

密训资料

SUNLANDS
2021

管理类联考数学



目 录

| | |
|----------------------|----|
| 第 1 章 实数的运算和性质..... | 1 |
| 第 2 章 整式与分式的运算..... | 4 |
| 第 3 章 方程、函数与不等式..... | 5 |
| 第 4 章 应用题..... | 9 |
| 第 5 章 数列..... | 12 |
| 第 6 章 几何部分..... | 13 |
| 第 7 章 数据分析..... | 17 |



| | |
|--|---|
| | 原理: $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}, \quad \frac{1}{n(n+k)} = \frac{1}{k} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+k} \right)$ |
|--|---|

1.3 比、比例

| 知识点名称 | 内容 |
|-----------------|--|
| 比、比例的定义 ★ | $a:b = \frac{a}{b} = k$ <p>(1) 比: 增长率 $p\%$ $\xrightarrow{\text{原值}a}$ 现值 $a(1+p\%)$ 下降率 $p\%$ $\xrightarrow{\text{原值}a}$ 现值 $a(1-p\%)$ 甲比乙大 $p\% \Leftrightarrow \frac{\text{甲}-\text{乙}}{\text{乙}} = p\%$ 甲是乙的 $p\% \Leftrightarrow \text{甲} = \text{乙} \cdot p\%$</p> $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ <p>(2) 比例: $a:b = c:d$ 或 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$</p> |
| 比与比例的性质 ★★★★ | <p>(1) 比的基本性质 ① $a:b = k \Leftrightarrow a = kb$ ② $a:b = ma:mb \quad (m \neq 0)$</p> <p>(2) 比例的基本性质 ① $a:b = c:d \Leftrightarrow ad = bc$ ② $a:b = c:d \Leftrightarrow b:a = d:c \Leftrightarrow b:d = a:c \Leftrightarrow d:b = c:a$</p> |
| 比例的基本定理 ★★★★ | <p>(1) 更比定理: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$</p> <p>(2) 反比定理: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$</p> <p>(3) 合比定理: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$</p> <p>(4) 分比定理: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$</p> <p>(5) 等比定理: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} \Rightarrow \frac{a+c+e}{b+d+f} = \frac{a}{b} \quad (b+d+f \neq 0)$</p> <p>易错点: 容易忘记等比定理使用条件。</p> |

1.4 绝对值及其性质

| 知识点名称 | 内容 |
|--------------|--|
| 绝对值的定义 ★★ | $ a = \begin{cases} a & (a \geq 0) \\ -a & (a < 0) \end{cases}$ <p>绝对值的几何含义: 表示一个实数在数轴上所对应的点到原点的距离。</p> |
| 绝对值的性质 ★★ | <p>(1) 非负性: $a \geq 0$。 重点: $a \geq 0, a^2 \geq 0, \sqrt{a} \geq 0$ (着重关注这三个形式) 重要推论: 若干个具有非负性质的数之和等于零时, 则每个非负数必然为零。</p> <p>(2) 对称性: 互为相反数的两个数的绝对值相等, 即 $-a = a$。</p> $\frac{ x }{x} = \frac{x}{ x } = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$ <p>(3) 自比性: 自比性问题的关键是判断符号, 因此需要掌握以下几个表达式: $abc > 0$, 说明 a, b, c 有三正或两负一正。</p> |

| | |
|-----------------------|--|
| | $abc < 0$, 说明 a, b, c 有三负或两正一负。 $abc = 0$, 说明 a, b, c 中至少有一个为 0。 (4) 等价性: ① $ a = \sqrt{a^2}$ ② $ a ^2 = a^2$ |
| 绝对值不等式性质与运算法则 ★★★★ | (1) $ a \leq b (b > 0) \Leftrightarrow -b \leq a \leq b$ (2) $ a \geq b (b > 0) \Leftrightarrow a \leq -b$ 或 $a \geq b$ (3) $ a \cdot b = a \cdot b $ (4) $\left \frac{a}{b} \right = \frac{ a }{ b } (b \neq 0)$ (5) 三角不等式 $ a+b \leq a + b (ab \geq 0 \text{ 时等号成立})$ $ a-b \leq a + b (ab \leq 0 \text{ 时等号成立})$ 注意: 考试要求掌握等号成立条件的判断 |
| 绝对值最值 ★★★★ | (1) 常规方法: 分段讨论法去绝对值符号, 根据图像判断最值。 (2) 终极方法: 描点看边取拐点法 |

【例题】 $\frac{b+c}{|a|} + \frac{c+a}{|b|} + \frac{a+b}{|c|} = 1$

- (1) 实数 a, b, c 满足 $a+b+c=0$ 。
 (2) 实数 a, b, c 满足 $abc > 0$ 。

1.5 平均值及运算

| 知识点名称 | 内容 |
|--------|---|
| 定义★★★★ | (1) 算术平均值: n 个实数 x_1, x_2, \dots, x_n 的算术平均值为 $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$ (2) 几何平均值: n 个正实数 x_1, x_2, \dots, x_n 的几何平均值为: $x_g = \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$ 注意: 几何平均值只对正实数有定义, 而算术平均值对任何实数都有定义。 |
| 定理★★★★ | 当 x_1, x_2, \dots, x_n 为 n 个正实数时, 它们的算术平均值不小于它们的几何平均值, 即 $\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \quad (x_i > 0, i=1, \dots, n)$ 当且仅当 $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ 时, 等号成立。 |
| 性质★★★★ | 均值不等式模型, 利用均值不等式求最值, 且求何时取最值 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} (a, b \in \mathbb{R}^+)$ ① $a^2 + b^2 \geq 2ab (a, b \in \mathbb{R})$ ② 当且仅当 $x=y$ 时, 等号成立。 $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} (a, b, c \in \mathbb{R}^+)$ ③ $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2 (ab > 0)$ ④ $a + \frac{1}{a} \geq 2 (a \in \mathbb{R}^+)$ ⑤ $a + \frac{1}{a} \leq -2 (a \in \mathbb{R}^-)$ ⑥ |

第2章 整式与分式的运算

2.1 整式及其运算

| 知识点名称 | 内容 |
|------------------|--|
| 整式加减运算★ | 运算步骤：(1) 去括弧 (2) 合并同类项 |
| 整式乘法运算 ★★★★ | $(a+n)(b+m) = ab + am + nb + nm$ <p>整式乘法运算： 【基本公式】</p> <p>① 平方差公式： $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$</p> <p>② 完全平方公式： $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$</p> <p>③ 立方和不立方差公式： $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$</p> <p>④ 三元完全平方和公式： $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$</p> <p>⑤ 完全立方和公式： $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$</p> <p>$(a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3a^2b + 3ab^2$</p> <p>⑥ $(a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2 = 2[a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac]$</p> <p>⑦ $a^n - 1 = (a-1)(1+a+a^2+\dots+a^{n-1})$</p> |
| 多项式的因式分解 ★★★★ | <p>(1) 提取公因式法：公因式是多项式中各项都含有的相同的因式，即各项中系数的最大公约数与相同字母的最低次幂的乘积。 $ax+bx+cx = x(a+b+c)$</p> <p>(2) 公式法：乘法公式从右到左，即为因式分解公式。</p> <p>(3) 分组分解法： 原则：(1) 分组后，能产生公因式；(2) 分组后，能运用公式法；(3) 分组后，能应用十字相乘法。常用有“一三”分组或“二二”分组法。</p> <p>【例题】 $a^5 + a^2 - a^3 - 1 = a^3(a^2 - 1) + (a^2 - 1) = (a^2 - 1)(a^3 + 1)$ $= (a-1)(a+1)^2(a^2 - a + 1)$</p> <p>(4) 十字相乘法： 二次三项式的十字相乘法 $x^2 + px + q = (x+a)(x+b)$，其中 $p = a+b, q = ab$ $ax^2 + bx + c = (a_1x + c_1)(a_2x + c_2)$，其中 $a = a_1a_2, c = c_1c_2$，并且 $b = a_1c_2 + a_2c_1$。</p> <p>【例题】将 $3x^2 - 2x - 8$ 因式分解 解：二次项的系数分解为 $3=1*3$，常数项 $-8 = (-2)*4$，</p> $\begin{array}{cc} 3 & 4 \\ & \times \\ 1 & -2 \end{array}$ <p>所以 $3x^2 - 2x - 8 = (x-2)(3x+4)$</p> <p>(5) 求根法：若方程 $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n = 0$ 有 n 个根</p> |

| | |
|--|---|
| | x_1, x_2, \dots, x_n , 则多项式 $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n = a_0(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\dots(x-x_n)$ 。 注意: 涉及到因式分解的问题, 首先考虑首尾项检验法!! 即: 原式最高次项系数, 一定等于各因式的最高次项系数之积; 原式的常数项, 一定等于各因式常数项之积。 |
|--|---|

2.2 分式及其运算

| 知识点名称 | 内容 |
|------------|-----------------------------|
| 解分式方程 ★ | 解分式方程的关键是去分母, 将分式方程转化为整式方程。 |

2.3 重要题型与运算技巧

$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$
 1、关于 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$ 的问题。

原理: 若 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$, 则 $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2$ 。

2、迭代降次问题

形如已知 $x + \frac{1}{x} = a$ 或 $x^2 + ax + 1 = 0$, 求高次代数式的问题。

整理成 $x^2 = -ax - 1$ 形式, 代入整式, 迭代降次即可。

【例题】多项式 $x^3 + ax^2 + bx - 6$ 的两个因式是 $x-1$ 和 $x-2$, 则其第三个一次因式为 ()

A. $x-6$ B. $x-3$ C. $x+1$ D. $x+2$ E. $x+3$

第3章 方程、函数与不等式

3.1 方程及其解法

| 知识点名称 | 内容 |
|-----------------|---|
| 一元一次方程 ★★★★ | 标准形式: $ax+b=0$ ($a \neq 0$) 形如 $ax=b$ 的方程的解法 (1) 当 $a \neq 0$ 时, 原方程的解为 $x=b/a$; (2) 当 $a=0$, $b \neq 0$ 时, 不存在 x 值使等式成立, 原方程无解; (3) 当 $a=0$, $b=0$ 时, 即 $0x=0$, 则原方程的解为全体实数。 |
| 二元一次方程组的解法 ★ | (1) 加减消元法 $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 & (1) \\ a_2x + b_2y = c_2 & (2) \end{cases}$ 将 $(1) \times b_2 - (2) \times b_1$, 消去 y (也可以消去 x), 得: $(a_1b_2 - a_2b_1)x = b_2c_1 - b_1c_2$ 从中解出 x , 再将 x 的值代入 (1) 或 (2), 求出 y 的值, 从而得出方程组的解。 (2) 代入消元法 $y = \frac{c_1 - a_1x}{b_1} \quad (b_1 \neq 0)$ 由 (1) 得 $y = \frac{c_1 - a_1x}{b_1}$, 将其代入 (2), 消去 y , 得到关于 x 的一元一次方程, 解之。 |
| 一元二次方程 ★★★★ | 1、标准形式为: $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 2、解法 (1) 因式分解法 把方程化为形如 $a(x-x_1)(x-x_2)=0$ 的形式, 则解为 $x=x_1$ 或 $x=x_2$ 。 (2) 公式法 |

将配方后的结果直接用做公式使用。

由 $ax^2+bx+c=0$ ($a \neq 0$), 得 $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ (求根公式, $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$)

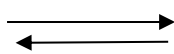
(3)

根的判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$ $\begin{cases} >0, \text{ 有两个不相等实数根;} \\ =0, \text{ 有两个相等的实数根;} \\ <0, \text{ 没有实数根。} \end{cases}$

3、根与系数的关系 (韦达定理)

设 x_1, x_2 是方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0, \Delta \geq 0$) 的两个根, 则

x_1, x_2 是方程
 $ax^2 + bx + c = 0$ 的
两根 ($a \neq 0, \Delta \geq 0$)



$x_1 + x_2 = -b/a$
 $x_1 \cdot x_2 = c/a$

韦达定理应用: 不解出方程, 就可以求有关方程根的一些代数式的值。

4、根的分布或位置

1) 可利用韦达定理

方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 有根的情况有以下几种:

(1) 方程有两个正根 $\begin{cases} x_1 + x_2 > 0 \\ x_1 x_2 > 0 \\ \Delta \geq 0 \end{cases}$; (2) 有两个负根 $\begin{cases} x_1 + x_2 < 0 \\ x_1 x_2 > 0 \\ \Delta \geq 0 \end{cases}$; (3) 一正一负根 $\begin{cases} x_1 \cdot x_2 < 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$

2) 数形结合 (常用)

数形结合求方程中待定参数方法:

(1) 两根属于同一连续区间, 有三个条件确定: $\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ \text{对称轴在区间内} \\ \text{端点函数值的正负} \end{cases}$

(2) 两根分属于两个不连续区间, 只需端点函数值的正负

(3) 两根在一点两侧, 只需一个式子: 判断该点函数值正负。

(4) 两不等根都在某点的同侧, 需要用的式子: 判别式大于零, 判断该点函数值正负, 对称轴在该点一侧。

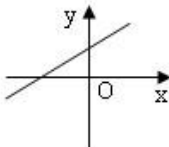
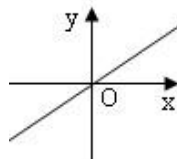
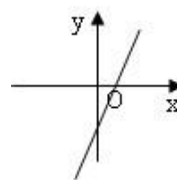
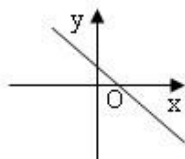
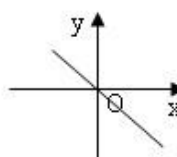
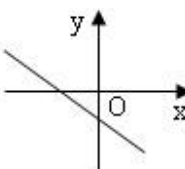
3.2 不等式及其解法

| 知识点名称 | 内容 |
|------------------|--|
| 不等式的基本性质 ★★★★ | <p>1、$a > b, c > 0$, 则 $ac > bc$, $a > b, d < 0$, 则 $ad < bd$;</p> <p>2、传递性: $a > b, b > c \Rightarrow a > c$; $\left. \begin{matrix} a > b > 0 \\ c > d > 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow ac > bd$;</p> <p>3、同向皆正相乘性: $a > b, c > d$, 则有 $a \cdot c > b \cdot d$;</p> <p>4、同向相加性: $a > b, c > d$, 则有 $a + c > b + d$;</p> <p>5、皆正倒数性: $a > b > 0 \Rightarrow \frac{1}{b} > \frac{1}{a} > 0$;</p> <p>6、皆正乘方性: $a > b > 0 \Rightarrow a^n > b^n > 0$ (n 为正整数);</p> |
| 一元一次不等式 ★ | 1、一元一次不等式的解法 |

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|--------------|--|---|-------------------------|------------------|------------|----------------------------|--|--|--|------------|---|-------------------------|-----|-------------|-------------------|----------------------|------------------|-------------|-------------|------------|------------|
| | $ax>b(a\neq 0)\left\{\begin{array}{l}a>0\text{时}\ x>\frac{b}{a}\\a<0\text{时}\ x<\frac{b}{a}\end{array}\right.$ <p>2、一元一次不等式组的解法 分别求出组成不等式组的每一个一元一次不等式的解集后，求这些解集的交集（可以运用数轴，直观地求出交集）。</p> | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 一元二次不等式 ★ | <p>1、标准形式为： $ax^2+bx+c>0\quad(a>0)$ $ax^2+bx+c<0\quad(a>0)$ 二次项的系数为正</p> <p>2、一元二次不等式的解与一元二次方程的根的关系 设方程 $ax^2+bx+c=0(a>0)$ 有两个不等实根 x_1,x_2，且 $x_1<x_2$，则 $ax^2+bx+c>0$ 的解集为 $x<x_1$或$x>x_2$； $ax^2+bx+c<0$ 的解集为 $x_1<x<x_2$。</p> <p>注意：若不等式二次项系数 $a<0$，可化为正值再求解集。若不等式带等号（即 \leq或\geq），则只需在解集中增加两个根即可。</p> <p>3、一元二次不等式的图像解法 依表中开口向上的抛物线 $ax^2+bx+c(a>0)$ 的不同位置求解。</p> <table><tr><td>$\Delta=b^2-4ac$</td><td>$\Delta>0$</td><td>$\Delta=0$</td><td>$\Delta<0$</td></tr><tr><td>$f(x)=ax^2+bx+c\quad(a>0)$</td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>$f(x)=0$ 根</td><td>$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$</td><td>$x_{1,2}=-\frac{b}{2a}$</td><td>无实根</td></tr><tr><td>$f(x)>0$ 解集</td><td>$x<x_1$ 或 $x>x_2$</td><td>$x\neq-\frac{b}{2a}$</td><td>$x\in\mathbb{R}$</td></tr><tr><td>$f(x)<0$ 解集</td><td>$x_1<x<x_2$</td><td>$x\in\phi$</td><td>$x\in\phi$</td></tr></table> | $\Delta=b^2-4ac$ | $\Delta>0$ | $\Delta=0$ | $\Delta<0$ | $f(x)=ax^2+bx+c\quad(a>0)$ | | | | $f(x)=0$ 根 | $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$ | $x_{1,2}=-\frac{b}{2a}$ | 无实根 | $f(x)>0$ 解集 | $x<x_1$ 或 $x>x_2$ | $x\neq-\frac{b}{2a}$ | $x\in\mathbb{R}$ | $f(x)<0$ 解集 | $x_1<x<x_2$ | $x\in\phi$ | $x\in\phi$ |
| | $\Delta=b^2-4ac$ | $\Delta>0$ | $\Delta=0$ | $\Delta<0$ | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | $f(x)=ax^2+bx+c\quad(a>0)$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | $f(x)=0$ 根 | $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$ | $x_{1,2}=-\frac{b}{2a}$ | 无实根 | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | $f(x)>0$ 解集 | $x<x_1$ 或 $x>x_2$ | $x\neq-\frac{b}{2a}$ | $x\in\mathbb{R}$ | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| $f(x)<0$ 解集 | $x_1<x<x_2$ | $x\in\phi$ | $x\in\phi$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

3.3 集合与函数

| 知识点名称 | 内容 |
|-------|---|
| 集合 ★ | 集合的区间表示 $\{x a < x < b\}$ 可表示为 $x \in (a, b)$ $\{x a \leq x < b\}$ 可表示为 $x \in [a, b)$ $\{x a < x \leq b\}$ 可表示为 $x \in (a, b]$ $\{x a \leq x \leq b\}$ 可表示为 $x \in [a, b]$ |

| | | | | | |
|---|--|-----|---|-------------|--------------|
| 2. 包含关系：（子集，真子集，相等，子集的个数） $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x \in A \Rightarrow x \in B$ 若 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$ 则 $A=B$ 结论：含有 n 个元素的有限集共有 2^n 个子集。 | | | | | |
| 一次函数的 性质 ★ | k,b的符号 | | 函数图像 | 图像的位置 | 性质 |
| | k>0 | b>0 |  | 图像过第一，二，三象限 | y 随 x 的增大而增大 |
| | | b=0 |  | 图像过第一，三象限 | |
| | | b<0 |  | 图像过第一，三，四象限 | |
| | k<0 | b>0 |  | 图像过第一，二，四象限 | y 随 x 的增大而减小 |
| | | b=0 |  | 图像过第二，四象限 | |
| | | b<0 |  | 图像过第二，三，四象限 | |
| | 总结：对于 $y=kx+b$ ， $k>0$ ，必过一、三象限； $k<0$ ，必过二、四象限； $b>0$ ，必过一、二象限； $b<0$ ，必过三、四象限； | | | | |
| | (1) 一般式： $y = ax^2 + bx + c$ | | | | |
| | 二次函数 ★★★★ | | | | |

| | |
|--|---|
| | <p>(2) 顶点式: $y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$</p> <p>(3) 交点式: $y = a(x - x_1)(x - x_2)$</p> <p>系数 a, b, c 和 $y = ax^2 + bx + c$ 的关系</p> <p>1) a 决定开口方向, 当 $a > 0$, 抛物线开口向上; 当 $a < 0$, 抛物线开口向下;</p> <p>2) 对称轴为 $x = -\frac{b}{2a}$, a 和 b 决定对称轴在 y 轴的左侧或右侧,</p> <p>重要推论: 当 a, b 同号, 对称轴在 y 轴左侧; 当 a, b 异号, 对称轴在 y 轴右侧; 当 $b = 0$ 时, 对称轴即 y 轴。</p> |
|--|---|

【例题】

1、二次函数关于 a, b, c

(2014. 10) 已知二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$, 则能确定 a, b, c 的值.

(1) 曲线 $y = f(x)$ 经过点 $(0, 0)$ 和点 $(1, 1)$.

(2) 曲线 $y = f(x)$ 与直线 $y = a + b$ 相切.

2. 最值问题

一元二次函数的最大值为 ()

A. 0.05 B. 0.10 C. 0.15 D. 0.20 E. 0.25

3、已知关于 x 的一元二次方程 $k^2x^2 - (2k+1)x + 1 = 0$ 有两个相异实根, 则 k 的取值范围为 ()

A. $k > \frac{1}{4}$ B. $k \geq \frac{1}{4}$ C. $k > -\frac{1}{4}$ 且 $k \neq 0$ D. $k \geq -\frac{1}{4}$ 且 $k \neq 0$ E. $k \neq 0$

第4章 应用题

| 知识点名称 | 内容 |
|--------------|---|
| 不定方程问题 ★★★ | 注: 整理成分式形式, 推算整数解 |
| 利润及百分比问题 ★★★ | <p>1、变化率概念</p> $\text{变化率} = \frac{\text{变化量}}{\text{变前量}} \times 100\% = \frac{ \text{现值} - \text{原值} }{\text{原值}} \times 100\%$ <p>设原值为 a, 变化率为 $p\%$, 若上升 $p\%$, 则现值 $= a(1 + p\%)$, 若下降 $p\%$, 则现值 $= a(1 - p\%)$.</p> <p>2、利润问题</p> <p>(1) 利润 = 售价 - 进价;</p> $\text{利润率} = \frac{\text{利润}}{\text{成本(进价)}} \times 100\% = \frac{\text{售价} - \text{成本}}{\text{成本}} \times 100\% = \left(\frac{\text{售价}}{\text{成本}} - 1\right) \times 100\%;$ <p>(2) 售价 = 成本 + 利润 = 成本 \times (1 + 利润率).</p> <p>(3) 亏损 = 进货价 - 售价</p> <p>(4) 亏损率 = (进货价 - 售价) \div 进货价 $\times 100\%$</p> <p>【例题】某商店将每套服装按原价提高 50% 后再作 7 折“优惠”的广告宣传, 这样每售出一套服装可获利 625 元。已知每套服装的成本是 2000 元,</p> |

| | |
|--------------|---|
| | <p>该店按“优惠价”售出一套服装比按原价（ ）</p> <p>A. 多赚 100 元 B. 少赚 100 元 C. 多赚 125 元</p> <p>D. 少赚 125 元 E. 多赚 155 元</p> |
| 行程问题 ★★★★ | <p>1、基本公式 路程=速度×时间；路程÷时间=速度；路程÷速度=时间。</p> <p>2、相遇及追击问题</p> <p>(1) 直线运动</p> <p>①相遇：两人相向而行，在中途相遇：设甲乙两人在一段路程上行走，他们的速度分别为 v_1, v_2，相遇时两人走过的路程为 S_1, S_2，相遇时所用时间为 t， $t = \frac{S_1 + S_2}{v_1 + v_2}$ 则 $v_1 + v_2$ ；</p> <p>②追击：甲乙两人从同一起点行走，甲先走了一段路程 S 后，乙沿同样的路程去追甲，乙追上甲所用时间为 t，他们的速度分别为 v_1, v_2 ($v_1 < v_2$)，则 $t = \frac{S}{v_2 - v_1}$ </p> <p>③列车问题，注意条件，合理计算火车长度 火车过桥：过桥时间=（车长+桥长）÷车速 火车追及：追及时间（超过）=（甲车长+乙车长+距离）÷（快速-慢速） 追及时间（追及）=距离÷（快速-慢速） 火车相遇：相遇时间=距离÷（甲车速+乙车速）</p> <p>(2) 圆周运动（设圆周长为 S）</p> <p>①甲乙从同一点开始同向运动：则 $S_{\text{甲}} - S_{\text{乙}} = S$，甲乙每相遇一次，甲比乙多跑一圈，若相遇 n 次，则有 $S_{\text{甲}} - S_{\text{乙}} = n \cdot S$；</p> <p>②甲乙从同一点开始相背运动：则 $S_{\text{甲}} + S_{\text{乙}} = S$，甲乙每相遇一次，甲与乙路程之和为一圈，若相遇 n 次有 $S_{\text{甲}} + S_{\text{乙}} = n \cdot S$。</p> <p>【例题】1、上午 9 时一辆货车从甲地出发前往乙地，同时一辆客车从乙地出发前往甲地，中午 12 时两车相遇，已知火车和客车的时速分别是 90 千米和 100 千米，则当客车到达甲地时，货车距乙地的距离是（ ） A. 30 千米 B. 43 千米 C. 45 千米 D. 50 千米 E. 57 千米</p> <p>2、甲乙两人同时从点出收，沿 400 米跑道同向均匀行走，25 分钟后乙比甲少走了一圈，若乙行走一圈需要 8 分钟，甲的速度是（ ）（单位：米/分钟） A. 62 B. 65 C. 66 D. 67 E. 69</p> <p>3、在有上、下行的轨道上，两列火车相向开来，若甲车长 187 米，每秒行驶 25 米，乙车长 173 米，每秒行驶 20 米，则从两车头相遇到车尾离开，需要（ ） A. 12 秒 B. 11 秒 C. 10 秒 D. 9 秒 E. 8 秒</p> |
| 相对速度问题 ★★ | <p>1、顺水逆水问题 原理： $\begin{cases} V_{\text{顺}} = v_{\text{船}} + v_{\text{水}} \\ V_{\text{逆}} = v_{\text{船}} - v_{\text{水}} \end{cases} \Rightarrow V_{\text{顺}} - V_{\text{逆}} = 2 v_{\text{水}}$ 也可以理解为： （顺水速度+逆水速度）÷2=船速 （顺水速度-逆水速度）÷2=水速</p> |

| | |
|-------------------------|--|
| | <p>顺水速=船速+水速=逆水速+水速×2 逆水速=船速-水速=顺水速-水速×2</p> <p>【例题】一艘轮船往返航行于甲、乙两码头之间。若船在静水中的速度不变，则当这条河的水流速度增加 50%时，往返一次所需的时间比原来将（ ） A. 增加 B. 减少半个小时 C. 不变 D. 减少 1 个小时 E. 无法判断</p> |
| 工程问题 ★★★★ | <p>解答工程问题的关键是把工作总量看作“1”，这样，工作效率就是工作时间的倒数（它表示单位时间内完成工作总量的几分之几），进而就可以根据工作量、工作效率、工作时间三者之间的关系列出算式。</p> <p>工作量=工作效率×工作时间 工作时间=工作量÷工作效率 工作时间=总工作量÷（甲工作效率+乙工作效率）</p> <p>解题思路和方法：发通后可以利用上述数量关系列公式，两种方法： 法①：没有给具体每个人的工作量问题，设总量为“1”； 法②：已知每个人的工作量，设总量为已知量的最小公倍数。</p> <p>【例题】某工程由甲公司 60 天完成，由甲、乙两公司共同承包需要 28 天完成，由乙、丙两公司共同承包需要 35 天完成，则由丙公司承包完成该工程需要的天数为（ ） A. 85 B. 90 C. 95 D. 100 E. 105</p> |
| 平均值问题 (十字相乘法) ★★★ | <p>原理：设一个整体可分成 A、B 两部分，A 部分的数值有 x 个 a，B 部分的数值有 y 个 b，A+B 的平均值为 c，则我们可用十字交叉法来求 A、B 数量之比：</p> <div style="text-align: center;"> $\begin{array}{ccc} A: & a & \backslash \\ & & c \\ B: & b & / \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & c-b & / \\ & & a-c \end{array}$ </div> |
| 溶液问题 ★★★★ | <p>1、解题原理： (1) 溶液=溶质+溶剂 浓度= $\frac{\text{溶质}}{\text{溶液}} \times 100\%$ (2)</p> <p>【例题】含盐 12.5% 的盐水 40 千克蒸发掉部分水分后发成了含盐 20% 的盐水，蒸发掉的水分重量为（ ）千克。 A. 19 B. 18 C. 17 D. 16 E. 15</p> <p>2、方法 (1) 利用十字相乘法速解混合溶液比例问题 设混合前浓溶液的质量为 m，溶质质量分数为 $a\%$，稀溶液的质量为 n，溶质质量分数为 $b\%$，两溶液混合后的溶质质量分数为 $c\%$： 则： $ma\% + nb\% = (m+n)c\%$， $\frac{m}{n} = \frac{c-b}{a-c}$ 化简为： 本式可用下面十字交叉形式表示：</p> <div style="text-align: center;"> $\begin{array}{ccc} a & & c-b \\ & \searrow & / \\ & c & \\ & / & \searrow \\ b & & a-c \end{array}$ </div> <p>这种方法也称“对角线法”，其中 c 必须是已知量。若用于纯溶剂(如水)稀释，则可将纯溶剂中溶质质量分数当作 0，若加入的是纯溶质，则可将溶质质量分数看作 100%。</p> <p>(2) 稀释问题超级计算公式，利用超级公式速解求稀释体积等相关问题 关于稀释问题超级公式：</p> |

| |
|---|
| 1) 设已知溶液质量为 M ，每次操作中先倒出 M_0g 溶液，再加入 M_0g 溶剂（清水），重复 n 次， $c_n = c_0 \left(\frac{M - M_0}{M} \right)^n = c_0 \left(1 - \frac{M_0}{M} \right)^n$ 多次混合问题 I 型， c_0 为原浓度， c_n 为新浓度。 2) 设已知溶液质量为 M ，每次操作中先倒入 M_0g 溶剂（清水），再倒出 M_0g 溶液重复 n 次， $c_n = c_0 \left(\frac{M}{M + M_0} \right)^n$ 多次混合问题 II 型， c_0 为原浓度， c_n 为新浓度。 【例题】 某容器中装满了浓度为 90% 的酒精，倒出 1 升后用水后又倒出 1 升，再用水将容器注满，已知此时的酒精浓度为 40%，则该容器的容积是（ ） A. 2.5 升 B. 3 升 C. 3.5 升 D. 4 升 E. 4.5 升 |
|---|

第 5 章 数列

5.1 数列的概念

| 知识点名称 | 内容 |
|---------------------------------|---|
| 概念★ | 依某顺序排成一系列的数。 表示方法： $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n \dots$ 或数列 $\{a_n\}$. |
| 项公式 a_n 和前 n 项和 S_n 之间的关系 | $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i, \quad a_n = \begin{cases} a_1 = S_1 & n=1 \\ S_n - S_{n-1} & n \geq 2 \end{cases}$ |

5.2 等差数列

| 知识点名称 | 内容 |
|----------------------------------|--|
| 定义★ | 如果一个数列从第 2 项起，每一项与它前一项的差等于同一个常数，这个数列就叫做等差数列，这个常数叫做这个等差数列的公差，记做 d 。即： $a_{n+1} - a_n = d$ (d 为常数, $n \in N^*$)。 |
| 通项公式★★★★ | $a_n = a_1 + (n-1)d$ $a_n - a_{n-1} = d \quad (n \geq 2)$ $a_n = a_m + (n-m)d$ $a_n = d \cdot n + (a_1 - d)$ $n = (a_n - a_1) / d + 1$ $d = (a_n - a_m) / (n - m)$ $a_{\frac{n+m}{2}} = \frac{a_n + a_m}{2}$ |
| 前 n 项和公式★★★★ | $S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$ |
| 等差中项★★★★ | 如果 a, A, b 成等差数列，那么 A 叫做 a 与 b 的等差中项，即 $A = \frac{a+b}{2}$ 。 中项公式： $2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$ ($n \in N^*$) |
| 下标和定理★★★★ | $m + n = p + q$ ，则 $a_m + a_n = a_p + a_q$ ($m, n, p, q \in N^*$)。特殊地，当 $p = q$ 时， $a_m + a_n = 2a_p$ 。 注意：可以将此公式推广到多个，但要满足两个成立条件：一是下标之和要 |

| | |
|--|----------------------|
| | 分别相等，二是等号两端的项数要分别相等。 |
|--|----------------------|

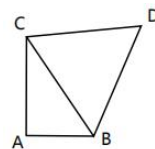
5.3 等比数列

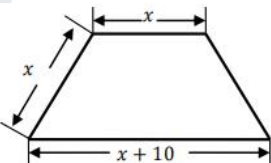
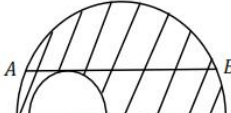
| 知识点名称 | 内容 |
|------------------|--|
| 定义★ | 如果一个数列从第2项起，每一项与它前一项的商等于同一个常数，这个数列就叫做等比数列，这个常数叫做这个等比数列的公比，记做 q 。即： $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q (q \text{ 为非零常数})$ |
| 通项公式 ★★★★ | $a_n = a_1 q^{n-1} (q \text{ 为常数}, n \in N^*)$; 推广: $a_n = a_m q^{n-m} (q \text{ 为常数}, n, m \in N^*)$. |
| 前 n 项和 ★★★★ | $S_n = \begin{cases} na_1 & (q=1) \\ \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} \text{ 或 } \frac{a_1-a_n q}{1-q} & (q \neq 1) \end{cases}$ |
| 等比中项 ★★ | 如果 a, G, b 成等比数列，那么 G 叫做 a 与 b 的等比中项， $G = \pm\sqrt{ab}$ ，显然 $ab > 0$ 。 中项公式: $a_{n+1}^2 = a_n \cdot a_{n+2} (n \in N^*)$ |
| 下标和定理 ★★★★ | $\{a_n\}$ 为等比数列，若 $m+n=p+q$ ，则 $a_m \cdot a_n = a_p \cdot a_q (m, n, p, q \in N^*)$ 。 特殊地，当 $p=q$ 时， $a_m \cdot a_n = a_p^2$ 。 注意：可以将此公式推广到多个，但要满足两个成立条件：一是下标之和要分别相等，二是等号两端的项数要分别相等。 |

第6章 几何部分

6.1 平面几何

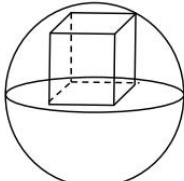
| 知识点名称 | 内容 |
|-------------|---|
| 三角形 ★★★★ | <p>(1) 三角形内角和定理: $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$</p> <p>(2) 三角形三边关系: 三角形任意两边之和大于第三边，两边之差小于第三边。</p> <p>(3) 三角形的任意一个外角等于与它不相邻的两个内角的和。</p> <p>(4) 三角形面积公式:</p> $S = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}ab \sin C = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ (海仑公式)}, \text{ 其中}$ $2p = a+b+c$ <p>其中h是a边上的高，$\angle C$是a, b边所夹的角，p为三角形的半周长。</p> <p>(5) 中线: 三角形中，连接一个顶点和它所对边的中点的线段叫做三角形的中线。</p> <p>(6) 角平分线: 三角形的一个内角的平分线与它的对边相交，连接这个角的顶点和交点之间的线段叫三角形的角平分线。</p> <p>(7) 高线: 从三角形的一个顶点向它的对边所在的直线做垂线，顶点到垂足之间的线段叫做三角形的高线)</p> <p>【例题】已知等腰直角三角形ABC和等边三角形BDC (见图下图)，设$\triangle ABC$的周长为$2\sqrt{2}+4$，则$\triangle BDC$的面积是 ()</p> <p>A. $3\sqrt{2}$ B. $6\sqrt{2}$ C. 12 D. $2\sqrt{3}$ E. $4\sqrt{3}$</p> |
| 四边形(平行) | 1、四边形的内角和等于 360° |



| | |
|---------------------------|--|
| <p>四边形) ★★</p> | <p>多边形内角和定理: n 边形的内角的和等于 $(n-2) \times 180^\circ$. 推论: 多边形的外角和是 360° .</p> <p>2、平行四边形的性质 (1) 平行四边形的定义: 两组对边分别平行的四边形叫做平行四边形。 (2) 平行四边形的性质: ①平行四边形的对边平行且相等, 对角相等; ②平行四边形的对角线互相平分。 (2) 若平行四边形两边长是 a, b, 以 b 为底边的高为 h, 则面积为 $S = bh$, 周长 $l = 2(a+b)$.</p> <p>3、矩形两边长为 a, b, 面积 $S = ab$, 周长 $C = 2(a+b)$, 对角线 $l = \sqrt{a^2 + b^2}$.</p> <p>4、菱形四边长都为 a, 以 a 为底边的高为 h, 面积 $S = ah = \frac{1}{2}l_1l_2$ (l_1, l_2 为两条对角线的长), 周长 $C = 4a$.</p> <p>5、梯形上底为 a, 下底为 b, 高为 h, 中位线 $l = \frac{1}{2}(a+b)$, 面积 $S = \frac{1}{2}(a+b)h$.</p> <p>【例题】如图, 等腰梯形的上底与腰均为 x, 下底为 $x+10$, 则 $x=13$. (1) 该梯形的上底不下底之比为 13:23 (2) 该梯形的面积为 216</p>  |
| <p>圆 ★★</p> | <p>(1) 圆的定义: 圆是到定点的距离等于定长的点的集合 (2) 周长为 $C = 2\pi R$, 面积是 $S = \pi R^2$. (3) 切线的性质: 圆的切线垂直于经过切点的半径 (4) 扇形: 一条弧和经过这条弧两端的两条半径所围成的图形叫扇形。 $l = \frac{n\pi R}{180}$, $S = \frac{n\pi R^2}{360}$ ①在扇形 OAB 中, 若圆心角为 n°, 则 AB 弧长 $l = \frac{n\pi R}{180}$, 扇形面积 $S = \frac{n\pi R^2}{360}$ $S = \frac{1}{2}Rl = \frac{1}{2}R^2\theta$ ②若圆心角为 θ 弧度, 则 AB 弧长 $l = R\theta$, 扇形面积 $S = \frac{1}{2}Rl = \frac{1}{2}R^2\theta$</p> <p>【例题】如图, 大小两个半圆的直径在同一直线上, 弦 AB 不小半圆相切, 且与直径平行, 弦 AB 长为 12。则图中阴影部分面积为 () A. 24π B. 21π C. 18π D. 15π E. 12π</p>  |

6.2 立体几何

| 知识点名称 | 内容 |
|----------------------------|---|
| <p>长方体 ★★★★</p> | <p>基本公式 设长方体在同一个顶点上的三条棱长分为 a, b, c (1) 体积 $V = abc$ (2) 全面积: $S_{\text{全}} = 2(ab + bc + ac)$ (3) 体对角线: $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ (4) 当 $a = b = c$ 时, 称为正方体, $V = a^3$, $S_{\text{全}} = 6a^2$, $d = \sqrt{3}a$</p> |
| <p>圆柱体 ★★</p> | <p>设圆柱的高为 h, 底面圆半径是 r (1) 体积: $V = \pi r^2 \cdot h$</p> |

| | |
|------------|---|
| | <p>(2) 侧面积: $S_{\text{侧}} = 2\pi r \cdot h$ (r 为底面圆的半径, h 为圆柱的高) 其侧面展开图为一个长为 $2\pi r$, 宽为 h 的长方形。</p> <p>(3) 全面积: $S_{\text{全}} = S_{\text{侧}} + S_{\text{上底+下底}} = 2\pi r \cdot h + 2\pi r^2$</p> |
| 球体 ★★★★ | <p>设球的半径为 R:</p> <p>(1) 球的表面积公式: $S_{\text{表}} = 4\pi R^2$ 或 $S_{\text{表}} = \pi D^2$ (D 是球的直径)</p> <p>(2) 球的体积公式: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ 或 $V = \frac{1}{6}\pi D^3$ (D 是球的直径)</p> <p>【例题】如图所示, 正方体位于半径为 3 的球内, 且一面位于球的大圆上, 则正方体表面积最大为 () A. 12 B. 18 C. 24 D. 30 E. 36</p>  |

6.3 平面解析几何

| 知识点名称 | 内容 |
|------------|---|
| 两点之间距离公式★★ | <p>在平面直角坐标系中, 设点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则</p> $ AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ |
| 中点坐标公式★★ | <p>点 $P(x, y)$ 是线段 P_1P_2 的中点, 其中 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$, 则 P 点坐标为</p> $x = \frac{x_1 + x_2}{2}, y = \frac{y_1 + y_2}{2}$ <p>*求坐标:</p> <ol style="list-style-type: none"> 定性分析: 看坐标所在的象限; 代数关系: 坐标为对应方程的根; 几何关系: 坐标 (x, y) 中, x 表示在 x 轴上投影的距离, y 表示在 y 轴上投影的距离; 定量计算: 联立求解相交的两个方程。 |
| 直线的倾斜角与斜率★ | <p>过两点 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$ 的直线的斜率公式</p> $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (x_1 \neq x_2)$ |
| 直线的方程★ | <p>1、点斜式 $y - y_1 = k(x - x_1)$ (直线 l 过点 $P_1(x_1, y_1)$, 且斜率为 k).</p> <p>2、斜截式 $y = kx + b$, 斜率为 k, 在 y 轴上的截距为 b。</p> <p>3、一般式 $Ax + By + C = 0$ (其中 A, B 不同时为 0)。</p> <p>斜率为: $-\frac{A}{B}$</p> <p>4、两点式 $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$</p> <p>5、截距式</p> |

| | |
|---------------------------|---|
| | $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ <p>(已知 x 轴上的截距为 a, y 轴上的截距为 b)</p> <p>*求直线方程:</p> <ol style="list-style-type: none"> 定性分析: 先看斜率, 再看截距; 代数关系: 直线方程应满足相对应的点; 定量计算: 点、斜式; 斜率的计算: 平行? 垂直? 两个点? 倾斜角? |
| 两直线的位置关系 ★★★★ | <p>1、相交</p> $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases}$ <p>会求交点: 联立 有唯一一组实数解。</p> <p>2、平行</p> <p>① 若 $l_1: y = k_1x + b_1$, $l_2: y = k_2x + b_2$; $l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2, b_1 \neq b_2$</p> <p>② 若 $l_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $l_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0$.</p> $l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$ <p>3、垂直</p> <p>① 若 $l_1: y = k_1x + b_1$, $l_2: y = k_2x + b_2$; $l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow k_1k_2 = -1$</p> <p>② 若 $l_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $l_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0$.</p> $l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 = 0$ <p>4、两条平行直线的距离公式</p> <p>直线 $l_1: Ax + By + C_1 = 0$ 平行于直线 $l_2: Ax + By + C_2 = 0$,</p> $d = \frac{ C_2 - C_1 }{\sqrt{A^2 + B^2}}$ <p>则它们之间的距离为:</p> |
| 点到直线的距离公式 ★★ | <p>平面内一点 $P(x_0, y_0)$ 到直线 $l: Ax + By + C = 0$ 的距离公式:</p> $d = \frac{ Ax_0 + By_0 + C }{\sqrt{A^2 + B^2}}$ |
| 点和圆、直线和圆、圆与圆的位置关系 ★★★★ | <p>1、点 $P(x_0, y_0)$ 与圆的位置关系</p> <p>(1) 对于圆的标准方程 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$, 若</p> $d = \sqrt{(a-x_0)^2 + (b-y_0)^2}$ <p>则有:</p> <p>$d > r \Leftrightarrow$ 点 P 在圆外;</p> <p>$d = r \Leftrightarrow$ 点 P 在圆上;</p> <p>$d < r \Leftrightarrow$ 点 P 在圆内。</p> <p>(2) 对于圆的一般方程: $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$, 则有:</p> <p>$x_0^2 + y_0^2 + Dx_0 + Ey_0 + F < 0 \Leftrightarrow$ 点 P 在圆内;</p> <p>$x_0^2 + y_0^2 + Dx_0 + Ey_0 + F = 0 \Leftrightarrow$ 点 P 在圆上;</p> |

| |
|---|
| $x_0^2 + y_0^2 + Dx_0 + Ey_0 + F > 0 \Leftrightarrow$ 点P在圆外。 2、直线与圆的位置关系有三种： （本质是求点到直线的距离） 直线 $Ax + By + C = 0$ 与圆 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ 的位置关系： $d = \frac{ Aa + Bb + C }{\sqrt{A^2 + B^2}}$ 圆心到直线的距离： $d > r \Leftrightarrow$ 相离； $d = r \Leftrightarrow$ 相切； $d < r \Leftrightarrow$ 相交 3、圆与圆的位置关系有五种： （本质是求两点之间距离） 设两圆圆心分别为 O_1 、 O_2 ，半径分别为 r_1, r_2 。 $ O_1O_2 = d$ $d > r_1 + r_2 \Leftrightarrow$ 外离 \Leftrightarrow 4条公切线； $d = r_1 + r_2 \Leftrightarrow$ 外切 \Leftrightarrow 3条公切线； $ r_1 - r_2 < d < r_1 + r_2 \Leftrightarrow$ 相交 \Leftrightarrow 2条公切线； $d = r_1 - r_2 \Leftrightarrow$ 内切 \Leftrightarrow 1条公切线； $0 \leq d < r_1 - r_2 \Leftrightarrow$ 内含 \Leftrightarrow 无公切线 |
|---|

第7章 数据分析

7.1 排列组合

| 知识点名称 | 内容 |
|----------------|--|
| 两个基本原理 ★★ | 1、加法（分类）原理 如果完成一件事有 n 类办法，只要选择其中任何一类办法中的任何一种方法，就可以完成这件事。若第一类办法中有 m_1 种不同的方法，第二类办法中有 m_2 种不同的方法，……，第 n 类办法中有 m_n 种不同的办法，那么完成这件事共有 $N = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$ 种不同的方法。 2、乘法（分步）原理 如果完成一件事，必须依次连续地完成 n 个步骤，这件事才能完成。若完成第一个步骤有 m_1 种不同的方法，完成第二个步骤有 m_2 种不同的方法，……，完成第 n 个步骤有 m_n 种不同的方法，那么完成这件事共有 $N = m_1 \cdot m_2 \cdots m_n$ 种不同的方法。 3、加法不乘法的区别 分类计数原理方法相互独立，任何一种方法都可以独立地完成这件事。 分步计数原理各步相互依存，每步中的方法完成事件的一个阶段，不能完成整个事件。 |
| 排列与排列数 ★★★★ | 从 n 个不同元素中取出 m 个元素 ($m \leq n$) 的所有排列的种数，称为从 n 个不同元素中取出 m 个不同元素的排列数，记作 P_n^m ，其中 $P_n^m = n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)$ 有 $P_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$ 当 $m=n$ 时， $P_n^n = n!$ 。 使用条件： 1) n 个不同元素 2) 任取 m 个 |

| | |
|----------------------|--|
| | 3) 讲究顺序 |
| 组合与组合数 ★★★ | <p>从 n 个不同元素中，取出 $m(m \leq n)$ 个元素的所有组合的种数，称为从 n 个不同元素中，取出 m 个不同元素的组合数，记作 C_n^m，其中</p> $C_n^m = \frac{P_n^m}{P_m^m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ <p>关于组合数，我们需要掌握公式：$C_n^m = C_n^{n-m}$。</p> <p>使用条件：</p> <ol style="list-style-type: none"> 1) n 个不同元素 2) 任取 m 个 3) 并为一组，不讲顺序 |

【例题】1、羽毛球有 4 名男运动员和 3 名女运动员，从中选出两对参加混双比赛，则不同的选派方式有（ ）

A. 9 种 B. 18 种 C. 24 种 D. 36 种 E. 72 种

2、将 6 人分成 3 组，每组 2 人，则不同的分组方式共有（ ）

A. 12 B. 15 C. 30 D. 45 E. 90

7.2 概率初步

| 知识点名称 | 内容 |
|----------------------|---|
| 概率基本概念 ★★★ | <p>1、事件的概率及其性质</p> <p>(1) 定义：所谓事件 A 的概率是指事件 A 发生可能性程度的数值度量，记为 $P(A)$，显然 $0 \leq P(A) \leq 1$。</p> <p>(2) 概率的性质</p> <p>性质 1 (加法公式)：对任意事件 A, B, 有 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$。</p> <p>若 A, B 互斥，则 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$。</p> <p>性质 2 (对立事件公式)：对任意事件 A, $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$。</p> |
| 古典概型 ★★★ | <p>如果在一次试验中，所有可能出现的基本事件只有有限个，并且每个基本事件出现的可能性相等，我们就把具有这两个特点的概率模型称为古典概率模型，简称古典概型。</p> <p>A 包含的基本事件个数 古典概型的概率计算公式为 $P(A) = \frac{\text{总的基本事件个数}}{\text{总的基本事件个数}}$。</p> |
| 事件的独立性 ★★★ | <p>独立事件：设 A, B 是两个事件，如果事件 A 的发生和事件 B 的发生互不影响，则称两个事件是相互独立的。</p> <p>对于相互独立的事件 A 和 B, 有 $P(AB) = P(A)P(B)$。</p> |
| 贝努利概型 ★ | <p>在贝努利概型中，若设 $q = 1 - p$，则在 n 次试验中事件 A 恰好发生 $k(0 \leq k \leq n)$ 次的概率为：</p> $P_n(k) = C_n^k P^k (1-p)^{n-k} (k = 0, 1, 2, \dots, n)$ |

【例题】1、10 件产品中有 3 件次品，从中随机抽出 2 件，至少抽到一件次品的概率是（ ）

A. 1/3 B. 2/5 C. 7/15 D. 8/15 E. 3/5

2、命中来犯敌机的概率是 99%。

(1) 每枚导弹命中率为 0.6

(2) 至多同时向来犯敌机收射 4 枚导弹

- 3、甲、乙两人进行围棋比赛，约定先胜 2 盘者赢得比赛，已知每盘棋甲获胜的概率是 0.6，乙获胜的概率是 0.4，若乙在第一盘获胜，则甲赢得比赛的概率为（ ）
- A. 0.144 B. 0.288 C. 0.36 D. 0.4 E. 0.6

7.3 数据描述

| 知识点名称 | 内容 |
|-------------------------------|--|
| (算术)平均数 ★★★★ | <p>定义：有 n 个数 x_1, x_2, \dots, x_n，称 $\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$ 为这 n 个数的算术平均数</p> <p>(也称平均数)，记做 $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i (i=1, 2, \dots, n)$</p> <p>基本定理：当 x_1, x_2, \dots, x_n 为 n 个正数时，他们的算术平均值不小于几何平均值，即 $\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$，当且仅当 $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ 时，等号成立。</p> |
| 中位数 ★★ | <p>将 n 个数 x_1, x_2, \dots, x_n，按从小到大的顺序依次排列，当 n 为奇数时，处在最中间的那个数 $(\frac{x_{n+1}}{2})$ 是这组数据的中位数；当 n 为偶数时，处在最中间的两个数的平均数 $(\frac{x_n + x_{n+1}}{2})$ 是这组数据的中位数。</p> |
| 方差与标准差 ★★★★ | <p>(1) 定义：设 \bar{x} 是 n 个数据 x_1, x_2, \dots, x_n 的算术平均数，我们把 $s^2 = \frac{1}{n} [(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2]$ 叫做这组数据的方差。</p> <p>(2) 我们把样本方差的算术平均值叫做这组数据的标准差（也称均方差），记做 S，即 $S = \sqrt{\frac{1}{n} [(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2]}$</p> <p>它是用来衡量一组数据波动的大小。样本方差、标准差体现了总体的分散程度</p> |

【例题】已知 $M = \{a, b, c, d, e\}$ 是一个整数集合，则能确定集合 M

- (1) a, b, c, d, e 的平均值为 10
 (2) a, b, c, d, e 的方差为 2

题型分析

| 题型 | 解题技巧 |
|---------------------------------------|--|
| 问题求解 (共 15 题，共 45 分) | <p>问题求解的题型解题技巧有：特值法、数字特征法、比例法、符号法、图像法、最值巧解法、特征分析法、模板套路法等等。以下举例说明 3 种：</p> <p>技巧 1：特殊值法</p> <p>【例题】已知 $x-y=5$，$z-y=10$，则 $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - xz = ()$。 A. 105 B. 75 C. 55 D. 35 E. 25</p> <p>【解析】令 $y = 0$，直接计算出原式为 75，选 B。</p> <p>技巧 2：数字特征法</p> <p>【例题】一批货物要运进仓库。甲、乙两队合运 9 小时，可运进全部货物的 50%，乙队单独运则要 30 小时才能运完，又知甲队每小时</p> |

可运进 3 吨，则这批货物共有 () 吨。

A. 135 B. 140 C. 145 D. 150 E. 155

【解析】甲、乙两队合运 9 小时可运进全部货物的 50%，由此得知总数是 9 的倍数，选项中只有 135 满足，所以选 A。

技巧 3：比例法

【例题】一项工程由甲、乙两队合做 30 天可以完成。甲队单独做 24 天后，乙队加入，两队合作 10 天后甲队调走，乙队继续做 17 天才完成，若这项工程由甲队单独做则需 () 天。

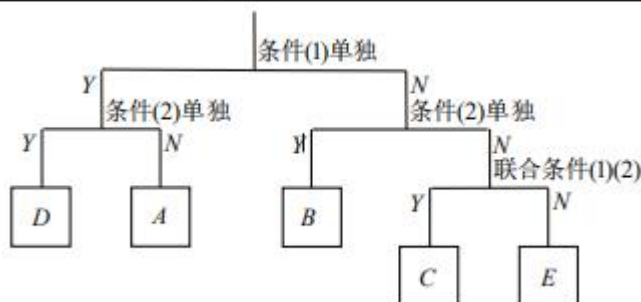
A. 60 B. 70 C. 80 D. 90 E. 100

【解析】完成这项工程有两种方案，可以是甲乙合作 30 天，也可以是甲做 34 天加上乙做 27 天。因此乙少做 3 天的工作量需要甲多做 4 天来弥补，即乙做 30 天等效于甲做 40 天，所以甲单独完成需要 $30+40=70$ 天，选 B。

技巧 4：模板套路法

- (1) 遇到质数问题时，马上结合奇偶性用常用质数分析。
- (2) 遇到比例计算问题，马上令比例系数为 1 分析。
- (3) 遇到分数或比例数值的应用题，马上看数字能否整除。
- (4) 遇到利润率或百分比问题时，马上将基准量看成 100。
- (5) 遇到相遇问题，马上找相遇时间分析。
- (6) 遇到顺水逆水问题时，马上令水速为零分析。
- (7) 遇到根的取值范围，马上画出抛物线看交点位置。
- (8) 遇到二次函数，马上找对称轴分析。
- (9) 遇到独立事件问题，马上根据分母寻答案。
- (10) 遇到直方图问题时，马上看矩形面积。

条件充分性判断
(共 10 题，共 30 分)



关于选项特征的技巧：

- (1) 当两条件为矛盾关系时，否定一个选另一个充分。
- (2) 当一个条件对题干无作用时，选另一个充分。
- (3) 当两条件有包含关系时，优先小范围充分。
- (4) 比较两条件复杂程度，优先复杂充分。
- (5) 当两条件是数值形式，数值复杂的优先充分。