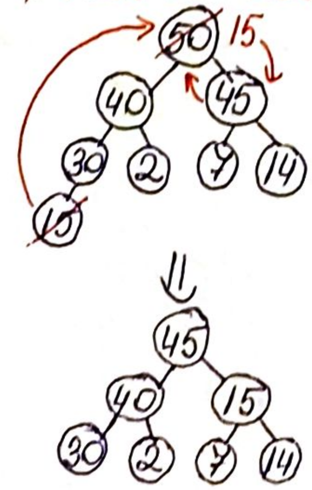
15<49 6<49 35≮15 35<49 ✓ 24<35



70≮6
70≮49

$\underbrace{70}_{0}, \underbrace{35}_{1}, \underbrace{49}_{2}, \underbrace{15}_{3}, \underbrace{24}_{4}, \underbrace{6}_{5}$

## ȘTERGERE MAXIM DIN MAX-HEAP:



- ȘTERGEM RĂDĂCINA (MAXIMUL)
- PUNEM $\underbrace{\text{ULTIMA FRUNZĂ}}_{\text{ULTIMUL ELEMENT DIN VECTOR}}$ ÎN LOCUL LIBER
- REARANJĂM HEAP-UL PT. CĂ NU MAI RESPECTĂ REGULA MAX (INTERSCHIMB REPETAT CU NODURILE DIN DREAPTA)

## POZIȚII VECTOR:

PT. NOD "$i$":
- TATĂL = $[i/2]$
- FIU STÂNG = $2i$
- FIU DREPT = $2i+1$

Ex:

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 45 | 40 | 15 | 30 | 2 | 7 | 14 |

$i = 2$ => NOD 40 =>
- TATĂL = $i/2 = 1$ => 45
- FIU ST = $2i = 4$ => 30
- FIU DR = $2i+1 = 5$ => 2

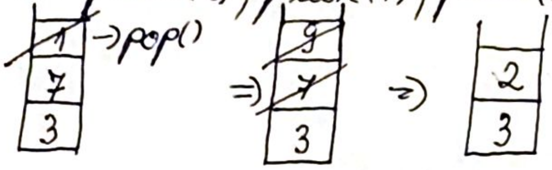
# = STIVE. COZI =

## 1) STIVĂ

• ~~LIFO~~ = LAST IN, FIRST OUT. OPERAȚIILE SE EXECUTĂ LA ACELAȘI CAPĂT.

OPERAȚII: { push (NR) → INSERT
pop() → DELETE VÂRF

EX: push(3); push(7); push(1); pop(); push(9); pop(); pop(); push(2)




## 2) COADĂ

• FIFO = FIRST IN, FIRST OUT. OPERAȚIILE SE EXECUTĂ LA CAPETE DIFERITE.

Ex: push(1); push(7); push(3); pop(); push(9); pop(); pop(); push(2)

IN: 9 3 7 ~~1~~ :OUT

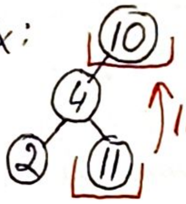
IN: 2 9 ~~3~~ ~~7~~ :OUT

IN: 2 9 : OUT

# = ARBORE BINAR DE CĂUTARE =

DEF: A.B.C. = UN ARBORE BINAR (UN NOD ARE MAX 2 FII) ÎN CARE FIECARE NOD ARE VALOAREA MAI MARE DECÂT TOATE NODURILE DIN SUBARBORELE STÂNG ȘI ARE „ —— " —— " MICĂ „ —————— " —————— " DREPT.

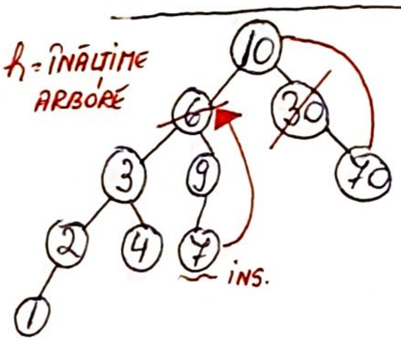
Ex:




11>10 ⇒ NU E A.B.C.

OPERAȚII:
1) INSERȚIE
2) CĂUTARE
3) ȘTERGERE
4) MIN/MAX
5) SUCCESOR/PREDECESOR
6) PARCURGERI

h = ÎNĂLȚIME ARBORE




1) INSERȚIE: pt 7 $\boxed{\Rightarrow \in O(h)}$

7<10 → stânga; 7>6 → dreapta; 7<9 → stânga

2) CĂUTARE: pt. 2 ⇒ $\boxed{\in O(h)}$ ; h = ÎNĂLȚIME ARB.

2<10 → st; 2<6 → st; 2<3 → st; 2=2 → GĂSIT

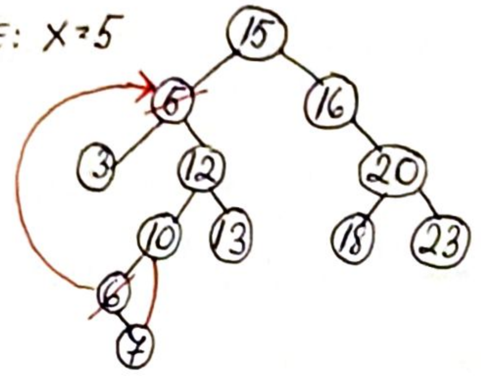
3) ȘTERGERE: a) "X" = FRUNZĂ (NU ARE FII) → TRIVIAL (EX: 1)

b) "X" ARE UN SINGUR FIU (ST/DR) (EX: 30): SE ELIMINĂ "X" ȘI SE FACE LEGĂTURA DINTRE TATĂL LUI "X" ȘI FIUL LUI.

c) "X" ARE AMBII FII (EX 6): SE ÎNLOCUIEȘTE "X" CU SUCCESORUL (">X") CARE NU ARE FIU STÂNG.

⇒ $\boxed{\in O(h)}$

ALT EX. PT. ȘTERGERE: X=5




CĂUTĂM SUCCESOR FĂRĂ FIU STÂNG, DAR AVEM GRIJĂ SĂ PARCURGEM ARBORELE DE LA STÂNGA LA DREAPTA:

- 12>5, DAR ARE FIU ST;
- 10, " —"— —"—
- 6, NU ARE FIU ST.

4) MIN → COBORÂM PE STÂNGA PÂNĂ LA NULL (EX: 3)
MAX → " —"— —" DREAPTA " —"— —" (EX: 23) } ⇒ $\boxed{\in O(h)}$

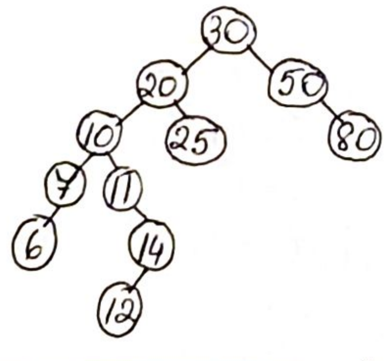
5) SUCCESOR: CEL MAI MIC NOD MAI MARE DECÂT "X" (EX: SUCCESOR 10 = 12)
a) "X" ARE FIU DR ⇒ SUCCESOR = MIN DIN SUBARBORE DR.
b) "X" NU " —"— —" ⇒ " —"— —" = CEL MAI JOS "Y" A.Î. "Y" ȘI FIU ST. "Y" SUNT STRĂMOȘI PT. "X".

PREDECESOR: CEL MAI MARE NOD MAI MIC DECÂT "X" (EX: PREDECESOR 10 = 7)

→ $\boxed{\in O(h)}$

6) PARCURGERI:

RSD (RĂDĂCINĂ-STÂNGA-DREAPTA): 30, 20, 10, 7, 6, 11, 14, 12, 25, 50, 80
*SRD: 6, 7, 10, 11, 12, 14, 20, 25, 30, 50, 80 → OBȚINEM VECTORUL ORDONAT
SDR: 6, 7, 12, 14, 11, 10, 25, 20, 80, 50, 30




ÎNĂLȚIME ARBORE COMPLET $\in O(\log n)$:

$n$ = NR. NODURI
$l_k$ = " —"— —" PE NIVEL "K" $\begin{cases} l_k = 2 \cdot l_{k-1} \\ l_0 = 1 \text{ (RĂDĂCINA)} \end{cases}$

$2^0 + 2^1 + \dots + 2^k = n = 2^{k+1} - 1 \Rightarrow 2^{k+1} = n+1 \Rightarrow \log_2 2^{k+1} = \log_2 (n+1) \Rightarrow$

$\Rightarrow k+1 = \log_2 (n+1) \Rightarrow k = \log_2 (n+1) - 1 \Rightarrow k \in O(\log n)$

1) A.B.C.. DEM. CĂ DACĂ UN NOD "X" ARE FIU DREPT, ATUNCI SUCCESORUL SĂU NU ARE FIU STÂNG.

PRIN ABSURD, $(\exists)$ $y$ a.î. $y$ = FIU STÂNG AL SUCC(X).
$y$ = FIU STÂNG SUCC(X) $\Rightarrow$ $y <$ SUCC(X)
$y$ și SUCC(X) SUNT ÎN SUBARBORE DREPT X $\Rightarrow$ $y$, SUCC(X) $>$ X $\}$ $\Rightarrow$ ↯ ($y$ == SUCC(X))

2) ARBORE BINAR PLIN = $(\forall)$ NOD (CU EXCEPȚIA FRUNZELOR) ARE EXACT 2 FII.
DEM. CĂ $(\forall)$ ARBORE NEPLIN, NU POATE CORESPUNDE UNUI COD OPTIM.

ARB. OPTIM = ARE COSTUL MINIM.

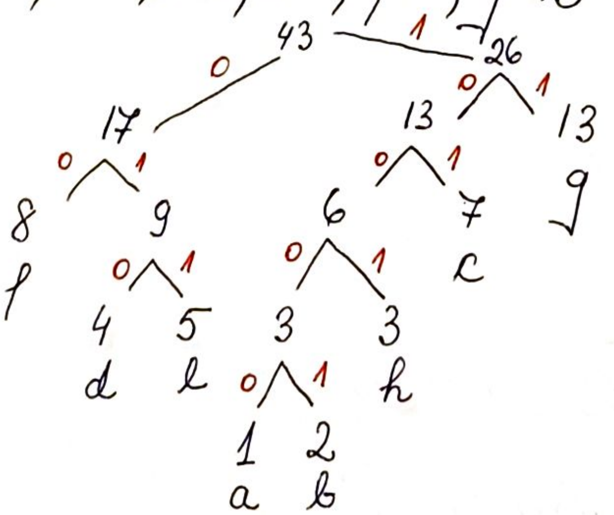
$$\text{COST(ARBORE)} = \sum_{i \in \text{FRUNZĂ}} \text{FRECVENȚĂ}(i) \cdot \text{ADÂNCIME}(i)$$

$\boxed{2^h - 1 = \text{NR. NODURI ARB. BINAR PLIN}}$

PRESUPUN "T" = ARB. NEPLIN. PRIN ABSURD, E OPTIM..
T = NEPLIN $\Rightarrow$ $(\exists)$ NODUL $v \in T$ CARE ARE UN SINGUR FIU. DACĂ ELIMIN $v$ DIN T, ADÂNCIMEA TUTUROR NODURILOR DIN SUBARBORELE LUI "$v$" VA SCĂDEA $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ cost(T $- \{v\}$) $<$ cost T ↯ (PT. CĂ L-AM PRESUPUS PE "T" OPTIM)

## = ARBORI HUFFMAN =

Ex: $f=8$; $a=1$; $g=13$; $h=3$; $c=7$; $b=2$; $d=4$; $e=5$
LE ORDONĂM:
$a=1$; $b=2$; $h=3$; $d=4$; $e=5$; $c=7$; $f=8$; $g=13$




$a = 10000$
$b = 10001$
$c = 101$
$d = 010$
$e = 011$
$f = 00$
$g = 11$
$h = 1001$

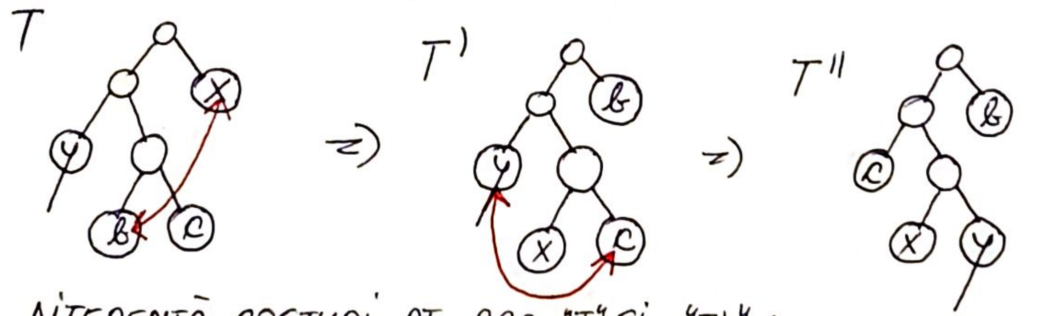
# DEMONSTRAȚIE CORECTITUDINE ALGORITM HUFFMAN
## METODA GREEDY

PT. A DEM. CĂ ALG. HUFFMAN E CORECT, VOM ARĂTA CĂ PROBLEMA DETERMINĂRII UNEI CODIFICĂRI PREFIX OPTIME IMPLICĂ ALEGERI GREEDY ȘI ARE O STRUCTURĂ OPTIMĂ. URMĂTOAREA LEMĂ SE REFERĂ LA PROP. ALEGERII GREEDY.

LEMA 1: FIE "C" UN ALFABET ÎN CARE FIECARE CARACTER $c \in C$ ARE O FRECVENȚĂ $f[c]$. FIE "$x$" $\neq$ "$y$" $\in C$, AVÂND CELE MAI MICI FRECVENȚE. ATUNCI ($\exists$) O CODIFICARE PREFIX OPTIMĂ PT "C" ÎN CARE CUVINTELE DE COD PT. "$x$" ȘI "$y$" AU ACEEAȘI LUNGIME ȘI DIFERĂ DOAR PRIN ULTIMUL BIT.

LUĂM "T" = ARB., REPREZENTÂND O CODIFICARE PREFIX OPTIMĂ ȘI-L MODIFICĂM, REALIZÂND O CODIFICARE PREFIX OPTIMĂ. ÎN NOUL ARB., "$x$" ȘI "$y$" VOR APĂREA CA FRUNZE CU ACELAȘI TATĂ ȘI SE VOR AFLA PE NIVELUL MAX DIN ARB. $\Rightarrow$ "$x$" ȘI "$y$" VOR AVEA UN BIT DIFERIT (ULTIMUL BIT). PRESUPUN $f[x] \le f[y]$. (1)
FIE "$b$" ȘI "$c$" = FRUNZE FRAȚI, SITUATE PE NIVEL MAX ARB., CU FRECVENȚE ARBITRARE. PRESUPUN $f[b] \le f[c]$. (2)

$\overset{(1)+(2)}{\Rightarrow} f[x] \le f[b]$ ȘI $f[y] \le f[c]$



DIFERENȚĂ COSTURI PT. ARB. "T" ȘI "T'":

$$B(T)-B(T') = \sum_{c\in C} \underbrace{f[c]}_{\text{FRECVENȚĂ}} \cdot d_T(c) - \sum_{c \in C} f[c] \cdot \underbrace{d_{T'}(c)}_{\text{ADÂNCIME}} =$$

$$= f[x]\cdot d_T(x) + f[b]\cdot d_T(b) - f[x] d_{T'}(x) - f[b]\cdot d_{T'}(b) =$$

$$= f[x]\cdot d_T(x) + f[b]\cdot d_T(b) - f[x]\cdot d_T(b) - f[b]\cdot d_T(x) =$$

$$= (f[b]-f[x])(d_T(b)-d_T(x)) \ge 0$$ $\Rightarrow$ INTERSCHIMBAREA NU MĂREȘTE COSTUL

ANALOG, $B(T)-B(T'') \ge 0 \Rightarrow B(T'') = B(T) \Rightarrow T''$ = ARB. OPTIM ÎN CARE "$x$" ȘI "$y$" SUNT FRAȚI ȘI SE AFLĂ PE NIVEL MAX (CONFORM LEMEI 1).

DIN LEMA 1 $\Rightarrow$ PROCESUL DE CONSTRUCȚIE A UNUI ARB. OPTIM PRIN FUZIONĂRI POATE SĂ ÎNCEAPĂ CU O ALEGERE GREEDY A FUZIONĂRII CELOR 2 CARACTERE CU CEA MAI REDUSĂ FRECVENȚĂ.

URMĂTOAREA LEMĂ ARATĂ CĂ PB. CONSTRUIRII UNEI CODIFICĂRI PREFIX OPTIME ARE PROP. SUBSTRUCTURII OPTIME.

LEMA 2: "T" = ARB. BINAR COMPLET, REPREZENTÂND O CODIFICARE PREFIX OPTIMĂ PESTE UN ALFABET C. "X" ȘI "Y" $\in$ C, NODURI TERMINALE FRAȚI ÎN T ȘI "Z" = TATĂL LOR. PRESUPUN $f[z] = f[x] + f[y]$. ATUNCI $T' = T - \{x, y\}$, REPREZENTÂND O CODIFICARE PREFIX OPTIMĂ PT. ALFABETUL $C' = C - \{x, y\} \cup \{z\}$.

PT. FIECARE $c \in C - \{x, y\}$, AVEM: $\begin{cases} d_T(c) = d_{T'}(c) \\ f[c] \cdot d_T(c) = f[c] \cdot d_{T'}(c) \end{cases}$

PT. $d_T(x) = d_T(y) = d_{T'}(z) + 1. \Rightarrow f[x] \cdot d_T(x) + f[y] \cdot d_T(y) = (\underbrace{f[x] + f[y]}_{f[z]})(d_{T'}(z) + 1) =$
$= f[z] \cdot d_{T'}(z) + (f[x] + f[y]) \Rightarrow B(T) = B(T') + f[x] + f[y]$

DACĂ $T'$ NU E O CODIFICARE OPTIMĂ PT. $C'$, ATUNCI ($\exists$) UN ARB. $T''$ ALE CĂRUI FRUNZE $\in C'$ A.Î. $B(T'') < B(T')$. CUM $z \in C' \Rightarrow z$ = FRUNZĂ ÎN $T''$. DACĂ ADĂUGĂM "X" ȘI "Y" ÎN $T''$ CA FII A LUI "Z", ATUNCI VOM OBȚINE O CODIFICARE PREFIX PT. "C", CU COSTUL $B(T'') + f[x] + f[y] < B[T]$, CEEA CE INTRĂ ÎN CONTRADICȚIE CU FAPTUL CĂ $T$ = OPTIM $\Rightarrow T'$ = OPTIM PT. $C'$.

# = GĂSIREA MEDIANEI ÎN $O(n)$ =

## (ÎMBUNĂTĂȚIRE QUICKSORT)

DATE GENERALE:

MEDIANA = AL $[\frac{n}{2}]$-LEA ELEMENT DINTR-UN VECTOR (CU "$n$" ELEMENTE) DEJA SORTAT. SOLUȚII PT. A GĂSI MEDIANA:

- $O(k \cdot n) \rightarrow$ TRIVIAL ($k = \frac{n}{2}$)
- $O(n \cdot \log n) \rightarrow$ SORTĂM CU MERGE/HEAP/QUICK-SORT ȘI ALEGEM AL $[\frac{n}{2}]$ EL..

CUM ALEGEM ÎN $O(n)$?

VARIANTA 1: ALG. PROBABILIST $\Rightarrow$ TIMP MEDIU = $O(n)$

```
selectie_aleator(A[], p, n, k)
{ if(p==n) return A[p]; -> MEDIANA
  q=partitie_aleatoare(A[], p, n); // DE LA QSORT
  k1=q-p+1; // EL. "≤" PIVOT
  if(k==k1) return A[k];
  if(k1>k) return selectie_aleator(A, q+1, n, k-k1);
  return selectie_aleator(A, p, q-1, k);
}
```

$$T(n) \leq \frac{1}{n}\left(T(\max(1, n-1)) + \sum_{k=1}^{n-1} T(\max(k, n-k))\right) + O(n) \leq$$

$$\leq \frac{1}{n}\left(T(n-1) + 2\sum_{k=[n/2]}^{n-1} T(k)\right) + O(n) = \frac{2}{n}\sum_{k=[n/2]}^{n-1} T(k) + O(n)$$

$\max(1, n-1) = n-1$

$$\max(k, n-k) = \begin{cases} k; \text{ dacă } k \geq [n/2] \\ n-k; \text{ dacă } k < [n/2] \end{cases}$$

DACĂ $\begin{cases} n = \text{IMPAR} \Rightarrow T([n/2]), T([n/2]+1) \ldots T(n-1) \text{ APAR DE 2 ORI ÎN SUMĂ} \\ n = \text{PAR} \Rightarrow T([n/2]) \text{ , " —— " ———————— "} \end{cases}$

$T([n/2])$ APARE O SINGURĂ DATĂ

ÎN CAZUL CEL MAI DEFAVORABIL, $T(n-1) = O(n^2) \Rightarrow \frac{1}{n}T(n-1) \in O(n)$

TB. SĂ DEM. $T(n) \in O(n) \Leftrightarrow T(n) \leq c \cdot n$

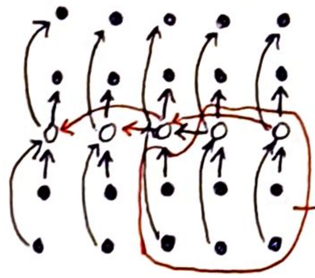
$$T(n) \leq \frac{2}{n}\sum_{k=[n/2]}^{n-1} c \cdot k + O(n) = \frac{2c}{n}\left(\sum_{k=1}^{n-1} k - \sum_{k=1}^{[n/2]-1} k\right) + O(n) =$$

$$= \frac{2c}{n}\left(\frac{1}{2}(n-1)n - \frac{1}{2}\left(\left[\frac{n}{2}\right]-1\right)\left[\frac{n}{2}\right]\right) + O(n) \leq c(n-1) - \frac{c}{n}\left(\frac{n}{2}-1\right)\left(\frac{n}{2}\right) + O(n) =$$

$$= c\left(\frac{3}{4}n - \frac{1}{2}\right) + O(n) \leq c \cdot n$$

## VARIANTA 2: ALG. DETERMINIST ⇒ WORST TIME: $O(n)$

1) SE ÎMPART ELEMENTELE ÎN GRUPE DE 5. $\to O(n)$
2) SE DETERMINĂ MEDIANA FIECĂRUI GRUP. $\to O(n)$
3) APELEZ RECURSIV ALGORITMUL, PT. A DETERMINA MEDIANA MEDIANELOR.
   CONSIDER "X" = MEDIANA MEDIANELOR.
4) FOLOSESC "X" CA PIVOT ȘI ÎMPART FOLOSIND ALG. PROBABILIST.




AVEM $\frac{n}{5}$ GRUPE.

$3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{n}{5} = \frac{3n}{10}$ ELEMENTE "≥" X

ASTFEL, ÎN CEL MAI DEFAVORABIL CAZ, VOI APELA RECURSIV ALG. PROBABILIST PT.
$n - \frac{3n}{10} = \frac{7n}{10}$ ELEMENTE.

$$T(n) = T(n/5) + T(7n/10) + O(n) \in O(n)$$

PRESUPUN $\begin{cases} T(\frac{n}{5}) \leq c \cdot \frac{n}{5} \\ T(\frac{7n}{10}) \leq c \cdot \frac{7n}{10} \end{cases}$

TB. SĂ DEM: $T(n) \leq c \cdot n$

$$T(n) = T(n/5) + T(7n/10) + n \leq c \cdot \frac{{}^{2}n}{5} + c \cdot \frac{7n}{10} + n = c \cdot \frac{9n}{10} + n = n\left(1 + \frac{9c}{10}\right) \leq$$
$$\leq c \cdot n, \ (A) \text{ pt } (\forall)\ c \geq 10$$

---

a) PT. GRUPE DE 3:

$\frac{n}{3}$ GRUPE $\Rightarrow \cancel{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{n}{3} = \frac{n}{3}$ EL. "≥" X $\Rightarrow n - \frac{n}{3} = \frac{2n}{3}$

$$T(n) = T(n/3) + T(2n/3) + O(n) \in O(n \cdot \log n)$$

b) PT. GRUPE DE 7:

$\frac{n}{7}$ GRUPE $\Rightarrow \cancel{4}^{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{n}{7} = \frac{2n}{7} \Rightarrow n - \frac{2n}{7} = \frac{5n}{7}$

$$T(n) = T(n/7) + T(5n/7) + O(n) \in O(n)$$

## EXERCIȚII:

1) AVEM "K" LISTE SORTATE CU "n" ELEMENTE TOTALE. SĂ SE INTERCLASEZE CÂT MAI EFICIENT.

$O(n \cdot \log n)$: CONCATENEZ LISTELE ȘI SORTEZ CU MERGESORT

$O(n \cdot K)$: LUĂM MIN DE PE FIECARE LISTĂ ȘI INDICE PT. FIECARE LISTĂ

$O(n \cdot \log K)$: FOLOSIM UN MIN-HEAP (PUNEM ELEMENTELE ÎN HEAP ȘI EXTRAGEM VALORILE CELE MAI MICI

2) "n" NR. VREM CELE MAI APROPIATE "K" VALORI DE MEDIANĂ.

$O(n \cdot \log n)$: QSORT + GĂSIRE ELEMENTE

$O(n)$: GĂSIM MEDIANA "X" ÎN $O(n)$

CONSTRUIM UN VECTOR $v_i = |a_i - X|$

GĂSIM A "K"-A VALOARE DIN VECTORUL "$v_i$".

APLICĂM FUNCȚIA "PARTITION" DUPĂ ACEASTĂ VALOARE

EX: 7 5 24 18 11 3 41 64 2 $\quad K=3$

$|7-11|=4$ $\quad v: 4\ \boxed{6}\ 13\ 7\ 0\ 8\ 30\ 53\ 9$

$|5-11|=6$ $\quad$ (2) (3) (1)

⋮

3) NR. INVERSIUNI PERMUTARE = ?

APLICĂM UN MERGESORT MODIFICAT.

$INV(s, d)$

$INV(s, \frac{d}{2}) \to$ NR INVERSIUNI 1/2 JUMĂTATE

$INV(\frac{d}{2}+1, d) \to$ " — " — " A 2-A " — " — "

COMBINA_SOL$(s, \frac{d}{2}, \frac{d}{2}+1, d) \to$ CALCULEAZĂ NR. INV. DIN CELE 2 JUMĂTĂȚI, VERIFICÂND ÎN TIMPUL INTERCLASĂRII CÂTE NR. DIN A 2-A JUMĂTATE SUNT MAI MICI DECÂT CELE DIN PRIMA.

4) SE DĂ UN SET DE NR.. VREM MIN ȘI AL II-lea MIN., CU NR. MINIM DE COMPARAȚII.

5 7 2 9 8 11 0 39

5 2 8 0

$\boxed{2}$ $\boxed{0}$

LUĂM NR ÎN PERECHI ȘI FACEM MINIMUL PE FIECARE PERECHE.

APOI, RECURSIV, APLIC ACEEAȘI METODĂ PÂNĂ RĂMÂN CU 2 NR. $\Rightarrow (n-1)$ COMPARAȚII

$\frac{n}{2}+\frac{n}{4}+\ldots+1=(n-1) \Rightarrow O(\log n)$

5) SE DAU "n" GĂLEȚI ROȘII ȘI "n" GĂLEȚI GALBENE: $\begin{cases} r_1 \dots r_n \in [x;y] \\ g_1 \dots g_n \in [x;y] \end{cases}$

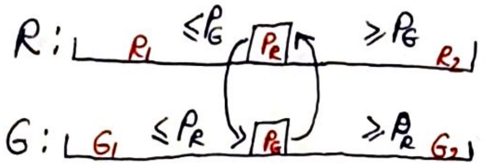
$(\forall)\, i \in \overline{1,n}$ VREM SĂ SE GĂSEASCĂ $j$ a.î. $r_i = g_j$

FĂRĂ SĂ COMPARĂM GĂLEȚILE CU ACEIAȘI CULOARE.

$O(n^2)$: 2 for-uri (PT. FIECARE GALBEN, CAUT ROȘU)

SAU

MAI EFICIENT: FOLOSESC PIVOTUL CU ACEEAȘI VALOARE DIN SETUL CELĂLALT ȘI SORTEZ. ($P_R \to$ SORTEZ GALBENE; $P_G \to$ SORTEZ ROȘII)




6) SE DAU "n" NR $\in [0; n^3]$. SĂ SE SORTEZE NR ÎN $O(n)$.

TRANSFORM NR ÎN BAZA "n".

NR $\in [0; n^3] \Rightarrow$ ÎN BAZA "n" VOR AVEA MAX 3 CIFRE DIN INTERVALUL $\overline{0,n-1}$

FOLOSESC RADIXSORT (COUNTINGSORT DREPT SUBRUTINĂ) $\Rightarrow O(n)$

$\hookrightarrow b \cdot (n+k) = b \cdot (n+n) = 2\underset{3}{b}n = 6n \in O(n)$

7) UN ȘIR DE NR. CU "n" CIFRE ÎN TOTAL.

VREM SĂ SORTĂM ÎN $O(n)$.

$n = 17$

| | | |
|---|---|---|
| 12345 | | 00051 |
| 00051 | RADIX | 00213 |
| 00999 | $\longrightarrow$ | 00999 |
| 01234 | SORT | 01234 |
| 00213 | | 12345 |

DEMONSTRĂM CĂ $\in O(n)$.

$\#i$ = NR. DE VALORI DIN INPUT CARE AU "$\geq$" CU "$i$" CIFRE.

EX: $i = 4 \Rightarrow \#i = 2$ (1234, 12345)

LA PAS 1: $\#1 + 10 \to$ DIN COUNTINGSORT

$\vdots$

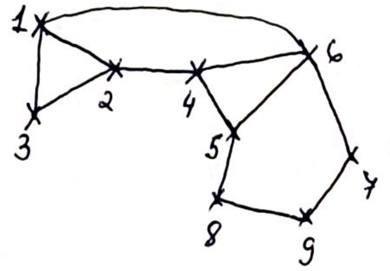
LA PAS $n$: $\#n + 10$

$$\#1 + \#2 + \dots + \#n + 10 \cdot n = n + 10n = 11n \in O(n)$$

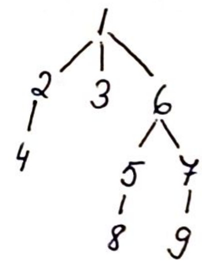
# = EXERCIȚII GRAFURI =

## 1) METODE DE PARCURGERE:

• DFS (DEPTH FIRST SEARCH) → ÎN ADÂNCIME: 123456798
↓
(STIVĂ)



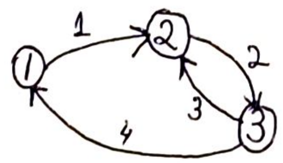

• BFS (BREADTH F. S.) → ÎN LĂTIME: 123645789 ⟺
↓
(COADĂ)




## 2) GRAF ORIENTAT. DEFINIM MATRICEA "B" DE DIMENSIUNEA NR MUCHII × NR VF.

$$B_{ij} = \begin{cases} -1, & \text{MUCHIA } j \text{ IESE DIN NOD } i \\ 1, & \text{„ — " — " INTRĂ ÎN „ — " — "} \\ 0, & \text{ALTFEL} \end{cases}$$

CALCULAȚI $B \cdot B^T$ PE UN EXEMPLU:




| B | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | -1 | 0 | 0 | 1 |
| 2 | 1 | -1 | 1 | 0 |
| 3 | 0 | 1 | -1 | -1 |

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

→ DIAGONALĂ PRINCIPALĂ = GRAD INTERN + EXTERN FIECARE NOD

## 3) DEM. CĂ ÎNTR-UN GRAF NEORIENTAT EXISTĂ 2 NODURI CU ACELAȘI GRAD.

CAZ 1: (∃) 1 NOD IZOLAT

$n-1$ NODURI → $n-2$ GRADE ⇒ EVIDENT

CAZ 2: (∄) NOD IZOLAT

$n$ NODURI → $n-1$ GRADE ⇒ „ — " — "

4) SE DAU "n" MATRICI $A_1, A_2, \dots, A_n$. SĂ SE GĂSEASCĂ O PARANTEZĂ A.Î. LA ÎNMULȚIREA MATRICELOR NR. DE PAȘI SĂ FIE CÂT MAI MIC.

$$\left.\begin{array}{l} A_{n \times m} \\ B_{m \times k} \end{array}\right\} \Rightarrow C_{n \times k}$$

$A(B\ C\ D\ E\ F)$

$(A\ B)(C\ D\ E\ F)$

$(A\ B\ C)(D\ E\ F)$

$i \quad k+1 \quad j+1$

OPTIM$(i, j)$ = COST OPTIM ÎNMULȚIRI $A_i A_{i+1} \dots A_j$

$$\text{OPTIM}(i,j) = \min_{i \le k < j}\Big(\text{OPTIM}(i,k) + \text{OPTIM}(k+1,j) + \underbrace{a_i a_{k+1} a_{j+1}}\Big)$$

COST DE ÎNMULȚIRE CELE 2 MATRICI REZULTATE DUPĂ PARANTEZĂ

Ex: $\text{OPTIM}(1,3) = \min\big(\text{OPTIM}(1,1) + \text{OPTIM}(2,3) + a_1 a_2 a_4,$
$\text{OPTIM}(1,2) + \text{OPTIM}(3,3) + a_1 a_3 a_4\big)$

# = SIMULARE EXAMEN ASC =

1) a) $33n^8 + 44\sqrt{n^{15}} + 55\sqrt[3]{n} + 66 = \Theta(n^8) = \Omega(n^7) = O(n^9)$

b) $77\ln(n^{88}) + 99\underbrace{\sin\sqrt{n+n^{100}}}_{\in[-1,1]} + \sqrt[3]{n} = 77\cdot 88\cdot \ln n + \sqrt[3]{n} = \Theta(\sqrt[3]{n}) = \Omega(\ln n) =$
$= O(n^2)$

2) (T. MASTER)

a) $T(n) = 3T\left(\frac{n}{2}\right) + n\log_2 n$

$a = 3$

$b = 2$

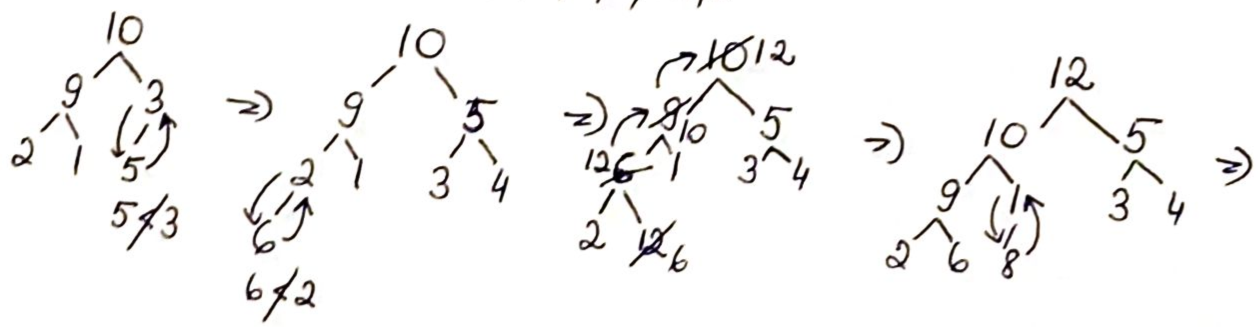
$f(n) = n\cdot\log_2 n \in O(n^{\log_2 3}) \xrightarrow{\text{CAZ 1}} T(n) = \Theta(n^{\log_2 3})$

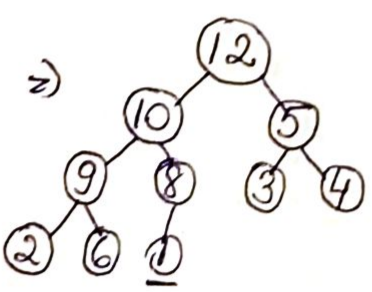
b) $T(n) = 4T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2$

$\left.\begin{array}{l} a = 4 \\ b = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow n^{\log_b a} = n^2$

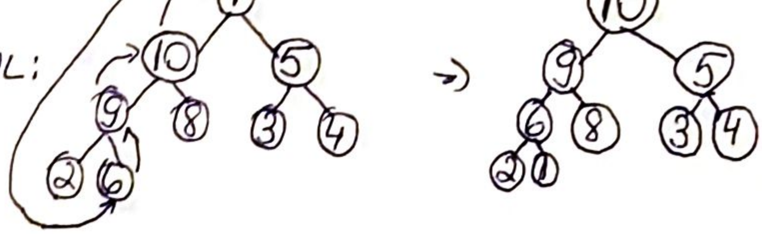
$f(n) = n^2 \in \Theta(n^2) \xrightarrow{\text{CAZ 2}} T(n) = \Theta(n^2\cdot\log_2 n)$

3) MAX-HEAP PT: 10, 9, 3, 2, 1, 5, 4, 6, 12, 8





ȘTERGEȚI MAXIMUL:



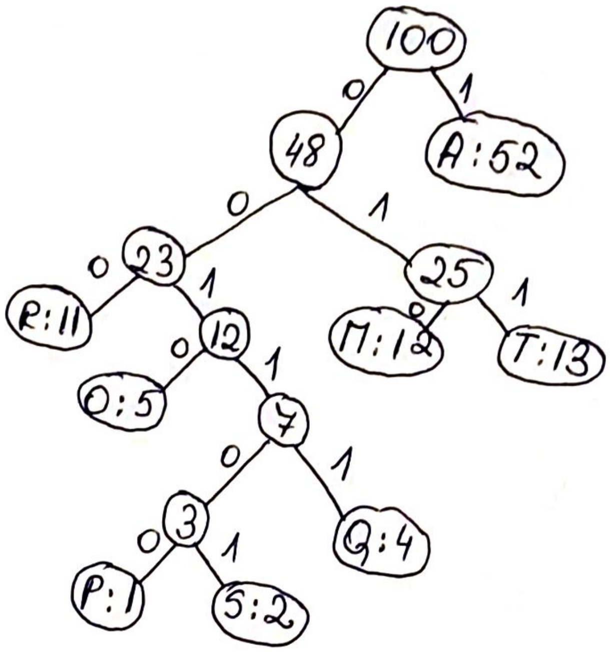
4) (HUFFMAN)

| A | P | S | O | Q | M | T | R |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 52 | 1 | 2 | 5 | 4 | 12 | 13 | 11 |

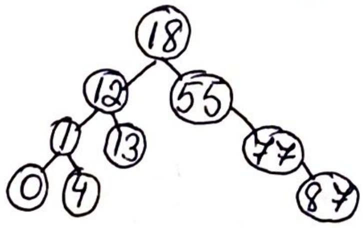
$\Rightarrow$

| P | S | Q | O | R | M | T | A |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 4 | 5 | 11 | 12 | 13 | 52 |

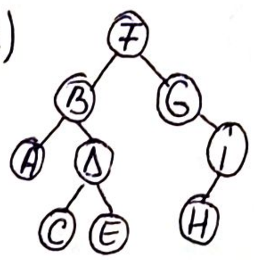
P: 001100
S: 001101
Q: 00111
O: 0010
R: 000
M: 010
T: 011
A: 1




5) (ARB. BINAR CĂUTARE) 18, 12, 55, 1, 77, 0, 87, 4, 13

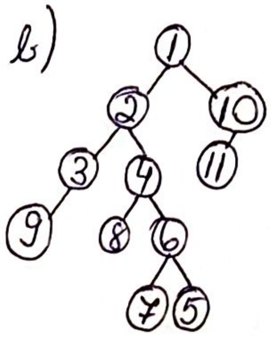



6) a)




SRD: ABCDEFGHI
SDR: ACEDBHIGF

b)




SRD: 9,3,2,8,4,7,6,5,1,11,10
SDR: 9,3,8,7,5,6,4,2,11,10,1