Федеральное государственное образовательное бюджетное учреждение высшего образования
«ФИНАНСОВЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПРИ ПРАВИТЕЛЬСТВЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ»
(ФИНАНСОВЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Департамент анализа данных, принятия решений и финансовых технологий

ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

Руководство к решению задач

В.М. Гончаренко, Л.В. Липагина

Учебное пособие

Утверждено на заседании Совета департамента
от 19.06.17 протокол № 14

Москва 2017

Федеральное государственное образовательное бюджетное учреждение высшего образования
«ФИНАНСОВЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПРИ ПРАВИТЕЛЬСТВЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ»
(Финансовый университет)

Департамент анализа данных, принятия решений и финансовых технологий

УТВЕРЖДАЮ

Ректор

________ М.А. Эскиндаров

« ____ »__________ 2017 г.

В.М. Гончаренко, Л.В. Липагина

ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

Руководство к решению задач

Учебное пособие

Рекомендовано Ученым советом факультета
«Прикладная математика и информационные технологии»
(*протокол № от 2017 г.*)

Одобрено департаментом
анализа данных, принятия решений и финансовых технологий
(протокол № 14 от 19.06.2017 г.)

Москва 2017

УДК 330.4(072)
ББК 22.18я73
Г 65

Рецензент: **А.А. Рылов, к.ф.-м.н., доцент департамента анализа данных, принятия решений и финансовых технологий**

В.М.Гончаренко, Л.В. Липагина. Исследование операций. Руководство к решению задач. Учебное пособие. – М.: Финансовый университет, Департамент анализа данных, принятия решений и финансовых технологий, 2017. – с.
Издание предназначено для студентов, обучающихся по направлению «Прикладная математика и информатика, «Экономика», и др. и содержит основные сведения и навыки по применению методов исследования операций при решении прикладных задач.
УДК 330.4(072)
ББК 22.18я73

Учебное издание

В.М. Гончаренко, Л.В. Липагина

Исследование операций. Руководство к решению задач

Учебное пособие

Компьютерный набор, верстка: ***В.М. Гончаренко, Л.В. Липагина***

Формат 60х90/16. Гарнитура *Times New Roman*
Усл. п.л. 0,0. Изд. № 28.2 - 2017. Тираж - 36 экз.
Заказ № ______

Отпечатано в Финансовом университете

СОДЕРЖАНИЕ

Глава 1. Линейное программирование

1.1. Каноническая и стандартная форма задачи линейного программирования

Задачей линейного программирования называется задача оптимизации вида

$$f = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n + c_0 \to \max\ (\min)$$
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n * b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n * b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n * b_m, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0. \end{cases} \tag{1.1}$$

где «*» обозначает «≥», «≤» или «=». При этом условия типа $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n * b_i,\ i = 1,\ldots,m$ называются *нетривиальными ограничениями*; условия $x_j \geq 0,\ j = 1,\ldots,n$ – *тривиальными ограничениями* (они могут отсутствовать), а $f = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n + c_0$ – *целевой функцией*. Система ограничений задает в пространстве R^n выпуклое *допустимое множество* X, а любая точка $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X$ называется *допустимым решением* задачи линейного программирования. Допустимое решение, на котором целевая функция достигает оптимального значения, называется *оптимальным решением* задачи линейного программирования.

Если система ограничений состоит только из уравнений и тривиальных неравенств, то говорят, что задача имеет *каноническую форму*, если же в системе ограничений имеются только неравенства, то говорят о *стандартной форме* задачи линейного программирования. В зависимости от метода решения, задачу необходимо привести к канонической или стандартной форме.

Пример 1.1. Привести к канонической форме задачу линейного программирования

$$z = 4x_1 + 2x_2 - 13x_3 + 2x_4 - x_5 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1 - 7x_2 + x_3 - x_4 \le 9, \\ 5x_1 + 8x_2 - x_3 + x_5 = 10, \\ 12x_1 + 8x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 \ge 11, \\ x_i \ge 0, i = 1,\dots,5. \end{cases}$$

Решение. Согласно входящим в ограничения неравенствам, можно ввести балансовые переменные $x_6 \ge 0, x_7 \ge 0$, такие, что эти условия приводятся к виду

$$x_1 - 7x_2 + x_3 - x_4 + x_6 = 9,$$
$$12x_1 + 8x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 - x_7 = 11,$$

и исходная задача переписывается в канонической форме

$$z = 4x_1 + 2x_2 - 13x_3 + 2x_4 - x_5 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1 - 7x_2 + x_3 - x_4 + x_6 = 9, \\ 5x_1 + 8x_2 - x_3 + x_5 = 10, \\ 12x_1 + 8x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 - x_7 = 11, \\ x_i \ge 0, i = 1,\dots,7. \end{cases}$$

Пример 1.2. Привести к стандартной форме задачу линейного программирования

$$z = 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_4 = 4, \\ x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 1, \\ x_i \ge 0, i = 1,\dots,4. \end{cases}$$

Решение. Рассмотрим систему нетривиальных ограничений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_4 = 4, \\ x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 1, \end{cases}$$

и выделим (методом Гаусса) базисные и свободные переменные:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 5 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 2 & 5 & -1 & 4 \\ 0 & -3 & -6 & 3 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

Итак, получаем систему

$$\begin{cases} x_1 + x_3 + x_4 = 2, \\ x_2 + 2x_3 - x_4 = 1, \end{cases}$$

из которой выражаем базисные неизвестные

$$\begin{cases} 2 - x_3 - x_4 = x_1 \geq 0, \\ 1 - 2x_3 + x_4 = x_2 \geq 0, \end{cases}$$

и исключаем их из целевой функции

$$z = 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 2(2 - x_3 - x_4) + (1 - 2x_3 + x_4) + 3x_3 + x_4 = -x_3 + 5 .$$

Получим задачу в стандартной форме, равносильную исходной:

$$z = -x_3 + 5 \to \max$$

$$\begin{cases} x_3 + x_4 \leq 2, \\ 2x_3 - x_4 \leq 1, \\ x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

Задачи для самостоятельного решения

Найти каноническую форму следующих задач линейного программирования

1. $z = -2x_1 + 7x_2 + 3x_3 - x_5 \to \max$
$$\begin{cases} x_1 + x_3 - x_4 - x_5 \geq 15, \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_5 \leq 10, \\ 2x_1 + 5x_2 - 42x_3 + 6x_4 \geq 34, \\ x_i \geq 0, i = 1, \ldots, 5. \end{cases}$$

2. $z = -9x_1 + 2x_2 - 5x_3 - x_4 \to \max$
$$\begin{cases} 17x_1 + x_3 + 4x_5 = 31, \\ 12x_1 + 13x_2 + 14x_3 - 15x_4 \geq 18, \\ x_1 + 4x_2 + 11x_3 - 6x_5 \leq 6, \\ x_1 \geq 0, x_3 \leq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

3. $z = 3x_1 - x_4 + x_5 \to \min$
$$\begin{cases} -3x_1 - x_2 - 5x_3 + 4x_6 \leq 22, \\ 2x_1 + 3x_3 - 4x_4 + 7x_5 = 18, \\ 3x_2 - 5x_4 + 2x_5 - 6x_6 \geq 27, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_4 \geq 0, x_6 \leq 0. \end{cases}$$

Привести задачи линейного программирования к стандартному виду:

4. $$z = x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 3x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = -3, \\ x_i \ge 0, i = 1, \ldots, 4. \end{cases}$$

5. $$z = 3x_2 + x_4 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = -3, \\ 4x_1 - 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -2, \\ x_i \ge 0, i = 1, \ldots, 4. \end{cases}$$

6. $$z = 3x_1 - x_2 + x_3 + x_4 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 2, \\ -5x_1 - 4x_2 - 3x_3 - 3x_4 = 2, \\ x_i \ge 0, i = 1, \ldots, 4. \end{cases}$$

1.2. Примеры задач линейного программирования

Рассмотрим примеры задач, математическая модель которых сводится к задаче линейного программирования.

Пример 1.3 (задача о банке). Пусть собственные средства банка составляют 400 у.е. Часть этих средств, но не менее 200 у.е. должна быть размещена в кредитах, а вложения – составлять не менее 30% средств, размещенных в кредиты и ценные бумаги. Если c_1 – доходность кредитов, а c_2 – доходность ценных бумаг (как правило, $c_1 > c_2$), то каким должно быть размещение средств, чтобы прибыль банка была максимальной?

Решение. Если x_1 – средства, размещенные в кредиты, а x_2 – средства, вложенные в ценные бумаги, то прибыль банка можно записать в виде $f = c_1x_1 + c_2x_2$. Учитывая ограничения на средства банка, объемы размещения в кредиты и ликвидное ограничение, получим следующую задачу линейного программирования:

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 400, \\ x_1 \ge 200, \\ x_2 \ge 0{,}3(x_1 + x_2), \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Пример 1.4 (транспортная задача). На двух складах A_1 и A_2 имеется 70 и 120 т некоторого товара. Потребности магазинов B_1, B_2, B_3 в этом товаре равны 50, 80 и 60 т соответственно. Тарифы перевозок заданы матрицей $C = \begin{pmatrix} 2 & 13 & 8 \\ 7 & 10 & 5 \end{pmatrix}$, где c_{ij} – стоимость перевозки одной тонны (единицы) товара со склада A_i в магазин B_j. Найти план перевозок товара со складов в магазины минимальной стоимости.

Решение. Пусть x_{ij} – количество товара (т), предназначенное к перевозке со склада i в магазин j. Матрица перевозок

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{pmatrix}$$

определяет план перевозок.

В данном случае суммарные запасы (70 + 120 = 190) равны суммарным потребностям (50 + 80 + 60 = 190). Такая задача называется *транспортной задачей с правильным балансом*, т.е. все товары со складов должны быть вывезены, а потребности магазинов – полностью удовлетворены.

Условия приводят к уравнениям

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 70,$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 120$$

и

$$x_{11} + x_{21} = 50,$$
$$x_{12} + x_{22} = 80,$$
$$x_{13} + x_{23} = 60.$$

Суммарная стоимость перевозок определяется функцией

$$f = \sum c_{ij} x_{ij} = 2x_{11} + 13x_{12} + 8x_{13} + 7x_{21} + 10x_{22} + 5x_{23}.$$

В итоге получаем каноническую задачу линейного программирования:

$$f = 2x_{11} + 13x_{12} + 8x_{13} + 7x_{21} + 10x_{22} + 5x_{23} \to \min$$
$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 70, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 120, \\ x_{11} + x_{21} = 50, \\ x_{12} + x_{22} = 80, \\ x_{13} + x_{23} = 60, \\ x_{ij} \ge 0,\ i = 1,\ 2;\ j = 1,\ 2,\ 3. \end{cases}$$

Пример 1.5 (задача о диете). Известно, что 1 кг яблок стоит 60 руб., а 1 кг абрикосов – 120 руб. Сколько яблок и абрикосов должен потреблять человек в сутки, чтобы получить не менее 80 мг витамина С и не менее 3 мг витамина А при минимальных затратах средств? Содержание витаминов А и С в яблоках и абрикосах указано в табл. 1.1.

	А (мг/кг)	С (мг/кг)
Яблоки	1	30
Абрикосы	24	45

Таблица 1.1

Р е ш е н и е. Данные задачи удобно представить в виде табл. 1.2 (x_1, x_2 – необходимое количество яблок и абрикосов).

	А (мг/кг)	С (мг/кг)	

x_1	1	30	60
x_2	24	45	120
	3	80	

Таблица 1.2

Тогда условие получения необходимого количества витаминов А и С можно записать в виде:

$$1 \cdot x_1 + 24x_2 \geq 3,$$
$$30x_1 + 45x_2 \geq 80,$$

а стоимость купленных продуктов равна $f = 60x_1 + 120x_2$. Получаем задачу линейного программирования в стандартной форме:

$$f = 60x_1 + 120x_2 \to \min$$
$$\begin{cases} x_1 + 24x_2 \geq 3, \\ 30x_1 + 45x_2 \geq 80, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Пример 1.6 (задача об использовании ресурсов). Для изготовления двух видов продукции P_1 и P_2 используются три вида ресурсов R_1, R_2, R_3. Пусть $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$ – матрица норм расхода сырья, где a_{ij} – количество ресурса R_i (кг), необходимого для производства единицы продукта P_j. Известно, что доход от реализации единицы продукта P_1 составляет 20 у.е., а от реализации единицы продукта P_2 – 25 у.е. Запасы ресурсов R_1, R_2, R_3 соответственно равны 300, 450 и 350 кг. Найти план производства, максимизирующий доход предприятия от реализации выпускаемой продукции.

Решение. Если x_1, x_2 – план выпуска продукции P_1, P_2, то доход от ее реализации определяется функцией $f = 20x_1 + 25x_2$. В силу ограниченности ресурсов имеем следующую систему нетривиальных ограничений:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 300, \\ 5x_1 + 2x_2 \le 450, \\ 4x_1 + 8x_2 \le 350. \end{cases}$$

Таким образом, получаем следующую задачу линейного программирования:

$$f = 20x_1 + 25x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 300, \\ 5x_1 + 2x_2 \le 450, \\ 4x_1 + 8x_2 \le 350, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

В общем случае, если $X = \left(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n\right)^T$ – план выпуска продукции P_1, P_2, …, P_n, A = (a_{ij}) – матрица норм расхода сырья, $C = \left(c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_n\right)$ – вектор доходов от реализации единицы этой продукции, а $B = \left(b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_m\right)^T$ – запасы ресурсов R_1, R_2, …, R_n, то доход предприятия от его реализации равен $f = CX$.

Модель соответствующей задачи об использовании ресурсов имеет вид:

$$f = CX \to \max$$

$$\begin{cases} AX \le B, \\ X \ge 0. \end{cases}$$

Вариант разреза	Количество заготовок			Отходы
	50	45	30	
x_1	2	–	–	0
x_2	–	2	–	10
x_3	1	–	1	20
x_4	–	–	3	10
x_5	–	1	1	25
x_6	1	1	–	5

Таблица 1.3

Пример 1.7. Стальные прутья длиной 100 см требуется разрезать на заготовки длиной 50, 45 и 30 см. Заготовок длиной 50 см должно быть не менее 15, длиной 45 см – не менее 35, длиной 30см – не менее 50. Сколько прутьев и как следует разрезать, чтобы получить необходимое число заготовок при минимальном количестве отходов?

Решение. Найдем сначала все возможные варианты разреза. Как видно из табл. 1.3, возможны шесть вариантов.

Пусть x_i – количество прутьев, разрезаемых по каждому из вариантов. Числа x_1, x_2, …, x_6 составляют план разреза. Тогда из условий задачи вытекают следующие ограничения на неизвестные x_1, x_2, …, x_6:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 + x_5 \geq 15, \\ 2x_2 + x_5 + x_6 \geq 35, \\ x_3 + 3x_4 + 2x_5 \geq 60, \\ x_i \geq 0, \ i = 1,\ 2,\ ...,\ 6. \end{cases}$$

Общее количество отходов определяется функцией

$$f = 10x_2 + 20x_3 + 10x_4 + 25x_5 + 5x_6.$$

Получаем следующую стандартную задачу линейного программирования:

$$f = 10x_2 + 20x_3 + 10x_4 + 25x_5 + 5x_6 \to \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 + x_5 \ge 15, \\ 2x_2 + x_5 + x_6 \ge 35, \\ x_3 + 3x_4 + 2x_5 \ge 60, \\ x_i \ge 0,\ i = 1,\ 2,\ \dots,\ 6. \end{cases}$$

1.3. Графический метод решения задач линейного программирования

Если задача линейного программирования задана в стандартной форме в R^2, то для ее решения используют графический метод, который состоит в следующем.

1. Строится допустимое множество X, заданное системой ограничений, как пересечение полуплоскостей, определяемых каждым из входящих в эту систему неравенств. Если X – пустое множество, то задача решений не имеет.

2. Если X – непустое множество, то рассматриваются линии уровня целевой функции $f = c_1x_1 + c_2x_2 + c_0$. Они определяются как прямые вида $c_1x_1 + c_2x_2 = \mathrm{const}$ с общим вектором нормали $\overline{n} = (c_1, c_2)$, определяющим направление роста функции f. Смещая линии уровня в направлении вектора $\overline{n}$, находим первую точку $\overline{x}^* = (x_1^*, x_2^*)$ пересечения такой линии с множеством X. Тогда $f_{\min} = f(\overline{x}^*)$ является минимальным значением функции f на X. Аналогично, если $\overline{x}^* = (x_1^*, x_2^*)$ – последняя точка пересечения линии уровня с множеством X, то $f_{\max} = f(\overline{x}^*)$ – максимальное значение функции f на X. Если при перемещении линии уровня в направлении $\overline{n}$ последняя имеет пересечения с X при сколь угодно большом значении константы, то $f_{\max} = +\infty$. Если же, наоборот,

линии уровня имеют пересечения с X при сколь угодно большом по модулю отрицательном значении постоянной, то $f_{\min} = -\infty$.

Пример 1.8. Решить графически следующую задачу линейного программирования

$$z = 3x_1 + x_2 - 10 \to \max$$
$$\begin{cases} 7x_1 + x_2 \geq 29, \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 25, \\ 4x_1 - x_2 \leq 15, \\ \vec{x} \geq 0. \end{cases}$$

Решение. Построим допустимую область X, т.е. множество на плоскости, определяемое системой

$$\begin{cases} 7x_1 + x_2 \geq 29, \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 25, \\ 4x_1 - x_2 \leq 15, \\ \vec{x} \geq 0. \end{cases}$$

Для этого построим сначала прямые $l_1 : 7x_1 + x_2 = 29$, $l_2 : 3x_1 + 2x_2 = 25$ и $l_3 : 4x_1 - x_2 = 15$ на плоскости (x_1, x_2) (см. рис. 1.1), а затем найдем их точки пересечения. Точку пересечения прямых l_1, l_2 находим как решение системы уравнений

$$\begin{cases} 7x_1 + x_2 = 29, \\ 3x_1 + 2x_2 = 25, \end{cases} \Rightarrow \; l_1 \cap l_2 = A(3;8)$$

Аналогично находим, что $l_2 \cap l_3 = B(5;5)$, $l_1 \cap l_3 = C(4;1)$.

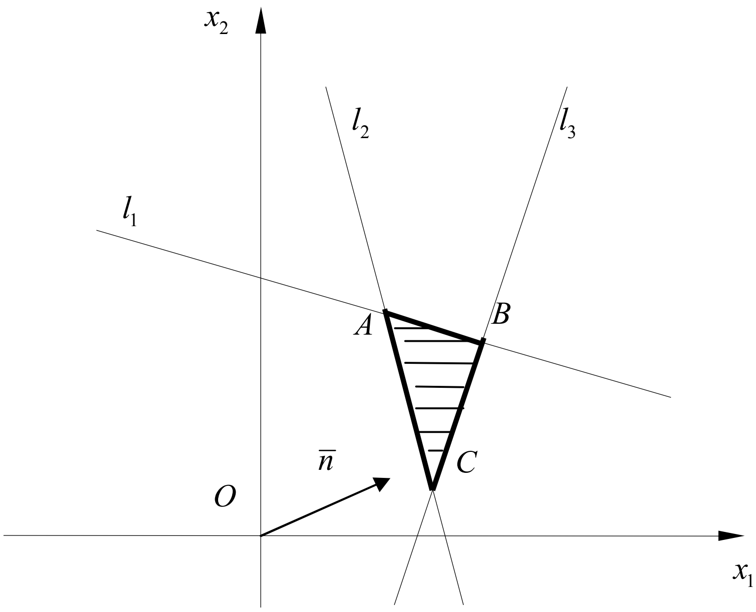


Рис. 1.1

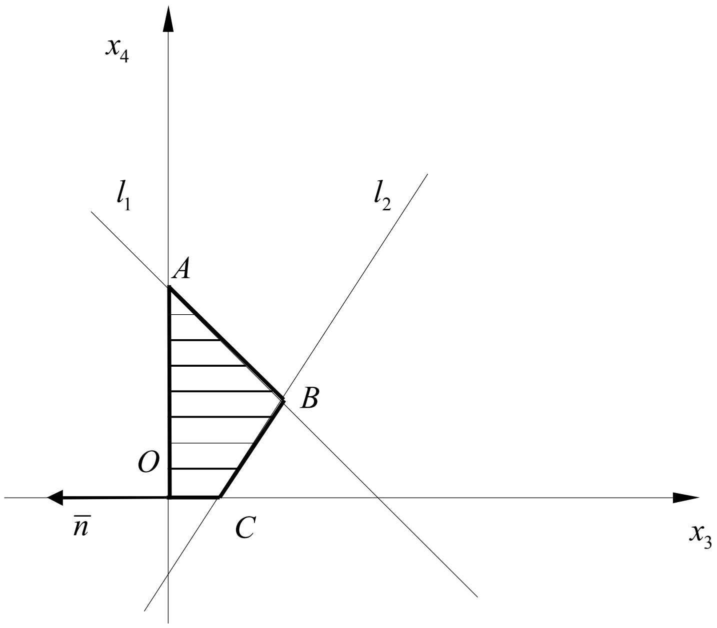
Каждая из прямых разбивает плоскость на две полуплоскости, а каждое неравенство, входящее в систему ограничений, задает одну из полуплоскостей. Для того чтобы установить, какая из полуплоскостей определяется неравенством, необходимо взять произвольную («пробную») точку, не лежащую на прямой и проверить, удовлетворяет ли она соответствующему неравенству. Если неравенство выполнено, то неравенство определяет полуплоскость, содержащую «пробную» точку, а если неравенство не выполняется, то его решением является другая полуплоскость. Решением системы неравенств будет пересечение соответствующих плоскостей. В нашем случае это треугольник ABC. Построив вектор нормали $\vec{n} = (3;1)$, убеждаемся, что решением задачи на максимум является точка $B(5;5)$ и $z(B) = 3 \cdot 5 + 5 - 10 = 10$.

Ответ. $z_{\max} = z(B) = 10$.

Пример 1.9. Решить графически следующую задачу линейного программирования

$$z = 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_4 = 4, \\ x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 1, \\ x_i \ge 0, i = 1,\ldots,4. \end{cases}$$

Решение. Формально задача является, вообще говоря, задачей



линейного программирования в пространстве R^5. Но ее можно свести к задаче на плоскости R^2, приведя к стандартной форме, как это было сделано в примере 1.2. Таким образом, имеем задачу

$$z = -x_3 + 5 \to \max$$
$$\begin{cases} x_3 + x_4 \le 2, \\ 2x_3 - x_4 \le 1, \\ x_3 \ge 0, x_4 \ge 0. \end{cases}$$

Строим на плоскости прямые $l_1 : x_3 + x_4 = 2,\ \ l_2 : 2x_3 - x_4 = 1$, находим их точку пересечения и в качестве допустимого множества получаем четырехугольник $OABC$ (рис 1.2) с угловыми точками $O(0,0)$, $A(0,2)$, $B(1,1)$ и $C(\frac{1}{2},0)$. Вектор нормали имеет координаты $\overline{n} = (-1,0)$ и мы видим, что

Рис. 1.2

оптимальным множеством, на котором достигается максимальное значение функции z является отрезок OA, т.е. множество $X^* = (1-t)A + tB = (1-t)(0,0) + t(0,2) = (0,2t), t \in [0,1]$. Отсюда находим

$$\begin{cases} x_1 = 2 - x_3 - x_4 = 2 - 2t, \\ x_2 = 1 - 2x_3 + x_4 = 1 + 2t. \end{cases}$$

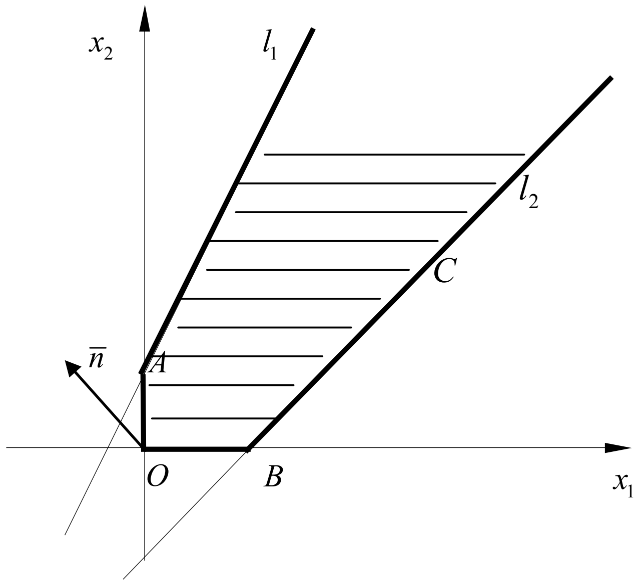


Рис. 1.3

Ответ. $z_{\max} = z(X^*) = 5$ при $X^* = (2-2t, 1+2t, 0, 2t), t \in [0,1]$.

Пример 1.10. Решить задачу линейного программирования

$$z = -x_1 + x_2 + 4 \to \min\ (\max)$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ -2x_1 + x_2 + x_4 = 2, \\ \bar{x} \ge 0. \end{cases}$$

графическим методом.

Решение. Выразим базисные неизвестные x_3, x_4 из ограничений

$$\begin{cases} x_3 = 3 - x_1 + x_2 \ge 0, \\ x_4 = 2 + 2x_1 - x_2 \ge 0, \end{cases}$$

и получаем задачу в стандартной форме

$$z = -x_1 + x_2 + 4 \to \min\ (\max)$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \le 3, \\ 2x_1 - x_2 \ge -2, \\ \vec{x} \ge 0. \end{cases}$$

Построив на плоскости прямые $l_1 : x_1 - x_2 = 3,\ \ l_2 : 2x_1 - x_2 = -2$, находим допустимое множество (рис. 1.3) с угловыми точками $O(0,0)$, $A(0,2)$ и $B(3,1)$. Вектор нормали имеет координаты $\overline{n} = (-1,1)$, и, как легко видеть, луч BC с началом в точке B является линией уровня функции z и определяет множество, на котором z достигает минимального значения. Так как направляющим вектором луча BC является вектор $\overline{m} = (1,1) \ge 0$, то

$$X_{\min} = B + t \cdot \overline{m} = (3,0) + t(1,1) = (3 + t, t),\ t \ge 0.$$

и $z_{\min} = z(B) = 1$. Кроме этого, так как при движении вдоль вектора $\overline{n}$ каждая линия уровня пересекается с допустимым множеством, то $z_{\max} = \infty$. Для окончательного ответа находим $x_3 = 0, x_4 = 8 + t.$

Ответ. $z_{\min} = z(X_{\min}) = 1$ при $X_{\min} = (3 + t, t, 0, 8 + t), t \ge 0,\ z_{\max} = \infty$.

Задачи для самостоятельного решения

Решить задачи линейного программирования графическим способом:

7. $z = 4x + 3y \to \max\ (\min)$ при $x \ge 0, y \ge 0$ и $\begin{cases} 5x + 3y \ge 23 \\ 9x - y \le 35 \\ 4x - 4y \ge -20 \end{cases}$.

8. $z = -3x + 2y \to \max\ (\min)$ при $x \ge 0, y \ge 0$ и $\begin{cases} 5x + 5y \ge 55 \\ 9x - 3y \le 63 \\ 4x - 8y \ge -52 \end{cases}$.

9. $z=-4x-3y \to \max(\min)$ при $x \ge 0, y \ge 0$ и $\begin{cases} 5x+2y \ge 21 \\ 10x-2y \le 24 \\ 5x-4y \ge -27 \end{cases}$.

10. $z=x-3y \to \max(\min)$ при $x \ge 0, y \ge 0$ и $\begin{cases} 5x+5y \ge 55 \\ 9x-2y \le 88 \\ 4x-7y \ge -22 \end{cases}$.

11. $z=-2x+4y \to \max(\min)$ при $x \ge 0, y \ge 0$ и $\begin{cases} 4x+2y \ge 28 \\ 7x-y \le 40 \\ 3x-3y \ge -6 \end{cases}$.

12. $z=-3x-3y \to \max(\min)$ при $x \ge 0, y \ge 0$ и $\begin{cases} 4x+2y \ge 30 \\ 7x-4y \ge 45 \\ 3x-6y \le -15 \end{cases}$.

13. $z=3x_1-x_2+2x_3-x_4-7 \to \max(\min)$ при $\bar{x} \ge 0$ и $\begin{cases} x_1+4x_2-x_3=1, \\ 2x_1-2x_2+x_5=5, \\ x_1+2x_2-x_4=2. \end{cases}$

14. $z=x_1+x_2+2x_3+x_4+22 \to \max(\min)$ при $\bar{x} \ge 0$ и $\begin{cases} x_1+3x_2+2x_3+2x_4=5, \\ 2x_1-2x_3+x_4=4. \end{cases}$

15. $z=-x_1-x_4+5 \to \max(\min)$ при $\bar{x} \ge 0$ и $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=10, \\ x_1+x_2-x_4=2, \\ 2x_1-x_2+x_5=5. \end{cases}$

16. $z=x_1+x_2+x_3+2x_4+7 \to \max(\min)$ при $\bar{x} \ge 0$ и $\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3+2x_4=15, \\ x_1-5x_2-x_3+4x_4=3. \end{cases}$

17. $z=3x_1-4x_2-x_4+11 \to \max(\min)$ при $\bar{x} \ge 0$ и $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3-x_4=14, \\ 3x_1-4x_2+x_3-x_4=2. \end{cases}$

18. $z=-104-25x_1+24x_2 \to \max(\min)$ при $\bar{x} \ge 0$ и $\begin{cases} -10x_1+7x_2+x_3=11, \\ 5x_1+3x_2+x_4=79, \\ -5x_1+10x_2-x_5=25, \end{cases}$

1.4. Симплекс-метод

Алгоритм решения задачи симплекс-методом сначала изложим на конкретном примере.

Пример 1.11. Решить задачу линейного программирования

$$\begin{cases} z = 3x_1 - x_2 - 2x_3 + 6x_4 - 10 \to \min \\ x_1 + 3x_2 + 7x_3 - x_4 = 6, \\ x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = 2, \\ \bar{x} \ge 0. \end{cases}$$

симплексным методом.

Решение. Начальным этапом решения задачи симплекс-методом является приведение ее к допустимому виду и формирование симплекс-таблицы. Это означает, что задача должна быть приведена к каноническому виду, в системе нетривиальных ограничений должен быть выделен допустимый базис (т.е. базисное решение должно быть неотрицательным, или, что равносильно, все правые части – неотрицательные числа) и из целевой функции должны быть исключены базисные переменные. В нашем примере система ограничений уже приведена к каноническому виду. Для выделения базиса используем метод Гаусса,

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 3 & 7 & -1 & 6 \\ 1 & -1 & -1 & 3 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 7 & -1 & 6 \\ 0 & -4 & -8 & 4 & -4 \end{array}\right) : (-4) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 7 & -1 & 6 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \begin{cases} x_1 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ x_2 + 2x_3 - x_4 = 1. \end{cases}$$

Выражая базисные неизвестные, получим $\begin{cases} x_1 = 3 - x_3 - 2x_4, \\ x_2 = 1 - 2x_3 + x_4, \end{cases}$ и, подставляя в функцию z, имеем

$$z = 3(3 - x_3 - 2x_4) - (1 - 2x_3 + x_4) - 2x_3 + 6x_4 - 10 = -3x_3 - x_4 - 2.$$

Таким образом, получаем, что исходная задача эквивалентна следующей

$$\begin{cases} z = -3x_3 - x_4 - 2 \to \min \\ x_1 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ x_2 + 2x_3 - x_4 = 1, \\ \bar{x} \ge 0. \end{cases}$$

Переписываем z в виде $z + 3x_3 + x_4 = -2$ и формируем симплекс-таблицу

базис	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	3	1	0	1	2
x_2	1	0	1	2	-1
z	-2	0	0	3	1

Из симплекс-таблицы можно сделать вывод, что базисным решением является $\bar{x} = (3,1,0,0)$ и $z(\bar{x}) = -2$. Так как в последней строке (строке оценок) есть положительные элементы (коэффициенты при x_3, x_4), то решение можно улучшить с помощью шага симплекс-метода. Выбираем разрешающий элемент для первого шага. В качестве разрешающего возьмем столбец, отвечающий переменной x_3 (как содержащий положительный элемент в оценочной строке), а для выбора разрешающей строки рассмотрим отношение элементов столбца свободных членов (столбца b_i) к положительным элементам разрешающего. Разрешающий элемент выбирается в строке, дающей минимум этого отношения: $\min\left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{1}\right\} = \frac{1}{2}$, т.е. выбирается вторая строка. Иначе говорят: мы выводим из базиса переменную x_2 и вводим в базис x_3. Делим вторую строку на 2, получаем симплекс-таблицу

базис	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	3	1	0	1	2
x_2	$1/2$	0	$1/2$	**1**	$-1/2$
z	-2	0	0	3	1

с выделенной разрешающей единицей и делаем шаг симплекс-метода (из первой строки вычитаем вторую и из строки оценок вычитаем разрешающую, умноженную на 3)

базис	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	$5/2$	1	$-1/2$	0	$5/2$
x_3	$1/2$	0	$1/2$	1	$-1/2$
z	$-7/2$	0	$-3/2$	0	$5/2$

Замечание 1.1. Легко видеть, что шаг симплекс-метода во многом сходен с итерацией метода Гаусса. Отличие состоит в том, что разрешающий элемент выбирается не произвольно, а согласно вышеизложенным правилам, которые гарантируют то, что вновь полученная таблица имеет допустимый вид.

Из симплекс-таблицы видно, что базисным решением является $\bar{x} = \left(\frac{5}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0\right)$ и $z(\bar{x}) = -\frac{7}{2}$. Так как в строке оценок снова есть положительный элемент (коэффициент при x_4), то решение можно улучшить. Выбор разрешающего столбца теперь однозначен (отвечает переменной x_4), также как и выбор разрешающей строки – в столбце единственный положительный элемент $\frac{5}{2}$. Итак, выводим из базиса переменную x_1 и вводим в базис x_4. Умножаем первую строку на $\frac{2}{5}$, получаем симплекс-таблицу

базис	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	1	$2/5$	$-1/5$	0	$\mathbf{1}$
x_3	$1/2$	0	$1/2$	1	$-1/2$
z	$-7/2$	0	$-3/2$	0	$5/2$

и делаем шаг симплекс-метода с отмеченным разрешающим элементом (ко второй строке прибавляем первую, умноженную на $\frac{1}{2}$, а из строки оценок вычитаем первую, умноженную на $\frac{5}{2}$). Получаем

базис	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4
x_4	1	$2/5$	$-1/5$	0	1
x_3	1	$1/5$	$2/5$	1	0
z	-6	-1	-1	0	0

В последней строке нет положительных элементов, поэтому оптимальное решение найдено. Таковым является базисное решение $X^* = (0,0,1,1)$ и $z_{\min} = z(X^*) = -6$.

Ответ. $z_{\min} = -6$ при $X^* = (0,0,1,1)$.

Сформулируем теперь общий алгоритм решения задачи линейного программирования симплекс-методом. Предположим, система ограничений приведена к каноническому виду, в ней выделен допустимый базис (все правые части – неотрицательные числа), из целевой функции исключены базисные переменные и все слагаемые, кроме константы, перенесены в левую часть. Записав все данные в симплекс-таблицу, получим (далее предполагается, что рассматривается задача на максимум, а альтернатива в скобках дана для задачи на минимум)

1. Если в последней строке нет отрицательных (положительных) оценок, то оптимальное решение достигнуто.

2. Если в оценочной строке есть хотя бы одна отрицательная (положительная) оценка, то решение может быть улучшено. Для этого выбирается разрешающий столбец (пусть он имеет номер j), содержащий отрицательную (положительную) оценку, а в качестве разрешающего выбирается положительный элемент $a_{lj} > 0$, дающий минимум отношения элемента свободного столбца b_i к a_{ij}: $a_{lj} = \min\limits_{a_{ij}>0}\left\{\dfrac{b_i}{a_{ij}}\right\}$.

3. Если в симплекс-таблице имеется отрицательная (положительная) оценка, а в соответствующем столбце нет положительных элементов, то исходная задача не имеет решения, т.е. $z_{\max} = +\infty$ $(z_{\min} = -\infty)$.

4. Если оптимальное решение найдено, но при этом у одной (или нескольких) свободной переменной оценка равна 0, то задача имеет

альтернативное решение, для получения которого следует сделать шаг симплекс-метода, выбрав разрешающий элемент (по общему правилу) в столбце с нулевой оценкой. При этом множество оптимальных решений совпадает с выпуклой оболочкой всех альтернативных решений.

Заметим, что последнее верно не всегда. Возможна ситуация, когда при поиске альтернативных решений в столбце, содержащем нулевую оценку, все элементы отрицательны (см. пример 1.13).

Пример 1.12. Решить задачу линейного программирования

$$\begin{cases} z = 3x_1 + 3x_2 + 21 \to \max \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 + x_4 = 3, \\ x_1 + x_2 + x_5 = 7, \\ \overline{x} \geq 0. \end{cases}$$

симплексным методом.

Решение. Задача приведена к каноническому виду, допустимый базис уже выделен (переменные x_3, x_4, x_5) и из целевой функции исключены базисные переменные. Поэтому переписываем функцию z в виде $z - 3x_1 - 3x_2 = 21$ и формируем симплекс-таблицу

базис	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_3	1	-2	**1**	1	0	0
x_4	3	1	-1	0	1	0 .
x_5	7	1	1	0	0	1
z	21	-3	-3	0	0	0

В последней строке есть отрицательные элементы, поэтому решение может быть улучшено. Вводим в базис переменную x_2, а так как $\min\left\{\frac{1}{1}, \frac{7}{1}\right\} = 1,$ выводим из базиса переменную x_3:

базис	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_2	1	−2	1	1	0	0
x_4	4	−1	0	1	1	0 .
x_5	6	3	0	−1	0	1
z	24	−9	0	3	0	0

Так как в строке оценок есть единственный отрицательный элемент, а выбор разрешающего элемента однозначен, то выводим из базиса переменную x_5 и вводим в базис переменную x_1. Делим разрешающую строку на 3, получаем

базис	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_2	1	−2	1	1	0	0
x_4	4	−1	0	1	1	0
x_5	2	**1**	0	−1/3	0	1/3
z	24	−9	0	3	0	0

и делаем шаг симплекс-метода

базис	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_2	5	0	1	1/3	0	2/3
x_4	6	0	0	2/3	1	1/3 .
x_1	2	1	0	−1/3	0	1/3
z	42	0	0	0	0	3

В последней строке нет отрицательных элементов, поэтому оптимальным решением является базисное решение $X_1 = (2,5,0,6,0)$ и $z_{\max} = z(X_1) = 42.$

С другой стороны, в столбце свободной переменной x_3 в строке оценок есть нулевая оценка, а, значит, имеется альтернативное решение. Для того чтобы его найти, выбираем по общему правилу разрешающий элемент в этом столбце: так как $\min\left\{\frac{5}{1/3}, \frac{6}{2/3}\right\} = \frac{6}{2/3}$, умножаем вторую строку на $3/2$, получаем

базис	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_2	5	0	1	$1/3$	0	$2/3$
x_4	9	0	0	**1**	$3/2$	$1/2$
x_1	2	1	0	$-1/3$	0	$1/3$
z	42	0	0	0	0	3

,

и делаем шаг симплекс-метода (вводим в базис x_3 и выводим из базиса переменную x_4)

базис	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_2	2	0	1	0	$-1/2$	$1/2$
x_3	9	0	0	1	$3/2$	$1/2$
x_1	5	1	0	0	$1/2$	$1/2$
z	42	0	0	0	0	3

и альтернативным оптимальным решением является $X_2 = (5,2,9,0,0)$. Заметим, что других альтернатив нет, так как, вводя в базис переменную x_4, мы вновь получаем альтернативное решение X_1. Итак, оптимальным множеством исходной задачи является отрезок, соединяющий точки X_1 и X_2:

$$X^* = (1-t)X_1 + tX_2 = (1-t)(2,5,0,6,0) + t(5,2,9,0,0) = (2+3t, 5-3t, 9t, 6-6t, 0), t \in [0,1].$$

Ответ. $z_{\max} = 42$ при $X^* = (2+3t, 5-3t, 9t, 6-6t, 0), t \in [0,1]$.

Пример 1.13. Решить задачу линейного программирования

$$\begin{cases} z = -x_1 + x_2 + 4 \to \min \\ x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ -2x_1 + x_2 + x_4 = 2, \\ \bar{x} \geq 0. \end{cases}$$

симплексным методом.

Решение. Переписываем функцию z в виде $z + x_1 - x_2 = 4$ и составляем симплекс-таблицу

базис	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4
x_3	3	1	-1	1	0
x_4	2	-2	1	0	1
z	4	1	-1	0	0

.

В последней строке есть положительный элемент, поэтому решение может быть улучшено. Вводим в базис переменную x_1 и выводим из базиса переменную x_3:

базис	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	3	1	-1	1	0
x_4	8	0	-1	2	1
z	1	0	0	-1	0

.

В последней строке нет положительных оценок, поэтому оптимальным решением является базисное решение $X_1 = (3,0,0,8)$ и $z_{\min} = z(X_1) = 1$. Замечаем, что в столбце свободной переменной x_2 в строке оценок есть нулевая оценка, но все элементы этого столбца отрицательные. С одной стороны, это указывает на то, что оптимальное множество состоит из бесконечного множества точек, а с другой стороны, у этого множества больше нет угловых точек (например, если это луч; см. пример 1.12).

Для записи общего решения находим другую (не базисную) оптимальную точку, т.е. выражаем, используя заключительную симплекс-таблицу, базисные переменные через свободные

$$\begin{cases} x_1 = 3 + x_2 - x_3, \\ x_4 = 8 + x_2 - 2x_3, \end{cases}$$

и полагаем, например, $x_2 = 1, x_3 = 0 \;\Rightarrow\; X_2 = (4,1,0,9)$. Получаем, что решением задачи является луч X_1X_2 с началом в точке X_1 (для геометрической интерпретации задачи смотри пример 1.12) $X_{\min} = tX_2 + (1-t)X_3 = t(4,1,0,9) + (1-t)(3,0,0,8) = (3+t, t, 0, 8+t), t \geq 0$.

Ответ. $z_{\min} = z(X_{\min}) = 1$ при $X_{\min} = (3+t, t, 0, 8+t), t \geq 0,\ z_{\max} = \infty$.

Задачи для самостоятельного решения

Решить задачи линейного программирования симплексным методом

19. $z = 3x_3 - 4x_4 + 2x_5 + 9 \to \max$ при $\vec{x} \ge 0$ и $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 + x_2 + x_4 = 4, \\ -x_1 + x_3 + 2x_5 = 4. \end{cases}$

20. $z = x_1 - 4x_2 - 2x_4 + x_5 - 11 \to \min$ при $\vec{x} \ge 0$ и $\begin{cases} x_1 - 5x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 - x_2 - x_4 = -4, \\ x_1 + x_2 + x_5 = 8. \end{cases}$

21. $z = 2x_1 - 2x_2 - x_3 - x_5 - 13 \to \min$ при $\vec{x} \ge 0$ и $\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ -5x_1 - 3x_2 - x_4 = -25, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_5 = 6. \end{cases}$

22. $z = 3x_2 + x_4 + 8 \to \max$ при $\vec{x} \ge 0$ и $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 - 2x_2 \le 4, \\ -x_1 + x_2 + x_4 = 1. \end{cases}$

23. $z = -x_1 - x_3 - 10 \to \min$ при $\vec{x} \ge 0$ и $\begin{cases} 2x_1 - 2x_3 + 3x_4 \le 12, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 1. \end{cases}$

24. $z = 2x_2 - x_4 + 12 \to \max$ при $\vec{x} \ge 0$ и $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \le 12, \\ 4x_1 + x_2 + x_3 = 8, \\ 4x_1 - x_2 + x_4 = 8. \end{cases}$

1.5. Метод искусственного базиса

Если в исходной системе ограничений не выделен допустимый базис, как того требует алгоритм симплекс-метода, для его нахождения можно решить вспомогательную задачу, которая ставится следующим образом.

Пусть исходная система нетривиальных ограничений задана в общем виде

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

где $b_i \geq 0, i = 1,\ldots,m.$ Выполнения последнего условия всегда можно добиться, умножив уравнения на -1. Введем в систему новые (искусственные) переменные $y_1, y_2, \ldots, y_m$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + y_1 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + y_2 = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + y_m = b_m, \end{cases}$$

так что новая система имеет допустимое базисное решение $(0,0,\ldots,0; b_1, b_2, \ldots, b_m) \in \mathbf{R}^{n+m}$. Рассмотрим вспомогательную целевую функцию $F(x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, y_2, \ldots, y_m) = y_1 + y_2 + \ldots + y_m$ и решим симплекс-методом задачу

$$\begin{cases} F = y_1 + y_2 + \ldots + y_m \to \min \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + y_1 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + y_2 = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + y_m = b_m. \end{cases}$$

Если последняя задача имеет решение, то возможны два случая:

1. Если $\min F > 0$, то система ограничений не имеет допустимого базиса и задача не имеет решений.

2. Если $\min F = 0$, то система ограничений имеет неотрицательное базисное решение. Чтобы получить систему ограничений, эквивалентную исходной, но с выделенным допустимым базисом, необходимо, чтобы в заключительной симплекс-таблице все искусственные переменные были свободными.

Пример 1.14. Рассмотрим задачу из примера 1.11:

$$\begin{cases} z = 3x_1 - x_2 - 2x_3 + 6x_4 - 10 \to \min \\ x_1 + 3x_2 + 7x_3 - x_4 = 6, \\ x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = 2, \\ \bar{x} \geq 0. \end{cases}$$

и выделим допустимый базис с помощью вспомогательной задачи. Итак, рассмотрим задачу

$$\begin{cases} F = y_1 + y_2 \to \min \\ x_1 + 3x_2 + 7x_3 - x_4 + y_1 = 6, \\ x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 + y_2 = 2. \end{cases}$$

В системе выделен допустимый (искусственный) базис y_1, y_2, поэтому выражаем из уравнений базисные переменные

$$\begin{cases} y_1 = 6 - x_1 - 3x_2 - 7x_3 + x_4, \\ y_2 = 2 - x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 \end{cases}$$

и подставляем в выражение для $F: F = y_1 + y_2 = 8 - 2x_1 - 2x_2 - 6x_3 - 2x_4$. Переписываем это равенство в виде $F + 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 2x_4 = 8$ и формируем симплекс-таблицу

базис	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2
y_1	6	1	3	7	−1	1	0
y_2	2	**1**	−1	−1	3	0	1
F	8	2	2	6	2	0	0

.

Выводим из базиса переменную y_2 и вводим в базис x_1. Получим

базис	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2
y_1	4	0	4	8	−4	1	−1
x_1	2	1	−1	−1	3	0	1
F	4	0	4	8	−4	0	−2

.

Далее, выводим из базиса переменную y_1 и вводим в базис x_2. Для этого делим первую строку на 4, получаем таблицу

базис	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2
y_1	1	0	**1**	2	−1	1/4	−1/4
x_1	2	1	−1	−1	3	0	1
F	4	0	4	8	−4	0	−2

и делаем шаг симплекс-метода

базис	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2
x_2	1	0	1	2	−1	1/4	−1/4
x_1	3	1	0	1	2	1/4	3/4
F	0	0	0	0	0	−1	−1

Данная симплекс-таблица – заключительная, искусственные переменные y_1, y_2 стали свободными и мы, опуская последнюю строку и столбцы, им соответствующие, получаем таблицу

базис	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4
x_2	1	0	**1**	2	−1
x_1	3	1	0	1	2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 + 2x_3 - x_4 = 1, \\ x_1 + x_3 + 2x_4 = 3, \end{cases}$$

т.е. получаем систему ограничений с выделенным допустимым базисным решением, которая равносильна исходной системе ограничений и совпадает с системой, полученной (другим способом) в примере 1.11.

Пример 1.15. Решить задачу

$$\begin{cases} z = x_1 + 3x_2 + 8 \to \min \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + 3x_2 - x_4 = 19, \\ 3x_1 + x_2 + x_5 = 33, \\ \bar{x} \geq 0 \end{cases}$$

симплекс-методом.

Решение. В данной задаче допустимый базис выделен лишь частично (переменные x_3, x_5), поэтому ограничимся лишь введением одной искусственной переменной y и решим следующую задачу

$$\begin{cases} F = y \to \min, \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + 3x_2 - x_4 + y = 19, \\ 3x_1 + x_2 + x_5 = 33 \end{cases}$$

Так как $F = y = 19 - x_1 - 3x_2 + x_4$, то $F + x_1 + 3x_2 - x_4 = 19$. Аналогично, $z = x_1 + 3x_2 + 10 \Rightarrow z - x_1 - 3x_2 = 10$ и мы, решая задачу для функции F, внесем в таблицу строку для функции z, одновременно преобразуя и ее. Получим

базис	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y
x_3	1	-1	**1**	1	0	0	0
y	19	1	3	0	-1	0	1
x_5	33	3	1	0	0	1	0
z	8	-1	-3	0	0	0	0
F	19	1	3	0	-1	0	0

Сделаем шаг симплекс-метода с выделенным разрешающим элементом

базис	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y
x_2	1	-1	1	1	0	0	0
y	16	4	0	-3	-1	0	1
x_5	32	4	0	-1	0	1	0
z	11	-4	0	3	0	0	0
F	16	4	0	-3	-1	0	0

$\Leftrightarrow$

базис	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y
x_2	1	-1	1	1	0	0	0
y	4	**1**	0	$-3/4$	$-1/4$	0	$1/4$
x_5	32	4	0	-1	0	1	0
z	11	-4	0	3	0	0	0
F	16	4	0	-3	-1	0	0

Выводим из базиса переменную y и вводим в базис x_1.

базис	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y
x_2	5	0	1	$1/4$	$-1/4$	0	$1/4$
x_1	4	1	0	$-3/4$	$-1/4$	0	$1/4$
x_5	16	0	0	2	1	1	-1
z	27	0	0	0	-1	0	1
F	0	0	0	0	0	0	-1

Вспомогательная задача $F \to \min$ решена и искусственная переменная $y -$ свободная. Поэтому опускаем последнюю строку и столбец, и получаем симплекс-таблицу для исходной задачи с выделенным допустимым базисом:

базис	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_2	5	0	1	$1/4$	$-1/4$	0
x_1	4	1	0	$-3/4$	$-1/4$	0
x_5	16	0	0	2	1	1
z	27	0	0	0	-1	0

Более того, данная симплекс-таблица – заключительная, поэтому решением задачи является $X_1 = (4,5,0,0,16)$, а так как имеется свободный столбец x_3 с нулевой оценкой, то имеется альтернативное решение. Выводим из базиса переменную x_5 и вводим в базис x_3:

базис	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_2	5	0	1	$1/4$	$-1/4$	0
x_1	4	1	0	$-3/4$	$-1/4$	0
x_5	8	0	0	**1**	$1/2$	$1/2$
z	27	0	0	0	-1	0

базис	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_2	3	0	1	0	$-3/8$	$-1/8$
x_1	10	1	0	0	$1/8$	$3/8$,
x_3	8	0	0	1	$1/2$	$1/2$
z	27	0	0	0	-1	0

получаем альтернативное решение $X_2 = (10,3,8,0,0)$. Как и в примере 1.12 убеждаемся, что альтернатив больше нет, поэтому общее решение задачи

$$X^* = (1-t)X_1 + tX_2 = (1-t)(4,5,0,0,16) + t(10,3,8,0,0) = (4+6t, 5-2t, 8t, 0, 16-16t), t \in [0,1].$$

Ответ. $z_{\min} = 27$ при $X^* = (4+6t, 5-2t, 8t, 0, 16-16t), t \in [0,1]$.

Пример 1.16. Решить задачу

$$\begin{cases} z = x_1 + 2x_2 + 9 \to \max \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 + 4x_2 + x_4 = 1, \\ -x_1 + x_2 - x_5 = 3, \\ \bar{x} \geq 0. \end{cases}$$

симплекс-методом.

Решение. Вводим две искусственные переменные y_1, y_2 и решим следующую задачу

$$\begin{cases} F = y_1 + y_2 \to \min \\ x_1 + x_2 - x_3 + y_1 = 2, \\ x_1 + 4x_2 + x_4 = 1, \\ -x_1 + x_2 - x_5 + y_2 = 3, \\ \bar{x} \geq 0, \bar{y} \geq 0. \end{cases}$$

Из системы ограничений преобразуем $F = y_1 + y_2 = 5 - 2x_2 + x_3 + x_5$, т.е. $F + 2x_2 - x_3 - x_5 = 5$. Аналогично, $z - x_1 - 2x_2 = 9$ и мы решаем задачу для функции F, включив при этом в таблицу строку для функции z:

базис	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	y_2
y_1	2	1	1	-1	0	0	1	0
x_5	1	1	4	0	1	0	0	0
y_2	3	-1	1	0	0	-1	0	1
z	9	-1	-2	0	0	0	0	0
F	5	0	2	-1	0	-1	0	0

В строке оценок есть единственный положительный элемент, поэтому вводим в базис x_2 и выводим из базиса x_5:

базис	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	y_2
y_1	2	1	1	-1	0	0	1	0
x_5	$1/4$	$1/4$	**1**	0	$1/4$	0	0	0
y_2	3	-1	1	0	0	-1	0	1
z	9	-1	-2	0	0	0	0	0
F	5	0	2	-1	0	-1	0	0

,

базис	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	y_2
y_1	$7/4$	$3/.4$	0	-1	$-1/4$	0	1	0
x_2	$1/4$	$1/4$	1	0	$1/4$	0	0	0
y_2	$11/4$	$-5/4$	0	0	$-1/4$	-1	0	1
z	$19/2$	$-1/2$	0	0	$1/2$	0	0	0
F	$9/2$	$-1/2$	0	-1	$-1/2$	-1	0	0

Все элементы строки оценок для задачи $F \to \min$ отрицательны, поэтому симплекс-таблица – заключительная, но, так как $\min F = 9/2 > 0$, то исходная задача не имеет ни одного допустимого базиса и решений не имеет.

Задачи для самостоятельного решения

Решить задачи линейного программирования, используя метод искусственного базиса

25. $z = -x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 - 7 \to \min$ при $\bar{x} \geq 0$ и $\begin{cases} 2x_1 + 11x_2 + 12x_3 + 3x_4 = 14, \\ 9x_2 + 12x_3 + 3x_4 = 12. \end{cases}$

26. $z = 6x_2 + x_3 - x_4 + 13 \to \max$ при $\bar{x} \geq 0$ и $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 + 6x_4 + x_5 = 6, \\ x_1 + 5x_3 + x_4 - 7x_5 = 6, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 = 6. \end{cases}$

27. $z = 6x_1 - x_3 + x_4 + 2x_5 - 8 \to \max$ при $\bar{x} \geq 0$ и $\begin{cases} 4x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 8, \\ 2x_1 - x_2 + x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + x_5 = 2. \end{cases}$

28. $z = -5x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 - 8 \to \min$ при $\bar{x} \geq 0$ и $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 12, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 16, \\ x_1 - 3x_2 + x_5 = 3. \end{cases}$

29. $z = 7x_1 + 2x_3 - x_4 + x_5 + 24 \to \max$ при $\bar{x} \geq 0$ и $\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 - x_2 + x_4 = 3, \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 11. \end{cases}$

30. $z = 7x_2 + x_3 - x_4 - x_5 + 17 \to \min$ при $\bar{x} \geq 0$ и $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 = 2, \\ 9x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 26, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_5 = 3. \end{cases}$

31. $z = x_1 + x_3 + x_4 + x_5 + 29 \to \max$ при $\bar{x} \geq 0$ и $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 + x_2 + x_5 = 7. \\ 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 17. \end{cases}$

1.6. Решение задач линейного программирования средствами EXCEL

В EXCEL задача линейного программирования может быть решена с помощью программы **Поиск решения**. На примере задачи об использовании ресурсов (пример 1.6) разберем алгоритм применения этой программы.

Итак, требуется решить задачу

$$f = CX \to \max$$
$$\begin{cases} AX \le B, \\ X \ge 0. \end{cases} \tag{1.2}$$

где X=(x_1, x_2) – искомый план выпуска продуктов P_1, P_2, C=(20,25) – вектор доходов от реализации единицы каждого из продуктов, $B = \left(300, 450, 350\right)^T$ - запасы ресурсов R_1, R_2, R_3, а $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$ - матрица норм расхода сырья.

Заметим, что, как следует из параграфа 1.1, любая задача линейного программирования может быть приведена к виду (1.2). Поэтому предложенный ниже алгоритм решения задачи (1.2) подходит для любой задачи вида (1.1).

Итак, разместим исходные данные на листе EXCEL, как это представлено в таблице 1.1.

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2		Матрица норм расхода сырья		Запасы ресурсов	Расход сырья		
3		2	3	300			
4		5	2	450			
5		1	2	350			
6							
7	Доход от реализации ед. продукции			20	25		
8		План выпуска продукта P1					
9		План выпуска продукта P2					
10		Выручка					
11							

Таблица 1.1

Матрица A размещена в клетках B3:C5, запасы ресурсов (столбец B) – в столбце D3:D5, а доход от реализации единиц продуктов P_1, P_2 (строка C) – в строке D7:E7. В результате решения задачи план выпуска продукции $X=(x_1, x_2)$ разместится в столбце F8:F9, расход сырья AX – в столбце D3:D5, а итоговая выручка по найденному плану – в ячейке F10.

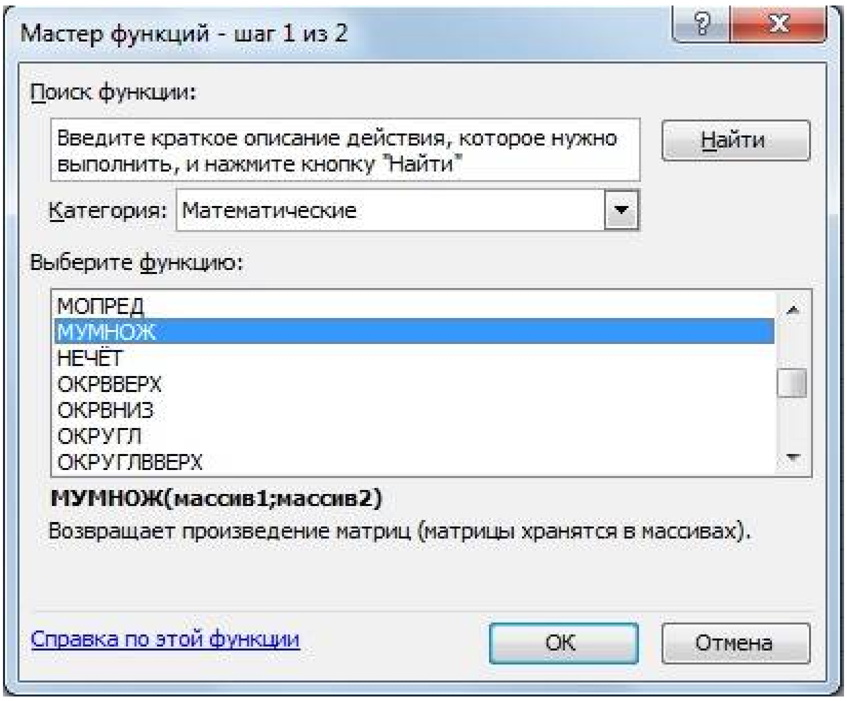


Таблица 1.2

Для расчета выручки *CX* реализуем матричное умножение строки D7:E7 на столбец F8:F9. Помещаем курсор в клетку F:10, а затем, используя кнопку «Вставить функцию», вызываем мастер функций, в категории математических функций выбираем МУМНОЖ и нажимаем ОК (таблица 1.2). В возникающей вкладке «Аргументы функции» в массив 1 помещаем строку D7:E7, выделяя их правой кнопкой мыши, а в массив 2 – столбец F8:F9 (таблица 1.3) и нажимаем Ctrl+Shift+Enter.

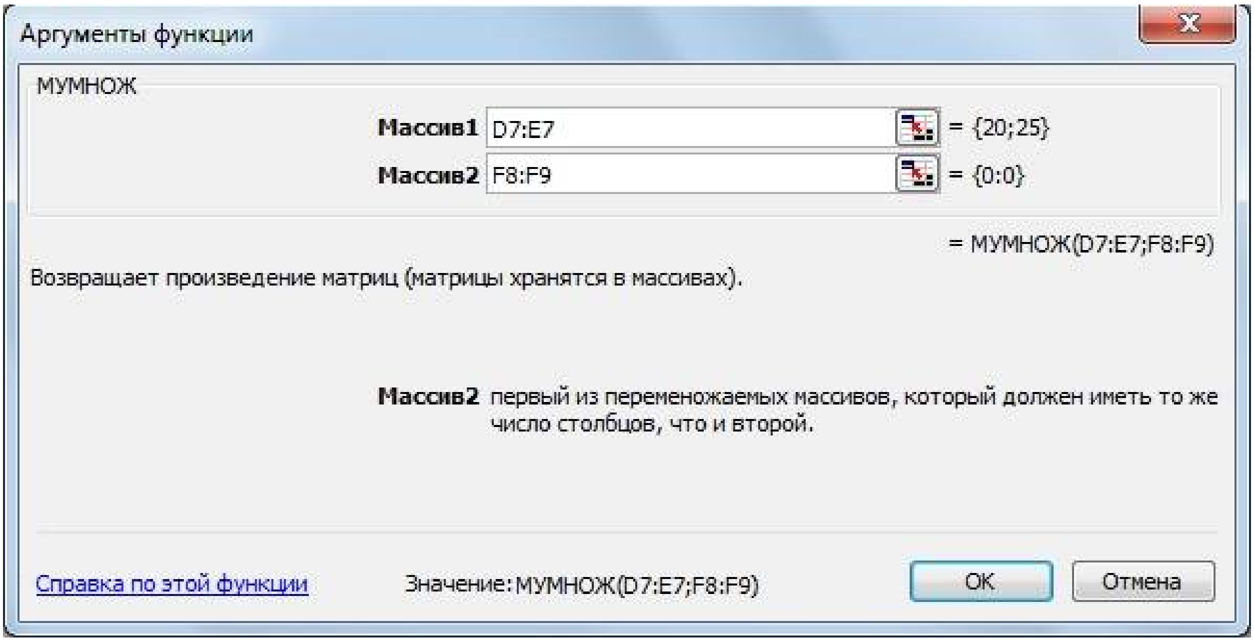


Таблица 1.3

Аналогично, для реализации матричного умножения *CX*, т.е. вычисления расхода сырья, выделяем столбец E3:E5, вызываем функцию МУМНОЖ, в массив 1 вносим B3:D5, а в массив 2 – F8:F9, и нажимаем Ctrl+Shift+Enter.

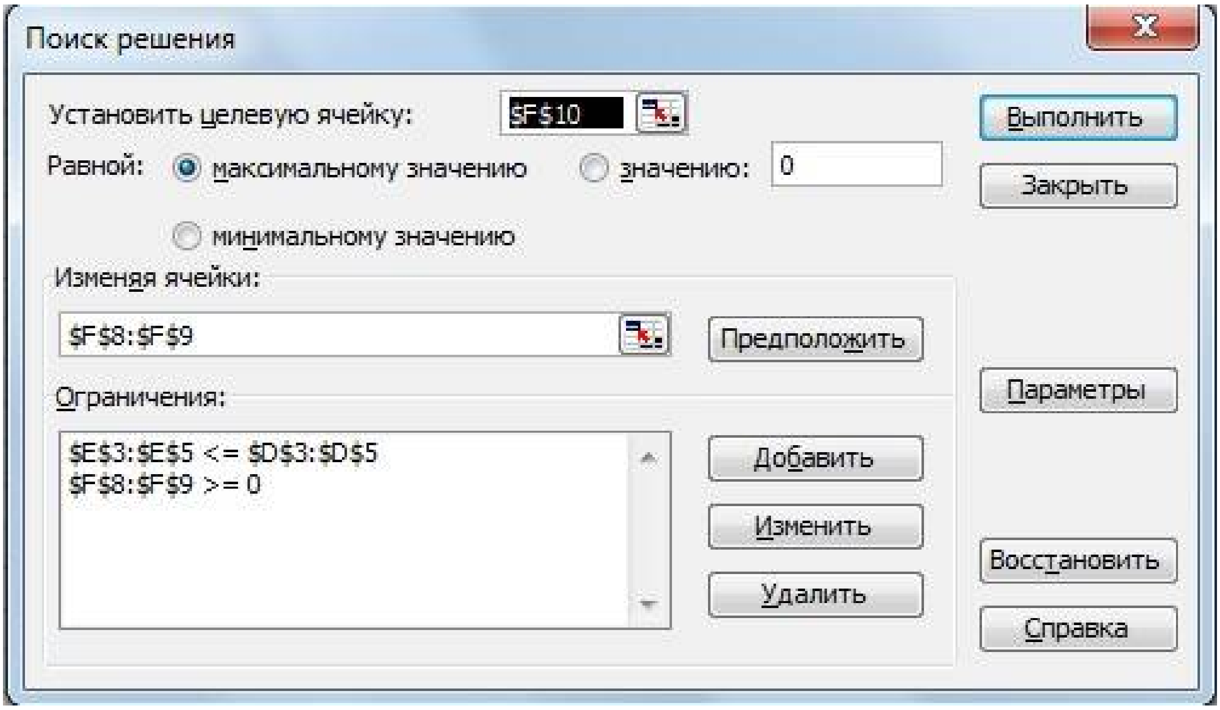


Таблица 1.4

Для завершения решения задачи из раздела «Сервис» главного меню вызываем команду «Поиск решения». В появившемся окне в целевую ячейку записываем F10, отмечаем поиск максимального значения, в строку «изменяя ячейки» вносим F8:F9. Далее, в окно «ограничения» последовательно вносим условие того, что содержимое ячеек E3:E5 не превышает запасов ресурсов D3:D5, и условие неотрицательности F8:F9. Получаем таблицу 1.4 и, нажимая кнопку «выполнить», получаем решение задачи. Исходный лист EXCEL теперь имеет вид (таблица 1.5), откуда получаем, что при оптимальном выпуске $X^* = (68{,}18182; 54{,}54545)$ выручка равна $f_{\max} = 2727{,}273$.

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2		Матрица норм расхода сырья		Запасы ресурсов	Расход сырья		
3		2	3	300	300		
4		5	2	450	450		
5		1	2	350	177,2727273		
6							
7		Доход от реализации ед. прод		20	25		
8		План выпуска продукта Р1				68,18182	
9		План выпуска продукта Р2				54,54545	
10		Выручка				2727,273	
11							

Таблица 1.5

Глава 2. Взаимно-двойственные задачи

2.1. Основные определения и теоремы

Рассмотрим пару двойственных задач линейного программирования

$$\begin{cases} AX \le B, \\ \widetilde{X} \ge 0, \\ z = C^t X + c_0 \to \max \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} A^t Y \ge C, \\ \widetilde{Y} \ge 0, \\ T = B^t Y + c_0 \to \min \end{cases}$$

где $A = \|a_{ij}\|$ – $m \times n$ матрица, $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^t$, $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)^t$, $B = (b_1, b_2, \ldots, b_m)^t$, $C = (c_1, c_2, \ldots, c_n)^t$ – векторы-столбцы соответствующей размерности, а вектора $\widetilde{X} = (x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k})^t$, $\widetilde{Y} = (y_{j_1}, y_{j_2}, \ldots, y_{j_l})^t$ с индексами $1 \le i_1 \le i_2 \le \ldots \le i_k \le n$, $1 \le j_1 \le j_2 \le \ldots \le j_k \le m$ – части векторов X, Y (то есть тривиальные ограничения налагаются лишь на часть координат векторов X, Y). Нетривиальные ограничения в обеих задачах могут быть как типа неравенств (со знаком «$\le$» или «$\ge$»), так и типа уравнений. Чтобы понять связь между этими задачами, построим расширенные матрицы

$$\widetilde{A} = \left[\begin{array}{cccc|c|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & \le & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & = & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & \ge & b_m \\ \hline \ge & \sim & \ldots & \ge & & \\ \hline c_1 & c_2 & \ldots & c_n & & c_0 \end{array}\right]_{\to\max}$$

и

$$
\widetilde{A}' = \left[\begin{array}{cccc|c|c}
a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} & \geq & c_1 \\
a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} & = & c_2 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} & \geq & c_n \\
\hline
\geq & \sim & \dots & \geq & & \\
\hline
b_1 & b_2 & \dots & b_m & & c_0
\end{array}\right]_{\to \min}
$$

обеих задач. Таким образом,

1. Матрица нетривиальных ограничений двойственной задачи получается из соответствующей матрицы исходной задачи транспонированием.

2. Правые части нетривиальных ограничений двойственной задачи являются коэффициентами целевой функции исходной задачи, и, наоборот, коэффициенты целевой функции двойственной задачи совпадают с правыми частями ограничений исходной задачи.

3. Если исходная задача является задачей на максимум (на минимум), то двойственная задача будет задачей на минимум (на максимум), и строка тривиальных ограничений переходит в столбец нетривиальных ограничений без изменения знака неравенства с «$\leq$» на «$\geq$» и наоборот (соответственно, с изменением знака). Если на переменную в исходной задаче тривиальное ограничение отсутствует, то соответствующее ограничение в двойственной задаче будет типа уравнения; иными словами, «~» переходит в «=». Столбец нетривиальных ограничений переходит в строку тривиальных ограничений с изменением знака неравенства с «$\leq$» на «$\geq$» и наоборот (соответственно, без изменения знака), а «=» переходит в «~».

Пример 2.1. Для задачи

$$
\begin{cases}
z = 4x_1 - 5x_2 + 8x_3 - 10x_4 + x_5 + 14 \to \min \\
x_1 - 2x_2 + 7x_3 - x_5 \leq 37, \\
-4x_1 - 7x_2 + 4x_4 - 9x_5 \geq -28, \\
2x_1 + 6x_3 - 4x_4 + x_5 = 48, \\
x_1 \geq 1, x_2 \geq 0, x_3 \leq 0, x_4 \geq 0.
\end{cases}
$$

составить двойственную.

Решение. Заметим сразу, что $x_1 \geq 1$ будем считать нетривиальным ограничением, поэтому задачу можно переписать в виде

$$\begin{cases} z = 4x_1 - 5x_2 + 8x_3 - 10x_4 + x_5 + 14 \to \min \\ x_1 - 2x_2 + 7x_3 - x_5 \leq 37, \\ -4x_1 - 7x_2 + 4x_4 - 9x_5 \geq -28, \\ 2x_1 + 6x_3 - 4x_4 + x_5 = 48, \\ x_1 \geq 1, \\ x_2 \geq 0, x_3 \leq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

Выпишем расширенную матрицу полученной задачи

$$\widetilde{A} = \left[\begin{array}{ccccc|c|c} 1 & -2 & 7 & 0 & -1 & \leq & 37 \\ -4 & -7 & 0 & 4 & -9 & \geq & -28 \\ 2 & 0 & 6 & -4 & 1 & = & 48 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \geq & 1 \\ \hline \sim & \geq & \leq & \geq & \sim & & \\ \hline 4 & -5 & 8 & -10 & 1 & & 14 \end{array}\right]_{\to \min}$$

Составляем расширенную матрицу двойственной задачи согласно общим правилам и получаем

$$\widetilde{A}' = \left[\begin{array}{cccc|c|c} 1 & -4 & 2 & 1 & = & 4 \\ -2 & -7 & 0 & 0 & \leq & -5 \\ 7 & 0 & 6 & 0 & \geq & 8 \\ 0 & 4 & -4 & 0 & \leq & -10 \\ -1 & -9 & 1 & 0 & = & 1 \\ \hline \leq & \geq & \sim & \geq & & \\ \hline 37 & -28 & 48 & 1 & & 14 \end{array}\right]_{\to \max} .$$

Двойственная задача имеет вид

$$\begin{cases} T = 37y_1 - 28y_2 + 48y_3 + y_4 + 14 \to \max \\ y_1 - 4y_2 + 2y_3 + y_4 = 4, \\ -2y_1 - 7y_2 \leq -5, 7y_1 + 6y_3 \geq 8, \\ 4y_2 - 4y_3 \leq -10, \\ -y_1 - 9y_2 - y_3 = 1, \\ y_1 \leq 0, y_2 \geq 0, y_4 \geq 0. \end{cases}$$

Основная связь между двойственными задачами изложена в следующих утверждениях.

Теорема 2.1 (основное неравенство для двойственных задач). *Для всех допустимых решений* X, Y *пары двойственных задач имеет место неравенство* $z(X) \le T(Y)$.

Теорема 2.2 (первая теорема двойственности). *Если исходная задача имеет оптимальное решение, то и двойственная ей имеет оптимальное решение. При этом оптимальные значения обеих целевых функций равны, то есть* $z_{\max} = T_{\min}$.

Чтобы решить задачу линейного программирования, иногда проще решить двойственную задачу, а затем найти решение исходной задачи.

Задачи для самостоятельного решения

Для задач линейного программирования построить двойственные задачи

32. $\begin{cases} z = 2x_1 - 7x_3 + 6x_4 - 40 \to \max \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 7, \\ -3x_1 - 8x_2 + 2x_4 \le 97, \\ 17x_1 + 3x_2 - 5x_4 \le 15, \\ x_1 \ge 1, \\ x_2 \le 0, x_3 \le 0. \end{cases}$

33. $\begin{cases} z = -x_1 + 3x_2 + 12x_3 - x_4 + 5 \to \min \\ -7x_1 + 2x_2 - 6x_4 \ge -25, \\ 4x_1 - 7x_3 + 13x_4 - 8x_5 = 16, \\ -7x_1 + 4x_3 + 3x_4 - 46x_5 \ge 15, \\ x_5 \ge 1, \\ x_1 \le 0, x_2 \le 0, x_4 \ge 0. \end{cases}$

34. $\begin{cases} z = -4x_1 - 3x_3 + 12x_4 - x_5 - 7 \to \max \\ -5x_1 + 3x_2 + 8x_5 \ge 5, \\ 2x_1 - 6x_2 + 7x_3 - 4x_5 \le 70, \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 6x_4 \ge 12, \\ x_2 \le 2, x_4 \ge 7, \\ x_1 \ge 0, x_3 \ge 0. \end{cases}$

35. $\begin{cases} z = 23x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 4x_5 - 28 \to \min \\ 4x_1 - 3x_3 + 14x_5 \ge 34, \\ -x_1 - x_2 - x_3 + 18x_5 \le 5, \\ x_4 \ge 3, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_5 \le 0. \end{cases}$

2.2. Решение двойственных задач с помощью теоремы равновесия.

Сформулируем теперь теорему равновесия (вторую теорему двойственности), которая позволяет не только установить связь между оптимальными значениями целевых функций, но и между точками, в которых эти значения достигаются.

Теорема 2.3 (теорема равновесия). О*птимальные решения* $X^* = \left(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*\right)$ *и* $Y^* = \left(y_1^*, y_2^*, \ldots, y_m^*\right)$ *пары двойственных задач связаны между собой равенствами*

$$\begin{cases} \left(\sum\limits_{i=1}^{m} a_{ik} y_i^* - c_k\right) \cdot x_k^* = 0, k = 1, \ldots, n, \\ \left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik} x_k^* - b_i\right) \cdot y_i^* = 0, i = 1, \ldots, m. \end{cases}$$

Пример 2.2. Решить задачу

$$\begin{cases} z = 22x_1 + 91x_2 - 37x_3 + 19 \to \min \\ -10x_1 + 7x_2 + 3x_3 \ge 1, \\ 8x_1 + 2x_2 - 10x_3 \ge 22, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0. \end{cases}$$

с помощью теоремы равновесия.

Решение. Составим сначала задачу, двойственную данной. Выпишем расширенную матрицу

$$\widetilde{A} = \left[\begin{array}{ccc|c|c} -10 & 7 & 3 & \ge & 1 \\ 8 & 2 & -10 & \ge & 22 \\ \hline \ge & \ge & \ge & & \\ \hline 22 & 91 & -37 & & 19 \end{array}\right]_{\to\min}$$

и построим расширенную матрицу двойственной задачи

$$\widetilde{A}' = \left[\begin{array}{cc|c|c} -10 & 8 & \le & 22 \\ 7 & 2 & \le & 91 \\ 3 & -10 & \le & -37 \\ \hline \ge & \ge & & \\ \hline 1 & 22 & & 19 \end{array}\right]_{\to\max} .$$

Двойственная задача имеет вид

$$\begin{cases} T = y_1 + 22y_2 + 19 \to \max \\ -10y_1 + 8y_2 \le 22, \\ 7y_1 + 2y_2 \le 91, \\ 3y_1 - 10y_2 \le -37, \\ y_1 \ge 0, y_2 \ge 0. \end{cases}$$

Решим ее графическим способом. Строим на плоскости (y_1, y_2) (рис. 2.1) прямые $l_1: -10y_1 + 8y_2 = 22$, $l_2: 7y_1 + 2y_2 = 91$, $l_3: 3y_1 - 10y_2 = -37$ и убеждаемся, что нетривиальные ограничения определяют треугольник ABC, угловые точки которого находим из систем уравнений

$$A = l_1 \cap l_2: \begin{cases} -10y_1 + 8y_2 = 22, \\ 7y_1 + 2y_2 = 91, \end{cases} \Rightarrow A(9,14).$$

$$B = l_2 \cap l_3: \begin{cases} 7y_1 + 2y_2 = 91, \\ 3y_1 - 10y_2 = -37, \end{cases} \Rightarrow B(11,7).$$

$$C = l_1 \cap l_3: \begin{cases} -10y_1 + 8y_2 = 22, \\ 3y_1 - 10y_2 = -37, \end{cases} \Rightarrow C(1,4).$$

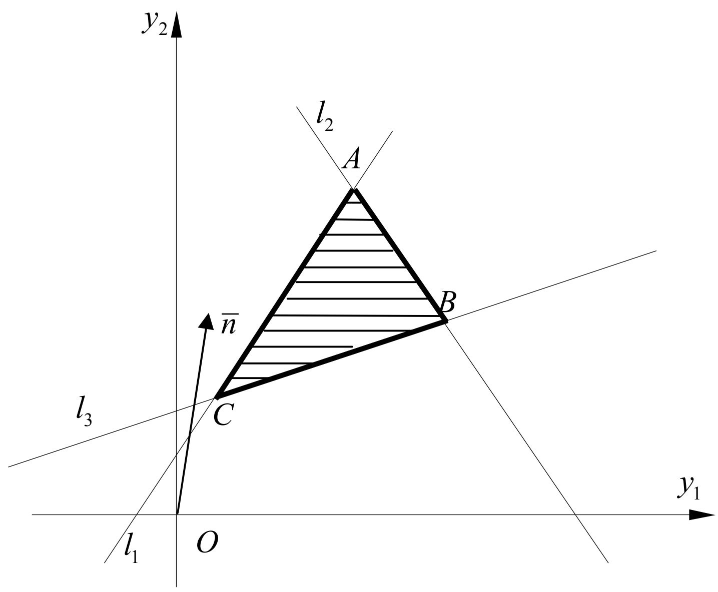


Рис. 2.1

Вектор нормали $\overline{n}$ имеет координаты $\overline{n} = (1,22)$. Поэтому, очевидно, максимальное значение функции $T(Y)$ достигается в точке $A(9,14)$ и

$$Y^* = (9,14),\ T_{\max} = T(9,14) = 9 + 22 \cdot 14 + 19 = 336.$$

Запишем теперь теорему равновесия для данной пары двойственных задач

$$\begin{cases}\left(-10y_1^* + 8y_2^* - 22\right)\cdot x_1^* = 0,\\ \left(7y_1^* + 2y_2^* - 91\right)\cdot x_2^* = 0,\\ \left(3y_1^* - 10y_2^* + 37\right)\cdot x_3^* = 0,\\ \left(-10x_1^* + 7x_2^* + 3x_3^* - 1\right)\cdot y_1^* = 0,\\ \left(8x_1^* + 2x_2^* - 10x_3^* - 22\right)\cdot y_2^* = 0.\end{cases}$$

С учетом того, что $Y^* = (9{,}14)$ (то есть $y_1^* \neq 0, y_2^* \neq 0$) и $A = l_1 \cap l_2$, $A \notin l_3$ (то есть $-10y_1^* + 8y_2^* - 22 = 0,\ 7y_1^* + 2y_2^* - 91 = 0$, $3y_1^* - 10y_2^* + 37 \neq 0$, в чем можно убедиться непосредственной подстановкой), выполнение первых двух уравнений очевидно, третье сводится к условию $x_3^* = 0$ и система сводится к виду

$$\begin{cases}x_3^* = 0,\\ -10x_1^* + 7x_2^* + 3x_3^* - 1 = 0,\\ 8x_1^* + 2x_2^* - 10x_3^* - 22 = 0.\end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases}x_3^* = 0,\\ -10x_1^* + 7x_2^* - 1 = 0,\\ 8x_1^* + 2x_2^* - 22 = 0,\end{cases}$$ решениями которой

является точка $X^* = (2{,}3{,}0)$. Заметим, что $z(X^*) = 22\cdot 2 + 91\cdot 3 - 37\cdot 0 + 19 = 336 = T(Y^*)$, как и должно быть по первой теореме двойственности.

Задачи для самостоятельного решения

Для следующих задач линейного программирования

а) построить задачу, двойственную данной;

б) решить двойственную задачу графическим методом;

в) найти решение исходной задачи с помощью теоремы равновесия.

36. $z = x_1 + 154x_2 - 21x_3 \to \min$ при $\bar{x} \geq 0$ и $\begin{cases}-13x_1 + 8x_2 + 5x_3 \geq -18,\\ 7x_1 + 6x_2 - 13x_3 \geq 20.\end{cases}$

37. $z = x_1 + 4x_2 - 2x_3 \to \min$ при $\bar{x} \geq 0$ и $\begin{cases}-2x_1 + x_2 + x_3 \geq -4,\\ 7x_1 + 4x_2 - 11x_3 \geq 29.\end{cases}$

38. $z = 20x_1 + 108x_2 - 51x_3 \to \min$ при $\bar{x} \geq 0$ и $\begin{cases}-8x_1 + 3x_2 + 5x_3 \geq -13,\\ -x_1 + x_2 - 2x_3 \geq 3.\end{cases}$

39. $z=-10x_1+44x_2+x_3 \to \min$ при $\bar{x} \ge 0$ и $\begin{cases} -5x_1+x_2+4x_3 \ge -4, \\ 5x_1+6x_2-11x_3 \ge 11. \end{cases}$

40. $z=3x_1+58x_2-13x_3 \to \min$ при $\bar{x} \ge 0$ и $\begin{cases} -9x_1+2x_2+7x_3 \ge -25, \\ 6x_1+4x_2-10x_3 \ge 22. \end{cases}$

41. $z=-10x_1+56x_2-3x_3 \to \min$ при $\bar{x} \ge 0$ и $\begin{cases} -12x_1+7x_2+5x_3 \ge -22, \\ x_1+3x_2-4x_3 \ge 9. \end{cases}$

2.3. Решение двойственных задач с помощью симплекс-метода

Решение пары двойственных задач может быть основано на следующем правиле.

Теорема 2.4. *Если для одной из задач оптимальное решение найдено симплекс-методом, то в исходной задаче можно выделить квадратную матрицу* P, *образованную столбцами, соответствующими базисным переменным оптимального решения. Тогда оптимальное решение двойственной задачи находится по формуле*

$$Y^* = \bar{c}_{\text{баз}} \cdot P^{-1},$$

где $\bar{c}_{\text{баз}}$ *– вектор-строка, образованная коэффициентами при базисных переменных заключительной симплекс-таблицы в целевой функции исходной задачи.*

Пример 2.3. Для задачи

$$z = 23x_1 + 40x_2 + 60x_3 + 2x_4 - x_5 - 18 \to \max$$
$$\begin{cases} 4x_1 + 10x_2 + 11x_3 + x_4 + x_5 = 57, \\ 2x - 6x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 9, \\ x_j \ge 0, \; j = 1,..,5. \end{cases}$$

построить двойственную, решить исходную задачу симплекс-методом и найти оптимальное решение двойственной задачи.

Решение. Составим задачу, двойственную к данной. Образуем расширенную матрицу

$$\widetilde{A} = \left[\begin{array}{ccccc|c|c} 4 & 10 & 11 & 1 & 1 & = & 57 \\ 2 & -6 & -1 & 1 & -1 & = & 9 \\ \hline \geq & \geq & \geq & \geq & \geq & & \\ \hline 23 & 40 & 60 & 2 & -1 & & -18 \end{array}\right]_{\to \max},$$

и преобразуем ее по общему правилу

$$\widetilde{A}' = \left[\begin{array}{cc|c|c} 4 & 2 & \geq & 23 \\ 10 & -6 & \geq & 40 \\ 11 & -1 & \geq & 60 \\ 1 & 1 & \geq & 2 \\ 1 & -1 & \geq & -1 \\ \hline \sim & \sim & & \\ \hline 57 & 9 & & -18 \end{array}\right]_{\to \min}.$$

Двойственная задача имеет вид

$$T = 57y_1 + 9y_2 - 18 \to \min, \text{при условиях} \begin{cases} 4y_1 + 2y_2 \geq 23, \\ 10y_1 - 6y_2 \geq 40, \\ 11y_1 - y_2 \geq 60, \\ y_1 + y_2 \geq 2, \\ y_1 - y_2 \geq -1. \end{cases}$$

Решим исходную задачу симплекс-методом. В задаче не выделен допустимый базис, поэтому для его нахождения можно использовать метод искусственного базиса или выделить его непосредственно из нетривиальных ограничений: сложим уравнения, а затем вычтем из первого второе. Получим систему

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + 10x_3 + 2x_4 = 66, \\ 2x_1 + 16x_2 + 12x_3 + 2x_5 = 48, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + x_4 = 33, \\ x_1 + 8x_2 + 6x_3 + x_5 = 24. \end{cases}$$

с выделенным базисом x_4, x_5. Выражаем базисные переменные x_4, x_5

$$x_4 = 33 - 3x_1 - 2x_2 - 5x_3,$$
$$x_5 = 24 - x_1 - 8x_2 - 6x_3$$

и подставляем полученные выражения в формулу для z. Получим задачу

$$z = 18x_1 + 44x_2 + 56x_3 + 24 \to \max$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + x_4 = 33, \\ x_1 + 8x_2 + 6x_3 + x_5 = 24, \\ x_j \ge 0, \ j = 1,..,5 \end{cases} . \qquad (*)$$

Перепишем целевую функцию в виде

$$z - 18x_1 - 44x_2 - 56x_3 = 24$$

и имеем симплекс-таблицу

базис	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_4	33	3	2	5	1	0
x_5	24	1	8	6	0	1
z	24	-18	-44	-56	0	0

Вводим в базис переменную x_3. Находим $\min\left\{\frac{33}{5}, \frac{24}{6}\right\} = \frac{24}{6} = 4$ и выводим из базиса переменную x_5. Делим соответствующую строку на 6 и получаем

базис	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_4	33	3	2	5	1	0
x_5	4	$1/6$	$4/3$	**1**	0	$1/6$
z	24	-18	-44	-56	0	0

$\Rightarrow$

базис	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_4	13	$13/6$	$-14/3$	0	1	$-5/6$
x_3	4	$1/6$	$4/3$	1	0	$1/6$
z	248	$-26/3$	$92/3$	0	0	$28/3$

В строке оценок осталась единственная отрицательная оценка, а так как $\min\left\{\frac{13}{13/6}, \frac{4}{1/6}\right\} = 6$, то выводим из базиса переменную x_1 и вводим x_4. Умножаем первую строку на $6/13$, получаем симплекс-таблицу

базис	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_4	6	**1**	$-28/13$	0	$6/13$	$-5/13$
x_3	4	$1/6$	$4/3$	1	0	$1/6$
z	248	$-26/3$	$92/3$	0	0	$28/3$

и делаем шаг симплекс-метода:

базис	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	6	1	$-28/13$	0	$6/13$	$-5/13$
x_3	3	0	$22/3$	1	$-1/13$	$3/13$
z	300	0	12	0	4	6

Так как в строке оценок нет отрицательных элементов, то полученная симплекс-таблица – заключительная, оптимальное решение $X^* = (6,0,3,0,0)$ и $z_{\max} = z(X^*) = 300$.

Базисными переменными оптимального решения являются x_1, x_3, поэтому из исходной задачи находим $P = \begin{pmatrix} 4 & 11 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, а из условия задачи $\bar{c}_{\textbf{баз}} = (23,60)$, поэтому оптимальным решением двойственной задачи будет

$$Y^* = (23,60)\begin{pmatrix} 4 & 11 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \left(\frac{11}{2}, \frac{1}{2}\right),$$

причем $T_{\min} = T(Y^*) = 57 \cdot \frac{11}{2} + 9 \cdot \frac{1}{2} - 18 = 300 = z_{\max}$.

Если в задаче линейного программирования выделен допустимый базис и базисные переменные исключены из целевой функции, то оптимальным решением двойственной задачи являются элементы строки оценок последней симплекс-таблицы при базисных переменных исходной симплекс-таблицы. Например, для задачи $(*)$ двойственной задачей будет

$$T = 33y_1 + 24y_2 + 24 \to \min$$
$$\begin{cases} 3y_1 + y_2 \ge 18, \\ 2y_1 + 8y_2 \ge 44, \\ 5y_1 + 6y_2 \ge 56, \\ y_1 \ge 0, \\ y_2 \ge 0. \end{cases}$$

и общая формула теоремы 2.4 дает

$$Y^* = (18,56)\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}^{-1} = (4,6),\ T(Y^*) = 33 \cdot 4 + 24 \cdot 6 + 24 = 300 .$$

С другой стороны, оптимальное решение $Y^* = (4,6)$ легко находится из строки оценок последней симплекс-таблицы как коэффициенты при базисных переменных x_4, x_5 исходной.

Задачи для самостоятельного решения

Для следующих задач линейного программирования

а) построить задачу, двойственную данной;

б) решить исходную задачу симплекс-методом и найти решение двойственной задачи.

42. $z = x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 + 7 \to \max$ при $\bar{x} \ge 0$ и $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_5 = 5, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_4 + 2x_5 = 2. \end{cases}$

43. $z = 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 + 8 \to \max$ при $\bar{x} \ge 0$ и $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 9, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_5 = 7. \end{cases}$

44. $z = x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 - x_5 + 13 \to \max$ при $\bar{x} \ge 0$ и $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 7. \end{cases}$

45. $z = x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 4x_5 + 23 \to \max$ при $\bar{x} \ge 0$ и $\begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_4 - 2x_5 = 4, \\ -5x_2 + x_3 + 6x_4 + 5x_5 = 5. \end{cases}$

46. $z = 52x_1 + 72x_2 + 61x_3 + x_4 + x_5 + 8 \to \max$ при $\bar{x} \ge 0$ и $\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 + x_3 + x_4 = 22, \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + x_5 = 40. \end{cases}$

47. $z = 12x_1 + 13x_2 + x_3 + 7x_4 - 3x_5 + 2 \to \max$ при $\bar{x} \ge 0$ и $\begin{cases} 16x_1 + x_2 - 7x_4 + 13x_5 = 3, \\ -2x_1 + x_3 + 5x_4 + x_5 = 15. \end{cases}$

Глава 3. Задачи целочисленного программирования

3.1. Постановка задачи. Графический метод решения

Основным отличием постановки задачи целочисленного программирования от задачи линейного программирования является то, что значения переменных, составляющих оптимальное решение задачи целочисленного программирования, должны быть *целыми* неотрицательными числами.

Итак, требуется найти минимальное (максимальное) значение линейной функции

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + c_0 \to \min\,(\max)$$

при линейных ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, \ldots, m,$$

а также при условии неотрицательности и целочисленности переменных:

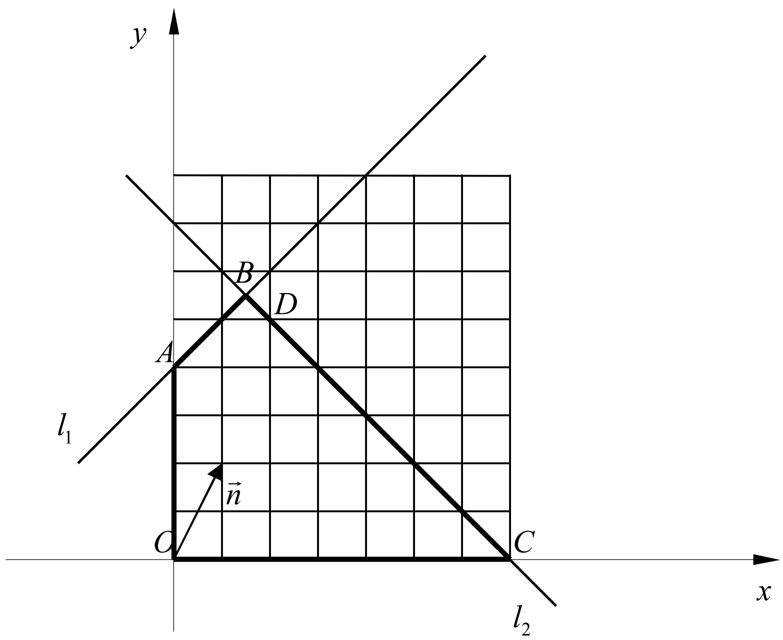
$$x_j \geq 0, \quad x_j \in \mathbf{Z}, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Поясним графический метод решения задачи целочисленного программирования на примере следующей задачи.

Пример 3.1. Решить задачу целочисленного программирования с целевой функцией $z = x + 2y + 1 \to \max$ и ограничениями

$$\begin{cases} y - x \le 4, \\ y + x \le 7, \\ x \ge 0, y \ge 0; x, y \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

Решение. Строим область на плоскости (x, y), определяемую системой ограничений, игнорируя пока условие целочисленности x и y. Получаем четырехугольник $OABC$ с угловыми точками $O(0,0)$, $A(0,4)$, $B(\frac{3}{2}, \frac{11}{2})$ и $C(7,0)$; при этом все решения системы ограничений задачи суть точки с целочисленными координатами на границе и внутри этого четырехугольника.



Чтобы найти точку, в которой функция z достигает максимума, как и при решении графическим методом задач линейного программирования, строим вектор нормали $\vec{n} = (4,8)$ (удобнее взять сонаправленный ему вектор $\vec{m} = (1,2)$). Перемещая линию уровня в направлении вектора $\vec{m}$ и рассматривая в качестве возможных решений лишь точки с целочисленными координатами, убеждаемся, что максимум z достигается в точке $D(2,5)$ и $z_{\max} = z(D) = 52$.

Ответ. $z_{\max} = z(D) = 52$.

Заметим, что соответствующим решением задачи линейного программирования без условия целочисленности будет точка $B(\frac{3}{2},\frac{11}{2})$ и $z(B)=54$.

Ясно, что решение задач целочисленного программирования графическим способом возможно не всегда. В общем случае существует несколько методов решения данных задач, наиболее распространенным из которых является метод сечений (метод Гомори). Перед тем как перейти к изложению метода Гомори, рассмотрим, как задачи линейного программирования решаются с помощью двойственного симплекс-метода.

Задачи для самостоятельного решения

Графическим методом найти решения следующих задач целочисленного программирования:

48. $z=3x_1+7x_2+3\to\max$ при $x_1,x_2\ge 0, x_1,x_2\in Z$ и $\begin{cases}-x_1+x_2\le 3,\\ x_1+x_2\le 8.\end{cases}$

49. $z=2x_1+3x_2+7\to\min$ при $x_1,x_2\ge 0, x_1,x_2\in Z$ и $\begin{cases}2x_1+x_2\ge 9,\\ 3x_1-4x_2\ge 3.\end{cases}$

50. $z=3x_1+x_2+4\to\min$ при $x_1,x_2\ge 0, x_1,x_2\in Z$ и $\begin{cases}-4x_1+x_2\le 29,\\ 3x_1-x_2\le 15,\\ 5x_1+2x_2\ge 38,\end{cases}$

51. $z=5x_1+7x_2-12\to\min$ при $x_1,x_2\ge 0, x_1,x_2\in Z$ и $\begin{cases}-3x_1+14x_2\le 78,\\ 5x_1-6x_2\le 26,\\ x_1+4x_2\ge 25,\end{cases}$

52. $z=x_1+x_2+3\to\max$ при $\bar{x}\ge 0, x_j\in Z, j=1,\ldots,5$ и $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=4,\\ x_1+3x_2+x_4=9,\\ -3x_1+x_2+x_5=0.\end{cases}$

53. $z = x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 8 \to \max$ при $\bar{x} \geq 0, x_j \in Z, j = 1,\ldots,4$ и

$$\begin{cases} x_1 + 12x_2 + 4x_3 + x_4 = 34, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 = 22. \end{cases}$$

3.2. Двойственный симплекс-метод

Двойственный симплекс-метод, как и обычный симплекс-метод, используется для решения задач линейного программирования. Но, в отличие от обычного симплекс-метода, его можно применять и в случае, если свободные члены системы нетривиальных ограничений являются отрицательными числами (при решении задачи симплексным методом эти числа предполагаются неотрицательными).

Пусть требуется найти максимальное значение функции

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n + c_0$$

при условиях

$$\begin{cases} x_1 + a_{1,m+1}x_{m+1} + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ x_2 + a_{2,m+1}x_{m+1} + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_m + a_{m,m+1}x_{m+1} + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \\ x_j \geq 0,\ j = 1,..,n. \end{cases}$$

Присоединим к системе ограничений целевую функцию z, исключив из нее базисные переменные и записав ее в виде уравнения

$$z + \Delta_{m+1}x_{m+1} + \ldots + \Delta_nx_n = \Delta_0.$$

Напомним, что, коэффициенты $\Delta_j, j = 1,\ldots,n$ называются *оценками* соответствующих переменных x_j.

Заметим, что среди чисел b_i могут быть отрицательные. При этом, хотя точка $X = (b_1, b_2,..., b_m, 0,...,0)$ является решением системы нетривиальных ограничений, она не является планом исходной задачи, так как среди ее координат имеются отрицательные числа.

Определение 3.1. *Решение* $X = (b_1, b_2, ..., b_m, 0, ..., 0)$ *системы нетривиальных ограничений называется* ***псевдопланом (псевдорешением)*** *задачи линейного программирования, если* $\Delta_j \geq 0, j = 1, \ldots, n$.

Основными предпосылками для решения задачи линейного программирования двойственным симплекс-методом являются следующие две теоремы.

Теорема 3.1. *Если в псевдоплане* $X = (b_1, b_2, ..., b_m, 0, ..., 0)$, *есть хотя бы одно отрицательное число* $b_i < 0$ *такое, что все* $a_{ij} \geq 0$ *при* $i = 1, \ldots, m$, *то задача не имеет решений.*

Теорема 3.2. *Если в псевдоплане* $X = (b_1, b_2, ..., b_m, 0, ..., 0)$, *имеются отрицательные числа* $b_i < 0$ *такие, что для любого из них существуют числа* $a_{ij} < 0$, *то можно перейти к новому псевдоплану, при котором значение целевой функции задачи не уменьшится.*

Сформулированные теоремы дают основание для построения алгоритма двойственного симплекс-метода.

Пусть $X = (b_1, b_2, ..., b_m, 0, ..., 0)$ – псевдоплан исходной задачи. На основе условия задачи составляем симплекс-таблицу, в которой элементы свободного столбца могут быть отрицательными числами:

базис	b_i	x_1	x_2	$\ldots$	x_l	$\ldots$	x_m	x_{m+1}	$\ldots$	x_n
x_1	b_1	1	0	$\ldots$	0	$\ldots$	0	$a_{1,m+1}$	$\ldots$	a_{1n}
x_2	b_2	0	1	$\ldots$	0	$\ldots$	0	$a_{2,m+1}$	$\ldots$	a_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_l	b_l	0	0	$\ldots$	1	$\ldots$	0	$a_{l,m+1}$	$\ldots$	$a_{l,n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ldots$	0	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_m	b_m	0	0	$\ldots$	0	$\ldots$	1	$a_{m,m+1}$	$\ldots$	a_{mn}
z	Δ_0	0	0	0	0	0	0	Δ_{m+1}	$\ldots$	Δ_n

1. Проверяем псевдоплан на оптимальность. Если $b_i \geq 0, i = 1, \ldots, m$, то, так как, по предположению, все $\Delta_j \geq 0$, псевдоплан $X = (b_1, b_2, ..., b_m, 0, ..., 0)$ будет оптимальным решением исходной задачи. Если

же в столбце свободных членов имеются отрицательные числа, то либо устанавливаем неразрешимость задачи (на основании теоремы 3.1), либо переходим к новому псевдоплану.

2. Выбираем разрешающую строку как содержащую наибольшее по абсолютной величине отрицательное число в столбце свободных членов (пусть это строка со свободным членом b_l). Для выбора разрешающего столбца находим минимум модуля отношения элементов строки оценок к *отрицательным* элементам l-ой строки, т.е. находим $\min(-\Delta_j / a_{lj})$, где $a_{lj} < 0$. Пусть это минимальное значение принимается при $j = r$, тогда в базис вводят переменную x_r, а число a_{lr} является разрешающим элементом. Переход к новой симплекс-таблице производят по обычным правилам симплексного метода.

3. Находим новый псевдоплан и переходим к пункту 1.

Пример 3.2. Найти максимальное значение функции $z = x_1 + x_2 + 2x_3$ при условиях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 8, \\ x_1 - x_2 \geq 4, \\ x_1 + 2x_2 \geq 6, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Решение. Запишем исходную задачу линейного программирования в канонической форме, введя балансовые переменные x_4, x_5, а затем перепишем ее так, чтобы коэффициенты при базисных переменных были равны 1.

$$z = x_1 + x_2 + 2x_3 \to \max \qquad\qquad z = x_1 + x_2 + 2x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 8, \\ x_1 - x_2 - x_4 = 4, \\ x_1 + 2x_2 - x_5 = 6, \\ x_j \geq 0, \ j = 1, \ldots, 5. \end{cases} \text{, то есть } \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 8, \\ -x_1 + x_2 + x_4 = -4, \\ -x_1 - 2x_2 + x_5 = -6, \\ x_j \geq 0, \ j = 1, \ldots, 5. \end{cases}$$

Исключив из целевой функции x_3, получаем следующую симплекс-таблицу

базис	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_3	8	1	1	1	0	0
x_4	-4	-1	1	0	1	0
x_5	-6	-1	-2	0	0	1
z	16	1	1	0	0	0

Так как в столбце свободных членов имеются два отрицательных числа -4 и -6, а в последней строке нет отрицательных чисел, то в соответствии с алгоритмом двойственного симплекс-метода переходим к новой симплекс-таблице. Заметим, что в данном случае это можно сделать, так как в строках, содержащих отрицательные свободные члены (-4 и -6) есть отрицательные числа. Так как наибольшее по модулю отрицательное число в столбце свободных членов есть -6, то исключаем из базиса переменную x_5. Чтобы определить разрешающий столбец, находим $\min\left\{-\frac{1}{-1}, -\frac{1}{-2}\right\} = \frac{1}{2}$, т.е. минимальное отношение элементов строки оценок к отрицательным числам разрешающей строки (с противоположным знаком) дает столбец x_2. Умножаем третью строку на $-1/2$, получаем таблицу

базис	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_3	8	1	1	1	0	0
x_4	-4	-1	1	0	1	0
x_5	3	$1/2$	**1**	0	0	$-1/2$
z	16	1	1	0	0	0

и переходим к новой симплекс-таблице (разрешающий элемент выделен жирным шрифтом):

базис	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_3	5	$1/2$	0	1	0	$1/2$
x_4	-7	$-3/2$	0	0	1	$1/2$
x_2	3	$1/2$	**1**	0	0	$-1/2$
z	13	$1/2$	0	0	0	$1/2$

Аналогично, так как в свободном столбце последней таблицы есть отрицательное число -7, то рассмотрим элементы второй строки. Среди этих чисел есть одно отрицательное $-3/2$. Если бы такое число отсутствовало, то исходная задача была бы неразрешима. Выбор разрешающего элемента здесь однозначен, умножаем вторую строку на $-2/3$, получаем таблицу

базис	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_3	5	$1/2$	0	1	0	$1/2$
x_4	$14/3$	$\mathbf{1}$	0	0	$-3/2$	$-1/3$
x_2	3	$1/2$	1	0	0	$-1/2$
z	13	$1/2$	0	0	0	$1/2$

и переходим к новой симплекс-таблице

базис	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_3	$8/3$	0	0	1	$1/3$	$2/3$
x_1	$14/3$	$\mathbf{1}$	0	0	$-2/3$	$-1/3$.
x_2	$2/3$	0	1	0	$1/3$	$-1/3$
z	$32/3$	0	0	0	$1/3$	$2/3$

Таким образом, в последней строке и в столбце свободных членов нет отрицательных элементов, поэтому план $X^* = \left(\frac{14}{3}, \frac{2}{3}, \frac{8}{3}\right)$ является оптимальным и $z_{\max} = z(X^*) = \frac{32}{3}$.

Задачи для самостоятельного решения

Двойственным симплекс-методом найти решения следующих задач линейного программирования:

54. $z = -x_1 - 10x_2 + 10 \to \max$ при $\bar{x} \geq 0$ и $\begin{cases} -2x_1 - 2x_2 + x_5 = -1, \\ -2x_1 + 2x_2 + x_3 = -2, \\ -4x_1 + 2x_2 + x_4 = -1. \end{cases}$

55. $z = -2x_2 - 4x_4 - 3 \to \max$ при $\bar{x} \geq 0$ и $\begin{cases} -2x_1 + x_2 = -1, \\ -x_2 + x_3 - x_4 = -2, \\ 2x_2 - 4x_4 + x_5 = -1. \end{cases}$

56. $z = -5x_2 - 4x_3 + 4 \to \max$ при $\bar{x} \geq 0$ и $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_5 = -11, \\ -2x_2 + 3x_3 - x_5 = -9, \\ -x_2 + x_4 = -2. \end{cases}$

57. $z = -2x_1 - 6x_3 + 44 \to \max$ при $\bar{x} \geq 0$ и $\begin{cases} -3x_1 - 4x_2 = -17, \\ -2x_2 - 3x_3 + 2x_5 = -9, \\ -x_3 + 3x_4 = -1. \end{cases}$

58. $z = -5x_4 - 7x_5 - 7 \to \max$ при $\bar{x} \geq 0$ и $\begin{cases} x_1 - x_4 - 2x_5 = -7, \\ -x_3 + 3x_4 - 6x_5 = -3, \\ -x_2 - x_4 - 4x_5 = -11. \end{cases}$

59. $z = -x_2 - 3x_3 \to \max$ при $\bar{x} \geq 0$ и $\begin{cases} -x_2 - 6x_3 + x_4 = -5, \\ x_1 + 5x_2 - 19x_3 = -13, \\ 3x_2 - 6x_3 + x_5 = -2. \end{cases}$

3.3. Метод Гомори

Решение задачи целочисленного программирования методом Гомори начинают с определения симплексным методом оптимального плана исходной задачи без учета целочисленности переменных. Если среди его компонент нет дробных чисел, то найденный план является оптимальным планом задачи целочисленного программирования. Если же в оптимальном плане задачи переменная x_k, по условию целочисленная, принимает дробное значение, то к системе ограничений добавляют неравенство

$$\sum_{j=1}^{n} \{\tilde{a}_{ij}\} x_j \geq \{\tilde{b}_i\},$$

где $\{a\}$ обозначает дробную часть числа a, а числа $\tilde{a}_{ij}, \tilde{b}_i$ взяты из последней симплекс таблицы из строки, содержащей переменную x_k как базисную. Если же дробные значения принимают несколько переменных, то дополнительное неравенство определяется числом с наибольшей дробной частью. Затем, используя двойственный симплекс-метод, находят решение исходной задачи.

Замечание 3.1. *Под дробной частью некоторого числа* a *понимается наименьшее неотрицательное число такое, что разность* a *и* b *есть целое. Например,* $\{1{,}75\} = 0{,}75; \{-3{,}35\} = 0{,}65.$

Если в найденном плане задачи переменные опять принимают дробные значения, то снова добавляют одно дополнительное ограничение и процесс вычислений повторяют. Проводя конечное число итераций, либо получают оптимальный план задачи целочисленного программирования, либо устанавливают ее неразрешимость.

Решим теперь задачу из примера 3.1 методом Гомори.

Пример 3.3. Решить методом Гомори задачу

$$z = 4x_1 + 8x_2 + 4 \to \max$$
$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 4, \\ x_1 + x_2 \le 7, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0; x_1, x_2 \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

Решение. Приведем задачу к каноническому виду

$$z = 4x_1 + 8x_2 + 4 \to \max$$
$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 + x_2 + x_4 = 7, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0; x_1, x_2 \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

и решим задачу симплекс-методом (игнорируя условие целочисленности). Выпишем исходную симплекс-таблицу.

базис	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4
x_3	4	-1	**1**	1	0
x_4	7	1	1	0	1
z	4	-4	-8	0	0

В последней строке есть два отрицательных числа, поэтому опорное решение $X = (0,0,4,7)$ не является оптимальным. Вводим в базис переменную x_2, и, в соответствие с правилами симплекс-метода, выводим из базиса x_3

базис	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4
x_2	4	-1	1	1	0
x_4	3	2	0	-1	1
z	36	-12	0	8	0

Теперь разрешающий элемент выбирается однозначно. Разделив вторую строчку на 2, сделаем еще один шаг симплекс-метода.

базис	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4
x_2	4	-1	1	1	0
x_4	$3/2$	**1**	0	$-1/2$	$1/2$
z	36	-12	0	8	0

базис	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4
x_2	$11/2$	0	1	$1/2$	$1/2$
x_1	$3/2$	**1**	0	$-1/2$	$1/2$
z	54	0	0	2	6

Итак, план $X = \left(\frac{3}{2}, \frac{11}{2}, 0, 0\right)$ является оптимальным для исходной задачи без учета условия целочисленности, но так как обе компоненты x_1 и x_2 являются дробными, то X не является оптимальным решением задачи целочисленного программирования. Далее, так как дробные части равны между собой, то дополнительное ограничение составляется для одной из них (например, для переменной x_2). Выписывая соответствующую строку (первую) из последней симплекс таблицы, получаем

$$x_2 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 = \frac{11}{2},$$

и к системе ограничений добавляем неравенство

$$\{1\}x_2 + \left\{\frac{1}{2}\right\}x_3 + \left\{\frac{1}{2}\right\}x_4 \geq \left\{\frac{11}{2}\right\}, \text{ т.е. } \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 \geq \frac{1}{2},$$

или, окончательно, $x_3 + x_4 \geq 1$. Вводим балансовую переменную x_5, переписываем последнее условие в виде $x_3 + x_4 - x_5 = 1$, $-x_3 - x_4 + x_5 = -1$ и добавляем его к заключительной симплекс-таблице. Получаем

базис	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_2	$11/2$	0	1	$1/2$	$1/2$	0
x_1	$3/2$	**1**	0	$-1/2$	$1/2$	0 .
x_5	-1	0	0	-1	-1	1
z	54	0	0	2	6	0

Поскольку в свободном столбце имеется отрицательный элемент, то для решения задачи применяем двойственный симплекс-метод. Чтобы определить разрешающий столбец, находим $\min\left\{-\frac{2}{-1}, -\frac{6}{-1}\right\} = 2$, т.е. минимальное отношение дает столбец переменной x_3. Умножаем третью строку на -1, получаем таблицу

базис	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_2	$11/2$	0	1	$1/2$	$1/2$	0
x_1	$3/2$	1	0	$-1/2$	$1/2$	0
x_5	1	0	0	**1**	1	-1
z	54	0	0	2	6	0

и делаем шаг симплекс-метода

базис	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_2	5	0	1	0	0	$1/2$
x_1	2	1	0	0	1	$-1/2$
x_3	1	0	0	**1**	1	-1
z	52	0	0	0	4	2

Получаем заключительную симплекс-таблицу, из которой, опуская балансовые переменные x_3, x_4, x_5, заключаем, что исходная задача целочисленного программирования имеет оптимальный план $X^* = (5,2)$. При этом значение целевой функции равно $z_{\max} = 52$.

Дадим теперь геометрическую интерпретацию введения дополнительного ограничения $x_3 + x_4 \geq 1$. Допустимая область при отсутствии условия целочисленности построена выше в примере 3.1. Теперь из условий задачи

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 + x_2 + x_4 = 7 \end{cases}$$

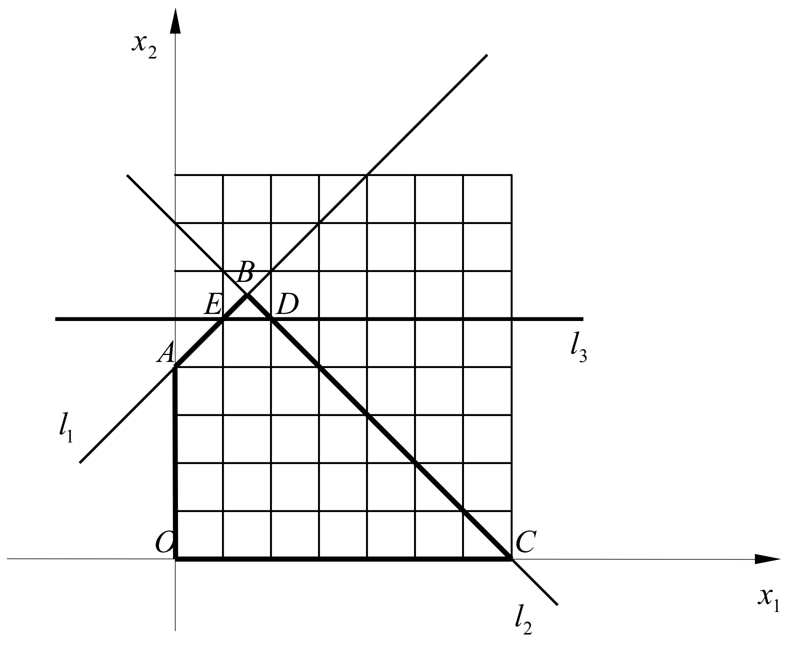
выразим переменные x_3, x_4

$$\begin{cases} x_3 = 4 + x_1 - x_2, \\ x_4 = 7 - x_1 - x_2 \end{cases}$$

и подставим в неравенство. Получим

$$x_3 + x_4 = 11 - 2x_2 \geq 1, \text{ т.е. } x_2 \leq 5.$$

Полуплоскость, заданная последним условием $x_2 \leq 5$ (прямая l_3 на рисунке задает границу этой полуплоскости $x_2 = 5$), отсекает от четырехугольника $OABC$ треугольник BDE, не содержащий целочисленных решений.



Максимальное значение функции z следует искать в области, ограниченной многоугольником $OAEDC$.

Геометрическая интерпретация метода Гомори объясняет его другое название – метод сечений.

Пример 3.4. Методом Гомори решить задачу целочисленного программирования

$$z = 2x_1 + 4x_2 \to \max$$

при условиях

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 19/3, \\ x_1 + 3x_2 \le 10, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0; x_1, x_2 \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

Решение. Запишем задачу в каноническом виде

$$z = 2x_1 + 4x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 19/3, \\ x_1 + 3x_2 + x_4 = 10, \\ x_j \ge 0,\ j = 1, \ldots, 4; x_1, x_2 \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

и составим для нее симплекс-таблицу

базис	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4
x_3	$19/3$	2	1	1	0
x_4	10	1	3	0	1
z	0	-2	-4	0	0

.

Введем в базис x_2 и, соответственно, выведем из базиса переменную x_4

базис	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4
x_3	$19/3$	2	1	1	0
x_4	$10/3$	$1/3$	$\mathbf{1}$	0	$1/3$
z	0	-3	-4	0	0

.

Найдем решение задачи без учета условия целочисленности

базис	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4
x_3	3	$5/3$	0	1	$-1/3$
x_2	$10/3$	$1/3$	$\mathbf{1}$	0	$1/3$
z	$40/3$	$-2/3$	0	0	$4/3$

,

базис	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4
x_3	$9/5$	$\mathbf{1}$	0	$3/5$	$-1/5$
x_2	$10/3$	$1/3$	1	0	$1/3$
z	$40/3$	$-2/3$	0	0	$4/3$

,

базис	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	$9/5$	1	0	$3/5$	$-1/5$
x_2	$41/15$	0	1	$-1/5$	$2/5$
z	$218/15$	0	0	$2/5$	$6/5$

.

Таким образом, $X = \left(\frac{9}{5}, \frac{41}{15}, 0, 0\right)$ – решение исходной задачи без учета условия целочисленности. Заметим, что $\left\{\frac{9}{5}\right\} = \frac{4}{5} = \frac{12}{15} > \left\{\frac{41}{15}\right\} = \frac{11}{15}$, а поэтому дополнительное ограничение выписывается для базисной переменной x_1. Последнее имеет вид

$$\{1\}x_1 + \left\{\frac{3}{5}\right\}x_3 + \left\{-\frac{1}{5}\right\}x_4 \geq \left\{\frac{9}{5}\right\}, \text{ т.е. } \frac{3}{5}x_3 + \frac{4}{5}x_4 \geq \frac{4}{5} \iff 3x_3 + 4x_4 \geq 4.$$

Вводим балансовую переменную x_5 и получаем

$$3x_3 + 4x_4 - x_5 = 4,\ -3x_3 - 4x_4 + x_5 = -4.$$

Включим в последнюю симплекс-таблицу дополнительное ограничение

базис	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	$9/5$	1	0	$3/5$	$-1/5$	0
x_2	$41/15$	0	1	$-1/5$	$2/5$	0
x_5	-4	0	0	-3	-4	1
z	$218/15$	0	0	$2/5$	$6/5$	0

Так как в третьей строке $\min\left\{-\frac{2/5}{-3}, -\frac{6/5}{-4}\right\} = \frac{2}{15}$, то выводим из базиса x_3 и вводим в базис x_3. Поделив третью строку на -3, получаем таблицу

базис	b_j	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	$9/5$	1	0	$3/5$	$-1/5$	0
x_2	$41/15$	0	1	$-1/5$	$2/5$	0
x_5	$4/3$	0	0	$\mathbf{1}$	$-4/3$	$-1/3$
z	$218/15$	0	0	$2/5$	$6/5$	0

Сделав шаг симплекс-метода, получим

базис	b_j	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	1	1	0	0	$3/5$	$-1/5$
x_2	3	0	1	0	$2/15$	$1/15$
x_3	$4/3$	0	0	1	$-4/3$	$-1/3$
z	14	0	0	0	$26/15$	$2/15$

базисное решение из заключительной симплекс-таблицы $X = \left(1,3,\frac{4}{3},0,0\right)$, а решением исходной задачи является $X^* = (1,3)$, $z_{\max} = z(X^*) = 14$.

Задачи для самостоятельного решения.

Следующие задачи целочисленного программирования

а) решить графическим методом;

б) решить методом Гомори;

в) дать геометрическую интерпретацию введения дополнительного ограничения.

60. $z = x_1 + 5x_2 + 3 \to \max$ при $x_1, x_2 \ge 0, x_1, x_2 \in Z$ и $\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 2, \\ x_1 + x_2 \le 7. \end{cases}$

61. $z = 3x_1 + 5x_2 + 1 \to \max$ при $x_1, x_2 \ge 0, x_1, x_2 \in Z$ и $\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 3, \\ x_1 + x_2 \le 12. \end{cases}$

62. $z = 4x_1 + x_2 + 8 \to \max$ при $x_1, x_2 \ge 0, x_1, x_2 \in Z$ и $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \le 7, \\ 3x_1 + 10x_2 \le 15. \end{cases}$

63. $z = 2x_1 + 4x_2 + 6 \to \max$ при $x_1, x_2 \ge 0, x_1, x_2 \in Z$ и $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 19/3, \\ x_1 + 3x_2 \le 4. \end{cases}$

64. $z = 4x_1 + 5x_2 + 11 \to \max$ при $x_1, x_2 \ge 0, x_1, x_2 \in Z$ и $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 10, \\ x_1 + 4x_2 \le 11, \\ 3x_1 + 3x_2 \le 13. \end{cases}$

65. $z = x_1 + x_2 - 6 \to \max$ при $x_1, x_2 \ge 0, x_1, x_2 \in Z$ и $\begin{cases} x_1 + x_2 \le 4, \\ x_1 + 3x_2 \le 9, \\ -3x_1 + x_2 \le 0. \end{cases}$

Глава 4. Транспортная задача

4.1. Постановка задачи

Транспортная задача является задачей линейного программирования, в которой требуется найти оптимальный план перевозки некоторого груза от конечного числа поставщиков (с заданными запасами) к конечному числу потребителей (с заданными потребностями), причем стоимость перевозки единицы груза для каждой пары «поставщик-потребитель» известна. Таким образом, оптимальный план должен определять *минимальную* общую стоимость перевозок, не превышая запасы каждого из поставщиков и покрывая потребности каждого из потребителей.

Математическую постановку задачи можно представить следующим образом.

Имеется m поставщиков $A_1, A_2, \ldots, A_m$ и n потребителей $B_1, B_2, \ldots, B_n$ некоторого груза. Для каждого поставщика и потребителя заданы запасы $a_i \geq 0, i = 1, \ldots, m$ и, соответственно, объем потребления $b_j \geq 0$, $j = 1, \ldots, n$. Также известна стоимость перевозки единицы груза $c_{ij} \geq 0$ от i-ого поставщика к j-му потребителю. Требуется найти объемы перевозок x_{ij} от i-ого поставщика к j-му потребителю, при которых общая стоимость перевозок минимальна. Таким образом, требуется найти минимум функции

$$z(X) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min$$

при условиях

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j = 1,\ldots,n, \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = 1,\ldots,m, \\ x_{ij} \geq 0. \end{cases}$$

Первая часть нетривиальных ограничений означает, что все потребности удовлетворены, вторая часть – то, что весь груз вывезен от поставщиков. Число базисных переменных в системе ограничений транспортной задачи равно $m+n-1$.

Заметим, что, если запасы и потребности задаются целыми числами, то транспортная задача имеет целочисленное оптимальное решение, поэтому транспортную задачу относят формально к задачам целочисленного линейного программирования.

Далее будем использовать следующую терминологию. Решение (оптимальное решение) транспортной задачи, определяемое $m \times n$ матрицей $X = \|x_{ij}\|$, будем называть *планом (оптимальным планом)* транспортной задачи,

Исходные данные задачи представляют в виде таблицы

Поставщики	Потребители						Запасы
	B_1	B_2	$\ldots$	B_j	$\ldots$	B_n	
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	$\ldots$	c_{1j} x_{1j}	$\ldots$	c_{1n} x_{1n}	a_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	$\ldots$	c_{2j} x_{2j}	$\ldots$	c_{2n} x_{2n}	a_2
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
A_i	c_{i1} x_{i1}	c_{i2} x_{i2}	$\ldots$	c_{ij} x_{ij}	$\ldots$	c_{in} x_{in}	a_i
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	$\ldots$	c_{mj} x_{mj}	$\ldots$	c_{mn} x_{mn}	a_m
Потребности	b_1	b_2	$\ldots$	b_j	$\ldots$	b_n	

Общие запасы определяются суммой $\sum_{i=1}^{m} a_i$, а общая потребность – $\sum_{j=1}^{n} b_j$. Транспортная задача называется *задачей с правильным балансом*, а ее модель *закрытой*, если $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$, то есть суммарные запасы поставщиков равны суммарным запросам потребителей. Если $\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j$, то такая задача называется *задачей с неправильным балансом*, а ее модель – *открытой*.

4.2. Построение начального опорного плана

Изложим алгоритм решения транспортной задачи с правильным балансом. Первым этапом решения является построение начального опорного плана, т.е. плана перевозок, удовлетворяющего всем ограничениям конкретной транспортной задачи. Мы приведем несколько методов построения такого плана – метод северо-западного угла, метод минимального тарифа и метод аппроксимации Фогеля. Их сущность состоит в том, что начальный опорный план находят за не более чем $m+n-1$ шагов (по числу базисных переменных), на каждом из которых в транспортной таблице заполняют одну клетку, которую называют занятой. Заполнение одной из клеток обеспечивает полностью либо удовлетворение потребности в грузе одного из пунктов назначения (того, в столбце которого находится заполненная клетка), либо вывоз груза из одного из пунктов отправления (из того, в строке которого находится заполняемая клетка). Различаются эти планы по принципам выбора заполняемых клеток и, в зависимости от этого, могут давать планы, более или менее отличные от оптимального.

Пример 4.1. Построить начальный опорный план методом северо-западного угла для транспортной задачи, заданной таблицей

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	11	5	4	2	80
A_2	1	4	5	9	170
A_3	9	8	7	10	150
b_j	70	60	180	90	400

В правом нижнем углу стоит сумма запасов (и, одновременно, сумма потребностей, так как модель закрытая) $80+170+150=70+60+180+90=400$. Заполнение таблицы начинаем с левого верхнего (северо-западного) угла таблицы. Так как потребности первого потребителя B_1 равны 70, а запасы первого поставщика A_1 равны $80,$ то в клетку A_1B_1 вписываем максимально возможную перевозку 70. Потребности B_1 полностью удовлетворены, поэтому первый столбец исключаем из рассмотрения, а оставшиеся запасы первого поставщика, т.е. 10, вписываем потребителю B_2 и первую строку исключаем из дальнейшего рассмотрения. Получаем

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	11 **70**	5 **10**	4	2	80
A_2	1	4	5	9	170
A_3	9	8	7	10	150
b_j	70	60	180	90	400

Так как потребности B_2 равны 60, а 10 единиц груза ему уже доставлены, то оставшиеся 50 единиц доставляются от второго поставщика A_2 (заполняем клетку A_2B_2). Столбец B_2 исключаем из рассмотрения, а оставшиеся запасы второго поставщика (120 единиц) записываем третьему потребителю. Имеем промежуточную таблицу

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	11 **70**	5 **10**	4	2	80
A_2	1	4 **50**	5 **120**	9	170
A_3	9	8	7	10	150
b_j	70	60	180	90	400

Потребности третьего потребителя окончательно удовлетворяем за счет поставщика A_3 и вписываем в клетку A_3B_3 перевозку 60. Естественным завершением построения начального плана задачи с правильным балансом является то, что как потребности последнего потребителя B_4, так и (оставшиеся) запасы поставщика A_3 равны 90, поэтому в клетку A_3B_4 вписываем перевозку 90. Получаем таблицу

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	11 **70**	5 **10**	4	2	80
A_2	1	4 **50**	5 **120**	9	170
A_3	9	8	7 **60**	10 **90**	150
b_j	70	60	180	90	400

с начальным опорным планом $X = \begin{pmatrix} 70 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 120 & 0 \\ 0 & 0 & 60 & 90 \end{pmatrix}$ и суммарная стоимость перевозок равна $z(X) = 70 \cdot 11 + 10 \cdot 5 + 50 \cdot 4 + 120 \cdot 5 + 60 \cdot 7 + 90 \cdot 10 = 2940$.

Из решения видно, что метод северо-западного угла, с одной стороны, достаточно прост с точки зрения построения, а с другой стороны, не учитывает стоимость перевозок. Поэтому опорный план, построенный методом северо-западного угла, как правило, далек от оптимального.

Пример 4.2. Построим теперь для этой же задачи начальный опорный план методом минимального тарифа. Суть этого метода состоит в том, что в клетки с наименьшими тарифами помещают максимально возможные перевозки. Итак, в таблице

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	11	5	4	2	80
A_2	1	4	5	9	170
A_3	9	8	7	10	150
b_j	70	60	180	90	400

выбираем клетку с минимальным тарифом, т.е. клетку A_2B_1 с тарифом 1. Запасы поставщика A_2 равны 170, а потребности B_1 – 70, поэтому в клетку A_2B_1 вписываем максимально возможную перевозку 70, и потребителя B_1 исключаем из рассмотрения. Получаем

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	11	5	4	2	80
A_2	1 **70**	4	5	9	170
A_3	9	8	7	10	150
b_j	70	60	180	90	400

и в оставшейся части таблицы выбираем минимальный тариф, т.е. клетку A_1B_4 с тарифом 2. Запасы поставщика A_1 равны 80, а потребности B_4 равны 90, поэтому в клетку A_2B_1 записываем перевозку 80 и поставщика A_1 исключаем из рассмотрения. Получаем таблицу

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	11	5	4	2 **80**	80
A_2	1 **70**	4	5	9	170
A_3	9	8	7	10	150
b_j	70	60	180	90	400

В оставшейся части таблицы (вторая и третья строки; второй, третий и четвертый столбцы) выбираем минимальный тариф, т.е. клетку A_2B_2 с тарифом 4. Запасы (оставшиеся) поставщика A_2 равны 100, а потребности B_2 – 60 поэтому в клетку A_2B_2 записываем максимально возможную перевозку 60 и исключаем второго потребителя из дальнейшего рассмотрения. Заметим, что у поставщика A_2 осталось 40 единиц груза, а потребности B_3 равны 180, поэтому вписываем в клетку A_2B_3 перевозку 40 и получаем таблицу

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	11	5	4	2 **80**	80
A_2	1 **70**	4 **60**	5 **40**	9	170
A_3	9	8	7	10	150
b_j	70	60	180	90	400

Из оставшихся двух клеток A_3B_3 и A_3B_4 минимальный тариф 7 имеет клетка A_3B_3. Поэтому вписываем туда перевозку 140 и в клетку A_3B_4 – 10, получаем окончательную таблицу

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	11	5	4	2 **80**	80
A_2	1 **70**	4 **60**	5 **40**	9	170
A_3	9	8	7 **140**	10 **10**	150
b_j	70	60	180	90	400

с начальным опорным планом $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 80 \\ 70 & 60 & 40 & 0 \\ 0 & 0 & 140 & 10 \end{pmatrix}$, и суммарная стоимость перевозок равна

$$z(X) = 80 \cdot 2 + 70 \cdot 1 + 60 \cdot 4 + 40 \cdot 5 + 140 \cdot 7 + 10 \cdot 10 = 1750 < 2970.$$

Таким образом, начальный план, построенный с помощью метода минимального тарифа, оказался гораздо эффективнее, чем план, построенный по методу северо-западного угла.

Пример 4.3. Применим теперь к исходной задаче метод аппроксимации Фогеля. Для этого найдем разность между двумя минимальными тарифами для каждой строки и столбца таблицы и запишем их в дополнительно образованные строки и столбцы

<table>
<tr><td></td><td>B_1</td><td>B_2</td><td>B_3</td><td>B_4</td><td>a_i</td><td colspan="6">Разности по строкам</td></tr>
<tr><td>A_1</td><td>11</td><td>5</td><td>4</td><td>2
80</td><td>80</td><td>2</td><td>2</td><td>–</td><td>–</td><td>–</td><td>–</td></tr>
<tr><td>A_2</td><td>1
70</td><td>4
60</td><td>5
40</td><td>9</td><td>170</td><td>3</td><td>1</td><td>1</td><td>4</td><td>–</td><td>–</td></tr>
<tr><td>A_3</td><td>9</td><td>8</td><td>7
140</td><td>10</td><td>150</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>3</td><td>3</td><td>0</td></tr>
<tr><td>b_j</td><td>70</td><td>60</td><td>180</td><td>90</td><td>400</td></tr>
<tr><td rowspan="6">Разности по столб-цам</td><td>8</td><td>1</td><td>1</td><td>7</td></tr>
<tr><td>–</td><td>1</td><td>1</td><td>7</td></tr>
<tr><td>–</td><td>4</td><td>2</td><td>1</td></tr>
<tr><td>–</td><td>–</td><td>2</td><td>1</td></tr>
<tr><td>–</td><td>–</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>–</td><td>–</td><td>–</td><td>0</td></tr>
</table>

В строке A_1 минимальный тариф равен 2, а следующий за ним 4, поэтому разность между ними 4-2=2; в строке A_2 минимальный тариф равен 1, а следующий за ним 4, поэтому разность между ними 4-1=3; аналогично, для строки A_3 разность между минимальным тарифом 7 и следующим за ним 8 равна 1. Итак, числа 2, 3 и 1 записываем в первый дополнительный столбец. Аналогично для столбцов разности $9-1=8$, $5-4=1$ (два раза) и $9-2=7$ записываем в первую дополнительную строку. Теперь из всех разностей выбираем *максимальную*, т.е. 8 в столбце B_1, и в клетку A_2B_1 с минимальным тарифом в этом столбце записываем максимально возможную перевозку 70, а потребителя B_1 исключаем из рассмотрения.

Теперь аналогично вычисляем разности между оставшимися минимальными тарифами и заполняем вторые дополнительные столбец и строку, не учитывая тарифы в столбце B_1. Видим, что теперь максимальная разность получается в столбце B_4 и перевозку 80 записываем в клетку A_1B_4 с минимальным тарифом 2 в этом столбце. Строку A_1 при этом исключаем из рассмотрения. Как видно из таблицы, на следующем шаге вписываем перевозку 60 в клетку A_2B_2 и исключаем столбец B_2, затем – максимально возможную перевозку 40 в клетку A_2B_3 и исключаем из рассмотрения строку A_2. Теперь для вычисления дальнейших разностей остается единственная строка A_3, поэтому в качестве разностей по столбцам записываем нули. Далее, в клетку A_3B_3 записываем 140, а на последнем шаге записываем перевозку 10 в клетку A_3B_4. Получаем таблицу с начальным опорным планом $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 80 \\ 70 & 60 & 40 & 0 \\ 0 & 0 & 140 & 10 \end{pmatrix}$, который уже был получен методом минимального тарифа. Отметим, что методом Фогеля обычно получается план, близкий к оптимальному, или сам оптимальный план.

Замечание 4.1. *В общем случае опорный план транспортной задачи состоит из* $m+n-1$ *занятой клетки (по числу базисных переменных). Такой план называется* ***невырожденным****. Нередко при решении транспортной задачи возникает* ***вырожденный*** *план с меньшим числом занятых клеток (когда какие-то из базисных переменных равны 0). В этом случае выбирается свободная клетка (или несколько свободных клеток – в зависимости от вырожденности плана) с* ***наименьшим*** *тарифом, которая в дальнейшем формально считается занятой с* ***нулевой*** *перевозкой.*

Задачи для самостоятельного решения

В транспортных задачах, указанных ниже, составить начальные опорные планы методом северо-западного угла, методом минимального тарифа и методом Фогеля.

66.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	8	6	9	2	160
A_2	7	16	12	12	60
A_3	6	15	8	3	180
b_j	80	60	60	200	

67.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	4	4	8	6	80
A_2	11	15	24	18	50
A_3	11	22	15	14	180
b_j	100	10	40	160	

68.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	10	10	4	8	90
A_2	14	25	13	23	60
A_3	12	13	6	12	140
b_j	80	40	90	80	

69.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	6	10	8	8	160
A_2	11	29	14	18	80
A_3	11	26	16	25	70
b_j	100	70	30	110	

70.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	12	5	8	6	70
A_2	12	17	13	17	60
A_3	10	18	10	14	140
b_j	90	50	100	30	

71.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	4	14	11	18	30
A_2	3	17	1	10	130
A_3	9	16	11	18	120
b_j	50	70	30	160	

72.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	5	9	14	10	120
A_2	20	15	20	20	140
A_3	12	8	14	17	70
b_j	80	90	70	90	

73.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	14	9	12	4	150
A_2	12	15	19	16	70
A_3	15	19	15	12	210
b_j	140	50	100	160	

4.3. Метод потенциалов решения транспортной задачи

Вторым этапом решения транспортной задачи является проверка построенного плана на оптимальность и его улучшение (если он не оптимален). Эту задачу мы будем решать с помощью метода потенциалов. Применение метода потенциалов основано на следующей теореме

Теорема 4.1. *Если опорный план* $X = \|x_{ij}\|$ *транспортной задачи является оптимальным, то существуют потенциалы поставщиков* $u_i, i = 1,\ldots,m$ *и потребителей* v_j, $j = 1,\ldots,n$*, удовлетворяющие условиям:*

$$u_i + v_j = c_{ij} \text{ при } x_{ij} > 0,$$

$$u_i + v_j \le c_{ij} \text{ при } x_{ij} = 0.$$

Равенства $u_i + v_j = c_{ij}$ для занятых клеток образуют систему с $m+n$ неизвестными u_i и v_j, а число уравнений этой системы равно $m+n-1$ (по числу занятых клеток невырожденного опорного плана). Так как число неизвестных системы на единицу больше числа уравнений, то одну из неизвестных можно задать произвольно, а остальные найти из системы.

Неравенства $u_i + v_j \le c_{ij}$ для свободных клеток используются для проверки оптимальности опорного решения. Введем числа

$$\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij},$$

которые называются *оценками свободных клеток*. Таким образом, согласно теореме, *опорный план будет оптимален, если для всех свободных клеток таблицы оценки неположительные.*

Проверим теперь оптимальность планов, построенных выше.

Пример 4.4. Сначала рассмотрим начальный опорный план, построенный методом минимального тарифа и методом Фогеля. Образуем у таблицы по одному дополнительному столбцу и строке, куда будем записывать потенциалы:

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i	u_i
A_1	11	5	4	2 **80**	80	0
A_2	1 **70**	4 **60**	5 **40**	9	170	
A_3	9	8	7 **140**	10 **10**	150	
b_j	70	60	180	90	400	
v_j						

Так как одну из неизвестных можно задать произвольно, то, как правило, будем выбирать $u_1 = 0$. Далее, поскольку для первой строки определен потенциал u_1, находим потенциалы v_j для ее занятых клеток по формуле $v_j = c_{1j} - u_1$. В первой строке всего одна занятая клетка A_1B_4, поэтому $v_4 = 2$. В столбце B_4, помимо уже использованной, есть еще одна занятая клетка A_3B_4, а так как тариф $c_{34} = 10$, то из условия $u_3 + v_4 = c_{34}$, т.е. $u_3 + 2 = 10$, получаем $u_3 = 8$. Далее, переходя к клетке A_3B_3, находим: $u_3 + v_3 = c_{33}$, т.е. $8 + v_3 = 7$ и $v_3 = -1$, а из клетки A_2B_3 следует, что $u_2 + v_3 = c_{23}$, т.е. $u_2 - 1 = 5$, и $u_2 = 6$. Дальнейшие вычисления будем записывать более сокращенно:

$$A_2B_1:\ u_2 + v_1 = c_{21},\ 6 + v_1 = 1,\ v_1 = -5;$$

$$A_2B_2:\ u_2 + v_2 = c_{22},\ 6 + v_2 = 4,\ v_2 = -2.$$

Все потенциалы найдены. Теперь находим оценки для свободных клеток

$$\Delta_{11} = u_1 + v_1 - c_{11} = -16 < 0,\quad \Delta_{12} = u_1 + v_2 - c_{12} = -7 < 0,$$

$$\Delta_{13} = u_1 + v_3 - c_{13} = -5 < 0,\quad \Delta_{24} = u_2 + v_4 - c_{24} = -1 < 0,$$

$$\Delta_{31} = u_3 + v_1 - c_{31} = -6 < 0,\quad \Delta_{32} = u_3 + v_2 - c_{32} = -2 < 0.$$

Результат записываем в таблицу (где в свободных клетках в квадратике записаны оценки)

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i	u_i
A_1	11 $\boxed{-16}$	5 $\boxed{-7}$	4 $\boxed{-5}$	2 **80**	80	0
A_2	1 **70**	4 **60**	5 **40**	9 $\boxed{-1}$	170	6
A_3	9 $\boxed{-6}$	8 $\boxed{-2}$	7 **140**	10 **10**	150	8
b_j	70	60	180	90	400	
v_j	-5	-2	-1	2		

Все оценки отрицательны, поэтому план $X^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 80 \\ 70 & 60 & 40 & 0 \\ 0 & 0 & 140 & 10 \end{pmatrix}$ оптимален и $z_{\min} = z(X^*) = 1750$.

Пример 4.5. Теперь проверим на оптимальность план перевозок, полученный методом северо-западного угла. Ясно, что в силу большей суммарной стоимости перевозок план не оптимален, но вычисление потенциалов и оценок необходимо для того, чтобы этот начальный опорный план улучшить. Итак, для плана

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	11 **70**	5 **10**	4	2	80
A_2	1	4 **50**	5 **120**	9	170
A_3	9	8	7 **60**	10 **90**	150
b_j	70	60	180	90	400

полагаем, что $u_1 = 0$, а далее находим последовательно

$$A_1B_1:\ u_1 + v_1 = c_{11},\ 0 + v_1 = 11,\ v_1 = 11;$$

$$A_1B_2:\ u_1 + v_2 = c_{12},\ 0 + v_2 = 5,\ v_2 = 5;$$

$$A_2B_1:\ u_2 + v_2 = c_{22},\ u_2 + 5 = 4,\ u_2 = -1;$$

$$A_2B_3:\ u_2 + v_3 = c_{23},\ -1 + v_3 = 5,\ v_3 = 6;$$

$$A_3B_3:\ u_3 + v_3 = c_{33},\ u_3 + 6 = 7,\ u_3 = 1;$$

$$A_3B_4:\ u_3 + v_4 = c_{34},\ 1 + v_4 = 10,\ v_4 = 9.$$

Получаем также оценки для свободных клеток

$$\Delta_{13} = u_1 + v_3 - c_{13} = 2 > 0,\ \Delta_{14} = u_1 + v_4 - c_{14} = 7 > 0,$$

$$\Delta_{21} = u_2 + v_1 - c_{21} = 9 > 0,\ \Delta_{24} = u_2 + v_4 - c_{24} = -1 < 0,$$

$$\Delta_{31} = u_3 + v_1 - c_{31} = 3 > 0,\ \Delta_{32} = u_3 + v_2 - c_{32} = -2 < 0.$$

Все результаты записываем в таблицу

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i	u_i
A_1	11 **70**	5 **10**	4 $\boxed{2}$	2 $\boxed{7}$	80	0
A_2	1 $\boxed{9}$	4 **50**	5 **120**	9 $\boxed{-1}$	170	-1
A_3	9 $\boxed{3}$	8 $\boxed{-2}$	7 **60**	10 **90**	150	1
b_j	70	60	180	90	400	
v_j	11	5	6	9		

Как видим, среди оценок есть положительные, поэтому опорный план $X = \begin{pmatrix} 70 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 120 & 0 \\ 0 & 0 & 60 & 90 \end{pmatrix}$ не оптимален.

Чтобы улучшить допустимое решение X транспортной задачи, нам потребуется понятие цикла. Напомним, что *циклом* называется последовательность клеток таблицы транспортной задачи, в которой две и только две соседние клетки расположены в одной строке или столбце. Цикл обычно изображают в виде замкнутой ломаной линии, соединяющей вершины цикла, расположенные в клетках таблицы.

Для построения нового опорного плана в таблице выбираем свободную клетку с *максимальной положительной оценкой* (клетка A_2B_1) и формируем цикл, одной из вершин которого является выбранная клетка, а остальные клетки *занятые*. Легко видеть, что это цикл, соединяющий клетки A_1B_1, A_1B_2, A_2B_2 и A_2B_1. Кроме этого, сопоставим каждой вершине цикла знак и перевозку, при этом свободной клетке сопоставляем знак «$+$», а для остальных клеток знаки чередуются. Получим следующий цикл:

Теперь сделаем перестановку по циклу, а именно: из всех вершин, отмеченных минусом, вычтем минимум из всех перевозок, означенных этим знаком, т.е. вычитаем $\Delta = \min(50,70) = 50$, а ко всем вершинам с «$+$» прибавим Δ.

Замечание 4.2. Если при нахождении Δ плана минимум достигается в нескольких клетках, помеченным знаком «–», то одна из клеток становится свободной, а остальные считаются занятыми с нулевыми перевозками, так чтобы число занятых клеток оставалось равным $m+n-1$.

Получим

При этом клетка A_2B_2 становится свободной, и мы получаем новый опорный план

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i	u_i
A_1	11 **20**	5 **60**	4 $\boxed{11}$	2 $\boxed{16}$	80	0
A_2	1 **50**	4 $\boxed{-9}$	5 **120**	9 $\boxed{-1}$	170	-10
A_3	9 $\boxed{-6}$	8 $\boxed{-11}$	7 **60**	10 **90**	150	-8
b_j	70	60	180	90	400	
v_j	11	5	15	18		

и общая стоимость перевозок равна $z(X) = 20\cdot 11 + 60\cdot 5 + 50\cdot 1 + 120\cdot 5 + 60\cdot 7 + 90\cdot 10 = 2490 < 2940$. Полученный план лучше начального, и оценим его оптимальность с помощью метода потенциалов. Имеем (результаты всех вычислений уже занесены в таблицу выше)

$$u_1 = 0:\ v_1 = 11, v_2 = 5;$$

$$v_1 = 11:\ u_2 = -10,\ v_3 = 15,\ u_2 = -10,\ v_3 = 15,\ u_3 = -8,\ v_4 = 18.$$

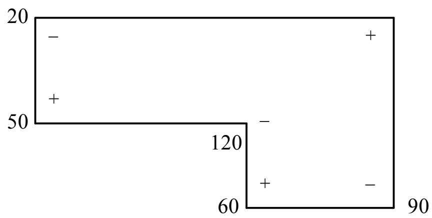
Находим также оценки для свободных клеток

$$\Delta_{13} = 11 > 0,\ \Delta_{14} = 16 > 0,\ \Delta_{22} = -9 < 0,$$

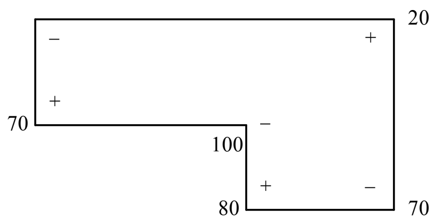
$$\Delta_{24} = -1 < 0,\ \Delta_{31} = -6 < 0,\ \Delta_{32} = -11 < 0.$$

Так как есть положительные оценки, план не оптимален.

Снова выбираем свободную клетку с максимальной положительной оценкой (клетка A_1B_4) и формируем цикл с вершиной в этой клетке. Таковым является цикл, соединяющий клетки A_1B_4, A_3B_4, A_3B_3, A_2B_3, A_2B_1 и A_1B_1:



Вычисляем $\Delta = \min\{20{,}120{,}90\} = 20$ и из вершин, помеченных «–», вычтем $\Delta = 20$, а к клеткам, помеченных плюсом, прибавим 20. Получим цикл



и клетка A_1B_4 становится свободной. Имеем новый опорный план

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i	u_i
A_1	11 $\boxed{-16}$	5 **60**	4 $\boxed{-5}$	2 **20**	80	0
A_2	1 **70**	4 $\boxed{7}$	5 **100**	9 $\boxed{-1}$	170	6
A_3	9 $\boxed{-6}$	8 $\boxed{2}$	7 **80**	10 **70**	150	8
b_j	70	60	180	90	400	
v_j	-5	5	-1	2		

и общая стоимость перевозок равна $F(X) = 2170 < 2490$.

Оценим оптимальность полученного плана. Полагаем

$$u_1 = 0 : v_2 = 5,\ v_4 = 2;$$

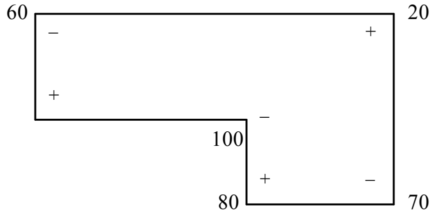
$$v_4 = 2 :\ u_3 = 8, v_3 = -1,\ u_2 = 6,\ v_1 = -5.$$

Оценками для свободных клеток являются

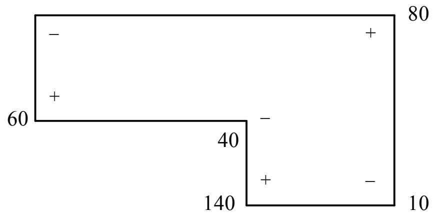
$$\Delta_{11} = -16 < 0\,,\ \Delta_{13} = -5 < 0,\ \ \Delta_{22} = 7 > 0,$$

$$\Delta_{24} = -1 < 0,\ \ \Delta_{31} = -6 < 0,\ \ \Delta_{32} = 2 > 0$$

(результаты всех вычислений уже занесены в таблицу выше). Так как план опять не оптимален, то снова выбираем свободную клетку с максимальной положительной оценкой (клетка A_2B_2) и формируем цикл с вершиной в этой клетке. Таковым является цикл, соединяющий клетки A_2B_2, A_1B_2, A_1B_4, A_3B_4, A_3B_3 и A_2B_3:



Вычисляем $\Delta = \min\{60{,}70{,}100\} = 60$ и сделаем перестановку по циклу с $\Delta = 60$. Получим



и клетка A_1B_2 становится свободной. Имеем новый опорный план

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	11	5	4	2 **80**	80
A_2	1 **70**	4 **60**	5 **40**	9	170
A_3	9	8	7 **140**	10 **10**	150
b_j	70	60	180	90	400

и общая стоимость перевозок равна $z(X) = 1750 < 2170.$ Заметим, что план

$X^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 80 \\ 70 & 60 & 40 & 0 \\ 0 & 0 & 140 & 10 \end{pmatrix}$ был получен ранее методом минимального тарифа и методом Фогеля, а его оптимальность была уже проверена.

Рассмотрим еще один пример.

Пример 4.6. Изменим в исходной задаче тарифы и перевозки и найдем оптимальный план в следующей задаче:

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	11	5	4	2	100
A_2	5	4	5	9	200
A_3	9	8	7	10	100
b_j	50	50	200	100	400

Методом минимального тарифа строим начальный опорный план. Клеткой с минимальным тарифом является A_1B_4, поэтому записываем в нее перевозку 100 и исключаем из рассмотрения первую строку и последний столбец. Далее, в клетку A_2B_2 с тарифом 4 записываем перевозку 50 и исключаем из рассмотрения столбец B_2. С тарифом 5 имеется две свободные клетки, поэтому выбираем одну из них – A_2B_3 и записываем в нее перевозку 150 (такой выбор вполне оправдан, так как в клетку A_2B_1 можно записать лишь 50) и т.д. Получаем следующий план перевозок

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	11	5	4	2 **100**	100
A_2	5	4 **50**	5 **150**	9	200
A_3	9 **50**	8	7 **50**	10	100
b_j	50	50	200	100	400

причем $z(X) = 100 \cdot 2 + 50 \cdot 4 + 150 \cdot 5 + 50 \cdot 9 + 50 \cdot 7 = 1950$. Заметим, что в нем имеется всего пять занятых клеток, что меньше числа базисных переменных (которых ровно $m + n - 1 = 6$). Поэтому построенный план является *вырожденным.* Согласно замечанию 4.1, выбираем свободную клетку с минимальным тарифом (клетка A_1B_3), записываем в нее нулевую перевозку и считаем занятой. Вычисляем потенциалы и оценки, и получаем таблицу

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i	u_i
A_1	11 $\boxed{-5}$	5 $\boxed{-2}$	4 **0**	2 **100**	100	0
A_2	5 $\boxed{2}$	4 **50**	5 **150**	9 $\boxed{-6}$	200	1
A_3	9 **50**	8 $\boxed{-2}$	7 **50**	10 $\boxed{-5}$	100	3
b_j	50	50	200	100	400	
v_j	6	3	4	2		

В клетке A_2B_1 имеем положительную оценку и строим цикл, соединяющий клетки A_2B_1, A_2B_3, A_3B_3 и A_3B_1:

Имеем, что $\Delta = \min(50{,}150) = 50$, делаем перестановку по циклу

и получаем транспортную таблицу с новым планом

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i	u_i
A_1	11 $\boxed{-7}$	5 $\boxed{-2}$	4 **0**	2 **100**	100	0
A_2	5 **50**	4 **50**	5 **100**	9 $\boxed{-6}$	200	1
A_3	9 $\boxed{-2}$	8 $\boxed{-2}$	7 **100**	10 $\boxed{-5}$	100	3
b_j	50	50	200	100	400	
v_j	4	3	4	2		

Вычисляем потенциалы и оценки, при этом находим, что $z(X) = 100 \cdot 2 + 50 \cdot 5 + 50 \cdot 4 + 100 \cdot 5 + 100 \cdot 7 = 1850 < 1950$, все оценки отрицательны и план $X^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 100 \\ 50 & 50 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 100 & 0 \end{pmatrix}$ оптимален.

Замечание 4.3. *В случае* ***вырожденного*** *плана возможна ситуация, когда занятая клетка с нулевой перевозкой попала в цикл и соответствует знаку “–“* (*при этом* $\Delta = 0$). *Перестановка по циклу в данном случае сводится к тому, свободная клетка объявляется занятой с нулевой перевозкой, и наоборот, занятая клетка с нулевой перевозкой становится свободной.*

Сформулируем теперь алгоритм решения транспортной задачи с правильным балансом методом потенциалов.

1. Построим начальное опорное решение X.

2. Найдем потенциалы u_i и v_j, соответствующих данному опорному решению, решая систему уравнений $u_i + v_j = c_{ij}$ для занятых клеток.

3. Вычислим оценки для свободных клеток по формулам $\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$. Если $\Delta_{ij} \le 0$ для всех свободных клеток, то полученное решение $X^* = X$ является оптимальным. Вычислим значение целевой функции $F(X^*)$, и решение задачи на этом заканчивается.

3. Если имеется хотя бы одна свободная клетка с положительной оценкой, то опорное решение не является оптимальным. Для улучшения плана перевозок находим клетку таблицы, которой соответствует наибольшая положительная оценка и строим цикл, включающий данную (свободную) клетку и занятые клетки. В вершинах цикла расставим поочередно знаки «+» и «–», начиная с «+» в клетке с наибольшей положительной оценкой и делаем переход по циклу на величину, равную мини-

муму перевозок по всем клеткам, помеченным минусом. Получаем новый опорный план и переходим к п. 2.

Задачи для самостоятельного решения

74 – 81. Решить методом потенциалов транспортные задачи № 66 – 73.

4.4. Открытая модель транспортной задачи

Напомним, что транспортная задача $m \times n$ называется *задачей с неправильным балансом*, а ее модель – *открытой*, если $\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j$, т.е. суммарные запасы не равны суммарным потребностям.

Открытую задачу можно свести к замкнутой:

1. Если $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$, то вводят фиктивного потребителя B_{n+1} с потребностью $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$ и нулевыми тарифами перевозок в столбце.

2. Если $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$, то вводят фиктивного поставщика A_{m+1} с запасом груза $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$ и нулевыми тарифами перевозок в строке.

Пример 4.7. Рассмотрим задачу, аналогичную примеру 4.4, но с запасами 100, 200 и 130, т.е. с таблицей

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	11	5	4	2	100
A_2	1	4	5	9	200
A_3	9	8	7	10	130
b_j	70	60	180	90	

Так как сумма запасов $100+200+130=430$ больше суммы потребностей $70+60+180+90=400$, то вводим фиктивного потребителя B_5 с нулевыми тарифами перевозок и потребностями 30

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
A_1	11	5	4	2	0	100
A_2	1	4	5	9	0	200
A_3	9	8	7	10	0	130
b_j	70	60	180	90	30	400

Методом аппроксимации Фогеля построим начальный план

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_4	a_i	Разности по строкам						
A_1	11	5	4 **10**	2 **90**	0	100	2	2	2	1	0	–	–
A_2	1 **70**	4 **60**	5 **70**	9	0	200	1	4	1	1	0	0	–
A_3	9	8	7 **100**	10	0 **30**	130	7	7	1	1	0	0	0
b_j	70	60	180	90	30	400							
Разности по столбцам	8	1	1	7	0								
	–	1	1	7	0								
	–	1	1	7	–								
	–	1	1	–	–								
	–	–	1	–	–								
	–	–	2	–	–								
	–	–	0	–	–								

и формируем таблицу для решения методом потенциалов. Получаем

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i	u_j
A_1	11 $\boxed{-11}$	5 $\boxed{-2}$	4 **10**	2 **90**	0 $\boxed{-3}$	100	0
A_2	1 **70**	4 **60**	5 **70**	9 $\boxed{-6}$	0 $\boxed{-2}$	200	1
A_3	9 $\boxed{-6}$	8 $\boxed{-2}$	7 **100**	10 $\boxed{-5}$	0 **30**	130	3
b_j	70	60	180	90	30	430	
v_j	0	3	4	2	-3		

с вычисленными потенциалами и оценками. Все оценки отрицательны, поэтому полученный план $X^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 10 & 90 \\ 70 & 60 & 70 & 0 \\ 0 & 0 & 100 & 0 \end{pmatrix}$ (для его записи мы отбрасываем столбец фиктивного потребителя B_5) оптимален и $F\left(X^*\right) = 1580$. Как следствие неправильного баланса имеем, что от поставщика A_3 не вывезено 30 единиц груза.

Задачи для самостоятельного решения

Решить транспортные задачи методом потенциалов

82.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	3	7	4	7	100
A_2	10	13	24	7	100
A_3	8	19	12	18	200
b_j	90	80	30	170	

83.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	1	13	12	3	60
A_2	2	16	4	6	125
A_3	13	4	17	16	75
b_j	100	100	50	50	

84.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	5	6	2	4	75
A_2	18	22	11	3	185
A_3	18	9	6	11	90
b_j	40	70	90	115	

85.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	11	3	7	4	95
A_2	12	9	8	13	65
A_3	23	14	3	8	130
b_j	40	110	85	105	

86.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	14	7	2	17	100
A_2	5	12	6	10	150
A_3	9	2	3	12	120
b_j	60	95	85	90	

87.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	6	12	7	14	120
A_2	12	3	18	3	80
A_3	23	1	3	21	70
b_j	80	110	80	50	

4.5. Определение оптимального плана транспортных задач с дополнительными ограничениями

При решении ряда транспортных задач иногда приходится учитывать дополнительные ограничения на перевозки. Ниже перечислены варианты усложнений в постановках транспортных задач и даны указания, как их решать.

1. Если перевозки от поставщика A_i к потребителю B_j не могут быть осуществлены (*блокировка*), то для определения оптимального решения задач предполагают, что тариф перевозки единицы груза от A_i к B_j является сколь угодно большим числом M.

2. Если дополнительным условием в транспортной задаче является обеспечение перевозки от поставщика A_i к потребителю B_j *в точности* a_{ij} единиц груза, то в клетку A_iB_j записывают указанное число a_{ij}, а в дальнейшем эту клетку считают свободной со сколь угодно большим тарифом M.

3. Если от поставщика A_i к потребителю B_j должно быть завезено *не менее* a_{ij} единиц груза, то считают, что запасы пункта A_i и потребности пункта B_j полагают меньше фактических на a_{ij} единиц. После нахождения оптимального плана перевозку, стоящую в клетке A_iB_j, увеличивают на a_{ij} единиц.

4. Если от поставщика A_i к потребителю B_j требуется перевезти *не более* a_{ij} единиц груза, то вводят дополнительного потребителя $B_{n+1} = B_{ij}$, которому записывают те же тарифы, что и для B_j, за исключением тарифа в i-ой строке, который считают равным сколь угодно большому числу M. Потребности пункта B_j считают равными a_{ij}, а потребности B_{ij} полагают равными $b_j - a_{ij}$.

Пример 4.8. Найти решение транспортной задачи

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	11	5	4	2	80
A_2	1	4	5	9	170
A_3	9	8	7	10	150
b_j	70	60	180	90	400

с учетом того, что из A_2 в B_1 и из A_3 в B_4 перевозки не могут быть осуществлены, а из A_1 в B_3 должно быть завезено 60 ед. груза, а из A_3 в B_2 – не менее 50 ед. груза.

Решение. Так как из A_2 в B_1 и из A_3 в B_4 перевозки не могут быть осуществлены, то в клетках A_2B_1 и A_3B_4 тарифы считаем равными некоторому большому числу M . В клетку A_1B_3 помещаем перевозку 60, тариф считаем равным M , и эту клетку в дальнейшем полагаем свободной. Кроме этого, запасы A_3 и потребности B_2 уменьшаем на 50. Получаем следующую таблицу

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	11	5	M **60**	2	80
A_2	M	4	5	9	170
A_3	9	8	7	M	100
b_j	70	10	180	90	400

Найдем начальное опорное решение методом минимального тарифа. В клетку A_1B_4 помещаем максимально возможную перевозку 20, в клетку A_2B_2 –10, A_2B_3 – 120, A_2B_4 – 40, A_3B_1 – 70 и A_3B_4 – 30 (см. таблицу ниже). Находим потенциалы:

$u_1 = 0: \ v_4 = 2, \ u_2 = 7, \ u_3 = M - 2;$

$u_2 = 7: v_3 = -2, \ v_2 = -3;$

$u_3 = M - 2: \ v_1 = 11 - M;$

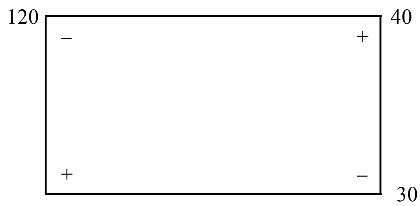
Находим оценки для свободных клеток

$\Delta_{11} = -M < 0$, $\Delta_{12} = -8 < 0$, $\Delta_{21} = 18 - 2M < 0$, $\Delta_{32} = M - 13 > 0$, $\Delta_{33} = M - 11 > 0$.

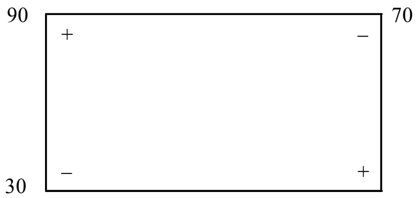
Так как есть положительные оценки, план не оптимален.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i	u_i
A_1	11 $\boxed{-M}$	5 $\boxed{-8}$	M **60**	2 **20**	80	0
A_2	M $\boxed{18-2M}$	4 **10**	5 **120**	9 **40**	170	7
A_3	9 **70**	8 $\boxed{M-13}$	7 $\boxed{M-11}$	M **30**	100	$M-2$
b_j	70	10	180	90	400	
v_j	$11-M$	-3	-2	2		

Максимальную положительную оценку $\Delta_{33} = M - 11$ имеем в клетке A_3B_3 и строим цикл, соединяющий клетки A_3B_3, A_2B_3, A_2B_4 и A_3B_4:



Так как $\Delta = \min(30{,}120) = 30$, делаем перестановку по циклу



и получаем транспортную таблицу с новым планом

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i	u_i
A_1	11 $\boxed{-11}$	5 $\boxed{-8}$	M **60**	2 **20**	80	0
A_2	M $\boxed{7-M}$	4 **10**	5 **90**	9 **70**	170	7
A_3	9 **70**	8 $\boxed{-2}$	7 **30**	M	100	9
b_j	70	10	180	90	400	
v_j	0	-3	-2	2		

Находим потенциалы:

$$u_1 = 0: \ v_4 = 2, \ u_2 = 7, \ v_3 = -2, \ v_2 = -3;$$

$$v_3 = -2: \ u_3 = 9, \ v_1 = 0,$$

а оценки для свободных клеток

$$\Delta_{11} = -11 < 0, \ \Delta_{12} = -8 < 0, \ \Delta_{21} = 7 - M < 0, \ \Delta_{32} = -2 < 0, \ \Delta_{34} = 11 - M < 0.$$

Так как все оценки отрицательны, то данная таблица – заключительная, и увеличивая перевозку в клетке A_3B_2 на 50, получим оптимальный план перевозок, удовлетворяющий всем ограничениям задачи:

$$X^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 60 & 20 \\ 0 & 10 & 90 & 70 \\ 70 & 50 & 30 & 0 \end{pmatrix}$$

и $F(X^*) = 4 \cdot 60 + 2 \cdot 20 + 4 \cdot 10 + 5 \cdot 90 + 9 \cdot 70 + 9 \cdot 70 + 7 \cdot 30 = 2240.$

Пример 4.9. Найти решение транспортной задачи

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	11	5	4	2	80
A_2	1	4	5	9	170
A_3	9	8	7	10	150
b_j	70	60	180	90	400

если из A_1 в B_4 перевозки запрещены, а из A_2 в B_4 должно быть завезено не менее 40 ед. груза, а из A_3 в B_3 – не более 50 ед. груза.

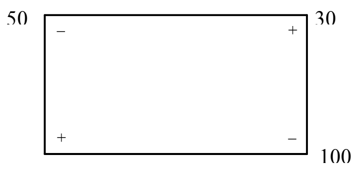
Решение. Поскольку из A_1 в B_4 перевозки не могут быть осуществлены, то тариф в A_1B_4 считаем равным M. Запасы A_2 и потребности B_4 уменьшаем на 40, а также вводим дополнительного потребителя B_{33} потребностями $180 - 50 = 130$. Соответственно, в клетке A_3B_{33} стоимость перевозок считаем равной M, а потребности B_3 приравниваем к 50. Получаем таблицу

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_{33}	a_i
A_1	11	5 **0**	4 **50**	M	4 **30**	80
A_2	1 **70**	4 **60**	5	9	5	130
A_3	9	8	7	10 **50**	M **100**	150
b_j	70	60	50	50	130	

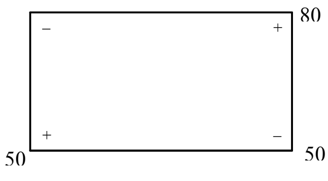
Найдем начальное опорное решение методом минимального тарифа. В клетку A_2B_1 вводим максимально возможную перевозку 70, в клетку A_2B_2 –60, A_1B_3 – 50, A_1B_{33} – 30, A_3B_4 – 50 и A_3B_{33} – 100. Поскольку план вырожденный, клетку A_1B_2 считаем занятой с нулевой перевозкой. Находим потенциалы и оценки

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_{33}	a_i	u_i
A_1	11 $\boxed{-9}$	5 **0**	4 **50**	M $\boxed{14-2M}$	4 **30**	80	0
A_2	1 **70**	4 **60**	5 $\boxed{-2}$	9 $\boxed{4-M}$	5	130	-1
A_3	9 $\boxed{M-11}$	8 $\boxed{M-7}$	7 $\boxed{M-7}$	10 **50**	M **100**	150	$M-4$
b_j	70	60	50	50	130		
v_j	2	5	4	$14-M$	4		

Из двух клеток с максимальной положительной оценкой $\Delta_{33} = \Delta_{32} = M - 7$ выбираем клетку A_3B_3 (так как там меньший тариф) и строим цикл, соединяющий клетки A_3B_3, A_1B_3, A_1B_{33} и A_3B_{33}:



Так как $\Delta = \min(50,100) = 50$, делаем перестановку по циклу



и получаем транспортную таблицу с новым планом

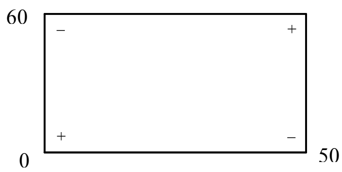
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_{33}	a_i	u_i
A_1	11 $\boxed{-9}$	5 **0**	4 $\boxed{7-M}$	M $\boxed{14-2M}$	4 **80**	80	0
A_2	1 **70**	4 **60**	5 $\boxed{5-M}$	9 $\boxed{4-M}$	5 $\boxed{-2}$	130	-1
A_3	9 $\boxed{M-11}$	8 $\boxed{M-7}$	7 **50**	10 **50**	M **50**	150	$M-4$
b_j	70	60	50	50	130		
v_j	2	5	$11-M$	$14-M$	4		

Цикл, построенный в клетке с максимальной положительной оценкой $\Delta_{32} = M - 7$ (соединяющий клетки A_3B_2, A_1B_2, A_1B_{33} и A_3B_{33}) имеет вид

со знаком минус в клетке с нулевой перевозкой. Это означает, что клетка A_3B_2 объявляется занятой (с нулевой перевозкой), а A_1B_2 – свободной. Для нового базиса считаем потенциалы и оценки и получаем

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_{33}	a_i	u_i
A_1	11 $\boxed{-2-M}$	5 $\boxed{7-M}$	4 $\boxed{7-M}$	M $\boxed{14-2M}$	4 **80**	80	0
A_2	1 **70**	4 **60**	5 $\boxed{-2}$	9 $\boxed{-4}$	5 $\boxed{M-9}$	130	$M-8$
A_3	9 $\boxed{-4}$	8 **0**	7 **50**	10 **50**	M **50**	150	$M-4$
b_j	70	60	50	50	130		
v_j	$9-M$	$12-M$	$11-M$	$14-M$	4		

Имеем единственную положительную оценку $\Delta_{2,33} = M - 9$ в A_2B_{33} с циклом из клеток A_2B_{33}, A_3B_{33}, A_3B_2 и A_2B_2:



Так как $\Delta = \min(50,60) = 50$, приходим к циклу

и получаем транспортную таблицу с новым планом. Вычисляем новые потенциалы и убеждаемся, что все оценки отрицательны. Данная таблица – заключительная, и увеличивая перевозку в клетке A_2B_4 на 40, а также складывая перевозки, записанные в соответствующих клетках столбцов B_3 и B_{33}, получим

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_{33}	a_i	u_i
A_1	11 $\boxed{-11}$	5 $\boxed{-2}$	4 $\boxed{-2}$	M $\boxed{5-M}$	4 **80**	80	0
A_2	1 **70**	4 **10**	5 $\boxed{-2}$	9 $\boxed{-3}$	5 **50**	130	1
A_3	9 $\boxed{-4}$	8 **50**	7 **50**	10 **50**	M $\boxed{9-M}$	150	5
b_j	70	60	50	50	130		
v_j	0	3	2	5	4		

оптимальный план перевозок $X^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 80 & 0 \\ 70 & 10 & 50 & 40 \\ 0 & 50 & 50 & 50 \end{pmatrix}$, удовлетворяющий всем ограничениям задачи, и

$$z(X^*) = 4\cdot 80 + 1\cdot 70 + 4\cdot 10 + 5\cdot 50 + 9\cdot 40 + 8\cdot 50 + 7\cdot 50 + 10\cdot 50 = 2290\,.$$

Задачи для самостоятельного решения

88. Найти решение транспортной задачи с таблицей

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	3	4	7	9	100
A_2	16	5	12	4	100
A_3	8	11	12	5	200
b_j	80	110	90	120	

, если из A_1 в B_2 и из A_2 в B_3 перевозки не могут быть осуществлены.

89. Найти решение транспортной задачи с таблицей

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	5	14	6	21	120
A_2	20	13	17	14	90
A_3	8	21	6	7	180
b_j	95	110	80	70	

, если из A_3 в B_2 перевозки не могут быть осуществлены, а из A_1 в B_4 должно быть перевезено 70 ед. груза.

90. Найти решение транспортной задачи с таблицей

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	7	12	16	11	150
A_2	8	2	4	2	140
A_3	9	15	16	7	110
b_j	75	145	120	60	

, если из A_2 в B_4 перевозки запрещены, из A_1 в B_3 должно быть доставлено не менее 40 ед. груза, а из A_3 в B_1 – не более 50 ед. груза.

91. Найти решение транспортной задачи с таблицей

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	3	10	7	10	140
A_2	4	9	19	25	105
A_3	6	4	5	2	115
b_j	60	130	55	115	

, если из A_2 в B_1 перевозки запрещены, из A_1 в B_2 должно быть перевезено 50 ед. груза, а из A_3 в B_4 – не более 20 ед. груза.

92. Найти решение транспортной задачи с таблицей

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	9	6	7	11	70
A_2	3	14	25	19	170
A_3	2	8	17	10	140
b_j	90	60	160	70	

, если из A_1 в B_4 должно быть перевезено не менее 50 ед. груза, из A_3 в B_3 должно быть перевезено не менее 30 ед. груза, а из A_2 в B_2 – 40 ед. груза.

93. Найти решение транспортной задачи с таблицей

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	12	14	11	20	90
A_2	3	4	5	9	155
A_3	2	18	14	12	125
b_j	100	75	75	120	

, если из A_1 в B_4 должно быть перевезено не менее 40 ед. груза, из A_2 в B_3 – не более 50 ед. груза, а из A_3 в B_1 – не менее 60 ед. груза.

4.6. Решение транспортной задачи средствами EXCEL

В этом разделе рассмотрим алгоритм применения EXCEL к транспортной задаче примера 4.9.

В таблице 4.1 представлены исходные данные на листе EXCEL для ее решения.

	A	B	C	D	E	F	G	H
2		Матрица стоимости перевозок						
3			B1	B2	B3	B4	a	
4		A1	1	11	3	13	140	
5		A2	12	4	8	2	160	
6		A3	7	5	14	6	100	
7		b	80	40	150	130		
8		План						
9			B1	B2	B3	B4	a	
10		A1					0	
11		A2					0	
12		A3					0	
13		b	0	0	0	0		
14			Общая стоимость перевозок				0	
15								

Таблица 4.1

Первая из представленных матриц задает тарифы перевозок, а во второй записыватся результат решения задачи. При этом ячейки G10:G12 получаются суммированием перевозок (функция СУММ) соответствующих строк плана, а ячейки C13:F13 – его столбцов. В ячейку G14 записывается попарная сумма (функция СУММПРОИЗВ) C4:F6 и C10:F12.

Надстройка «Поиск решения» реализуется в соответствии с таблицей 4.2.

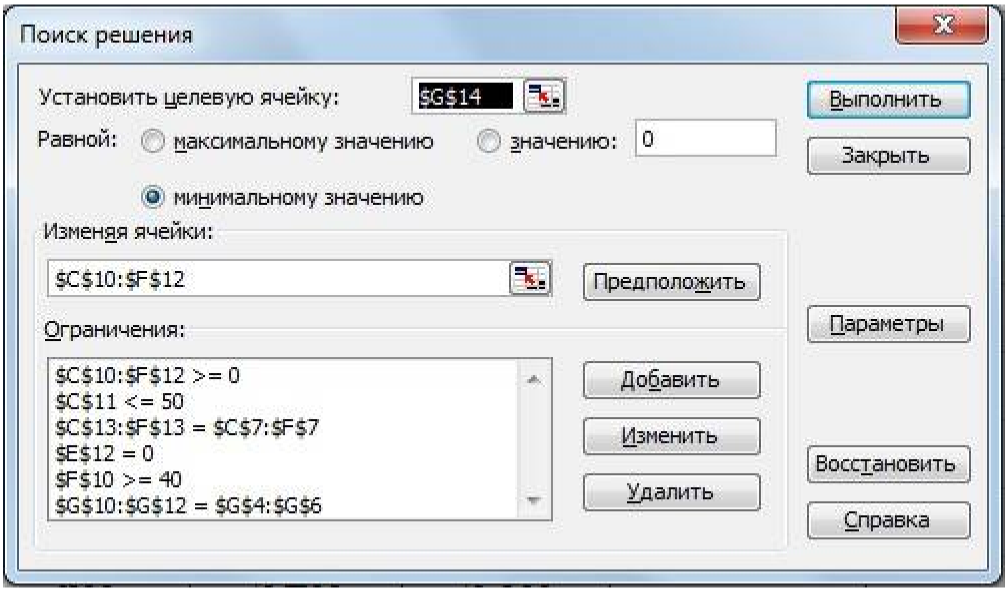


Таблица 4.2

а результат, который совпадает с оптимальным планом примера 4.9, получается после выполнения оптимизации (таблица 4.3).

	B	C	D	E	F	G	H
1							
2	**Матрица стоимости перевозок**						
3		**B1**	**B2**	**B3**	**B4**	**a**	
4	**A1**	1	11	3	13	**140**	
5	**A2**	12	4	8	2	**160**	
6	**A3**	7	5	14	6	**100**	
7	**b**	**80**	**40**	**150**	**130**		
8	**План**						
9		**B1**	**B2**	**B3**	**B4**	**a**	
10	**A1**	0	0	100	40	**140**	
11	**A2**	0	20	50	90	**160**	
12	**A3**	80	20	0	0	**100**	
13	**b**	**80**	**40**	**150**	**130**		
14		**Общая стоимость перевозок**				2140	
15							

Таблица 4.3

Глава 5. Элементы выпуклого и динамического программирования

5.1. Задача квадратичного программирования

Рассмотрим задачу оптимизации вида

$$z(\bar{x}) \to \min\ (\max),\ \bar{x} \in X,$$

где множество $X \subset R^n$, как и в задаче линейного программирования, определяется системой линейных неравенств, а функция z является квадратичной (т.е. многочленом второй степени по переменным $x_1, x_2, \ldots, x_n$). Задача математического программирования с квадратичной целевой функцией называется задачей *квадратичного программирования.*

Сформулируем сначала общую теорему об условиях оптимальности задачи квадратичного программирования.

Теорема 5.1 (необходимое и достаточное условие экстремума). *Пусть $X \subset R^n$ – выпуклое множество, заданное системой линейных неравенств*

$$\begin{cases} g_1(x_1,\ldots,x_n) \le 0, \\ \ldots\ldots\ldots \\ g_m(x_1,\ldots,x_n) \le 0. \end{cases}$$

а z – выпуклая функция на X. Для того, чтобы точка $\bar{x}^* \subset X$ являлась точкой глобального минимума функции z на X, необходимо и достаточно, чтобы существовал вектор $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_m) \subset R^m$, удовлетворяющий условиям

$$L'_{x_i}\left(\bar{x}^*,\lambda\right)=0,\ i=1,\ldots,n,$$

$$\lambda_j g_j\left(\bar{x}^*\right)=0,\ \lambda_j\ge 0,\ j=1,\ldots,m,$$

где $L(\bar{x},\lambda)=f(\bar{x})+\sum_{j=1}^{m}\lambda_j g_j(\bar{x})$ *– функция Лагранжа.*

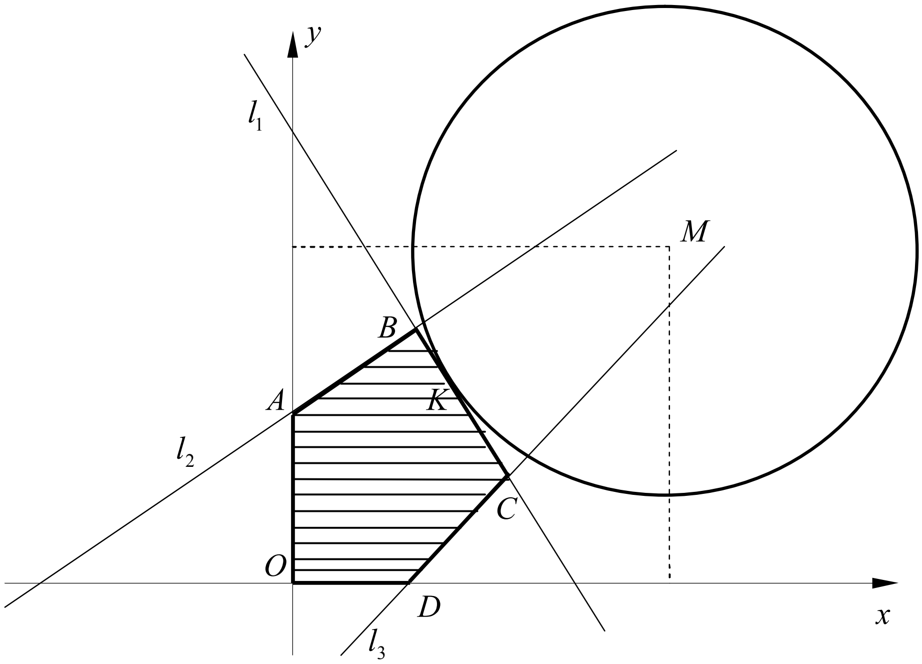
Замечание 5.1. *Необходимое и достаточное условие экстремума является частным случаем теоремы Куна-Таккера о связи экстремумов выпуклой функции на выпуклом множестве со стационарными точками функции Лагранжа. Поэтому далее при его использовании мы будем ссылаться на теорему Куна-Таккера.*

Пример 5.1. Графически найти решение задачи квадратичного программирования

$$\begin{cases} z=(x-16)^2+(y-12)^2\to\min \\ 2x+y\le 19, \\ -5y+3x\ge -30, \\ 5x-4y\le 15, \\ x\ge 0, y\ge 0, \end{cases}$$

и проверить выполнение условий теоремы Куна-Таккера.

Решение. Построим сначала на плоскости (x,y) выпуклое множество, заданное системой ограничений задачи. Изобразим прямые $l_1: 2x+y=19$, $l_2: 3x-5y=-30$, $l_3: 5x-4y=15$. Легко видеть, что нетривиаль-



ные ограничения вместе с условиями $x \ge 0, y \ge 0$ задают пятиугольник $OABCD$ с угловыми точками $O(0,0)$, $A(0,6)$, $B(5,9)$, $C(7,5)$ и $D(3,0)$. Далее, линиями уровня целевой функции z являются концентрические окружности $(x-16)^2+(y-12)^2=C$ с центром в точке $M(16,12)$, лежащей, очевидно, вне многоугольника $OABCD$. Поэтому минимальное значение функции z достигается в точке касания с отрезком BC окружности соответствующего радиуса. Найдем точку касания K как точку пересечения прямой l_1 и прямой m_1, перпендикулярной l_1 и проходящей через точку $M(16,12)$. Так как прямая l_1 определяется уравнением $2x+y=19$, а вектор нормали к ней, равный $\vec{n}=(2,1)$, является направляющим вектором для прямой m_1, то каноническим уравнением m_1 является $\frac{x-16}{2}=\frac{y-12}{1}$, а общим $x-2y=-8$. Точка пересечения $K=l_1 \cap m_1$ находится как решение системы

$$\begin{cases} 2x+y=19, \\ x-2y=-8. \end{cases} \Rightarrow K(6,7).$$

Таким образом, решением задачи является точка $\bar{x}^*=(6,7)$ и $z(\bar{x}^*)=z(6,7)=(6-16)^2+(7-12)^2=125$.

Проверим теперь, что точка $\bar{x}^* = (6,7)$ является решением системы, определяемой необходимыми и достаточными условиями экстремума. Перепишем систему ограничений в виде

$$\begin{cases} 2x + y \le 19, \\ 5y - 3x \le 30, \\ 5x - 4y \le 15, \\ -x \le 0, \\ -y \le 0, \end{cases}$$

и составим функцию Лагранжа

$$L(\bar{x}, \lambda) = (x-16)^2 + (y-12)^2 + \lambda_1(2x + y - 19) + \\ + \lambda_2(5y - 3x - 30) + \lambda_3(5x - 4y - 15) - \lambda_4 x - \lambda_5 y.$$

Теперь мы можем записать условия теоремы в виде системы:

$$\begin{cases} L'_x = 2(x-16) + 2\lambda_1 - 3\lambda_2 + 5\lambda_3 - \lambda_4 = 0, \\ L'_y = 2(y-12) + \lambda_1 + 5\lambda_2 - 4\lambda_3 - \lambda_5 = 0, \\ \lambda_1(2x + y - 19) = 0, \\ \lambda_2(5y - 3x - 30) = 0, \\ \lambda_3(5x - 4y - 15) = 0, \\ \lambda_4 x = 0, \\ \lambda_5 y = 0. \end{cases}$$

Подставляя $x = 6, y = 7$, немедленно убеждаемся, что $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 0$, и система в действительности является переопределенной и сводится к условиям

$$\begin{cases} -20 + 2\lambda_1 = 0, \\ -10 + \lambda_1 = 0, \end{cases}$$

откуда имеем, что $\lambda_1 = 10 \ge 0,$ т.е. для точки $\bar{x}^* = (6,7)$ условия теоремы выполнены.

Пример 5.2. Рассмотрим теперь другой метод решения задачи

$$\begin{cases} z=(x-16)^2+(y-12)^2 \to \min \\ 2x+y\le 19, \\ -5y+3x\ge -30, \\ 5x-4y\le 15, \\ x\ge 0, y\ge 0, \end{cases}$$

основанный на применении симплекс-метода. Сначала приведем систему нетривиальных ограничений к каноническому виду, т.е. введем балансовые неотрицательные переменные u_1, u_2, u_3, такие что

$$\begin{cases} 2x+y+u_1=19, \\ 5y-3x+u_2=30, \\ 5x-4y+u_3=15. \end{cases}$$

При этом получим, что $2x+y-19=-u_1$ и условие $\lambda_1(2x+y-19)=0$ переписывается в виде $\lambda_1 u_1=0$ и, аналогично, $\lambda_2 u_2=\lambda_3 u_3=0$. Таким образом, необходимые и достаточные условия экстремума для исходной задачи можно разделить на линейную часть (все входящие переменные неотрицательны)

$$\begin{cases} 2x+2\lambda_1-3\lambda_2+5\lambda_3-\lambda_4=32, \\ 2y+\lambda_1+5\lambda_2-4\lambda_3-\lambda_5=24, \\ 2x+y+u_1=19, \\ -3x+5y+u_2=30, \\ 5x-4y+u_3=15 \end{cases}$$

и нелинейную часть

$$\begin{cases} \lambda_1 u_1=\lambda_2 u_2=\lambda_3 u_3=0, \\ \lambda_4 x=\lambda_5 y=0. \end{cases}$$

Теперь с помощью метода искусственного базиса выделим в линейной части допустимый базис так, чтобы в заключительной симплекс-таблице в базис не вошли одновременно переменные, произведение которых в нелинейной части равно 0 (например, u_1 и λ_1). Этого, в зависимости от задачи, можно добиться двумя способами. Можно или следить на каждом шаге симплекс-метода, чтобы указанные пары переменных одновременно не оказались в базисе, или, получив заключительную симплекс-таблицу, сделать соответствующую замену базиса. Найденный допустимый базис и будет по теореме Куна-Таккера решением исходной задачи.

Итак, вводим искусственные переменные v_1, v_2 в первые два уравнения линейной части (в остальных выделен базис u_1, u_2, u_3), так что получаем систему

$$\begin{cases} 2x + 2\lambda_1 - 3\lambda_2 + 5\lambda_3 - \lambda_4 + v_1 = 32, \\ 2y + \lambda_1 + 5\lambda_2 - 4\lambda_3 - \lambda_5 + v_2 = 24, \\ 2x + y + u_1 = 19, \\ -3x + 5y + u_2 = 30, \\ 5x - 4y + u_3 = 15, \end{cases}$$

из которой выражаем

$$\begin{cases} v_1 = 32 - 2x - 2\lambda_1 + 3\lambda_2 - 5\lambda_3 + \lambda_4, \\ v_2 = 24 - 2y - \lambda_1 - 5\lambda_2 + 4\lambda_3 + \lambda_5, \end{cases}$$

и решаем задачу $F = v_1 + v_2 \to \min$. Исключая базисные переменные v_1, v_2 из F, имеем $F = v_1 + v_2 = 56 - 2x - 2y - 3\lambda_1 - 2\lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5$, или, для формирования симплекс-таблицы $F + 2x + 2y + 3\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_4 - \lambda_5 = 56$. Образуем симплекс-таблицу

базис	b_j	x	y	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	u_1	u_2	u_3	v_1	v_2
v_1	32	2	0	2	−3	5	−1	0	0	0	0	1	0
v_2	24	0	2	1	5	−4	0	−1	0	0	0	0	1
u_1	19	2	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
u_2	30	−3	5	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
u_3	15	5	−4	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
F	56	2	2	3	2	1	−1	−1	0	0	0	0	0

выведем из базиса v_1 и вводим в базис переменную λ_1. При этом условие $\lambda_1 u_1 = 0$ нарушается, но далее мы выведем из базиса u_1. Получим

базис	b_j	x	y	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	u_1	u_2	u_3	v_1	v_2
λ_1	16	1	0	**1**	$-3/2$	$5/2$	$-1/2$	0	0	0	0	$1/2$	0
v_2	8	-1	2	0	$13/2$	$-13/2$	$1/2$	-1	0	0	0	$-1/2$	1
u_1	19	2	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
u_2	30	-3	5	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
u_3	15	5	-4	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
F	8	-1	2	0	$13/2$	$-13/2$	$1/2$	-1	0	0	0	$-3/2$	0

Теперь выведем из базиса v_2 и введем в базис переменную y:

базис	b_j	x	y	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	u_1	u_2	u_3	v_1	v_2
λ_1	16	1	0	1	$-3/2$	$5/2$	$-1/2$	0	0	0	0	$1/2$	0
y	4	$-1/2$	**1**	0	$13/4$	$-13/4$	$1/4$	$-1/2$	0	0	0	$-1/4$	$1/2$
u_1	15	$5/2$	0	0	$-13/4$	$13/4$	$-1/4$	$1/2$	1	0	0	$1/4$	$-1/2$
u_2	10	$-1/2$	0	0	$-65/4$	$65/4$	$-5/4$	$5/2$	0	1	0	$5/4$	$-5/2$
u_3	31	3	0	0	13	-13	1	-2	0	0	1	-1	2
F	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1

Мы получили заключительную симплекс-таблицу и теперь необходимо сделать замену базиса так, чтобы были выполнены нелинейные ограничения. Для этого мы вводим в базис переменную x и, согласно правилам выбора разрешающего элемента, выводим из базиса u_1. Тем самым, условие $\lambda_1 u_1 = 0$ оказывается выполненным. Получаем симплекс-таблицу:

	b_j	x	y	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	u_1	u_2	u_3	v_1	v_2
λ_1	10	0	0	1	$-1/5$	$6/5$	$-2/5$	$-1/5$	$-2/5$	0	0	$2/5$	$1/5$
y	7	0	1	0	$13/5$	$-13/5$	$1/5$	$-2/5$	$1/5$	0	0	$-1/5$	$2/5$
x	6	**1**	0	0	$-13/10$	$13/10$	$-1/10$	$1/5$	$2/5$	0	0	$1/10$	$-1/5$
u_2	10	0	0	0	$-169/10$	$169/10$	$-13/10$	$13/5$	$1/5$	1	0	$13/10$	$-13/5$
u_3	13	0	0	0	$169/10$	$-169/10$	$13/10$	$-13/5$	$-6/5$	0	1	$-13/10$	$-13/5$
F	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1

Таким образом, выделен допустимый базис и оптимальная точка $\bar{x}^* = (6,7)$ получена.

Задачи для самостоятельного решения

Для следующих задач квадратичного программирования

а) найти оптимальное решение графическим методом;

б) для полученного решения проверить выполнение условий теоремы Куна-Таккера;

в) решить задачу с использованием метода искусственного базиса.

94. $z=(x-15)^2+(y-29)^2 \to \min$ при $x \ge 0, y \ge 0$ и $\begin{cases} 2x+7y \le 74, \\ -2y+x \ge -18, \\ 2x-5y \le 2 \end{cases}$

95. $z=(x-32)^2+(y-33)^2 \to \min$ при $x \ge 0, y \ge 0$ и $\begin{cases} x+y \le 17, \\ -y+6x \ge -3, \\ 3x-10y \le 12 \end{cases}$

96. $z=(x-24)^2+(y-30)^2 \to \min$ при $x \ge 0, y \ge 0$ и $\begin{cases} 2x+3y \le 34, \\ -y+2x \ge -6, \\ x-5y \le 4 \end{cases}$

97. $z=(x-24)^2+(y-30)^2 \to \min$ при $x \ge 0, y \ge 0$ и $\begin{cases} x+3y \le 33, \\ -6y+x \ge -48, \\ 7x-9y \le 21 \end{cases}$

5.2. Задача динамического программирования

Рассмотрим динамическую систему, которая последовательно, за n шагов, переходит из некоторого начального состояния $\bar{s}_0$ в конечное состояние $\bar{s}_n$. Промежуточные состояния $\bar{s}_i$ определяют состояния системы после i-ого шага. Как правило, состояния системы характеризуются несколькими числами, поэтому предполагается, что $\bar{s}_i$ являются векторами с m координатами, т.е. $\bar{s}_i = \left(s_i^1, s_i^2, \ldots, s_i^m\right)$. Переход системы из состояния $\bar{s}_{i-1}$ в состояние $\bar{s}_i$ определяется параметрами (*управлениями*) $\bar{u}_i$ $\left(i=1,\ldots,n\right)$

при помощи *уравнений состояний*

$$\bar{s}_i = F_i(\bar{s}_{i-1}, \bar{u}_i),$$

а эффективность каждого шага оценивается функциями $f_i(\bar{s}_{i-1}, \bar{u}_i)$. Таким образом, эффективность всего процесса характеризуется суммой

$$z_0 = f_1(\bar{s}_0, \bar{u}_1) + f_2(\bar{s}_1, \bar{u}_2) + \ldots + f_n(\bar{s}_{n-1}, \bar{u}_n),$$

а задача состоит в том, чтобы выбрать набор управлений $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_n$, оптимизирующий (далее предполагается, что решается задача на максимум) z_0:

$$z_0^* = z_0^*(\bar{s}_0) = \max_{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_n} z_0 .$$

Процесс решения разбивается на n шагов, для этого введем функцию

$$z_i(\bar{s}_i) = f_{i+1}(\bar{s}_i, \bar{u}_{i+1}) + f_{i+2}(\bar{s}_{i+1}, \bar{u}_{i+2}) + \ldots + f_n(\bar{s}_{n-1}, \bar{u}_n), \quad i = 0, \ldots, n-1,$$

которая характеризует эффективность перехода от состояния $\bar{s}_i$ к $\bar{s}_n$. Последовательно оптимизируя $z_{n-1}(\bar{s}_{n-1}), z_{n-2}(\bar{s}_{n-2}), \ldots, z_1(\bar{s}_1), z_0(\bar{s}_0)$ по формулам (называемым *уравнениями Беллмана*)

$$z_{n-1}^*(\bar{s}_{n-1}) = \max_{\bar{u}_n} f_n(\bar{s}_{n-1}, \bar{u}_n),$$

$$z_{n-2}^*(\bar{s}_{n-2}) = \max_{\bar{u}_{n-1}} \left[f_{n-1}(\bar{s}_{n-2}, \bar{u}_{n-1}) + z_{n-1}^*(\bar{s}_{n-1}) \right], \text{ где } \bar{s}_{n-1} = F_{n-1}(\bar{s}_{n-2}, \bar{u}_{n-1}),$$

$$z_{n-3}^*(\bar{s}_{n-3}) = \max_{\bar{u}_{n-2}} \left[f_{n-2}(\bar{s}_{n-3}, \bar{u}_{n-2}) + z_{n-2}^*(\bar{s}_{n-2}) \right], \text{ где } \bar{s}_{n-2} = F_{n-2}(\bar{s}_{n-3}, \bar{u}_{n-2}),$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$z_1^*(\bar{s}_1) = \max_{\bar{u}_2} \left[f_2(\bar{s}_1, \bar{u}_2) + z_2^*(\bar{s}_2) \right], \text{ где } \bar{s}_2 = F_2(\bar{s}_1, \bar{u}_2),$$

$$z_0^*(\bar{s}_0) = \max_{\bar{u}_1} \left[f_1(\bar{s}_0, \bar{u}_1) + z_1^*(\bar{s}_1) \right], \text{ где } \bar{s}_1 = F_1(\bar{s}_0, \bar{u}_1),$$

находим оптимальное решение задачи. Как видим, процесс решения задачи начинается с оптимизации последнего шага, что называется *обратным ходом* вычислений и свойственно многим задачам динамического программирования.

В качестве примера рассмотрим следующую задачу.

Пример 5.3. Планируется работа двух отраслей производства на 4 года. Начальные ресурсы составляют 10000 у.е. Средства x, вложенные в 1-ую отрасль в начале года, дают в конце года прибыль $f_1(x)=0.3x$ и возвращаются в размере $\varphi_1(x)=0.1x$. Аналогично для 2-ой отрасли прибыль составляет $f_2(x)=0.2x$, а возврат – $\varphi_2(x)=0.3x$. В конце каждого года возвращенные средства полностью распределяются между отраслями. Определить оптимальный план распределения средств и найти максимальную прибыль.

Решение. Ясно, что динамической системой являются две отрасли, состояния которых s_i определяются вложенными в них средствами, а управлениями $\bar{u}_i=\left(u_i^1,u_i^2\right)$ на i-ом году являются средства u_i^k, переданные k-ой отрасли. Так как возвращенные средства распределяются полностью, то имеет место условие $s_{i-1}=u_i^1+u_i^2 \;\Rightarrow\; u_i^2=s_{i-1}-u_i^1$, и фактически задача одномерна. Далее будем считать, что управление на i-ом году определяется числом $u_i=u_i^1$, т.е. средствами, выделенными первой отрасли. В силу того же условия уравнения состояний имеют вид

$$s_i=F(s_{i-1},u_i)=\varphi_1(u_i)+\varphi_2(s_{i-1}-u_i)=0.1u_i+0.3(s_{i-1}-u_i)=0.3s_{i-1}-0.2u_i,$$

а прибыль на i-ом году равна

$$f(s_{i-1},u_i)=f_1(u_i)+f_2(s_{i-1}-u_i)=0.3u_i+0.2(s_{i-1}-u_i)=0.2s_{i-1}-0.1u_i.$$

Решение задачи начинаем с оптимизации функции $z_3(s_3)$:

$$z_3^*(s_3)=\max_{0\le u_4\le s_3} f(s_3,u_4)=\max_{0\le u_4\le s_3}\left[f_1(u_4)+f_2(s_3-u_4)\right]=\max_{0\le u_4\le s_3}\left[0.2s_3-0.1u_4\right].$$

Для вычисления максимума заметим, что требуется найти максимум *линейной* функции на отрезке, поэтому, очевидно,

$$z_3^*(s_3)=\max_{0\le u_4\le s_3}\left[0.2s_3-0.1u_4\right]=0.2s_3 \text{ при } u_4^*=0.$$

Далее,

$$z_2^*(s_2)=\max_{0\le u_3\le s_2}\left[f(s_2,u_3)+z_3^*(s_3)\right]=\max_{0\le u_3\le s_2}\left[0.2s_2-0.1u_3+0.2s_3\right]=$$

$$=\max_{0\le u_3\le s_2}\left[0.2s_2-0.1u_3+0.2(0.3s_2-0.2u_3)\right]=\max_{0\le u_3\le s_2}\left[0.26s_2-0.14u_3\right]=0.26s_2 \text{ при } u_3^*=0,$$

$$z_1^*(s_1)=\max_{0\le u_2\le s_1}\left[f(s_1,u_2)+z_2^*(s_2)\right]=\max_{0\le u_2\le s_1}\left[0.2s_1-0.1u_2+0.26s_2\right]=$$

$$=\max_{0\le u_2\le s_1}\left[0.2s_1-0.1u_2+0.26(0.3s_1-0.2u_2)\right]=\max_{0\le u_3\le s_2}\left[0.278s_2-0.152u_2\right]=0.278s_1 \text{ при } u_2^*=0,$$

$$z_0^*(s_0)=\max_{0\le u_1\le s_0}\left[f(s_0,u_1)+z_1^*(s_1)\right]=\max_{0\le u_1\le s_0}\left[0.2s_0-0.1u_1+0.278s_1\right]=$$

$$=\max_{0\le u_1\le s_0}\left[0.2s_0-0.1u_1+0.278(0.3s_0-0.2u_1)\right]=\max_{0\le u_1\le s_0}\left[0.2834s_0-0.1556u_1\right]=0.2834s_0 \text{ при}$$

$u_1^*=0$.

Таким образом, поскольку $u_1^*=u_2^*=u_3^*=u_4^*=0$, то средства каждый год вкладывались во вторую отрасль, и $s_1=\varphi_2(s_0)=0.3s_0=3000$, $s_2=\varphi_2(s_1)=0.3s_1=900$, $s_3=\varphi_2(s_2)=0.3s_2=270$, $s_4=\varphi_2(s_3)=0.3s_3=81$, а максимальная прибыль равна $z_0^*(s_0)=0.2834s_0=2834$. Полученные результаты можно записать в виде таблицы, в которой по годам расписано распределение средств

	1 год	2 год	3 год	4 год
I	0	0	0	0
II	3000	900	270	81

Задачи для самостоятельного решения

Планируется действие двух отраслей производства на 4 года. Начальные ресурсы 10000 у.е. Средства x, вложенные в 1-ую отрасль в начале года, дают в конце года прибыль $f_1(x)$ и возвращаются в размере $\varphi_1(x)$. Средства y, вложенные во 2-ую отрасль в начале года, дают в конце года прибыль $f_2(y)$ и возвращаются в размере $\varphi_2(y)$. В конце года возвращенные средства заново перераспределяются между отраслями. Определить оптимальный план распределения средств и найти максимальную прибыль, если

98. $f_1(x)=0.9x$, $\varphi_1(x)=0.7x$, $f_2(y)=0.8y$, $\varphi_2(y)=0.9y$.

99. $f_1(x) = 0.7x$, $\varphi_1(x) = 0.2x$, $f_2(y) = 0.6y$, $\varphi_2(y) = 0.4y$.

100. $f_1(x) = 0.3x$, $\varphi_1(x) = 0.1x$, $f_2(y) = 0.2y$, $\varphi_2(y) = 0.3y$.

101. $f_1(x) = 0.5x$, $\varphi_1(x) = 0.6x$, $f_2(y) = 0.7y$, $\varphi_2(y) = 0.4y$.

Ответы

4. $\begin{cases} z = x_3 - 6x_4 \to \max \\ 7x_3 - 9x_4 \le -6, \\ 5x_3 - 6x_4 \le -3, \\ x_3 \ge 0, x_4 \ge 0. \end{cases}$ **5.** $\begin{cases} 27x_3 - 17x_4 + 30 \to \min \\ -6x_3 + 5x_4 \le 7, \\ -9x_3 + 6x_4 \le 10, \\ x_3 \ge 0, x_4 \ge 0. \end{cases}$ **6.** $\begin{cases} -28x_3 - 45x_4 - 42 \to \max \\ 7x_3 + 11x_4 \le -10 \\ -8x_3 - 13x_4 \le 12 \\ x_3 \ge 0, x_4 \ge 0. \end{cases}$

7. $z_{\max} = z(5,10) = 50$, $z_{\min} = z(4,1) = 19$. **8.** $z_{\max} = z(3,8) = 7$, $z_{\min} = z(8,3) = -18$.

9. $z_{\max} = z(3,3) = -21$, $z_{\min} = z(5,13) = -59$. **10.** $z_{\max} = z(10,1) = 7$, $z_{\min} = z(12,10) = -18$.

11. $z_{\max} = +\infty$, $z_{\min} = z(4,6) = 16$. **12.** $z_{\max} = z(11,8) = -57$, $z_{\min} = -\infty$.

13. $z_{\max} = +\infty$, $z_{\min} = z(0,1,3,0,7) = -2$. **14.** $z_{\max} = z(3,0,1,0) = 27$, $z_{\min} = z(2,1,0,0) = 25$.

15. $z_{\max} = z(2,0,8,0,1) = 5,$ $z_{\min} = z(X^*) = -4$, где $X^* = (4-4t, 2t+3, 0, 5-2t, 10t), t \in [0,1]$

16. $z_{\max} = z(0,9,0,12) = 40$, $z_{\min} = z(X^*) = 16$, где $X^* = (6+2t, t, 3-3t, 0), t \in [0,1]$.

17. $z_{\max} = z(X^*) = 40$, где $X^* = (6+3t, 4+t, 0, 5t), t \ge 0$, $z_{\min} = -\infty$.

18. $z_{\max} = z(8,13,0,0,65) = 8$, $z_{\min} = z(11,8,65,0,0) = -187$. **19.** $z_{\max} = z(1,0,3,0,1) = 26$.
20. $z_{\min} = z(2,6,33,0,0) = 11$. **21.** $z_{\min} = z(2,5,0,0,17) = 10$. **22.** $z_{\max} = z(6,7,3,0) = 29$.
23. $z_{\min} = z(X^*) = -7$, где $X^* = (3t, 0, 3-3t, 5-3t), t \in [0,1]$.
24. $z_{\max} = z(X^*) = 12$, где $X^* = \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2}t, 2+2t, 4t, 4+8t\right), t \in [0,1]$. **25.** $z_{\min} = z(1,0,0,4) = -4$.
26. $z_{\max} = z(0,1,1,1,0) = 19$. **27.** $z_{\max} = z(0,0,2,2,2) = 4$. **28.** $z_{\min} = z(0,0,12,1,3) = -34$.
29. $z_{\max} = z(1,0,3,0,3) = 40$. **30.** $z_{\min} = z(0,0,2,12,6) = 1$. **31.** $z_{\max} = z(2,1,0,5,0) = 36$.
36. $z_{\min} = z(2,1,0) = 156$. **37.** $z_{\min} = z(3,2,0) = 11$. **38.** $z_{\min} = z(2,1,0) = 148$.
39. $z_{\min} = z(1,1,0) = 34$. **40.** $z_{\min} = z(3,1,0) = 67$. **41.** $z_{\min} = z(3,2,0) = 12$.
42. $z_{\max} = z(0,0,7,0,1) = T(3,\frac{7}{2}) = 29$. **43.** $z_{\max} = z(1,0,7,0,0) = T(1,0) = 17$.
44. $z_{\max} = z(0,7,0,10,0) = T(2,1) = 26$. **45.** $z_{\max} = z(6,0,0,0,1) = T(1,\frac{6}{5}) = 33$.
46. $z_{\max} = z(10,0,2,0,0) = T(11,10) = 642$. **47.** $z_{\max} = z(0,24,0,3,0) = T(13,\frac{98}{5}) = 335$.
48. $z_{\max} = z(3,5) = 47$. **49.** $z_{\min} = z(5,0) = 17$. **50.** $z_{\min} = z(0,19) = 23$.
51. $z_{\min} = z(2,6) = 40$. **52.** $z_{\max} = z(1,2,1,2,1) = 6$. **53.** $z_{\max} = z(0,1,2,14) = 50$.
54. $z_{\max} = z(1,0,0,3,1) = 11$. **55.** $z_{\max} = z(1,1,0,1,0) = -9$. **56.** $z_{\max} = z(0,4,0,2,1) = -16$.
57. $z_{\max} = z(3,2,1,0,0) = 32$. **58.** $z_{\max} = z(0,0,0,2,3) = -21$.
59. $z_{\max} = z(17/6, 0, 5/6, 0, 1) = 5/2$.
60. $z_{\max} = z(3,4) = 26$. **61.** $z_{\max} = z(5,7) = 51$. **62.** $z_{\max} = z(1,1) = 13$.
63. $z_{\max} = z(1,1) = 12$. **64.** $z_{\max} = z(2,2) = 29$. **65.** $z_{\max} = z(1,2) = -3$.

74. $X^* = \begin{pmatrix} 0 & 60 & 0 & 100 \\ 60 & 0 & 0 & 0 \\ 20 & 0 & 60 & 100 \end{pmatrix}, z(X^*) = 1880$. **75.** $X^* = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 0 & 70 \\ 50 & 0 & 0 & 0 \\ 50 & 0 & 40 & 90 \end{pmatrix}, z(X^*) = 3420$.

76. $X^* = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 0 & 80 \\ 60 & 0 & 0 & 0 \\ 20 & 30 & 90 & 0 \end{pmatrix}, z(X^*) = 2750$. **77.** $X^* = \begin{pmatrix} 0 & 70 & 0 & 90 \\ 30 & 0 & 30 & 20 \\ 70 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, z(X^*) = 3300$.

78. $X^* = \begin{pmatrix} 0 & 50 & 0 & 20 \\ 60 & 0 & 0 & 0 \\ 30 & 0 & 100 & 10 \end{pmatrix}, z(X^*) = 2530$. **79.** $X^* = \begin{pmatrix} 30 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 30 & 100 \\ 20 & 70 & 0 & 30 \end{pmatrix}, z(X^*) = 2990$.

80. $X^* = \begin{pmatrix} 80 & 0 & 0 & 40 \\ 0 & 20 & 70 & 50 \\ 0 & 70 & 0 & 0 \end{pmatrix}, z(X^*) = 4060$. **81.** $X^* = \begin{pmatrix} 0 & 50 & 0 & 100 \\ 70 & 0 & 0 & 0 \\ 70 & 0 & 100 & 40 \end{pmatrix}, z(X^*) = 4720$.

82. $X^* = \begin{pmatrix} 0 & 80 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 100 \\ 90 & 0 & 30 & 50 \end{pmatrix}, z(X^*) = 3380$. **83.** $X^* = \begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 & 35 \\ 75 & 0 & 50 & 0 \\ 0 & 75 & 0 & 0 \end{pmatrix}, z(X^*) = 780$.

84. $X^* = \begin{pmatrix} 40 & 0 & 35 & 0 \\ 0 & 0 & 35 & 115 \\ 0 & 70 & 20 & 0 \end{pmatrix}, z(X^*) = 1750$. **85.** $X^* = \begin{pmatrix} 0 & 45 & 0 & 50 \\ 0 & 65 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 85 & 45 \end{pmatrix}, z(X^*) = 1535$.

86. $X^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 85 & 0 \\ 60 & 0 & 0 & 90 \\ 0 & 95 & 0 & 0 \end{pmatrix}, z(X^*) = 1560$. **87.** $X^* = \begin{pmatrix} 80 & 0 & 40 & 0 \\ 0 & 30 & 0 & 50 \\ 0 & 70 & 0 & 0 \end{pmatrix}, z(X^*) = 1040$.

88. $X^* = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 90 & 0 \\ 0 & 100 & 0 & 0 \\ 70 & 10 & 0 & 120 \end{pmatrix}, z(X^*) = 2430$. **89.** $X^* = \begin{pmatrix} 30 & 20 & 0 & 70 \\ 0 & 90 & 0 & 0 \\ 65 & 0 & 80 & 35 \end{pmatrix}, z(X^*) = 4315$.

90. $X^* = \begin{pmatrix} 75 & 35 & 40 & 0 \\ 0 & 110 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & 50 & 60 \end{pmatrix}, z(X^*) = 3145$. **91.** $X^* = \begin{pmatrix} 20 & 50 & 0 & 70 \\ 0 & 80 & 0 & 25 \\ 40 & 0 & 55 & 20 \end{pmatrix}, z(X^*) = 3160$.

92. $X^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 20 & 50 \\ 20 & 40 & 110 & 0 \\ 70 & 20 & 30 & 20 \end{pmatrix}, z(X^*) = 5070$. **93.** $X^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 50 & 40 \\ 40 & 75 & 25 & 15 \\ 60 & 0 & 0 & 65 \end{pmatrix}, z(X^*) = 2995$.

94. $z_{\min} = z(9,8) = 477$. **95.** $z_{\min} = z(8,9) = 1152$. **96.** $z_{\min} = z(8,6) = 832$.

97. $z_{\min} = z(9,8) = 10$.

Рекомендуемая литература

1. *И.Л. Акулич*. Математическое программирования в примерах и задачах. — М.: Высшая школа, 1993.

2. *Александрова И.А.*, *Гончаренко В.М.* Методы оптимальных решений. Руководство к решению задач. М.: Финуниверситет, 2012.

3. Методы оптимальных решений в экономике и финансах: учебник / И. А. Александрова [и др.]; под ред. В. М. Гончаренко, В. Ю. Попова. М.: Кнорус, 2017.

4. *Винюков И. А.*, *Попов В. Ю.*, *Пчелинцев С. В.* Линейная алгебра. Ч. 4: Линейное программирование: учебное пособие для подготовки бакалавров. М.: Финуниверситет, 2013.

5. *Гончаренко В.М., Керимов А.К., Попов В.Ю.* Линейные модели оптимизации. М.: Финуниверситет, 2014.

6. *Интрилигатор М.* Математические методы оптимизации и экономическая теория. М.: Айрис-Пресс, 2002.

7. *Колемаев В. А.* Математические методы и модели исследования операций. Учебник. М.: ЮНИТИ, 2008.

8. *Красс М. С.*, *Чупрынов Б. П.* Основы математики и ее приложения в экономическом образовании. М.: Дело, 2002.

9. Исследование операций в экономике: учеб. пособие для вузов / Н. Ш. Кремер, Б. А. Путко, И. М. Тришин, М. Н. Фридман; под ред. Н. Ш. Кремера. 3-е изд., перераб. и доп. М.: Юрайт, 2014.

10. *Набатова Д.С.* Математические и инструментальные методы поддержки принятия решений. М.: Юрайт, 2015.

11. *А.С. Солодовников, В.А. Бабайцев, А.В. Браилов, И.Г. Шандра*. Математика в экономике: Учебник для вузов, Ч. 1, 2. — М.: Финансы и статистика, 2007.