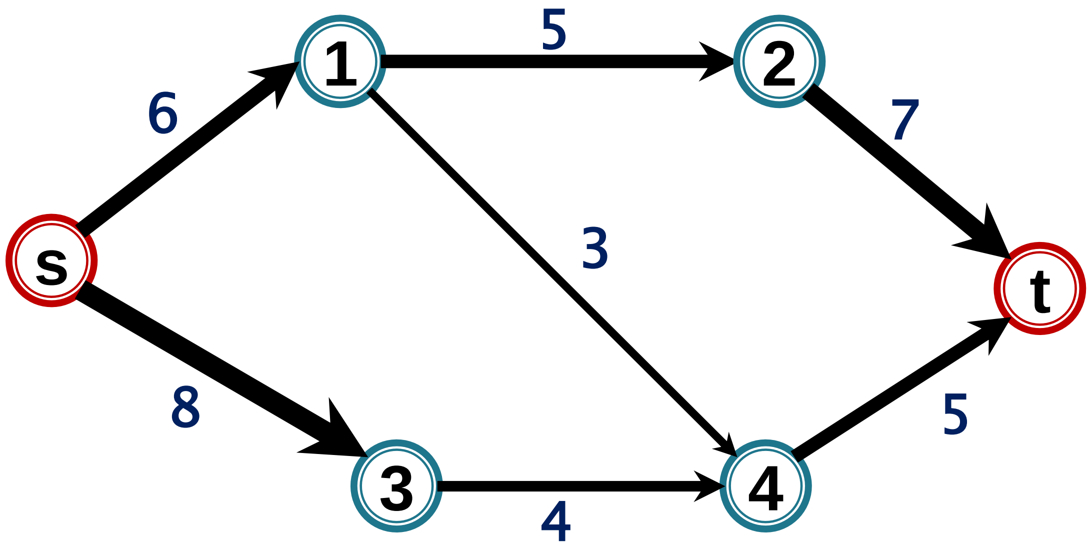
Fluxuri maxime
în rețele de transport

- Avem o reţea în care
  - arcele au limitări de capacitate
  - nodurile = joncţiune

Care este cantitatea maximă care poate

fi transmisă prin reţea de la surse la destinaţii?

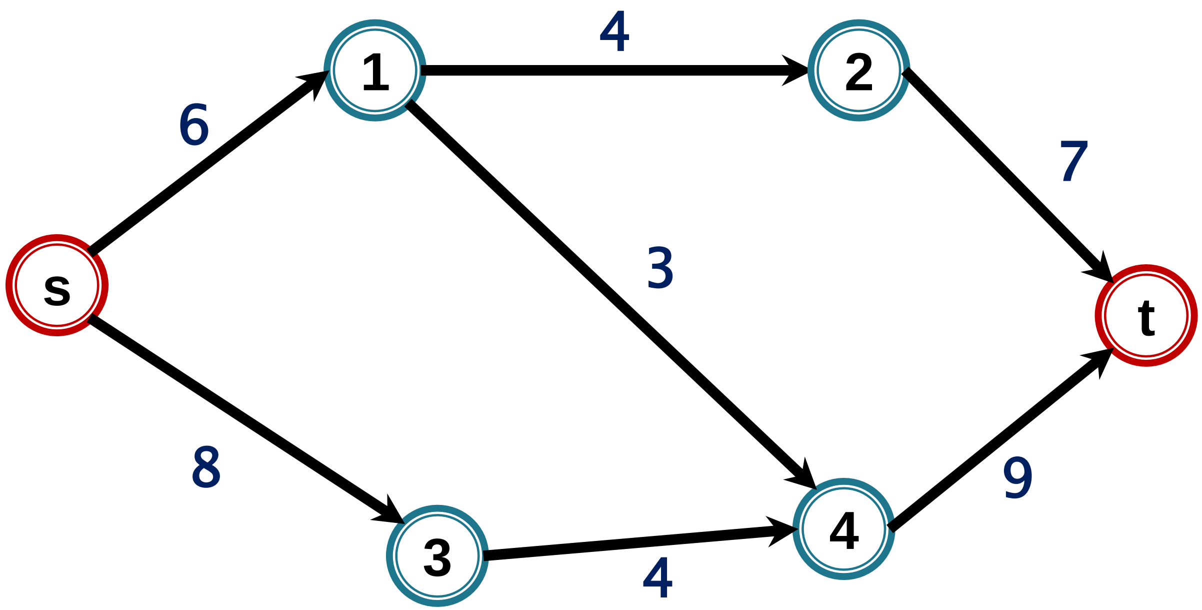
(în unitatea de timp)



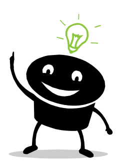
Fluxuri în rețele de transport

- Rețea de comunicare
  - Transferul de informații – limitat de lățimea de bandă
- Rețele de transport / evacuare în caz de urgențe
  - Limitare – număr de mașini/persoane în unitatea de timp
- Rețele de conducte
- ...

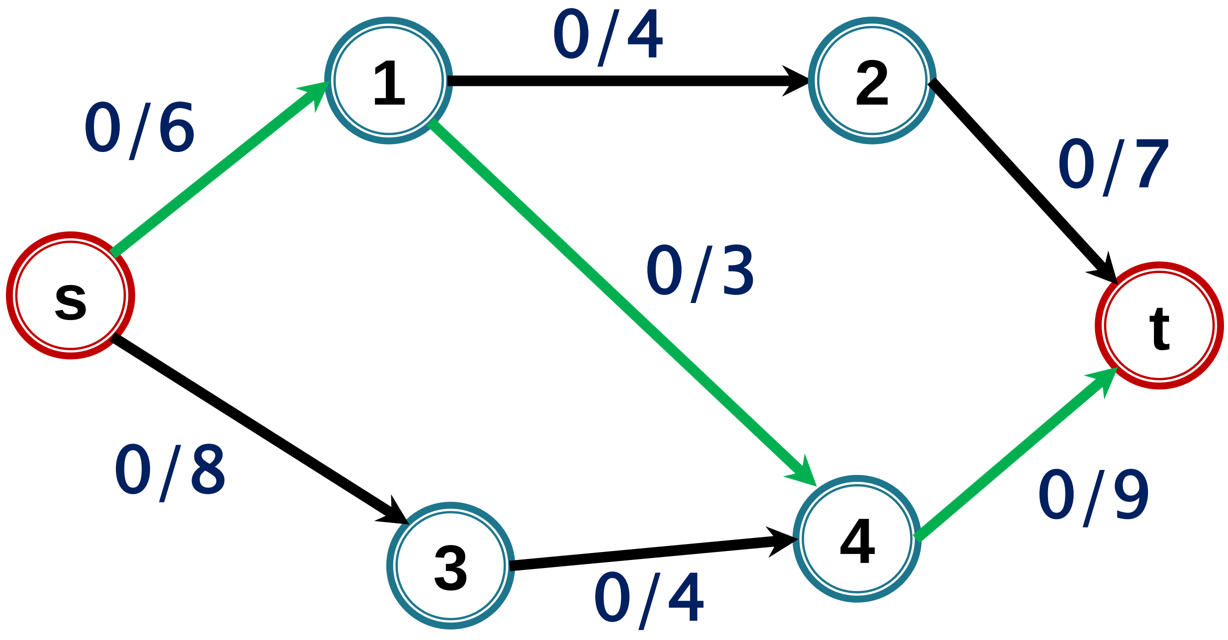
Fluxuri în rețele de transport

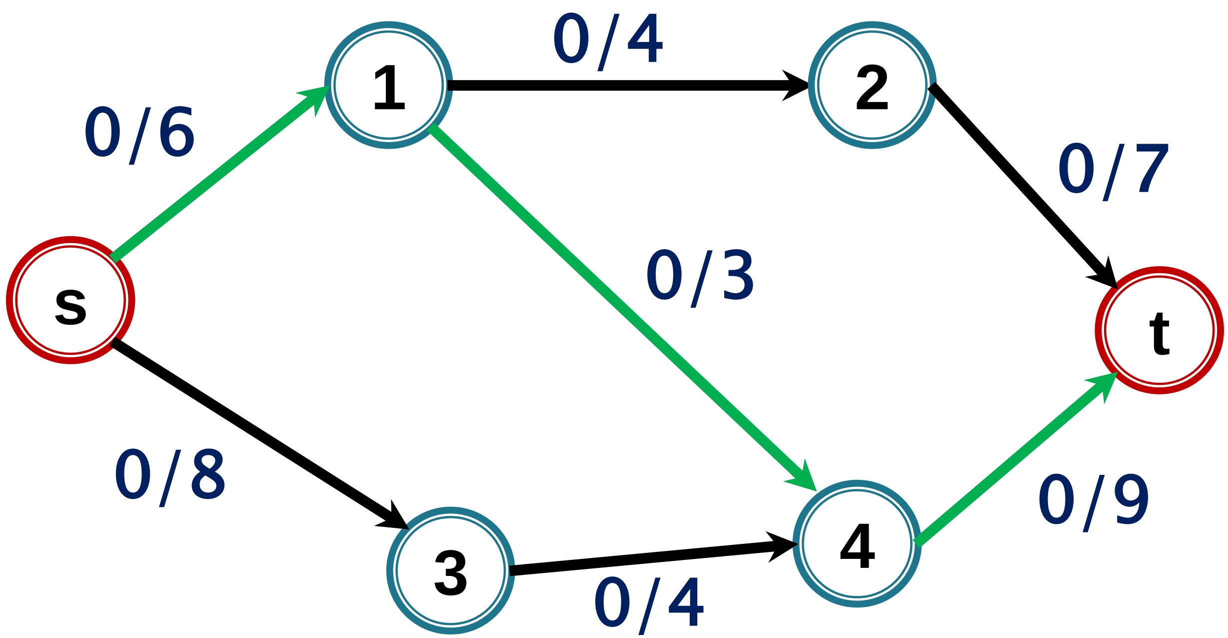


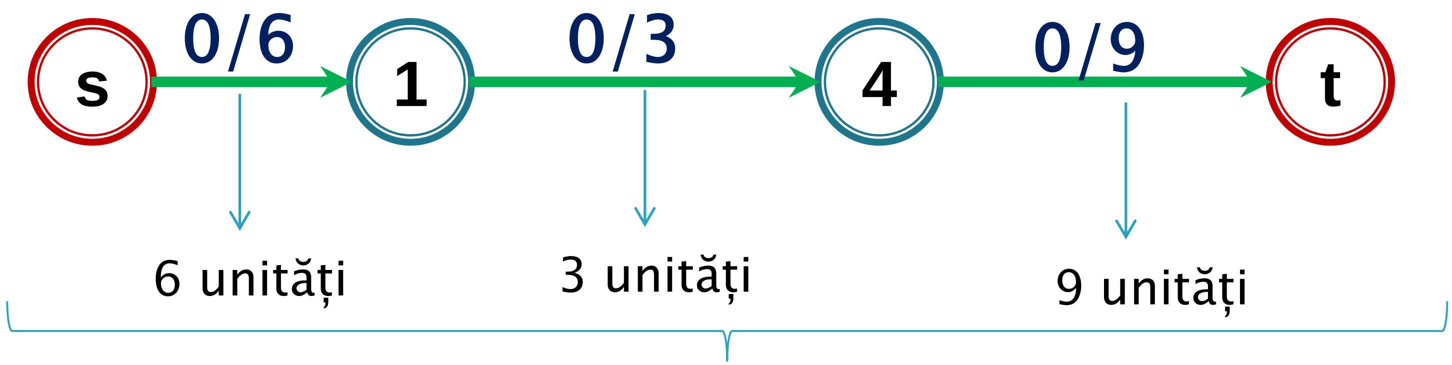
Încercăm să trimitem marfă (flux) de la vârful sursă s la destinaţia t



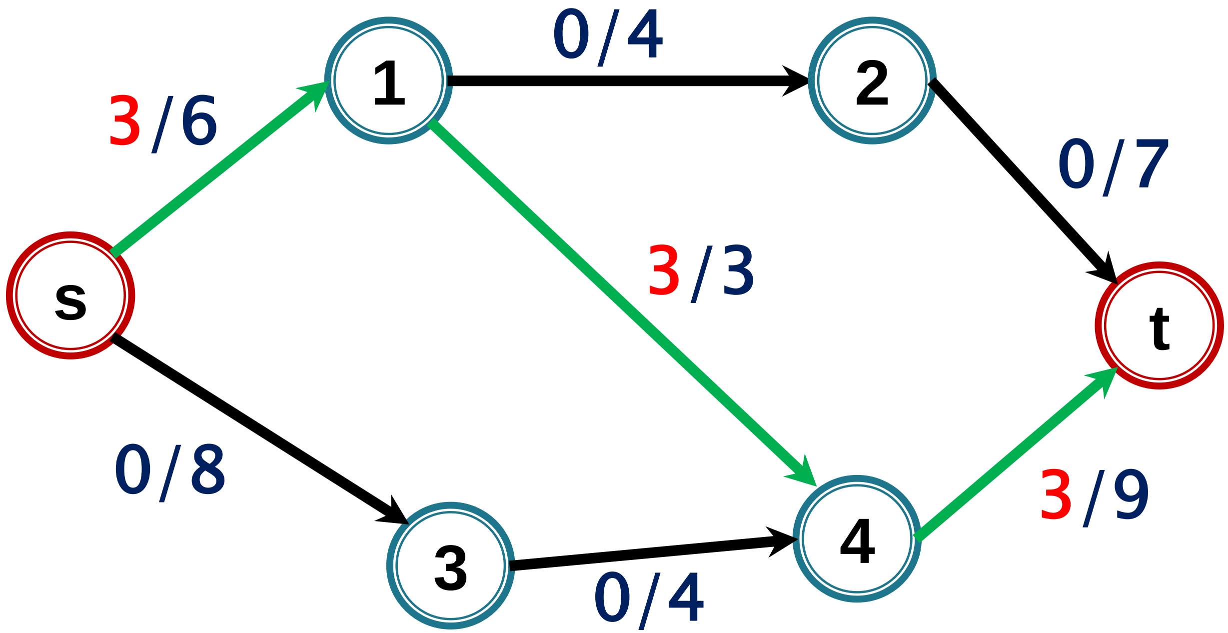
Determinăm drumuri de la s la t pe care mai putem trimite marfă


s
1
2
3
4
t
0/6
0/4
0/7
0/3
0/8
0/4
0/9

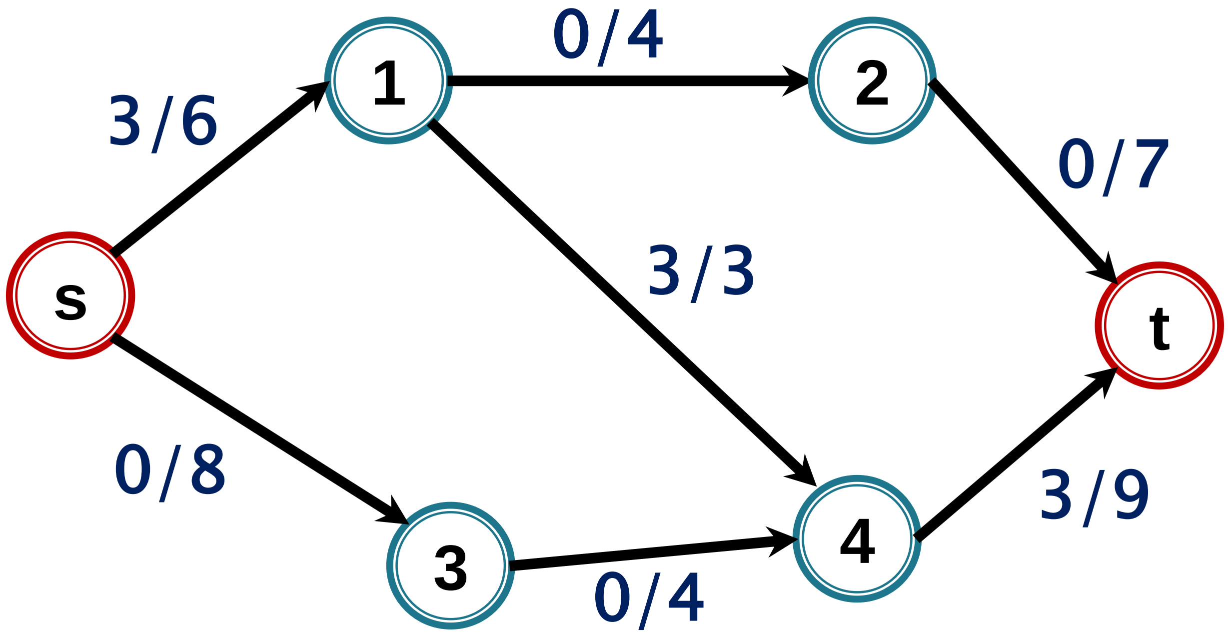




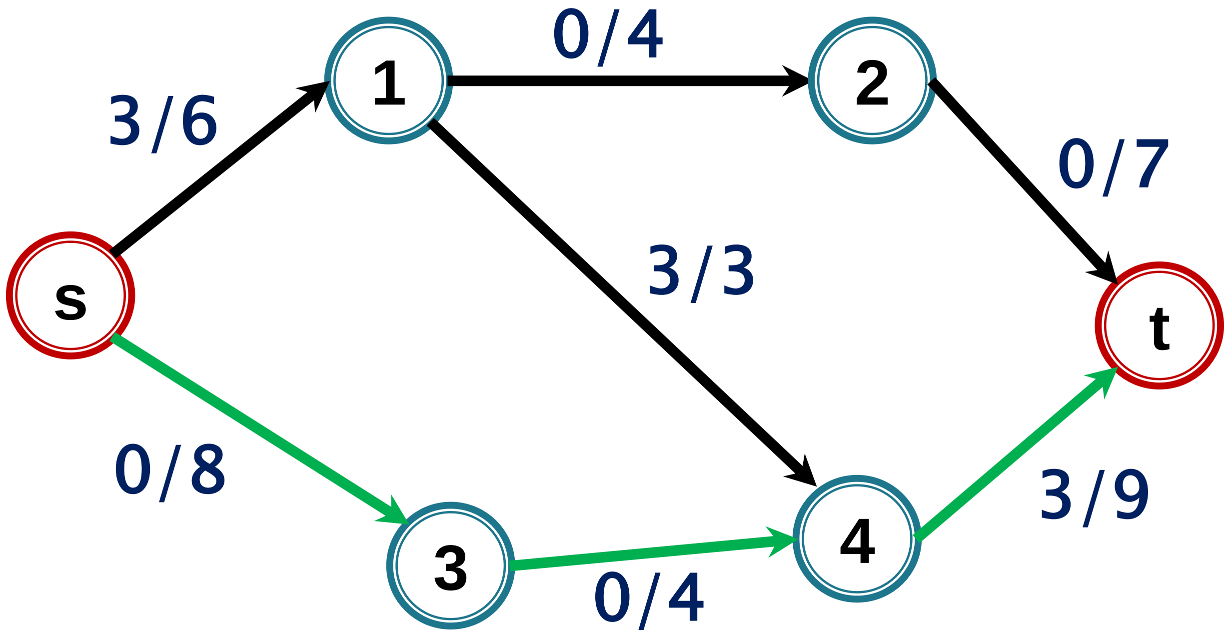
3 unităţi de-a lungul întregului drum



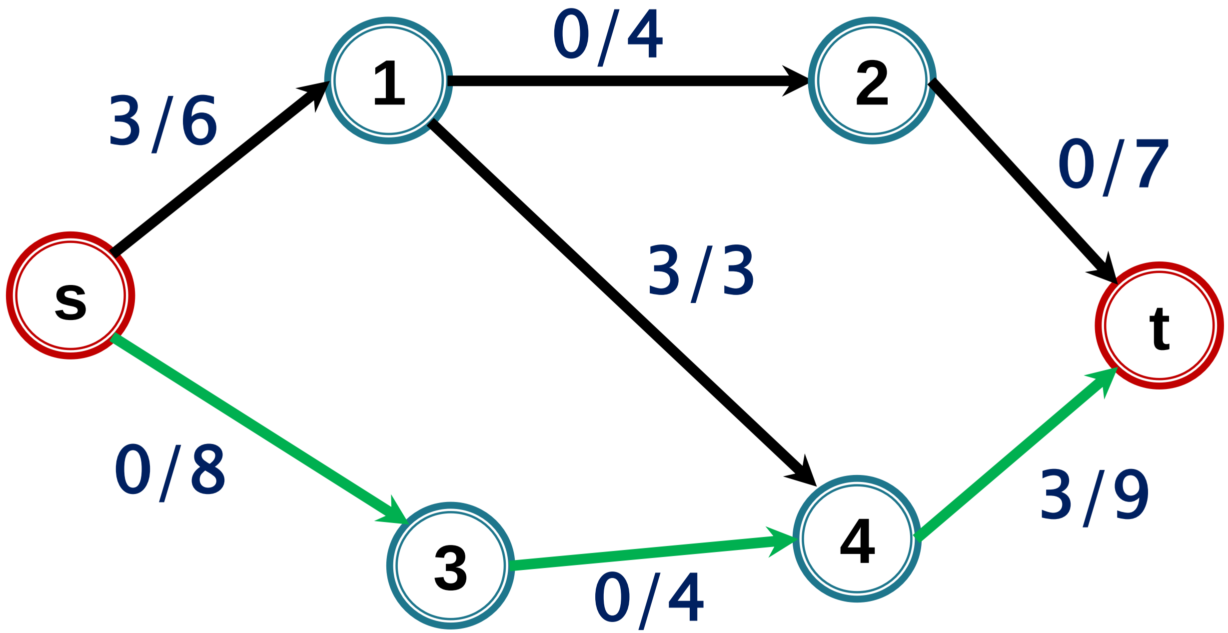
0/4
1
2
3/6
0/7
s
3/3
t
0/8
3/9
4
3
0/4

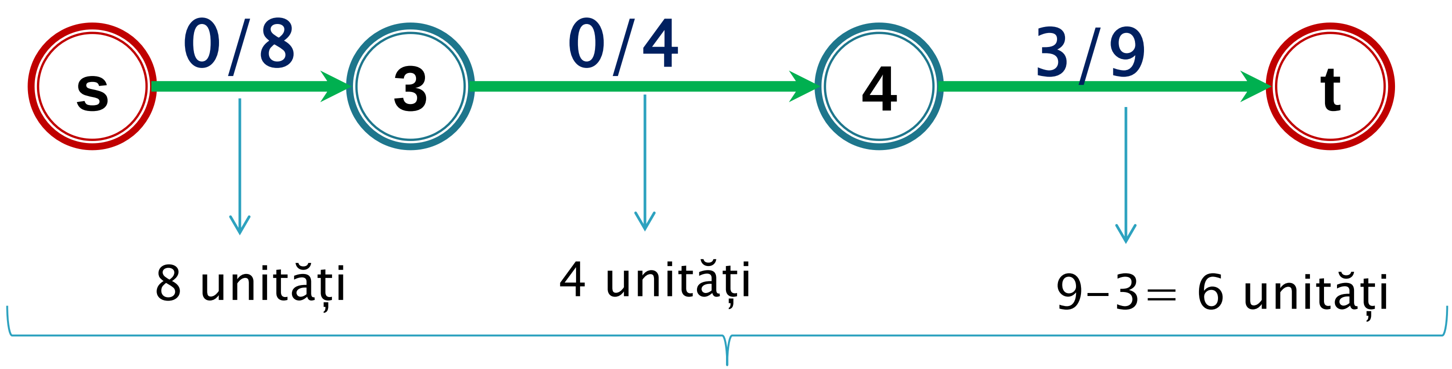


Căutăm alt drum de la s la t pe care mai putem trimite flux

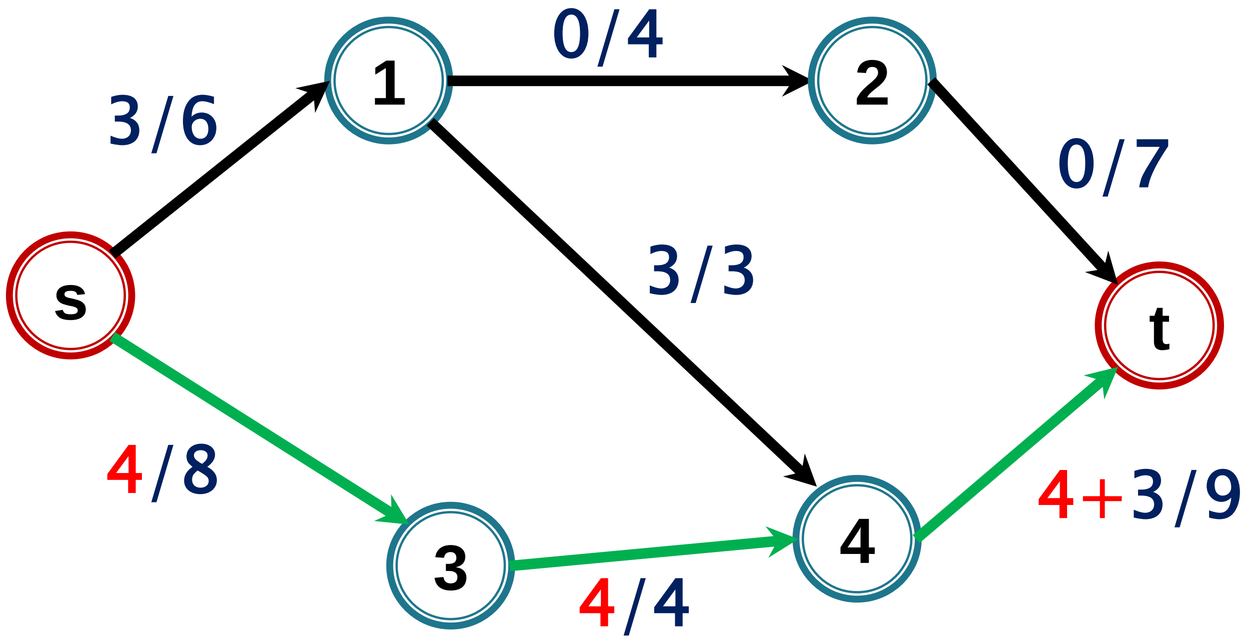


s
1
2
3
4
t
3/6
0/4
0/7
3/3
0/8
0/4
3/9

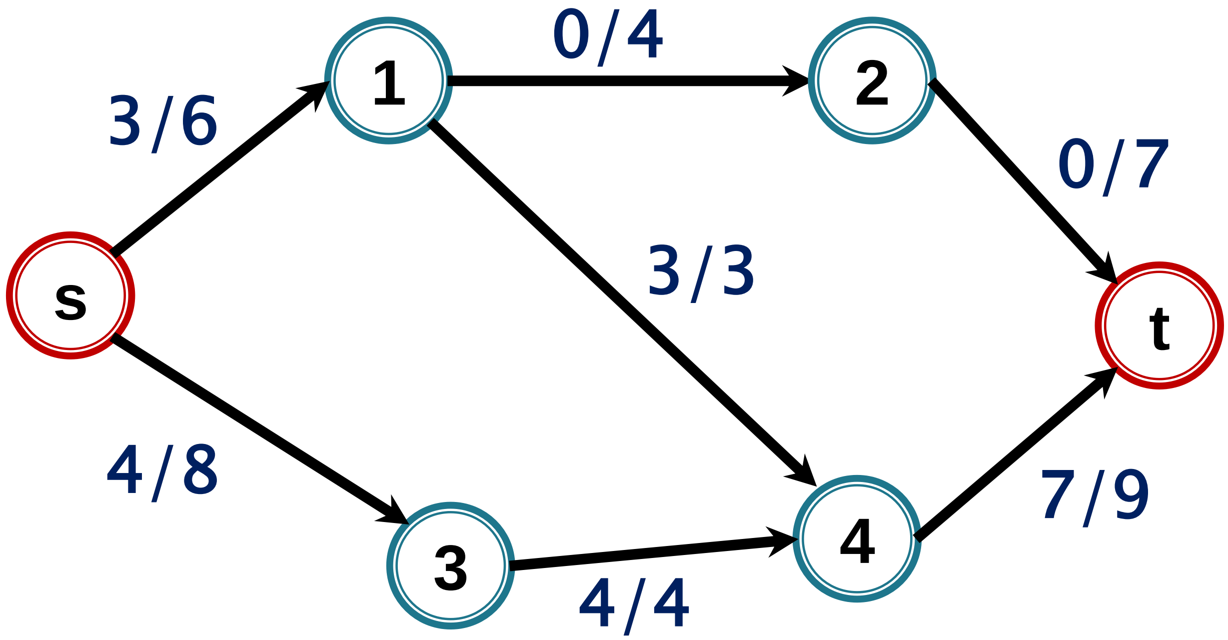




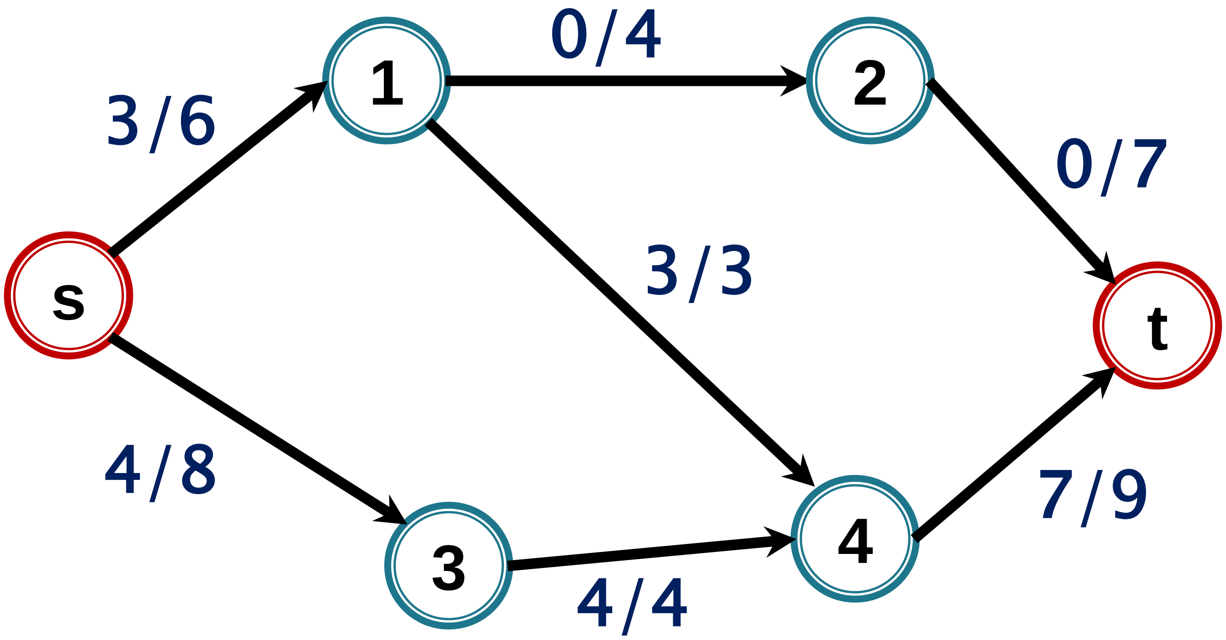
4 unităţi de-a lungul întregului drum



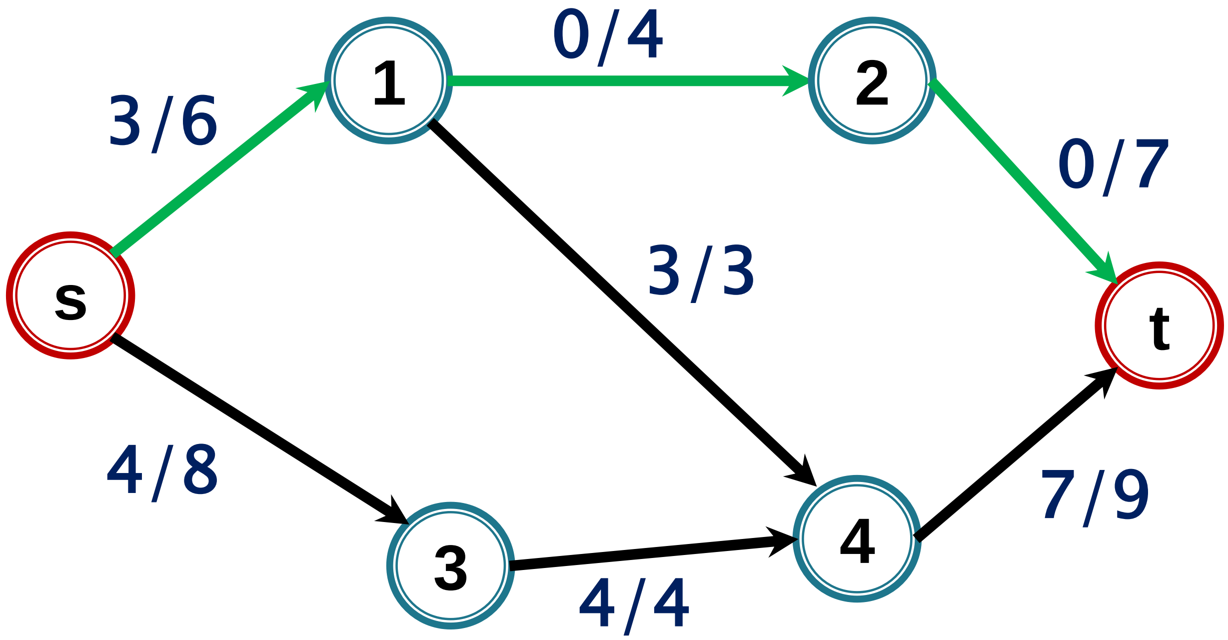
0/4
1
2
3/6
0/7
3/3
s
t
4/8
4+3/9
3
4
4/4

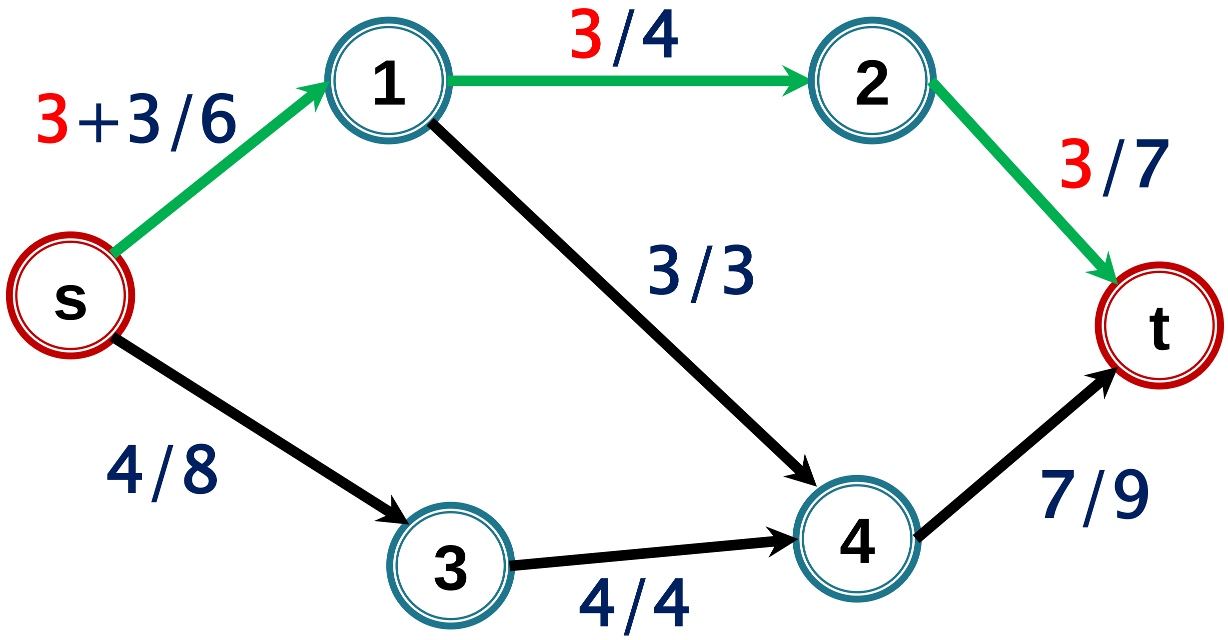


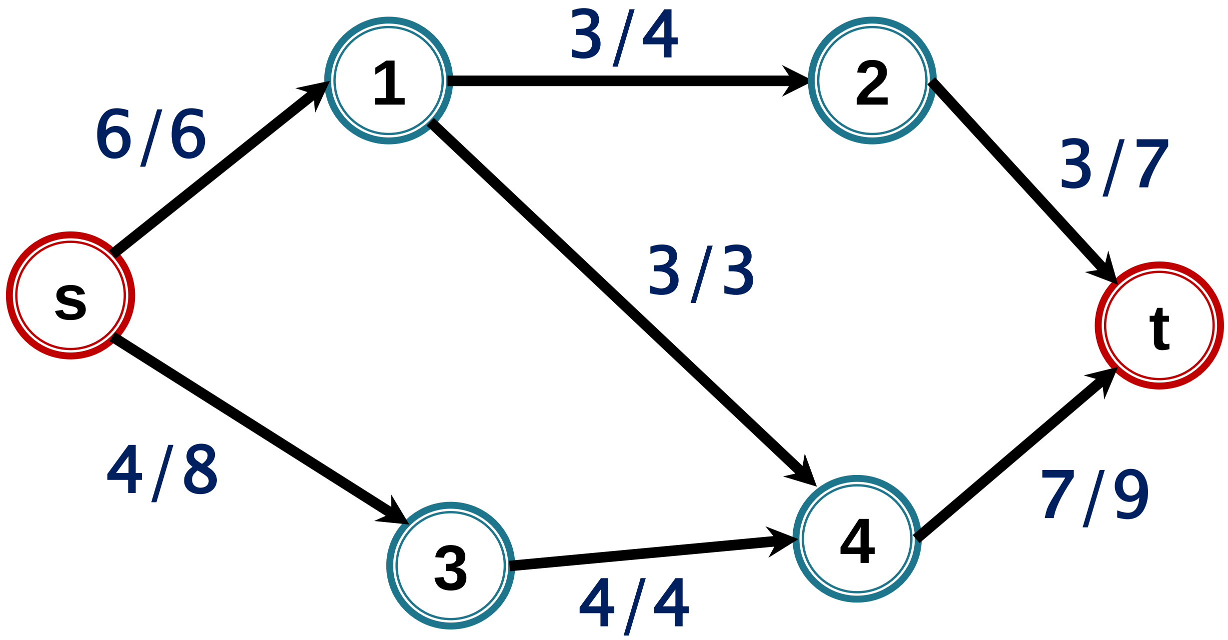
s
1
2
3
4
t
3/6
0/4
0/7
3/3
4/8
7/9
4/4



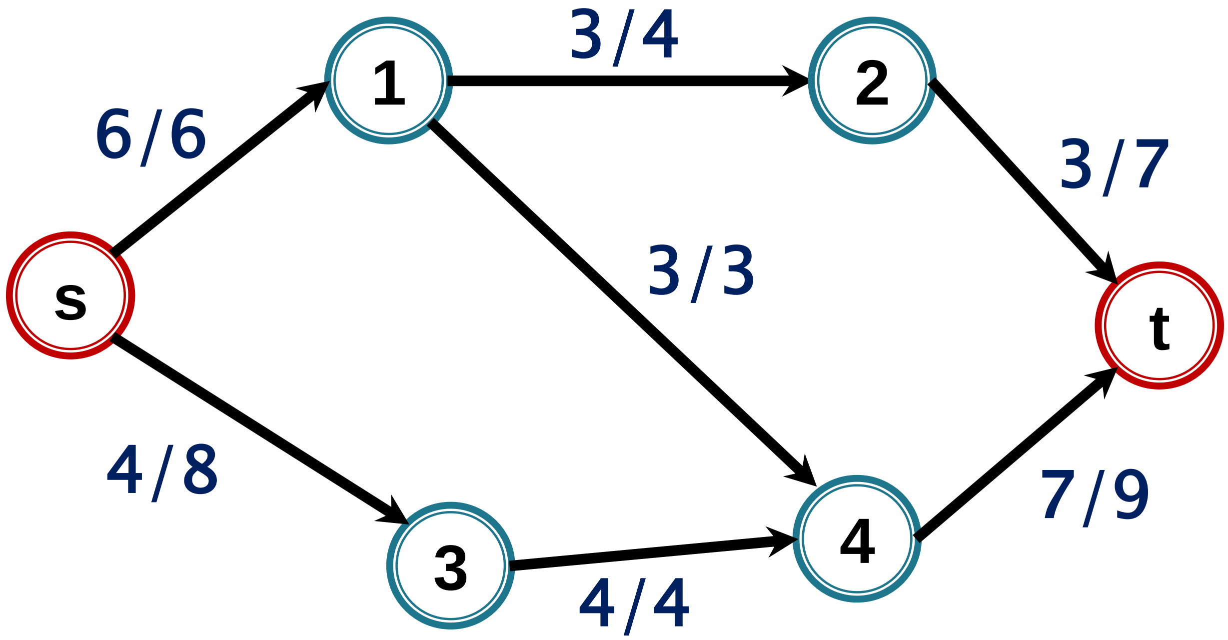
Căutăm alt drum de la s la t pe care mai putem trimite flux


0/4
1
2
3/6
0/7
3/3
s
t
4/8
7/9
4
3
4/4

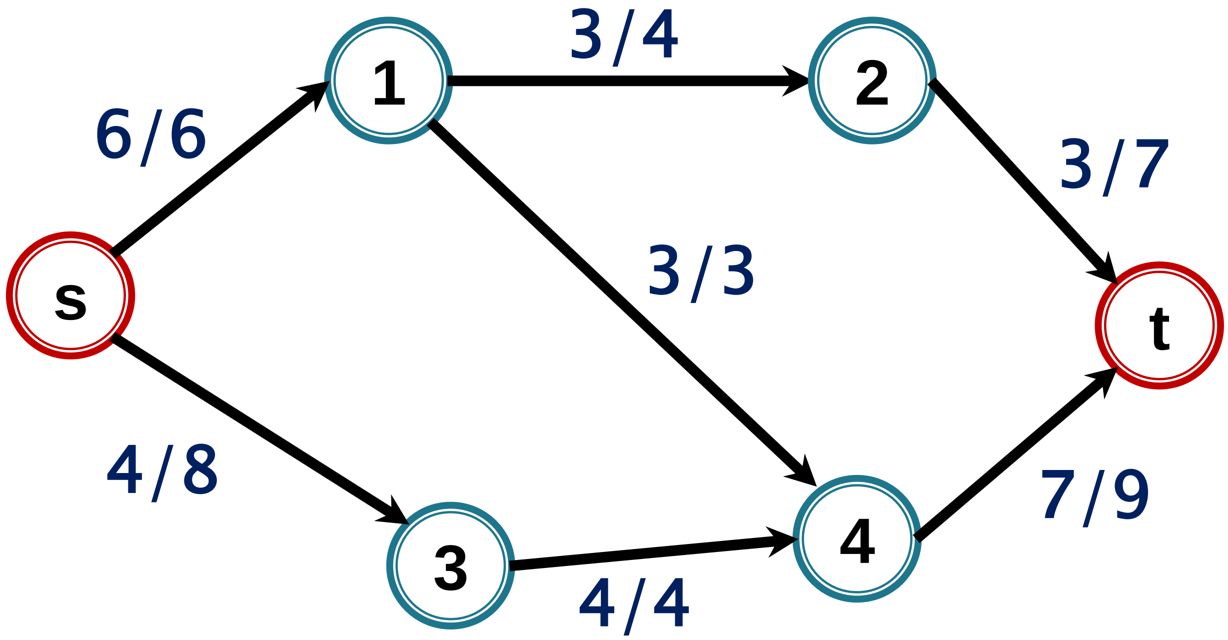

3/4
3+3/6
1
2
3/7
3/3
s
t
4/8
7/9
3
4
4/4



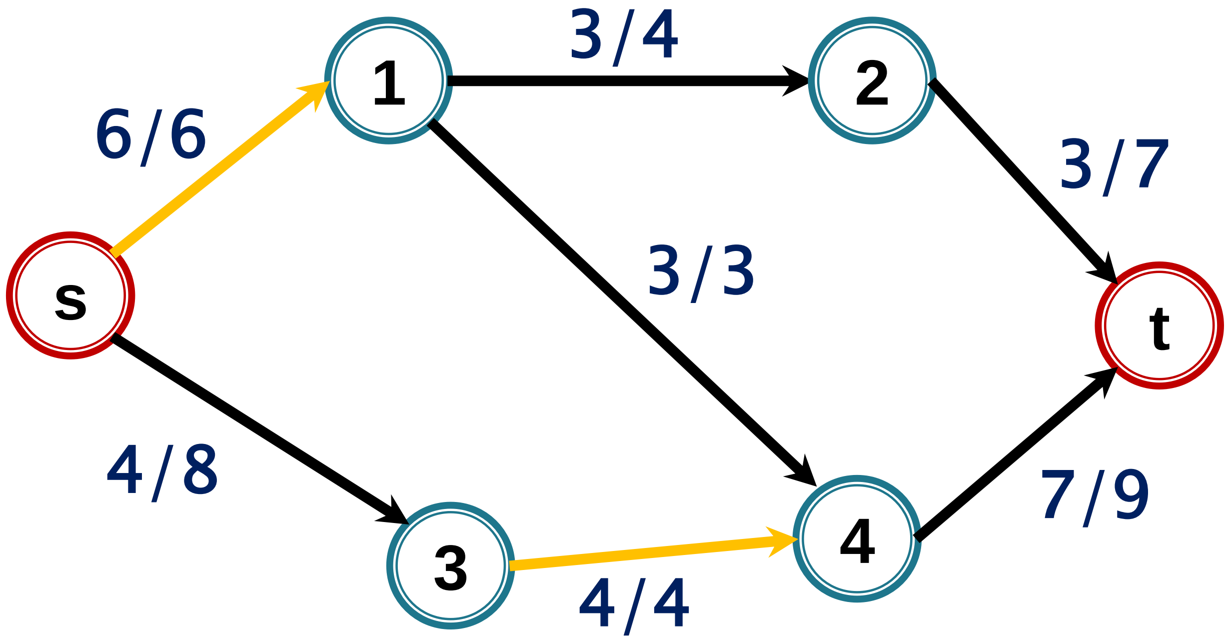
6/6
3/4
3/7
3/3
4/8
7/9
4/4
s
1
2
t
3
4



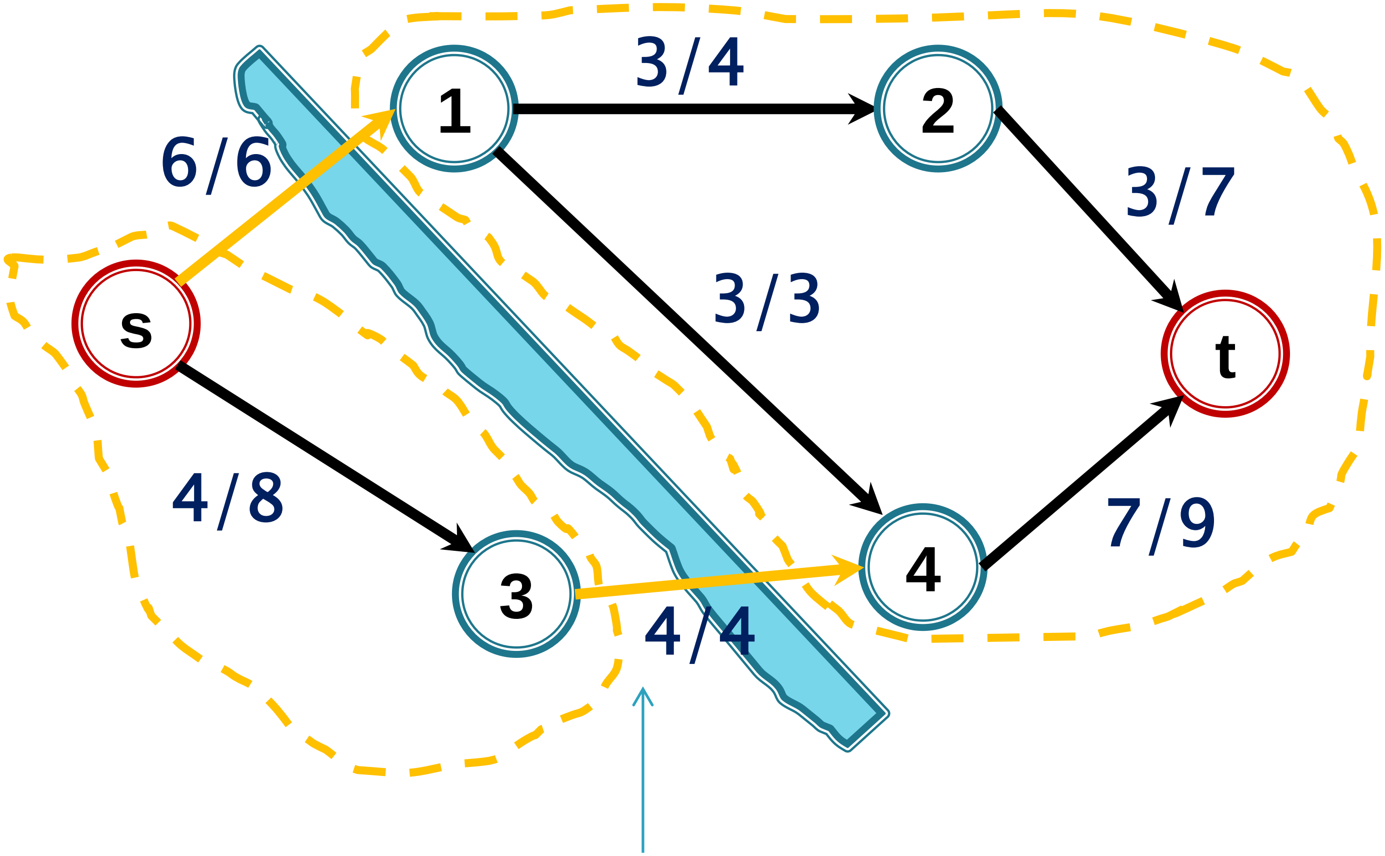
Nu mai există drumuri de la s la t pe care mai putem trimite flux



Este maxim fluxul?



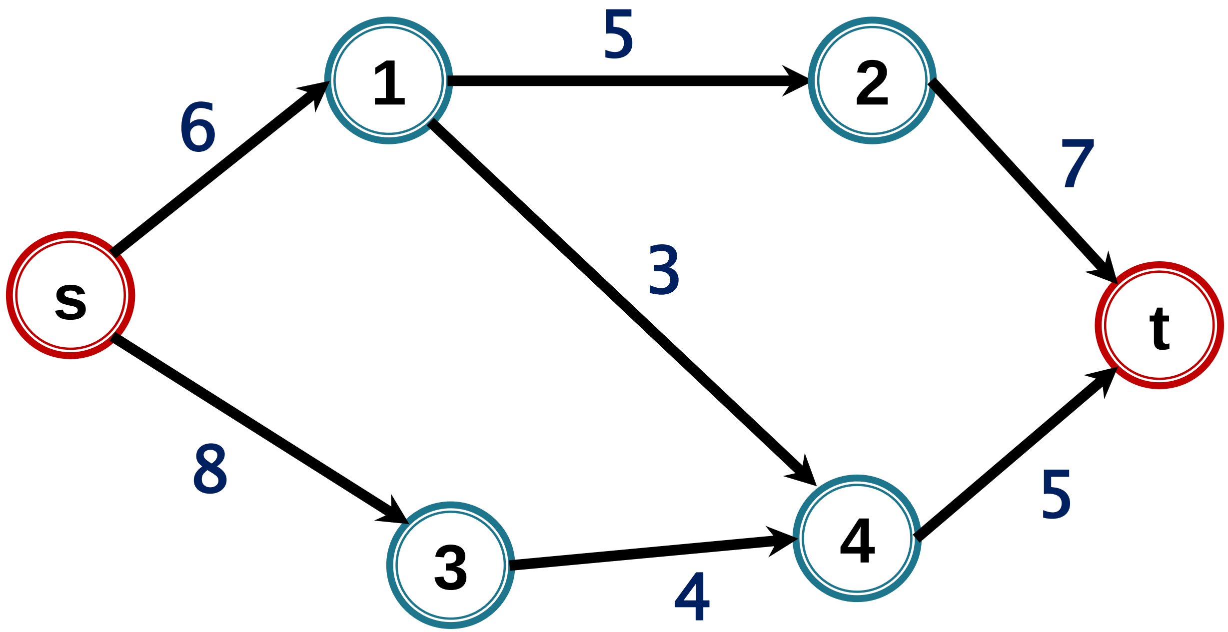
1
2
s
t
3
4
6/6
3/4
3/7
3/3
4/8
7/9
4/4

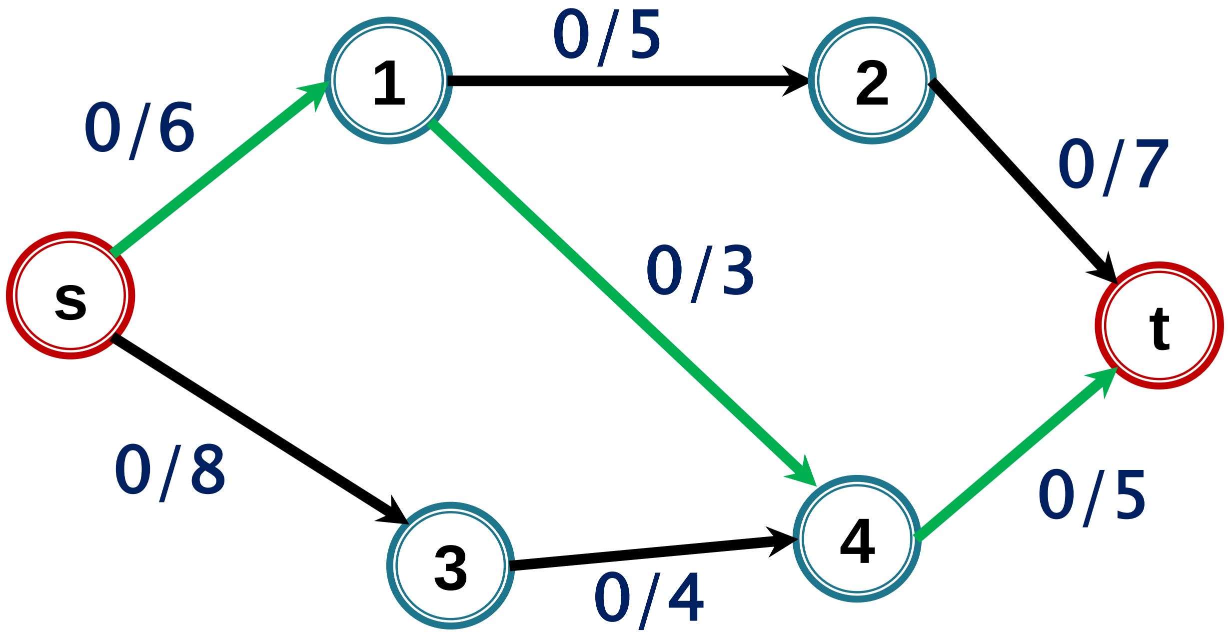


- singurele arce ("poduri ") care trec din regiunea lui s în cea a lui t nu mai pot fi folosite pentru a trimite flux (au fluxul = capacitatea) $\Rightarrow$ fluxul este maxim

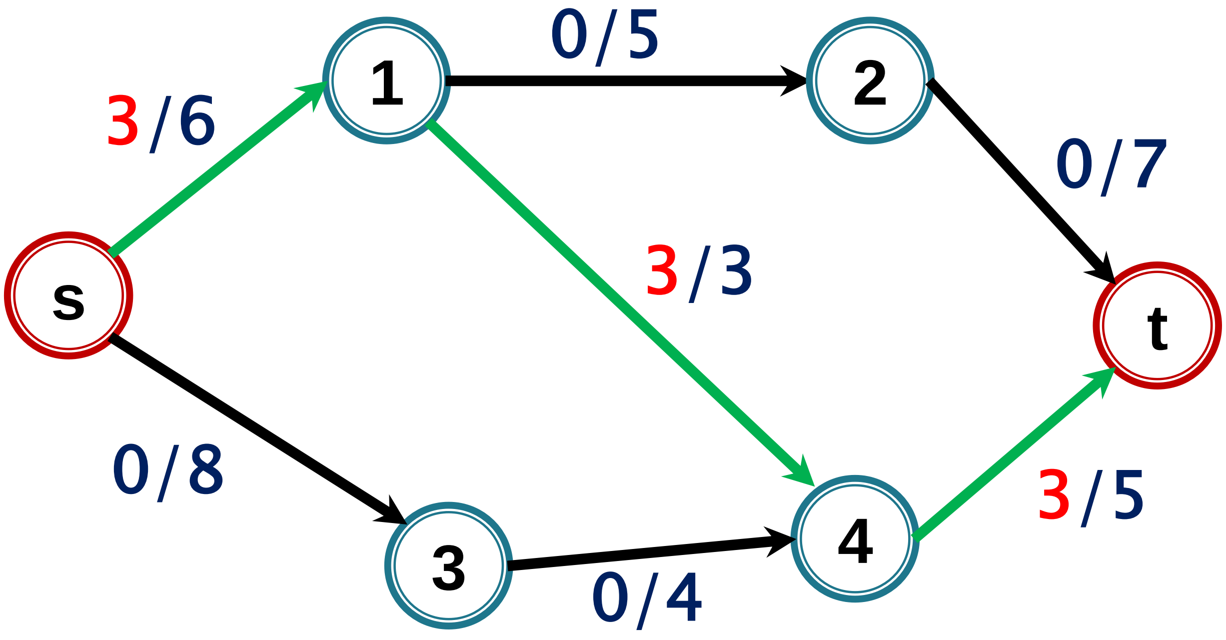
- s-t tăietură

Alt exemplu

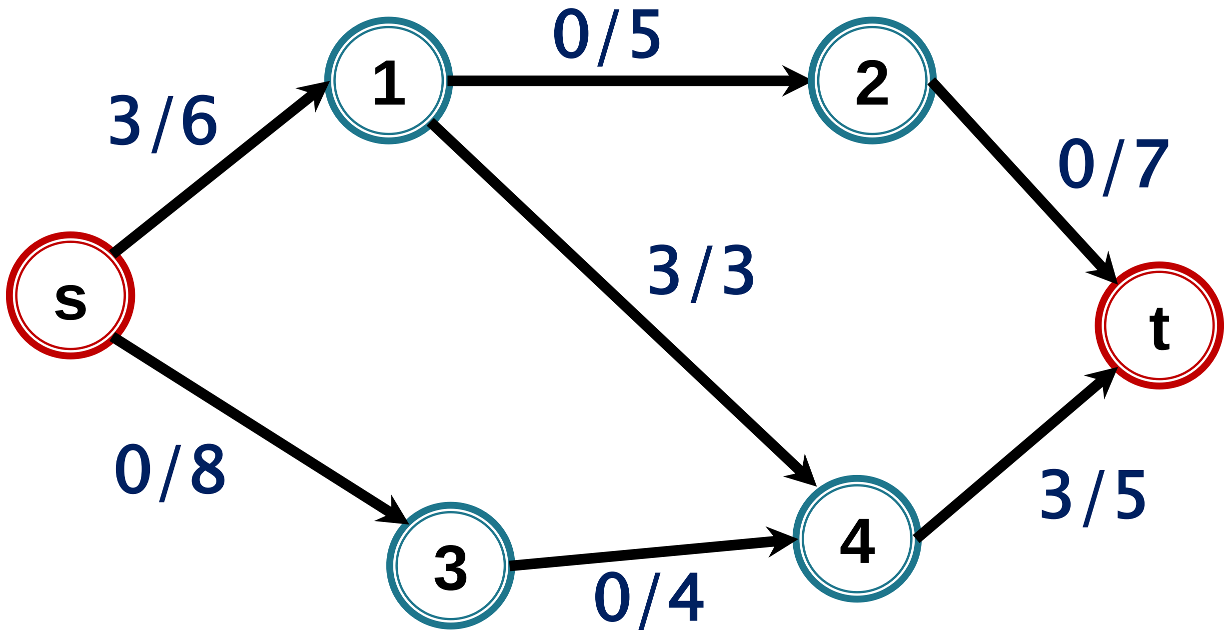

5
6
7
3
8
5
4
s
1
2
t
3
4



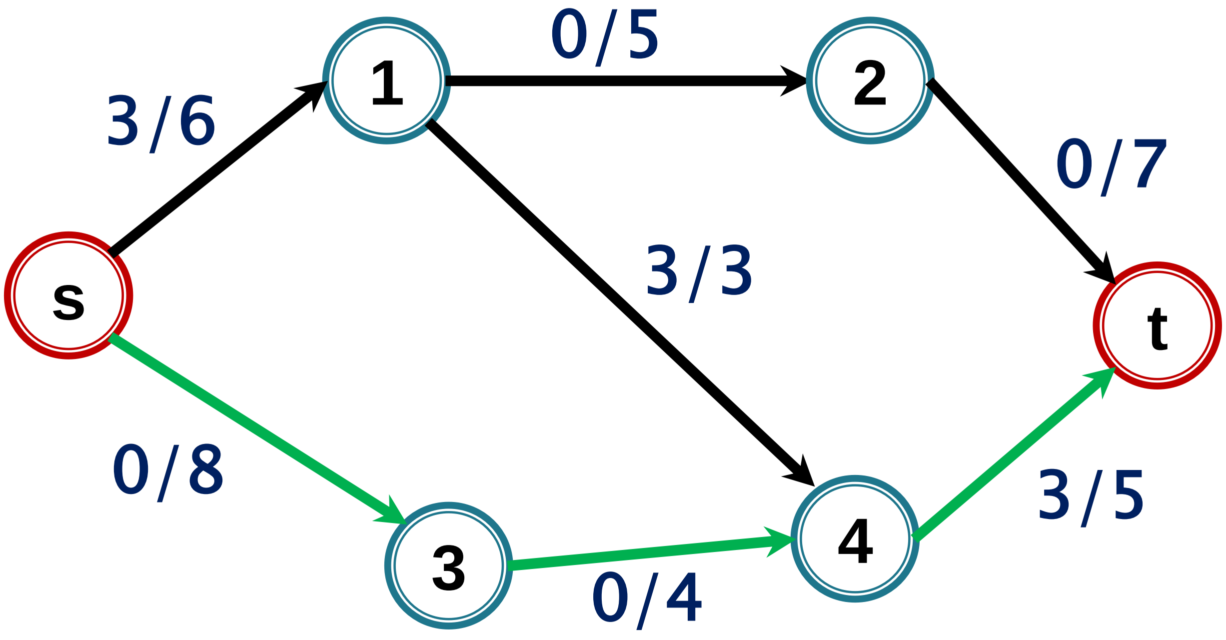
0/6
0/5
0/7
0/3
0/8
0/4
0/5
s
1
2
3
4
t

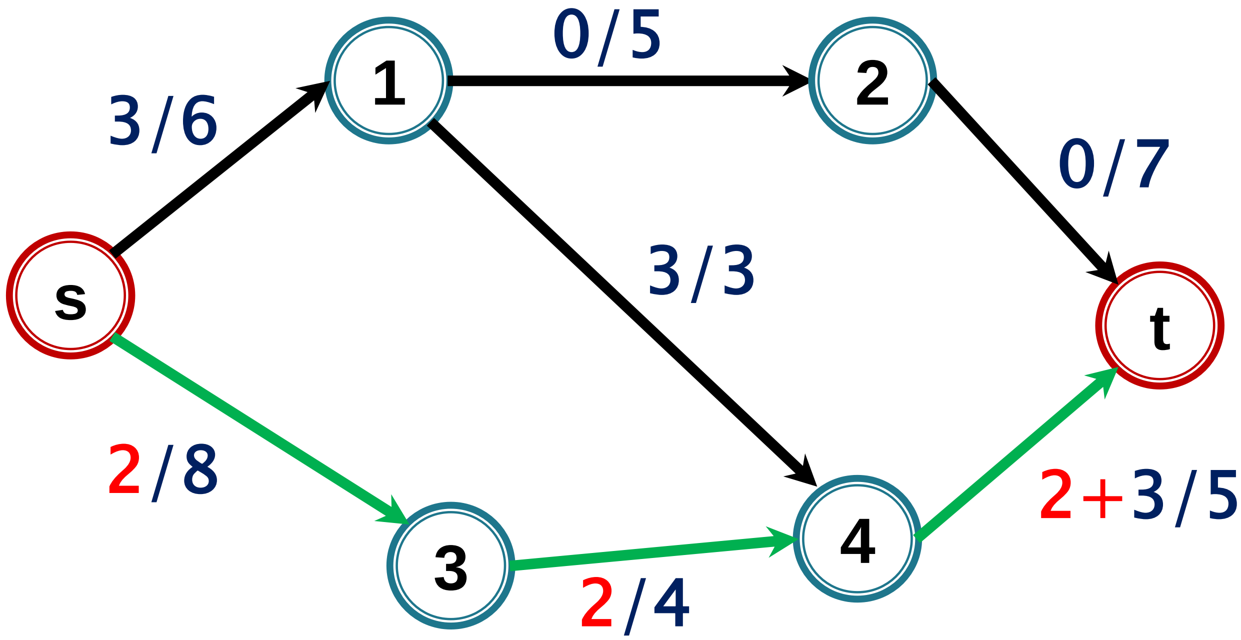


s
1
2
3
4
t
3/6
0/5
0/7
3/3
0/8
0/4
3/5

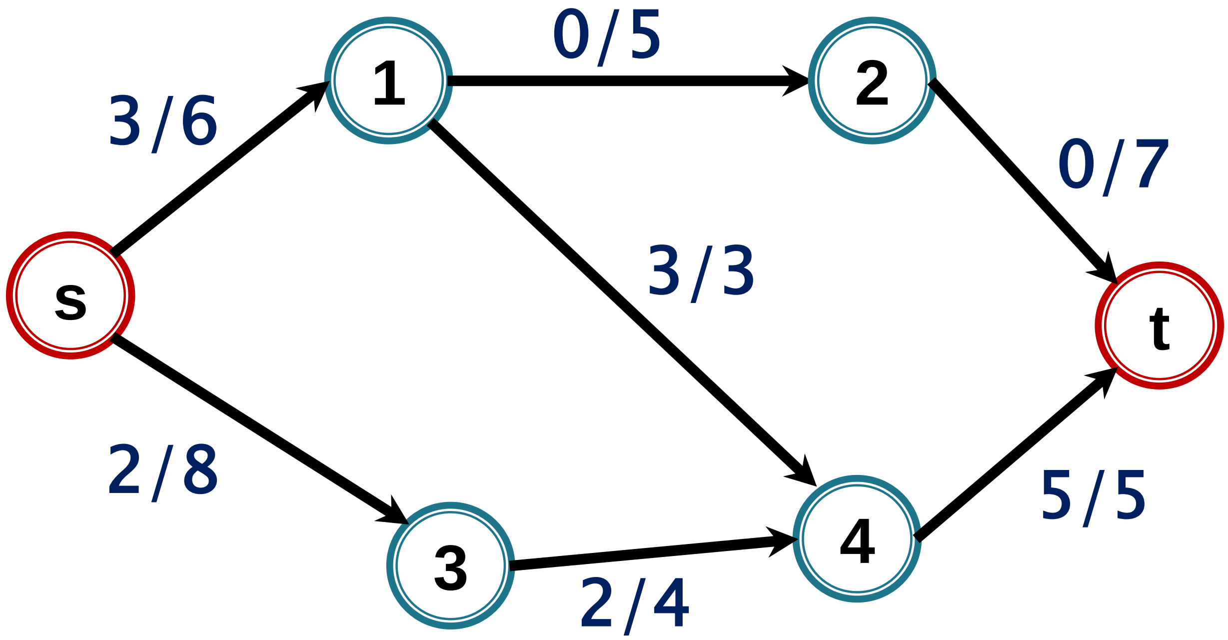


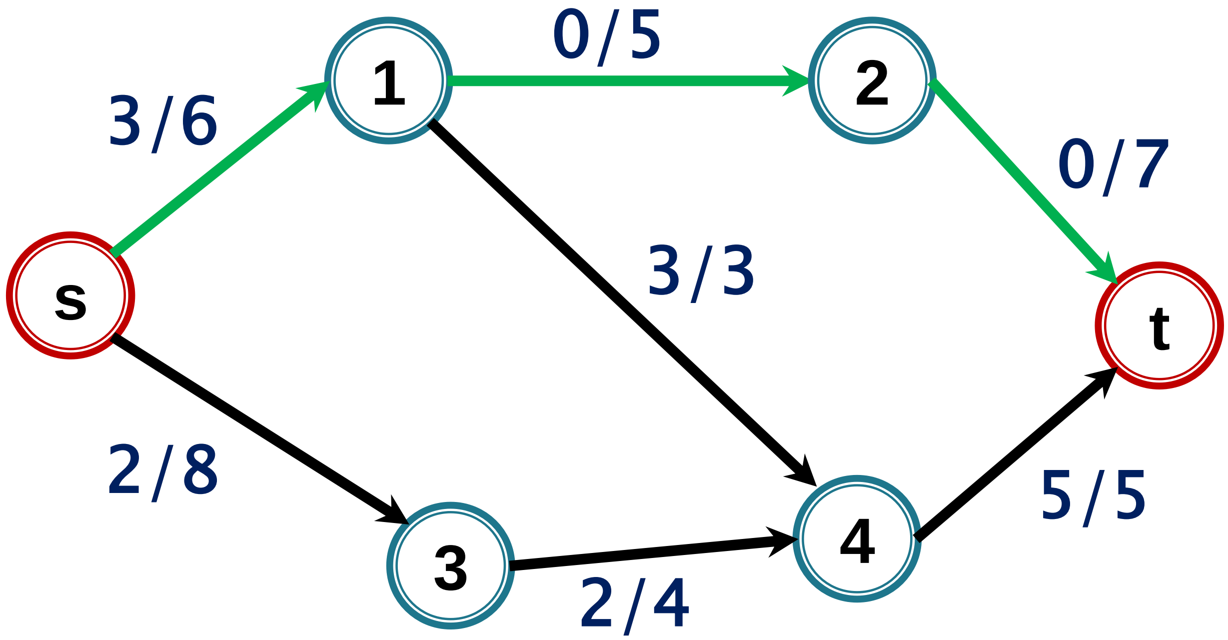
s
1
2
3
4
t
3/6
0/8
0/5
3/3
0/4
0/7
3/5


0/5
3/6
1
2
0/7
3/3
s
t
0/8
3/5
3
4
0/4

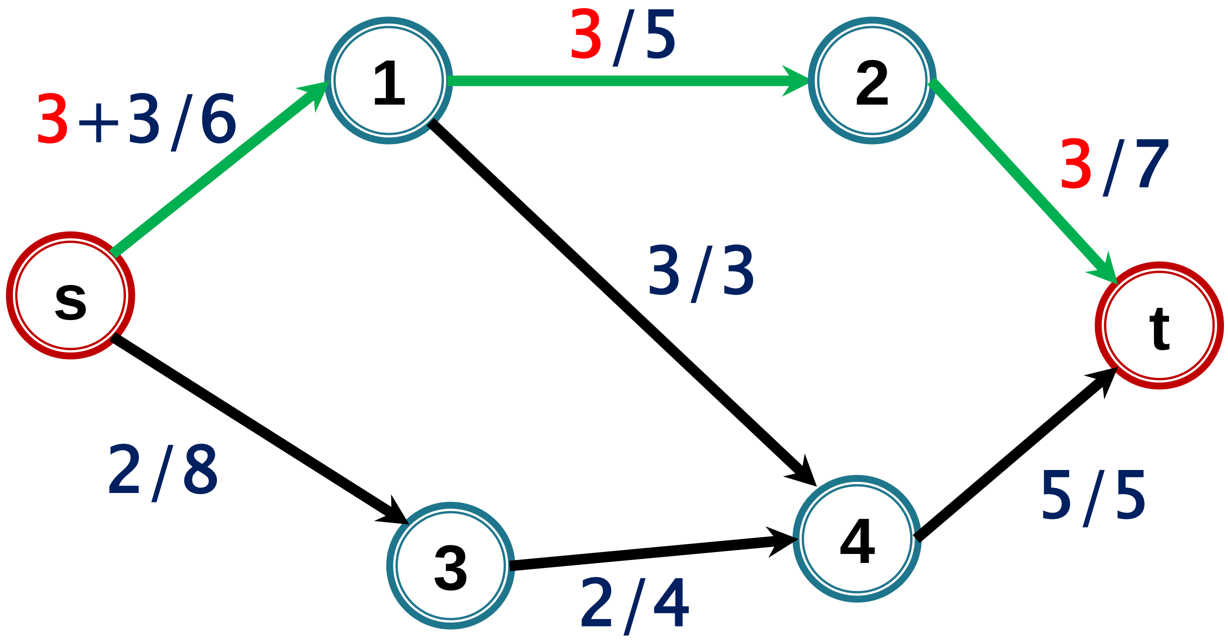


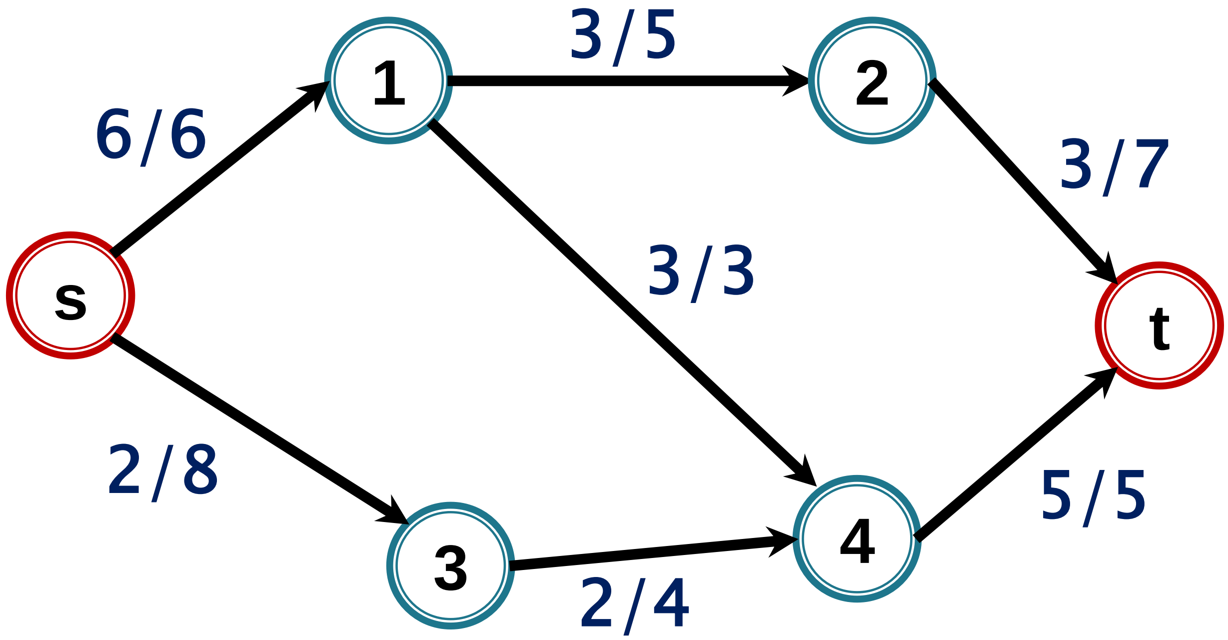
s
1
2
3
4
t
3/6
0/5
0/7
3/3
2/8
2/4
2+3/5


0/5
1
2
3/6
0/7
3/3
s
t
2/8
5/5
3
4
2/4

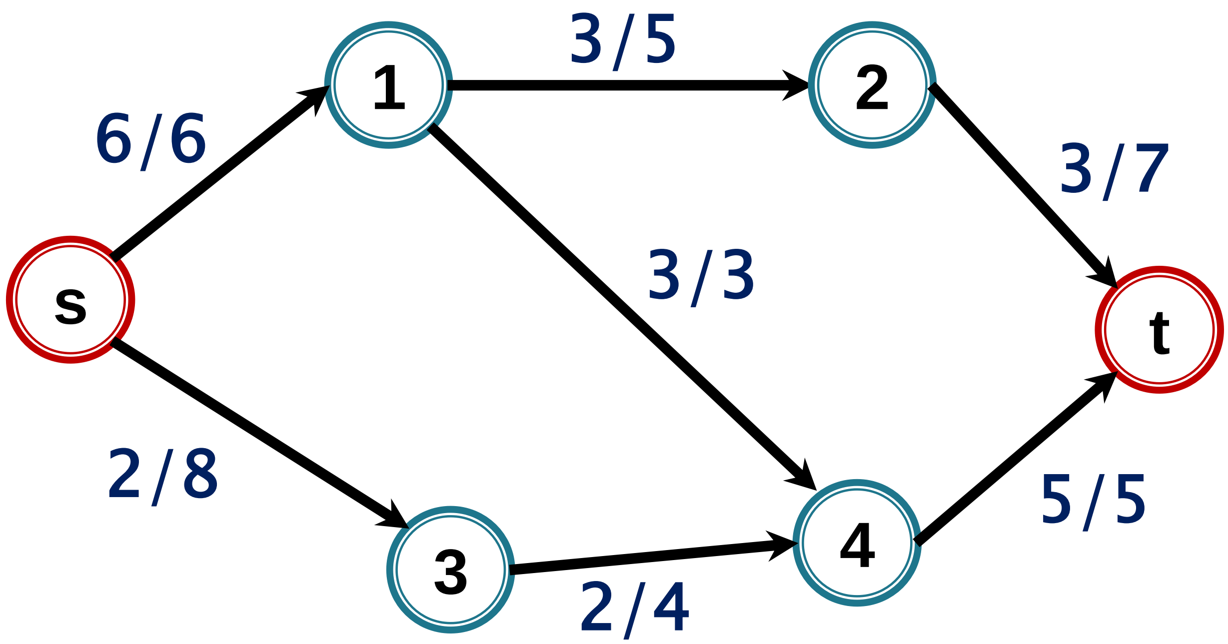


s
1
2
3
4
t
3/6
0/5
0/7
3/3
2/8
2/4
5/5


3+3/6
3/5
3/7
3/3
2/8
2/4
5/5
s
1
2
3
4
t

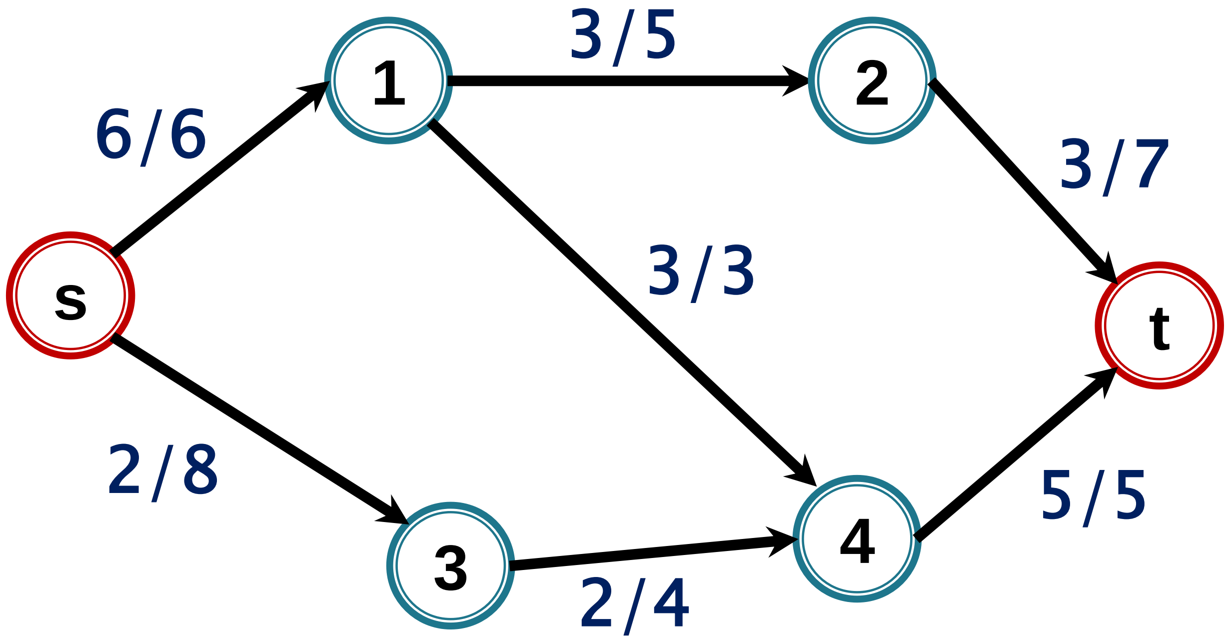


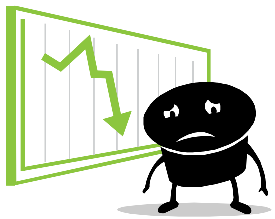
3/5
6/6
3/7
3/3
2/8
5/5
2/4
s
1
2
3
4
t



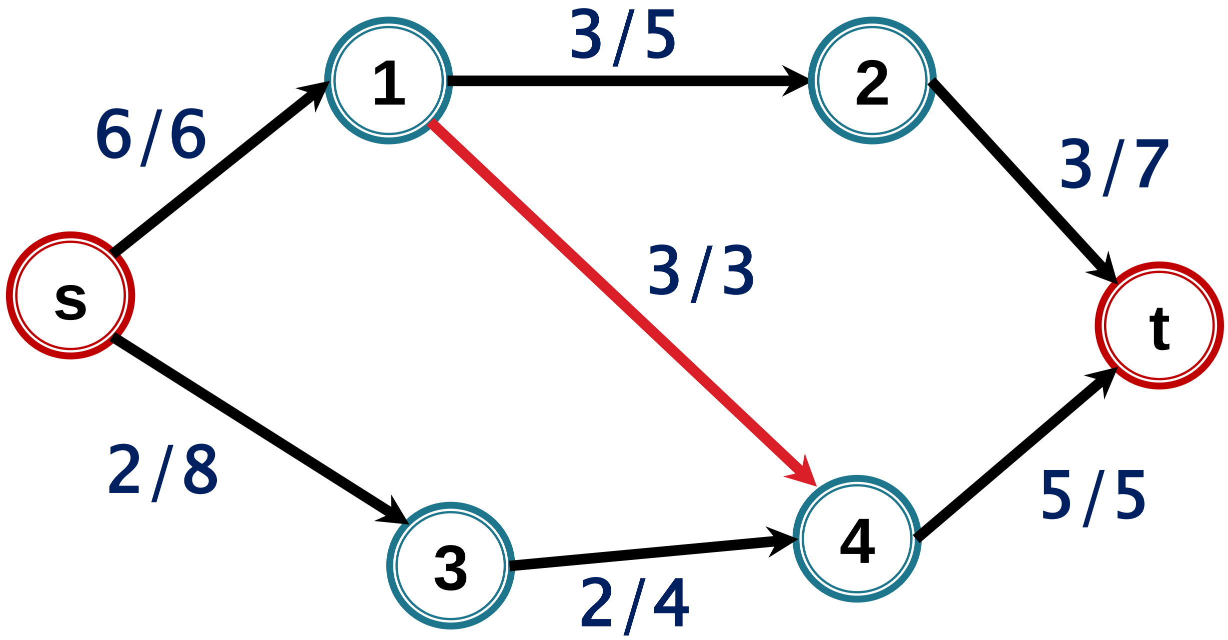
Nu mai există drumuri de la s la t pe care putem crește fluxul

Este maxim fluxul?

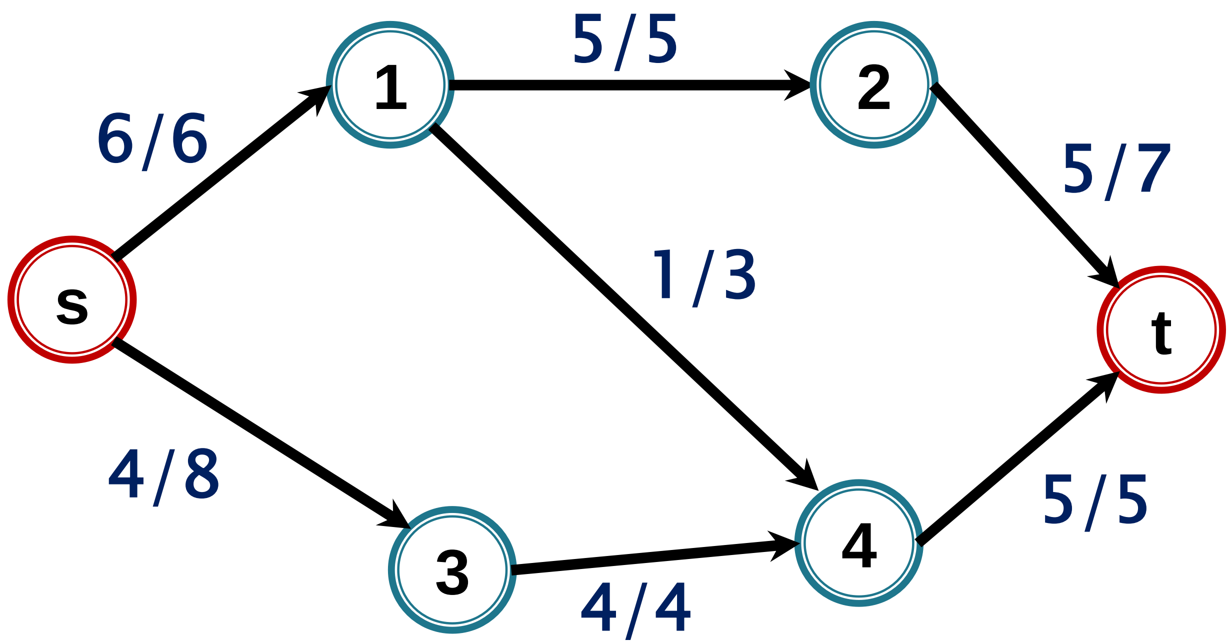




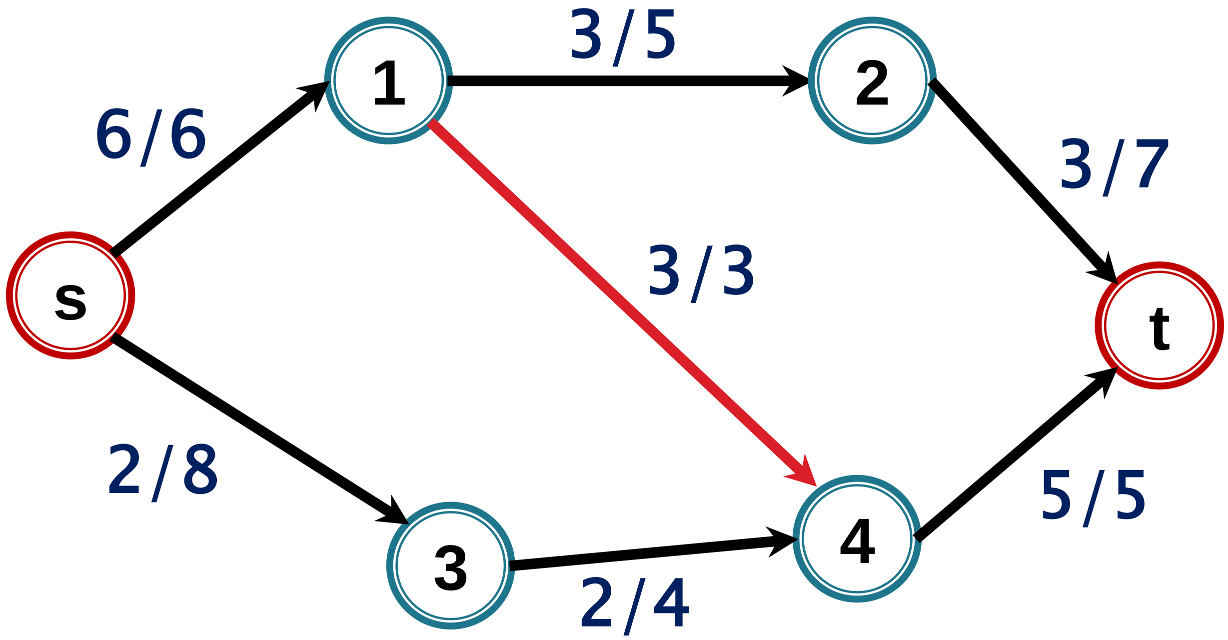
Nu este cantitatea maximă pe care o putem trimite, am trimis greşit pe arcul (1,4) (pe drumul [s, 1, 4, t])

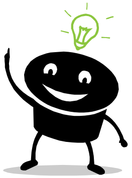


fluxul obținut

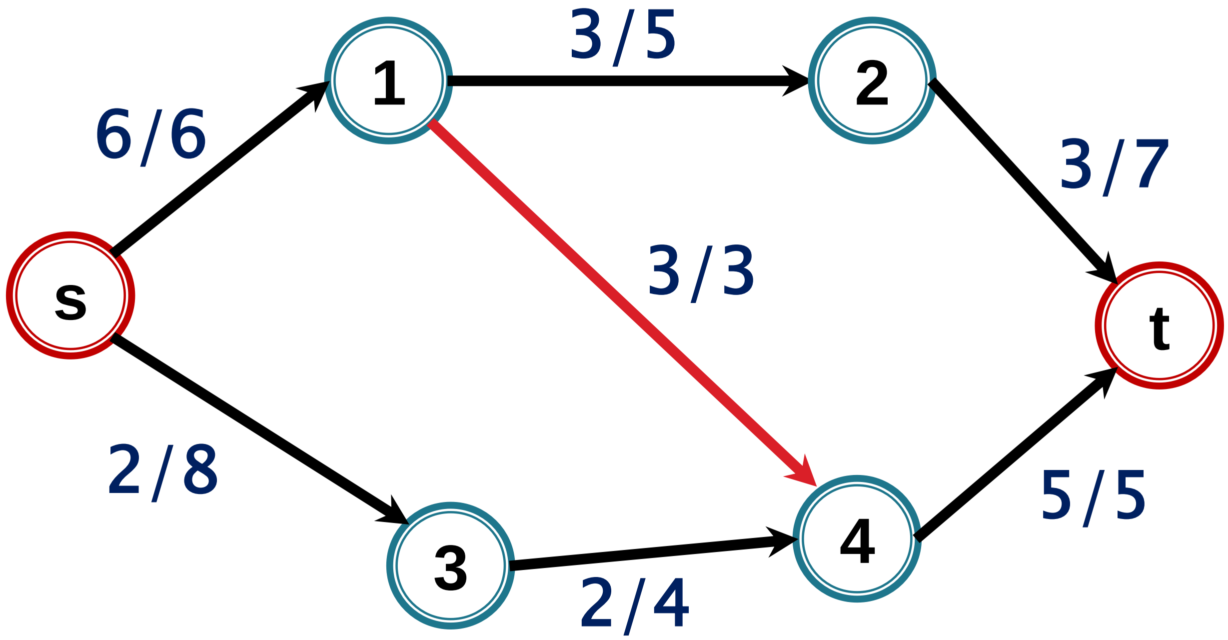


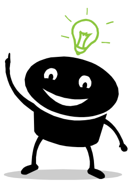
un flux "*mai mare*"





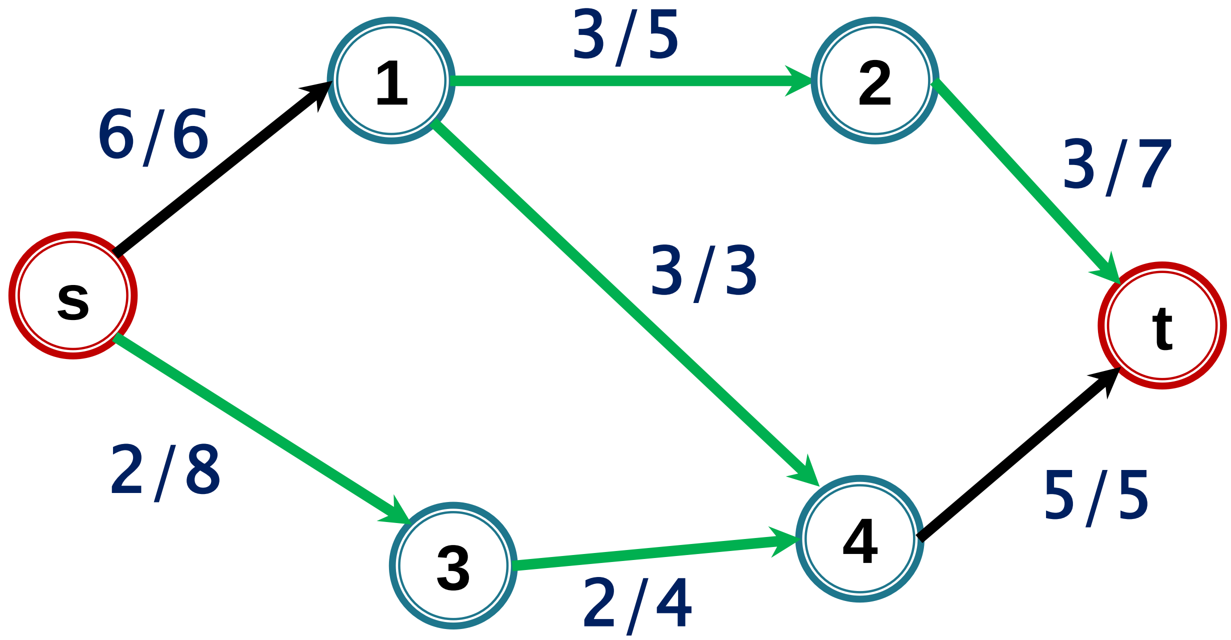
Trebuie să putem corecta (să trimitem flux înapoi pe un arc, pentru a fi direcţionat prin alte arce către destinaţie)



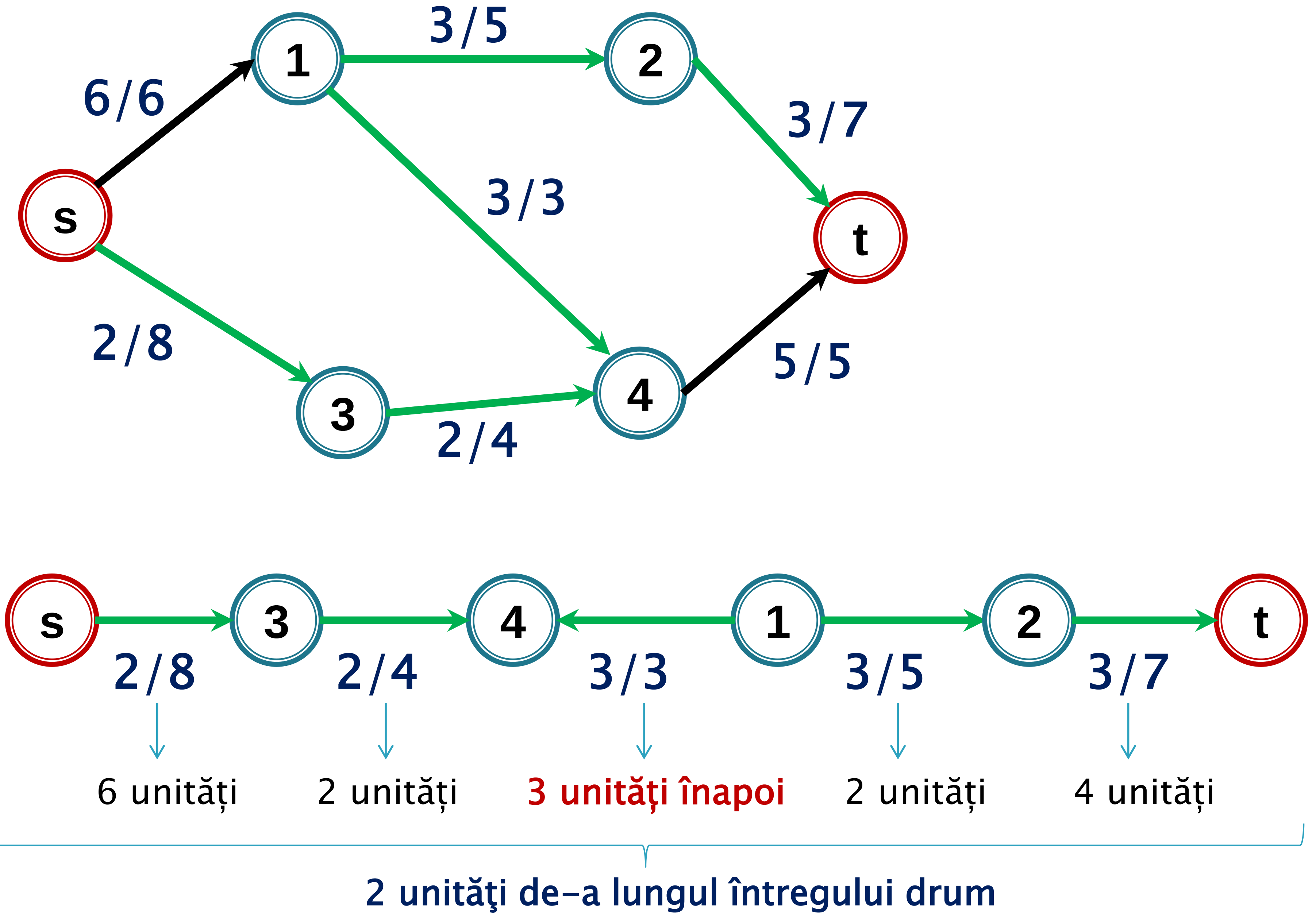


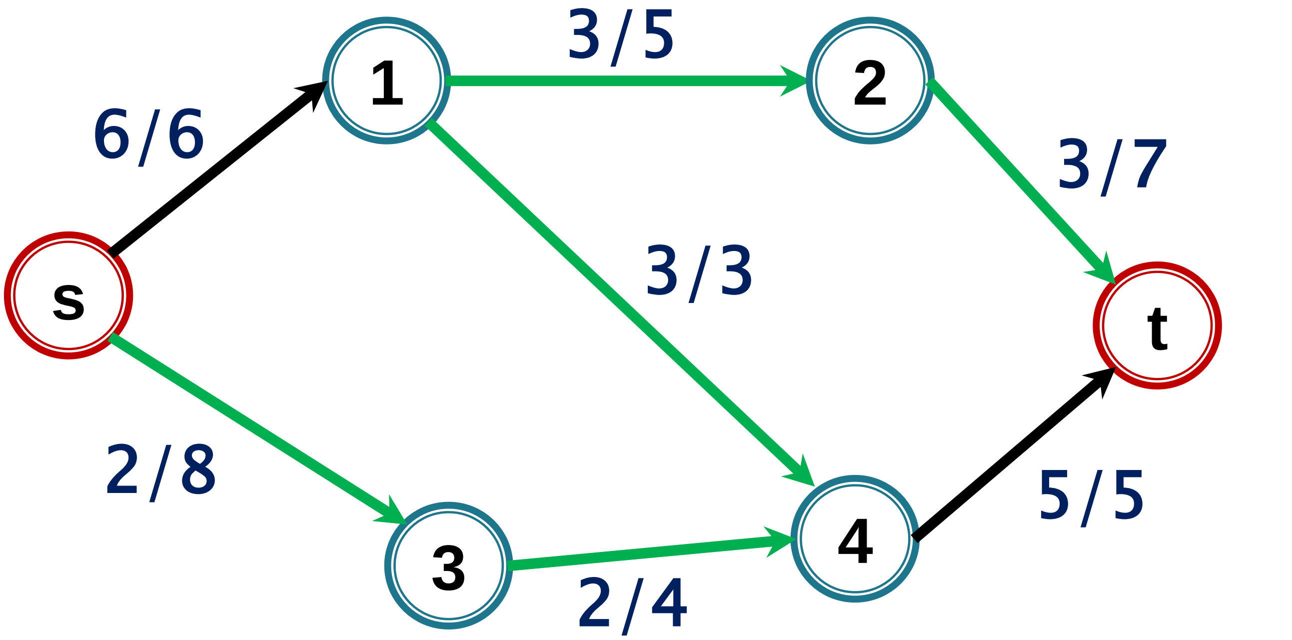
- Trimitem unităţi de flux înapoi pe arcul (1,4)
- Corecția trebuie făcută pe un lanț de la s la t, nu doar pe un arc, altfel fluxul (marfa) va rămâne într-un vârf intermediar

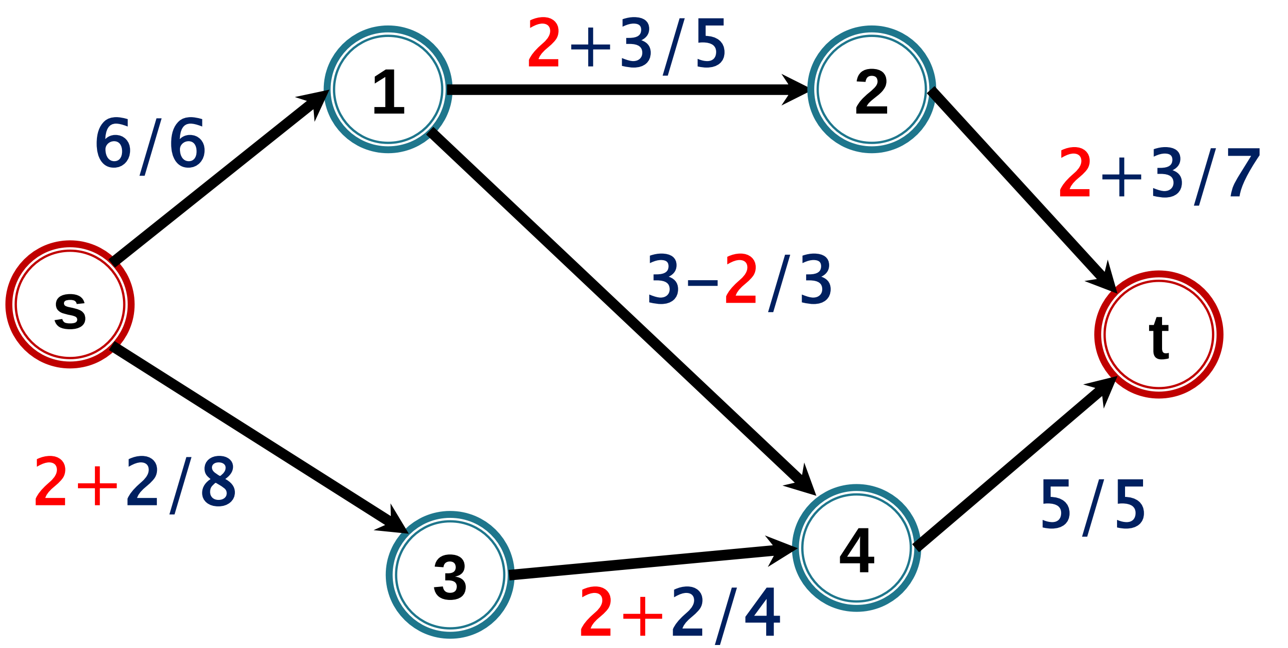
Determinăm un LANȚ (nu drum) de la s la t pe care putem modifica fluxul

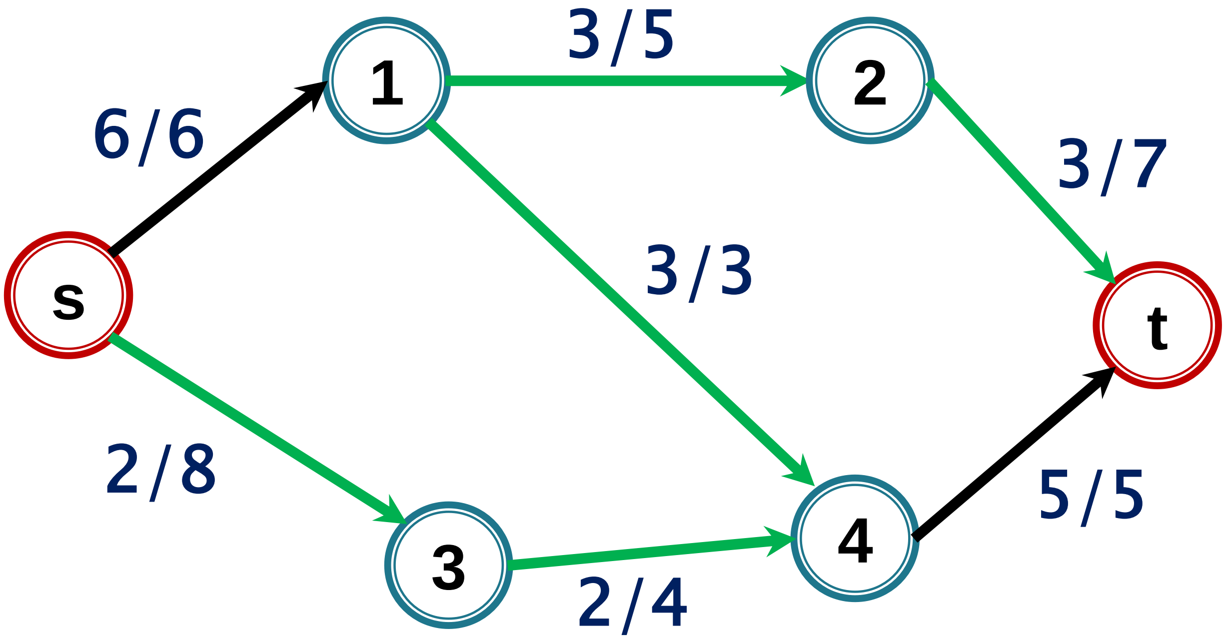


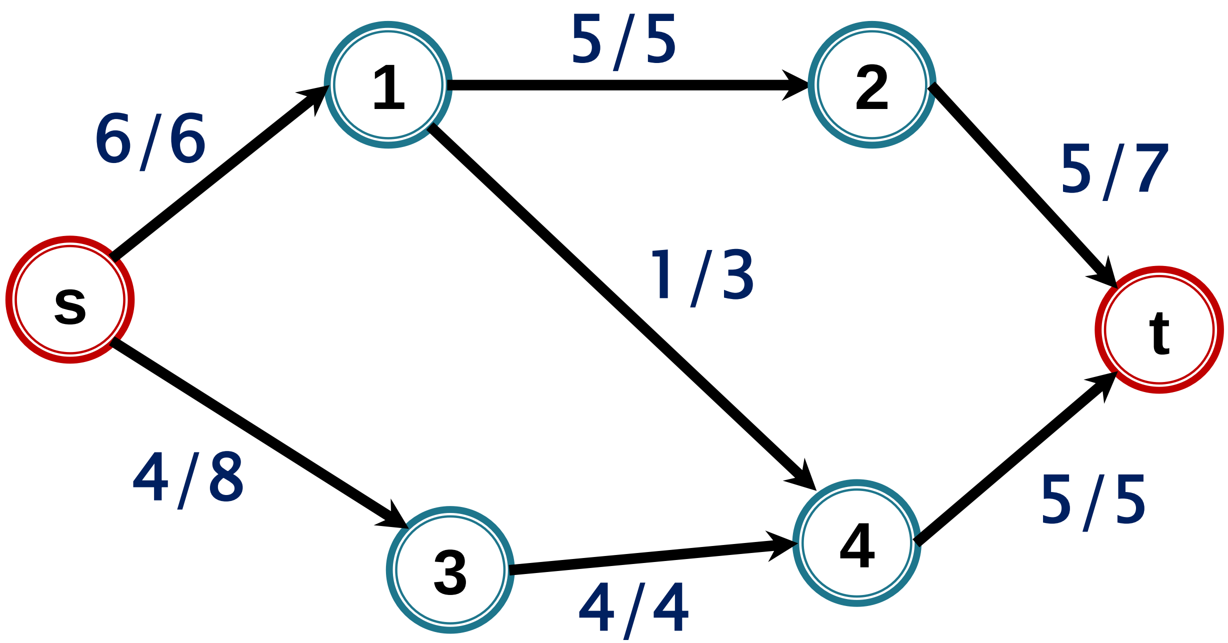
Cu cât putem modifica fluxul pe acest lanț?

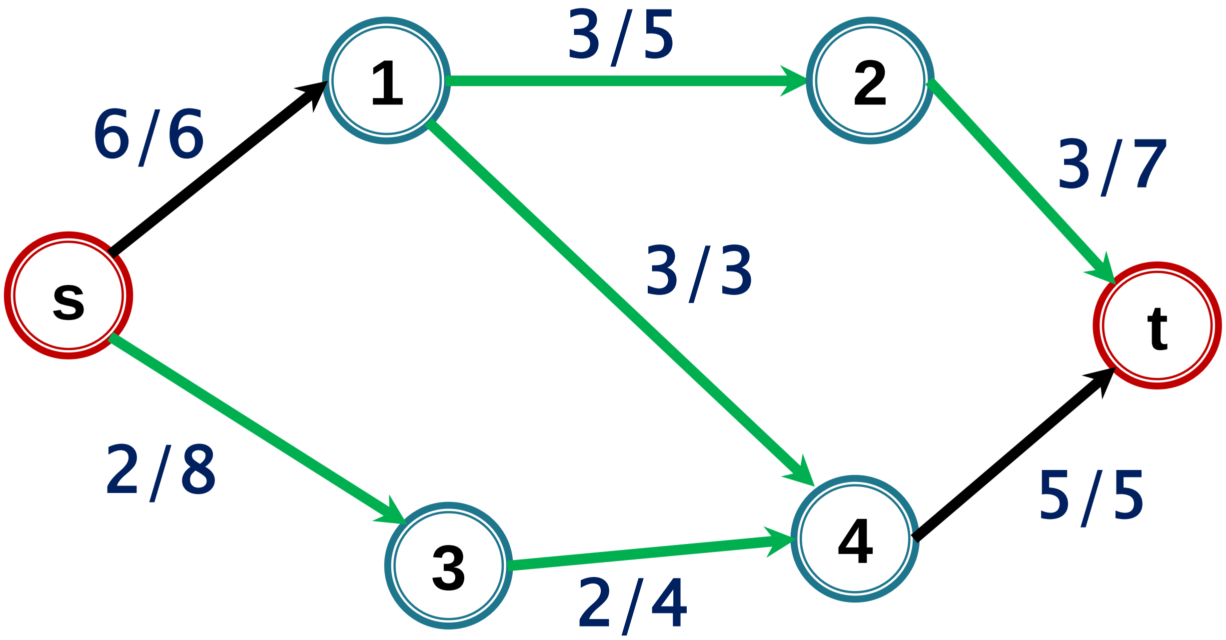

s
1
2
3
4
t
6/6
3/5
3/7
3/3
2/8
5/5
2/4
s
3
4
1
2
t
2/8
2/4
3/3
3/5
3/7
6 unități
2 unități
3 unități înapoi
2 unități
4 unități
2 unităţi de-a lungul întregului drum


s
1
2
3
4
t
6/6
3/5
3/7
3/3
2/8
2/4
5/5

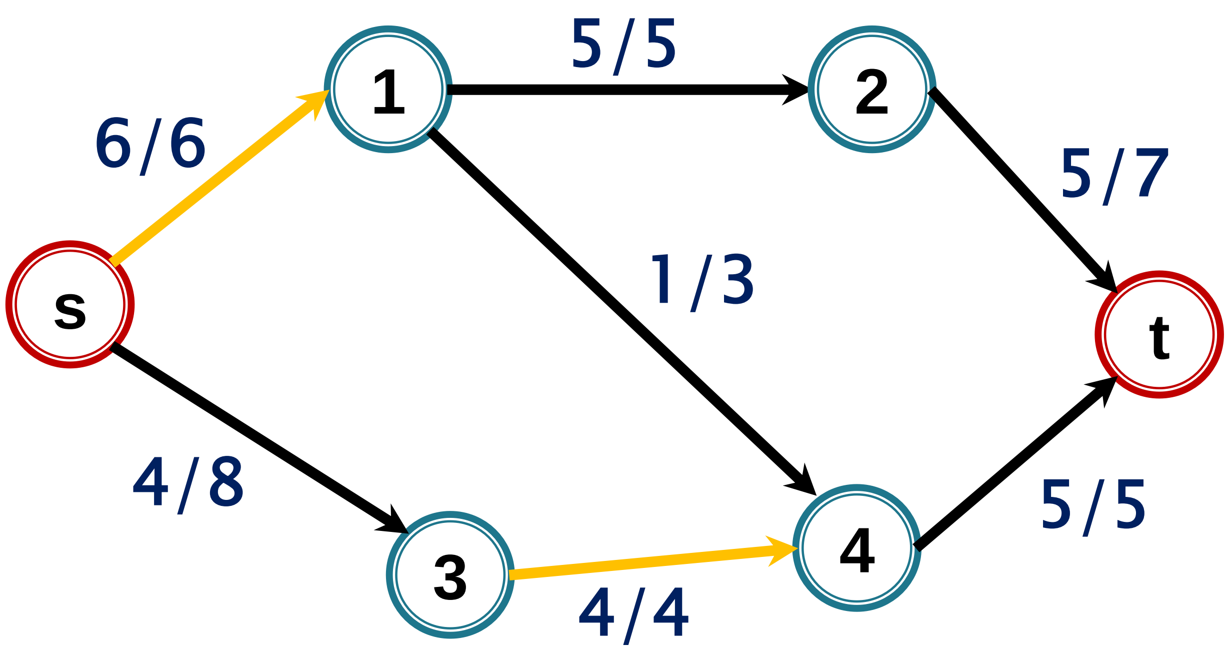

s
1
2
3
4
t
6/6
2+3/5
2+3/7
3−2/3
2+2/8
2+2/4
5/5


s
1
2
3
4
t
6/6
3/5
3/7
3/3
2/8
2/4
5/5


s
1
2
3
4
t
6/6
5/5
5/7
1/3
4/8
4/4
5/5



s
1
2
3
4
t
6/6
3/5
3/7
3/3
2/8
2/4
5/5



s
1
2
3
4
t
6/6
5/5
5/7
1/3
4/8
4/4
5/5

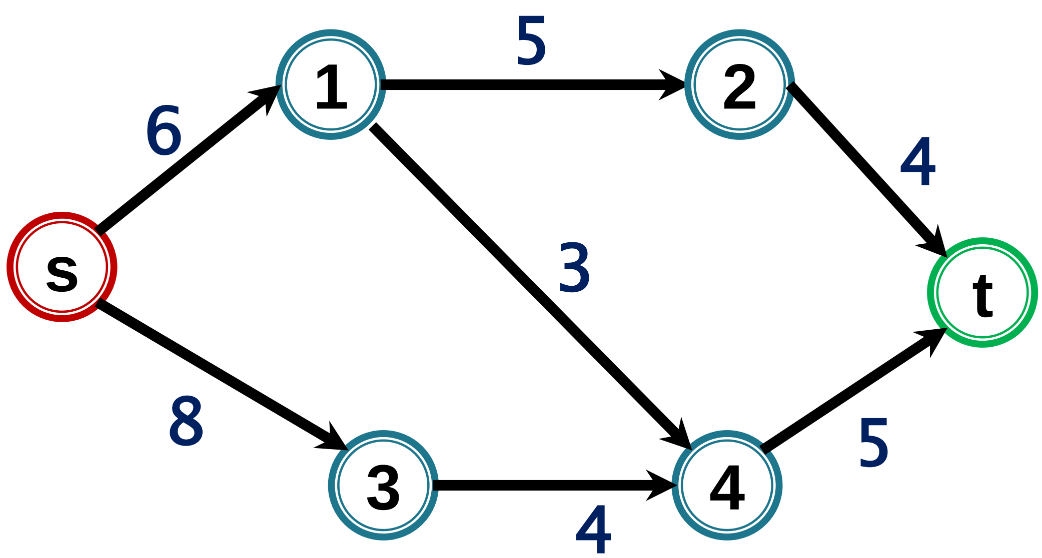
Definiţii

Fluxuri în rețele de transport

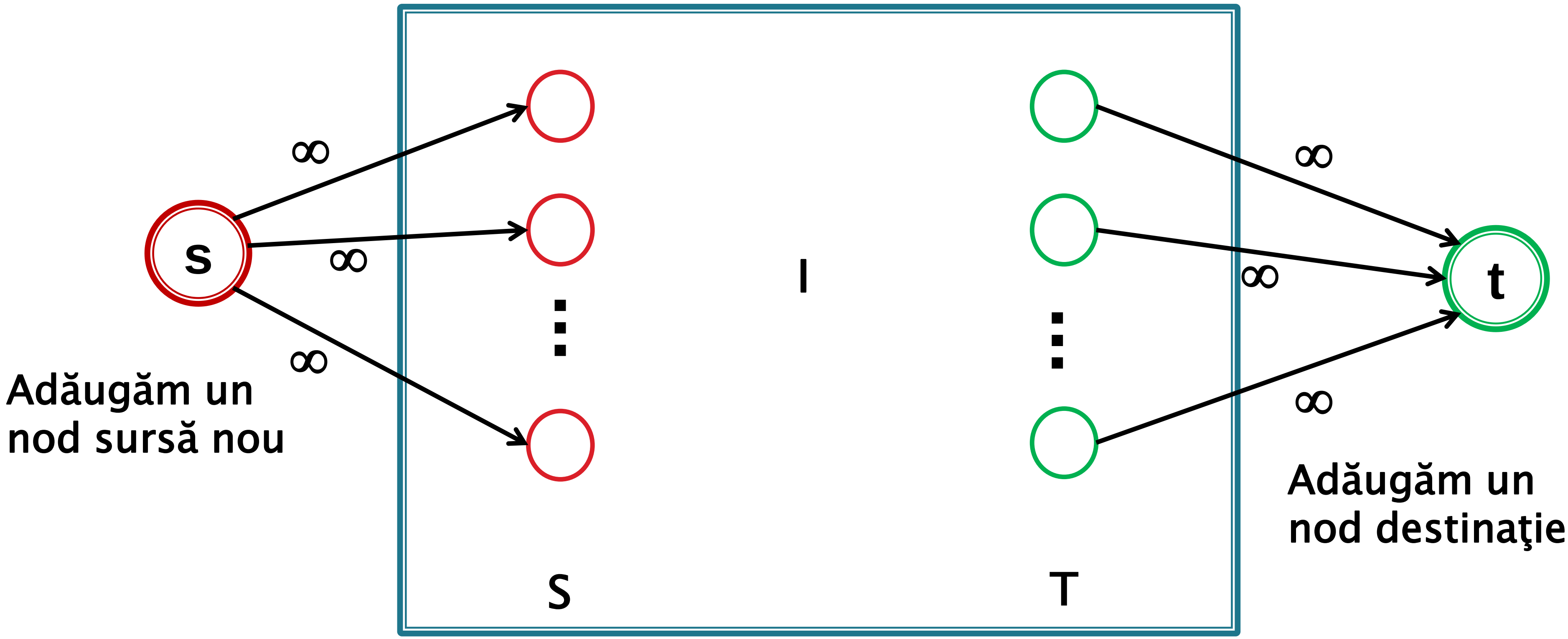
- **Reţea de transport** $N = (G, S, T, I, c)$ unde
  - $G = (V, E)$ – graf orientat cu
    - $V = \mathbf{S} \cup \mathbf{I} \cup \mathbf{T}$
      - S, I , T disjuncte, nevide
      - S – **mulţimea surselor (intrărilor)**
      - T – **mulţimea destinaţiilor (ieşiri)**
      - I – **mulţimea vârfurilor intermediare**
  - $c : E \to \mathbb{N}$ funcţia **capacitate** (cantitatea maximă care poate fi transportată prin fiecare arc)

Ipoteze pentru rețeaua N

- $S = \{s\}$ – o singură sursă
- $T = \{t\}$ – o singură destinație
- $d^{-}(s) = 0$ – în sursă nu intră arce
- $d^{+}(t) = 0$ – din destinație nu ies arce



- **Ipotezele nu sunt restrictive,** orice reţea poate fi transformată într-o reţea echivalentă de acest tip (din punct de vedere al valorii fluxului)



Reţeaua N

Ipoteze pentru rețeaua N

- $S = \{s\}$ – o singură sursă
- $T = \{t\}$ – o singură destinație
- $d^-(s) = 0$ – în sursă nu intră arce
- $d^+(t) = 0$ – din destinație nu ies arce
- orice vârf este accesibil din s

- Un **flux** într-o reţea de transport N = (G, S, T, I, c) este o funcţie $f : E \rightarrow \mathbb{N}$ cu proprietăţile

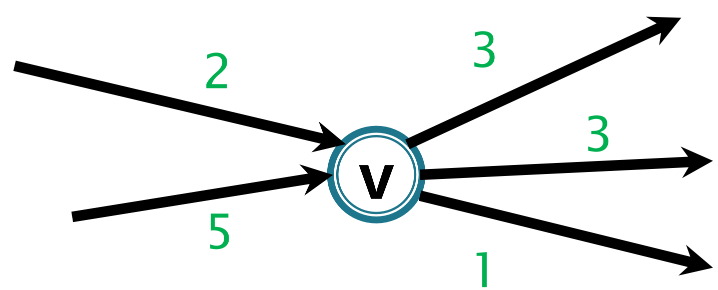
  1) $0 \leq f(e) \leq c(e), \forall\ e \in E(G)$ *condiţia de **mărginire***

  2) Pentru orice vârf **intermediar** $v \in I$

$$\sum_{uv \in E} f(uv) = \sum_{vu \in E} f(vu)$$

*condiţia de **conservare a fluxului***

(fluxul total care intră în v = fluxul total care iese din v)

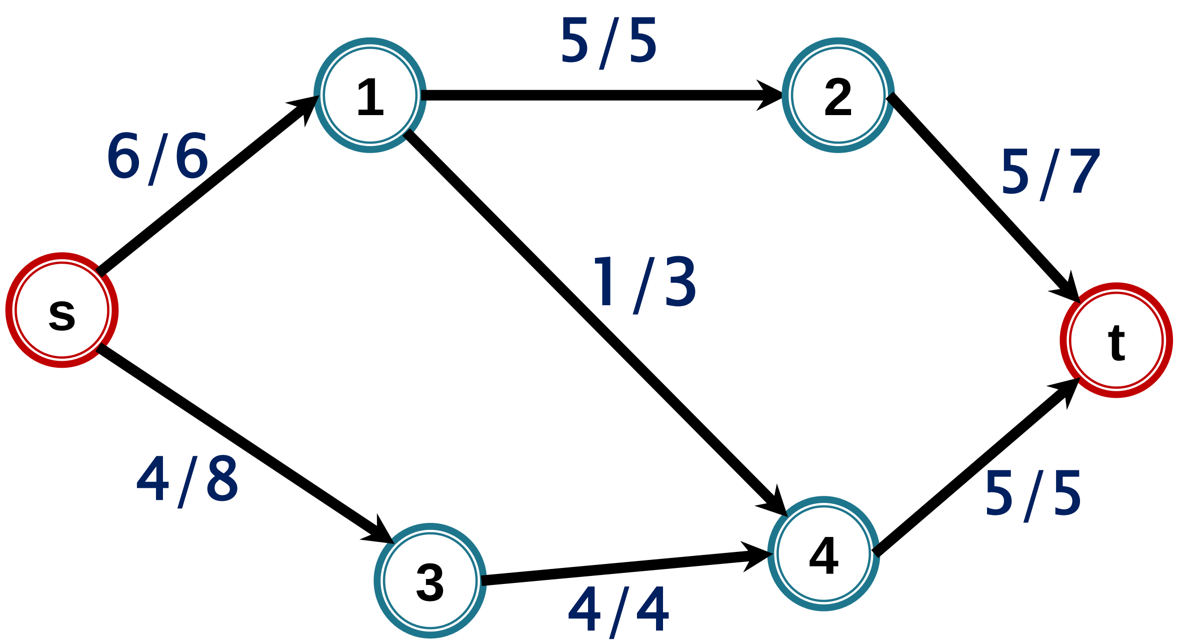


- **Notaţii**
  - $\overline{X}$
  - $f^{-}(v), f^{+}(v)$
  - $f(X,Y),\ \mathbf{X}, \mathbf{Y} \subseteq \mathbf{V}$
  - $f^{+}(X),\ \mathbf{X} \subseteq \mathbf{V}$

În general, pentru orice funcție $g: E \rightarrow \mathbb{N}$ **vom folosi notaţii similare**

- **Valoarea fluxului** *f* se defineşte ca fiind

$$val(f) = f^{+}(s) = \sum_{su \in E} f(su)$$



val(f) = ?

- **Valoarea fluxului** *f* se defineşte ca fiind

$$val(f) = f^{+}(s)$$

- Vom demonstra ulterior că are loc relaţia

$$val(f) = f^{+}(s) = f^{-}(t)$$

Problema fluxului maxim

- Fie N o reţea.

  Un flux f* se numeşte **flux maxim în N** dacă

$$val(f^*) = \max\{val(f) \mid f \text{ este flux în N}\}$$

- **Observaţie**: Orice reţea admite cel puţin un flux, spre exemplu fluxul vid:

  $f(e) = 0, \forall e \in E$

Problema fluxului maxim

- Fie N o reţea.

  Să se determine f* un **flux maxim în N**

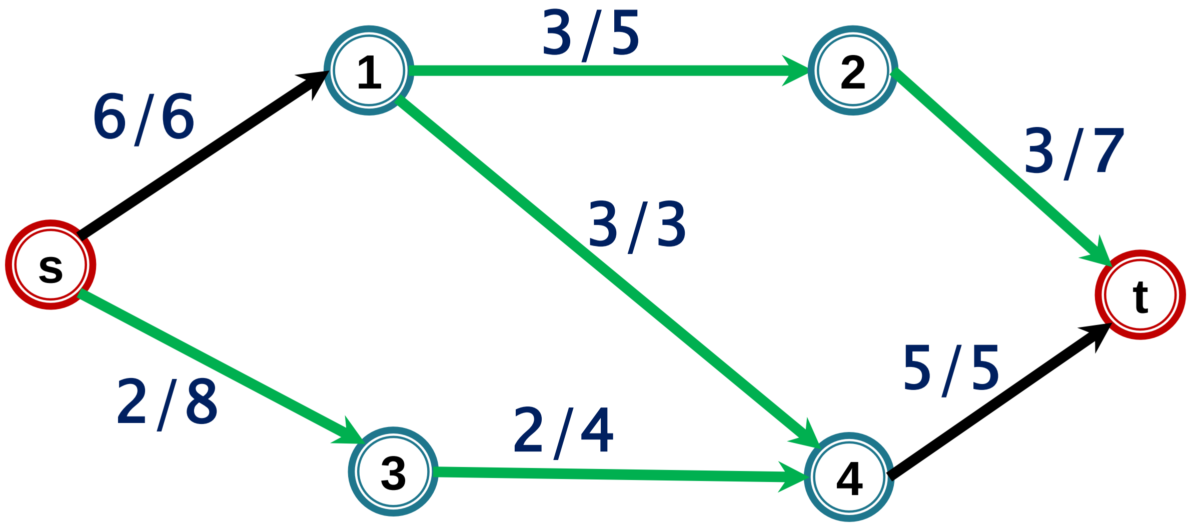
Algoritmul FORD-FULKERSON

de determinare a unui flux maxim

+ a unei tăieturi minime

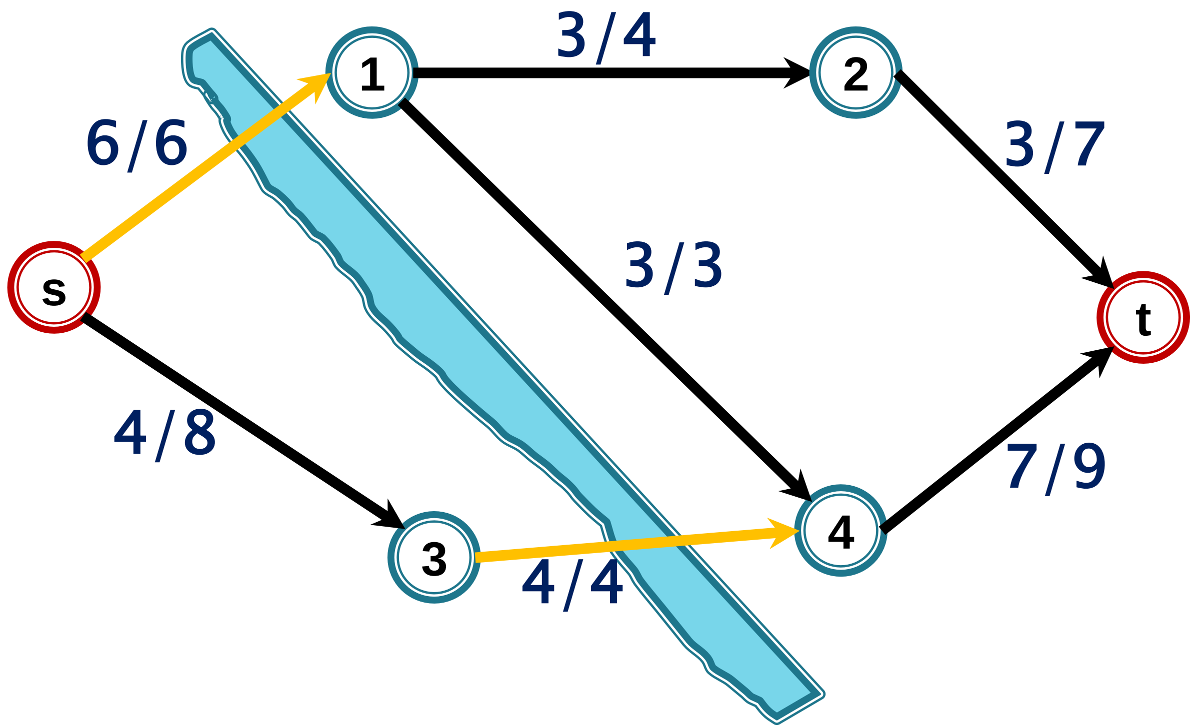
Algoritmul Ford-Fulkerson

Amintim din exemplele anterioare:



arc în sens invers,
putem trimite înapoi 3 unități de flux

arc în sens direct,
mai putem trimite 5−3=2 unități



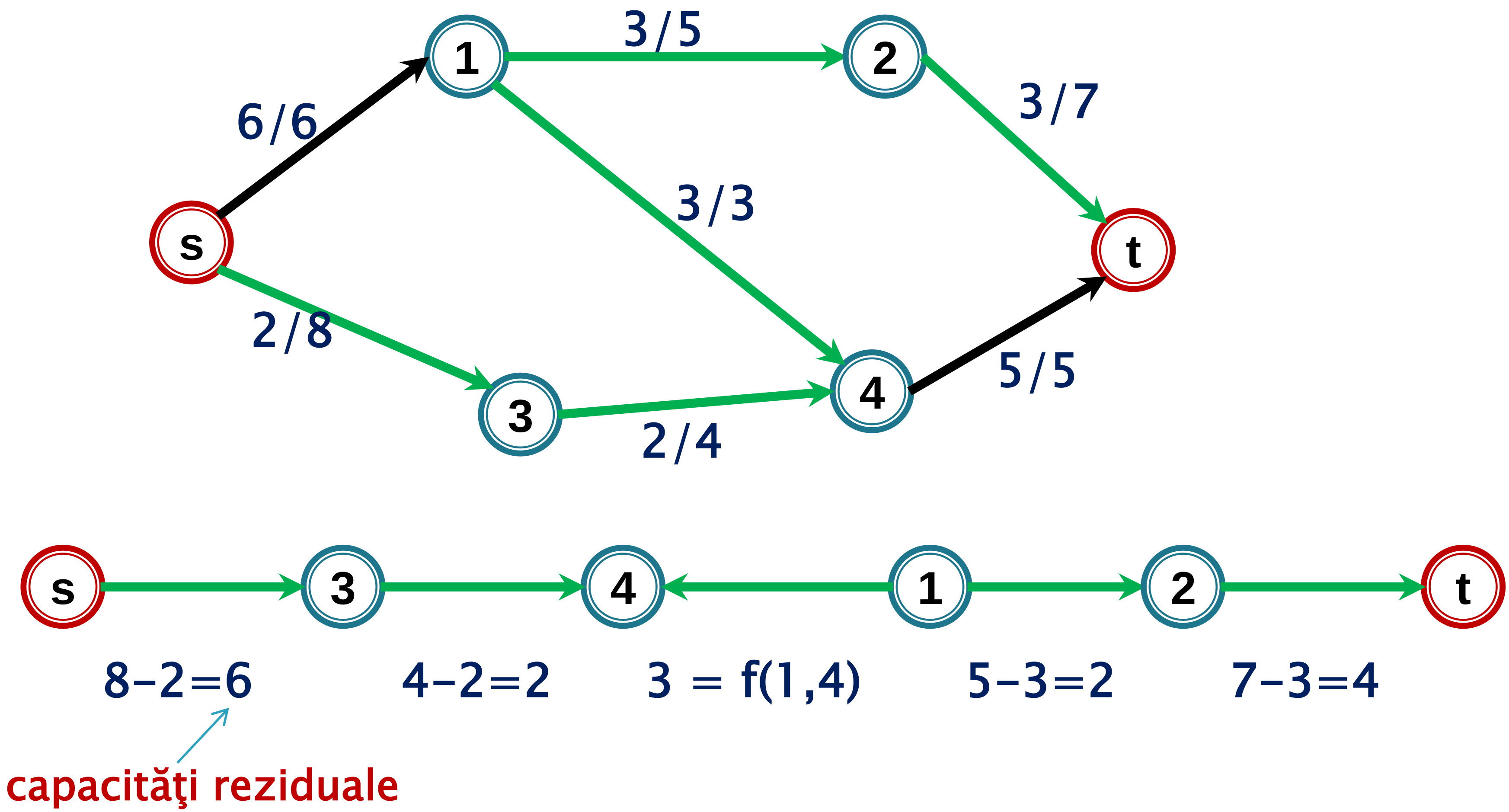
Fluxul este maxim – în mulțimea de arce evidențiată toate arcele au flux=capacitate și nu putem construi drumuri de la s la t care nu conțin arce din această mulțime (s-t tăietură)

Algoritmul Ford-Fulkerson

Definim noțiunile necesare descrierii și studiului algoritmului:

- **s-t lanț f-nesaturat**
  - arc direct
  - arc invers
  - capacitate reziduală arc, lanţ
- Operația de **revizuire a fluxului** de-a lungul unui s-t lanț *f-nesaturat*
- **Tăietură în rețea**
  - capacitatea unei tăieturi

- Fie N reţea, f flux în N, P un s-t lanţ
- Asociem fiecărui arc *e* din P o pondere, numită **capacitate reziduală** în P



- **Capacitatea reziduală** a lanţului P

i(P) = ?

= cu cât putem revizui maxim fluxul de-a lungul lui P

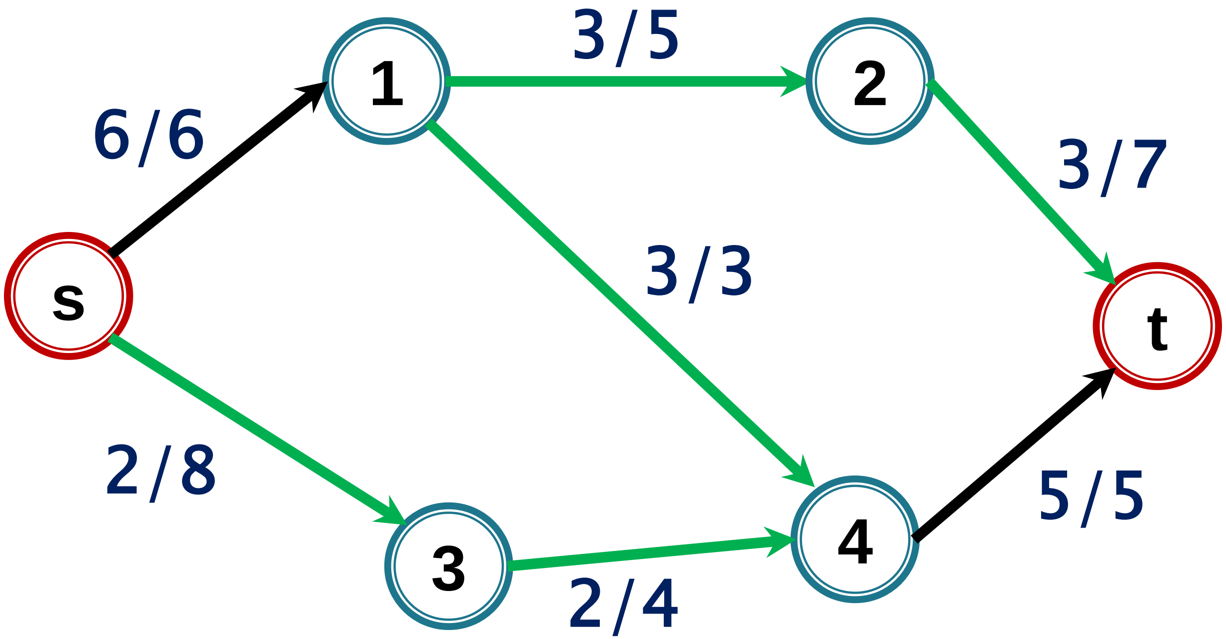
- **Capacitatea reziduală** a lanţului P

$$i(P) = \min\{6, 2, 3, 2, 4\} = 2$$

Fluxuri în rețele de transport

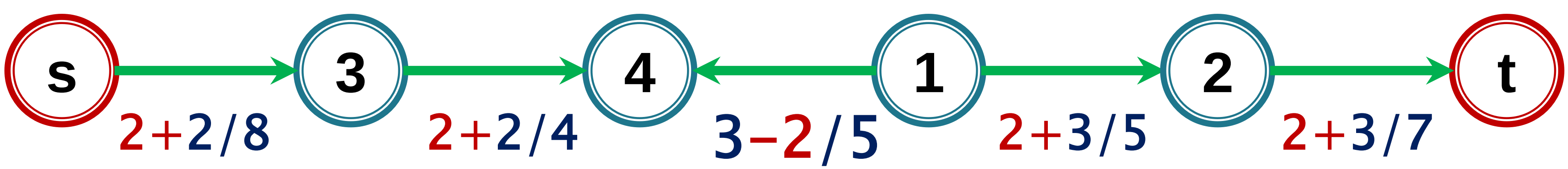
- Fie N- rețea, f flux în N, P un s-t lanţ **f-nesaturat**.
- **Fluxul revizuit de-a lungul lanţului P** se defineşte ca fiind $f_P : E \to \mathbb{N}$,

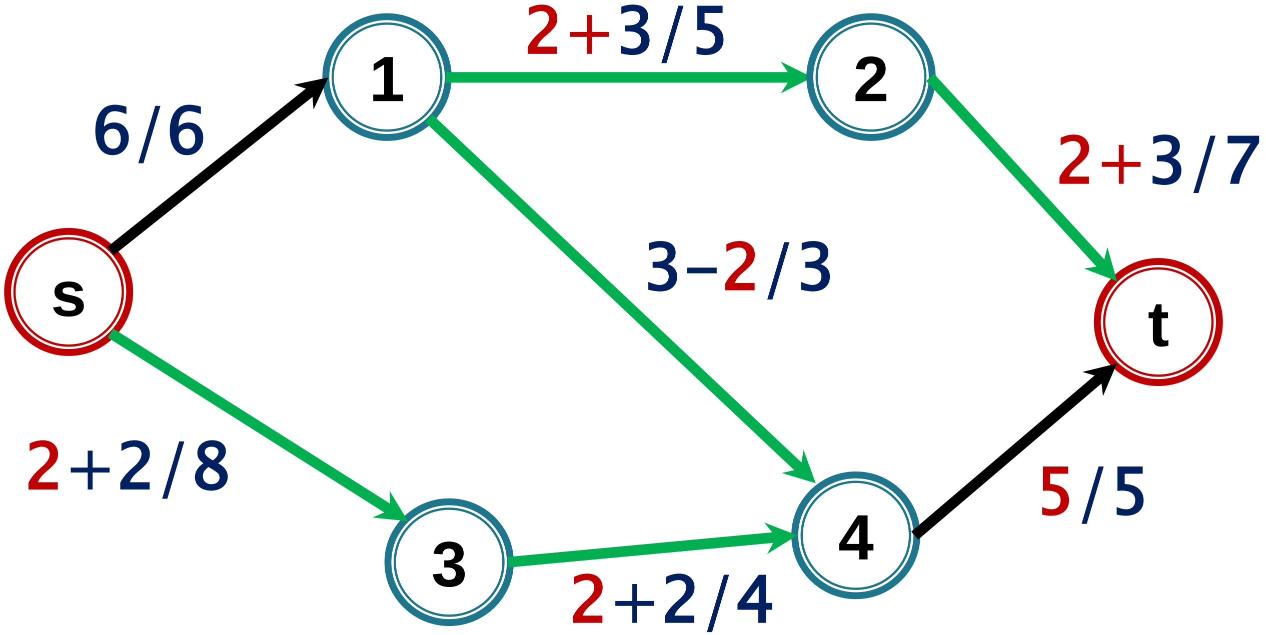
$$f_P(e) = \begin{cases} f(e) + i(P), & \text{dacă } e \text{ este arc direct în } P \\ f(e) - i(P), & \text{dacă } e \text{ este arc invers în } P \\ f(e), & \text{altfel} \end{cases}$$

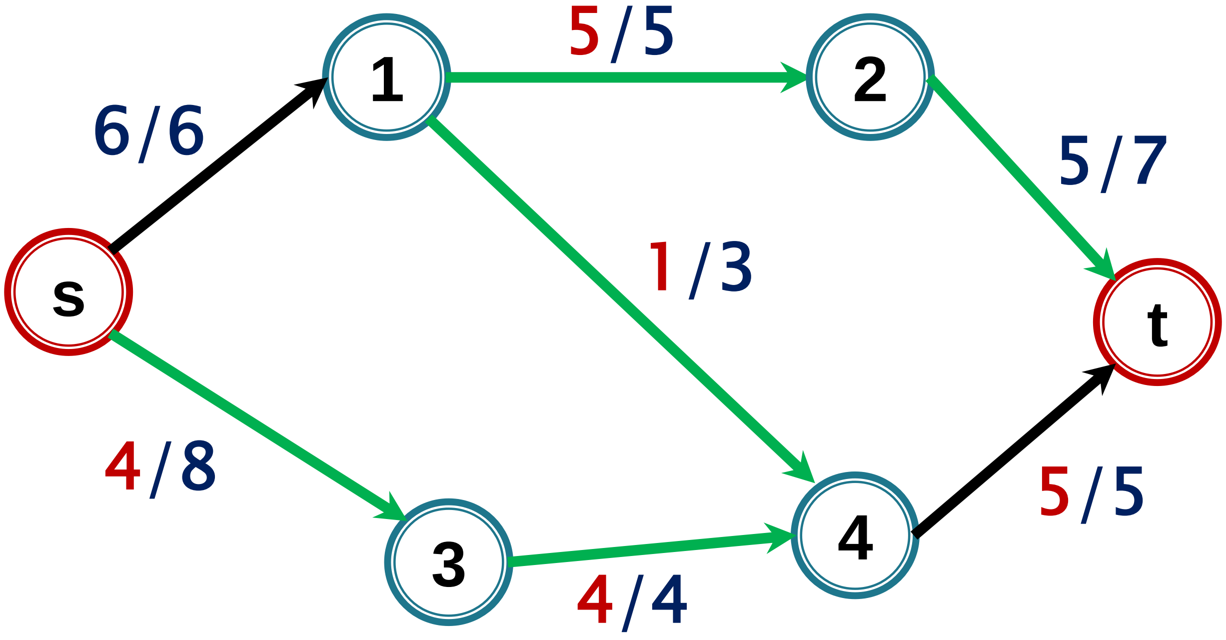


Considerăm s-t lanţul P evidenţiat

i(P) = 2




s
1
2
3
4
t
6/6
2+3/5
2+3/7
3−2/3
2+2/8
2+2/4
5/5



Fluxul după revizuirea de-a lungul lanţului P

Proprietăţi ale fluxului revizuit

Fie N = (G, {s}, {t}, I, c) o reţea și f flux în N.

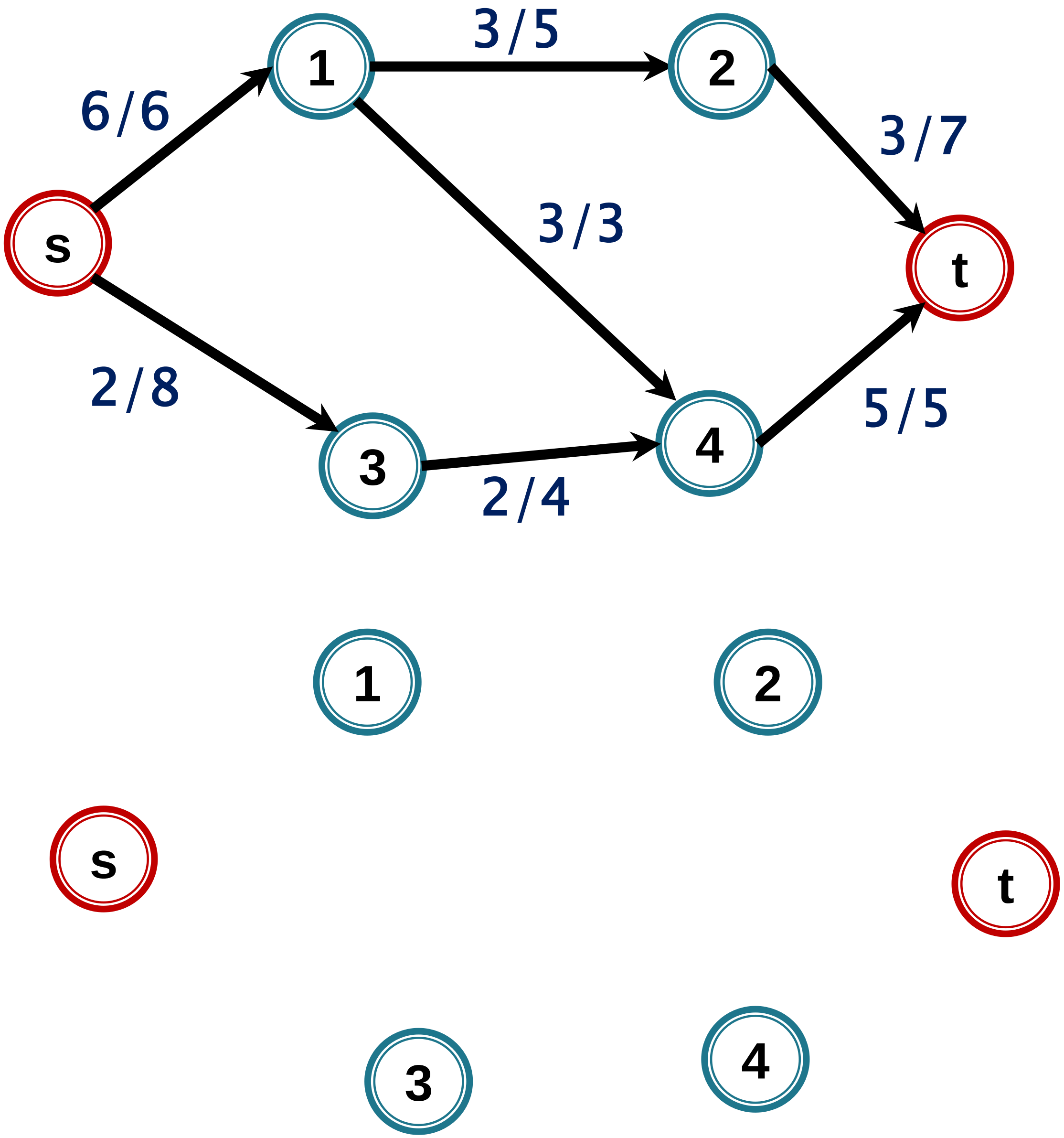
Fie P un s-t lanţ f-nesaturat în G și f_P fluxul revizuit de-a lungul lanţului P. Atunci

- f_P este flux în G

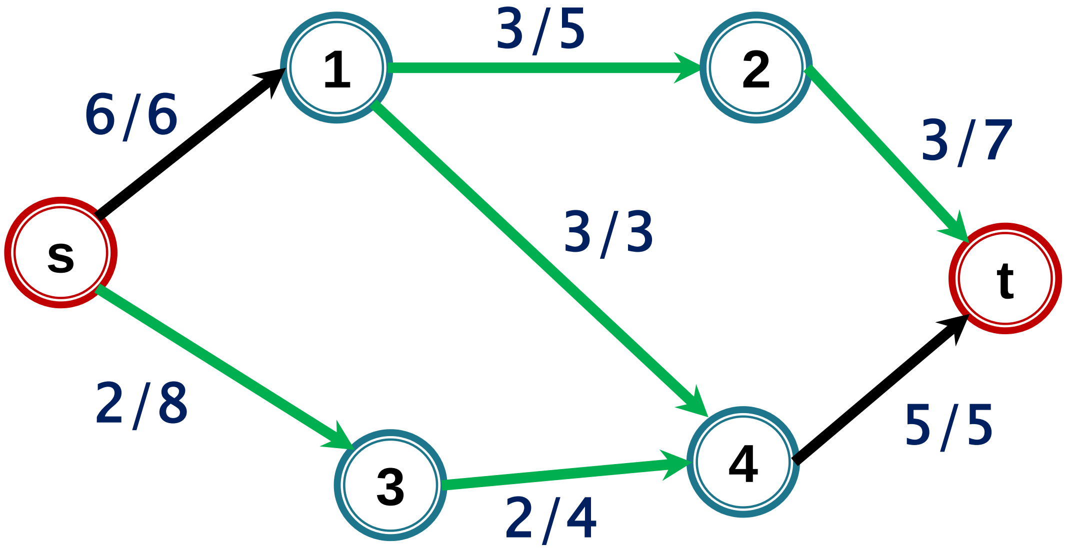
și

- $$val(f_P) = val(f) + i(P) \geq val(f) + 1$$

Graf rezidual

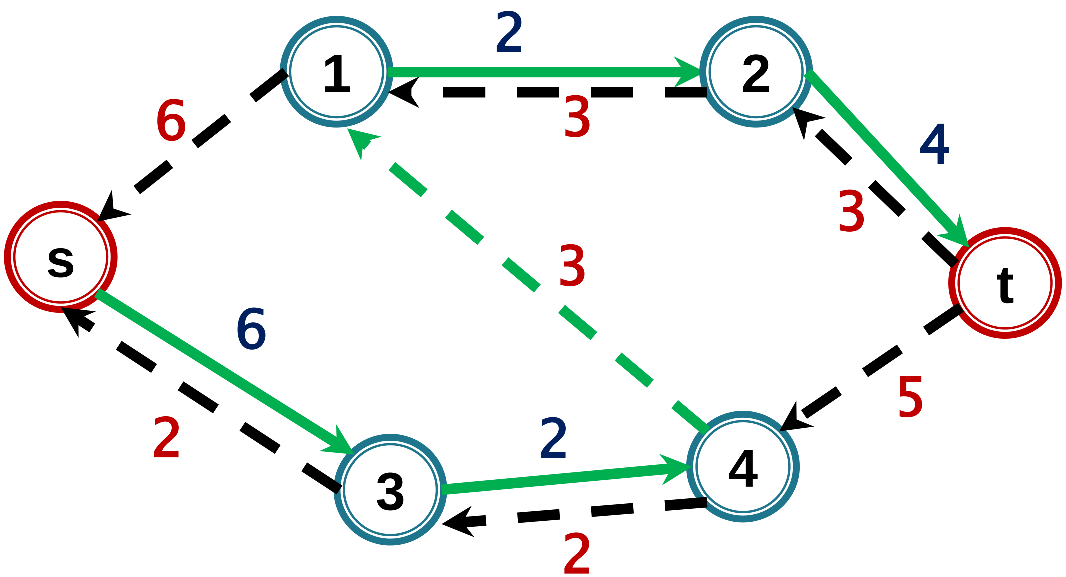


Graf rezidual

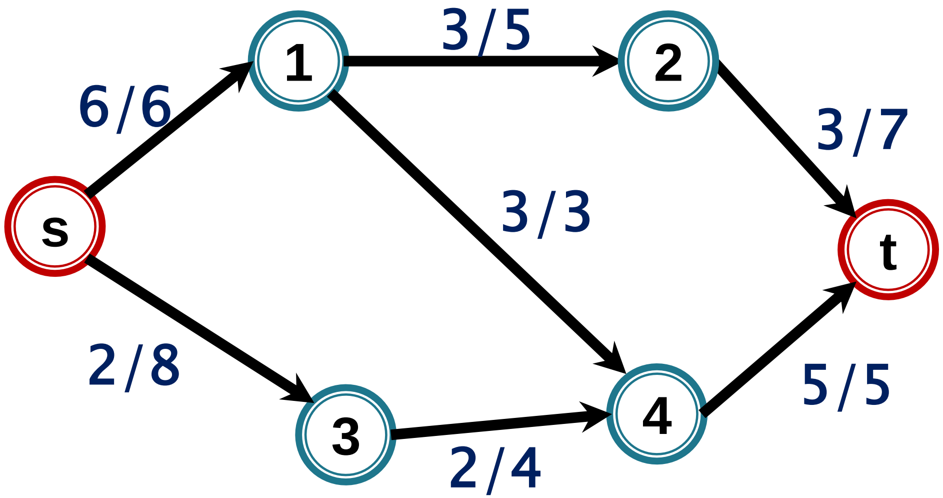


s–t lanț f–nesaturat

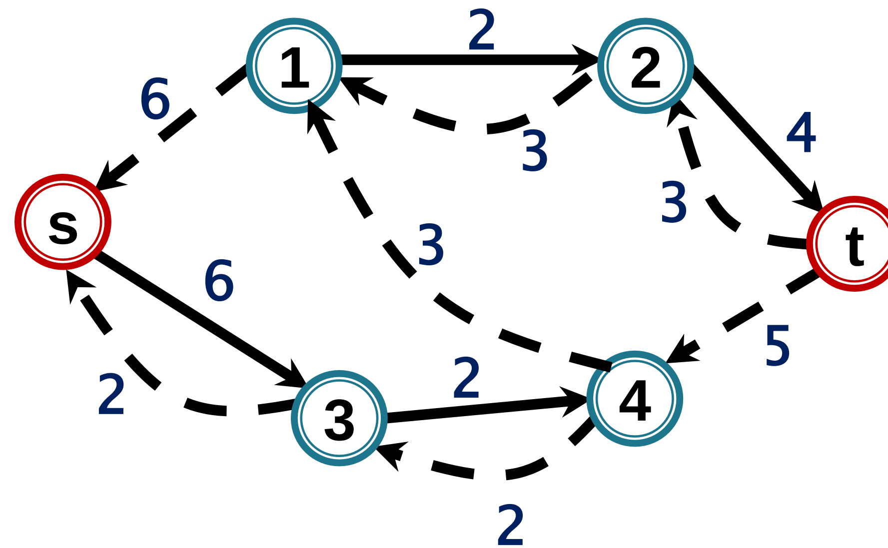
s–t drum în graful rezidual



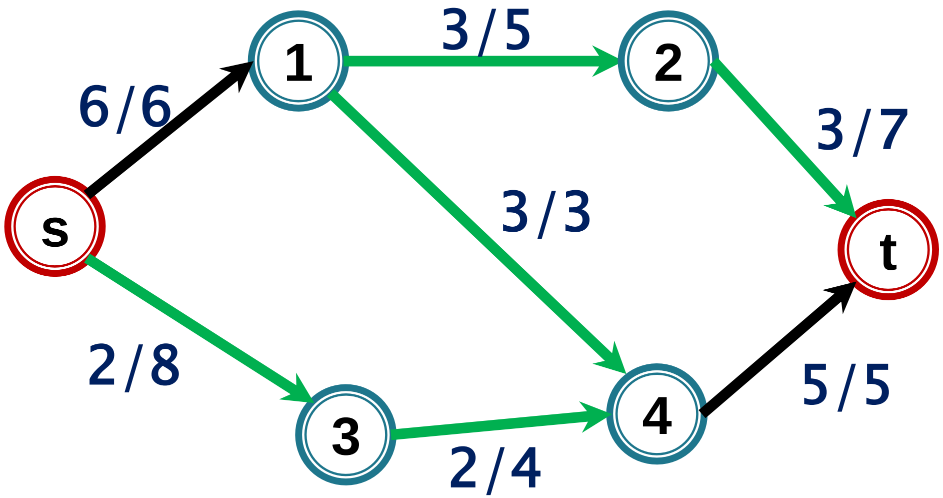
Rețeaua de transport



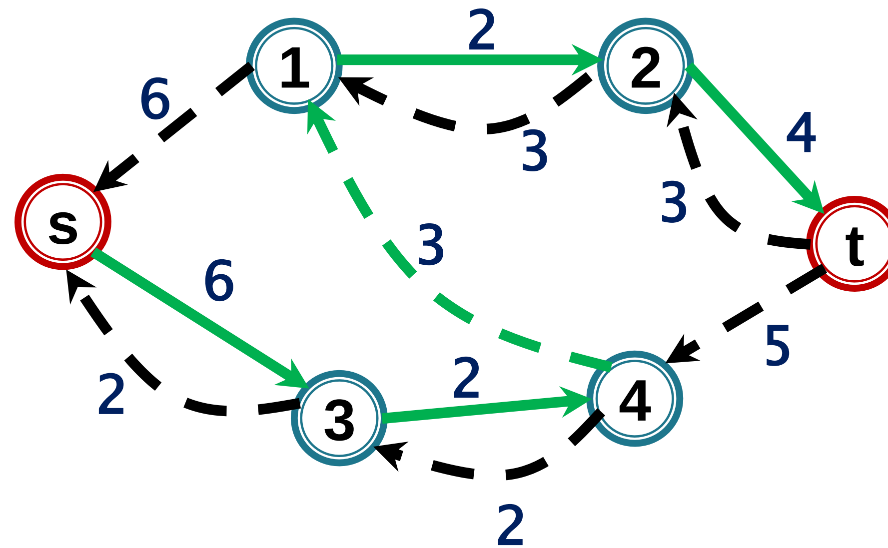
Graful rezidual

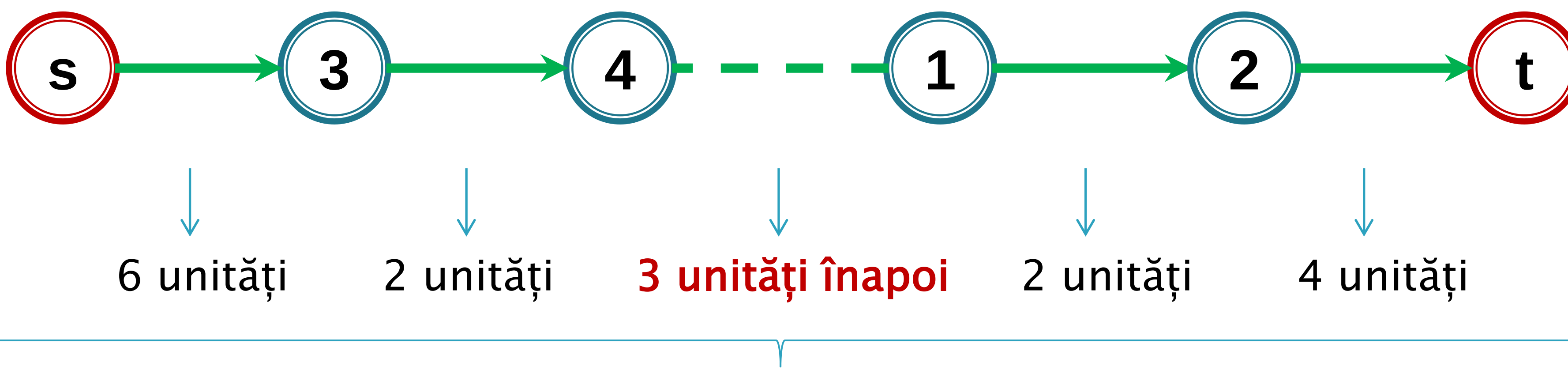


Rețeaua de transport



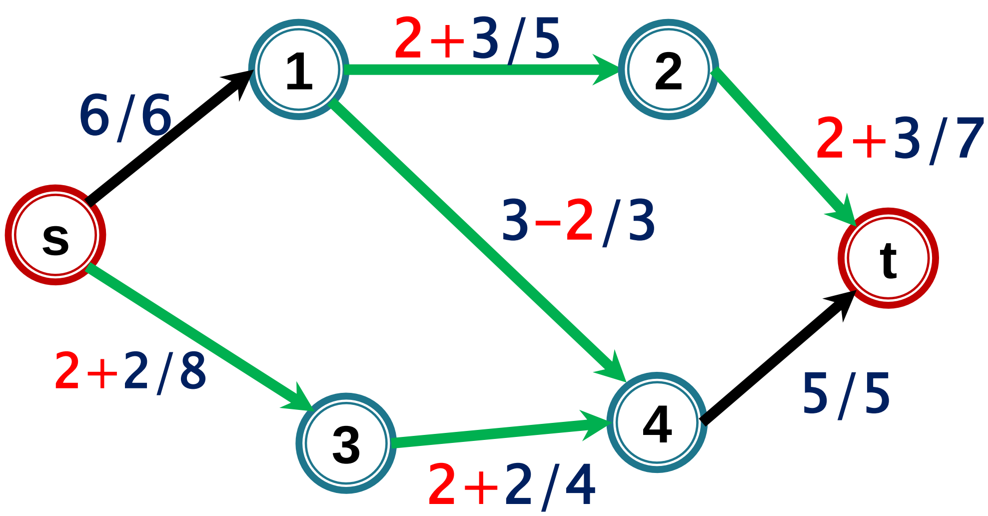
Graful rezidual



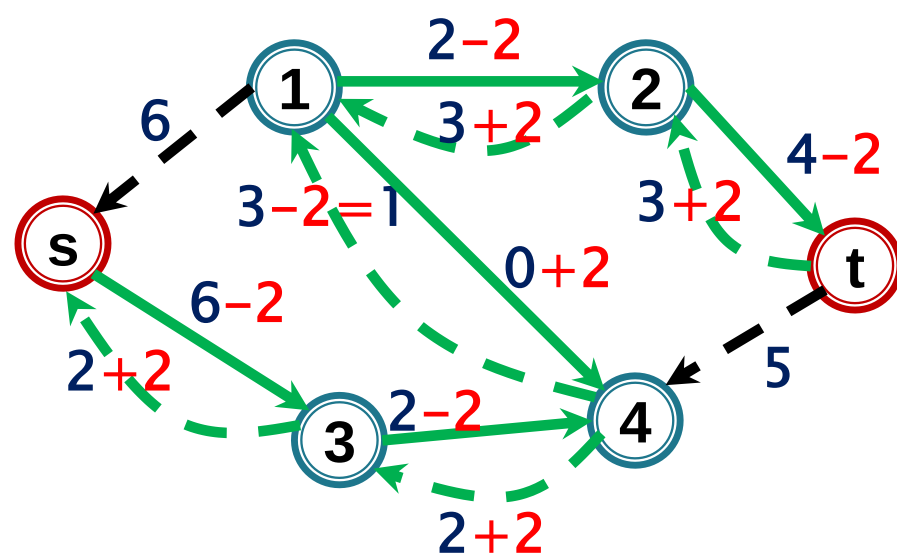


2 unităţi de-a lungul întregului drum

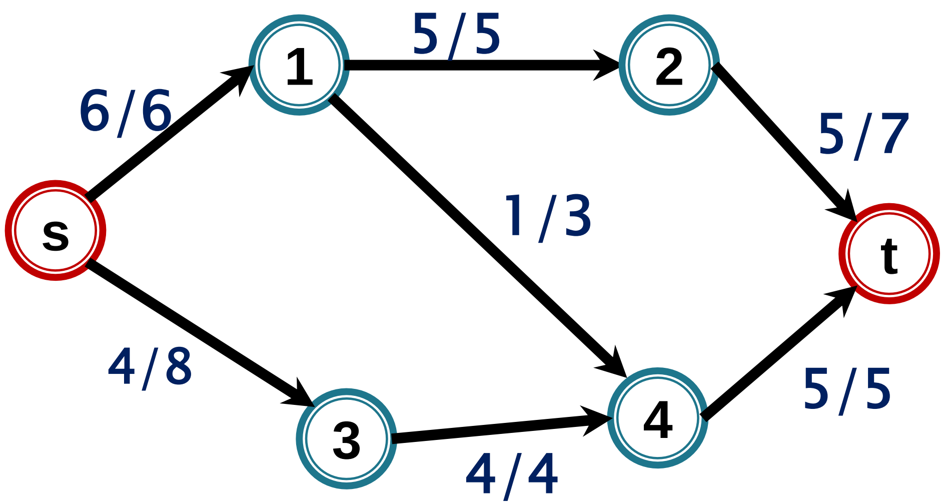
Rețeaua de transport



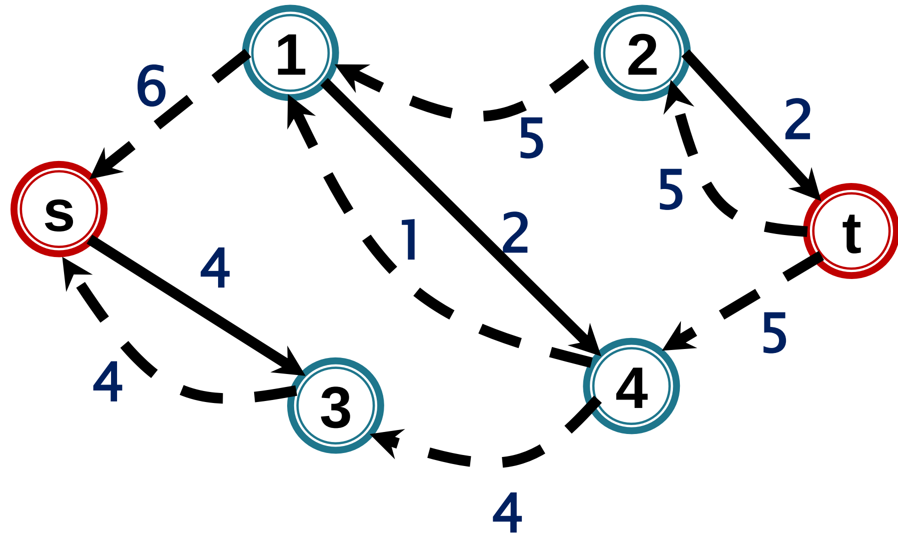
Graful rezidual



Rețeaua de transport

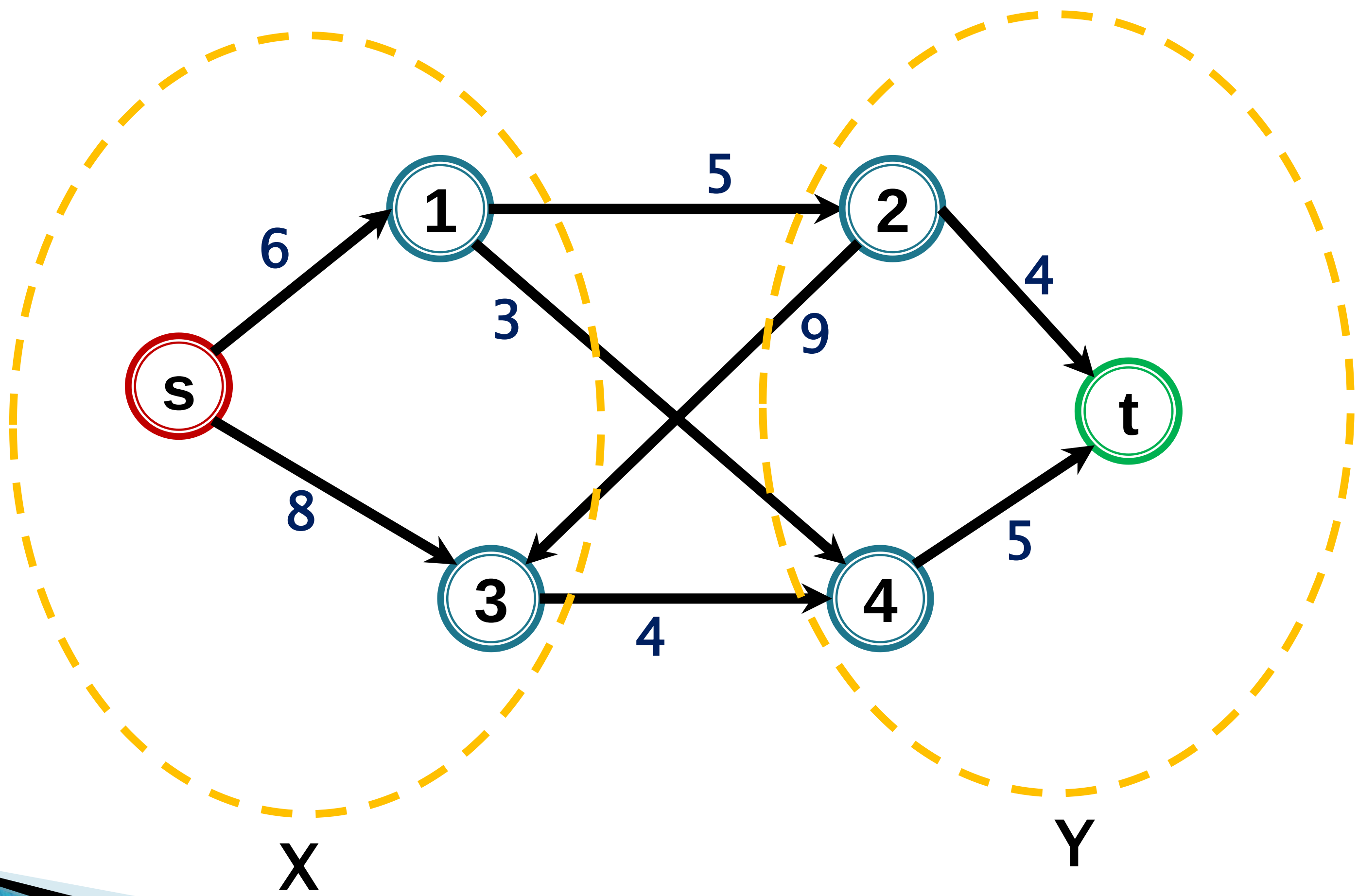


Graful rezidual



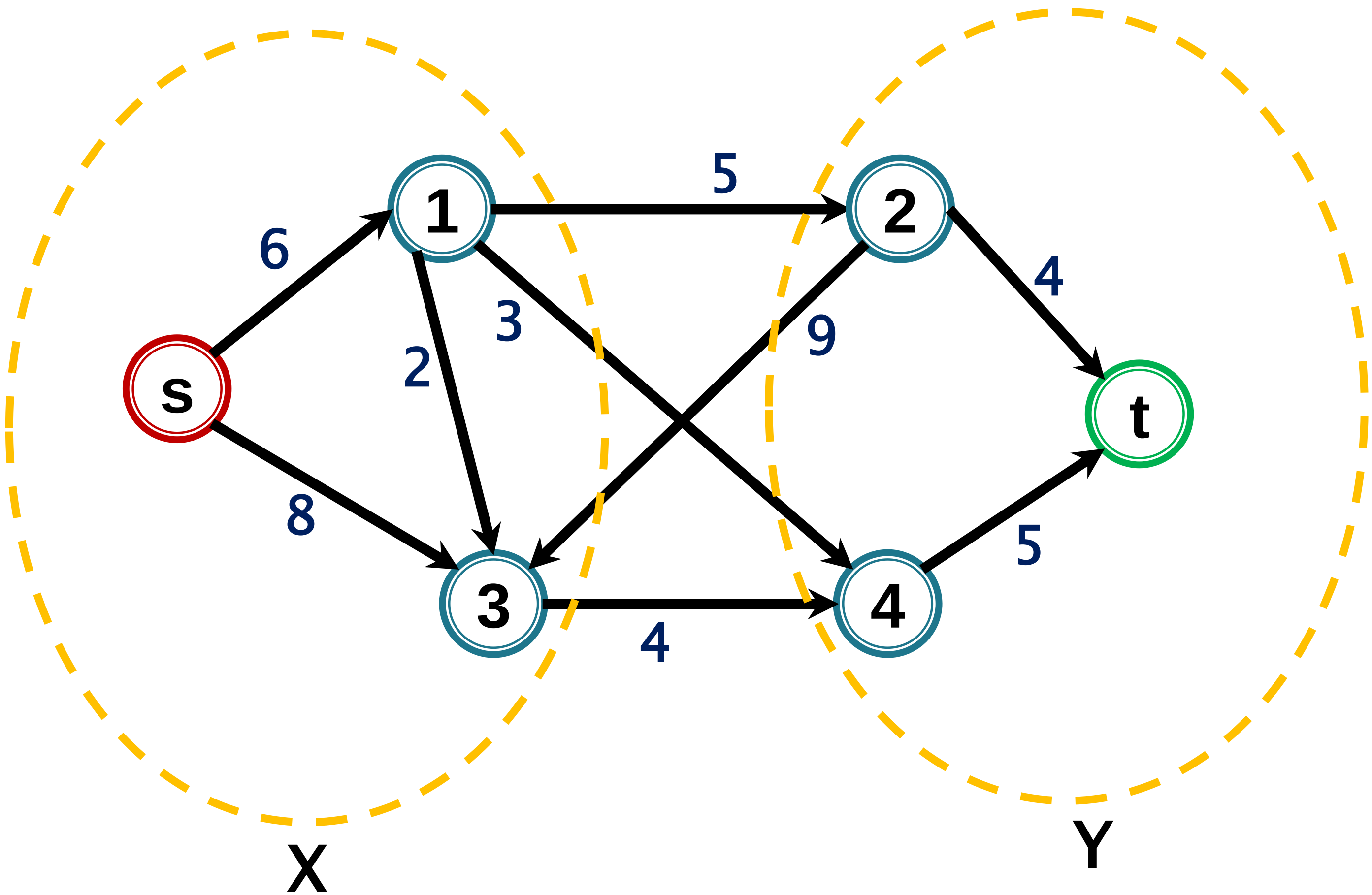
Fie N = (G, {s}, {t}, l, c) o reţea

- O **tăietură** K= (X, Y) în reţea



Fie K= (X, Y) o tăietură

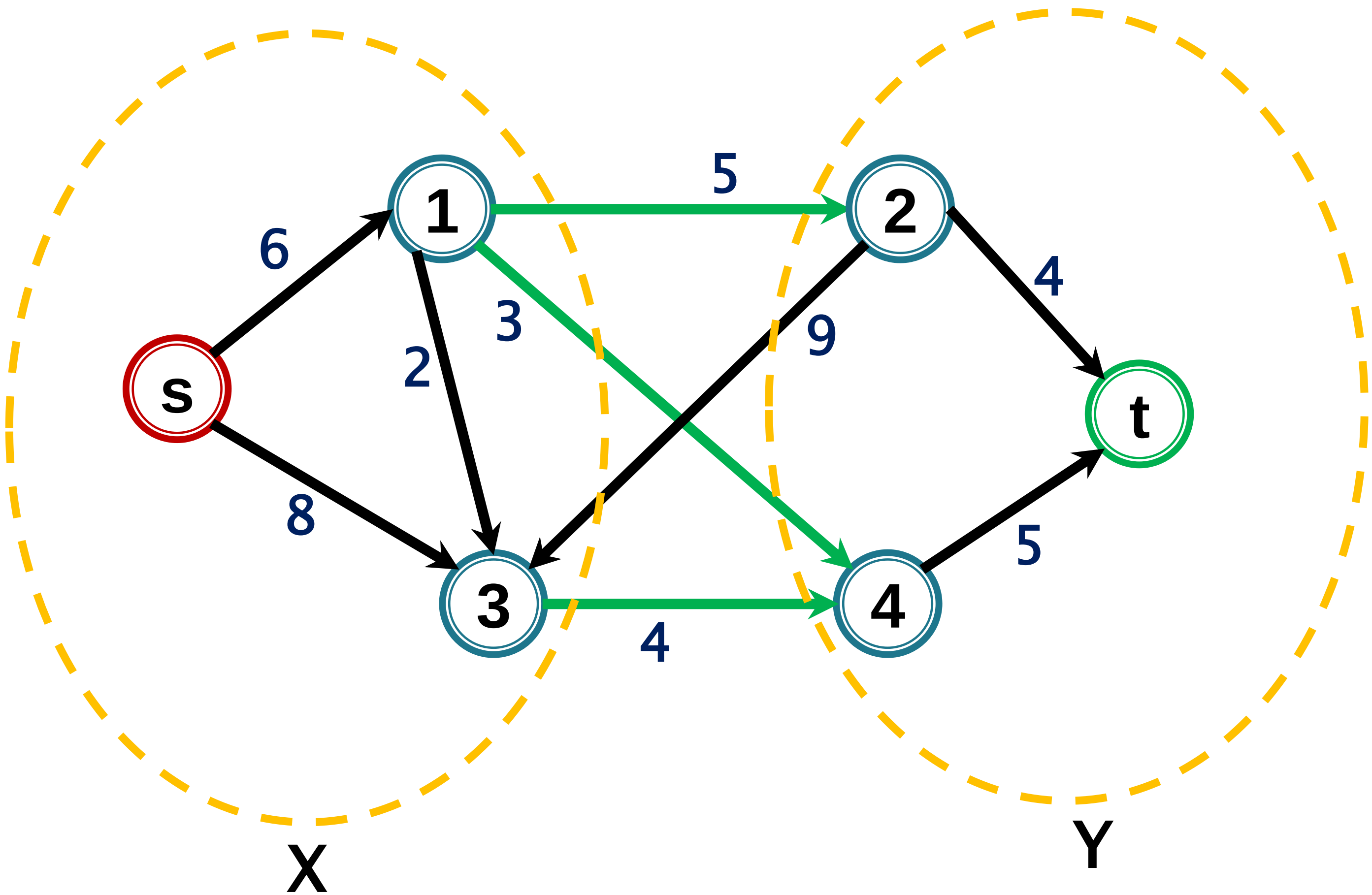
- **Capacitatea tăieturii** K = (X, Y)



$$c(K) = c(X, Y) = ?$$

Fie K= (X, Y) o tăietură

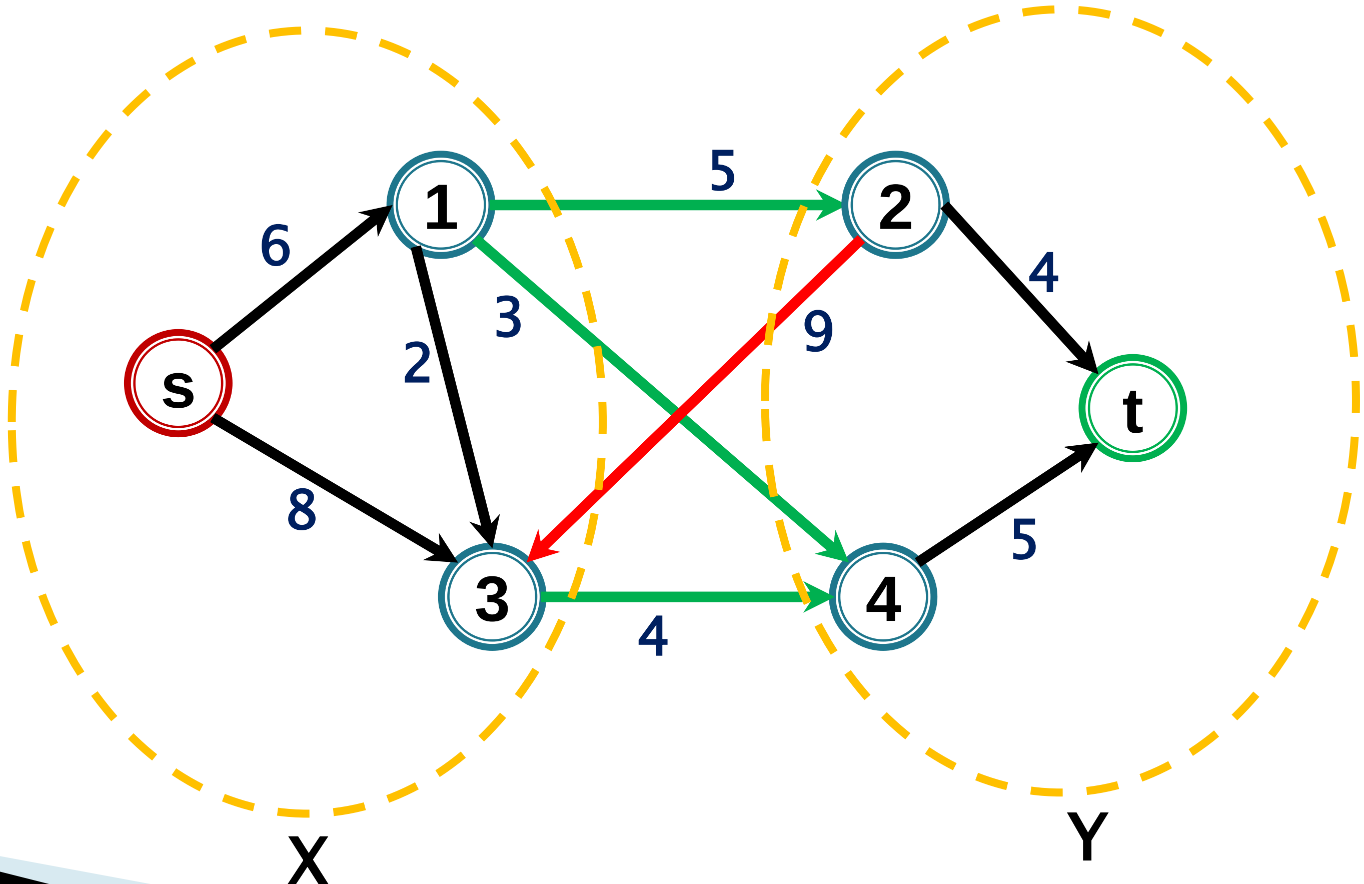
- **Capacitatea tăieturii** K = (X, Y)



$$c(K) = c(X, Y) = 5 + 3 + 4 = 12$$

Fie K= (X, Y) o tăietură

- $xy \in E$ cu $x \in X, y \in Y$ = **arc direct** al lui K
- $yx \in E$ cu $x \in X, y \in Y$ = **arc invers** al lui K



Tăietură minimă

- Fie N o reţea.

  O tăietură $\widetilde{K}$ se numeşte **tăietură minimă în N** dacă

$$c(\tilde{K}) = \min\{c(K) \mid K \text{ este tăietură în N}\}$$

Tăietură minimă

- Vom demonstra

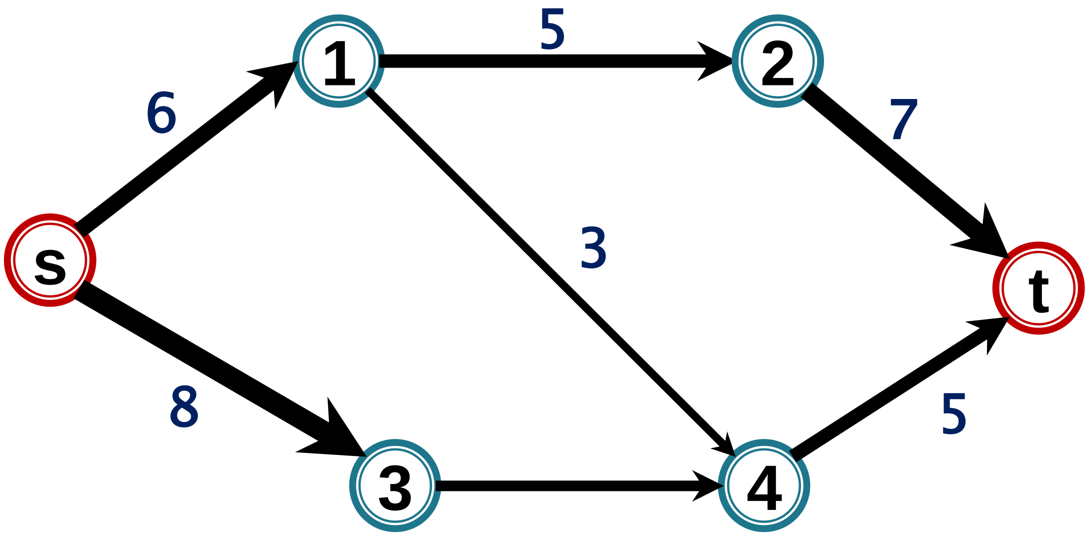
$$val(f) \leq c(K)$$

- Dacă avem egalitate $\Rightarrow$ f flux maxim, K tăietură minimă

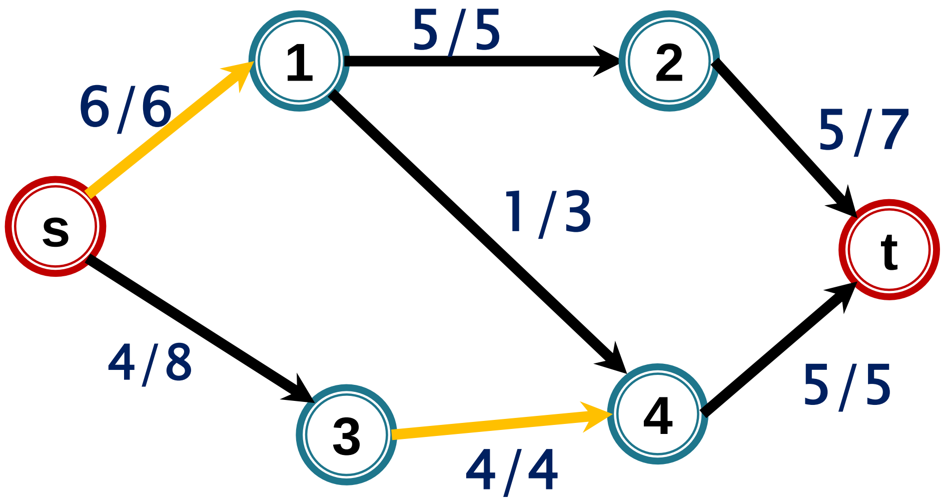
Tăietură minimă

- Determinarea unui flux maxim $\Rightarrow$ determinarea unei tăieturi minime
- **Aplicații**
  - Arce = poduri, capacitate = costul dărâmării podului.

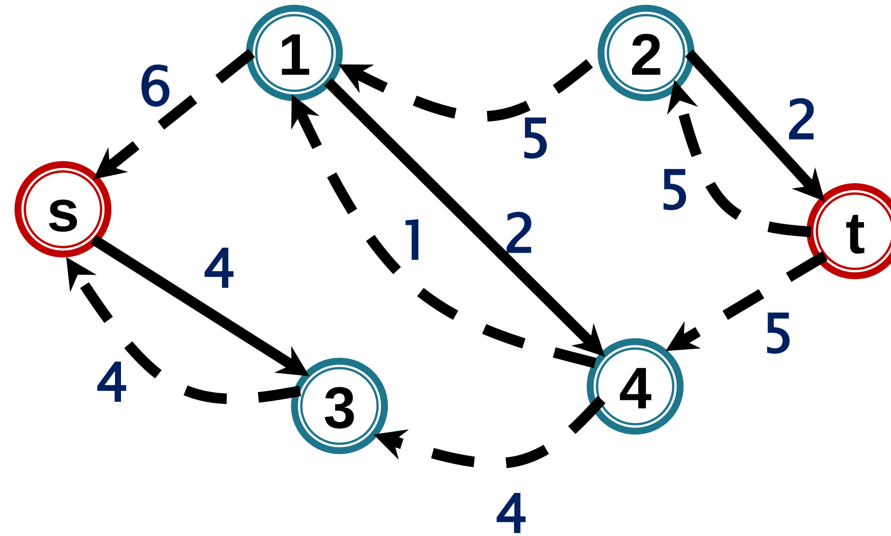
Ce poduri trebuie dărâmate a.î. teritoriul sursă să nu mai fie conectat cu destinația și costul distrugerilor să fie minim?



Rețeaua de transport



Graful rezidual



s-t tăietură saturată ⇔ nu mai există drum în graful rezidual

⇔ s-t flux maxim

Tăietură minimă

- Determinarea unui flux maxim $\Rightarrow$ determinarea unei tăieturi minime
- **Aplicații**
  - **Fiabilitatea rețelelor**
  - **Probleme de proiectare, planificare**
  - **Segmentarea imaginilor**

Algoritmul FORD-FULKERSON

Pseudocod

Algoritm generic de determinare a unui flux maxim – **algoritmul** FORD – FULKERSON

- Fie $f \equiv 0$ fluxul vid ($f(e) = 0, \forall\ e \in E$)
- Cât timp **există un s-t lanţ f-nesaturat P în G**
  - determină un astfel de lanţ P
  - revizuieşte fluxul f de-a lungul lanţului P
- returnează f

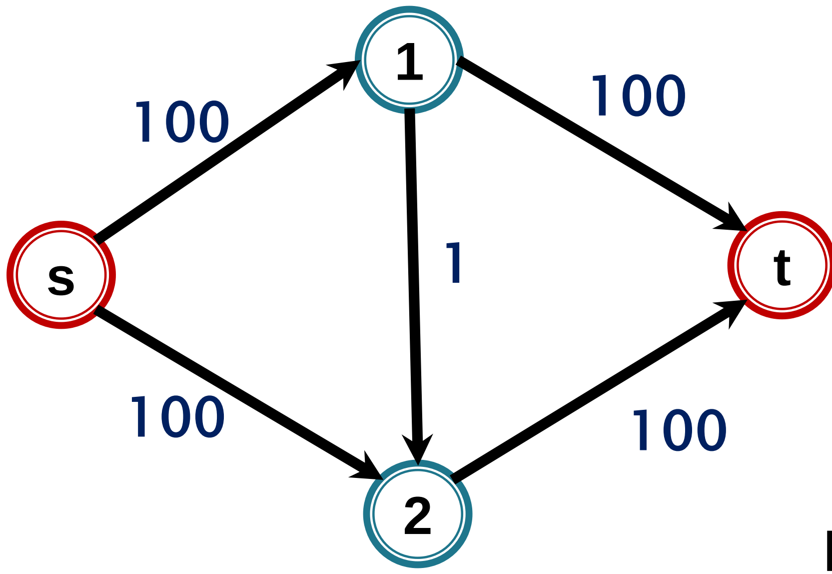
Algoritmul FORD-FULKERSON

Complexitate

Algoritmul Ford-Fulkerson

- Algoritmul se termină?
- De ce este necesară ipoteza că fluxul are valori întregi?
- Care este numărul maxim de etape?
  - Cum determinăm un lanţ f-nesaturat?
  - Criteriul după care construim lanţul f-nesaturat influenţează numărul de etape (iteraţii cât timp)?

Criteriul după care construim lanţul f-nesaturat influenţează numărul de etape



Pasul 1: [s, 1, 2, t] – i(P)=1
Pasul 2: [s, 2, 1, t] – i(P)=1
Pasul 3: [s, 1, 2, t] – i(P)=1
Pasul 4: [s, 2, 1, t] – i(P)=1
...

Algoritm FORD – FULKERSON

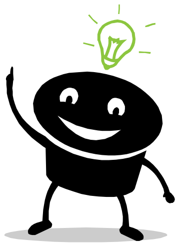
- Complexitate O(mL), unde

$$L = \sum_{su \in E} c(su)$$

Algoritmul Ford-Fulkerson

- Cum determinăm un lanţ f-nesaturat?

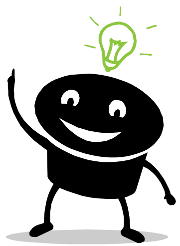
Algoritmul Ford-Fulkerson



Spre exemplu prin parcurgerea grafului pornind din vârful s şi considerând doar arce cu capacitatea reziduală pozitivă (în raport cu lanţurile construite prin parcurgere, memorate cu vectorul tata)

= **s-t drum în graful reziudal**

Algoritmul Ford-Fulkerson



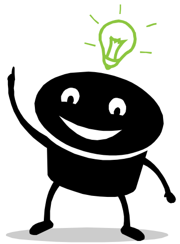
Spre exemplu prin parcurgerea grafului pornind din vârful s şi considerând doar arce cu capacitatea reziduală pozitivă (în raport cu lanţurile construite prin parcurgere, memorate cu vectorul tata)

- **Parcurgerea BF** $\Rightarrow$

  determinăm s-t lanțuri f-nesaturate de lungime minimă

$\Rightarrow$ **Algoritmul EDMONDS-KARP** = Ford-Fulkerson în care lanțul P ales la un pas are lungime minimă

Algoritmul Ford-Fulkerson



Spre exemplu prin parcurgerea grafului pornind din vârful s şi considerând doar arce cu capacitatea reziduală pozitivă (în raport cu lanţurile construite prin parcurgere, memorate cu vectorul tata)

- **Alte criterii de construcţie lanţ $\Rightarrow$ alţi algoritmi**

Algoritmul FORD-FULKERSON

Corectitudine

Algoritmul Ford-Fulkerson

- **Fluxul determinat de algoritm are valoare maximă, sau putem determina un flux de valoare mai mare prin alte metode?**

  - Trebuie să arătăm că

    $\nexists$ s-t lanţ f-nesaturat $\Rightarrow$ f flux maxim

Algoritmul Ford-Fulkerson

- Vom demonstra că
  - $val(f) \le c(K)$ pentru orice f flux, K tăietură
  - $\nexists$ s-t lanţ f-nesaturat $\Rightarrow$ $\exists$ K cu $val(f) = c(K)$ $\Rightarrow$

    $\Rightarrow$ f flux maxim