Curs #6

Minimizarea funcțiilor de două variabile. Metoda pasului descendent.

Fie $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ o funcție de două variabile

$$z = f(x,y), \ (x,y) \in D$$

Def. Se numește linie de nivel curba $z = c$, $c = const$

$$\mathcal{C}: f(x,y) = c$$

Exemplu 1 Fie $z = x^2 + y^2$ și $A(3,2)$

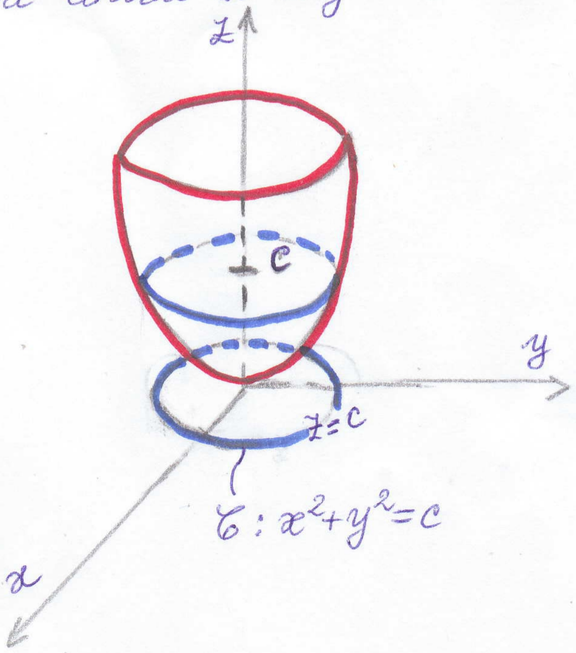
a) Să se afle curba de nivel care trece prin $A(3,2)$

b) Să se afle curbele de nivel $z=1$, $z=4$, $z=9$

a) $\mathcal{C}_A: x^2 + y^2 = c$, cu $A \in \mathcal{C}_A \Rightarrow 3^2 + 2^2 = c \Rightarrow c = 13$

Astfel $\mathcal{C}_A: x^2 + y^2 = \sqrt{13}^2$

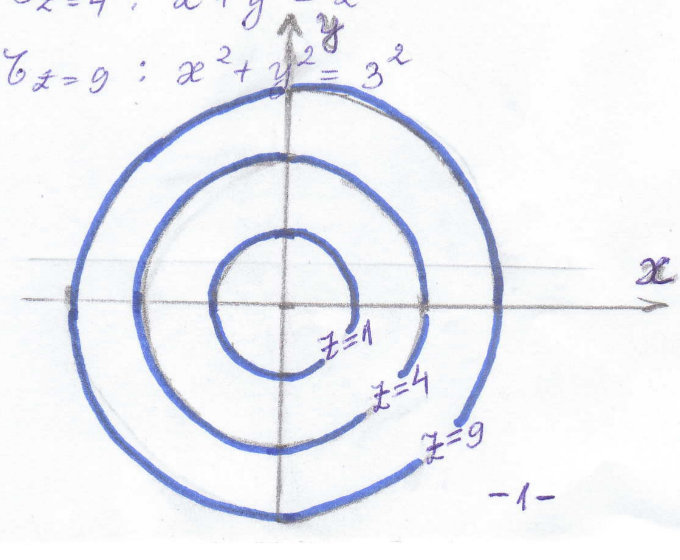
Obs. Curba $\mathcal{C}_A$ reprezintă un cerc centrat în origine și de rază $\sqrt{13}$



b) $\mathcal{C}_{z=1}: x^2 + y^2 = 1$

$\mathcal{C}_{z=4}: x^2 + y^2 = 2^2$

$\mathcal{C}_{z=9}: x^2 + y^2 = 3^2$



Obs. curba de nivel se obține la intersecția planului $z = c$ cu suprafața $z = f(x, y)$

Def. Definim $\nabla f(x,y)$ vectorul format din derivatele parțiale

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y),\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)^T$$

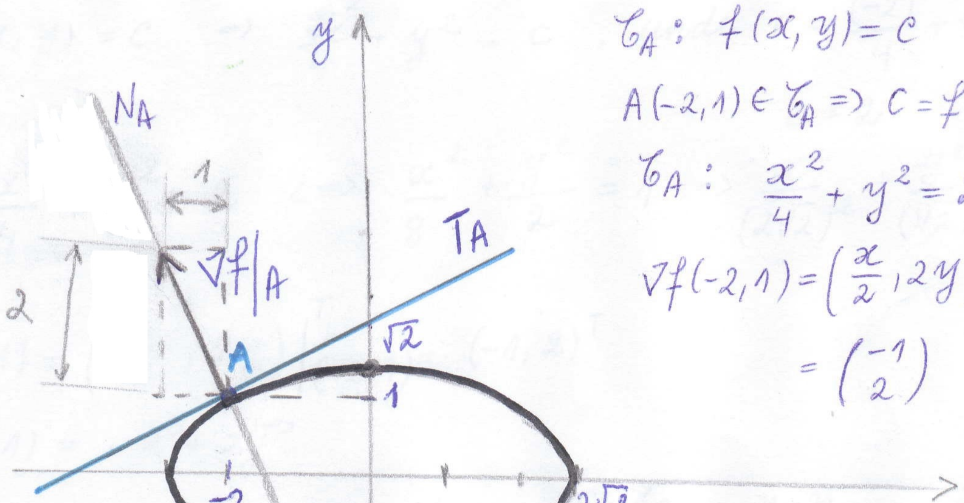
și îl numim gradientul funcției f în punctul (x,y)

Exemplu 2. Fie $f(x,y) = x^2 + y^2$, să se afle $\nabla f(3,2)$

$\nabla f(x,y) = (2x, 2y)^T$

$\nabla f(3,2) = (6, 4)^T$

Exemplu 3. Fie $f(x,y) = \frac{x^2}{4} + y^2$ și $\mathcal{C}_A$ curba de nivel a funcție f care trece prin punctul $A(-2,1)$. Să se calculeze $\nabla f(-2,1)$, ecuația tangentei la curbă în punctul A și ecuația normalei la curbă în A.



$\mathcal{C}_A : f(x,y) = c$

$A(-2,1) \in \mathcal{C}_A \Rightarrow c = f(-2,1)$

$\mathcal{C}_A : \frac{x^2}{4} + y^2 = 2$

$\nabla f(-2,1) = \left(\frac{x}{2}, 2y\right)^T\Big|_{(-2,1)} = \begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$

$\mathcal{C} : \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$

$\mathcal{C} : \frac{x^2}{(2\sqrt{2})^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{2})^2} = 1$

$N_A : \frac{x - x_0}{n_1} = \frac{y - y_0}{n_2}$, $\vec{n} = \nabla f|_A$

$N_A : \frac{x+2}{-1} = \frac{y-1}{2} \Rightarrow \boxed{N_A : y - 1 = -2\cdot(x+2)}$

Întrucât $\nabla f|_A \perp T_A \Rightarrow T_A : n_1\cdot(x-x_0)+n_2\cdot(y-y_0)=0$, cu $\vec{n}=\nabla f|_A$,

deci $T_A : -1\cdot(x+2)+2\cdot(y-1)=0$ sau $T_A : y=\frac{1}{2}x+2$

Obs. Vectorul $\nabla f|_A$ este normal la curba de nivel care trece prin punctul A.

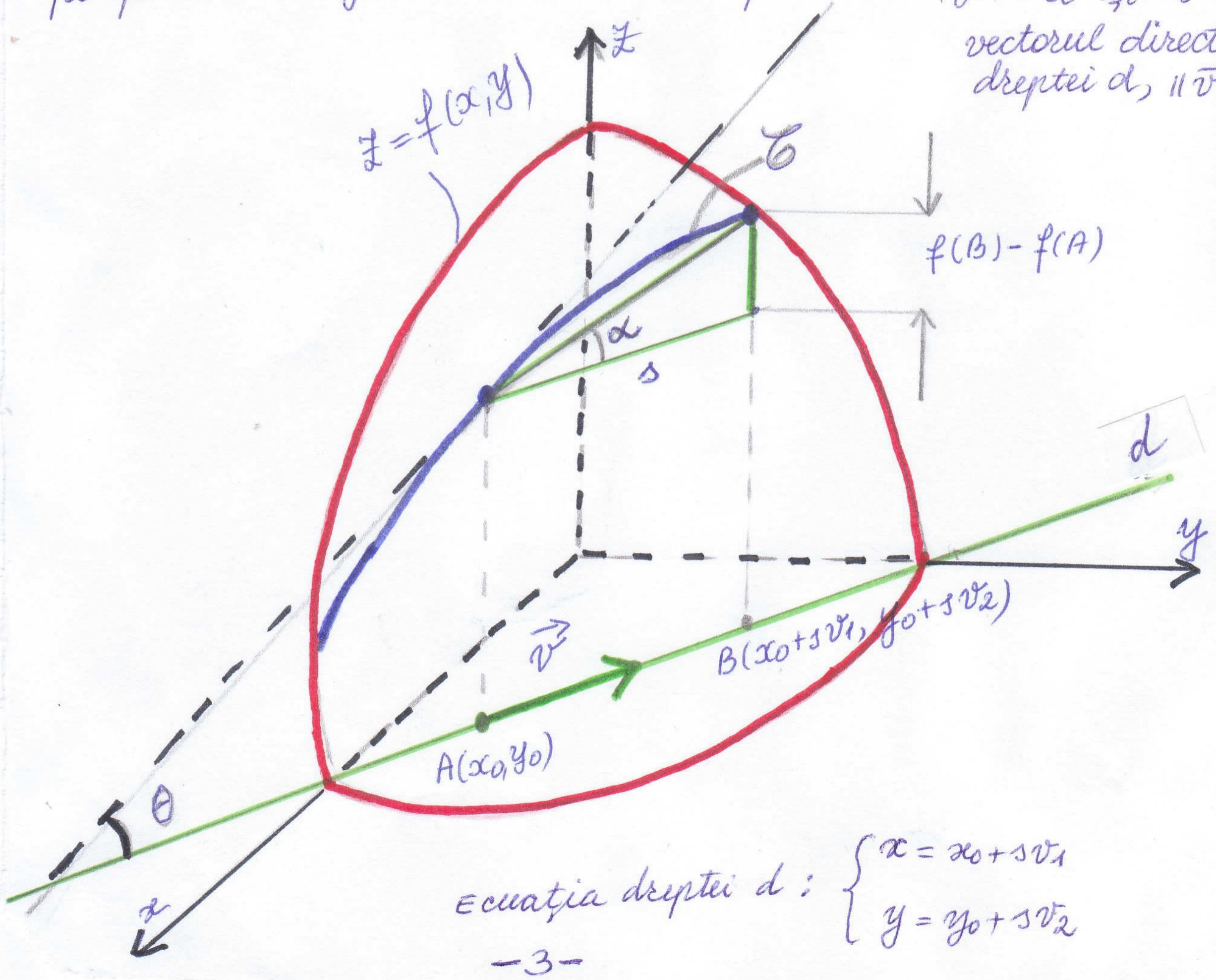
Def. (Derivata după o direcție)

Fie $\vec{v}=v_1\vec{i}+v_2\vec{j}$, $\|\vec{v}\|=1$. Numărul $D_{\vec{v}}f|_A$ definit prin

$$\boxed{D_{\vec{v}}f\Big|_A := \lim_{s\to 0}\frac{f(x_0+sv_1,y_0+sv_2)-f(x_0,y_0)}{s}}, \quad A(x_0,y_0)$$

s.n. derivata după o direcție în punctul A.

Fie o curbă $\mathcal{C}$ de pe suprafața funcției f și dreapta d proiecția acesteia pe planul xOy. Considerăm un punct $A(x_0,y_0)\in d$ și $\vec{v}$ vectorul director al dreptei d, $\|\vec{v}\|=1$.



Ecuația dreptei d : $\begin{cases} x = x_0+sv_1 \\ y = y_0+sv_2 \end{cases}$

$$tg\alpha = \frac{f(B) - f(A)}{d(A,B)}$$

$$d(A,B) = \sqrt{(x_0 + sv_1 - x_0)^2 + (y_0 + sv_2 - y_0)^2} = s\sqrt{v_1^2 + v_2^2} = s \cdot \underbrace{\|\vec{v}\|}_{=1} = s$$

Prin urmare: $$tg\alpha = \frac{f(x_0 + sv_1, y_0 + sv_2) - f(x_0, y_0)}{s}$$

Trecând la limită după $s \to 0$ se obține

$$\boxed{tg\theta = \lim_{s \to 0} \frac{f(x_0 + sv_1, y_0 + sv_2) - f(x_0, y_0)}{s}}$$

deci $tg\theta = D_v f|_A$

cu alte cuvinte, $D_v f|_A$ reprezintă panta tangentei la curba dată parametric $\mathcal{C}: \begin{cases} x = x_0 + sv_1 \\ y = y_0 + sv_2 \\ z = f(x_0 + sv_1, y_0 + sv_2) \end{cases}$

Prop. Derivata după o direcție se calculează conform formulei

$$\boxed{D_v f = \nabla f \cdot \vec{v}}$$

Exemplu 4 Să se afle $D_v f|_{(3,2)}$ pentru $f(x,y) = x^2 + y^2$, $\vec{v} = -\vec{i} + \vec{j}$

$$D_v f|_{(3,2)} = \nabla f|_{(3,2)} \cdot \vec{v} = (2x, 2y)^T|_{(3,2)} \cdot (-1, 1)^T =$$
$$= \left\langle \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = -6 + 4 = -2$$

se pune următoarea problemă: Să se afle direcția după care derivata $D_v f$ să fie maximă (minimă)

$$D_v f = \nabla f \cdot \vec{v} = \|\nabla f\| \cdot \overbrace{\|\vec{v}\|}^{=1} \cdot \cos \measuredangle(\nabla f, \vec{v}) =$$
$$= \|\nabla f\| \cdot \cos \measuredangle(\nabla f, \vec{v})$$

Aleg $\vec{v}$ a.î. $D_{\vec{v}}f$ să fie maximă (resp. minimă).

Maximul (sau minimul) se atinge dacă $\cos \sphericalangle(\nabla f, \vec{v}) = \pm 1$

- $D_v f$ maximă $\Leftrightarrow m(\sphericalangle(\nabla f, \vec{v})) = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}$ $(\vec{v} \parallel \nabla f)$
- $D_v f$ minimă $\Leftrightarrow m(\sphericalangle(\nabla f, \vec{v})) = \pi \Leftrightarrow \vec{v} = -\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}$

În acest caz $D_v f = \pm \|\nabla f\|$

Exemplu 5 Fie $f(x,y) = x^2 + y^2$, $A(3,2)$. Să se afle direcția $\vec{v}$ după care $D_v f|_A$ este maximă sau minimă

$\nabla f = (2x, 2y)^T$

$\nabla f|_{(3,2)} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$\vec{v} = \frac{\nabla f|_{(3,2)}}{\|\nabla f|_{(3,2)}\|} = \frac{(6,4)^T}{\|(6,4)^T\|} = \frac{(6,4)^T}{\sqrt{36+16}} = \frac{1}{\sqrt{52}} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{13}} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$D_v f\Big|_A = \|\nabla f|_{(3,2)}\| = \sqrt{36+16} = 2\sqrt{13}$ (maximă)

$\vec{v} = -\frac{1}{\sqrt{13}} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$D_v f|_A = -\|\nabla f|_{(3,2)}\| = -2\sqrt{13}$.

Obs. Orice altă direcție s-ar alege, derivata după acea direcție nu va depăși valoarea maximă $2\sqrt{13}$.

Obs. Spunem că funcția $z = f(x,y)$ se schimbă cel mai rapid pe direcția gradientului.

Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ simetrică și pozitiv definită și $b \in \mathbb{R}^2$

Fie forma pătratică

$$f(x,y) = \frac{1}{2} < A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} > - < \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} >$$

Funcția f scrisă desfășurat are forma

$$f(x,y) = \frac{1}{2}a_{11}x^2 + a_{12}\cdot x\cdot y + \frac{1}{2}a_{22}y^2 - b_1 x - b_2\cdot y$$

Întrucât A este simetrică și poz. definită, funcția admite un punct de minim. Fie acesta (x^*, y^*). Punctul (x^*, y^*) este punct critic pentru f, i.e. $\frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*) = 0$ sau $\nabla f\big|_{(x^*, y^*)} = 0$. Aflăm în continuare derivatele parțiale:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = a_{11}\cdot x + a_{12}y - b_1 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = a_{12}x + a_{22}\cdot y - b_2 \end{cases}$$

deci $\begin{cases} a_{11}x^* + a_{12}y^* - b_1 = 0 \\ a_{12}x^* + a_{22}y^* - b_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}x^* + a_{12}y^* = b_1 \\ a_{21}x^* + a_{22}y^* = b_2 \end{cases} \Leftrightarrow A\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = b$

Se observă că punctul de minim este soluție pentru sistemul $A\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = b$.

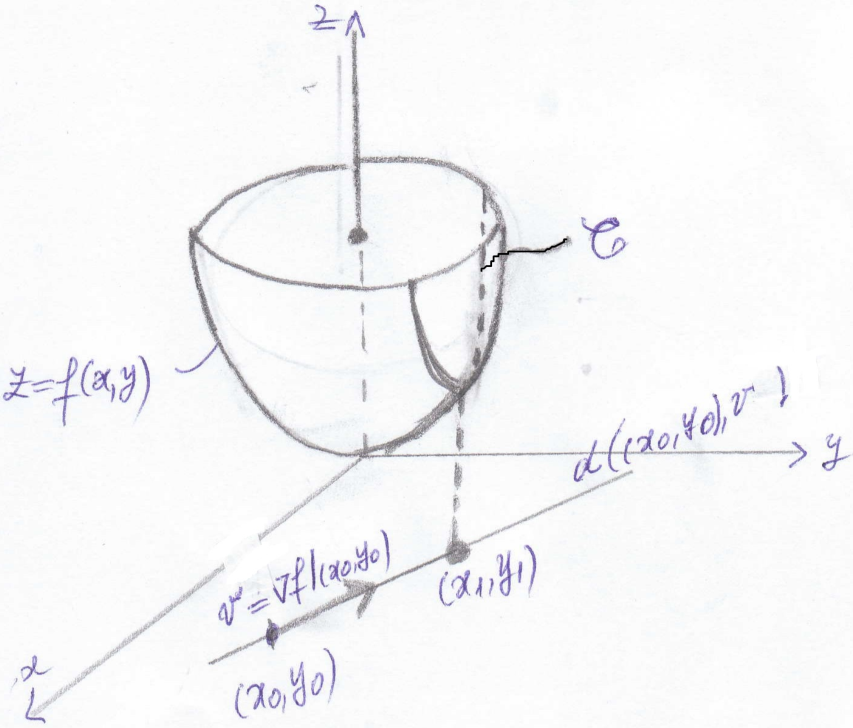
Metoda pasului descendent

Metoda pasului descendent presupune construirea unui șir (x_k, y_k), $k = 0, 1, \ldots$ care să tindă la punctul de minim (x^*, y^*). La fiecare iterație pentru calculul noului punct ne vom deplasa pe direcția gradientului, în raport cu care funcția f descrește cel mai rapid.

Fie (x_0, y_0) un punct de pornire. Noul punct (x_1, y_1) se alege de pe dreapta d, care trece prin (x_0, y_0) și are drept vector director vectorul $-\nabla f\big|_{(x_0, y_0)}$

$$d: \begin{cases} x = x_0 - \alpha v_1 \\ y = y_0 - \alpha v_2 \end{cases}, \text{ unde } \vec{v} = \nabla f\big|_{(x_0, y_0)}$$

Fie curba $\mathcal{C}$: $\begin{cases} x = x_0 - \alpha v_1 \\ y = y_0 - \alpha v_2 \\ z = f(x_0 - \alpha v_1, y_0 - \alpha v_2) \end{cases}$



Se caută pe dreapta d punctul (x_1, y_1) corespunzător valorii minime a lui z pe curba $\mathcal{C}$. Valoarea lui α se obține minimizând funcția $g(\alpha) = f(x_0 - \alpha v_1, y_0 - \alpha v_2)$

Fie acest punct notat cu α_0. Se rezolvă ecuația $g'(\alpha) = 0$

$$g(\alpha) = f(x_0 - \alpha v_1, y_0 - \alpha v_2) = \frac{1}{2} \left\langle A \cdot \begin{pmatrix} x_0 - \alpha v_1 \\ y_0 - \alpha v_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_0 - \alpha v_1 \\ y_0 - \alpha v_2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$- \left\langle \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_0 - \alpha v_1 \\ y_0 - \alpha v_2 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{1}{2} \langle A(x_0 - \alpha v), (x_0 - \alpha v) \rangle$$

$$- \langle b, (x_0 - \alpha v) \rangle, \text{ unde } x = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

Pentru derivarea produsului scalar vom folosi urm. formulă: $\frac{d}{dt}(\langle a(t), b(t) \rangle) = \langle \frac{d}{dt} a(t), b(t) \rangle + \langle a(t), \frac{d}{dt} b(t) \rangle$

Mai mult, sunt utile și formulele:

- $\langle A(a+b), c\rangle = \langle Aa, c\rangle + \langle Ab, c\rangle$, $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$
$a, b, c \in \mathbb{R}^2$

- $\langle Aa, b\rangle = \langle a, A^T b\rangle \overset{A\text{-sim}}{=} \langle a, Ab\rangle$

- $\langle a, b\rangle = \langle b, a\rangle$ • $\langle \alpha a, b\rangle = \alpha\langle a, b\rangle$

$$g'(\alpha) = \frac{d}{d\alpha}\cdot\left(\frac{1}{2}\langle A(x_0-\alpha v), (x_0-\alpha v)\rangle - \langle b, (x_0-\alpha v)\rangle\right)$$

$$= \frac{1}{2}\langle \frac{d}{d\alpha}(A(x_0-\alpha v)), (x_0-\alpha v)\rangle + \frac{1}{2}\langle A(x_0-\alpha v), \frac{d}{d\alpha}(x_0-\alpha v)\rangle$$

$$- \langle b, \frac{d}{d\alpha}(x_0-\alpha v)\rangle =$$

$$= \frac{1}{2}\langle -Av, x_0-\alpha v\rangle + \frac{1}{2}\langle A(x_0-\alpha v), -v\rangle - \langle b, -v\rangle$$

$$= -\frac{1}{2}\langle v, A(x_0-\alpha v)\rangle - \frac{1}{2}\langle v, A(x_0-\alpha v)\rangle + \langle b, v\rangle$$

$$= -\langle A(x_0-\alpha v), v\rangle + \langle b, v\rangle$$

$$= -\langle Ax_0, v\rangle + \alpha\langle Av, v\rangle + \langle b, v\rangle$$

$$g'(\alpha) = 0 \iff -\langle Ax_0, v\rangle + \alpha\langle Av, v\rangle + \langle b, v\rangle = 0$$

$$\iff \alpha_0 = \frac{\langle Ax_0 - b, v\rangle}{\langle Av, v\rangle}$$

De unde rezultă coordonatele noului punct și anume:

$$\begin{cases} x_1 = x_0 - \alpha_0 v_1 \\ y_1 = y_0 - \alpha_0 v_2 \end{cases}$$

Se obține următoarea schemă numerică:

$$\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R}^2 - \text{ales de regulă în vecinătatea punctului de minim} \\ k \geq 0 \quad v = \nabla f|_{x_k} \\ \alpha_k = \dfrac{\langle v, Ax_k - b\rangle}{\langle v, Av\rangle} \\ x_{k+1} = x_k - \alpha_k v \end{cases}$$

Obs. $x_{k+1} = x_k - \alpha_k v \iff$

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k - \alpha_k v_1 \\ y_{k+1} = y_k - \alpha_k v_2 \end{cases}$$

Algoritmul se oprește în momentul în care $\|\nabla f|_{x_k}\| < \varepsilon$

Obs. Se poate demonstra iterativ că $\langle \nabla f|_{x_k}, \nabla f|_{x_{k-1}} \rangle = 0$

cu alte cuvinte, la fiecare iterație nouă direcție a gradientului este perpendiculară pe direcția de la iterația anterioară. Putem spune că fiecare iterație produce o deplasare în zig-zag până se ajunge suficient de aproape de punctul de minim.