Программирование в среде R

Шевцов Василий Викторович,

директор ДИТ РУДН, shevtsov-vv@rudn.ru

Векторная алгебра

Линейная комбинация векторов

- Линейные комбинации над векторами осуществляются покоординатно, т.е.
- $2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{p}$
- $(2a_1\text{-}3b_1\text{+}p_1;\ 2a_2\text{-}3b_2\text{+}p_2;\ 2a_3\text{-}3b_3\text{+}p_3;\ldots;\ 2a_n\text{-}3b_n\text{+}p_n)$

RUDN university

5100

Скалярное произведение векторов

$a * b$	$(a_1 * b_1;\ a_2 * b_2;\ a_3 * b_3; \ldots;\ a_n * b)$
$a \,\%*\%\, b$	$(a_1 * b_1 + a_2 * b_2 + a_3 * b_3 + \ldots + a_n * b)$

```
> a <- c(1,3,5)
> b <- c(10,30,50)
> a*b
[1]  10  90 250
> a%*%b
     [,1]
[1,]  350
> as.numeric(a%*%b)
[1] 350
```

Результатом скалярного произведения векторов является матрица 1x1

Скалярное произведение векторов

Тождественной операцией является суммирование произведения векторов

$$a \ \% * \% \ b = sum(a * b)$$

```
> a <- c(1,3,5)
> b <- c(10,30,50)
> as.numeric(a%*%b)
[1] 350
> sum(a*b)
[1] 350
```

Свойства скалярного произведения векторов

- Если угол между векторами острый, то скалярное произведение будет положительным числом (так как косинус острого угла — положительное число).
  Если векторы сонаправлены, то угол между ними будет равен $0°$, а косинус равен 1 , скалярное произведение также будет положительным.
- Если угол между векторами тупой, то скалярное произведение будет отрицательным (так как косинус тупого угла — отрицательное число).
  Если векторы направлены противоположно, то угол между ними будет равен $180°$.
  Скалярное произведение также отрицательно, так как косинус этого угла равен -1 .
- Если угол между векторами прямой, то скалярное произведение векторов равно нулю, так как косинус прямого угла равен 0 .
- Если скалярное произведение векторов — положительное число, то угол между данными векторами острый.
- Если скалярное произведение векторов — отрицательное число, то угол между данными векторами тупой.
- Если скалярное произведение векторов равно нулю, то эти векторы перпендикулярны.

Длина вектора

$$|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$$

```
> a <- c(1,3,5)
> norm(a,type = "2")
[1] 5.91608
> sqrt(sum(a^2))
[1] 5.91608
```

Вычисляет норму матрицы.

"O", "o" or "1"
specifies the one norm, (maximum absolute column sum);
"I" or "i"
specifies the infinity norm (maximum absolute row sum);
"F" or "f"
specifies the Frobenius norm (the Euclidean norm of x treated as if it were a vector);
"M" or "m"
specifies the maximum modulus of all the elements in x;
"2"
specifies the “spectral” or 2-norm, which is the largest singular value (svd) of x.

Косинус угла между векторами

Скалярным произведением двух векторов называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними.

$$\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)$$

$$\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)=\frac{\vec{a}*\vec{b}}{|\vec{a}|*\left|\vec{b}\right|}$$

```
> a <- c(2,-3,4,1)
> b <- c(-6,9,-12,-3)
> (a%*%b)/(norm(a,type = "2")*norm(b,type = "2"))
     [,1]
[1,]   -1
```

Алгебра матриц

Размерность матрицы

```
> B <- matrix(-3:2, nrow = 3, ncol = 2, byrow = TRUE);B
     [,1] [,2]
[1,]   -3   -2
[2,]   -1    0
[3,]    1    2
> nrow(B)
[1] 3
> ncol(B)
[1] 2
```

```
> A <- matrix(0:8, nrow = 3, ncol = 3, byrow = TRUE);A
     [,1] [,2] [,3]
[1,]    0    1    2
[2,]    3    4    5
[3,]    6    7    8
> dim(A)
[1] 3 3
> B <- matrix(-3:2, nrow = 3, ncol = 2, byrow = TRUE);B
     [,1] [,2]
[1,]   -3   -2
[2,]   -1    0
[3,]    1    2
> dim(B)
[1] 3 2
```

Условия

```
> B <- matrix(-3:2, nrow = 3, ncol = 2, byrow = TRUE);B
     [,1] [,2]
[1,]   -3   -2
[2,]   -1    0
[3,]    1    2
> B>0
      [,1]  [,2]
[1,] FALSE FALSE
[2,] FALSE FALSE
[3,]  TRUE  TRUE
> B<=1
     [,1]  [,2]
[1,] TRUE  TRUE
[2,] TRUE  TRUE
[3,] TRUE FALSE
```

```
> all(B>0)
[1] FALSE
> any(B<=1)
[1] TRUE
```

Транспонирование матриц

```
> B <- matrix(-3:2, nrow = 3, ncol = 2, byrow = TRUE);B
     [,1] [,2]
[1,]   -3   -2
[2,]   -1    0
[3,]    1    2
> t(B)
     [,1] [,2] [,3]
[1,]   -3   -1    1
[2,]   -2    0    2
```

RUDN university

5100

Сложение матриц и умножения их на числа

```
> B <- matrix(-3:2, nrow = 3, ncol = 2, byrow = TRUE);B
     [,1] [,2]
[1,]   -3   -2
[2,]   -1    0
[3,]    1    2
> B+100
     [,1] [,2]
[1,]   97   98
[2,]   99  100
[3,]  101  102
> B*10
     [,1] [,2]
[1,]  -30  -20
[2,]  -10    0
[3,]   10   20
```

Произведение матриц

Пусть даны две прямоугольные матрицы A и B размерности $l \times m$ и $m \times n$ соответственно:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{l1} & a_{l2} & \cdots & a_{lm} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}.$$

Тогда матрица C размерностью $l \times n$:

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{l1} & c_{l2} & \cdots & c_{ln} \end{bmatrix},$$

в которой:

$$c_{ij} = \sum_{r=1}^{m} a_{ir} b_{rj} \quad (i = 1, 2, \ldots l;\ j = 1, 2, \ldots n)\,.$$

называется их *произведением*.

Произведение матриц

Произведение матриц AB состоит из всех возможных комбинаций скалярных произведений вектор-строк матрицы A и вектор-столбцов матрицы B. Элемент матрицы AB с индексами i, j есть скалярное произведение i-ой вектор-строки матрицы A и j-го вектор-столбца матрицы B.

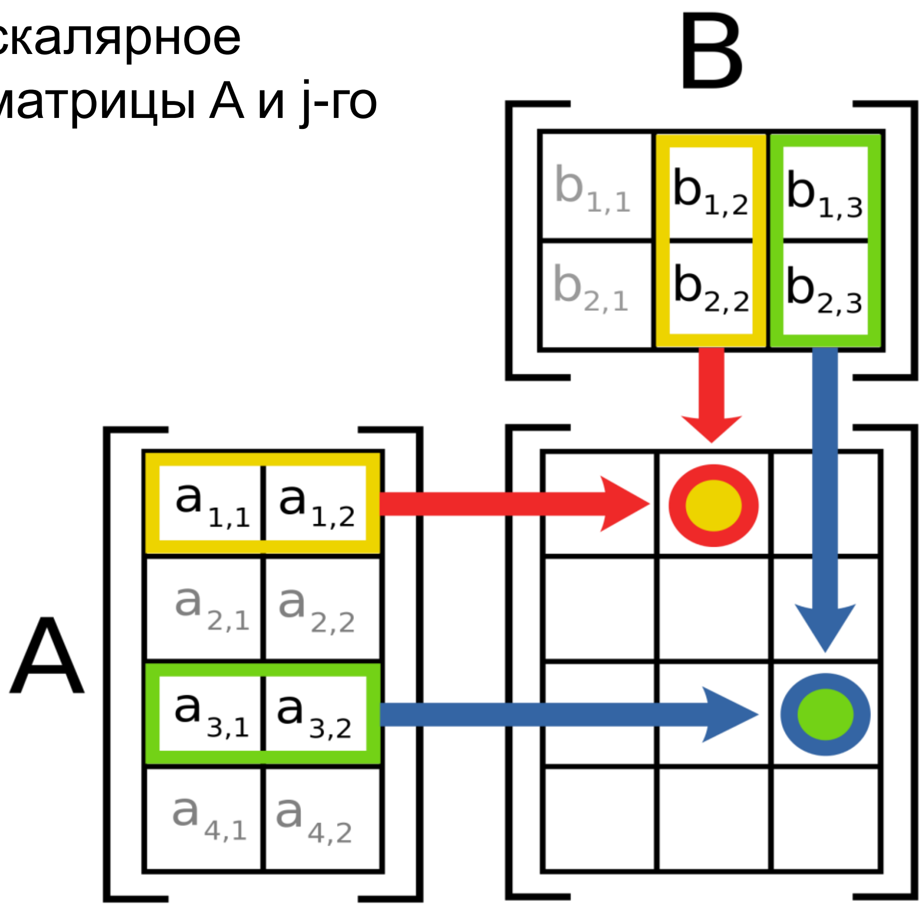


Иллюстрация показывает как каждые пересечения в произведении матриц соответствуют строкам матрицы A и столбцам матрицы B. Размер результирующей матрицы всегда максимально возможный, то есть для каждой строки матрицы A и столбца матрицы B есть всегда соответствующее пересечение в произведении матрицы.

Произведение матриц

```
> A <- matrix(0:8, nrow = 3, ncol = 3, byrow = TRUE);A
     [,1] [,2] [,3]
[1,]    0    1    2
[2,]    3    4    5
[3,]    6    7    8
> B <- matrix(-3:2, nrow = 3, ncol = 2, byrow = TRUE);B
     [,1] [,2]
[1,]   -3   -2
[2,]   -1    0
[3,]    1    2
> A*B
Error in A * B : non-conformable arrays
```

Поэлементное умножение матриц. Ошибка из-за несовпадения размерностей

```
> A%*%B
     [,1] [,2]
[1,]    1    4
[2,]   -8    4
[3,]  -17    4
```

Матричное произведение успешно, т.к. число столбцов в матрице **A** совпадает с числом строк матрицы **B**

```
> B%*%t(B)
     [,1] [,2] [,3]
[1,]   13    3   -7
[2,]    3    1   -1
[3,]   -7   -1    5
```

Успешно, т.к. число столбцов в матрице **B** совпадает с числом строк матрицы **B**

```
> A%*%A
     [,1] [,2] [,3]
[1,]   15   18   21
[2,]   42   54   66
[3,]   69   90  111
> B%*%B
Error in B %*% B : non-conformable arguments
```

Произведение матриц

```
B <- matrix(-3:2, nrow = 3, ncol = 2, byrow = TRUE);B
C <- matrix(-3:2, nrow = 2, ncol = 3, byrow = TRUE);C
D <- matrix(-1:2, nrow = 2, ncol = 2, byrow = TRUE);D

B%*%C

C%*%B

B%*%D

D%*%B

C%*%D

D%*%C
```

Возведение в степень

```
> A
     [,1] [,2] [,3]
[1,]    0    1    2
[2,]    3    4    5
[3,]    6    7    8
> A%*%A
     [,1] [,2] [,3]
[1,]   15   18   21
[2,]   42   54   66
[3,]   69   90  111
> A%*%A%*%A
     [,1] [,2] [,3]
[1,]  180  234  288
[2,]  558  720  882
[3,]  936 1206 1476
> A%*%A%*%A%*%A
      [,1]  [,2]  [,3]
[1,]  2430  3132  3834
[2,]  7452  9612 11772
[3,] 12474 16092 19710
> A%*%A%*%A%*%A%*%A
       [,1]   [,2]   [,3]
[1,]  32400  41796  51192
[2,]  99468 128304 157140
[3,] 166536 214812 263088
```

```
> install.packages("expm")
Installing package into ‘C:/Users/Администратор/Documents/Rlibs’
(as ‘lib’ is unspecified)
trying URL 'https://cran.rstudio.com/bin/windows/contrib/3.4/expm_0.999-3.zip'
Content type 'application/zip' length 416618 bytes (406 KB)
downloaded 406 KB

package ‘expm’ successfully unpacked and MD5 sums checked

The downloaded binary packages are in
        C:\Users\Администратор\AppData\Local\Temp\Rtmp0wKZi3\downloaded_packages
> library(expm)
Загрузка требуемого пакета: Matrix

Присоединяю пакет: ‘expm’

Следующий объект скрыт от ‘package:Matrix’:

    expm

Warning message:
пакет ‘expm’ был собран под R версии 3.4.4
> A
     [,1] [,2] [,3]
[1,]    0    1    2
[2,]    3    4    5
[3,]    6    7    8
> A%^%2
     [,1] [,2] [,3]
[1,]   15   18   21
[2,]   42   54   66
[3,]   69   90  111
> A%^%3
     [,1] [,2] [,3]
[1,]  180  234  288
[2,]  558  720  882
[3,]  936 1206 1476
> A%^%4
      [,1]  [,2]  [,3]
[1,]  2430  3132  3834
[2,]  7452  9612 11772
[3,] 12474 16092 19710
> A%^%5
       [,1]   [,2]   [,3]
[1,]  32400  41796  51192
[2,]  99468 128304 157140
[3,] 166536 214812 263088
```

RUDN university

Возведение в степень

```
> A
     [,1] [,2] [,3]
[1,]    0    1    2
[2,]    3    4    5
[3,]    6    7    8
> sqrtm(A)
                     [,1]                    [,2]                   [,3]
[1,] 0.2793500+0.8789089i 0.360333+0.2725514i 0.441316-0.333806i
[2,] 0.8575189+0.1145272i 1.106112+0.0355151i 1.354705-0.043497i
[3,] 1.4356879-0.6498544i 1.851891-0.2015212i 2.268094+0.246812i
> sqrtm(A)%*%sqrtm(A)
                            [,1] [,2] [,3]
[1,] -4.996004e-16+1.110223e-16i 1+0i 2+0i
[2,]  3.000000e+00-0.000000e+00i 4-0i 5+0i
[3,]  6.000000e+00-0.000000e+00i 7-0i 8+0i
```

Определители матриц

```
> A # исходная матрица
     [,1] [,2] [,3]
[1,]    0    1    2
[2,]    3    4    5
[3,]    6    7    8
> A[2,3] # элемент a23 матрицы
[1] 5
> A[-2,-3] # матрица без 2 строки и 3 столбца
     [,1] [,2]
[1,]    0    1
[2,]    6    7
> det(A[-2,-3]) # минор к элементу a23 матрицы
[1] -6
> det(A) # определитель матрицы
[1] 0
```

Обратная матрица

```
> A
     [,1] [,2] [,3]
[1,]    0    1    2
[2,]    3    4    5
[3,]    6    7    8
> solve(A)
Error in solve.default(A) :
  Lapack routine dgesv: system is exactly singular: U[3,3] = 0
> E <- diag(3);E
     [,1] [,2] [,3]
[1,]    1    0    0
[2,]    0    1    0
[3,]    0    0    1
> solve(A+E)
     [,1] [,2] [,3]
[1,] -2.0 -1.0  1.0
[2,] -0.6  0.6 -0.2
[3,]  1.8  0.2 -0.4
```

```
> (A+E)%*%solve(A+E)
     [,1]          [,2] [,3]
[1,]    1 -2.220446e-16    0
[2,]    0  1.000000e+00    0
[3,]    0 -4.440892e-16    1
```

RUDN university

5100

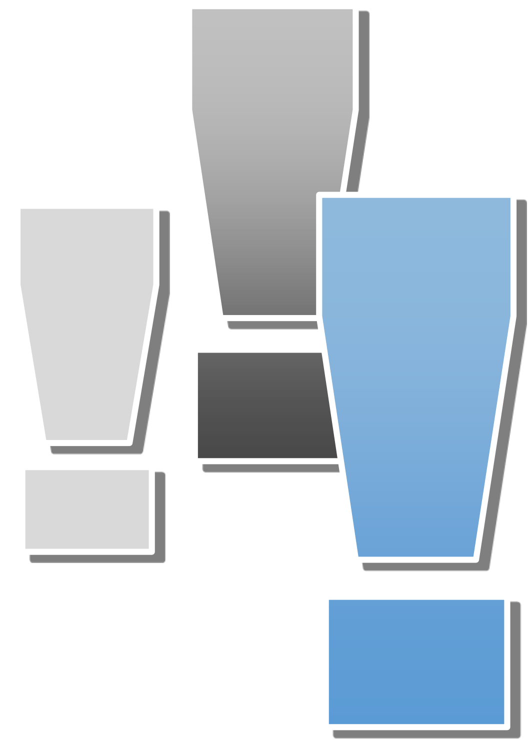
Ранг матрицы

```
> A
     [,1] [,2] [,3]
[1,]    0    1    2
[2,]    3    4    5
[3,]    6    7    8
> E
     [,1] [,2] [,3]
[1,]    1    0    0
[2,]    0    1    0
[3,]    0    0    1
> library(Matrix)
> rankMatrix(A)[1]
[1] 2
> rankMatrix(A+E)[1]
[1] 3
```

Матрица. Адресация

ma[n,m]	Значение элемента матрицы
ma[,m]	Значение столбца
ma[n,]	Значение строки
ma[1:n,2:m]	Диапазон значений с… по…. для строк и столбцов
ma[-(1:n),m]	Кроме диапазона…
ma[c(1,2,4), c(1,2)]	Элементы с заданными индексами
ma["RowName", "ColName"]	Значение элемента матрицы
ma[ma > 3]	все элементы, большие 3
ma[ma > 3 & ma < 5]	все элементы между 3 и 5
ma[ma == 3]	все элементы, равные 3
ma[ma %in% c(2,3,4)]	все элементы из заданного множества

Спасибо за внимание!



Шевцов Василий Викторович

shevtsov-vv@rudn.ru
+7(903)144-53-57