1. Предел последовательности.

Пределом последовательности $\{x_n\}$ называют такое число a, что $\{x_n - a\}$ – бесконечно малая последовательность. Для предела используют запись: $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Последовательность, имеющую (конечный) предел a, называют сходящейся (к пределу a).

Ясно, что предел бесконечно малой последовательности равен нулю.

Если $\{x_n\}$- бесконечно большая последовательность, то пишут $\lim_{n\to\infty} x_n = \pm\infty$. Если при этом, начиная с некоторого номера, все x_n>0, то $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$; если же, начиная с некоторого номера, все x_n <0, то $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

Последовательность $\{x_n\}$ называют:

- Возрастающей, если $x_n < x_{n+1}$ для всех n.
- Неубывающей, если $x_n \leq x_{n+1}$ для всех n.
- Убывающей, если $x_n > x_{n+1}$ для всех n.
- Невозрастающей, если $x_n \geq x_{n+1}$ для всех n.

Все такие последовательности называют монотонными.

Любая монотонная и ограниченная последовательность имеет предел.

2. Предел функции и его свойства. Односторонние пределы. Бесконечные пределы. Пределы на бесконечности.

Будем считать, что функция y=f(x) определена в некоторой окрестности точки x_0 кроме, может быть, самой точки x_0.

Пределом функции y=f(x) в точке x_0 (или при x→ x_0) называют число a, если для любой последовательности $\{x_n\}$ значений аргумента, сходящейся к x_0(при этом все $x_n \neq x_0$), последовательность $\{f(x_n)\}$ значений функции сходится к пределу a.

Если $\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty$ (или $+\infty$, или $-\infty$), то говорят о **бесконечном пределе функции.**

Число а называют **пределом функции f(x) в точке x_0 справа**, если для любой сходящейся к x_0 последовательности $\{x_n\}$, у которой все $x_0 > x_n$, соответствующая последовательность $\{f(x_n)\}$сходится к а. Это записывают так:

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x) = a$$

Аналогично определяют **предел функции f(x) в точке x_0 слева**:

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0-0) = a$$

Пределы функции слева и справа называют **односторонними пределами**.

Свойства пределов функций:

1.Предел суммы/разности двух функций равен сумме/разности их пределов:

$$\lim_{x\to a}[f(x)\pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x)\pm \lim_{x\to a} g(x)$$

2.Предел произведения двух функций равен произведению их пределов:

$$\lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)] = \lim_{x\to a} f(x)\cdot \lim_{x\to a} g(x)$$

3.Предел частного двух функций равен частному их пределов, при условии, что предел знаменателя не равен нулю:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}, \lim_{x\to a} g(x)\neq 0$$

4.Константу можно выносить за знак предела:

$$\lim_{x\to a}[c\cdot f(x)] = c\cdot \lim_{x\to a} f(x)$$

5. Предел степени с натуральным показателем равен степени предела:

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^n = (\lim_{x\to a} f(x))^n, n\in N$$

Число b называется **пределом функции** $y = f(x)$ **на бесконечности** или при $x\to\infty$, если для любого $\forall\epsilon > 0$ существует число $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ такое, что для всех $x\in D(f)$ из того, что $|x| > M$, выполняется неравенство $|f(x) - b| < \epsilon$.

3. Первый и второй замечательные пределы.

Первый замечательный предел

Рассмотрим следующий предел: $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}$

пробуем подставить ноль в функцию: в числителе у нас получается ноль (синус нуля равен нулю), в знаменателе, очевидно, тоже ноль. Таким образом, мы сталкиваемся с неопределенностью вида $\dfrac{0}{0}$, которую, к счастью, раскрывать не нужно. В курсе математического анализа, доказывается, что:

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1$$

Данный математический факт носит название **Первого замечательного предела**. Нередко в практических заданиях функции могут быть расположены по-другому, это ничего не меняет:

$\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\alpha}{\sin\alpha}=1$ – тот же самый первый замечательный предел.

! Но самостоятельно переставлять числитель и знаменатель нельзя! Если дан предел в виде $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\alpha}{\sin\alpha}$, то и решать его нужно в таком же виде, ничего не переставляя.

На практике в качестве параметра α может выступать не только переменная x, но и элементарная функция, сложная функция. **Важно лишь, чтобы она стремилась к нулю**.

Примеры:

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{3x}=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{5x}{3}}{\sin\frac{5x}{3}}=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(arctgx)}{arctgx}=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3-5x^2+x}{\sin(x^3-5x^2+x)}=1$

Здесь $3x\to 0$, $\dfrac{5x}{3}\to 0$, $arctgx\to 0$, $(x^3-5x^2+x)\to 0$, и всё гуд – первый замечательный предел применим.

Пример 1

Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{3x}$

Если мы замечаем в пределе синус, то это нас сразу должно наталкивать на мысль о возможности применения первого замечательного предела.

Сначала пробуем подставить 0 в выражение под знак предела (делаем это мысленно или на черновике):

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{3x}=\frac{0}{0}$$

Итак, у нас есть неопределенность вида $\frac{0}{0}$, ее *обязательно указываем* в оформлении решения. Выражение под знаком предела у нас похоже на первый замечательный предел, но это не совсем он, под синусом находится $7x$, а в знаменателе $3x$.

В подобных случаях первый замечательный предел нам нужно организовать самостоятельно, используя искусственный прием. Ход рассуждений может быть таким: «под синусом у нас $7x$, значит, в знаменателе нам тоже нужно получить $7x$». А делается это очень просто:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{3x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{3\cdot\frac{1}{7}\cdot 7x}$$

То есть, знаменатель искусственно умножается в данном случае на 7 и делится на ту же семерку. Теперь запись у нас приняла знакомые очертания. Когда задание оформляется от руки, то первый замечательный предел желательно пометить простым карандашом:

(1-й замечательный предел)

1

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{3x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{3\cdot\frac{1}{7}\cdot 7x}$$

Что произошло? По сути, обведенное выражение у нас превратилось в единицу и исчезло в произведении:

(1-й замечательный предел)

1

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{3x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{3\cdot\frac{1}{7}\cdot 7x}=\frac{1}{\frac{3}{7}}$$

Теперь только осталось избавиться от трехэтажности дроби:

(1-й замечательный предел)

1

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{3x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{3\cdot\frac{1}{7}\cdot 7x}=\frac{1}{\frac{3}{7}}=\frac{7}{3}$$

<u>Пример 2</u>

Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x^2}{\sin^2\frac{x}{2}}$

Опять мы видим в пределе дробь и синус. Пробуем подставить в числитель и знаменатель ноль:

$$\lim_{x\to 0}\frac{5x^2}{\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{0}{0}$$

Действительно, у нас неопределенность $\frac{0}{0}$ и, значит, нужно попытаться организовать первый замечательный предел. На уроке мы рассматривали правило, что когда у нас есть неопределенность $\frac{0}{0}$, то нужно разложить числитель и знаменатель на множители. Здесь – то же самое, степени мы представим в виде произведения (множителей):

$$\lim_{x\to 0}\frac{5x^2}{\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{5x\cdot x}{\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}}$$

Далее, по уже знакомой схеме организовываем первые замечательные пределы. Под синусами у нас $\frac{x}{2}$, значит, в числителе тоже нужно получить $\frac{x}{2}$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{5x^2}{\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{5x\cdot x}{\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{5\cdot 2\cdot 2\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}}$$

Аналогично предыдущему примеру, обводим карандашом замечательные пределы (здесь их два), и указываем, что они стремятся к единице:

$$\lim_{x\to 0}\frac{5x^2}{\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{5x\cdot x}{\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{5\cdot 2\cdot 2\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}}$$

Собственно, ответ готов:

$$\lim_{x\to 0}\frac{5x^2}{\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{5x\cdot x}{\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{5\cdot 2\cdot 2\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}}=5\cdot 2\cdot 2=20$$

<u>Пример 3</u>

Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg2x}{2x^2}$

Подставляем ноль в выражение под знаком предела:

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg2x}{2x^2}=\frac{0}{0}$$

Получена неопределенность $\frac{0}{0}$, которую нужно раскрывать. Если в пределе есть тангенс, то почти всегда его превращают в синус и косинус по известной тригонометрической формуле $tg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ В данном случае:

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg2x}{2x^2}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x^2\cdot(\cos 2x)^{\to 1}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x\cdot x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=\frac{1}{0}=\infty$$

В итоге получена бесконечность, бывает и такое.

<u>Пример 4</u>

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{5x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 2x}{5x}=\frac{2}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 2x}{x}=$$

$$=\frac{2}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x\cdot\sin 2x}{\frac{1}{2}\cdot 2x}=\frac{2}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{5}\cdot 2\lim_{x\to 0}(\sin 2x)^{\to 0}=\frac{4}{5}\cdot 0=0$$

<u>Пример 5</u>

$$\lim_{x\to 0}\frac{ctgx\cdot(1-\cos^2 3x)}{(x^2+5x)}=\frac{\infty\cdot 0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x\cdot(1-\cos^2 3x)}{\sin x\cdot(x^2+5x)}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x^{\to 1}\cdot(1-\cos^2 3x)}{\sin x\cdot(x^2+5x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 3x}{\sin x\cdot(x^2+5x)}=\frac{0}{0}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 3x}{\sin x\cdot x\cdot(x+5)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 3x}{\sin x\cdot x\cdot(x^{\to 0}+5)}=\frac{1}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 3x}{\sin x\cdot x}=$$
$$=\frac{1}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x\cdot\sin 3x}{\sin x\cdot x}=\frac{1}{5}\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\sin 3x\cdot\sin 3x}{\sin x\cdot 3x\cdot 3x\cdot\frac{1}{9}}=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{\frac{1}{9}}=\frac{9}{5}$$

Второй замечательный предел

В теории математического анализа доказано, что:

$$\lim_{\alpha\to\infty}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha}=e$$

Данный факт носит название **второго замечательного предела**.

Справка: $e=2{,}718281828...$ *– это иррациональное число.*

В качестве параметра α может выступать не только переменная x, но и сложная функция. **Важно лишь, чтобы она стремилась к бесконечности**.

Пример 6

Найти предел $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{4x}$

Когда выражение под знаком предела находится в степени – это первый признак того, что нужно попытаться применить второй замечательный предел.

Но сначала, как всегда, пробуем подставить бесконечно большое число в выражение $\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{4x}$

Нетрудно заметить, что при $x\to\infty$ основание степени $\left(1+\frac{1}{3x}\right)\to 1$, а показатель – $4x\to\infty$, то есть имеется, неопределенность вида 1^{∞}:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{4x}=1^{\infty}$$

Данная неопределенность как раз и раскрывается с помощью второго замечательного предела. Но, как часто бывает, второй замечательный предел не лежит на блюдечке с голубой каемочкой, и его нужно искусственно организовать. Рассуждать можно следующим образом: в данном примере параметр $\alpha = 3x$, значит, в показателе нам тоже нужно организовать $3x$. Для этого возводим основание в степень $3x$, и, чтобы выражение не изменилось – возводим в степень $\frac{1}{3x}$:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{4x} = 1^{\infty} = \lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{3x}\right)^{\frac{1}{3x}\cdot 4x}$$

Когда задание оформляется от руки, карандашом помечаем:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{4x} = 1^{\infty} = \lim_{x\to\infty}\left(\underbrace{\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{3x}}_{e \text{ (2-ой замечательный предел)}}\right)^{\frac{1}{3x}\cdot 4x}$$

Практически всё готово, страшная степень превратилась в симпатичную букву e:

При этом сам значок предела перемещаем в показатель:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{4x} = 1^{\infty} = \lim_{x\to\infty}\left(\underbrace{\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{3x}}_{e \text{ (2-ой замечательный предел)}}\right)^{\frac{1}{3x}\cdot 4x} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x}{3x}} = e^{\frac{4}{3}}$$

Далее, отметки карандашом я не делаю, принцип оформления, думаю, понятен.

<u>Пример 7</u>

Найти предел $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{2x+3}$

Внимание! Предел подобного типа встречается очень часто, пожалуйста, очень внимательно изучите данный пример.

Пробуем подставить бесконечно большое число в выражение, стоящее под знаком предела:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{2x+3}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}$$

В результате получена неопределенность $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}$. Но второй замечательный предел применим к неопределенности вида 1^{∞}. Что делать? Нужно преобразовать основание степени. Рассуждаем так: в знаменателе у нас $x+1$, значит, в числителе тоже нужно организовать $x+1$:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{2x+3}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1-3}{x+1}\right)^{2x+3}$$

Теперь можно почленно разделить числитель на знаменатель:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{2x+3}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1-3}{x+1}\right)^{2x+3}=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x+1}\right)^{2x+3}$$

Вроде бы основание стало напоминать $\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)$, но у нас знак «минус», да и тройка какая-то вместо единицы. Поможет следующее ухищрение, делаем дробь трехэтажной:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{2x+3}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1-3}{x+1}\right)^{2x+3}=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x+1}\right)^{2x+3}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\left(\frac{x+1}{-3}\right)}\right)^{2x+3}=1^{\infty}$$

Таким образом, основание приняло вид $\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)$, и, более того, появилась нужная нам неопределенность 1^{∞}. Организуем второй замечательный предел $\lim_{\alpha\to\infty}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha}$.

Легко заметить, что в данном примере $\alpha=\frac{x+1}{-3}$. Снова исполняем наш искусственный прием: возводим основание степени в $\frac{x+1}{-3}$, и, чтобы выражение не изменилось – возводим в обратную дробь $\frac{-3}{x+1}$:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{2x+3}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1-3}{x+1}\right)^{2x+3}=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x+1}\right)^{2x+3}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\left(\frac{x+1}{-3}\right)}\right)^{2x+3}=1^{\infty}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\left(\frac{x+1}{-3}\right)}\right)^{\frac{x+1}{-3}}\right)^{\frac{-3}{x+1}\cdot(2x+3)}$$

Наконец-то долгожданное $\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha}$ устроено, с чистой совестью превращаем его в букву e:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{2x+3}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1-3}{x+1}\right)^{2x+3}=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x+1}\right)^{2x+3}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\left(\frac{x+1}{-3}\right)}\right)^{2x+3}=1^{\infty}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\left(\frac{x+1}{-3}\right)}\right)^{\frac{x+1}{-3}}\right)^{\frac{-3}{x+1}\cdot(2x+3)}=e^{-3\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+3}{x+1}}=e^{\frac{\infty}{\infty}}$$

Но на этом мучения не закончены, в показателе у нас появилась неопределенность вида. Делим числитель и знаменатель на x:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{2x+3}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1-3}{x+1}\right)^{2x+3}=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x+1}\right)^{2x+3}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\left(\frac{x+1}{-3}\right)}\right)^{2x+3}=1^{\infty}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\left(\frac{x+1}{-3}\right)}\right)^{\frac{x+1}{-3}}\right)^{\frac{-3}{x+1}\cdot(2x+3)}=e^{-3\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+3}{x+1}}=e^{\frac{\infty}{\infty}}=$$

$$=e^{-3\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{2x+3}{x}}{\frac{x+1}{x}}}=e^{-3\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2+{\frac{3}{x}}^{\to 0}}{1+{\frac{1}{x}}^{\to 0}}}=e^{-3\cdot 2}=e^{-6}$$

Готово.

А сейчас мы рассмотрим модификацию второго замечательного предела. Напомню, что второй замечательный предел выглядит следующим образом: $\lim\limits_{\alpha\to\infty}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha}=e$. Однако на практике время от времени можно встретить его «перевёртыш», который в общем виде записывается так:

$$\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e$$

<u>Пример 8</u>

Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}(1+tgx)^{\frac{1}{2x}}$

Сначала (мысленно или на черновике) пробуем подставить ноль (бесконечно малое число) в выражение, стоящее под знаком предела:

$$(1+tg0)^{\frac{1}{2\cdot 0}}=(1+0)^{\frac{1}{0}}=1^{\infty}$$

В результате получена знакомая неопределенность 1^{∞}. Очевидно, что в данном примере $\alpha=tgx$. С помощью знакомого искусственного приема организуем в показателе степени конструкцию $\frac{1}{\alpha}$:

$$\lim_{x\to 0}(1+tgx)^{\frac{1}{2x}}=1^{\infty}=\lim_{x\to 0}\left((1+tgx)^{\frac{1}{tgx}}\right)^{tgx\cdot\frac{1}{2x}}$$

Выражение $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ со спокойной душой превращаем в букву e:

$$\lim_{x\to 0}(1+tgx)^{\frac{1}{2x}}=1^{\infty}=\lim_{x\to 0}\left((1+tgx)^{\frac{1}{tgx}}\right)^{tgx\cdot\frac{1}{2x}}=e^{\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx}{x}}=e^{\frac{0}{0}}$$

Еще не всё, в показателе у нас появилась неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Раскладываем тангенс на синус и косинус (ничего не напоминает?):

$$\lim_{x\to 0}(1+tgx)^{\frac{1}{2x}}=1^{\infty}=\lim_{x\to 0}\left((1+tgx)^{\frac{1}{tgx}}\right)^{tgx\cdot\frac{1}{2x}}=e^{\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx}{x}}=e^{\frac{0}{0}}=$$

$$=e^{\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x\cdot\cos x}}$$

Косинус нуля стремится к единице (не забываем помечать карандашом), поэтому он просто пропадает в произведении:

$$\lim_{x\to 0}(1+tgx)^{\frac{1}{2x}} = 1^{\infty} = \lim_{x\to 0}\left((1+tgx)^{\frac{1}{tgx}}\right)^{tgx\cdot\frac{1}{2x}} = e^{\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x}} = e^{\frac{0}{0}} =$$

$$= e^{\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x\cdot(\cos x)^{-1}}} = e^{\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}} = e^{\frac{1}{2}}$$

4. Непрерывность функции в точке и на множестве.

Определение непрерывности функции в точке. Рассмотрим функцию f и точку a ∈ R. Если a принадлежит области определения D(f) функции f, то будем говорить, что функция f **непрерывна** в точке a, если

$$(\forall\varepsilon>0\,\exists\delta>0\,\forall x\in D(f))\ |x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(a)|<\varepsilon.$$

Если к тому же a — предельная точка множества D(f), то непрерывность f в a равносильна тому, что существует $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ и выполнено равенство $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ = f(a). Если же a не является предельной точкой D(f) и тем самым говорить о пределе в этой точке невозможно, то любая функция в такой точке непрерывна. Договоримся также считать функцию f непрерывной в предельной точке множества D(f), не принадлежащей D(f), если существует конечный предел $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ (требовать в этом случае равенства его значению функции в точке затруднительно — точка по предположению не входит в область определения, так что такого значения просто нет).

В случае отсутствия непрерывности функции в данной точке говорят, что она **разрывна** в этой точке.

Теорема (о непрерывности функций, полученных в результате алгебраических операций). Линейная комбинация, произведение и отношение (последнее при условии отличия от нуля знаменателя) непрерывных в точке a функций непрерывны в этой точке.

Теорема (о непрерывности композиции). Пусть функция f непрерывна в точке a, а функция g непрерывна в точке f(a). Тогда композиция g ∘ f непрерывна в точке a.

Определение непрерывности функции на множестве. Говорят, что функция непрерывна на множестве, если ее сужение на это множество непрерывно в каждой точке данного множества.

Подчеркнем, что в данном определении непрерывности функции на множестве затрагиваются значения только в точках данного множества, в то время как значения в точках, в него не входящих, никакого влияния на непрерывность на данном множестве не оказывают.

5. Свойства функций, непрерывных на отрезке.

Свойство 1: (Первая теорема Вейерштрасса (Вейерштрасс Карл (1815-1897) - немецкий математик)). Функция, непрерывная на отрезке, ограничена на этом отрезке, т.е. на отрезке $[a,b]$ выполняется условие - $M \le f(x) \le M$.

Доказательство этого свойства основано на том, что функция, непрерывная в точке x_0, ограничена в некоторой ее окрестности, а если разбивать отрезок $[a,b]$ на бесконечное количество отрезков, которые “стягиваются” к точке x_0, то образуется некоторая окрестность точки x_0.

Свойство 2: Функция, непрерывная на отрезке $[a,b]$, принимает на нем наибольшее и наименьшее значения.

Т.е. существуют такие значения x_1 и x_2, что $f(x_1) = m, f(x_2) = M$, причем $m \le f(x) \le M$.

Отметим эти наибольшие и наименьшие значения функция может принимать на отрезке и несколько раз (например - $f(x) = \sin x$).

Разность между наибольшим и наименьшим значением функции на отрезке называется колебанием функции на отрезке.

Свойство 3: (Вторая теорема Больцано - Коши). Функция, непрерывная на отрезке $[a,b]$, принимает на этом отрезке все значения между двумя произвольными величинами.

Свойство 4: Если функция $f(x)$ непрерывна в точке $x = x_0$, то существует некоторая окрестность точки x_0, в которой функция сохраняет знак.

Свойство 5: (Первая теорема Больцано (1781-1848) - Коши). Если функция $f(x)$ - непрерывная на отрезке $[a,b]$ и имеет на концах отрезка значения противоположных знаков, то существует такая точка внутри этого отрезка, где $f(x) = 0$.

Т.е. если $sign(f(a)) \neq sign(f(b))$, то $\exists x_0 : f(x_0) = 0$.

Определение. Функция $f(x)$ называется **равномерно непрерывной** на отрезке $[a,b]$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\Delta > 0$ такое, что для любых точек $x_1 \in [a,b]$ и $x_2 \in [a,b]$ таких, что $|x_2 - x_1| < \Delta$ верно неравенство $f(x_2) - f(x_1) < \varepsilon$.

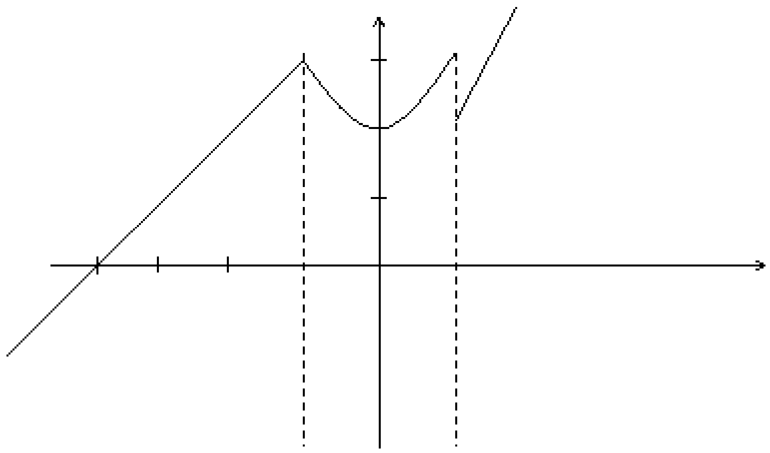
Отличие равномерной непрерывности от "обычной" в том, что для любого е существует свое Δ, не зависящее от x, а при "обычной" непрерывности Δ зависит от ε и x.

Свойство 6: Теорема Кантора (Кантор Георг (1845-1918) - немецкий математик). Функция, непрерывная на отрезке, равномерно непрерывна на нем. (Это свойство справедливо только для отрезков, а не для интервалов и полуинтервалов.)

Свойство 7: Если функция $f(x)$ определена, монотонна и непрерывна на некотором промежутке, то и обратная ей функция $x = g(y)$ тоже однозначна, монотонна и непрерывна.

Пример. Исследовать на непрерывность функцию и определить тип точек разрыва, если они есть. $\lim\limits_{x \to -1-0} f(x) = 3$ $\lim\limits_{x \to 1-0} f(x) = 3$ $\lim\limits_{x \to -1+0} f(x) = 3$ $\lim\limits_{x \to 1+0} f(x) = 2$ в точке $x = 1$ функция непрерывна в точке $x = 1$

точка разрыва 1 - го рода.



6. Асимптоты графика функции. Виды асимптот.

Асимптоты графика функции y = (x) — это прямые Ax + By + C = 0, характеризующие поведение графика функции на бесконечности. При неограниченном увеличении x или y график функции неограниченно приближается к асимптоте. Различают вертикальные и наклонные асимптоты.

Виды асимптот.

- Прямая x = x_0 называется **вертикальной асимптотой** графика функции y=f(x), если хотя бы одно из предельных значений $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ или $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ равно $+\infty$ или $-\infty$.
- Прямая y = y_0 называется **горизонтальной асимптотой** графика функции y =f(x), если хотя бы одно из предельных значений $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ или $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ равно y_0
- Прямая y=kx+b называется **наклонной асимптотой** графика функции y=f(x), если $\lim\limits_{x\to \infty}[f(x) - kx - b] = 0$

7. Производная и дифференциал функции. Их геометрический смысл.

Производной функции y=f(x) в точке x=x_0 называют предел

$$y'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Если этот предел существует и конечен, то функцию f(x) называют дифференцируемой в точке x_0.

Дифференциал функции y = f(x) равен произведению её производной на приращение независимой переменной x (аргумента).

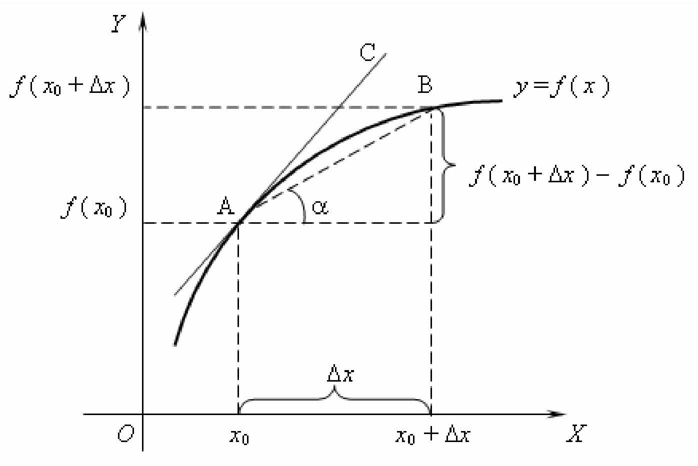
Это записывается так:

$$\partial y = y' \Delta x$$

Или

$$\partial f(x) = f'(x)\, \Delta x$$

Геометрический смысл производной. Производная в точке x 0 равна угловому коэффициенту касательной к графику функции y = f(x) в этой точке.



Из видно, что для любых двух точек A и B графика функции: $\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$, где a угол наклона секущей AB. Таким образом, разностное отношение равно угловому коэффициенту секущей. Если зафиксировать точку A и двигать по направлению к ней точку B, то Δx неограниченно уменьшается и приближается к 0, а секущая AB приближается к касательной AC. Следовательно, предел разностного отношения равен угловому коэффициенту касательной в точке A.

tg$a$ = $\frac{dy}{dx}$ = $f'(x_0)$

8. Правила дифференцирования.

Теорема 1

Постоянный множитель с можно выносить за знак производной:

$$(cu(x))' = c\,u'(x).$$

Теорема 1 непосредственно вытекает из определения производной функции и свойства пределов функций, согласно которому постоянный множитель можно выносить за знак предела.

Теорема 2

Если существуют производные $u'(x)$ и $v'(x)$, то производная от суммы (разности) функций $u(x)$ и $v(x)$ равна сумме (разности) производных:

$$(u(x) \pm v(x))' = u'(x) \pm v'(x).$$

Правило дифференцирования суммы или разности функций также следует из определения производной функции и свойства пределов функций, согласно которому предел суммы (или разности) функций равен сумме (или разности) соответствующих пределов.

Теорема 3

Если существуют производные $u'(x)$ и $v'(x)$, то выполняются следующие правила дифференцирования произведения функций и частного от их деления:

$$(u \cdot v)' = u'v + uv',$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \qquad (v(x) \neq 0).$$

9. Основные теоремы о дифференцируемых функциях (формулировки).

Теорема Ферма (О равенстве нулю производной)

Пусть функция $y = f(x)$удовлетворяет следующим условиям:

1. она дифференцируема на интервале $(a; b)$
2. достигает наибольшего или наименьшего значения в точке $x_0 \in (a; b)$

Тогда производная в этой точке равна нулю, то есть $f'(x_0) = 0$

Следствие. (Геометрический смысл теоремы Ферма)

В точке наибольшего и наименьшего значения, достигаемого внутри промежутка, касательная к графику функции параллельна оси абсцисс.

Теорема Ролля (О нуле производной функции, принимающей на концах отрезка равные значения)

Пусть функция $y = f(x)$

непрерывна на отрезке $[a; b]$

дифференцируема на интервале $(a; b)$

на концах отрезка принимает равные значения $f(a) = f(b)$

Тогда на интервале $(a; b)$ найдется, по крайней мере, одна точка x_0, в которой $f'(x_0) = 0$

Следствие. (Геометрический смысл теоремы Ролля)

Найдется хотя бы одна точка, в которой касательная к графику функции будет параллельна оси абсцисс.

Следствие.

Если $f(a) = f(b) = 0$, то теорему Ролля можно сформулировать следующим образом: между двумя последовательными нулями дифференцируемой функции имеется, хотя бы один, нуль производной.

Теорема Лагранжа. (О конечных приращениях)

Пусть функция $y = f(x)$

непрерывна на отрезке [a; b];

дифференцируема на интервале (a; b).

Тогда на интервале (a; b) найдется по крайней мере одна точка x_0, такая, что

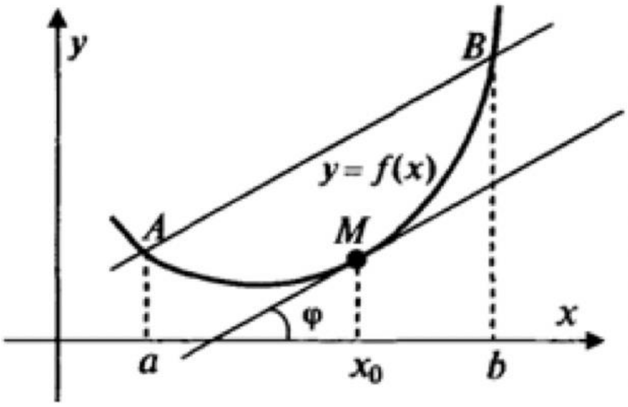
$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_0)$$

Замечание:

Теорема Ролля есть частный случай теоремы Лагранжа, когда $f(a) = f(b)$

Следствие. (Геометрический смысл теоремы Лагранжа)

На кривой $y = f(x)$ между точками a и b найдется точка $M(x_0; f(x_0))$, такая, что через эту точку можно провести касательную, параллельную хорде AB



Доказанная формула называется **формулой Лагранжа** или **формулой конечных приращений**. Она может быть переписана в виде:

$$f(b) - f(a) = f'(x_0)(b - a)$$

Теорема Коши. (Об отношении конечных приращений двух функций)

Если функции y = f(x) и $y = g(x)$:

непрерывны на отрезке [a; b];

дифференцируемы на интервале (a; b).;

производная $g'(x) \neq 0$ на интервале (a; b).,

тогда на этом интервале найдется по крайней мере одна точка x_0 , такая, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

Теорема

Если производная функции равна нулю на некотором промежутке, то функция является постоянной на этом промежутке.

Теорема

Если две функции имеют равные производные на некотором промежутке, то они на этом промежутке отличаются друг от друга на некоторое слагаемое.

10. Монотонность и экстремумы функции.

Монотонная функция — это функция, <u>приращение</u> которой не меняет знака, то есть либо всегда неотрицательное, либо всегда неположительное. Если в дополнение приращение не равно нулю, то функция называется **строго монотонной**. Монотонная функция — это функция, меняющаяся в одном и том же направлении.

Функция возрастает, если большему значению аргумента соответствует большее значение функции. Функция убывает, если большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции.

Пусть дана функция $f : M \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$ Тогда

- функция f называется **возрастающей** на M, если
  $\forall x, y \in M,\ x > y \Rightarrow f(x) \geq f(y).$
- функция f называется **строго возрастающей** на M, если
  $\forall x, y \in M,\ x > y \Rightarrow f(x) > f(y).$
- функция f называется **убывающей** на M, если
  $\forall x, y \in M,\ x > y \Rightarrow f(x) \leq f(y).$
- функция f называется **строго убывающей** на M, если
  $\forall x, y \in M,\ x > y \Rightarrow f(x) < f(y).$

(Строго) возрастающая или убывающая функция называется (*строго) монотонной*.

Определение экстремума

Функция y = f(x) называется **возрастающей (убывающей)** в некотором интервале, если при x1<x2 выполняется неравенство (f(x1) < f(x2) (f(x1) > f(x2)).

Если дифференцируемая функция y = f(x) на отрезке [a, b] возрастает (убывает), то её производная на этом отрезке f '(x) > 0

(f ' (x) < 0).

Точка x_0 называется **точкой локального максимума (минимума)** функции f(x), если существует окрестность точки x_0, для всех точек которой верно неравенство f(x) ≤ f(x_0) (f(x) ≥ f(x_0)).

Точки максимума и минимума называются точками экстремума, а значения функции в этих точках - её экстремумами.

Точки экстремума

Необходимые условия экстремума. Если точка x_0 является точкой экстремума функции f(x), то либо f '(x_0) = 0, либо f (x_0) не существует. Такие точки называют критическими, причём сама функция в критической точке определена. Экстремумы функции следует искать среди её критических точек.

Первое достаточное условие. Пусть x_0 - критическая точка. Если f ' (x) при переходе через точку x_0 меняет знак плюс на минус, то в точке x_0 функция имеет максимум, в противном случае - минимум. Если при переходе через критическую точку производная не меняет знак, то в точке x_0 экстремума нет.

Второе достаточное условие. Пусть функция f(x) имеет производную f ' (x) в окрестности точки x_0 и вторую производную $f''(x_0)$ в самой точке x_0. Если f ' (x_0) = 0, $f''(x_0)$>0 ($f''(x_0)$<0), то точка x_0 является точкой локального минимума (максимума) функции f(x). Если же $f''(x_0)$=0, то нужно либо пользоваться первым достаточным условием, либо привлекать высшие производные.

На отрезке [a,b] функция y = f(x) может достигать наименьшего или наибольшего значения либо в критических точках, либо на концах отрезка [a,b].

11. Выпуклость и вогнутость функции. Точки перегиба.

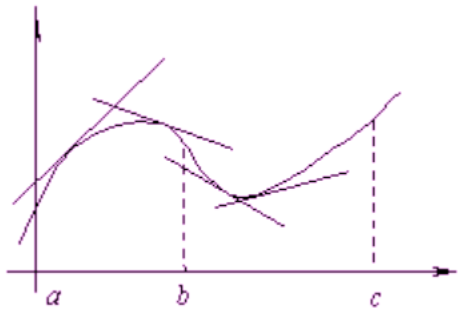


График функции y=f(x) называется **выпуклым** на интервале (a; b), если он расположен ниже любой своей касательной на этом интервале.

График функции y=f(x) называется **вогнутым** на интервале (a; b), если он расположен выше любой своей касательной на этом интервале.

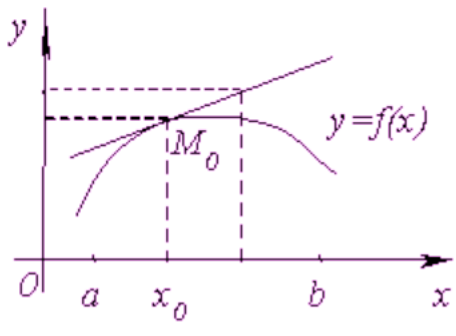
На рисунке показана кривая, выпуклая на (a; b) и вогнутая на (b; c).

Рассмотрим достаточный признак, позволяющий установить, будет ли график функции в данном интервале выпуклым или вогнутым.

Теорема. Пусть y=f(x) дифференцируема на (a; b). Если во всех точках интервала (a; b) вторая производная функции y = f(x) отрицательная, т.е. f''(x)<0, то график функции на этом интервале выпуклый, если же f''(x) > 0 – вогнутый.

Доказательство. Предположим для определённости, что f''(x) < 0 и докажем, что график функции будет выпуклым.

Возьмём на графике функции y = f(x) произвольную точку M0 с абсциссой x0 □ (a; b) и проведём через точку M0 касательную. Её уравнение $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$. Мы должны показать, что график функции на (a; b) лежит ниже этой касательной, т.е. при одном и том же значении ордината кривой y = f(x) будет меньше ордината касательной.



Точка перегиба функции

Точка перегиба функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ внутренняя точка x_0 области определения f, такая что f непрерывна в этой точке, существует конечная или определённого знака бесконечная производная в этой точке, и x_0 является одновременно концом интервала строгой выпуклости вверх и началом интервала строгой выпуклости вниз, или наоборот.

Неофициальное

В этом случае точка $(x_0; f(x_0))$ является точкой перегиба графика функции, то есть график функции f в точке $(x_0; f(x_0))$ «перегибается» через касательную к нему в этой точке: при $x < x_0$ касательная лежит под графиком f, а при $x > x_0$ — над графиком f (или наоборот)

Условия существования

Необходимое условие существования точки перегиба: если функция f(x), дважды дифференцируемая в некоторой окрестности точки x_0, имеет в x_0 точку перегиба, то $f''(x_0)=0$.

Достаточное условие существования точки перегиба: если функция $f(x)$ в некоторой окрестности точки x k раз непрерывно дифференцируема, причём k нечётно и $k\geq 3$, и $f^{(n)}=0$ при $n=2,3,...,k-1$, а $f^{(k)}\neq 0$, то функция $f(x)$ имеет в x_0 точку перегиба.

12. Первообразная. Неопределенный интеграл и его свойства.

Первообразной функции *f(x)* на промежутке *(a; b)* называется такая функция *F(x)*, что выполняется равенство $F'(x)=f(x)$ для любого *x* из заданного промежутка.

Если принять во внимание тот факт, что производная от константы *C* равна нулю, то справедливо равенство $(F(x)+C)'=f(x)$. Таким образом, функция *f(x)* имеет множество первообразных *F(x)+C*, для произвольной константы *C*, причем эти первообразные отличаются друг от друга на произвольную постоянную величину.

Все множество первообразных функции *f(x)* называется **неопределенным интегралом** этой функции и обозначается $\int f(x)dx = F(x) + C$.

Выражение $f(x)dx$ называют подынтегральным выражением, а *f(x)* – подынтегральной функцией. Подынтегральное выражение представляет собой дифференциал функции *f(x)*.

Действие нахождения неизвестной функции по заданному ее дифференциалу называется ***неопределенным*** **интегрированием**, потому что результатом интегрирования является не одна функция *F(x)*, а множество ее первообразных *F(x)+C*.

На основании свойств производной можно сформулировать и доказать **свойства неопределенного интеграла** (свойства первообразной).

- $\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x)+C)' = f(x)$ Производная результата интегрирования равна подынтегральной функции.
- $\int d(F(x)) = \int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x) + C$ Неопределенный интеграл дифференциала функции равен сумме самой функции и произвольной константы.
- $\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx$, где *k* – произвольная константа. Коэффициент можно выносить за знак неопределенного интеграла.
- $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$ Неопределенный интеграл суммы/разности функций равен сумме/разности неопределенных интегралов функций.

Промежуточные равенства первого и второго свойств неопределенного интеграла приведены для пояснения.

Для доказательства третьего и четвертого свойств достаточно найти производные от правых частей равенств:

$$\left(k\cdot\int f(x)dx\right)' = k\cdot\left(\int f(x)dx\right)' = k\cdot f(x)$$

$$\left(\int f(x)dx \pm \int g(x)dx\right)' = \left(\int f(x)dx\right)' \pm \left(\int g(x)dx\right)' = f(x)\pm g(x)$$

Эти производные равны подынтегральным функциям, что и является доказательством в силу первого свойства. Оно же используется в последних переходах.

Таким образом, задача интегрирования является обратной задаче дифференцирования, причем между этими задачами очень тесная связь:

-первое свойство позволяет проводить проверку интегрирования. Чтобы проверить правильность выполненного интегрирования достаточно вычислить производную полученного результата. Если полученная в результате дифференцирования функция окажется равной подынтегральной функции, то это будет означать, что интегрирование проведено верно;

-второе свойство неопределенного интеграла позволяет по известному дифференциалу функции найти ее первообразную. На этом свойстве основано непосредственное вычисление неопределенных интегралов.

13. Методы интегрирования.

1. Непосредственное интегрирование

Под непосредственным интегрированием понимают такой способ интегрирования, при котором данный интеграл путем тождественных преобразований подынтегральной функции и применения свойств неопределенного интеграла приводится к одному или нескольким табличным интегралам.

Пример 1. Найти $\int \frac{3x^4 + 2x^2 - 3x + 7}{x^2} dx$.

Разделив числитель на знаменатель, получим:Δ

$$\int \frac{3x^4+2x^2-3x+7}{x^2}dx = 3\int x^2 dx + 2\int dx - 3\int \frac{dx}{x} + 7\int x^{-2}dx = 3\frac{x^3}{3} + 2x - 3\ln|x| + 7\frac{x^{-1}}{-1} + C =$$

$$= x^3 + 2x - 3\ln|x| - \frac{7}{x} + C \ \nabla.$$

Отметим, что нет надобности после каждого слагаемого ставить произвольную постоянную, потому что их сумма есть также произвольная постоянная, которую мы пишем в конце.

2. Интегрирование методом замены переменной

Вычислить заданный интеграл непосредственным интегрированием удается далеко не всегда, а иногда это связано с большими трудностями. В этих случаях применяют другие приемы. Одним из наиболее эффективных является метод замены переменной. Сущность его заключается в том, что путем введения новой переменной интегрирования удается свести заданный интеграл к новому, который сравнительно легко берется непосредственно. Существуют два варианта этого метода.

<u>а) Метод подведения функции под знак дифференциала</u>

По определению дифференциала функции $\phi'(x)dx = d\phi(x)$.

Переход в этом равенстве слева направо называют "подведением множителя $\phi'(x)$ под знак дифференциала".

Теорема об инвариантности формул интегрирования

Всякая формула интегрирования сохраняет свой вид при подстановке вместо независимой переменной любой дифференцируемой функции от нее, т.е., если

$\int f(x)dx = F(x) + C$, то и $\int f(u)du = F(u) + C$,

где $u = \phi(x)$ - любая дифференцируемая функция от x. Ее значения должны принадлежать интервалу, в котором функция f определена и непрерывна.

Доказательство:

Из того, что $\int f(x)dx = F(x) + C$, следует $F'(x) = f(x)$. Возьмем теперь функцию $F(u) = F[\phi(x)]$. Для ее дифференциала в силу свойства инвариантности формы первого дифференциала функции* имеем

$dF(u) = F'(u)du = f(u)du$.

Отсюда $\int f(u)du = \int dF(u) = F(u) + C$.

Пусть требуется вычислить интеграл $\int f(x)dx$. Предположим, что существуют дифференцируемая функция $u = \phi(x)$ и функция $g(u)$ такие, что подынтегральное выражение $f(x)dx$ может быть записано в виде

$f(x)dx = g(\phi(x))\phi'(x)dx = g(u)du$.	(1)

Тогда

$\int f(x)dx = \int g(\phi(x))\phi'(x)dx = \int g(u)du\Big\vert_{u=\phi(x)}$,	(2)

т.е. вычисление интеграла $\int f(x)dx$ сводится к вычислению интеграла $\int g(u)du$ и последующей подстановке $u = \phi(x)$.

<u>Пример 1.</u> $\int \cos 5x dx = \frac{1}{5}\int \cos 5x d(5x) = \frac{1}{5}\sin 5x + C$.

<u>б) Метод подстановки (метод введения новой переменной)</u>

Пусть интеграл $\int f(x)dx$ ($f(x)$ - непрерывна) не может быть непосредственно преобразован к виду табличного. Сделаем подстановку $x = \phi(t)$, где $\phi(t)$ - функция, имеющая непрерывную производную. Тогда $f(x) = f|\phi(t)|$, $dx = \phi'(t)dt$ и

$\int f(x)dx = \int f[\phi(t)]\phi'(t)dt$. (3)

Формула (3) называется формулой замены переменной в неопределенном интеграле.

Как правильно выбрать подстановку? Это достигается практикой в интегрировании. Но можно установить ряд общих правил и некоторых приемов для частных случаев интегрирования.

Правило интегрирования способом подстановки состоит в следующем.

1. Определяют, к какому табличному интегралу приводится данный интеграл (предварительно преобразовав подынтегральное выражение, если нужно).
2. Определяют, какую часть подынтегральной функции заменить новой переменной, и записывают эту замену.
3. Находят дифференциалы обеих частей записи и выражают дифференциал старой переменной (или выражение, содержащее этот дифференциал) через дифференциал новой переменной.
4. Производят замену под интегралом.
5. Находят полученный интеграл.
6. Производят обратную замену, т.е. переходят к старой переменной.

<u>Пример 19.</u> Найти $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$.

- Вычислим интеграл $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$, придерживаясь следующей формы записи:

$$\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx = \left| \begin{array}{l} \sqrt{x} = t \\ \frac{dx}{2\sqrt{x}} = dt \\ \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2dt \end{array} \right| = 2\int \sin t\,dt = -2\cos t + C = -2\cos\sqrt{x} + C.$$

Этот интеграл найдем подведением $\sqrt{x}$ под знак дифференциала.

$$\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx = 2\int \sin\sqrt{x}\,d(\sqrt{x}) = -2\cos\sqrt{x} + C \ \nabla.$$

3. Метод интегрирования по частям

Пусть $u = u(x)$ и $v = v(x)$ - непрерывно дифференцируемые функции. На основании формулы дифференциала произведения имеем

$d(uv) = udv + vdu$.

Отсюда

$udv = d(uv) - vdu$.

Интегрируя, получим:

$\int udv = \int d(uv) - \int vdu$ или окончательно

$\int udv = uv - \int vdu$.	(4)

14. Определенный интеграл и его геометрический смысл. Свойства определённого интеграла. Интеграл с переменным верхним пределом. Формула Ньютона-Лейбница.

В неопределенном интеграле не заданы границы интегрирования, и в результате нахождения неопределенного интеграла от функции $f(x)$ мы получаем множество первообразных, отличающихся друг от друга на постоянную величину С.

Если заданы границы интегрирования, то мы получаем **определенный интеграл**:

$$\int_a^b f(x)dx$$

Геометрический смысл определенного интеграла

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана непрерывная неотрицательная функция $y = f(x)$. **Криволинейной трапецией** называется фигура, ограниченная сверху графиком функции $y = f(x)$, снизу – осью Ох, слева и справа – прямыми $x = a$ и $x = b$ (рис. 2).

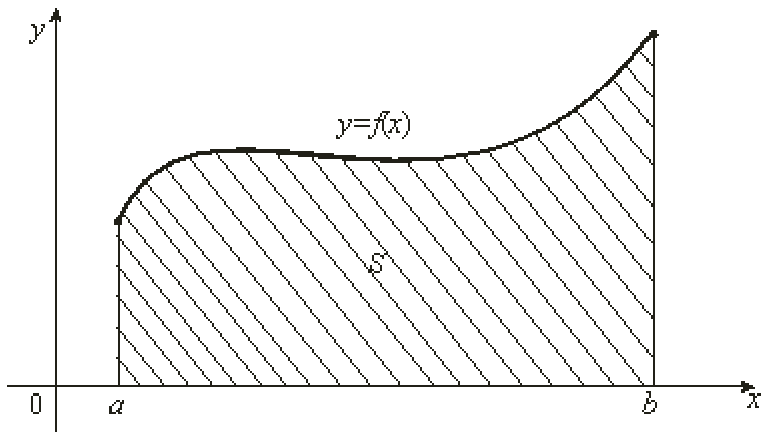


Рис. 2

Определенный интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ от неотрицательной функции *y* = *f*(*x*) с геометрической точки зрения равен площади криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком функции *y* = *f*(*x*), слева и справа – отрезками прямых *x* = *a* и *x* = *b*, снизу – отрезком оси Ох.

Свойства определенного интеграла

Ниже предполагается, что f(x) и g(x) - непрерывные функции на замкнутом интервале [a,b].

1. b∫a1dx=b−a
2. b∫akf(x)dx=kb∫af(x)dx, где k - константа;
3. b∫a[f(x)+g(x)]dx=b∫af(x)dx+b∫ag(x)dx
4. b∫af(x)dx=c∫af(x)dx+b∫cf(x)dx, где a<c<b;
5. Если 0≤f(x)≤g(x) для всех x∈[a,b], то 0≤b∫af(x)dx≤b∫ag(x)dx.
6. a∫af(x)dx=0
7. b∫af(x)dx=−a∫bf(x)dx
8. Если f(x)≥0 в интервале [a,b], то b∫af(x)dx≥0

F(x)=x∫af(t)dt, f∈R(a,b),x∈[a,b]. Такая функция называется *интегралом с переменным верхним пределом*.

Формула Ньютона-Лейбница - даёт соотношение между операциями взятия определенного интеграла и вычисления первообразной. Формула Ньютона-Лейбница - основная формула интегрального исчисления.

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Данная формула верна для любой функции **f(x)**, непрерывной на отрезке **[a, b]**, **F** - первообразная для **f(x)**. Таким образом, для вычисления определенного интеграла нужно найти какую-либо первообразную **F** функции **f(x)** , вычислить ее значения в точках **a и b** и найти разность **F(b) – F(a)**.

15. Несобственный интеграл.

Определенный интеграл b∫af(x)dx называется *несобственным интегралом*, если выполняется, по крайней мере, одно из следующих условий:

- Предел a или b (или оба предела) являются бесконечными;
- Функция f(x) имеет одну или несколько точек разрыва внутри интервала [a,b].

16. Функция двух переменных и ее график. Понятие предела и непрерывности функции в точке. Линии уровня.

Функция двух переменных.Если каждой паре (x;y) значений двух независимых друг от друга переменных величин x и y из некоторого множества D соответствует единственное значение величины, то говорят, что z есть функция двух независимых переменных x и y, определенная на множестве D.

Обозначается: z=f(x;y) или z=z(x;y).

Например, $z = x^2 + y^2$, $z = f(x;y)$; S=ab, S=S(a;b) - функции двух переменных; V=abc, V=V(a,b,c) – функция трех переменных;

График функции двух переменных. Графиком функции z= f(x,y) называется поверхность, представляющая собой геометрическое место точек функции, когда точка (x,y) принимает все значения из области определения.

Линии уровня. Линией уровня функции z= f(x,y) называется множество точек на плоскости таких, что во всех этих точках значение функции одно и то же f(x,y)=c, где c=const. Число c называется уровнем

Понятие предела и непрерывности функции в точке. Действительное число А **называется пределом функции** f(x) при $x \to a$, если для любой окрестности $O_\varepsilon(A)$ точки А существует окрестность $O_\delta(a)$точки a такая, что для любого $x \in X^{\backslash a}$ из окрестности $O_\delta(a)$ значения $f(x)$ попадают в окрестность $O_\varepsilon(A)$

Функция $f(x)$ называется **непрерывной в точке $\boldsymbol{a}$** , если:

1. функция $f(x)$ определена в точке a и ее окрестности;

2. существует конечный предел функции $f(x)$ в точке a;

3. этот предел равен значению функции в точке a, т.е. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(\lim\limits_{x\to a} x) = f(a)$

17. Частные производные. Дифференциал функции в точке и его геометрический смысл.

Частные производные. Это предел отношения приращения функции по выбранной переменной к приращению этой переменной, при стремлении этого приращения к нулю.

Частные производные для функции двух переменных z(x,y) записываются в следующем виде z'_x, z'_y и находятся по формулам:

<u>Частные производные первого порядка</u>

$$z'_x = \frac{\partial z}{\partial y}$$

$$z'_y = \frac{\partial z}{\partial y}$$

<u>Частные производные второго порядка</u>

$$z''_{xx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial x}$$

$$z''_{yy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial y}$$

$$z''_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

$$z''_{yx} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

Частная производная сложной функции

а) Пусть $z(t) = f(x(t), y(t))$, тогда производная сложной функции определяется по формуле:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

б) Пусть $z(u, v) = z(x(u, v), y(u, v))$, тогда частные производные функции находится по формуле:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}$$

Частные производные неявно заданной функции

а) Пусть $F(x, y(x)) = 0$, тогда

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f'_x}{f'_y}$$

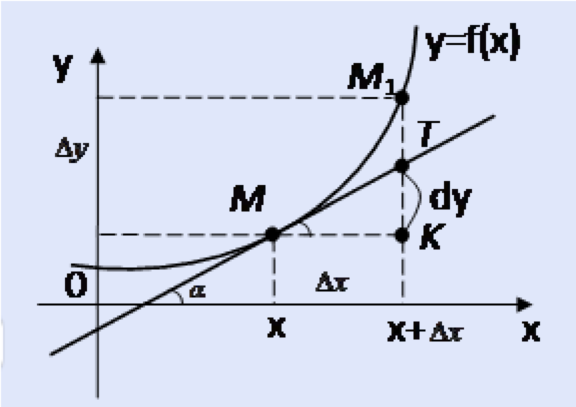
б) Пусть $F(x, y, z) = 0$, тогда

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z}; z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z}$$

Дифференциал функции в точке и его геометрический смысл.

Дифференциалом функции $y = f(x)$ в точке x называется произведение производной $f'(x)$ в этой точке на приращение аргумента Δx.

$$dy = f'(x) \cdot \Delta x$$



К графику функции $y = f(x)$ в точке M(x,y) проведем касательную.

α – угол наклона касательной к оси Ox.

Дадим x приращение Δx, тогда функция получит приращение Δy. На кривой получим точку M1(x+Δx,y+Δy), KT – **приращение ординаты касательной.**

$$tg\alpha = f'(x)$$

Геометрически $KT = dy$

Дифференциал функции y=f(x) в т. x равен приращению ординаты касательной при переходе из точки с абсциссой x в точку с абсциссой x+Δx.

18. Производная функции по направлению. Градиент функции.

Производная по направлению — одно из обобщений понятия производной функции нескольких переменных (u = *f*(x, y, z)). Производная по направлению показывает, как быстро функция изменяется при движении в заданном направлении.

Формула, по которой можно найти производную по направлению:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial v}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$$

Градиент — это производная по пространству, но в отличие от производной по одномерному времени, градиент является не скаляром, а векторной величиной. Градиент характеризует направление и максимальную величину функции в точке.

Вектор с координатами $\left(\frac{\partial u}{\partial x}; \frac{\partial u}{\partial y}; \frac{\partial u}{\partial z}\right)$ называется градиентом функции u = *f*(x, y, z) и обозначается:

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$$

19. Частные производные и дифференциалы высших порядков функции двух переменных.

Частные производные – почти то же самое, что и «обычные» производные функции одной переменной. Для частных производных справедливы все правила дифференцирования и таблица производных элементарных функций. Есть только пара небольших отличий… На курсе в задачах мы встречали частные производные первого и второго порядка, т.е. $z`_x$ и $z``_x$ соответственно.

Правила:

1. Когда мы дифференцируем *x*, то переменная *y* считается константой.

2. Когда же дифференцирование осуществляется по *y*, то константой считается *x*.

3. Правила и таблица производных элементарных функций справедливы для применения любой переменной, по которой ведется дифференцирование.

Производные второго порядка:

Обозначения:

z''_{xx} или $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ – вторая производная по «икс»

z''_{yy} или $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ – вторая производная по «игрек»

z''_{xy} или $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ – *смешанная* производная «икс по игрек»

z''_{yx} или $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ – *смешанная* производная «игрек по икс»

Со второй производной нет никаких проблем. Говоря простым языком, **вторая производная – это производная от первой производной**.

Дифференциалом второго порядка функции z=f(x, y) называется дифференциал от дифференциала (первого порядка) этой функции $d^n z=d(d^{n-1}z)$. Аналогично определяются дифференциалы функции z порядка выше второго.

20. Безусловный экстремум. Необходимые и достаточные условия его существования.

Определение: Функция $z=f(x_1,\dots, x_n)$ имеет максимум (минимум) в точке M_0, если существует такая окрестность точки M_0, что для всякой точки M этой окрестности выполняется неравенство f(M0)>=f(M) (соответственно f(M0)<=f(M)). Точки максимума и минимума называют точками экстремума.

Необходимый признак экстремума: если функция z=f (x1,…, xn) определена в окрестности точки экстремума M0 и имеет в ней частные производные первого порядка, то M0 – стационарная точка, т.е. в этой точке обращаются в нуль все частные производные первого порядка.

Достаточный признак экстремума (для функции двух переменных): Пусть функция z=f(x,y) имеет непрерывные частные производные второго порядка в некоторой окрестности стационарной точки M0(x0,y0). Положим

$$\Delta= z''xx*z''yy – [z''xy]^2$$

Если ? > 0 в точке M0, то в этой точке функция имеет экстремум: максимум при z”xx <0 (или z”yy<0) и минимум при при z”xx >0 (или z”yy>0).

Если ? < 0, то в точке M0 нет экстремума.

Пример:

Найти экстремум функции z=x?+xy+y?-2x-3y.

Решение: 1) Найдем частные производные.

Первая производная по x: z''_x=2x+y-2

Первая производная по y: z''_y=x+2y-3

2)Решим систему уравнений:

2x+y=2 и x+2y=3

Получаем критическую точку (1/3; 4/3).

3)Найдем вторые частные производные.

Вторая производная по x: z''_{xx}=2

Вторая производная по y: z''_{yy}=2

Смешанные производные z''_{xy}=(z''_x)’= 1= z''_{yx}

$\Delta = z''_{xx} * z''_{yy} - [z''_{xy}]^2$=2*2-12=3 > 0 => экстремум есть

Так как Δ =3>0 и z''_{xx} =2>0, то в точке (1/3; 4/3) точка минимума.

21. Понятие условного экстремума. Методы исследования функции двух переменных на условный экстремум.

Определение: Условным называется экстремум, который требуется найти для уравнения функции z=f(x,y), не на всей области D, а для точек (x,y), удовлетворяющих некоторому условию g(x,y)=0 (уравнение связи).

Значение в точке условного экстремума в отличие от точки безусловного экстремума сравнивается со значением функции не во всех точках ее окрестности, а только в точках, удовлетворяющих уравнениям связи.

Методы исследований функций

1) Если, используя уравнение связи можно представить одни переменные как функции других, то поиск условного экстремума сводится к поиску «обычного» экстремума функции нескольких переменных.

Пример: Найти условный экстремум $z=x^2+y^2$ при условии x+y-2=0
Решение: 1) Выразим y в уравнении связи: y=2-x и подставим в уравнение функции z:
$Z=x^2+(2-x)^2=2x^2- 4x+4$
2) z’=4x-4=0 => 4x=4 => x=1 => y=2-x=2-1=1

z’ - +

--->

1 min

Ответ: Условный min $z=z(1;1)=1^2+1^2=2$

2)Метод множителей Лагранжа

Если выразить у через х или х через у не удается или очень сложно, то применяют метод множителей Лагранжа.

Теорема:

Составим функцию Лагранжа:

$$L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda *g(x,y)$$

Если т.(x_0,y_0) является точкой условного экстремума функции $z=f(x,y)$, то найдется такое значение λ_0, что т.(x_0,y_0) является точкой экстремума функции Лагранжа $L(x,y,\lambda)$.

Из этой теоремы следует, что все частные производны функции Лагранжа должны обращаться в 0, т.е.:

$L'_x=f'x(x,y)+\lambda *g'_x(x,y)=0$

$L'_y=f'y(x,y)+\lambda *g'_y(x,y)=0$

$L'_\lambda=g(x,y)=0$ (уравнение связи)

Пример. С помощью функции Лагранжа: z=x+y при x2+y2=8 (уравнение связи)

$L=x+y+\lambda(x^2+y^2-8)$

$$\begin{cases} L'x=1+2*\ ?*x=0 \\ L'y=1+2*\ ?*y=0 \\ L'\ ?=x2+y2=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-\frac{1}{2\lambda} \\ y=-\frac{1}{2\lambda} \end{cases} \Rightarrow x=y$$

$$\begin{cases} x^2+x^2=8 \\ 2x^2=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=+-2 \\ y=+-2 \end{cases}$$

$M_1(2;2),M_2(-2;2),M_3(2;-2),M_4(-2;-2)$

Z непрерывна на замкнутом ограниченном множестве $x^2+y^2=8$, то по т.Вейерштрасса она достигает на нем своих наибольших и наименьших значений.

z(2;2)=2+2=4 - max

z(-2;2)=-2+2=0

z(2;-2)=0

2(-2;-2)=-4 - min Ответ: условный min z=z(-2;-2)=-4, max z=z(2;2)=4 при x2+y2=8

22. Наибольшее и наименьшее значения функции двух переменных на ограниченном замкнутом множестве.

Согласно теоремам Вейерштрасса, непрерывная в ограниченной замкнутой области D функция $z = f(x; y)$ достигает в ней наибольшего (самого «высокого») и наименьшего (самого «низкого») значений, которые и требуется найти. Такие значения достигаются либо в стационарных точках, принадлежащих области D, либо в точках, которые лежат на границе этой области.

Алгоритм нахождения:

1. Строим чертёж, выделяем все части границы области D и находим все "угловые" точки границы. (Убедились, что это замкнутое ограниченное множество)

2. Находим стационарные точки внутри D.

3. Находим стационарные точки на каждой из границ.

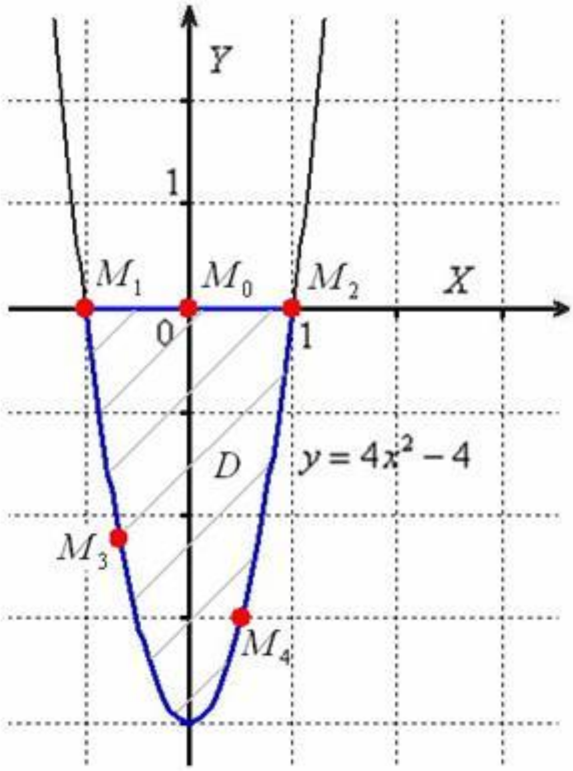
4. Вычисляем во всех стационарных и угловых точках, а затем выбираем наибольшее M и наименьшее m значения.

<u>Пример.</u>

Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + xy - 2$ в замкнутой области $D: 4x^2 - 4 \le y \le 0$.

Это условие можно записать эквивалентной системой $\begin{cases} y \le 0 \\ y \ge 4x^2 - 4 \end{cases}$ или же в более традиционном для данной задачи виде: $D: y \le 0,\ y \ge 4x^2 - 4$.

Решение, как всегда, начинается с построения области, которая представляет собой своеобразную «подошву»:



Найдём стационарные точки:

$$z'_x = (x^2 + xy - 2)'_x = 2x + y - 0 = 2x + y$$
$$z'_y = (x^2 + xy - 2)'_y = 0 + x - 0 = x$$

Система-мечта идиота:)

$$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad y = 0$$

Стационарная точка $M_0(0;\ 0) \in D$ принадлежит области, а именно, лежит на её границе.

$$z(M_0) = z(0;\ 0) = 0 + 0 - 2 = \mathbf{-2}$$

II) Исследуем границу области. Не мудрствуя лукаво, начнём с оси абсцисс:

1) Если $y = 0$, то $z = x^2 + x \cdot 0 - 2 = x^2 - 2$

Найдём, где вершина параболы: $z' = (x^2 - 2)' = 2x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \in [-1;\ 1]$ – ценИте такие моменты – «попали» прямо в точку M_0, с которой уже всё ясно. Но о проверке всё равно не забываем: $z(0)=0^2-2=-2$

Вычислим значения функции на концах отрезка:
$z(M_1)=z(-1;\,0)=(-1)^2-2=1-2=\mathbf{-1}$
$z(M_2)=z(1;\,0)=1^2-2=\mathbf{-1}$

2) С нижней частью «подошвы» разберёмся «за один присест» – безо всяких комплексов подставляем $y=4x^2-4$ в функцию, причём, интересовать нас будет лишь отрезок $[-1;1]$:
$z=x^2+x(4x^2-4)-2=4x^3+x^2-4x-2$

Контроль: $z(-1)=-4+1+4-2=-1,\quad z(1)=4+1-4-2=-1$

Вот это уже вносит некоторое оживление в монотонную езду по накатанной колее. Найдём критические точки:
$z'=(4x^3+x^2-4x-2)'=12x^2+2x-4-0=2(6x^2+x-2)=0$

Находим «иксовые» корни и по уравнению $y=4x^2-4$ определяем соответствующие «игрековые» координаты точек-«кандидатов»:
$D=1+48=49,\quad \sqrt{D}=7$

$$x=\frac{-1-7}{2\cdot 6}=-\frac{2}{3}\in[-1;1]\ \Rightarrow\ y=4\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^2-4=4\cdot\frac{4}{9}-4=\frac{16}{9}-\frac{36}{9}=-\frac{20}{9}\ \Rightarrow\ M_3\left(-\frac{2}{3};-\frac{20}{9}\right)$$

$$x=\frac{-1+7}{2\cdot 6}=\frac{1}{2}\in[-1;1]\ \Rightarrow\ y=4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2-4=1-4=-3\ \Rightarrow\ M_4\left(\frac{1}{2};-3\right)$$

Вычислим значения функции $z=x^2+xy-2$ в найденных точках:

$$z(M_3)=z\left(-\frac{2}{3};-\frac{20}{9}\right)=\left(-\frac{2}{3}\right)^2+\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{20}{9}\right)-2=\frac{4}{9}+\frac{40}{27}-2=\frac{12}{27}+\frac{40}{27}-\frac{54}{27}=-\mathbf{\frac{2}{27}}$$

$$z(M_4)=z\left(\frac{1}{2};-3\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\cdot(-3)-2=\frac{1}{4}-\frac{3}{2}-2=\frac{1}{4}-\frac{6}{4}-\frac{8}{4}=-\mathbf{\frac{13}{4}}$$

Проверку по функции $z=4x^3+x^2-4x-2$ проведите самостоятельно.

Теперь внимательно изучаем завоёванные трофеи и записываем **ответ**:

$$\max_D z=z\left(-\frac{2}{3};-\frac{20}{9}\right)=-\frac{2}{27},\quad \min_D z=z\left(\frac{1}{2};-3\right)=-\frac{13}{4}.$$

23. Двойной интеграл и его геометрический смысл.

Двойной интеграл — обобщение определенного интеграла на случай функций 2-х переменных.

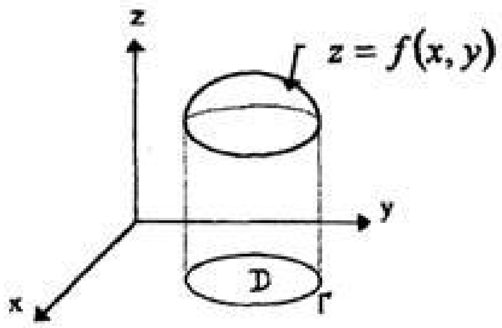
Пусть в замкнутой области ***D*** плоскости *Oxy* задана непрерывная ***z = f(x;y)***. Разобьем *D* на *n* частей D_i, обозначим их площади через ΔS_i, а диаметры — через d_i. В каждой D_i выберем произв. т. $M_i(x_i;y_i)$ и умножим значение $f(x_i;y_i)$ в этой т. на ΔS_i. Составим $f(x_1;y_1)\Delta S_i + f(x_2;y_2)\Delta S_i + \ldots + f(x_n;y_n)\Delta S_n = \sum f(x_i;y_i)\Delta S_i$ — интегральную сумму *f(x;y)*.

Рассмотрим lim, когда $n \to \infty$, что $\max d_i \to 0$. Если этот lim ∃ и не зависит от сп. разбиения *D* на части, ни от выбора точек в них, то он называется **двойным интегралом** и определяется равенством:

$$\iint_D f(x;y)\,dxdy = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max d_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i;y_i)\Delta S_i$$

Достаточное условие интегрируемости функции: если ф-ция ***z = f(x;y)*** непрерывна в *D*, она интегрируема в этой области.

Геометрический смысл: двойной интеграл от неотрицательной функции равен объему цилиндрического тела.



Сверху тело ограничено поверхностью *z* = *f(x;y)*, снизу — замкнутой областью *D* пл-ти *Oxy,* с боков — цилиндрической поверхностью, ∥ *Oz,* направляющая — граница области *D*.

Найдем *V*: разобьем *D* на n областей D_i, площади которой равны ΔS_i. Рассм. столбики с основаниями D_i, ограниченные сверху кусками поверхности $z = f(x;y)$, обозначим их через ΔV_i. Получим $V = \sum \Delta V_i$. В каждой D_i возьмем $M_i(x_i;y_i)$ и заменим столбики прямыми цилиндрами, $\Delta V_i \approx f(x_i;y_i)\Delta S_i$.

$$V = \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i; y_i)\Delta S_i$$

$$V = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \max d_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i; y_i)\Delta S_i$$

$$V = \iint_D f(x; y)\, dxdy$$

24. Числовой ряд. Необходимый признак сходимости. Геометрическая прогрессия. Гармонический ряд.

Сумма бесконечного числа членов числовой последовательности

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots.$$

называется **числовым рядом**. При этом число an с общим номером n называют общим членом ряда, а сумму конечного числа членов Sn=a1+a2+…+an -n-й частной суммой ряда. Если последовательность частных сумм

S1=a1; S2=a1+a2; S3=a1+a2+a3; …

Имеет конечный предел S=$\lim_{n\to\infty} S_n$, то числовой ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots.$$

называется сходящимся, а число S – суммой ряда.

Необходимый признак сходимости.

Если ряд сходится, то его общий член стремится к нулю: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Гармонический ряд — числовой ряд 1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + ... + 1/n + ...

Называется он так потому, что каждый член гармонического ряда, начиная со второго, равен среднему гармоническому двух соседних. Члены гармонического ряда с возрастанием номера убывают и стремятся к нулю, однако частичные суммы $S_n = 1 + 1/2 + 1/3 + ... + 1/n$ неограниченно возрастают.

Общий член гармонического ряда стремится к 0.

limn→∞1n=0

- обобщённый гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ сходится, если $p > 1$ и расходится, если $p \leq 1$;

Последовательность чисел $\{a_n\}$ называется *геометрической прогрессией*, если отношение последующего члена к предыдущему равно одному и тому же постоянному числу q, называемому *знаменателем геометрической прогрессии*. Таким образом, $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ или $a_{n+1} = qa_n$ для всех членов геометрической прогрессии. Предполагается, что $q \neq 0$ и $q \neq 1$.

Любой член геометрической прогрессии можно вычислить по формуле:

$$a_n = a_1 q^{n-1}.$$

Сумма первых n членов геометрической прогрессии определяется выражением

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = a_1\frac{1-q^n}{1-q},\ q \neq 1.$$

Говорят, что бесконечная геометрическая прогрессия *сходится*, если предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ существует и конечен. В противном случае прогрессия *расходится*.

- геометрический ряд $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$ сходится, если $|q| <1$ и расходится, если$|q| \geq 1$.

25. Сходимость рядов с положительными членами. Признаки сходимости.

Для числовых рядов с положительными членами an>0 (критерием сходимости для таких рядов служит ограниченность последовательности частичных сумм ряда).

Первый признак сравнения.

Пусть даны два ряда с положительными общими членами $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Пусть для этих рядов выполняется неравенство $a_n \le b_n$ (n=1, 2,…), то есть члены первого ряда не превосходят соответствующих членов второго ряда.

Тогда из сходимости второго ряда (ряда с большим общим членом) следует сходимость первого ряда, а из расходимости первого ряда (ряда с меньшим общим членом) – расходимость второго ряда.

Второй признак сравнения.

Пусть даны два ряда с положительными общими членами $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Если $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c,\ c \ne 0,\ c \ne \infty$, то есть предел отношения общих членов ряда равен конечному и отличному от нуля числу, то оба ряда ведут себя одинаково: или оба сходятся, или оба расходятся.

Признак Даламбера (в предельной форме). Пусть для числового ряда с полож. членами $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ существует конечный предел $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.Тогда при d<1 сходится, а при d>1 ряд расходится.

Радикальный признак Коши.

Пусть для числового ряда с положительными членами $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ существует конечный предел $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{a_n}\right)$ =c≠1.Тогда при c<1 ряд сходится, а при c>1 ряд расходится.

Интегральный признак Коши.

Пусть члены числового ряда a_n=f(n) являются значениями неотрицательной непрерывной функции f(x), монотонно убывающей на луче [1;+∞). Тогда ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ сходится или расходится одновременно.

26. Знакочередующиеся ряды. Признак сходимости Лейбница.

Ряд вида $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$, где $u_n > 0$, называется знакочередующимся.

Знаки членов знакочередующегося ряда строго чередуются:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + u_5 - u_6 + u_7 - u_8 + \dots$$

Например, 1−1/2+1/3−1/4+… – знакочередующийся ряд.

Сходимость знакочередующихся рядов выясняют по признаку Лейбница.

Признак Лейбница: если члены знакочередующегося ряда убывают по модулю, то ряд сходится.

Или можно выделить два пункта:

1) Ряд является знакочередующимся.

2) Члены ряда убывают по модулю: $\lim_{n\to+\infty}|a_n| = 0$, причём, убывают монотонно. Члены ряда строго монотонно убывают по модулю, если КАЖДЫЙ СЛЕДУЮЩИЙ член ряда по модулю МЕНЬШЕ, чем предыдущий: $|a_{n+1}| < |a_n|$. Для ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ выполнена строгая монотонность убывания:

$$|a_1| > |a_2| > |a_3| > |a_4| > \dots > |a_n| > |a_{n+1}| > \dots$$

$$1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \dots > \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} > \dots$$

Члены ряда нестрого монотонно убывают по модулю, если КАЖДЫЙ СЛЕДУЮЩИЙ член ряда по модулю НЕ БОЛЬШЕ предыдущего: $|a_{n+1}| \le |a_n|$.

Рассмотрим ряд с факториалом: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}=1-1+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\ldots$ Здесь имеет место нестрогая монотонность, так как первые два члена ряда одинаковы по модулю. То есть, каждый следующий член ряда <u>по модулю</u> не больше предыдущего: $\frac{1}{(n+1)!}\le\frac{1}{n!}$.

В условиях теоремы Лейбница должна выполняться монотонность убывания (неважно, строгая или нестрогая). Кроме того, члены ряда могут *даже некоторое время возрастать по модулю*, но «хвост» ряда обязательно должен быть монотонно убывающим.

27. Сходимость рядов с членами произвольного знака. Абсолютная и условная сходимость знакопеременных рядов.

Под ***Знакопеременным*** **рядом** будем понимать ряд, в котором любой его член может быть как *Положительным*, так и *Отрицательным*.

Рассмотрим случай ряда с членами, имеющими произвольные знаки:

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots$	(9.4.2)

Одновременно рассмотрим ряд

$\sum_{n=1}^{\infty}\lvert a_n\rvert=\lvert a_1\rvert+\lvert a_2\rvert+\lvert a_3\rvert+\ldots+\lvert a_n\rvert+\ldots$	(9.4.3)

Где a_n – члены ряда (9.4.2).

Теорема (достаточный признак сходимости знакопеременного ряда).

Из *Сходимости* ряда (9.4.3) следует *Сходимость* ряда (9.4.2).

Определение. Ряд называется *Абсолютно сходящимся*, если сходится как сам ряд, так и ряд, составленный из абсолютных величин его членов.

Определение. Ряд называется *Условно сходящимся*, если сам ряд сходится, а ряд, составленный абсолютных величин его членов, расходится.

Примеры абсолютной и условной сходимости числовых рядов.

<u>Пример:</u>

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots+\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\ldots$ сходится по признаку Лейбница, однако гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится, следовательно, сходимость условного ряда является условной.

Пример:

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^{\alpha}}$, $\alpha>0$. При $\alpha>1$ этот ряд сходится абсолютно (как обобщенный гармонический ряд). При $\alpha\le 1$ данный ряд сходится условно.

Грубо говоря, различие между абсолютно сходящимися и условно сходящимися рядами заключается в следующем: абсолютно сходящиеся ряды сходятся в основном в силу того, что их члены быстро убывают, а условно сходящиеся ряды – в результате того, что положительные и отрицательные слагаемые уничтожают друг друга.

28. Степенные ряды. Радиус сходимости степенного ряда. Свойства степенных рядов.

Степенные ряды

Ряд вида

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots \quad (1)$$

называется степенным рядом, где a_n – коэффициент ряда.

Подставляя вместо x различные числовые значения, получим различные числовые ряды, которые могут сходиться или расходиться в зависимости от x.

Множество всех x, при которых ряд (1) сходится, - область сходимости ряда. Она обязательно содержит точку x = 0.

Теорема Абеля

Если степенной ряд (1) сходится при некотором x_0 != 0, то он сходится и при любом $| x | < | x_0 |$, причём абсолютно, а если ряд (1) расходится при x_1 != 0, то он расходится и при любом $| x | > | x_1 |$

Следствие

Существует такое R, что при $|x| < R$ ряд (1) сходится абсолютно, а при $|x| > R$ расходится; при $|x| = R$ может сходиться либо расходиться.

(-R; R) – интервал сходимости ряда. Радиус равен половине длины интервала. Область сходимости – интервал и границы (проверить границы на сходимость!).

Свойства степенных рядов

Пусть $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots$ (2) на промежутке сходимости (-R; R).

Тогда:

1) f(x) непрерывна в (-R; R);
2) Ряд (2) можно почленно дифференциировать

$$f'(x) = a1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \ldots + na_nx^{n-1} + \ldots,$$

причём продифференцированная функция также сходится в (-R; R), в чём можно убедиться по правилу Даламбера;

3) Ряд (2) можно почленно интегрировать в (-R; R), причём промежуток сходимости не изменится.

29. Ряды Маклорена и Тейлора. Оценка остатка ряда.

Ряд Тейлора

Если функция f(x) имеет непрерывные производные вплоть до (n+1)-го порядка, то ее можно разложить в степенной ряд по формуле Тейлора:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!} = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2!} + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!} + R_n,$$

Ряд Маклорена

Если a = 0, то такое разложение называется рядом Маклорена:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)x^2}{2!} + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!} + R_n.$$

Остаток ряда

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}c}{(n+1)!}x^{n+1}, \qquad 0 < c < 1$$

Необходимое и достаточное условие сходимости

$$f(x) = S_n(x) + R_n(x)$$

$$\lim_{n\to\infty} R_n = 0$$

30. Приближённые вычисления с помощью рядов.

Степенные ряды широко используются в приближенных вычислениях. С их помощью с заданной точностью можно вычислять значения корней, тригонометрических функций, логарифмов чисел, определенных интегралов. Ряды применяются также при интегрировании дифференциальных уравнений.

Приближенное вычисление значений функций.

Рассмотрим разложение функции в степенной ряд:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots$$

Для того, чтобы вычислить приближенное значение функции в заданной точке *x*, принадлежащей области сходимости указанного ряда, в ее разложении оставляют первые *n* членов (*n* – конечное число), а остальные слагаемые отбрасывают:

$$f(x) = f(a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + r_n(x) \approx f(a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Для оценки погрешности полученного приближенного значения необходимо оценить отброшенный остаток $r_n(x)$. Для этого применяют следующие приемы:

- если полученный ряд является знакочередующимся, то используется следующее свойство: ***для знакочередующегося ряда, удовлетворяющего условиям Лейбница, остаток ряда по абсолютной величине не превосходит первого отброшенного члена.***

- если данный ряд знакопостоянный, то ряд, составленный из отброшенных членов, сравнивают с бесконечно убывающей геометрической прогрессией.

- в общем случае для оценки остатка ряда Тейлора можно воспользоваться формулой Лагранжа: $r_n = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \quad a < c < x$ (или $x<c<a$).

Пример 1. Пользуясь разложением в ряд $\sin x$, вычислить $\sin 20^{o}$ с точностью до 0,0001.

Решение. Чтобы можно было пользоваться формулой (2), необходимо выразить значение аргумента в радианной мере. Получаем $x = \frac{20^{o} \cdot \pi}{180^{o}} = \frac{\pi}{9} \cong 0,3491$. Подставляя это значение в формулу, получаем

$$\sin 20^{o} = \sin\frac{\pi}{9} = \frac{\pi}{9} - \frac{1}{3!}\cdot\left(\frac{\pi}{9}\right)^3 + \frac{1}{5!}\cdot\left(\frac{\pi}{9}\right)^5 - \ldots$$

Полученный ряд является знакочередующимся и удовлетворяет условиям Лейбница. Так как $\frac{1}{5!}\cdot\left(\frac{\pi}{9}\right)^5 < 0,0001$, то этот и все последующие члены ряда можно отбросить, ограничиваясь первыми двумя членами. Таким образом,

$$\sin 20^{o} = \sin\frac{\pi}{9} \cong \frac{\pi}{9} - \frac{1}{3!}\cdot\left(\frac{\pi}{9}\right)^3 \cong 0,3491 - 0,0070 = 0,3421.$$

Пример 2. Вычислить $\ln 3$ с точностью до 0,01.

Решение. Воспользуемся разложением $\ln\frac{1+x}{1-x}$, где $x = \frac{1}{2}$ (см. пример 5 в предыдущей теме):

$$\ln 3 = \ln \frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 2(\frac{1}{2} + \frac{1}{3\cdot 8} + \frac{1}{5\cdot 32} + \frac{1}{7\cdot 128} + \ldots) = 1 + \frac{1}{12} + \frac{1}{80} + \frac{1}{448} + \ldots$$

Проверим, можем ли мы отбросить остаток после первых трех членов разложения, для этого оценим его с помощью суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

$$r_3 = \frac{1}{7\cdot 64} + \frac{1}{9\cdot 256} + \ldots < \frac{1}{7\cdot 64} + \frac{1}{7\cdot 256} + \ldots = \frac{\frac{1}{7\cdot 64}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{7\cdot 16} = \frac{1}{112} < 0{,}01 .$$

Таким образом, мы можем отбросить этот остаток и получаем

$$\ln 3 \approx 1 + \frac{1}{12} + \frac{1}{80} = \frac{263}{240} \approx 1{,}09 .$$

31. Дифференциальные уравнения первого порядка. Общее и частное решения. Геометрический смысл. Задача Коши.

Дифференциальное уравнение первого порядка в общем случае имеет вид

$$F(x, y, y') = 0 ,$$

или, если можно разрешить относительно y', то оно примет форму

$$y' = f(x, y) \quad (2)$$

и называется **дифференциальным уравнением первого порядка, разрешенным относительно производной**.

В некоторых случаях уравнение (2) удобно записать в виде

$$dy/dx = f(x,y) \text{ , или в виде } f(x, y)dx - dy = 0 ,$$

которое является частным случаем более общего уравнения

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0, \quad (3)$$

где $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ – известные функции. Уравнение в симметричной форме (3) удобно тем, что переменные x и y здесь равноправны, это значит каждую из них можно рассматривать как функцию второй.

Имеет место следующая теорема о существовании и единственности решения дифференциального уравнения (2).

Частным решением дифференциального уравнения (2)

$$y' = f(x,y)$$

называется решение, которое получается из общего решения при конкретном значении произвольной постоянной C .

Часто общее решение дифференциального уравнения получают в

неявном виде, т.е. $\Phi(x,y,C)=0$. (5)

В этом случае равенство (5) называется общим интегралом (5)дифференциального уравнения. Если в соотношении (5) положить $C = C_0$, то получим частный интеграл.

Теорема (Коши). Если функция $f(x,y)$ и её частная производная $f'_y(x,y)$ непрерывны в некоторой области D

плоскости Oxy, котораЯ содержит точку (x0 , y0), то найдется интервал $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, на котором существует единственное решение $y = y(x)$ уравнения $y' = f(x,y)$ удовлетворяет условию $y(x_0) = y_0$.

Геометрически это означает, что через каждую внутреннюю точку

(x0 , y0) области D проходит единственная интегральная кривая дифференциального уравнения $y' = f(x,y)$.

32. Уравнения с разделяющимися переменными.

Дифференциальное уравнение первого порядка y′=f(x, y) называется уравнением с разделяющимися переменными, если функцию f(x, y) можно представить в виде произведения двух функций, зависящих только от x и y:

f(x, y) =p(x) h(y),

где p(x) и h(y) − непрерывные функции.

Рассматривая производную y′ как отношение дифференциалов dy/dx, перенесем dx в правую часть и разделим уравнение на h(y):

dy/dx = p(x)*h(y), ⇒ dy/h(y) = p(x)*dx

Разумеется, нужно убедиться, что $h(y)\neq0$. Если найдется число x0, при котором $h(x0)=0$, то это число будет также являться решением дифференциального уравнения. Деление на $h(y)$ приводит к потере указанного решения.

Обозначив $q(y) = 1h(y)$, запишем уравнение в форме:

$$q(y)\, dy = p(x)\, dx$$

Теперь переменные разделены, и мы можем проинтегрировать дифференциальное уравнение:

$$\int q(y)\, dy=\int p(x)\, dx + C,$$

где C − постоянная интегрирования.

Вычисляя интегралы, получаем выражение

$$Q(y) = P(x) + C,$$

описывающее общее решение уравнения с разделяющимися переменными.

33. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка.

Определение. Дифференциальное уравнение первого порядка

$$dy/dx =f (x, y)$$

называется однородным, если правая часть удовлетворяет соотношению $f(tx, ty)=f(x, y)$ для всех значений t.

Другими словами, правая часть должна являться однородной функцией нулевого порядка по отношению к переменным x и y:

$$f(tx, ty) = t^0 f(x, y) = f(x, y)$$

34. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка.

Линейное дифференциальное уравнение первого порядка – уравнение вида:

$$\alpha(x)y' + \beta(x)y + \gamma(x) = 0 \qquad (1)$$

$\alpha(x)$, $\beta(x)$ и $\gamma(x)$ - непрерывные на некотором промежутке функции.

Если $\alpha(x)\neq 0$, то уравнение (1) можно преобразовать следующим образом:

$$y' + p(x)y = f(x), \tag{2}$$

где p(x) = $p(x)=\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}$; $f(x)=-\dfrac{\gamma(x)}{\alpha(x)}$.

Дифференциальное линейное однородное уравнение, соответствующее уравнению (2):

$$y' + p(x)y = 0 \tag{3}$$

Метод Лагранжа:

Применяется для поиска общего решения неоднородного уравнения (2).

Сначала найдем решение уравнения (3), которое представляет собой уравнение с разделяющимися переменными. y = 0 является решением уравнения (3). При y ≠ 0:

$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx.$$

Интегрируем это уравнение:

$$\ln|y| = -P(x) + \ln|C|,$$

где P(x) = $\int p(x)dx,$ а C – отличная от нуля постоянная.

Из последнего уравнения находим общее решение уравнения (3):

$$y = Ce^{-P(x)} \tag{4}$$

Здесь C – уже произвольная постоянная, так как решение y = 0 входит в (4) при C = 0.

Теперь заменим в формуле (4) постоянную C на некоторую (искомую) функцию C(x), то есть общее решение уравнения (2) будем искать в виде:

$$y = C(x)e^{-P(x)} \tag{5}$$

Из (5) следует:

$$y' = C'e^{-P(x)} - Ce^{-P(x)}p(x) \tag{6}$$

Подставляя выражения для *y* и *y'* из (5) и (6) в (2), находим

$$C'e^{-P(x)} - Ce^{-P(x)}p(x) + p(x)Ce^{-P(x)} = f(x).$$

Отсюда получим, что

$$C' = f(x)e^{P(x)}$$

Следовательно,

$$C(x) = \int f(x)e^{P(x)}dx. \qquad (7)$$

Подставив в (5) выражение для C(x), получим общее решение уравнения (2).

Алгоритм решения методом Лагранжа:

1) для заданного неоднородного уравнения (2) выписать соответствующее ему однородное уравнение (формула(3));
2) методом разделения переменных найти общее решения однородного уравнения (формула(4));
3) в общем решении однородного уравнения заменить постоянную C на функцию C(x) (формула(5));
4) подставить полученное в пункте 3 выражение в исходное неоднородное уравнение и найти C(x) (формула(7));
5) выписать общее решение неоднородного уравнения, подставив выражение для C(x) в (5).

35. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение вида

$$y'' + py' + qy = 0,$$

где p, q – постоянные коэффициенты.

Для каждого дифференциального уравнения можно записать так называемое характеристическое уравнение:

$$k^2 + pk + q = 0.$$

Обшее решение однородного дифференциального уравнения зависит от корней характеристического уравнения, которое в данном случае будет являться квадратным уравнением. Возможны следующие случаи:

1. Дискриминант характеристического квадратного уравнения положителен: D > 0. Тогда корни характеристического уравнения k1 и k2 действительны и различны. В этом случае общее решение описывается функцией

$$y(x) = C_1e^{k1x},$$

где C_1 и C_2 – произвольные действительные числа.

2. Дискриминант характеристического квадратного уравнения равен нулю: D = 0. огда корни действительны и равны. В этом случае говорят, что существует один корень k1 второго порядка. Общее решение однородного дифференциального уравнения имеет вид:

$$y(x) = (C_1x + C_2)e^{k1x}.$$

3. Дискриминант характеристического квадратного уравнения отрицателен: D < 0. Такое уравнение имеет комплексно-сопряженные корни $k_1 = \alpha + \beta i,\ k_2 = \alpha - \beta i.$

Общее решение записывается в виде

$$y\,(x) = e^{\alpha x}\,[C_1\cos(\beta x) + C_2\sin(\beta x)]\ .$$

Рассмотренные три случая удобно представить в виде таблицы:

Общее решение однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами		
Корни характеристического уравнения	**Дискриминант характеристического уравнения**	**Общее решение**
Корни k_1, k_2 действительные и различные	D > 0	$y(x)=C_1\exp(k_1x) + C_2\exp(k_2x)$
Корни k_1, k_2 действительные и равные	D = 0	$y(x)=(C_1x + C_2)\exp(k_1x)$
Корни k_1, k_2 комплексные: $k_1=\alpha+\beta i$, $k_2=\alpha-\beta i$	D < 0	$y(x)= \exp(\alpha x)$ [$(C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)$]

36. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

Структура общего решения

Линейное неоднородное уравнение данного типа имеет вид:

$y''+py'+qy=f(x)$,

где p,q − постоянные числа (которые могут быть как действительными, так и комплексными). Для каждого такого уравнения можно записать соответствующее *однородное уравнение*:

$y''+py'+qy=0$.

Теорема: Общее решение неоднородного уравнения является суммой общего решения y0(x) соответствующего однородного уравнения и частного решения y1(x) неоднородного уравнения:

y(x)=y0(x)+y1(x).

Ниже мы рассмотрим два способа решения неоднородных дифференциальных уравнений.

Метод вариации постоянных

Если общее решение y0 ассоциированного однородного уравнения известно, то общее решение неоднородного уравнения можно найти, используя *метод вариации постоянных*.

Пусть общее решение однородного дифференциального уравнения второго порядка имеет вид:

y0(x)=C1Y1(x)+C2Y2(x).

Вместо постоянных C1 и C2 будем рассматривать вспомогательные функции C1(x) и C2(x). Будем искать эти функции такими, чтобы решение

y=C1(x)Y1(x)+C2(x)Y2(x)

удовлетворяло неоднородному уравнению с правой частью f(x).

Неизвестные функции C1(x) и C2(x) определяются из системы двух уравнений:

$\{C'_1(x)Y_1(x)+C'_2(x)Y_2(x)=0$

$C'_1(x)Y'_1(x)+C'_2(x)Y'_2(x)=f(x)$

Метод неопределенных коэффициентов

Правая часть $f(x)$ неоднородного дифференциального уравнения часто представляет собой многочлен, экспоненциальную или тригонометрическую функцию, или некоторую комбинацию указанных функций. В этом случае решение удобнее искать с помощью *метода неопределенных коэффициентов*.

Подчеркнем, что данный метод работает лишь для ограниченного класса функций в правой части, таких как

1. $f(x)=P_n(x)e^{\alpha x}$;
2. $f(x)=[P_n(x)\cos(\beta x)+Q_m(x)\sin(\beta x)]e^{\alpha x}$, где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ − многочлены степени n и m, соответственно.

В обоих случаях выбор частного решения должен соответствовать структуре правой части неоднородного дифференциального уравнения.

В случае 1, если число α в экспоненциальной функции совпадает с корнем характеристического уравнения, то частное решение будет содержать дополнительный множитель x^s, где s − кратность корня α в характеристическом уравнении.

В случае 2, если число $\alpha+\beta i$ совпадает с корнем характеристического уравнения, то выражение для частного решения будет содержать дополнительный множитель x.

Неизвестные коэффициенты можно определить подстановкой найденного выражения для частного решения в исходное неоднородное дифференциальное уравнение.

Принцип суперпозиции

Если правая часть неоднородного уравнения представляет собой *сумму* нескольких функций вида

$P_n(x)e^{\alpha x}$ и/или $[P_n(x)\cos(\beta x)+Q_m(x)\sin(\beta x)]e^{\alpha x}$,

то частное решение дифференциального уравнения также будет являться суммой частных решений, построенных отдельно для каждого слагаемого в правой части.