学习是一种信仰!

尚德机构商学院内部教材

数学公式手册

尚德机构教研中心 组编

尚德机构出品

WWW.SUNLANDS.COM

数学基础知识必备手册

第一章 实数及其运算

一、实数及其运算

1.实数的分类

$$\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\begin{cases}\text{整数}\begin{cases}\left.\begin{array}{l}\text{正整数}\\0\end{array}\right\}\text{自然数}\\\text{负整数}\end{cases}\\\text{分数（分正、负分数）}\end{cases}\\\text{无理数}\end{cases}$$

2.实数相关概念

（1）自然数：我们把 $0,1,2,3,\cdots$ 等非负整数叫做自然数.

（2）奇数与偶数

①能被 2 整除的整数叫做偶数，常表示成 $2k$ (k 为整数)；不能被 2 整除的整数叫做奇数，常表示成 $2k-1$ (k 为整数).

②奇数与偶数的运算性质：

偶数 $\pm$ 偶数=偶数；　　奇数 $\pm$ 偶数=奇数；

奇数 $\pm$ 奇数=偶数；　　奇数*奇数=奇数；

奇数*偶数=偶数；　　偶数*偶数=偶数.

（3）质数与合数

①质数：如果一个大于 1 的整数，只能被 1 和它本身整除，那么这个正整数叫做质数（或素数）.例如：2、3、5、7......

②合数：一个大于 1 的正整数，除了能被 1 和本身整除外，还能被其他正整数整除，这样的正整数叫做合数.例如：4、6、9......

【注意】1 既不是质数也不是合数，2 是最小的质数，也是唯一的偶质数.

（4）数的整除：设$\forall a,b\in Z$且$b\neq 0$，若$\exists p\in Z$使得$a=pb$成立，则称b能整除a，或a能被b整除，记作$b|a$,此时我们把b叫做a的因数，把a叫做b的倍数.

【注意】关于整除，掌握以下几个规律：

①被2整除的数，个位数是偶数；

②被3整除的数，各位数之和为3的倍数；

③被4整除的数，末两位数是4的倍数；

④被5整除的数，个位数是0或5；

⑤被6整除的数，既能被2整除又能被3整除；

⑥被8整除的数，末三位数之和是8的倍数；

⑦被9整除的数，各位数之和为9的倍数；

⑧被10整除的数，个位数为0.

（5）公约数与公倍数

①公约数：如果一个整数同时是几个整数的约数，则称这个整数为它们的公约数；所有公约数中最大的，称为这些整数的最大公约数，比如20和50的公约数有1、2、5、10，但是10是它们的最大公约数.

②公倍数：如果几个整数有相同的倍数，则称这个倍数是它们的公倍数；所有公倍数中最小的，称为这些整数的最小公倍数，比如25和5的公倍数有25、50等，但是25是它们的最小公倍数.

（6）有理数与无理数

①有理数：我们把整数、分数、有限小数和无限循环小数，统称为有理数.

②无理数；无限不循环小数叫做无理数.

（7）实数：有理数和无理数统称为实数，实数集用R表示.

3.实数的运算

（1）实数的加、减、乘、除四则运算符合加法和乘法运算的交换律，结合律和分配律.

（2）乘方运算：当$a\in R,a\neq 0$时，$a^0=1,a^{-n}=\frac{1}{a^n}$.负实数的奇数次幂为负数；负实数的偶数次幂为正数.

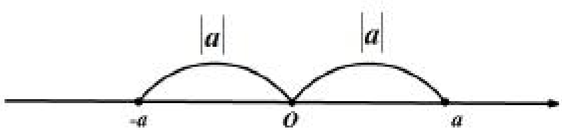
（3）开方运算：在实数范围内，负实数无偶次方根；0 的偶次方根是 0；正实数的偶次方根有两个，它们互为相反数，其中正的偶次方根称为算术平方根.在运算有意义时，$a^{\frac{n}{m}}=\sqrt[m]{a^n}$

二、绝对值

1.实数a的绝对值定义为：$|a|=\begin{cases}a & (a\geq 0)\\ -a & (a<0)\end{cases}$

2.绝对值的几何意义

实数 a 在数轴上对应一点，这个点到原点的距离就是 a 的绝对值（如下图）.



3.绝对值性质

（1）对称性：互为相反的两个数的绝对值相等,即$|-a|=|a|$；

（2）自反性：$\frac{|x|}{x}=\frac{x}{|x|}=\begin{cases}1 & x>0\\ -1 & x<0\end{cases}$；

（3）等价性：①$|a|=\sqrt{a^2}$，②$|a|^2=a^2$；

（4）非负性：任何实数a的绝对值非负，即$|a|\geq 0$.

【归纳】其他非负性的变量：

①正的偶数次方（根式）：$a^2,a^4,\cdots,a^{\frac{1}{2}},a^{\frac{1}{4}}\geq 0$；

②负的偶数次方（根式）：$a^{-2},a^{-4},\cdots,a^{-\frac{1}{2}},a^{-\frac{1}{4}}>0$

规则：若干个具有非负性质的数之和等于零时，则每个非负数必然为零.

4.绝对值运算法则和三角不等式

（1）$|a|\le b\ \ (b>0)\Leftrightarrow -b\le a\le b$；

（2）$|a|\ge b(b>0)\Leftrightarrow a\le -b$ 或 $a\ge b$；

（3）$|a\cdot b|=|a|\cdot|b|,\left|\dfrac{b}{a}\right|=\dfrac{|b|}{|a|}(a\ne 0)$；

（4）三角不等式

①$|a+b|\le|a|+|b|$（$ab\ge 0$ 时等号成立)；

②$|a+b|\ge|a|-|b|$（$ab\le 0$,且$|a|\ge|b|$时等号成立）;

③$|a-b|\le|a|+|b|$（$ab\le 0$ 时等号成立)；

④$|a-b|\ge|a|-|b|$（$ab\ge 0$,且$|a|\ge|b|$时等号成立）.

三、平均数

1.（算术）平均数：

（1）定义：设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为 n 个实数，称 $\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$ 为这 n 个数的（算术）平均数，记 $\bar{x}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i(i=1,2,\cdots,n)$。

（2）算术平均值常用下面方法计算：$\bar{x}=\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$ ；

2.几何平均数：设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为 n 个正实数，称 $\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$ 为这 n 个数的几何平均数.

四、比和比例

1.比和比例的定义

（1）比：a 除以 b 的商，叫做 a,b 这两个数的比，记做 $a:b$、即 $a:b=\frac{a}{b}$，其中 a 叫做比的前项，b 叫做比的后项，若 $\frac{a}{b}$ 的商为 k，则称 k 为 $a:b$ 的值.

（2）比例：如果 $a:b$ 和 $c:d$ 的比值相等，就称 a,b,c,d 成比例，记作 $a:b=c:d$ 或 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，a 和 d 叫做比例的外项，b 和 c 叫做比例的内项；当 $a:b=b:d$ 时，称 b 为 a 和 d 的比例中项，即 $b^2=ad$。

2.比和比例的性质

（1）比的基本性质

①$a:b=k\Leftrightarrow a=kb$；②$a:b=ma:mb(m\neq 0)$.

（2）比例的基本性质

①更比定理：$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$；

②反比定理：$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$

③合比定理：$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a\pm mc}{b\pm md}=\frac{a\pm c}{b\pm d}$；

④等比定理：$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{a+c+e}{b+d+f}$。（注意！等比定理的使用条件：$b+d+f\neq 0$）

第二章 整式与分式

一、整式及其运算

1.常用乘法公式（逆运算就是因式分解）

（1）$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$；

（2）$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$；

（3）$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$；

（4）$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$；

（5）$(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)=a^3\pm b^3$；

技巧提示：公式扩展① $\frac{1}{\sqrt{n+1}\pm\sqrt{n}}=\frac{(\sqrt{n+1}\mp\sqrt{n})}{(\sqrt{n+1}\pm\sqrt{n})(\sqrt{n+1}\mp\sqrt{n})}=\sqrt{n+1}\mp\sqrt{n}$；

公式扩展② $(a\pm\frac{1}{a})^2=a^2+\frac{1}{a^2}\pm 2\Leftrightarrow a^2+\frac{1}{a^2}=(a\pm\frac{1}{a})^2\mp 2$；

公式扩展③ $a^2+b^2+c^2\pm ab\pm ac\pm bc=\frac{1}{2}(a\pm b)^2+\frac{1}{2}(b\pm c)^2+\frac{1}{2}(a\pm c)^2$

2.整式除法定理：若整式 $F(x)$ 除以 $x-a$ 的余式为 $r(x)$，则 $F(x)=(x-a)\cdot g(x)+r(x)$，故 $r(a)=F(a)$ 成立.

二、指数和对数的运算性质

1.指数运算性质：

（1）$a^0=1(a\neq 0)$；　（2）$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$；

（3）$a^m\div a^n=a^{m-n}$；　（4）$(a^m)^n=a^{mn}$；

（5）$(ab)^m=a^mb^m$；　（6）$a^{-m}=\frac{1}{a^m}(a\neq 0)$.

2.对数运算性质：

（1）$\log_a(MN)=\log_a M+\log_a N$；（2）$\log_a(\frac{M}{N})=\log_a M-\log_a N$；

（3）$\log_a(M^n)=n\log_a M$；（4）$\log_a M=\frac{\log_b M}{\log_b a}$；

（5）$\log_a 1=0,\log_a a=1$.

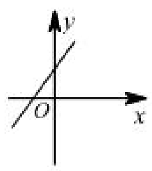
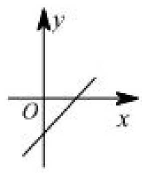
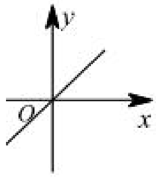
三、分式运算性质：

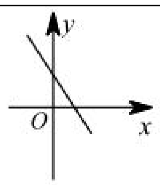
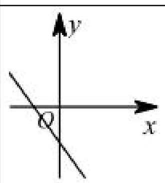
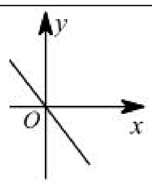
$$\frac{A}{B}=\frac{A\times M}{B\times M};\frac{A}{B}=\frac{A\div M}{B\div M}(M\neq 0)$$

第三章 方程与不等式

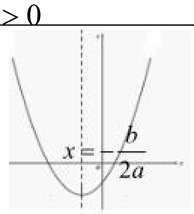
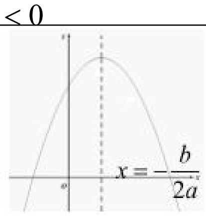
一、函数

1.一次函数 $y = kx + b(k \neq 0)$ 的图象及性质：

一次	$y = kx + b(k \neq 0)$		
$k > 0$	$b > 0$	$b < 0$	$b = 0$
图象			
性质	y 随 x 的增大而增大		

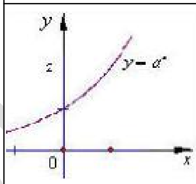
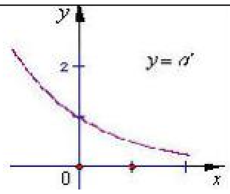
一次	$y = kx + b(k \neq 0)$		
$k < 0$	$b > 0$	$b < 0$	$b = 0$
图象			
性质	y 随 x 的增大而减小		

2.二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象和性质

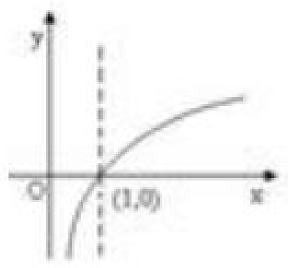
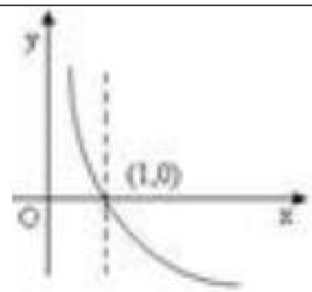
	$a > 0$	$a < 0$
图像		
定义域	$(-\infty, +\infty)$	
对称轴	对称轴 $x = -\dfrac{b}{2a}$	

顶点坐标	顶点坐标 $(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a})$	
值域	$(\frac{4ac-b^2}{4a},+\infty)$	$(-\infty,\frac{4ac-b^2}{4a})$
与 y 轴交点	$(0,c)$	
与 x 轴交点	$(\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a},0)(\Delta>0),(-\frac{b}{2a},0)(\Delta=0)$	

3. 指数函数 $y=a^x$（ $a>0$ ，且 $a\neq1$ ）的图象和性质：

$a>1$	$0<a<1$
	
定义域 R	定义域 R
值域 $y>0$	值域 $y>0$
x 越大，y 越大	x 越大，y 越小
函数图象都过定点（0,1）	函数图象都过定点（0,1）

4.对数函数 $y=\log_a x$ ($a>0$ ，且 $a\neq 1$)的图象与性质：

$a>1$	$0<a<1$
	
定义域 $x>0$	定义域 $x>0$
值域为 R	值域为 R
x 越大， y 越大	x 越大， y 越小
函数图象都过定点(1,0)	函数图象都过定点(1,0)

二、方程

1.一元一次方程 $ax+b=0(a\neq 0)$ 解法： $x=-\dfrac{b}{a}$.

2.二元一次方程 $\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1,\\ a_2x+b_2y=c_2\end{cases}(a_1b_2-a_2b_1\neq 0)$ 解法：加减消元法，代入消元法等.

3.一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$

（1）解法：①分解因式：若 $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)=0(a\neq 0)$，则 $x=x_1$ 或 $x=x_2$.

②公式法：方程两根为 $x_1,x_2=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

（2）根的判别式（$\Delta=b^2-4ac$：①当 $\Delta>0$ 时，方程有两相异的实数根；②当 $\Delta=0$，方程有两相等的实数根；③当 $\Delta<0$ 时，方程没有实数根.）

（3）根与系数的关系（韦达定理）

①设方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 的两个根为 x_1 和 x_2，则

$$\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}, \\ x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a} \end{cases}.$$

②韦达定理的应用：利用韦达定理求关于两个根的代数式的数值：

1）$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$；

2）$x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)(x_1^2-x_1x_2+x_1^2)$

$$=(x_1+x_2)[(x_1+x_2)^2-3x_1x_2]；$$

3）$\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}=\dfrac{x_1+x_2}{x_1x_2}$；

4）$\dfrac{1}{x_1^2}+\dfrac{1}{x_2^2}=\dfrac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{(x_1x_2)^2}$；

5）$|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2}=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$。

4.一元 n 次方程

形如 $a(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)=0$ 的方程称为一元 n 次方程，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是它的 n 个根.

三、不等式

1.不等式的基本性质

（1）如果$a>b$，那么$b<a$；如果$b<a$，那么$a>b$，即$a>b \Leftrightarrow b<a$；

（2）如果$a>b,b>c$，那么$a>c$，即$a>b,b>c \Leftrightarrow a>c$；

（3）如果$a>b$，那么$a+c>b+c$；

（4）如果$a>b,c>0$，那么$ac>bc$；如果$a>b,c<0$，那么$ac<bc$；

（5）如果$a>b,c>d$，那么$a+c>b+d$；

（6）如果$a>b>0,c>d>0$，那么$ac>bd$；

（7）如果$a>b>0$，那么$a^n>b^n,(n\in N,n\geq 2)$；

（8）如果$a>b>0$，那么$\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b},(n\in N,n\geq 2)$；

2.不等式的求解

（1）一元一次不等式$ax>b$(或$ax<b$)：解不等式时，运用不等式的性质，去分母，去括号，移项，合并同类项，最后变为$x>c$或$x<c$.

（2）一元一次不等式组：每个一元一次不等式的解集的公共部分（交集）叫做一元一次不等式组的解集.

（3）绝对值不等式的解法

①$|f(x)|<a \Leftrightarrow -a<f(x)<a;|f(x)|>a \Leftrightarrow f(x)<-a$或$f(x)>a$；

②$|f(x)|^2>a \Leftrightarrow [f(x)]^2>a$；

③$|f(x)|=\begin{cases} f(x) & f(x)\geq 0, \\ -f(x) & f(x)<0 \end{cases}$；

④设$f(x)=|x-a|+|x-b|$，函数的特点为：x在区间$[a,b]$上取得最小值.

$f(x)$有最小值$|a-b|$，无最大值.；

⑤设$f(x)=|x-a|-|x-b|$，函数的特点为：$f(x)$有最大值$|a-b|$，最小值$-|a-b|$，且最大

值与最小值互为相反数.

（4）一元二次不等式 $ax^2+bx+c>(<)0(a>0)$ ，一元二次不等式的解法如下表，设 $f(x)=ax^2+bx+c(a>0)$ ：

$\Delta=b^2-4ac$	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
方程 $f(x)=0$	有两相异实根 $x_1,x_2(x_1<x_2)$	有两相等实根 $x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$	无实根
$f(x)>0$ 的解集	$\{x\mid x<x_1$ 或 $x>x_2\}$	$\left\{x\mid x\neq-\frac{b}{2a}\right\}$	R
$f(x)<0$ 的解集	$\{x\mid x_1<x<x_2\}$	ϕ	ϕ

（5）指数、对数不等式：不等号两边同时取指数或同时取对数，变成相同的形式后，再换元成有理不等式求解：

	指数不等式	对数不等式
$a>1$	$a^{f(x)}>a^{g(x)}$ $\Leftrightarrow f(x)>g(x)$	$\log_a f(x)>\log_a g(x)$ $\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)>0\\g(x)>0\\f(x)>g(x)\end{cases}$
$0<a<1$	$a^{f(x)}>a^{g(x)}$ a $\Leftrightarrow f(x)<g(x)$	$\log_a f(x)>\log_a g(x)$ $\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)>0\\g(x)>0\\f(x)<g(x)\end{cases}$

3.常用的基本不等式

（1）$a^2+b^2\ge 2ab(a,b\in R)$，

（2）$\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}(a,b\in R^+)$，

（3）$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\ge 2(ab>0)$，

（4）$\frac{1}{a}+a\ge 2(a\in R^+),\frac{1}{a}+a\le -2(a\in R^-)$

第四章 应用题

一、增长率问题

1.设原值为a，变化率为$p\%$，若上升$p\%\Rightarrow$现值$=a(1+p\%)$，若下降$p\%\Rightarrow$现值$=a(1-p\%)$.

2.利润问题

利润=售价−进价，利润率$=\frac{利润}{成本（进价）}\times 100\%$

$$=\frac{售价-成本}{成本}\times 100\%=(\frac{售价}{成本}-1)\times 100\%$$；

售价$=$成本$+$利润$=$成本$\times(1+$利润率$)$.

二、行程问题

1.基本公式：路程＝速度×时间.

2.相遇及追击问题

（1）直线运动：

①两人相向而行，在中途相遇，则$t=\dfrac{S_1+S_2}{v_1+v_2}$；

②甲乙两人从同一起点行走，甲先走了一段路程S后，乙沿同样的路程去追甲，乙追上甲所用时间$t=\dfrac{S}{v_{乙}-v_{甲}}$.

（2）圆周运动（设圆周长为S）

①同向运动：相遇一次：$S_{甲}-S_{乙}=S$.若相遇n次，则$S_{甲}-S_{乙}=n\cdot S$；

②相背运动：相遇一次：$S_{甲}+S_{乙}=S$.若相遇n次，则$S_{甲}+S_{乙}=n\cdot S$.

3.流水问题：$v_{顺}=v_{船}+v_{水},v_{逆}=v_{船}-v_{水},v_{顺}+v_{逆}=2v_{船}$.

三、溶液浓度问题

1.常用公式：$浓度=\dfrac{溶质}{溶液}\times 100\%$，$溶液=溶剂+溶质$；

2.设x克浓度为$a\%$的A溶液与y克浓度为$b\%$的B溶液混合，混合后的C溶液浓度为$c\%$，则$\dfrac{x}{y}=\dfrac{|c\%-b\%|}{a\%-c\%}$，可用下面十字交叉法求$A$和$B$溶液的质量：

A 溶液：$a\%$　　　　　　$|c\%-b\%|$

　　　　　　　$c\%$

B 溶液：$b\%$　　　　　　$|a\%-c\%|$

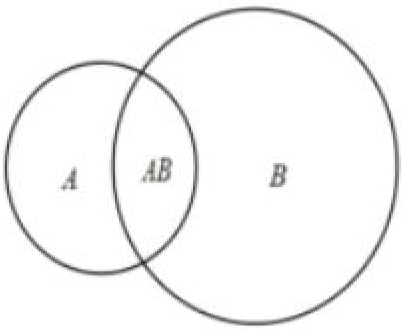
四、工程问题

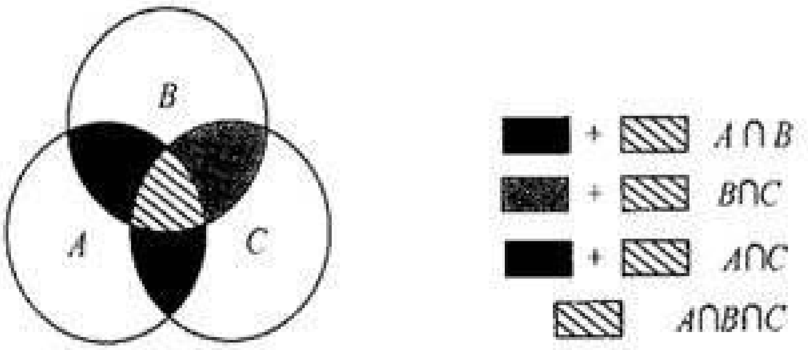
计算公式： 工作效率＝完成的工作量÷工作时间，总量＝部 分量÷部分量所占的比例·

五、集合问题

$m(A\bigcup B)=m(A)+m(B)=m(AB)$,

$m(A\bigcup B\bigcup C)=m(A)+m(B)+m(C)-m(AB)-m(AC)-m(BC)+m(ABC)$ ·





第五章 数列

一、基本概念

a_n 与 S_n 有如下关系：

$$a_n=\begin{cases} S_1 & (n=1) \\ S_n-S_{n-1} & (n\geq 2,\ n\in N^*) \end{cases}$$

二、等差数列

1.通项公式：$a_n=a_1+(n-1)d$.

2.前 n 项和公式：

$$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=na_1=\frac{1}{2}n(n-1)d\cdot$$

$$=\frac{d}{2}\cdot n^2+(a_1-\frac{d}{2})n$$ ，它可以抽象成关于 n 的二次函数

$$f(x)=\frac{d}{2}x^2+(a_1-\frac{d}{2})x, S_n=f(n)$$

3.等差中项：若 a,A,b 成等差数列，则 A 叫做 a 与 b 的等差中项，且 $A=\frac{a+b}{2}$.

三、等比数列

1.通项公式：$a_n=a_1q^{n-1}(n\in N)$.

2.前 n 项和公式：

$$S_n=\begin{cases} na_1 & (q=1) \\ \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{a_1-a_nq}{1-q} & (q\neq 1) \end{cases}$$

3.等比中项：若 a,A,b 成等比数列，那么 A 叫做 a 与 b 的等比中项，且 $A=\sqrt{ab}$.

四、等差、等比数列性质总结

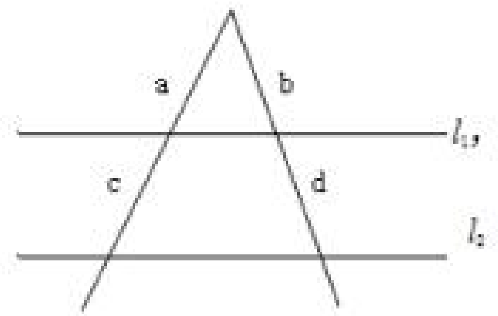
等差数列	等比数列
若 $m+n=p+q$，则 $a_m+a_n=a_p+a_q$	若 $m+n=p+q$，则 $a_m a_n=a_p a_q$.
若 $\{k_n\}$ 成等差数列（其中 $k_n\in N$），则 $\{a_{k_n}\}$ 成等差数列.	若 $\{k_n\}$ 成等差数列（其中 $k_n\in N$），则 $\{a_{k_n}\}$ 成等比数列.
$S_n,S_{2n}-S_n,S_{3n}-S_{2n}\cdots$ 成等差数列.	$S_n,S_{2n}-S_n,S_{3n}-S_{2n}\cdots$ 成等比数列.
$a_k,a_{k+m},a_{k+2m},\cdots$ 也成等差数列,其公差 $d'=md$.	$a_k,a_{k+m},a_{k+2m},\cdots$ 也成等比数列,其公比 $q'=q^m$.

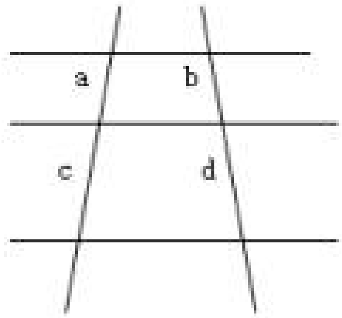
第六章 初等几何

一、平行直线

1.两直线平行，内(外)错角相等，同位角相等，同旁内角互补.

2.两条直线被一组平行线截得的线段成比例，如下图，$a:b=c:d$.





二、三角形的性质

1.三角形的基本性质：

三角形内角和定理：$\angle A+\angle B+\angle C=180°$

三角形三边关系：三角形任意两边之和大于第三边，任意两边之差小于第三边.

三角形的任意一个外角等于与它不相邻的两个内角的和.

三角形的面积：$S=\frac{1}{2}ah=\frac{1}{2}ab\sin C=\sqrt{p(p-a)(p-d)(p-c)}$（海仑公式），其中 p 为周长的一半。

2.三角形的四心

（1）重心：三条中线的交点，将中线分成 $1:2$ 两段；

（2）垂心：三条高的交点；

（3）内心：内切圆圆心，三条角平分线交点，角平分线上的点到角两边的距离相等；

（4）外心：外接圆圆心，三条边的中垂线交点.

3.三角形的全等与相似

（1）两个几何图形全等，全等的图形对应角相等，对应的线段长度也相等.

（2）两个几何图形相似，似的图形对应角相等,对应的线段长度成比例,比值称为相似比.如果两个相

似图形的相似比为 k ,则面积比为 k^2

4.特殊三角形

（1）等腰三角形的性质：两底角相等，底边上的中线,底边上的高及顶角的角平分线重合，两腰上的中线相等,两腰上的高相等,两底角的角平分线相等.

（2）等边三角形的性质：三个角都为 $60°$ ，等边三角形的重心,垂心,内心,外心重合,称此点为它的中心.边长和高的比为 $2:\sqrt{3}$ ，边长等于 a 的等边三角形的面积为 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$.

（3）直角三角形的性质：直角边的平方和等于斜边的平方(充分必要条件).斜边上的中线长度等于斜边的一半(充分必要条件).

①记住几组常用的勾股数：$3,4,5;6,8,10;7,24,25;8,15,17;9,12,15;9,40,41$.

②两类特殊的直角三角形(两块三角尺)：

1）等腰直角三角形：两底角都为 $45°$.直角边和斜边的长度比为 $1:\sqrt{2}$.

2）$30°.60°.90°$ 直角三角形：斜边的长度是短直角边的 2 倍，长直角边长度是短直角边的 $\sqrt{3}$ 倍.

三、四边形的性质

1.平行四边形：两对边都相等(充分必要条件)；两对角都相等；两条对角线互相平分.

2.矩形：4 个角都是直角的四边形.

3.菱形：各边相等的四边形.其中两条对角线互相垂直平分，两条对角线都平分所在角.

4.正方形：4 个角都是直角,并且各边相等的四边形.

四、圆的性质

1.关于圆周角

（1）命题：一条弧所对应的圆心角等于这段弧所对应的圆周角的 2 倍.

（2）推论 1：圆的内接四边形对角和等于 $180°$.

（3）推论 2：半圆所对应的的圆周角是直角.

2.关于弦和切线：

（1）垂直于弦的直径平分此弦.

（2）如果直线和圆相切，则经过切点的半径和切线垂直.

（3）经过圆外一点的圆的切线有两条，两个切点到此点的距离相等.

（4）推论：圆的外切四边形两双对边长度之和相等.

3.直线与圆的位置关系：设圆半径为r,圆心到直线的距离为d，直线与圆的位置关系分为有三种：直线与圆相离$(d>r)$、直线与圆相切$(d=r)$、直线与圆相割$(d<r)$.

4.两个圆的位置关系：设两个圆半径分别为r_1,r_2,两个圆心的距离为d，两个圆的位置关系有五种：两圆外离$(d>r_1+r_2)$、两圆外切$(d=r_1+r_2)$、两圆相割$(|r_1-r_2|<d<r_1+r_2)$、两圆内切$(d=|r_1-r_2|)$、两圆内含$(d<|r_1-r_2|)$.

五、特殊的三角函数值

几个常用的角：$360°=2\pi,180°=\pi,90°=\frac{\pi}{2},60°=\frac{\pi}{3},30°=\frac{\pi}{6},45°=\frac{\pi}{4}$.

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞

六、常用几何体的周长、面积与体积

1.三角形

三角形的面积$S=\frac{1}{2}bh=\frac{1}{2}ab\sin C=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$（其中$p=\frac{a+b+c}{2}$，为三角形的半周长）；

直角三角形两直角边为a,b，则$S=\frac{1}{2}ab$；等边三角形面积$S=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$；高$h=\frac{\sqrt{3}}{2}a$；

外接圆半径$\frac{\sqrt{3}}{3}a$；内切圆半径$r=\frac{\sqrt{3}}{6}a$．

2.四边形

平行四边形的面积$S=ah$；

长方形的周长$L=2(a+b)$；

长方形的面积$S=ab$；

正方形的周长$L=4a$；

正方形的面积$S=a^2$；

梯形的面积$S=\frac{1}{2}(a+b)h$．

3.圆

圆的周长$l=2\pi r=\pi d$；

圆的面积$S=\pi r^2=\frac{\pi}{4}d^2$；

设扇形的圆心角为α，半径为r，则它的弧长$l=r\theta$，面积$S=\frac{1}{2}rl=\frac{1}{2}\alpha r^2$．

4.空间几何体

（1）长方体的表面积$S=2(ab+bc+ac)$；长方体的$V=abc$；正方体的表面积$S=6a^2$；正方体的体$V=a^3$．

（2）圆柱的侧面积$S=2\pi rh$；

圆柱的表面积 $S=2\pi rh+2\pi r^2$；

圆柱的体积 $V=\pi r^2 h$.

（3）球的表面积 $S=4\pi r^2$；球的体积 $V=\frac{4}{3}\pi r^3$.

解析几何

一、直线

1.直线的方程

（1）点斜式：$y-y_。=k(x-x_。)$；

（2）斜截式：$y=kx+b$；

（3）截距式：$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$；

（4）一般式：$Ax+By+C=0$.

2.两条直线的位置关系

直线方程	平行的充要条件	垂直的充要条件
l_1：$y=k_1x+b_1$ l_2：$y=k_2x+b_2$	$k_1=k_2,b_1\neq b_2$	$k_1\cdot k_2=-1$
$l_1:A_1x+B_1y+C_1=0$ $l_2:A_2x+B_2y+C_2=0$	$A_1B_2=A_2B_1$，且 $B_1C_2\neq B_2C_1$	$A_1A_2+B_1B_2=0$

3.距离公式

（1）两点间的距离公式：设两点的坐标为 $P_1(x_1,y_1),P_2(x_2,y_2)$，则这两点间的距离 $|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$；

（2）点$P(x_0.y_0)$到直线$Ax+By+C=0$的距离：$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$；

（3）两条平行线$Ax+By+C_1=0$与$Ax+By+C_2=0$的距离是$d=\frac{|C_1-C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

二、圆

1.圆的方程

（1）标准方程：$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2.(a,b)$圆心，$r$为半径.特别地：当圆心为$(0,0)$时，方程为$x^2+y^2=r^2$；

2.点、直线与圆的位置关系（见第六章）

第七章 数据分析

一、计数原理

1.加法（分类）原理：$N = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$.

2.乘法（分步）原理：$N = m_1 \cdot m_2 \cdots m_n$.

3.排列：$P_n^m = n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)$；当 $m = n$ 时，$P_n^m = n!$.

4.组合：$C_n^m = \dfrac{P_n^m}{P_m^m} = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$.

组合数的几个公式：① $C_n^m = C_n^{n-m}$；② $C_{n+1}^m = C_n^m + C_n^{m-1}$.

二、概率基本概念

1.事件间的关系与运算

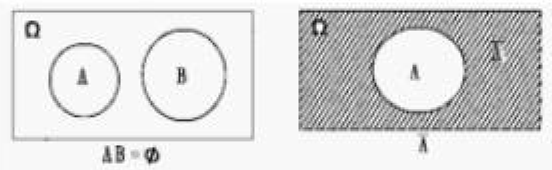
（1）A, B 的和：$A \cup B$ 或 $A + B$，如图（1）;

（2）A, B 的积：$A \cap B$ 或 AB，如右图（2）;

(1)　　(2)

（3）A, B 互不相容：$AB = \phi$，如右图（3）;

（4）对立事件：$\overline{A} \cup A = \Omega, \overline{A} \cap A = \phi$，如右图（4）.



(3)　　(4)

2.事件的概率及其性质

（1）概率的性质：$0 \le P(A) \le 1, P(\Omega) = 1, P(\phi) = 0$..

（2）加法公式：$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

推广：$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-[P(AB)+P(BC)+P(AC)]+P(ABC)$.

（3）对立事件公式：对任意事件$A, P(\overline{A})=1-P(A)$.

3.古典概型的概率计算公式 $P(A)=\dfrac{A\text{包含的基本事件个数}}{\text{总的基本事件个数}}$.

4. 事件的独立性：$P(AB)=P(A)P(B)$. 如果事件 $A_1,\cdots A_n$ 相互独立，则 $P(A_1+\cdots+A_n)=1-P(\overline{A_1})\cdots P(\overline{A_n})$.

5.在n次试验中事件A恰好发生$k(0\le k\le n)$次的概率为$P_n(k)=C_n^k P^k(1-p)^{n-k}$.

6.独立地做一系列的贝努利试验，直到第$k(k=1,2,\cdots,n)$次试验时事件A才首次发生的概率 $P_k=(1-p)^{k-1}p$.

三、统计中常用的特征数

1.平均数$\overline{x}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i(i=1,2,\cdots,n)$（计算方法请见第一章）.

2.方差：$S^2=\dfrac{1}{n}[(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots+(x_n-\overline{x})^2]$.

3.标准差：

$$s=\sqrt{\frac{1}{n}[(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots+(x_n-\overline{x})^2]}.$$