Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Δ.Π.Μ.Σ. Συστήματα Αυτοματισμού

Κατεύθυνση Β:

Συστήματα Αυτομάτου Ελέγχου και Ρομποτικής

<u>Μεταπτυχιακό Μάθημα</u>:

Εργαστήριο Ρομποτικής

Ομάδα 4

Τέταρτη Εργαστηριακή Άσκηση

Κινηματικός Έλεγχος Ρομποτικού Χειριστή: Παρακολούθηση Τροχιάς

(Robotic Manipulator: Path Planning)

<u>Μέλη Ομάδας – Α.Μ.:</u>

Ειρήνη – Μαρία Γεωργαντά – 02121201

Γεώργιος Κασσαβετάκης – 02121203

Γεώργιος Κρομμύδας – 02121208

Φραντζιέσκα Μιχαήλ – 02121216

ΑΘΗΝΑ

2023

Πίνακας περιεχομένων

Κατάλογος Σχημάτων 3

Κατάλογος Πινάκων 4

Εισαγωγή 5

1. Θεωρητική Ανάλυση Ρομποτικού Χειριστή 7

1.1 Σχεδίαση Τροχιάς στον καρτεσιανό χώρο 7

1.2 Έλεγχος Θέσης με Χρήση Τριών Περιστροφικών Αρθρώσεων 11

1.2.1 Ευθύ Κινηματικό Μοντέλο Ρομποτικού Χειριστή 12

1.2.2 Αντίστροφο Κινηματικό Μοντέλο Ρομποτικού Χειριστή 21

1.3 Πλήρης Κινηματικός Έλεγχος Με Χρήση Όλων των Αρθρώσεων 23

1.3.1 Ιακωβιανή Μήτρα Ρομποτικού Χειριστή 23

2. Προσομοίωση και Προγραμματισμός Ρομποτικού Χειριστή 43

2.1 Προσομοίωση Πρώτης Διεργασίας Ελέγχου 43

2.2 Προσομοίωση Δεύτερης Διεργασίας Ελέγχου 48

Βιβλιογραφία 60

Κατάλογος Σχημάτων

Σχήμα 1. Ρομποτικός χειριστής Cobot xArm 7. 5
Σχήμα 2. Θέσεις αρθρώσεων ρομποτικού χειριστή xArm 7. 6
Σχήμα 3. Εκτέλεση απαιτούμενης διαδικασίας Ρομποτικού χειριστή xArm 7. 6
Σχήμα 4. Επιθυμητές τροχιές για το τελικό στοιχείο δράσης του ρομποτικού χειριστή. 11
Σχήμα 5. Πλαίσια βραχίονα κατά Denavit Hartenberg 12
Σχήμα 6. Γράφος αλγορίθμου ελέγχου τριών βαθμών ελευθερίας. 44
Σχήμα 7. Προσομοίωση τελικού στοιχείου δράσης ρομποτικού χειριστή xarm7: (α) Άξονας p_x, (β) Άξονας p_y, (γ) Άξονας p_z 46
Σχήμα 8. Προσομοίωση ενεργών αρθρώσεων ρομποτικού χειριστή xarm7: (α) Άρθρωση περιστροφής q_1, (β) Άρθρωση περιστροφής q_2, (γ) Άρθρωση περιστροφής q_3. 47
Σχήμα 9. Μπλοκ διάγραμμα αντίστροφου διαφορικού κινηματικού ελέγχου. 48
Σχήμα 10. Γράφος αλγορίθμου ελέγχου επτά βαθμών ελευθερίας. 50
Σχήμα 11. Θέση τελικού στοιχείου δράσης κατά την προσομοίωση: (α) Άξονας p_x, (β) Άξονας p_y, (γ) Άξονας p_z 52
Σχήμα 12. Προσανατολισμός τελικού στοιχείου δράσης κατά την προσομοίωση: (α) Άξονας e_x, (β) Άξονας e_y, (γ) Άξονας e_z 53
Σχήμα 13. Γραμμική ταχύτητα τελικού στοιχείου δράσης: (α) Άξονας v_x, (β) Άξονας v_y, (γ) Άξονας v_z 55
Σχήμα 14. Γωνιακή ταχύτητα τελικού στοιχείου δράσης: (α) Άξονας ω_x, (β) Άξονας ω_y, (γ) Άξονας ω_z 56
Σχήμα 15. Γωνίες περιστροφικών αρθρώσεων κατά την προσομοίωση: (α) Άρθρωση περιστροφής q_1, (β) Άρθρωση περιστροφής q_2, (γ) Άρθρωση περιστροφής q_3, (δ) Άρθρωση περιστροφής q_4, (ε) Άρθρωση περιστροφής q_5, (στ) Άρθρωση περιστροφής q_6, (ζ) Άρθρωση περιστροφής q_7 59

Κατάλογος Πινάκων

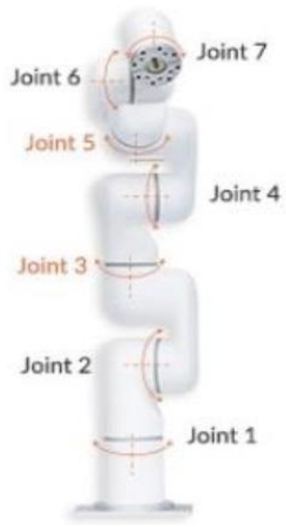
Πίνακας 1. Πίνακας παραμέτρων κατά εναλλακτικό DH. 12

Εισαγωγή

Τα ***cobots*** (***collaborative robots***) είναι ρομποτικοί μηχανισμοί που προσδιορίζονται για την απευθείας και ασφαλή αλληλεπίδραση με ανθρώπους, σε αντίθεση με τις κλασσικές βιομηχανικές διατάξεις (***industrial robots***) οι οποίες είναι σχεδιασμένες να λειτουργούν αυτόνομα, απομονωμένα από την ανθρώπινη παρουσία. Αυτό επιτυγχάνεται μέσω των αισθητήρων με τους οποίους έχουνε εξοπλιστεί, τον περιορισμό στην ταχύτητα λειτουργίας, ή στην ασκούμενη δύναμη, αλλά και λόγω των ιδιοτήτων σχετικών με το υλικό κατασκευής τους, κλπ. Παράλληλα, το κόστος τους παραμένει χαμηλό, με αποτέλεσμα να είναι μία προσιτή λύση για μικρομεσαίες επιχειρήσεις. Οι βραχίονες αυτοί, εκτός από τα πανεπιστημιακά κέντρα, χρησιμοποιούνται και στην βιομηχανία ως επιμέρους συστήματα σε γραμμές παραγωγής. Επίσης, πλην του χαμηλού τους κόστους, έχουν και άλλο ένα πλεονέκτημα. Προγραμματίζονται και ελέγχονται εύκολα από το λογισμικό ανάπτυξης ρομποτικών εφαρμογών ***Robot Operating System*** (***ROS***).

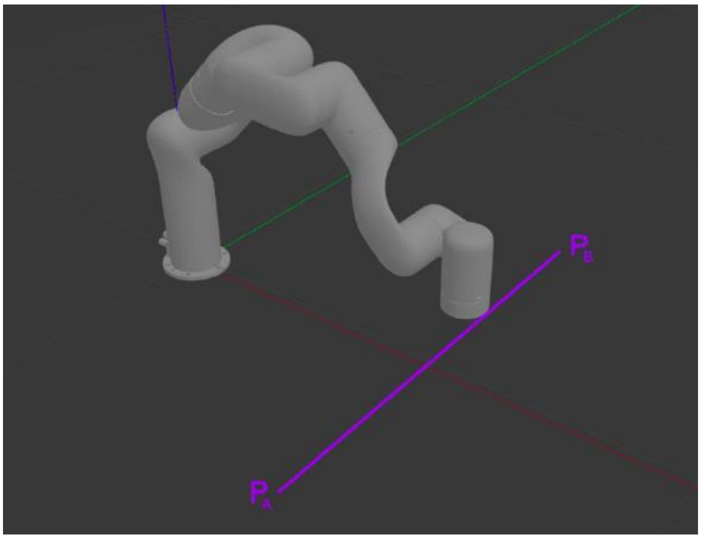
Σχήμα 1. Ρομποτικός χειριστής Cobot xArm 7.

Ένα τέτοιο ρομπότ είναι το ***xArm 7*** (βλ. σχήμα 1). Το συγκεκριμένο ρομπότ δίνει την δυνατότητα 3.5 kg ωφέλιμου φορτίου να σηκωθεί, ο χώρος εργασίας του εκτείνεται στα 70 cm από τη βάση του και πετυχαίνει μέγιστη ταχύτητα 1 m/s στο τελικό στοιχείο δράσης. Επιπλέον, η ρομποτική διάταξη αυτή αποτελείται από 7 βαθμούς ελευθερίας (***DoFs***), δηλαδή έχει επτά αρθρώσεις το σύστημα (βλ. σχήμα 2).



Σχήμα 2. Θέσεις αρθρώσεων ρομποτικού χειριστή xArm 7.

Στόχος της παρούσας εργασίας είναι ο κινηματικός έλεγχος και προγραμματισμός του ρομπότ. Θα εφαρμοστούν δύο διαφορετικοί κινηματικοί έλεγχοι ως προς το πλήθος των αρθρώσεων, με διαφορετικές μεθόδους. Συγκεκριμένα, η πρώτη μέθοδος αποτελεί την παρακολούθηση μια τροχιάς από ένα σημείο p_A σε ένα σημείο p_B (βλ. σχήμα 3) με την επενέργηση τριών αρθρώσεων (q_1, q_2 $και$ q_4). Η διεργασία αυτή απαιτεί τον υπολογισμό του αντίστροφου κινηματικού μοντέλου. Η δεύτερη μέθοδος είναι πανομοιότυπη μα την πρώτη, με την μόνη διαφορά πως εφαρμόζεται πλήρης κινηματικός έλεγχος, με την χρήση της ψευδοαντίστροφης ιακωβιανής μήτρας.



Σχήμα 3. Εκτέλεση απαιτούμενης διαδικασίας Ρομποτικού χειριστή xArm 7.

1. Θεωρητική Ανάλυση Ρομποτικού Χειριστή

1.1 Σχεδίαση Τροχιάς στον καρτεσιανό χώρο

Η σχεδιαζόμενη τροχιά στον χώρο εργασίας (*workspace*) προϋποθέτει την εύρεση μίας παραμετρικής έκφρασης της καμπύλης της οποίας θα ακολουθήσει το τελικό στοιχείο δράσης (*end effector)*. Στα πλαίσια της σχεδίασης τροχιάς θα γίνει αρχικά η διαδικασία ως προς την θέση του το τελικού στοιχείου δράσης (*end effector)*, ενώ στην συνέχεια θα γίνει μία παρόμοια διαδικασία για τον προσανατολισμό.

Η καμπύλη που αφορά την θέση και καλείται να ακολουθηθεί στην παρούσα εργασία είναι μία γραμμική περιοδική κίνηση. Η παραμετροποίηση της καμπύλης ευθείας γραμμής εκφράζεται από την σχέση:

$$P(s) = P_i + s(P_f - P_i)$$

Στην παραπάνω σχέση, P_i και P_f ορίζονται τα αρχικά σημεία και $\|P_f - P_i\|$ η ευκλείδεια νόρμα ή απόσταση των δύο σημείων. Η παράμετρος της σχέσης s παίρνει τιμές από 0 έως 1. Είναι εύκολα αντιληπτό ότι $P(0) = P_i$ και $P(1) = P_f$. Επιπλέον, η ταχύτητα και η επιτάχυνση επάνω στην ευθεία αυτήν προκύπτουν σύμφωνα με τις σχέσεις:

$$\begin{cases} \dfrac{dP(s)}{dt} = \dot{s}(P_f - P_i) \\ \dfrac{d^2P(s)}{dt^2} = \ddot{s}(P_f - P_i) \end{cases}$$

Με βάση τα παραπάνω, η σχεδίαση τροχιάς ανάγεται στην σχεδίαση τροχιάς της παραμέτρου $s(t)$ με μία από τις μεθόδους σχεδίασης τροχιάς όπως πολυώνυμο τρίτου βαθμού, πολυώνυμο πέμπτου βαθμού, παραβολική μίξη και τροχιά τριών φάσεων. Επιπλέον, χρησιμοποιώντας την ταχύτητα και την επιτάχυνση μπορούν μέσω των προδιαγραφών της τροχιάς να προσδιορισμού οι κατάλληλες αρχικές και τελικές συνθήκες για την σχετική σχεδίαση.

Στην εργασία ζητείται η σχεδίαση μίας τροχιάς η οποία θα διαθέτει συνεχή πρώτη παραγωγό (γραμμική ταχύτητα), το οποίο επιτρέπει την χρήση όλων των τρόπων σχεδίασης που έχουν αναφερθεί. Η παραγόμενη τροχιά της εκάστοτε γραμμικής κίνησης επιπλέον ικανοποιεί τις προδιαγραφές:

1. Τα αρχικά και τελικά σημεία αντιστοιχούν στις χρονικές στιγμές $t = 0$ και $t = \frac{T}{2}$
2. Η αρχική και η τελική ταχύτητα είναι μηδενική
3. Η θέση και η ταχύτητα είναι συνεχείς συναρτήσεις

Με βάση τις παραπάνω προδιαγραφές, επιλέχθηκε η χρήση τροχιάς παραβολικής μίξης (τραπεζοειδής ταχύτητα) για την παράμετρο $s(t)$. Η τροχιά αυτή αποτελείται από μία φάση επιτάχυνσης (χρήση σταθερής επιτάχυνσης), μία φάση σταθερής ταχύτητας (χρήση πολυωνύμου 1ου βαθμού) και μία φάση επιβράδυνσης (χρήση σταθερής επιτάχυνσης). Πιο αναλυτικά, η τροχιά της παραβολικής μίξης ως προς το $s(t)$ εκφράζεται από τις εξισώσεις:

$$s(t) = \begin{cases} s_0 + \frac{a}{2}(t - t_0)^2, & t_0 \le t \le t_0 + \Delta \\ \frac{s_0 + s_f - V(t_f - t_0)}{2} + V(t - t_0), & t_0 + \Delta \le t \le t_f - \Delta \\ s_f - \frac{a(t_f - t_0)^2}{2} + a(t_f - t_0)(t - t_0) - \frac{a}{2}(t - t_0)^2, & t_f - \Delta \le t \le t_f \end{cases}$$

Στην παραπάνω σχέση παρουσιάζονται οι ποσότητες V, a, οι οποίες αποτελούν την ταχύτητα του δεύτερη τμήματος της τροχιάς και την επιτάχυνση-επιβράδυνση του πρώτου και του τρίτου τμήματος αντίστοιχα. Αυτές προκύπτουν από τις σχέσεις:

$$V = \frac{s_f - s_0}{t_f - t_0 - \Delta}$$

$$\alpha = \frac{V}{\Delta}$$

Η ζητούμενη τροχιά αποτελείται από δύο επιμέρους τροχιές, μία κίνηση από το σημείο P_i στο P_f και μία αντίστροφα. Για να επιτευχθεί αυτό, χρησιμοποιείται η εξίσωση που δίνεται ως $s(t)$ με τα αντίστοιχα s_0, s_f, t_0, t_f. Έτσι, η τροχιά θα προσδιοριστεί σε δύο βήματα, ακολουθώντας την σχέση:

$$
s(t) = \begin{cases} s_1(t), & 0 \le t \le \dfrac{T}{2} \\ s_2(t), & \dfrac{T}{2} \le t \le T \end{cases}
$$

Για το πρώτο μέρος της περιοδικής κίνησης (από το P_i στο P_f) χρησιμοποιούνται τα $s_0 = 0, s_f = 1, t_0 = 0, t_f = \frac{T}{2}$. Επιπλέον, υπολογίζοντας τις σταθερές $V_1 = \frac{1}{\frac{T}{2} - \Delta}$ και $\alpha_1 = \frac{V_1}{\Delta}$ προκύπτει η τροχιά της παραμέτρου $s(t)$ όπως δίνεται από την σχέση:

$$
s_1(t) = \begin{cases} \dfrac{a_1}{2} t^2, & 0 \le t \le \Delta \\ \dfrac{1}{2} - \dfrac{T}{4} V_1 + V_1 t, & \Delta \le t \le \dfrac{T}{2} - \Delta \\ 1 - \dfrac{\alpha_1 T^2}{8} + \dfrac{\alpha_1 T}{2} t - \dfrac{a_1}{2} t^2, & \dfrac{T}{2} - \Delta \le t \le \dfrac{T}{2} \end{cases}
$$

Για το δεύτερο μέρος της περιοδικής κίνησης (από το P_f στο P_i) χρησιμοποιούνται τα $s_0 = 1, s_f = 0, t_0 = \frac{T}{2}, t_f = T$. Τότε, με σταθερές τις $V_2 = -\frac{1}{\frac{T}{2} - \Delta}$ και $\alpha_2 = \frac{V_2}{\Delta}$ προκύπτει η τροχιά της παραμέτρου $s(t)$ όπως δίνεται από την σχέση:

$$
s_2(t) = \begin{cases} 1 + \dfrac{a_2}{2}\left(t - \dfrac{T}{2}\right)^2, & \dfrac{T}{2} \le t \le \dfrac{T}{2} + \Delta \\ \dfrac{1 - \dfrac{V_2 T}{2}}{2} + V_2\left(t - \dfrac{T}{2}\right), & \dfrac{T}{2} + \Delta \le t \le T - \Delta \\ -\dfrac{a_2 T^2}{8} + \dfrac{a_2 T}{2}\left(t - \dfrac{T}{2}\right) - \dfrac{a_2}{2}\left(t - \dfrac{T}{2}\right)^2, & T - \Delta \le t \le T \end{cases}
$$

Έτσι, χρησιμοποιώντας ότι $V_1 = -V_2 = V = \frac{1}{\frac{T}{2} - \Delta}$ και $\alpha_1 = -\alpha_2 = \alpha = \frac{V}{\Delta}$, συνοψίζοντας προκύπτει για δεδομένα T και Δ η συνολική τροχιά για μία περίοδο κίνησης ως:

$$
s(t) = \begin{cases}
\dfrac{a}{2}t^2, & 0 \le t \le \Delta \\
\dfrac{1}{2} - \dfrac{T}{4}V + Vt, & \Delta \le t \le \dfrac{T}{2} - \Delta \\
1 - \dfrac{\alpha T^2}{8} + \dfrac{\alpha T}{2}t - \dfrac{a}{2}t^2, & \dfrac{T}{2} - \Delta \le t \le \dfrac{T}{2} \\
1 - \dfrac{\alpha}{2}\left(t - \dfrac{T}{2}\right)^2, & \dfrac{T}{2} \le t \le \dfrac{T}{2} + \Delta \\
\dfrac{2 + VT}{4} - V\left(t - \dfrac{T}{2}\right), & \dfrac{T}{2} + \Delta \le t \le T - \Delta \\
\dfrac{aT^2}{8} - \dfrac{aT}{2}\left(t - \dfrac{T}{2}\right) + \dfrac{a}{2}\left(t - \dfrac{T}{2}\right)^2, & T - \Delta \le t \le T
\end{cases}
$$

Επιπλέον έγινε η επιλογή της περιόδου κίνησης $T = 20\,sec$ ($t_f = 10\,sec$ για κάθε επιμέρους γραμμική κίνηση) και του χρονικού διαστήματος επιτάχυνσης και επιβράδυνσης $\Delta = 1\,sec$. Τέλος, με βάση την εκφώνηση επιπλέον προκύπτουν τα αρχικά και τελικά σημεία της κίνησης ως $P_i = [0.6043 \quad -0.200 \quad 0.1508]^T$ και $P_f = [0.6043 \quad 0.200 \quad 0.1508]^T$, εκφρασμένα σε m.

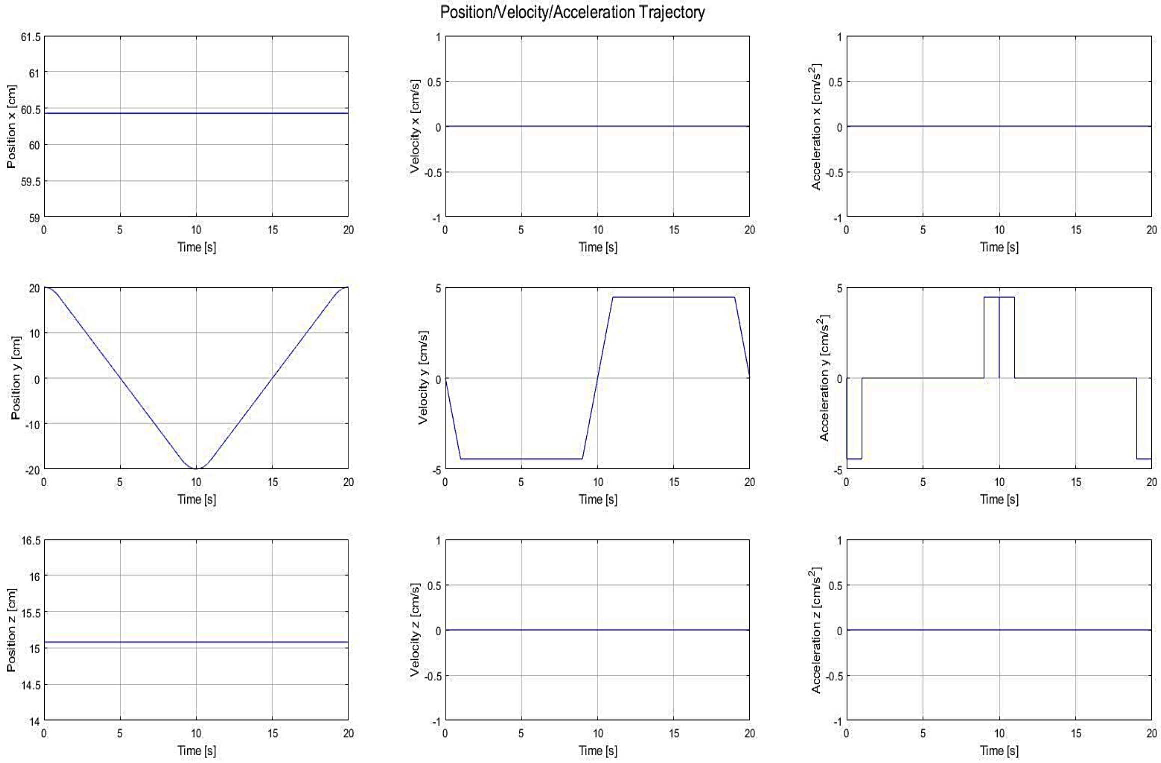
Οι παραπάνω παράμετροι και εξισώσεις τροχιάς επαρκούν για τον έλεγχο μέσω του αντίστροφου κινηματικού, όπως αυτό θα γίνει αρχικά. Για τον έλεγχο ταυτόχρονα της θέσης και του προσανατολισμού, όπως αυτό θα γίνει σε δεύτερη φάση, είναι απαραίτητος ο προσδιορισμός επιπλέον τροχιών για τον προσανατολισμό. Ορίζοντας τις γωνίες *Euler XYZ* ως $\varphi(\alpha, \beta, \gamma)$, μπορεί να σχεδιαστεί μία συνεχής ως προς την ταχύτητα περιστροφής τροχιά που να μεταβάλλει τον προσανατολισμό από το φ_i στο φ_f.

Η διαδικασία σχεδίασης της τροχιάς προσανατολισμού γίνεται όμοια με αυτήν της θέσης. Πιο αναλυτικά, γίνεται η παραμετροποίηση που εκφράζεται από την σχέση:

$$\varphi(s) = \varphi_i + s'(\varphi_f - \varphi_i)$$

Ο προσδιορισμός αυτός επιλέχθηκε να ακολουθεί τις χρονικές σταθερές που χρησιμοποιήθηκαν κατά την εύρεση τροχιάς θέσης (δηλαδή επιλέγεται $s' = s$), κάτι το οποίο δεν είναι απαραίτητο. Σε αυτό το σημείο επιλέγουμε δύο περιπτώσεις, την εκτέλεση της κίνησης με σταθερό προσανατολισμό και την κίνηση με μεταβαλλόμενο προσανατολισμό. Στην πρώτη περίπτωση επιλέγεται ο αρχικός προσανατολισμός $\varphi_i = \varphi_f = [\pi \quad 0 \quad 0]^T$, με αποτέλεσμα η εξίσωση να παίρνει την μορφή $\varphi(s) = \varphi_i$ και να μην χρειάζεται να εκφραστεί συναρτήσει του χρόνου. Στην δεύτερη περίπτωση, επιλέγεται ο αρχικός προσανατολισμός $\varphi_i = [\frac{\pi}{2} \quad 0 \quad 0]^T$ και ο αντίστοιχος τελικός προσανατολισμός $\varphi_f = \begin{bmatrix} -\frac{\pi}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$. Με την χρήση του $s(t)$ που αναπτύχθηκε παραπάνω προκύπτει η κατάλληλη τροχιά και για τον προσανατολισμό.

Η παραπάνω σχεδίαση των τροχιών φαίνεται και στο σχήμα 4, όπου παρουσιάζονται οι καμπύλες για την επιθυμητή θέση του τελικού στοιχείου δράσης ρου ρομποτικού βραχίονα.



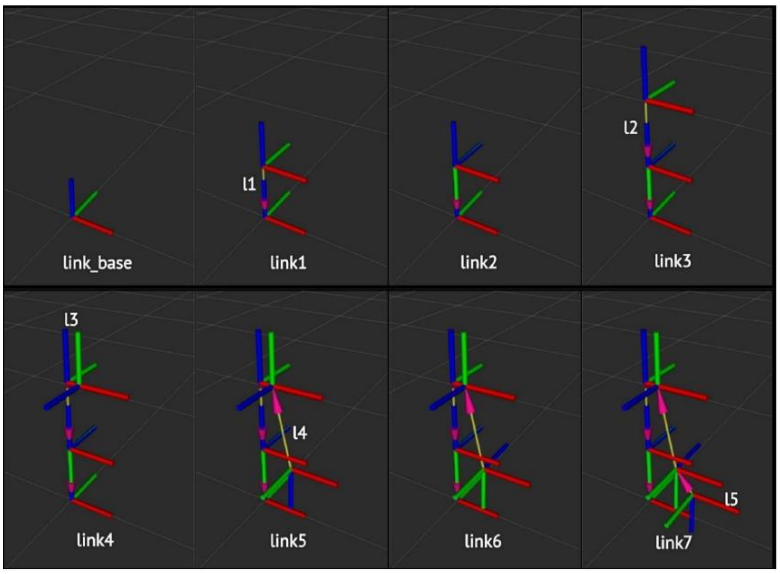
Σχήμα 4. Επιθυμητές τροχιές για το τελικό στοιχείο δράσης του ρομποτικού χειριστή.

1.2 Έλεγχος Θέσης με Χρήση Τριών Περιστροφικών Αρθρώσεων

Κατά την πρώτη ζητούμενη διεργασία, καλούμαστε να κάνουμε έλεγχο θέσης του άκρου του βραχίονα, θεωρώντας ενεργές μόνο τις τρεις από τις εφτά αρθρώσεις και συγκεκριμένα τις q_1, q_2 και q_4. Για τις υπόλοιπες θεωρούμε ότι διατηρούν σταθερή τη γωνία περιστροφής τους και συγκεκριμένα $q_3 = q_5 = q_7 = 0, q_6 = 0.75\ rad$. Έτσι, θα υπολογίσουμε πρώτα το ευθύ κινηματικό μοντέλο του ρομποτικού βραχίονα και στην συνέχεια το αντίστροφο, προσδιορίζοντας τις γωνίες q_1, q_2 και q_4 συναρτήσει της θέσης του άκρου.

1.2.1 Ευθύ Κινηματικό Μοντέλο Ρομποτικού Χειριστή

Για την λύση του ευθύ κινηματικού μοντέλου θα χρησιμοποιηθούν τα πλαίσια αναφοράς στην διάταξη αρχικοποίησης, όπως φαίνονται στην εικόνα που ακολουθεί.



Σχήμα 5. Πλαίσια βραχίονα κατά Denavit Hartenberg

Σύμφωνα με τα παραπάνω πλαίσια αναφοράς παράγεται ο πίνακας παραμέτρων κατά την σύμβαση *Denavit -Hartenberg*. Αναλυτικά, τον βλέπουμε και στον πίνακα 1. Η σύμβαση *DH* που χρησιμοποιήθηκε είναι η εναλλακτική που παρουσιάζεται στο [3].

link i	a_i	a_i	d_i	ϑ_i
1	0	0	l_1	q_1
2	0	$-\pi/2$	0	q_2
3	0	$\pi/2$	l_2	q_3
4	l_3	$\pi/2$	0	q_4
5	$l_4\, sin(\vartheta_1)$	$\pi/2$	$l_4\, cos(\vartheta_1)$	q_5
6	0	$\pi/2$	0	q_6
7	$l_5\, sin(\vartheta_2)$	$-\pi/2$	$l_5\, cos(\vartheta_2)$	q_7

Πίνακας 1. Πίνακας παραμέτρων κατά εναλλακτικό DH.

Άρα, σύμφωνα με τον πίνακα 1 θα υπολογίσουμε τους μετασχηματισμούς ώστε να παραχθεί ο τελικός ομογενής μετασχηματισμός για να βρούμε το ευθύ κινηματικό μοντέλο. Συνεπώς, ισχύει ότι:

$$A_{01} = Rot(z, q_1) \cdot Tra(z, l_1) = \begin{bmatrix} \cos q_1 & -\sin q_1 & 0 & 0 \\ \sin q_1 & \cos q_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

$$A_{12} = Rot\left(x, -\frac{\pi}{2}\right) \cdot Rot(z, q_2) = \begin{bmatrix} \cos q_2 & -\sin q_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sin q_2 & -\cos q_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.2}$$

$$A_{23} = Rot\left(x, +\frac{\pi}{2}\right) \cdot Rot(z, q_3) \cdot Tra(z, l_2) = \begin{bmatrix} \cos q_3 & -\sin q_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -l_2 \\ \sin q_3 & \cos q_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.3}$$

$$A_{34} = Rot\left(x, +\frac{\pi}{2}\right) \cdot Tra(x, l_3) \cdot Rot(z, q_4) = \begin{bmatrix} \cos q_4 & -\sin q_4 & 0 & l_3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \sin q_4 & \cos q_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.4}$$

$$A_{45} = Rot\left(x, +\frac{\pi}{2}\right) \cdot Tra(z, l_4 \sin\theta_1) \cdot Ros(z, q_5) \cdot Tra(z, l_4 \cos\theta_1) =$$
$$\begin{bmatrix} \cos q_5 & -\sin q_5 & 0 & l_4 \sin\theta_1 \\ 0 & 0 & -1 & -l_4 \cos\theta_1 \\ \sin q_5 & \cos q_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.5}$$

$$A_{56} = Rot\left(x, +\frac{\pi}{2}\right) \cdot Ros(z, q_6) = \begin{bmatrix} \cos q_6 & -\sin q_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \sin q_6 & \cos q_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.6}$$

$$A_{67} = Rot\left(x, -\frac{\pi}{2}\right) \cdot Tra(z, l_5 \sin\theta_2) \cdot Rot(z, q_7) \cdot Tra(z, l_5 \cos\theta_2) =$$
$$\begin{bmatrix} \cos q_7 & -\sin q_7 & 0 & l_5 \sin\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & l_5 \cos\theta_2 \\ -\sin q_7 & -\cos q_7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.7}$$

Χρησιμοποιώντας την σχέση ανάμεσα στους παραπάνω διαδοχικούς μετασχηματισμούς $A_n^0 = A_1^0 \cdot A_2^1 \cdot \ldots \cdot A_i^{i-1} \cdot \ldots \cdot A_n^{n-1}$ και συνδυάζοντας όλες τις παραπάνω σχέσεις, προκύπτουν οι ομογενείς μετασχηματισμοί των επιμέρους πλαισίων συναρτήσει του πλαισίου 0 ως:

$$A_{02} = \begin{bmatrix} \cos q_1 \cos q_2 & -\cos q_1 \sin q_2 & -\sin q_1 & 0 \\ \cos q_2 \sin q_1 & -\sin q_1 \sin q_2 & \cos q_1 & 0 \\ -\sin q_2 & -\cos q_2 & 0 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.8}$$

$$A_{03} = \begin{bmatrix} a_{03\_11} & a_{03\_12} & a_{03\_13} & a_{03\_14} \\ a_{03\_21} & a_{03\_22} & a_{03\_23} & a_{03\_24} \\ a_{03\_31} & a_{03\_32} & a_{03\_33} & a_{03\_34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.9}$$

όπου έχουμε τα εξής στοιχεία:

$a_{03\_11} = \cos q_1 \cos q_2 \cos q_3 - \sin q_1 \sin q_3$

$a_{03\_12} = -\cos q_3 \sin q_1 - \cos q_1 \cos q_2 \sin q_3$

$a_{03\_13} = \cos q_1 \sin q_2$

$a_{03\_14} = l_2 \cos q_1 \sin q_2$

$a_{03\_21} = \cos q_1 \sin q_3 + \cos q_2 \cos q_3 \sin q_1$

$a_{03\_22} = \cos q_1 \cos q_3 - \cos q_2 \sin q_1 \sin q_3$

$a_{03\_23} = \sin q_1 \sin q_2$

$a_{03\_24} = l_2 \sin q_1 \sin q_2$

$a_{03\_31} = -\cos q_3 \sin q_2$

$a_{03\_32} = \sin q_2 \sin q_3$

$a_{03\_33} = \cos q_2$

$a_{03\_34} = l_1 + l_2 \cos q_2$

$$A_{04} = \begin{bmatrix} a_{04_{11}} & a_{04_{12}} & a_{04_{13}} & a_{04_{14}} \\ a_{04_{21}} & a_{04_{22}} & a_{04_{23}} & a_{04_{24}} \\ a_{04_{31}} & a_{04_{32}} & a_{04_{33}} & a_{04_{34}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.10}$$

όπου έχουμε τα εξής στοιχεία:

$a_{04\_11} = \cos q_1 \sin q_2 \sin q_4 - \cos q_4 (\sin q_1 \sin q_3 - \cos q_1 \cos q_2 \cos q_3)$

$a_{04\_12} = \sin q_4 (\sin q_1 \sin q_3 - \cos q_1 \cos q_2 \cos q_3) + \cos q_1 \cos q_4 \sin q_2$

$a_{04\_13} = \cos q_3 \sin q_1 + \cos q_1 \cos q_2 \sin q_3$

$a_{04\_14} = l_2 \cos q_1 \sin q_2 - l_3 (\sin q_1 \sin q_3 - \cos q_1 \cos q_2 \cos q_3)$

$a_{04\_21} = \cos q_4 (\cos q_1 \sin q_3 + \cos q_2 \cos q_3 \sin q_1) + \sin q_1 \sin q_2 \sin q_4$

$a_{04\_22} = \cos q_4 \sin q_1 \sin q_2 - \sin q_4 (\cos q_1 \sin q_3 + \cos q_2 \cos q_3 \sin q_1)$

$a_{04\_23} = \cos q_2 \sin q_1 \sin q_3 - \cos q_1 \cos q_3$

$a_{04\_24} = l_3 (\cos q_1 \sin q_3 + \cos q_2 \cos q_3 \sin q_1) + l_2 \sin q_1 \sin q_2$

$a_{04\_31} = \cos q_2 \sin q_4 - \cos q_3 \cos q_4 \sin q_2$

$a_{04\_32} = \cos q_2 \cos q_4 + \cos q_3 \sin q_2 \sin q_4$

$a_{04\_33} = -\sin q_2 \sin q_3$

$a_{04\_34} = l_1 + l_2 \cos q_2 - l_3 \cos q_3 \sin q_2$

$$A_{05} = \begin{bmatrix} a_{05\_11} & a_{05\_12} & a_{05\_13} & a_{05\_14} \\ a_{05\_21} & a_{05\_22} & a_{05\_23} & a_{05\_24} \\ a_{05\_31} & a_{05\_32} & a_{05\_33} & a_{05\_34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.11}$$

όπου έχουμε τα εξής στοιχεία:

$$\begin{aligned} a_{05\_11} = \sin q_5 (\cos q_3 \sin q_1 + \cos q_1 \cos q_2 \sin q_3) \\ - \cos q_5 (\cos q_4 (\sin q_1 \sin q_3 - \cos q_1 \cos q_2 \cos q_3) \\ - \cos q_1 \sin q_2 \sin q_4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{05\_12} = \sin q_5 (\cos q_4 (\sin q_1 \sin q_3 - \cos q_1 \cos q_2 \cos q_3) - \cos q_1 \sin q_2 \sin q_4) \\ + \cos q_5 (\cos q_3 \sin q_1 + \cos q_1 \cos q_2 \sin q_3) \end{aligned}$$

$a_{05\_13} = -\sin q_4 (\sin q_1 \sin q_3 - \cos q_1 \cos q_2 \cos q_3) - \cos q_1 \cos q_4 \sin q_2$

$$\begin{aligned} a_{05\_14} = l_2 \cos q_1 \sin q_2 - l_3 (\sin q_1 \sin q_3 - \cos q_1 \cos q_2 \cos q_3) \\ - l_4 \cos \theta_1 (\sin q_4 (\sin q_1 \sin q_3 - \cos q_1 \cos q_2 \cos q_3) \\ + \cos q_1 \cos q_4 \sin q_2) \\ - l_4 \sin \theta_1 (\cos q_4 (\sin q_1 \sin q_3 - \cos q_1 \cos q_2 \cos q_3) \\ - \cos q_1 \sin q_2 \sin q_4) \end{aligned}$$

$$a_{05\_21} = \cos q_5\,(\cos q_4\,(\cos q_1 \sin q_3 + \cos q_2 \cos q_3 \sin q_1) + \sin q_1 \sin q_2 \sin q_4) \\ - \sin q_5\,(\cos q_1 \cos q_3 - \cos q_2 \sin q_1 \sin q_3)$$

$$a_{05\_22} = -\sin q_5(\cos q_4\,(\cos q_1 \sin q_3 + \cos q_2 \cos q_3 \sin q_1) + \sin q_1 \sin q_2 \sin q_4) \\ - \cos q_5\,(\cos q_1 \cos q_3 - \cos q_2 \sin q_1 \sin q_3)$$

$$a_{05\_23} = \sin q_4\,(\cos q_1 \sin q_3 + \cos q_2 \cos q_3 \sin q_1) - \cos q_4 \sin q_1 \sin q_2$$

$$a_{05\_24} = l_3(\cos q_1 \sin q_3 + \cos q_2 \cos q_3 \sin q_1) + l_2 \sin q_1 \sin q_2 \\ + l_4 \cos\theta_1\,(\sin q_4(\cos q_1 \sin q_3 + \cos q_2 \cos q_3 \sin q_1) \\ - \cos q_4 \sin q_1 \sin q_2) \\ + l_4 \sin\theta_1\,(\cos q_4\,(\cos q_1 \sin q_3 + \cos q_2 \cos q_3 \sin q_1) \\ + \sin q_1 \sin q_2 \sin q_4)$$

$$a_{05\_31} = \cos q_5\,(\cos q_2 \sin q_4 - \cos q_3 \cos q_4 \sin q_2) - \sin q_2 \sin q_3 \sin q_5$$

$$a_{05\_32} = -\sin q_5\,(\cos q_2 \sin q_4 - \cos q_3 \cos q_4 \sin q_2) - \cos q_5 \sin q_2 \sin q_3$$

$$a_{05\_33} = -\cos q_2 \cos q_4 - \cos q_3 \sin q_2 \sin q_4$$

$$a_{05\_34} = l_1 + l_2 \cos q_2 - l_3 \cos q_3 \sin q_2 - l_4 \cos\theta_1\,(\cos q_2 \cos q_4 + \cos q_3 \sin q_2 \sin q_4) \\ + l_4 \sin\theta_1\,(\cos q_2 \sin q_4 - \cos q_3 \cos q_4 \sin q_2)$$

$$A_{06} = \begin{bmatrix} a_{06\_11} & a_{06\_12} & a_{06\_13} & a_{06\_14} \\ a_{06\_21} & a_{06\_22} & a_{06\_23} & a_{06\_24} \\ a_{06\_31} & a_{06\_32} & a_{06\_33} & a_{06\_34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.12}$$

όπου θα έχουμε τους εξής όρους:

$$\alpha_{06\_11} = -sinq_6(sinq_4(sinq_1 sinq_3 - cosq_1 cosq_2 cosq_3) + cosq_1 cosq_4 sinq_2) \\ - cosq_6(cosq_5(cosq_4\,(sinq_1 sinq_3 - cosq_1 cosq_2 cosq_3) \\ - cosq_1 sinq_2 sinq_4) - sinq_5(cosq_3 sinq_1 + cosq_1 cosq_2 sinq_3))$$

-

$$\alpha_{06\_12} = sinq_6\,(cosq_5\,(cosq_4(sinq_1\, sinq_3 - cosq_1\, cosq_2\, cosq_3) - cosq_1\, sinq_2\, sinq_4) \\ - sinq_5\,(cosq_3\, sinq_1 + cosq_1\, cosq_2\, sinq_3)) \\ - cosq_6\,(sinq_4\,(sin\, q_1\, sinq_3 - cosq_1\, cosq_2\, cosq_3) \\ + cosq_1\, cosq_4\, sinq_2)$$

$$\alpha_{06\_13} = -sinq_5\,(cosq_4\,(sinq_1\, sinq_3 - cosq_1\, cosq_2\, cosq_3) - cosq_1\, sinq_2\, sinq_4) \\ - cosq_5\,(cosq_3\, sinq\,_1 + cosq_1 cosq_2 sinq_3)$$

$$\alpha_{06\_14} = l_2\, cosq_1\, sinq_2 - l_3\, (sinq_1\, sinq_3 - cosq_1\, cosq_2\, cosq_3) - l_4\, cos\theta_1\, (sinq_4\, (sinq_1\, sinq_3 - cosq_1\, cosq_2\, cosq_3) + cosq_1\, cosq_4\, sinq_2) - l_4\, sin\theta_1\, (cosq_4\, (sinq_1\, sinq_3 - cosq_1\, cosq_2\, cosq_3) - cosq_1\, sinq_2\, sinq_4)$$

$$\alpha_{06\_21} = sinq_6\, (sinq_4\, (cosq_1\, sinq_3 + cosq_2\, cosq_3\, sinq_1) - cosq_4\, sinq_1\, sinq_2) + cosq_6\, (cosq_5\, (cosq_4\, (cosq_1\, sinq_3 + cosq_2\, cosq_3\, sinq_1) + sinq_1\, sinq_2\, sinq_4) - sinq_5\, (cosq_1\, cosq_3 - cosq_2\, sinq_1\, sinq_3))$$

$$\alpha_{06\_22} = cosq_6\, (sinq_4\, (cosq_1\, sinq_3 + cosq_2\, cosq_3\, sinq_1) - cosq_4\, sinq_1\, sinq_2) - sinq_6\, (cosq_5\, (cosq_4\, (cosq_1\, sinq_3 + cosq_2\, cosq_3\, sinq_1) + sinq_1\, sinq_2\, sinq_4) - sinq_5\, (cosq_1\, cosq_3 - cosq_2\, sinq_1\, sinq_3))$$

$$\alpha_{06\_23} = sinq_5\, (cosq_4\, (cosq_1\, sinq_3 + cosq_2\, cosq_3\, sinq_1) + sinq_1\, sinq_2\, sinq_4) + cosq_5\, (cosq_1\, cosq_3 - cosq_2\, sinq_1\, sinq_3)$$

$$\alpha_{06\_24} = l_3\, (cosq_1\, sinq_3 + cosq_2\, cosq_3\, sinq_1) + l_2\, sinq_1\, sinq_2 + l_4\, cos\theta_1\, (sinq_4\, (cosq_1\, sinq_3 + cosq_2\, cosq_3\, sinq_1) - cosq_4\, sinq_1\, sinq_2) + l_4\, sin\theta_1\, (cosq_4\, (cosq_1\, sinq_3 + cosq_2\, cosq_3\, sinq_1) + sinq_1\, sinq_2\, sinq_4)$$

$$\alpha_{06\_31} = cosq_6\, (cosq_5\, (cosq_2\, sinq_4 - cosq_3\, cosq_4\, sinq_2) - sinq_2\, sinq_3\, sinq_5) - sinq_6\, (cosq_2\, cosq_4 + cosq_3\, sinq_2\, sinq_4)$$

$$\alpha_{06\_32} = - sinq_6\, (cosq_5\, (cosq_2\, sinq_4 - cosq_3\, cosq_4\, sinq_2) - sinq_2\, sinq_3\, sinq_5) - cosq_6\, (cosq_2\, cosq_4 + cosq_3\, sinq_2\, sinq_4)$$

$$\alpha_{06\_33} = sinq_5\, (cosq_2\, sinq_4 - cosq_3\, cosq_4\, sinq_2) + cosq_5\, sinq_2\, sinq_3$$

$$\alpha_{06\_34} = l_1 + l_2\, cosq_2 - l_4\, cos\theta_1\, (cosq_2\, cosq_4 + cosq_3\, sinq_2\, sinq_4) + l_4\, sin\theta_1\, (cosq_2\, sinq_4 - cosq_3\, cosq_4\, sinq_2) - l_3\, cosq_3\, sinq_2$$

$$A_{07} = \begin{bmatrix} a_{07\_11} & a_{07\_12} & a_{07\_13} & a_{07\_14} \\ a_{07\_21} & a_{07\_22} & a_{07\_23} & a_{07\_24} \\ a_{07\_31} & a_{07\_32} & a_{07\_33} & a_{07\_34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.13)$$

$$\alpha_{07\_11} = sinq_7\,(sinq_5\,(cosq_4\,(sinq_1\,sinq_3\,-\,cosq_1\,cosq_2\,cosq_3)\,-\,cosq_1\,sinq_2\,sinq_4)$$
$$+\,cosq_5\,(cosq_3\,sinq_1 +\,cosq_1\,cosq_2\,sinq_3))$$
$$-\,cosq_7\,(sinq_6\,(sinq_4\,(sinq_1\,sinq_3\,-\,cosq_1\,cosq_2\,cosq_3)$$
$$+\,cosq_1\,cosq_4\,sinq_2)\,+\,cosq_6\,(cosq_5\,(cosq_4\,(sinq_1\,sinq_3$$
$$-\,cosq_1\,cosq_2\,cosq_3) -\,cosq_1\,sinq_2\,sinq_4)\,-\,sinq_5\,(cosq_3\,sinq_1$$
$$+\,cosq_1\,cosq_2\,sinq_3)))$$

$$\alpha_{07\_12} = sinq_7\,(sinq_6\,(sinq_4\,(sinq_1\,sinq_3\,-\,cosq_1\,cosq_2\,cosq_3)\,+\,cosq_1\,cosq_4\,sinq_2)$$
$$+\,cosq_6\,(cosq_5\,(cosq_4\,(sinq_1\,sinq_3 -\,cosq_1\,cosq_2\,cosq_3)$$
$$-\,cosq_1\,sinq_2\,sinq_4)\,-\,sinq_5\,(cosq_3\,sinq_1\,+\,cosq_1\,cosq_2\,sinq_3)))$$
$$+\,cosq_7\,(sinq_5\,(cosq_4\,(sinq_1\,sinq_3\,-\,cosq_1\,cosq_2\,cosq_3)$$
$$-\,cosq_1\,sinq_2\,sinq_4)\,+\,cosq_5\,(cosq_3\,sinq_1 +\,cosq_1\,cosq_2\,sinq_3))$$

$$\alpha_{07\_13} = sinq_6\,(cosq_5\,(cosq_4\,(sinq_1\,sinq_3\,-\,cosq_1\,cosq_2\,cosq_3)\,-\,cosq_1\,sinq_2\,sinq_4)$$
$$-\,sinq_5\,(cosq_3\,sinq_1 +\,cosq_1\,cosq_2\,sinq_3))$$
$$-\,cosq_6\,(sinq_4\,(sinq_1\,sinq_3\,-\,cosq_1\,cosq_2\,cosq_3)$$
$$+\,cosq_1\,cosq_4\,sinq_2)$$

$$\alpha_{07\_14} = l_2\,cosq_1\,sinq_2\,-\,l_3\,(sinq_1\,sinq_3\,-\,cosq_1\,cosq_2\,cosq_3)$$
$$-\,l_4\,cos\theta_1\,(sinq_4\,(sinq_1\,sinq_3\,-\,cosq_1\,cosq_2\,cosq_3)$$
$$+\,cosq_1\,cosq_4\,sinq_2)\,-\,l_5\,cos\theta_2\,(cosq_6\,(sinq_4\,(sinq_1\,sinq_3$$
$$-\,cosq_1\,cosq_2\,cosq_3)\,+\,cosq_1\,cosq_4\,sinq_2)$$
$$-\,sinq_6\,(cosq_5\,(cosq_4\,(sinq_1\,sinq_3 -\,cosq_1\,cosq_2\,cosq_3)$$
$$-\,cosq_1\,sinq_2\,sinq_4)\,-\,sinq_5\,(cosq_3\,sinq_1\,+\,cosq_1\,cosq_2\,sinq_3)))$$
$$-\,l_4\,sin\theta_1\,cosq_4\,sinq_1\,sinq_3\,-\,cosq_1\,cosq_2\,cosq_3)$$
$$-\,cosq_1\,sinq_2\,sinq_4)\,-\,l_5\,sin\theta_2\,sinq_6\,(sinq_4\,(sinq_1 * sinq_3))$$
$$-\,cosq_1\,cosq_2\,cosq_3)\,+\,cosq_1\,cosq_4\,sinq_2$$
$$+\,cosq_6\,cosq_5\,cosq_4\,(sinq_1\,sinq_3\,-\,cosq_1\,cosq_2\,cosq_3)$$
$$-\,cosq_1\,sinq_2\,sinq_4)\,-\,sinq_5\,(cosq_3 * sinq_1\,+\,cosq_1\,cosq_2\,sinq_3)))$$

$$\alpha_{07\_21} = cosq_7\,(sinq_6\,(sinq_4\,(cosq_1\,sinq_3 +\,cosq_2\,cosq_3\,sinq_1)\,-\,cosq_4\,sinq_1\,sinq_2)$$
$$+\,cosq_6\,(cosq_5\,(cosq_4\,(cosq_1\,sinq_3\,+\,cosq_2\,cosq_3\,sinq_1)$$
$$+\,sinq_1\,sinq_2\,sinq_4)\,-\,sinq_5\,(cosq_1\,cosq_3 -\,cosq_2\,sinq_1\,sinq_3)))$$
$$-\,sinq_7\,(sinq_5\,(cosq_4\,(cosq_1\,sinq_3\,+\,cosq_2\,cosq_3\,sinq_1)$$
$$+\,sinq_1\,sinq_2\,sinq_4)\,+\,cosq_5\,(cosq_1\,cosq_3 -\,cosq_2\,sinq_1\,sinq_3))$$

$$\alpha_{07\_22} = -sinq_7\,(sinq_6(sinq_4\,(cosq_1\,sinq_3 + cosq_2\,cosq_3\,sinq_1) - cosq_4\,sinq_1\,sinq_2) + cosq_6\,(cosq_5\,(cosq_4\,(cosq_1\,sinq_3 + cosq_2\,cosq_3\,sinq_1) + sinq_1\,sinq_2\,sinq_4) - sinq_5\,(cosq_1\,cosq_3 - cosq_2\,sinq_1\,sinq_3))) - cosq_7\,(sinq_5\,(cosq_4\,(cosq_1\,sinq_3 + cosq_2\,cosq_3\,sinq_1) + sinq_1\,sinq_2\,sinq_4) + cosq_5\,(cosq_1\,cosq_3 - cosq_2\,sinq_1\,sinq_3))$$

$$\alpha_{07\_23} = cosq_6\,(sinq_4\,(cosq_1\,sinq_3 + cosq_2\,cosq_3\,sinq_1) - cosq_4\,sinq_1\,sinq_2) - sinq_6\,(cosq_5\,(cosq_4\,(cosq_1\,sinq_3 + cosq_2\,cosq_3\,sinq_1) + sinq_1\,sinq_2\,sinq_4) - sinq_5\,(cosq_1\,cosq_3 - cosq_2\,sinq_1\,sinq_3))$$

$$\alpha_{07\_24} = l_3\,(cosq_1\,sinq_3 + cosq_2\,cosq_3\,sinq_1) + l_2\,sinq_1\,sinq_2 + l_4\,cos\theta_1\,(sinq_4\,(cosq_1\,sinq_3 + cosq_2\,cosq_3\,sinq_1) - cosq_4\,sinq_1\,sinq_2) + l_4\,sin\theta_1\,(cosq_4(cosq_1\,sinq_3 + cosq_2\,cosq_3\,sinq_1) + sinq_1\,sinq_2\,sinq_4) + l_5\,cos\theta_2\,(cosq_6\,(sinq_4\,(cosq_1\,sinq_3 + cosq_2\,cosq_3\,sinq_1) - cosq_4\,sinq_1\,sinq_2) - sinq_6\,(cosq_5\,(cosq_4\,(cosq_1\,sinq_3 + cosq_2\,cosq_3\,sinq_1) + sinq_1\,sinq_2\,sinq_4) - sinq_5\,(cosq_1\,cosq_3 - cosq_2\,sinq_1\,sinq_3))) + l_5\,sin\theta_2\,(sinq_6\,(sinq_4\,(cosq_1\,sinq_3 + cosq_2\,cosq_3\,sinq_1) - cosq_4\,sinq_1\,sinq_2) + cosq_6\,(cosq_5\,(cosq_4\,(cosq_1\,sinq_3 + cosq_2\,cosq_3\,sinq_1) + sinq_1\,sinq_2\,sinq_4) - sinq_5(cosq_1\,cosq_3 - cosq_2\,sinq_1\,sinq_3)))$$

$$\alpha_{07\_31} = cosq_7\,(cosq_6\,(cosq_5\,(cosq_2\,sinq_4 - cosq_3\,cosq_4\,sinq_2) - sinq_2\,sinq_3\,sinq_5) - sinq_6\,(cosq_2\,cosq_4 + cosq_3\,sinq_2\,sinq_4)) - sinq_7\,(sinq_5\,(cosq_2\,sinq_4 - cosq_3\,cosq_4\,sinq_2) + cosq_5\,sinq_2\,sinq_3)$$

$$\alpha_{07\_32} = -cosq_7\,(sinq_5\,(cosq_2\,sinq_4 - cosq_3\,cosq_4\,sinq_2) + cosq_5\,sinq_2\,sinq_3) - sinq_7\,(cosq_6\,(cosq_5\,(cosq_2\,sinq_4 - cosq_3\,cosq_4\,sinq_2) - sinq_2\,sinq_3\,sinq_5) - sinq_6\,(cosq_2\,cosq_4 + cosq_3\,sinq_2\,sinq_4))$$

$$\alpha_{07\_33} = -sinq_6\,(cosq_5\,(cosq_2\,sinq_4 - cosq_3 * cosq_4)\,sinq_2 - sinq_2\,sinq_3\,sinq_5) - cosq_6\,(cosq_2\,cosq_4 + cosq_3\,sinq_2\,sinq_4)$$

$$\alpha_{07\_34} = l_1 + l_2\, cosq_2 - l_4\, cos\theta_1\, (cosq_2\, cosq_4 + cosq_3\, sinq_2\, sinq_4)$$
$$+ l_4\, sin\theta_1\, (cosq_2\, sinq_4 - cosq_3\, cosq_4\, sinq_2) - l_3\, cosq_3\, sinq_2$$
$$- l_5\, cos\theta_2\, (sinq_6\, (cosq_5\, (cosq_2\, sinq_4 - cosq_3\, cosq_4\, sinq_2)$$
$$- sinq_2\, sinq_3\, sinq_5) + cosq_6\, (cosq_2\, cosq_4 + cosq_3\, sinq_2\, sinq_4))$$
$$+ l_5\, sin\theta_2\, (cosq_6\, (cosq_5\, (cosq_2\, sinq_4 - cosq_3\, cosq_4\, sinq_2)$$
$$- sinq_2\, sinq_3\, sinq_5) - sinq_6\, (cosq_2\, cosq_4 + cosq_3\, sinq_2\, sinq_4))$$

Για την συνολική διάταξη έχουμε ότι οι εξισώσεις του ευθύ κινηματικού μοντέλου αποτυπώνονται από τα στοιχεία $\alpha_{07\_14}, \alpha_{07\_24}$ και α_{07_34}. Άρα, για $q_3 = q_5 = q_7 = 0, q_6 = 0.75\ rad$ ο ομογενής μετασχηματισμός του πλαισίου του εργαλείου Ε συναρτήσει του πλαισίου 0 είναι:

$$A_{0E} = \begin{bmatrix} a_{0E_{11}} & a_{0E_{12}} & a_{0E_{13}} & a_{0E_{14}} \\ a_{0E_{21}} & a_{0E_{22}} & a_{0E_{23}} & a_{0E_{24}} \\ a_{0E_{31}} & a_{0E_{32}} & a_{0E_{33}} & a_{0E_{34}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.14)$$

$a_{0E\_11} = \cos(f + q_2 - q_4) \cos q_1$

$a_{0E\_12} = \sin q_1$

$a_{0E\_13} = -\sin(f + q_2 - q_4) \cos q_1$

$a_{0E\_14} = \cos q_1\, (l_4 \sin(q_4 - q_2 + \theta_1) - l_5 \sin(f + q_2 - q_4 - \theta_2) + l_3 \cos q_2 + l_2 \sin q_2)$

$a_{0E\_21} = \cos(f + q_2 - q_4) \sin q_1$

$a_{0E\_22} = -\cos q_1$

$a_{0E\_23} = -\sin(f + q_2 - q_4) \sin q_1$

$a_{0E\_24} = \sin q_1\, (l_4 \sin(q_4 - q_2 + \theta_1) - l_5 \sin(f + q_2 - q_4 - \theta_2) + l_3 \cos q_2 + l_2 \sin q_2)$

$a_{0E_{31}} = -\sin(f + q_2 - q_4)$

$a_{0E_{32}} = 0$

$a_{0E\_33} = -\cos(f + q_2 - q_4)$

$a_{0E\_34} = l_1 - l_5 \cos(f + q_2 - q_4 - \theta_2) - l_4 \cos(q_4 - q_2 + \theta_1) + l_2 \cos q_2 - l_3 \sin q_2$

Συνεπώς, μετά τον υπολογισμού του γενικού μετασχηματισμού, το ευθύ κινηματικό μοντέλο που θα προκύψει είναι το εξής:

$$p_x = \cos q_1 \,(l_4 \sin(q_4 - q_2 + \theta_1) - l_5 \sin(f + q_2 - q_4 - \theta_2) + l_3 \cos q_2 + l_2 \sin q_2)$$

$$p_y = \sin q_1 \,(l_4 \sin(q_4 - q_2 + \theta_1) - l_5 \sin(f + q_2 - q_4 - \theta_2) + l_3 \cos q_2 + l_2 \sin q_2)$$

$$p_z = l_1 - l_5 \cos(f + q_2 - q_4 - \theta_2) - l_4 \cos(q_4 - q_2 + \theta_1) + l_2 \cos q_2 - l_3 \sin q_2 \quad (1.15)$$

1.2.2 Αντίστροφο Κινηματικό Μοντέλο Ρομποτικού Χειριστή

Έστω ότι έχουμε την θέση του τελικού στοιχείου δράσης $p = [p_x^* \quad p_y^* \quad p_z^*]^T$. Με βάσει αυτό το σημείο θα αντιστρέψουμε το ευθύ κινηματικό μοντέλο της σχέσης (1.15). Έτσι, θα μπορέσουμε να βρούμε τις αναλυτικές εκφράσεις για τις γωνίες q_1, q_2 και q_4.

Αρχικά, για την q_1 έχουμε ότι ισχύει:

$$q_1 = atan2\left(\frac{p_y^*}{d_1}, \frac{p_x^*}{d_1}\right) \quad (1.16)$$

Ύστερα, προκειμένου να υπολογίσουμε την q_4, θεωρούμε:

$$d_1 = \pm\sqrt{{p_x^*}^2 + {p_y^*}^2}$$

$$d_2 = p_z^* - l_1$$

Από το ευθύ κινηματικό μοντέλο της σχέσης (1.15) θα λάβουμε ορίσουμε τις εξής παρακάτω σχέσεις:

$$d_1 = l_4 \sin(q_4 - q_2 + \theta_1) - l_5 \sin(q_6 + q_2 - q_4 - \theta_2) + l_3 \cos q_2 + l_2 \sin q_2$$

$$d_2 = l_2 \cos q_2 - l_4 \cos(q_4 - q_2 + \theta_1) - l_5 \cos(q_6 + q_2 - q_4 - \theta_2) - l_3 \sin q_2 \quad (1.17)$$

Εν συνεχεία, θα υψώσουμε εις το τετράγωνο την σχέσης (1.17α) και την (1.17b) με στόχο να τις προσθέσουμε για να βρούμε μία σχέση για την άρθρωση q_4. Επομένως, ισχύει ότι

$$ {d_1}^2 + (p_z - l_1)^2 = {l_2}^2 + {l_3}^2 + {l_4}^2 + {l_5}^2 - 2l_2 l_5 \cos(q_4 - q_6 + \theta_2) + 2l_3 l_4 \sin(q_4 + \theta_1)$$

$$+2l_4 l_5 \cos(q_6 + \theta_1 - \theta_2) + 2l_3 l_5 \sin(q_4 - q_6 + \theta_2) - 2l_2 l_4 \cos(q_4 + \theta_1)$$

Ακολούθως, κάνοντας παραγοντοποίηση προκειμένου να λάβουμε το q_4 (εδώ μας δίνεται $q_6 = 0.75$) έχουμε τις παρακάτω σχέσεις της (1.18):

$$L = {p_x^*}^2 + {p_y^*}^2 + (p_z^* - l_1)^2 - {l_2}^2 - {l_3}^2 - {l_4}^2 - {l_5}^2 - 2l_4l_5\cos(q_6 + \theta_1 - \theta_2)$$

$$k_1 = 2(-l_2l_5\cos(\theta_2 - q_6) + l_3l_5\sin(\theta_2 - q_6) - l_2l_4\cos\theta_1 + l_3l_4\sin\theta_1) \quad (1.18)$$

$$k_2 = 2(l_2l_5\sin(\theta_2 - q_6) + l_3l_5\cos(\theta_2 - q_6) + l_2l_4\sin\theta_1 + l_3l_4\cos\theta_1)$$

Έτσι λαμβάνουμε την σχέση:

$$k_1\cos(q_4) + k_2\sin(q_4) = L \quad (1.19)$$

Ορίζοντας:

$$r_1 = \sqrt{{k_1}^2 + {k_2}^2}$$

$$\varphi_1 = atan2(k_1, k_2)$$

Μέσω των $r_1\, sin(\varphi_1) = k_1$ και $r_1\cos(\varphi_1) = k_2$, παράγεται η σχέση:

$$\sin(q_4 + \varphi_1) = \frac{L}{r_1}$$

Έτσι, χρησιμοποιώντας την σχέση $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, θα λάβουμε τις εξισώσεις κίνησης που αφορούν την άρθρωση q_4. Επίσης, διαπιστώνουμε πως προκύπτουν δύο λύσεις για την συγκεκριμένη άρθρωση.

$$q_4 = atan2\left(L, \pm\sqrt{{r_1}^2 - L^2}\right) - atan2(k_1, k_2) \quad (1.20)$$

Τέλος, για να λάβουμε το q_2 ορίζουμε τις ποσότητες της σχέσης (1.21):

$$l_A = l_4\sin\theta_1 - l_5\sin(q_6 - \theta_2)$$

$$l_B = l_4\cos\theta_1 + l_5\cos(q_6 - \theta_2)$$

$$k_3 = l_2 - l_B\cos q_4 + l_A\sin q_4 \quad (1.21)$$

$$k_4 = l_3 + l_A\cos q_4 + l_B\sin q_4$$

Με βάση τα παραπάνω μεγέθη, προκύπτει ότι:

$$\begin{bmatrix} d_1 \\ p_z - l_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_3 & k_4 \\ -k_4 & k_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sin(q_2) \\ \cos(q_2) \end{bmatrix} \quad (1.22)$$

Χρησιμοποιώντας τον αντίστροφο του παραπάνω πίνακα θα λύσουμε ως προς το διάνυσμα των τριγωνομετρικών συναρτήσεων της άρθρωσης q_2, έτσι ώστε να βρούμε μια κλειστή και επιλύσιμη μορφή. Άρα προκύπτει ότι:

$$\begin{bmatrix} \sin(q_2) \\ \cos(q_2) \end{bmatrix} = \frac{1}{k_3^2 + k_4^2} \begin{bmatrix} k_3 & -k_4 \\ k_4 & k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ p_z - l_1 \end{bmatrix}$$

Έτσι, για την q_2 με χρήση της συνάρτησης $atan2()$, θα προκύψει το εξής αποτέλεσμα:

$$q_2 = atan2\big(k_3 d_1 - k_4(p_z - l_1), k_4 d_1 + k_3(p_z - l_1)\big) \tag{1.23}$$

Και σε αυτήν την περίπτωση παρατηρούμε πως θα προκύψουν δύο λύσεις, λόγου της αλλαγής του πρόσημου του d_1.

1.3 Πλήρης Κινηματικός Έλεγχος Με Χρήση Όλων των Αρθρώσεων

Κατά τη δεύτερη ζητούμενη διεργασία θεωρούμε ενεργές όλες τις αρθρώσεις και καλούμαστε να κάνουμε πλήρη κινηματικό έλεγχο (θέσης και προσανατολισμού). Για να επιτευχθεί ο πλήρης κινηματικός έλεγχος θα χρειαστούμε να υπολογίσουμε την Ιακωβιανή Μήτρα του ρομποτικού χειριστή. Στην περίπτωση του πλήρη ελέγχου δεν μπορούμε να υπολογίσουμε το αντίστροφο κινηματικό μοντέλο, καθώς έχουμε έναν πλεονάζον βαθμό ελευθερίας και είναι πολύπλοκη η διαδικασία. Έτσι, καταφεύγουμε τον υπολογισμό της ιακωβιανής μήτρας και την αντιστροφή της που είναι ευκολότερο ως πρόβλημα να επιλυθεί και να γίνεται πρακτικά έλεγχος ταχύτητας.

1.3.1 Ιακωβιανή Μήτρα Ρομποτικού Χειριστή

Ο ρομποτικός χειριστής αποτελείται από επτά περιστροφικές αρθρώσεις. Οπότε, για τον υπολογισμό της Ιακωβιανής Μήτρας θα χρησιμοποιηθεί η γεωμετρική μέθοδος. Για την εύρεση των στηλών της Ιακωβιανής θα χρησιμοποιηθεί ο εξής τύπος:

$$\begin{bmatrix} J_{Li} \\ J_{Ai} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_i \times r_{i,E} \\ b_i \end{bmatrix} \tag{1.24}$$

Θα μελετήσουμε την κάθε άρθρωση ξεχωριστά για να υπολογίσουμε την συνολική μήτρα.

Για την άρθρωση $\boldsymbol{i} = \mathbf{1}$ ισχύει ότι ο πίνακας στροφής είναι:

$$\begin{bmatrix} \cos q_1 & -\sin q_1 & 0 \\ \sin q_1 & \cos q_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Επομένως, $b_1 = [0 \quad 0 \quad 1]^{\mathrm{T}}$

Είναι $r_{1,E} = r_{0E} - r_{01} = \begin{bmatrix} r_{1E\_1} \\ r_{1E\_2} \\ r_{1E\_3} \end{bmatrix}$, όπου:

$$\begin{aligned} r_{1E\_1} = {} & l_2 \cos q_1 \sin q_2 - l_3(\sin q_1 \sin q_3 - \cos q_1 \cos q_2 \cos q_3) \\ & - l_4 \cos\theta_1 \left(\sin q_4(\sin q_1 \sin q_3 - \cos q_1 \cos q_2 \cos q_3)\right. \\ & \left. + \cos q_1 \cos q_4 \sin q_2\right) \\ & - l_5 \cos\theta_2 \Big(\cos q_6 \left(\sin q_4(\sin q_1 \sin q_3 - \cos q_1 \cos q_2 \cos q_3)\right. \\ & \left. + \cos q_1 \cos q_4 \sin q_2\right) \\ & - \sin q_6 \left(\cos q_5 \left(\cos q_4 \left(\sin q_1 \sin q_3 - \cos q_1 \cos q_2 \cos q_3\right)\right.\right. \\ & \left.\left. - \cos q_1 \sin q_2 \sin q_4\right) - \sin q_5 \left(cos\, q_3 \sin q_1 + \cos q_1 \cos q_2 \sin q_3\right)\right)\Big) \\ & - l_4 \sin\theta_1 \left(\cos q_4 \left(\sin q_1 \sin q_3 - \cos q_1 \cos q_2 \cos q_3\right)\right. \\ & \left. - \cos q_1 \sin q_2 \sin q_4\right) \\ & - l_5 \sin\theta_2 \Big(\sin q_6 \left(\sin q_4(\sin q_1 \sin q_3 - \cos q_1 \cos q_2 \cos q_3)\right. \\ & \left. + \cos q_1 \cos q_4 \sin q_2\right) \\ & + \cos q_6 \left(\cos q_5 \left(\cos q_4 \left(\sin q_1 \sin q_3 - \cos q_1 \cos q_2 \cos q_3\right)\right.\right. \\ & \left.\left. - \cos q_1 \sin q_2 \sin q_4\right) - \sin q_5 \left(cos\, q_3 \sin q_1 + \cos q_1 \cos q_2 \sin q_3\right)\right)\Big) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_{1E\_2} = {} & l_3(cos\, q_1 \sin q_3 + \cos q_2 \cos q_3 \sin q_1) + l_2 \sin q_1 \sin q_2 \\ & + l_4 \cos\theta_1 \left(\sin q_4(\cos q_1 \sin q_3 + \cos q_2 \cos q_3 \sin q_1)\right. \\ & \left. - \cos q_4 \sin q_1 \sin q_2\right) \\ & + l_4 \sin\theta_1 \left(\cos q_4 \left(\cos q_1 \sin q_3 + \cos q_2 \cos q_3 \sin q_1\right)\right. \\ & \left. + \sin q_1 \sin q_2 \sin q_4\right) \\ & + l_5 \cos\theta_2 \Big(\cos q_6 \left(\sin q_4(\cos q_1 \sin q_3 + \cos q_2 \cos q_3 \sin q_1)\right. \\ & \left. - \cos q_4 \sin q_1 \sin q_2\right) \\ & - \sin q_6 \left(\cos q_5 \left(\cos q_4 \left(\cos q_1 \sin q_3 + \cos q_2 \cos q_3 \sin q_1\right)\right.\right. \\ & \left.\left. + \sin q_1 \sin q_2 \sin q_4\right) - \sin q_5 \left(cos\, q_1\, cos\, q_3 - \cos q_2 \sin q_1 \sin q_3\right)\right)\Big) \\ & + l_5 \sin\theta_2 \Big(\sin q_6 \left(\sin q_4(\cos q_1 \sin q_3 + \cos q_2 \cos q_3 \sin q_1)\right. \\ & \left. - \cos q_4 \sin q_1 \sin q_2\right) \\ & + \cos q_6 \left(\cos q_5 \left(\cos q_4 \left(\cos q_1 \sin q_3 + \cos q_2 \cos q_3 \sin q_1\right)\right.\right. \\ & \left.\left. + \sin q_1 \sin q_2 \sin q_4\right) - \sin q_5 \left(cos\, q_1\, cos\, q_3 - \cos q_2 \sin q_1 \sin q_3\right)\right)\Big) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
r_{1E\_3} = {} & l_2 \cos q_2 - l_4 \cos\theta_1 (\cos q_2 \cos q_4 + \cos q_3 \sin q_2 \sin q_4) \\
& + l_4 \sin\theta_1 (\cos q_2 \sin q_4 - \cos q_3 \cos q_4 \sin q_2) - l_3 \cos q_3 \sin q_2 \\
& - l_5 \cos\theta_2 \big(\sin q_6 (\cos q_5 (\cos q_2 \sin q_4 - \cos q_3 \cos q_4 \sin q_2) \\
& - \sin q_2 \sin q_3 \sin q_5) + \cos q_6 (cos\, q_2\, cos\, q_4 + \cos q_3 \sin q_2 \sin q_4)\big) \\
& + l_5 \sin\theta_2 \big(\cos q_6 (\cos q_5 (\cos q_2 \sin q_4 - \cos q_3 \cos q_4 \sin q_2) \\
& - \sin q_2 \sin q_3 \sin q_5) - \sin q_6 (cos\, q_2\, cos\, q_4 + \cos q_3 \sin q_2 \sin q_4)\big)
\end{aligned}
$$

Επομένως,

$$
J_{L1} = b_1 \times r_{1,E} = \begin{bmatrix} J_{L1_1} \\ J_{L1_2} \\ J_{L1_3} \end{bmatrix}
$$

, όπου:

$$
\begin{aligned}
J_{L1_1} = {} & -l_3(\cos q_1 \sin q_3 + \cos q_2 \cos q_3 \sin q_1) - l_2 \sin q_1 \sin q_2 \\
& - l_4 \cos\theta_1 (\sin q_4 (\cos q_1 \sin q_3 + \cos q_2 \cos q_3 \sin q_1) \\
& - \cos q_4 \sin q_1 \sin q_2) \\
& - l_4 \sin\theta_1 (\cos q_4 (\cos q_1 \sin q_3 + \cos q_2 \cos q_3 \sin q_1) \\
& + \sin q_1 \sin q_2 \sin q_4) \\
& - l_5 \cos\theta_2 \Big(\cos q_6 (\sin q_4 (\cos q_1 \sin q_3 + \cos q_2 \cos q_3 \sin q_1) \\
& - \cos q_4 \sin q_1 \sin q_2) \\
& - \sin q_6 \big(cos\, q_5 (cos\, q_4 (\cos q_1 \sin q_3 + \cos q_2 \cos q_3 \sin q_1) \\
& + \sin q_1 \sin q_2 \sin q_4) - \sin q_5 (cos\, q_1\, cos\, q_3 - \cos q_2 \sin q_1 \sin q_3))\big)\Big) \\
& - l_5 \sin\theta_2 \Big(\sin q_6 (\sin q_4 (\cos q_1 \sin q_3 + \cos q_2 \cos q_3 \sin q_1) \\
& - \cos q_4 \sin q_1 \sin q_2) \\
& + cos\, q_6 \big(cos\, q_5 (cos\, q_4 (\cos q_1 \sin q_3 + \cos q_2 \cos q_3 \sin q_1) \\
& + \sin q_1 \sin q_2 \sin q_4) - \sin q_5 (cos\, q_1\, cos\, q_3 - \cos q_2 \sin q_1 \sin q_3))\big)\Big)
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
J_{L1_2} = l_2 \cos q_1 \sin q_2 - l_3(\sin q_1 \sin q_3 - \cos q_1 \cos q_2 \cos q_3) \\
- l_4 \cos\theta_1 (\sin q_4 (\sin q_1 \sin q_3 - \cos q_1 \cos q_2 \cos q_3) \\
+ \cos q_1 \cos q_4 \sin q_2) \\
- l_5 \cos\theta_2 \Big(\cos q_6 (\sin q_4 (\sin q_1 \sin q_3 - \cos q_1 \cos q_2 \cos q_3) \\
+ \cos q_1 \cos q_4 \sin q_2) \\
- \sin q_6 \big(cos\, q_5 (cos\, q_4 (\sin q_1 \sin q_3 - \cos q_1 \cos q_2 \cos q_3) \\
- \cos q_1 \sin q_2 \sin q_4) - \sin q_5 (cos\, q_3 \sin q_1 + \cos q_1 \cos q_2 \sin q_3)\big)\Big) \\
- l_4 \sin\theta_1 (\cos q_4 (\sin q_1 \sin q_3 - \cos q_1 \cos q_2 \cos q_3) \\
- \cos q_1 \sin q_2 \sin q_4) \\
- l_5 \sin\theta_2 \Big(\sin q_6 (\sin q_4 (\sin q_1 \sin q_3 - \cos q_1 \cos q_2 \cos q_3) \\
+ \cos q_1 \cos q_4 \sin q_2) \\
+ \cos q_6 \big(cos\, q_5 (cos\, q_4 (\sin q_1 \sin q_3 - \cos q_1 \cos q_2 \cos q_3) \\
- \cos q_1 \sin q_2 \sin q_4) - \sin q_5 (cos\, q_3 \sin q_1 + \cos q_1 \cos q_2 \sin q_3)\big)\Big)
\end{aligned}$$

$$J_{L1_3} = 0$$

και

$$J_{A1} = \begin{bmatrix} J_{A1_1} \\ J_{A1_2} \\ J_{A1_3} \end{bmatrix} = b_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Για την άρθρωση $\boldsymbol{i} = \mathbf{2}$ ισχύει ότι ο πίνακας στροφής είναι:

$$\begin{bmatrix} \cos q_1 \cos q_2 & -\cos q_1 \sin q_2 & -\sin q_1 \\ \cos q_2 \sin q_1 & -\sin q_1 \sin q_2 & \cos q_1 \\ -\sin q_2 & -\cos q_2 & 0 \end{bmatrix}$$

Επομένως, $b_2 = [-\sin q_1 \quad \cos q_1 \quad 0]^{\mathrm{T}}$

Είναι $r_{2,E} = r_{0E} - r_{02} = \begin{bmatrix} r_{2E\_1} \\ r_{2E\_2} \\ r_{2E\_3} \end{bmatrix}$, όπου:

$$
\begin{aligned}
r_{2E\_1} = {} & l_2 \cos q_1 \sin q_2 - l_3(\sin q_1 \sin q_3 - \cos q_1 \cos q_2 \cos q_3) \\
& - l_4 \cos\theta_1 \left(\sin q_4 (\sin q_1 \sin q_3 - \cos q_1 \cos q_2 \cos q_3)\right. \\
& \left. + \cos q_1 \cos q_4 \sin q_2\right) \\
& - l_5 \cos\theta_2 \Big(\cos q_6 \left(\sin q_4 (\sin q_1 \sin q_3 - \cos q_1 \cos q_2 \cos q_3)\right. \\
& \left. + \cos q_1 \cos q_4 \sin q_2\right) \\
& - \sin q_6 \left(cos\, q_5 \left(cos\, q_4 (\sin q_1 \sin q_3 - \cos q_1 \cos q_2 \cos q_3)\right.\right. \\
& \left.\left. - \cos q_1 \sin q_2 \sin q_4\right) - \sin q_5 (cos\, q_3 \sin q_1 + \cos q_1 \cos q_2 \sin q_3)\right)\Big) \\
& - l_4 \sin\theta_1 \left(\cos q_4 (\sin q_1 \sin q_3 - \cos q_1 \cos q_2 \cos q_3)\right. \\
& \left. - \cos q_1 \sin q_2 \sin q_4\right) \\
& - l_5 \sin\theta_2 \Big(\sin q_6 \left(\sin q_4 (\sin q_1 \sin q_3 - \cos q_1 \cos q_2 \cos q_3)\right. \\
& \left. + \cos q_1 \cos q_4 \sin q_2\right) \\
& + \cos q_6 \left(cos\, q_5 \left(cos\, q_4 (\sin q_1 \sin q_3 - \cos q_1 \cos q_2 \cos q_3)\right.\right. \\
& \left.\left. - \cos q_1 \sin q_2 \sin q_4\right) - \sin q_5 (cos\, q_3 \sin q_1 + \cos q_1 \cos q_2 \sin q_3)\right)\Big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
r_{2E\_2} = {} & l_3(\cos q_1 \sin q_3 + \cos q_2 \cos q_3 \sin q_1) + l_2 \sin q_1 \sin q_2 \\
& + l_4 \cos\theta_1 \left(\sin q_4 (\cos q_1 \sin q_3 + \cos q_2 \cos q_3 \sin q_1)\right. \\
& \left. - \cos q_4 \sin q_1 \sin q_2\right) \\
& + l_4 \sin\theta_1 \left(\cos q_4 (\cos q_1 \sin q_3 + \cos q_2 \cos q_3 \sin q_1)\right. \\
& \left. + \sin q_1 \sin q_2 \sin q_4\right) \\
& + l_5 \cos\theta_2 \Big(\cos q_6 \left(\sin q_4 (\cos q_1 \sin q_3 + \cos q_2 \cos q_3 \sin q_1)\right. \\
& \left. - \cos q_4 \sin q_1 \sin q_2\right) \\
& - \sin q_6 \left(cos\, q_5 \left(cos\, q_4 (\cos q_1 \sin q_3 + \cos q_2 \cos q_3 \sin q_1)\right.\right. \\
& \left.\left. + \sin q_1 \sin q_2 \sin q_4\right) - \sin q_5 (cos\, q_1\, cos\, q_3 - \cos q_2 \sin q_1 \sin q_3)\right)\Big) \\
& + l_5 \sin\theta_2 \Big(\sin q_6 \left(\sin q_4 (\cos q_1 \sin q_3 + \cos q_2 \cos q_3 \sin q_1)\right. \\
& \left. - \cos q_4 \sin q_1 \sin q_2\right) \\
& + cos\, q_6 \left(cos\, q_5 \left(cos\, q_4 (\cos q_1 \sin q_3 + \cos q_2 \cos q_3 \sin q_1)\right.\right. \\
& \left.\left. + \sin q_1 \sin q_2 \sin q_4\right) - \sin q_5 (cos\, q_1\, cos\, q_3 - \cos q_2 \sin q_1 \sin q_3)\right)\Big)
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} r_{2E\_3} = {} & l_2 \cos q_2 - l_4 \cos\theta_1 (\cos q_2 \cos q_4 + \cos q_3 \sin q_2 \sin q_4) \\ & + l_4 \sin\theta_1 (\cos q_2 \sin q_4 - \cos q_3 \cos q_4 \sin q_2) - l_3 \cos q_3 \sin q_2 \\ & - l_5 \cos\theta_2 \big(\sin q_6 (\cos q_5 (\cos q_2 \sin q_4 - \cos q_3 \cos q_4 \sin q_2) \\ & - \sin q_2 \sin q_3 \sin q_5) + \cos q_6 (cos\, q_2\, cos\, q_4 + \cos q_3 \sin q_2 \sin q_4)\big) \\ & + l_5 \sin\theta_2 \big(\cos q_6 (\cos q_5 (\cos q_2 \sin q_4 - \cos q_3 \cos q_4 \sin q_2) \\ & - \sin q_2 \sin q_3 \sin q_5) - \sin q_6 (cos\, q_2\, cos\, q_4 + \cos q_3 \sin q_2 \sin q_4)\big) \end{aligned}$$

Άρα,

$$J_{L2} = b_2 \times r_{2,E} = \begin{bmatrix} J_{L2_1} \\ J_{L2_2} \\ J_{L2_3} \end{bmatrix}$$

όπου:

$$\begin{aligned} J_{L2_1} = {} & cos\, q_1 \Big(l_2 \cos q_2 - l_4 \cos\theta_1 (\cos q_2 \cos q_4 + \cos q_3 \sin q_2 \sin q_4) \\ & + l_4 \sin\theta_1 (\cos q_2 \sin q_4 - \cos q_3 \cos q_4 \sin q_2) - l_3 \cos q_3 \sin q_2 \\ & - l_5 \cos\theta_2 \big(\sin q_6 (\cos q_5 (\cos q_2 \sin q_4 - \cos q_3 \cos q_4 \sin q_2) \\ & - \sin q_2 \sin q_3 \sin q_5) + \cos q_6 (cos\, q_2\, cos\, q_4 + \cos q_3 \sin q_2 \sin q_4)\big) \\ & + l_5 \sin\theta_2 \big(\cos q_6 (\cos q_5 (\cos q_2 \sin q_4 - \cos q_3 \cos q_4 \sin q_2) \\ & - \sin q_2 \sin q_3 \sin q_5) - \sin q_6 (cos\, q_2\, cos\, q_4 + \cos q_3 \sin q_2 \sin q_4)\big)\Big) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_{L2_2} = {} & \sin q_1 \Big(l_2 \cos q_2 - l_4 \cos\theta_1 (\cos q_2 \cos q_4 + \cos q_3 \sin q_2 \sin q_4) \\ & + l_4 \sin\theta_1 (\cos q_2 \sin q_4 - \cos q_3 \cos q_4 \sin q_2) - l_3 \cos q_3 \sin q_2 \\ & - l_5 \cos\theta_2 \big(\sin q_6 (\cos q_5 (\cos q_2 \sin q_4 - \cos q_3 \cos q_4 \sin q_2) \\ & - \sin q_2 \sin q_3 \sin q_5) + \cos q_6 (cos\, q_2\, cos\, q_4 + \cos q_3 \sin q_2 \sin q_4)\big) \\ & + l_5 \sin\theta_2 \big(\cos q_6 (\cos q_5 (\cos q_2 \sin q_4 - \cos q_3 \cos q_4 \sin q_2) \\ & - \sin q_2 \sin q_3 \sin q_5) - \sin q_6 (cos\, q_2\, cos\, q_4 + \cos q_3 \sin q_2 \sin q_4)\big)\Big) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_{L2_3} = {} & l_4 \cos q_4 \cos\theta_1 \sin q_2 - l_3 \cos q_2 \cos q_3 - l_2 \sin q_2 - l_4 \sin q_2 \sin q_4 \sin\theta_1 \\ & - l_4 \cos q_2 \cos q_3 \cos q_4 \sin\theta_1 - l_4 \cos q_2 \cos q_3 \cos\theta_1 \sin q_4 \\ & + l_5 \cos q_4 \cos q_6 \cos\theta_2 \sin q_2 + l_5 \cos q_4 \sin q_2 \sin q_6 \sin\theta_2 \\ & - l_5 \cos q_2 \cos q_3 \cos q_6 \cos\theta_2 \sin q_4 - l_5 \cos q_2 \cos q_3 \sin q_4 \sin q_6 \sin\theta_2 \\ & - l_5 \cos q_2 \cos q_6 \sin q_3 \sin q_5 \sin\theta_2 + l_5 \cos q_2 \cos\theta_2 \sin q_3 \sin q_5 \sin q_6 \\ & - l_5 \cos q_5 \cos q_6 \sin q_2 \sin q_4 \sin\theta_2 + l_5 \cos q_5 \cos\theta_2 \sin q_2 \sin q_4 \sin q_6 \\ & - l_5 \cos q_2 \cos q_3 \cos q_4 \cos q_5 \cos q_6 \sin\theta_2 \\ & + l_5 \cos q_2 \cos q_3 \cos q_4 \cos q_5 \cos\theta_2 \sin q_6 \end{aligned}$$

και

$$J_{A2} = \begin{bmatrix} J_{A2_1} \\ J_{A2_2} \\ J_{A2_3} \end{bmatrix} = b_2 = \begin{bmatrix} -\sin q_1 \\ \cos q_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Στη συνέχεια, για $\boldsymbol{i} = \mathbf{3}$ θα έχουμε το εξής μητρώο στροφής:

$$\begin{bmatrix} \cos q_1 \cos q_2 \cos q_3 - \sin q_1 \sin q_3 & -\cos q_3 \sin q_1 - \cos q_1 \cos q_2 \sin q_3 & \cos q_1 \sin q_2 \\ \cos q_1 \sin q_3 + \cos q_2 \cos q_3 \sin q_1 & \cos q_1 \cos q_3 - \cos q_2 \sin q_1 \sin q_3 & \sin q_1 \sin q_2 \\ -\cos q_3 \sin q_2 & \sin q_2 \sin q_3 & \cos q_2 \end{bmatrix}$$

Επομένως, $b_3 = [\cos q_1 \sin q_2 \quad \sin q_1 \sin q_2 \quad \cos q_2]^{\mathrm{T}}$

Είναι $r_{3,E} = r_{0E} - r_{03} = \begin{bmatrix} r_{3E\_1} \\ r_{3E\_2} \\ r_{3E\_3} \end{bmatrix}$, όπου:

$$\begin{aligned} r_{3E\_1} = l_3(&\sin q_1 \sin q_3 - \cos q_1 \cos q_2 \cos q_3) \\ &- l_4 \cos\theta_1 \left(\sin q_4 \left(\sin q_1 \sin q_3 - \cos q_1 \cos q_2 \cos q_3\right) \right. \\ &\left. + \cos q_1 \cos q_4 \sin q_2\right) \\ &- l_5 \cos\theta_2 \Big(\cos q_6 \left(\sin q_4 \left(\sin q_1 \sin q_3 - \cos q_1 \cos q_2 \cos q_3\right) \right. \\ &\left. + \cos q_1 \cos q_4 \sin q_2\right) \\ &- \sin q_6 \big(cos\, q_5 \left(cos\, q_4 \left(\sin q_1 \sin q_3 - \cos q_1 \cos q_2 \cos q_3\right) \right. \\ &\left. - \cos q_1 \sin q_2 \sin q_4\right) - \sin q_5 \left(cos\, q_3 \sin q_1 + \cos q_1 \cos q_2 \sin q_3\right)\big)\Big) \\ &- l_4 \sin\theta_1 \left(\cos q_4 \left(\sin q_1 \sin q_3 - \cos q_1 \cos q_2 \cos q_3\right) \right. \\ &\left. - \cos q_1 \sin q_2 \sin q_4\right) \\ &- l_5 \sin\theta_2 \Big(\sin q_6 \left(\sin q_4 \left(\sin q_1 \sin q_3 - \cos q_1 \cos q_2 \cos q_3\right) \right. \\ &\left. + \cos q_1 \cos q_4 \sin q_2\right) \\ &+ \cos q_6 \big(cos\, q_5 \left(cos\, q_4 \left(\sin q_1 \sin q_3 - \cos q_1 \cos q_2 \cos q_3\right) \right. \\ &\left. - \cos q_1 \sin q_2 \sin q_4\right) - \sin q_5 \left(cos\, q_3 \sin q_1 + \cos q_1 \cos q_2 \sin q_3\right)\big)\Big) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
r_{3E_2} = {} & l_3(\cos q_1 \sin q_3 + \cos q_2 \cos q_3 \sin q_1) \\
& + l_4 \cos \theta_1 \, (\sin q_4 \, (\cos q_1 \sin q_3 + \cos q_2 \cos q_3 \sin q_1) \\
& - \cos q_4 \sin q_1 \sin q_2) \\
& + l_4 \sin \theta_1 \, (\cos q_4 \, (\cos q_1 \sin q_3 + \cos q_2 \cos q_3 \sin q_1) \\
& + \sin q_1 \sin q_2 \sin q_4\big) \\
& + l_5 \cos \theta_2 \Big(\cos q_6 \, (\sin q_4 \, (\cos q_1 \sin q_3 + \cos q_2 \cos q_3 \sin q_1) \\
& - \cos q_4 \sin q_1 \sin q_2) \\
& - \sin q_6 \, \big(cos\, q_5 \, (cos\, q_4 \, (\cos q_1 \sin q_3 + \cos q_2 \cos q_3 \sin q_1) \\
& + \sin q_1 \sin q_2 \sin q_4) - \sin q_5 \, (cos\, q_1 \, cos\, q_3 - \cos q_2 \sin q_1 \sin q_3))\big)\Big) \\
& + l_5 \sin \theta_2 \Big(\sin q_6 \, (\sin q_4 \, (\cos q_1 \sin q_3 + \cos q_2 \cos q_3 \sin q_1) \\
& - \cos q_4 \sin q_1 \sin q_2) \\
& + cos\, q_6 \, \big(cos\, q_5 \, (cos\, q_4 \, (\cos q_1 \sin q_3 + \cos q_2 \cos q_3 \sin q_1) \\
& + \sin q_1 \sin q_2 \sin q_4) - \sin q_5 \, (cos\, q_1 \, cos\, q_3 - \cos q_2 \sin q_1 \sin q_3))\big)\Big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
r_{3E\_3} = {} & l_4 \sin \theta_1 \, (\cos q_2 \sin q_4 - \cos q_3 \cos q_4 \sin q_2) \\
& - l_4 \cos \theta_1 \, (\cos q_2 \cos q_4 + \cos q_3 \sin q_2 \sin q_4) - l_3 \cos q_3 \sin q_2 \\
& - l_5 \cos \theta_2 \big(\sin q_6 \, (\cos q_5 \, (\cos q_2 \sin q_4 - \cos q_3 \cos q_4 \sin q_2) \\
& - \sin q_2 \sin q_3 \sin q_5) + \cos q_6 \, (cos\, q_2 \, cos\, q_4 + \cos q_3 \sin q_2 \sin q_4)\big) \\
& + l_5 \sin \theta_2 \big(\cos q_6 \, (\cos q_5 \, (\cos q_2 \sin q_4 - \cos q_3 \cos q_4 \sin q_2) \\
& - \sin q_2 \sin q_3 \sin q_5) - \sin q_6 \, (cos\, q_2 \, cos\, q_4 + \cos q_3 \sin q_2 \sin q_4)\big)
\end{aligned}
$$

Άρα,

$$
J_{L3} = b_3 \times r_{3,E} = \begin{bmatrix} J_{L3_1} \\ J_{L3_2} \\ J_{L3_3} \end{bmatrix},
$$

όπου:

$$
\begin{aligned}
J_{L3_1} = -\cos q_2 \Big(& l_3(\cos q_1 \sin q_3 + \cos q_2 \cos q_3 \sin q_1) \\
& + l_4 \cos\theta_1 \,(\sin q_4 \,(\cos q_1 \sin q_3 + \cos q_2 \cos q_3 \sin q_1) \\
& - \cos q_4 \sin q_1 \sin q_2) \\
& + l_4 \sin\theta_1 \,(\cos q_4 \,(\cos q_1 \sin q_3 + \cos q_2 \cos q_3 \sin q_1) \\
& + \sin q_1 \sin q_2 \sin q_4) \\
& + l_5 \cos\theta_2 \Big(\cos q_6 \,(\sin q_4 \,(\cos q_1 \sin q_3 + \cos q_2 \cos q_3 \sin q_1) \\
& - \cos q_4 \sin q_1 \sin q_2) \\
& - \sin q_6 \,\big(cos\, q_5 \,(cos\, q_4 \,(\cos q_1 \sin q_3 + \cos q_2 \cos q_3 \sin q_1) \\
& + \sin q_1 \sin q_2 \sin q_4) - \sin q_5 \,(cos\, q_1\, cos\, q_3 - \cos q_2 \sin q_1 \sin q_3))\Big) \\
& + l_5 \sin\theta_2 \Big(\sin q_6 \,(\sin q_4 \,(\cos q_1 \sin q_3 + \cos q_2 \cos q_3 \sin q_1) \\
& - \cos q_4 \sin q_1 \sin q_2) \\
& + cos\, q_6 \,\big(cos\, q_5 \,(cos\, q_4 \,(\cos q_1 \sin q_3 + \cos q_2 \cos q_3 \sin q_1) \\
& + \sin q_1 \sin q_2 \sin q_4) - \sin q_5 \,(cos\, q_1\, cos\, q_3 - \cos q_2 \sin q_1 \sin q_3))\big)\Big)\Big) \\
& - \sin q_1 \sin q_2 \Big(l_4 \cos\theta_1 \,(\cos q_2 \cos q_4 + \cos q_3 \sin q_2 \sin q_4) \\
& - l_4 \sin\theta_1 \,(\cos q_2 \sin q_4 - \cos q_3 \cos q_4 \sin q_2) + l_3 \cos q_3 \sin q_2 \\
& + l_5 \cos\theta_2 \big(\sin q_6 \,(\cos q_5 \,(\cos q_2 \sin q_4 - \cos q_3 \cos q_4 \sin q_2) \\
& - \sin q_2 \sin q_3 \sin q_5) + \cos q_6 \,(cos\, q_2\, cos\, q_4 + \cos q_3 \sin q_2 \sin q_4)\big) \\
& - l_5 \sin\theta_2 \big(\cos q_6 \,(\cos q_5 \,(\cos q_2 \sin q_4 - \cos q_3 \cos q_4 \sin q_2) \\
& - \sin q_2 \sin q_3 \sin q_5) - \sin q_6 \,(cos\, q_2\, cos\, q_4 + \cos q_3 \sin q_2 \sin q_4)\big)\Big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
J_{L3_2} = {} & l_3 \cos q_1 \cos q_3 - l_3 \cos q_2 \sin q_1 \sin q_3 + l_4 \cos q_1 \cos q_3 \cos q_4 \sin\theta_1 \\
& + l_4 \cos q_1 \cos q_3 \cos\theta_1 \sin q_4 + l_5 \cos q_1 \cos q_3 \cos q_6 \cos\theta_2 \sin q_4 \\
& - l_4 \cos q_2 \cos q_4 \sin q_1 \sin q_3 \sin\theta_1 - l_4 \cos q_2 \cos\theta_1 \sin q_1 \sin q_3 \sin q_4 \\
& + l_5 \cos q_1 \cos q_3 \sin q_4 \sin q_6 \sin\theta_2 + l_5 \cos q_1 \cos q_6 \sin q_3 \sin q_5 \sin\theta_2 \\
& - l_5 \cos q_1 \cos\theta_2 \sin q_3 \sin q_5 \sin q_6 \\
& - l_5 \cos q_2 \sin q_1 \sin q_3 \sin q_4 \sin q_6 \sin\theta_2 \\
& + l_5 \cos q_1 \cos q_3 \cos q_4 \cos q_5 \cos q_6 \sin\theta_2 \\
& - l_5 \cos q_1 \cos q_3 \cos q_4 \cos q_5 \cos\theta_2 \sin q_6 \\
& - l_5 \cos q_2 \cos q_6 \cos\theta_2 \sin q_1 \sin q_3 \sin q_4 \\
& + l_5 \cos q_2 \cos q_3 \cos q_6 \sin q_1 \sin q_5 \sin\theta_2 \\
& - l_5 \cos q_2 \cos q_3 \cos\theta_2 \sin q_1 \sin q_5 \sin q_6 \\
& - l_5 \cos q_2 \cos q_4 \cos q_5 \cos q_6 \sin q_1 \sin q_3 \sin\theta_2 \\
& + l_5 \cos q_2 \cos q_4 \cos q_5 \cos\theta_2 \sin q_1 \sin q_3 \sin q_6
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
J_{L3_3} = \sin q_2 \,(& l_3 \sin q_3 + l_4 \cos q_4 \sin q_3 \sin\theta_1 + l_4 \cos\theta_1 \sin q_3 \sin q_4 \\
& + l_5 \cos q_6 \cos\theta_2 \sin q_3 \sin q_4 - l_5 \cos q_3 \cos q_6 \sin q_5 \sin\theta_2 \\
& + l_5 \cos q_3 \cos\theta_2 \sin q_5 \sin q_6 + l_5 \sin q_3 \sin q_4 \sin q_6 \sin\theta_2 \\
& + l_5 \cos q_4 \cos q_5 \cos q_6 \sin q_3 \sin\theta_2 - l_5 \cos q_4 \cos q_5 \cos\theta_2 \sin q_3 \sin q_6)
\end{aligned}
$$

και

$$
J_{A3} = \begin{bmatrix} J_{A3_1} \\ J_{A3_2} \\ J_{A3_3} \end{bmatrix} = b_3 = \begin{bmatrix} \cos q_1 \sin q_2 \\ \sin q_1 \sin q_2 \\ \cos q_2 \end{bmatrix}
$$

Για την τέταρτη $\boldsymbol{i} = \mathbf{4}$ χρησιμοποιούμε τον παρακάτω πίνακα στροφής:

$$\begin{bmatrix} \alpha_{4\_11} & \alpha_{4\_12} & \alpha_{4\_13} \\ \alpha_{4\_21} & \alpha_{4\_22} & \alpha_{4\_23} \\ \alpha_{4\_31} & \alpha_{4\_32} & \alpha_{4\_33} \end{bmatrix}$$

$\alpha_{4\_11} = \cos q_1 \sin q_2 \, sinq_4 - cosq_4(sinq_1 sinq_3 - cosq_1 cosq_2 cosq_3)$

$\alpha_{4\_12} = sinq_4 \,(sinq_1\, sinq_3 \,-\, cosq_1\, cosq_2\, cosq_3) \,+\, cosq_1\, cosq_4\, sinq_2$

$\alpha_{4\_13} \, = cosq_3\, sinq_1 \,+\, cosq_1\, cosq_2\, sinq_3$

$\alpha_{4\_21} = cosq_4 \,(cosq_1\, sinq_3 \,+\, cosq_2\, cosq_3\, sinq_1) \,+\, sinq_1\, sinq_2\, sinq_4$

$\alpha_{4\_22} = cosq_4\, sinq_1\, sinq_2 \,-\, sinq_4 \,(cosq_1\, sinq_3 + \, cosq_2\, cosq_3\, sinq_1)$

$\alpha_{4\_23} = cosq_2\, sinq_1\, sinq_3 \,-\, cosq_1\, cosq_3$

$\alpha_{4\_31} = cosq_2\, sinq_4 \,-\, cosq_3 cosq_4\, sinq_2$

$\alpha_{4\_32} = cosq_2\, cosq_4 + \, cosq_3\, sinq_2\, sinq_4$

$\alpha_{4\_33} = -sinq_2\, sinq_3$

Επομένως $b_4 = \begin{bmatrix} cosq_3\, sinq_1 \,+\, cosq_1\, cosq_2\, sinq_3 \\ cosq_2\, sinq_1\, sinq_3 \,-\, cosq_1\, cosq_3 \\ -sinq_2\, sinq_3 \end{bmatrix}$

Έχουμε $r_{4,E} = r_{0E} - r_{04} = \begin{bmatrix} r_{4E\_1} \\ r_{4E\_2} \\ r_{4E\_3} \end{bmatrix}$,όπου:

$$\begin{aligned} r_{4E_1} = -\, l_4\, cos\theta_1 \,&(sinq_4\,(sinq_1\, sinq_3 \,-\, cosq_1\, cosq_2\, cosq_3) \,+\, cosq_1\, cosq_4\, sinq_2) \\ &-\, l_5\, cos\theta_2\,(cosq_6\,(sinq_4\,(sinq_1\, sinq_3 \\ &-\, cosq_1\, cosq_2\, cosq_3) + cosq_1\, cosq_4\, sinq_2) \\ &-\, sinq_6\,(cosq_5\,(cosq_4\,(sinq_1\, sinq_3 \,-\, cosq_1\, cosq_2\, cosq_3) \\ &-\, cosq_1\, sinq_2\, sinq_4) \,-\, sinq_5\,(cosq_3\, sinq_1 \,+\, cosq_1\, cosq_2\, sinq_3))) \\ &-\, l_4\, sin\theta_1\,(cosq_4\,(sinq_1\, sinq_3 \,-\, cosq_1\, cosq_2\, cosq_3) \\ &-\, cosq_1\, sinq_2\, sinq_4) \,-\, l_5\, sin\theta_2\,(sinq_6\,(sinq_4\,(sinq_1\, sinq_3 \\ &-\, cosq_1\, cosq_2\, cosq_3) \,+\, cosq_1\, cosq_4\, sinq_2) \\ &+\, cosq_6\,(cosq_5\,(cosq_4\,(sinq_1\, sinq_3 \,-\, cosq_1\, cosq_2\, cosq_3) \\ &-\, cosq_1\, sinq_2\, sinq_4) \,-\, sinq_5\,(cosq_3\, sinq_1 \,+\, cosq_1\, cosq_2\, sinq_3))) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
r_{4E_2} = {} & l_4\, cos\theta_1\, (sinq_4\, (cosq_1\, sinq_3 + cosq_2\, cosq_3\, sinq_1) - cosq_4\, sinq_1\, sinq_2) \\
& + l_4\, sin\theta_1\, (cosq_4\, (cosq_1\, sinq_3 + cosq_2\, cosq_3\, sinq_1) \\
& + sinq_1\, sinq_2\, sinq_4) + l_5\, cos\theta_2\, (cosq_6\, (sinq_4\, (cosq_1\, sinq_3 \\
& + cosq_2\, cosq_3\, sinq_1) - cosq_4\, sinq_1\, sinq_2) \\
& - sinq_6\, (cosq_5\, (cosq_4\, (cosq_1\, sinq_3 + cosq_2\, cosq_3\, sinq_1) \\
& + sinq_1\, sinq_2\, sinq_4) - sinq_5\, (cosq_1\, cosq_3 - cosq_2\, sinq_1\, sinq_3))) \\
& + l_5\, sin\theta_2\, (sinq_6\, (sinq_4\, (cosq_1\, sinq_3 + cosq_2\, cosq_3\, sinq_1) \\
& - cosq_4\, sinq_1\, sinq_2) + cosq_6\, (cosq_5\, (cosq_4\, (cosq_1\, sinq_3 \\
& + cosq_2\, cosq_3\, sinq_1) + sinq_1\, sinq_2\, sinq_4) - sinq_5\, (cosq_1\, cosq\ _3 \\
& - cosq_2\, sinq_1\, sinq_3)))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
r_{4E_3} = {} & l_4\, sin\theta_1\, (cosq_2\, sinq_4 - cosq_3\, cosq_4\, sinq_2) - l_4\, cos\theta_1\, (cosq_2\, cosq_4 \\
& + cosq_3\, sinq_2\, sinq_4) - l_5\, cos\theta_2\, (sinq_6\, (cosq_5\, (cosq_2\, sinq_4 \\
& - cosq_3\, cosq_4\, sinq_2) - sinq_2\, sinq_3\, sinq_5) + cosq_6\, (cosq_2\, cosq_4 \\
& + cosq_3\, sinq_2\, sinq_4)) + l_5\, sin\theta_2\, (cosq_6\, (cosq_5\, (cosq_2\, sinq_4 \\
& - cosq_3\, cosq_4\, sinq_2) - sinq_2\, sinq_3\, sinq_5) - sinq_6\, (cosq_2\, cosq_4 \\
& + cosq_3\, sinq_2\, sinq_4))
\end{aligned}
$$

Άρα,

$$J_{L4} = b_4 \times r_{4,E} = \begin{bmatrix} J_{L4_1} \\ J_{L4_2} \\ J_{L4_3} \end{bmatrix},$$

όπου

$$J_{L4_1} = (cosq_1\, cosq_3 \,-\, cosq_2\, sinq_1\, sinq_3)\, (l_4\, cos\theta_1\, (cosq_2\, cosq_4$$
$$+\, cosq_3\, sinq_2\, sinq_4) \,-\, l_4\, sin\theta_1\, (cosq_2\, sinq_4 \,-\, cosq_3\, cosq_4\, sinq_2)$$
$$+\, l_5\, cos\theta_2\, (sinq_6\, (cosq_5\, (cosq_2\, sinq_4 \,-\, cosq_3\, cosq_4\, sinq_2)$$
$$-\, sinq_2\, sinq_3\, sinq_5) \,+\, cosq_6\, (cosq_2\, cosq_4 \,+\, cosq_3\, sinq_2\, sinq_4))$$
$$-\, l_5\, sin\theta_2\, (cosq_6\, (cosq_5\, (cosq_2\, sinq_4 \,-\, cosq_3\, cosq_4\, sinq_2)$$
$$-\, sinq_2\, sinq_3\, sinq_5) \,-\, sinq_6\, (cosq_2\, cosq_4 + \, cosq_3\, sinq_2\, sinq_4)))$$
$$+\, sinq_2\, sinq_3\, (l_4\, cos\theta_1\, (sinq_4\, (cosq_1\, sinq_3 \,+\, cosq_2\, cosq_3\, sinq_1)$$
$$-\, cosq_4\, sinq_1\, sinq_2 \,+\, l_4\, sin\theta_1\, (cosq_4\, (cosq_1\, sinq_3$$
$$+\, cosq_2\, cosq_3\, sinq_1) \,+\, sinq_1\, sinq_2\, sinq_4)$$
$$+\, l_5\, cos\theta_2\, (cosq_6\, (sinq_4\, (cosq_1\, sinq_3 \,+\, cosq_2\, cosq_3\, sinq_1)$$
$$-\, cosq_4\, sinq_1\, sinq_2) \,-\, sinq_6\, (cosq_5\, (cosq_4\, (cosq_1\, sinq_3$$
$$+\, cosq_2\, cosq_3\, sinq_1) \,+\, sinq_1\, sinq_2\, sinq_4 - \, sinq_5\, (cosq_1\, cosq_3$$
$$-\, cosq_2\, sinq_1\, sinq_3))) \,+\, l_5\, sin\theta_2\, (sinq_6\, (sinq_4\, (cosq_1\, sinq_3$$
$$+\, cosq_2\, cosq_3\, sinq_1) \,-\, cosq_4\, sinq_1\, sinq_2)$$
$$+\, cosq_6\, (cosq_5\, (cosq_4\, (cosq_1\, sinq_3 \,+\, cosq_2\, cosq_3\, sinq_1)$$
$$+\, sinq_1\, sinq_2\, sinq_4) \,-\, sinq_5\, (cosq_1\, cosq_3 \,-\, cosq_2\, sinq_1\, sinq_3))))$$

$$J_{L4_2} = cosq_3\, sinq_1 \,+\, cosq_1\, cosq_2\, sinq_3)\, (l_4\, cos\theta_1\, (cosq_2\, cosq_4 \,+\, cosq_3\, sinq_2\, sinq_4)$$
$$-\, l_4\, sin\theta_1\, (cosq_2\, sinq_4 \,-\, cosq_3\, cosq_4\, sinq_2)$$
$$+\, l_5\, cos\theta_2\, (sinq_6\, (cosq_5\, (cosq_2\, sinq_4 - \, cosq_3\, cosq_4\, sinq_2)$$
$$-\, sinq_2\, sinq_3\, sinq_5) \,+\, cosq_6\, (cosq_2\, cosq_4 + \, cosq_3\, sinq_2\, sinq_4))$$
$$-\, l_5\, sin\theta_2\, (cosq_6\, (cosq_5\, (cosq_2\, sinq_4 \,-\, cosq_3\, cosq_4\, sinq_2)$$
$$-\, sinq_2\, sinq_3\, sinq_5) \,- sinq_6\, (cosq_2\, cosq_4 \,+\, cosq_3\, sinq_2\, sinq_4)))$$
$$+ sinq_2\, sinq_3\, (l_4\, cos\theta_1\, (sinq_4\, (sinq_1\, sinq_3 \,- cosq_1\, cosq_2\, cosq_3)$$
$$+\, cosq_1\, cosq_4\, sinq_2) \,+\, l_5\, cos\theta_2\, (cosq_6\, (sinq_4\, (sinq_1\, sinq_3$$
$$-\, cosq_1\, cosq_2\, cosq_3) \,+\, cosq_1\, cosq_4\, sinq_2)$$
$$-\, sinq_6\, (cosq_5\, (cosq_4\, (sinq_1\, sinq_3 \,-\, cosq_1\, cosq_2\, cosq_3)$$
$$-\, cosq_1\, sinq_2\, sinq_4) \,-\, sinq_5\, (cosq_3\, sinq_1 \,+\, cosq_1\, cosq_2\, sinq_3)))$$
$$+ l_4\, sin\theta_1\, (cosq_4\, (sinq_1\, sinq_3 \,-\, cosq_1\, cosq_2\, cosq_3)$$
$$-\, cosq_1\, sinq_2\, sinq_4) \,+\, l_5\, sin\theta_2\, (sinq_6\, (sinq_4\, (sinq_1\, sinq_3$$
$$-\, cosq_1\, cosq_2\, cosq_3) \,+\, cosq_1\, cosq_4\, sinq_2)$$
$$+\, cosq_6\, (cosq_5\, (cosq_4\, (\, sinq_3 \,-\, cosq_1\, cosq_2\, cosq_3)$$
$$-\, cosq_1\, sinq_2\, sinq_4) \,-\, sinq_5\, (cosq_3\, sinq_1 \,+\, cosq_1\, cosq_2\, sinq_3))))$$

$$J_{L4_3} = l_4\, cosq_2\, cosq_4\, sin\theta_1 + l_4\, cosq_2\, cos\theta_1\, sinq_4 - l_4\, cosq_3\, cosq_4\, cos\theta_1\, sinq_2$$
$$+ l_5\, cosq_2\, cosq_6\, cos\theta_2\, sinq_4 + l_4\, cosq_3\, sinq_2\, sinq_4\, sin\theta_1$$
$$+ l_5\, cosq_2\, sinq_4\, sinq_6\, sin\theta_2 - l_5\, cosq_3\, cosq_4\, cosq_6\, cos\theta_2\, sinq_2$$
$$+ l_5\, cosq_2\, cosq_4\, cosq_5\, cosq_6\, sin\theta_2$$
$$- l_5\, cosq_2\, cosq_4\, cosq_5\, cos\theta_2\, sinq_6 - l_5\, cosq_3\, cosq_4\, sinq_2\, sinq_6\, sin\theta_2$$
$$+ l_5\, cosq_3\, cosq_5\, cosq_6\, sinq_2\, sinq_4\, sin\theta_2$$
$$- l_5\, cosq_3\, cosq_5\, cos\theta_2\, sinq_2\, sinq_4\, sinq_6$$

και

$$J_{A4} = \begin{bmatrix} J_{A4_1} \\ J_{A4_2} \\ J_{A4_3} \end{bmatrix} = b_4 = \begin{bmatrix} cosq_3\, sinq_1 + cosq_1\, cosq_2\, sinq_3 \\ cosq_2\, sinq_1\, sinq_3 - cosq_1\, cosq_3 \\ -sinq_2\, sinq_3 \end{bmatrix}$$

Στη συνέχεια, για $\boldsymbol{i} = \mathbf{5}$ έχουμε τον παρακάτω πίνακα στροφής:

$$\begin{bmatrix} \alpha_{5\_11} & \alpha_{5\_12} & \alpha_{5\_13} \\ \alpha_{5\_21} & \alpha_{5\_22} & \alpha_{5\_23} \\ \alpha_{5\_31} & \alpha_{5\_32} & \alpha_{5\_33} \end{bmatrix}$$

$$\alpha_{5\_11} = sinq_5\, (cosq_3\, sinq_1 + cosq_1\, cosq_2\, sinq_3) - cosq_5\, (cosq_4\, (sinq_1\, sinq_3 - cosq_1 cosq_2\, cosq_3) - cosq_1\, sinq_2\, sinq_4)$$

$$\alpha_{5\_12} = sinq_5\, (cosq_4\, (sinq_1\, sinq_3 - cosq_1\, cosq_2\, cosq_3) - cosq_1\, sinq_2\, sinq_4) + cosq_5\, (cosq_3\, sinq_1 + cosq_1\, cosq_2\, sinq_3)$$

$$\alpha_{5\_13} = - sinq_4\, (sinq_1\, sinq_3 - cosq_1\, cosq_2\, cosq_3) - cosq_1\, cosq_4\, sinq_2$$

$$\alpha_{5\_21} = cosq_5\, (cosq_4\, (cosq_1\, sinq_3 + cosq_2\, cosq_3\, sinq_1) + sinq_1\, sinq_2\, sinq_4) - sinq_5\, (cosq_1\, cosq_3 - cosq_2\, sinq_1\, sinq_3)$$

$$\alpha_{5\_22} = - sinq_5\, (cosq_4\, (cosq_1\, sinq_3 + cosq_2\, cosq_3\, sinq_1) + sinq_1\, sinq_2\, sinq_4) - cosq_5\, (cosq_1\, cosq_3 - cosq_2\, sinq_1\, sinq_3)$$

$$\alpha_{5\_23} = sinq_4\, (cosq_1\, sinq_3 + cosq_2\, cosq_3\, sinq_1) - cosq_4\, sinq_1\, sinq_2$$

$$\alpha_{5\_31} = cosq_5\, (cosq_2\, sinq_4 - cosq_3\, cosq_4\, sinq_2) - sinq_2\, sinq_3\, sinq_5$$

$$\alpha_{5\_32} = - sinq_5\, (cosq_2\, sinq_4 - cosq_3\, cosq_4\, sinq_2) - cosq_5\, sinq_2\, sinq_3$$

$$\alpha_{5\_33} = - cosq_2\, cosq_4 - cosq_3\, sinq_2\, sinq_4$$

Επομένως $b_5 = \begin{bmatrix} - sinq_4\, (sinq_1\, sinq_3 - cosq_1\, cosq_2\, cosq_3) - cosq_1\, cosq_4\, sinq_2 \\ sinq_4\, (cosq_1\, sinq_3 + cosq_2\, cosq_3\, sinq_1) - cosq_4\, sinq_1\, sinq_2 \\ - cosq_2\, cosq_4 - cosq_3\, sinq_2\, sinq_4 \end{bmatrix}$

Είναι $r_{5,E} = r_{0E} - r_{05} = \begin{bmatrix} r_{5E\_1} \\ r_{5E\_2} \\ r_{5E\_3} \end{bmatrix}$, όπου:

$$r_{5E_1} = -\, l_5\, cos\theta_2\, (cosq_6\, (sinq_4\, (sinq_1\, sinq_3 - cosq_1\, cosq_2\, cosq_3) + cosq_1\, cosq_4\, sinq_2) - sinq_6\, (cosq_5\, (cosq_4\, (sinq_1\, sinq_3 - cosq_1\, cosq_2\, cosq_3) - cosq_1\, sinq_2\, sinq_4) - sinq_5\, (cosq_3\, sinq_1 + cosq_1\, cosq_2\, sinq_3))) - l_5\, sin\theta_2\, (sinq_6\, (sinq_4\, (sinq_1\, sinq_3 - cosq_1\, cosq_2\, cosq_3) + cosq_1\, cosq_4\, sinq_2) + cosq_6\, (cosq_5\, (cosq_4\, (sinq_1\, sinq_3 - cosq_1\, cosq_2\, cosq_3) - cosq_1\, sinq_2\, sinq_4) - sinq_5\, (cosq_3\, sinq_1 + cosq_1\, cosq_2\, sinq_3)))$$

$$r_{5E_2} = l_5\, cos\theta_2\, (cosq_6\, (sinq_4\, (cosq_1\, sinq_3 + cosq_2\, cosq_3\, sinq_1) - cosq_4\, sinq_1\, sinq_2) - sinq_6\, (cosq_5\, (cosq_4\, (cosq_1\, sinq_3 + cosq_2\, cosq_3\, sinq_1) + sinq_1\, sinq_2\, sinq_4) - sinq_5\, (cosq_1\, cosq_3 - cosq_2 sinq_1\, sinq_3))) + l_5\, sin\theta_2\, (sinq_6\, (sinq_4\, (cosq_1\, sinq_3 + cosq_2\, cosq_3\, sinq_1) - cosq_4\, sinq_1\, sinq_2) + cosq_6\, (cosq_5\, (cosq_4\, (cosq_1\, sinq_3 + cosq_2\, cosq_3\, sinq_1) + sinq_1\, sinq_2\, sinq_4) - sinq_5\, (cosq_1\, cosq_3 - cosq_2\, sinq_1\, sinq_3)))$$

$$r_{5E_3} = l_5\, sin\theta_2\, (cosq_6\, (cosq_5\, (cosq_2\, sinq_4 - cosq_3\, cosq_4\, sinq_2) - sinq_2\, sinq_3\, sinq_5) - sinq_6\, (cosq_2\, cosq_4 + cosq_3\, sinq_2\, sinq_4)) - l_5\, cos\theta_2\, (sinq_6\, (cosq_5\, (cosq_2\, sinq_4 - cosq_3\, cosq_4\, sinq_2) - sinq_2\, sinq_3\, sinq_5) + cosq_6\, (cosq_2\, cosq_4 + cosq_3\, sinq_2\, sinq_4))$$

Άρα,

$$J_{L5} = b_5 \times r_{5,E} = \begin{bmatrix} J_{L5_1} \\ J_{L5_2} \\ J_{L5_3} \end{bmatrix},$$

όπου:

$$J_{L5_1} = -l_5\, sin(q_6 - \theta_2)\, (cosq_3\, cosq_5\, sinq_1 + cosq_1\, cosq_2\, cosq_5\, sinq_3 - cosq_1\, sinq_2\, sinq_4\, sinq_5 + cosq_4\, sinq_1\, sinq_3\, sinq_5 - cosq_1\, cosq_2\, cosq_3\, cosq_4\, sinq_5)$$

$$J_{L5_2} = l_5\, sin(q_6 - \theta_2)\, (cosq_1\, cosq_3\, cosq_5 - cosq_2\, cosq_5\, sinq_1\, sinq_3 + cosq_1\, cosq_4\, sinq_3\, sinq_5 + sinq_1\, sinq_2\, sinq_4\, sinq_5 + cosq_2\, cosq_3\, cosq_4\, sinq_1\, sinq_5)$$

$$J_{L5_3} = l_5\, sin(q_6 - \theta_2)\,(cosq_5\, sinq_2\, sinq_3 + cosq_2\, sinq_4\, sinq_5 - cosq_3\, cosq_4\, sinq_2\, sinq_5)$$

και

$$J_{A5} = \begin{bmatrix} J_{A5_1} \\ J_{A5_2} \\ J_{A5_3} \end{bmatrix} = b_5 = \begin{bmatrix} -\,sinq_4\,(sinq_1\, sinq_3 - cosq_1\, cosq_2\, cosq_3) - cosq_1\, cosq_4\, sinq_2 \\ sinq_4\,(cosq_1\, sinq_3 + cosq_2\, cosq_3\, sinq_1) - cosq_4\, sinq_1 sinq_2) \\ -\,cosq_2\, cosq_4 - cosq_3\, sinq_2\, sinq_4 \end{bmatrix}$$

Συνεχίζοντας για $\boldsymbol{i} = \mathbf{6}$ ο πίνακας στροφής είναι:

$$\begin{bmatrix} a_{6\_11} & a_{6\_12} & a_{6\_13} \\ a_{6\_21} & a_{6\_22} & a_{6\_23} \\ a_{6\_31} & a_{6\_32} & a_{6\_33} \end{bmatrix}$$

$$\alpha_{6\_11} = -sinq_6(sinq_4(sinq_1 sinq_3 - cosq_1 cosq_2 cosq_3) + cosq_1 cosq_4 sinq_2) - cosq_6(cosq_5(cosq_4\,(sinq_1 sinq_3 - cosq_1 cosq_2 cosq_3) - cosq_1 sinq_2 sinq_4) - sinq_5(cosq_3 sinq_1 + cosq_1 cosq_2 sinq_3))$$

$$\alpha_{6\_12} = sinq_6\,(cosq_5\,(cosq_4(sinq_1\, sinq_3 - cosq_1\, cosq_2\, cosq_3) - cosq_1\, sinq_2\, sinq_4) - sinq_5\,(cosq_3\, sinq_1 + cosq_1\, cosq_2\, sinq_3)) - cosq_6\,(sinq_4\,(sin\, q_1\, sinq_3 - cosq_1\, cosq_2\, cosq_3) + cosq_1\, cosq_4\, sinq_2)$$

$$\alpha_{6\_13} = -\,sinq_5\,(cosq_4\,(sinq_1\, sinq_3 - cosq_1\, cosq_2\, cosq_3) - cosq_1\, sinq_2\, sinq_4) - cosq_5\,(cosq_3\, sinq_{\,1} + cosq_1 cosq_2 sinq_3)$$

$$\alpha_{6\_21} = sinq_6\,(sinq_4\,(cosq_1\, sinq_3 + cosq_2\, cosq_3\, sinq_1) - cosq_4\, sinq_1\, sinq_2) + cosq_6\,(cosq_5\,(cosq_4\,(cosq_1\, sinq_3 + cosq_2\, cosq_3\, sinq_1) + sinq_1\, sinq_2\, sinq_4) - sinq_5\,(cosq_1\, cosq_3 - cosq_2\, sinq_1\, sinq_3))$$

$$\alpha_{6\_22} = cosq_6\,(sinq_4\,(cosq_1\, sinq_3 + cosq_2\, cosq_3\, sinq_1) - cosq_4\, sinq_1\, sinq_2) - sinq_6\,(cosq_5\,(cosq_4\,(cosq_1\, sinq_3 + cosq_2\, cosq_3\, sinq_1) + sinq_1\, sinq_2\, sinq_4) - sinq_5\,(cosq_1\, cosq_3 - cosq_2\, sinq_1\, sinq_3))$$

$$\alpha_{6\_23} = sinq_5\,(cosq_4\,(cosq_1\, sinq_3 + cosq_2\, cosq_3\, sinq_1) + sinq_1\, sinq_2\, sinq_4) + cosq_5\,(cosq_1\, cosq_3 - cosq_2\, sinq_1\, sinq_3)$$

$$\alpha_{6\_31} = cosq_6\,(cosq_5\,(cosq_2\, sinq_4 - cosq_3\, cosq_4\, sinq_2) - sinq_2\, sinq_3\, sinq_5) - sinq_6\,(cosq_2\, cosq_{\,4} + cosq_3\, sinq_2\, sinq_4)$$

$$\alpha_{6\_32} = -\,sinq_6\,(cosq_5\,(cosq_2\, sinq_4 - cosq_3\, cosq_4\, sinq_2) - sinq_2\, sinq_3\, sinq_5) - cosq_6\,(cosq_2\, cosq_4 + cosq_3\, sinq_2\, sinq_4)$$

$$\alpha_{6\_33} = sinq_5\,(cosq_2\, sinq_4 - cosq_3\, cosq_4\, sinq_2) + cosq_5\, sinq_2\, sinq_3$$

Επομένως, $b_6 = [a_{6\_13} \quad a_{6\_23} \quad a_{6\_33}]^{\mathrm{T}}$

Είναι $r_{6,E} = r_{0E} - r_{06} = \begin{bmatrix} r_{6E\_1} \\ r_{6E\_2} \\ r_{6E\_3} \end{bmatrix}$, όπου:

$$
\begin{aligned}
r_{6E_1} = -l_5 \cos\theta_2 \Big(&\cos q_6 \left(\sin q_4 \left(\sin q_1 \sin q_3 - \cos q_1 \cos q_2 \cos q_3\right)\right. \\
&\left.+ \cos q_1 \cos q_4 \sin q_2\right) \\
&- \sin q_6 \big(cos\, q_5 \left(cos\, q_4 \left(\sin q_1 \sin q_3 - \cos q_1 \cos q_2 \cos q_3\right)\right. \\
&\left.- \cos q_1 \sin q_2 \sin q_4\right) - \sin q_5 \left(cos\, q_3 \sin q_1 + \cos q_1 \cos q_2 \sin q_3\right)\big)\Big) \\
&- l_5 \sin\theta_2 \Big(\sin q_6 \left(\sin q_4 \left(\sin q_1 \sin q_3 - \cos q_1 \cos q_2 \cos q_3\right)\right. \\
&\left.+ \cos q_1 \cos q_4 \sin q_2\right) \\
&+ \cos q_6 \big(cos\, q_5 \left(cos\, q_4 \left(\sin q_1 \sin q_3 - \cos q_1 \cos q_2 \cos q_3\right)\right. \\
&\left.- \cos q_1 \sin q_2 \sin q_4\right) - \sin q_5 \left(cos\, q_3 \sin q_1 + \cos q_1 \cos q_2 \sin q_3\right)\big)\Big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
r_{6E_2} = l_5 \cos\theta_2 \Big(&\cos q_6 \left(\sin q_4 \left(\cos q_1 \sin q_3 + \cos q_2 \cos q_3 \sin q_1\right) - \cos q_4 \sin q_1 \sin q_2\right) \\
&- \sin q_6 \big(cos\, q_5 \left(cos\, q_4 \left(\cos q_1 \sin q_3 + \cos q_2 \cos q_3 \sin q_1\right)\right. \\
&\left.+ \sin q_1 \sin q_2 \sin q_4\right) - \sin q_5 \left(cos\, q_1\, cos\, q_3 - \cos q_2 \sin q_1 \sin q_3\right)\big)\Big) \\
&+ l_5 \sin\theta_2 \Big(\sin q_6 \left(\sin q_4 \left(\cos q_1 \sin q_3 + \cos q_2 \cos q_3 \sin q_1\right)\right. \\
&\left.- \cos q_4 \sin q_1 \sin q_2\right) \\
&+ cos\, q_6 \big(cos\, q_5 \left(cos\, q_4 \left(\cos q_1 \sin q_3 + \cos q_2 \cos q_3 \sin q_1\right)\right. \\
&\left.+ \sin q_1 \sin q_2 \sin q_4\right) - \sin q_5 \left(cos\, q_1\, cos\, q_3 - \cos q_2 \sin q_1 \sin q_3\right)\big)\Big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
r_{6E_3} = l_5 \sin\theta_2 \big(&\cos q_6 \left(\cos q_5 \left(\cos q_2 \sin q_4 - \cos q_3 \cos q_4 \sin q_2\right) - \sin q_2 \sin q_3 \sin q_5\right) \\
&- \sin q_6 \left(cos\, q_2\, cos\, q_4 + \cos q_3 \sin q_2 \sin q_4\right)\big) \\
&- l_5 \cos\theta_2 \big(\sin q_6 \left(\cos q_5 \left(\cos q_2 \sin q_4 - \cos q_3 \cos q_4 \sin q_2\right)\right. \\
&\left.- \sin q_2 \sin q_3 \sin q_5\right) + \cos q_6 \left(cos\, q_2\, cos\, q_4 + \cos q_3 \sin q_2 \sin q_4\right)\big)
\end{aligned}
$$

Άρα,

$$J_{L6} = b_6 \times r_{6,E} = \begin{bmatrix} J_{L6_1} \\ J_{L6_2} \\ J_{L6_3} \end{bmatrix},$$

όπου:

$$
\begin{aligned}
J_{L6_1} = -(&\sin q_5 (\cos q_2 \sin q_4 - \cos q_3 \cos q_4 \sin q_2) \\
&+ \cos q_5 \sin q_2 \sin q_3) \Big(l_5 \cos \theta_2 \Big(\cos q_6 (\sin q_4 (\cos q_1 \sin q_3 \\
&+ \cos q_2 \cos q_3 \sin q_1) - \cos q_4 \sin q_1 \sin q_2) \\
&- \sin q_6 \big(cos\, q_5 (cos\, q_4 (\cos q_1 \sin q_3 + \cos q_2 \cos q_3 \sin q_1) \\
&+ \sin q_1 \sin q_2 \sin q_4) - \sin q_5 (cos\, q_1\, cos\, q_3 - \cos q_2 \sin q_1 \sin q_3)) \big) \Big) \\
&+ l_5 \sin \theta_2 \Big(\sin q_6 (\sin q_4 (\cos q_1 \sin q_3 + \cos q_2 \cos q_3 \sin q_1) \\
&- \cos q_4 \sin q_1 \sin q_2) \\
&+ cos\, q_6 \big(cos\, q_5 (cos\, q_4 (\cos q_1 \sin q_3 + \cos q_2 \cos q_3 \sin q_1) \\
&+ \sin q_1 \sin q_2 \sin q_4) - \sin q_5 (cos\, q_1\, cos\, q_3 - \cos q_2 \sin q_1 \sin q_3)) \big) \Big) \Big) \\
&- \Big(l_5 \cos \theta_2 \big(\sin q_6 (\cos q_5 (\cos q_2 \sin q_4 - \cos q_3 \cos q_4 \sin q_2) \\
&- \sin q_2 \sin q_3 \sin q_5) + \cos q_6 (cos\, q_2\, cos\, q_4 + \cos q_3 \sin q_2 \sin q_4) \big) \\
&- l_5 \sin \theta_2 \big(\cos q_6 (\cos q_5 (\cos q_2 \sin q_4 - \cos q_3 \cos q_4 \sin q_2) \\
&- \sin q_2 \sin q_3 \sin q_5) \\
&- \sin q_6 (cos\, q_2\, cos\, q_4 \\
&+ \cos q_3 \sin q_2 \sin q_4)) \big) \Big) \big(\sin q_5 (\cos q_4 (\cos q_1 \sin q_3 \\
&+ \cos q_2 \cos q_3 \sin q_1) + \sin q_1 \sin q_2 \sin q_4) \\
&+ \cos q_5 (cos\, q_1\, cos\, q_3 - \cos q_2 \sin q_1 \sin q_3) \big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
J_{L6_2} = -(&\sin q_5 (\cos q_2 \sin q_4 - \cos q_3 \cos q_4 \sin q_2) \\
&+ \cos q_5 \sin q_2 \sin q_3) \Big(l_5 \cos \theta_2 \Big(\cos q_6 (\sin q_4 (\sin q_1 \sin q_3 \\
&- \cos q_1 \cos q_2 \cos q_3) + \cos q_1 \cos q_4 \sin q_2) \\
&- \sin q_6 \big(cos\, q_5 (cos\, q_4 (\sin q_1 \sin q_3 - \cos q_1 \cos q_2 \cos q_3) \\
&- \cos q_1 \sin q_2 \sin q_4) - \sin q_5 (cos\, q_3 \sin q_1 + \cos q_1 \cos q_2 \sin q_3)) \big) \Big) \\
&+ l_5 \sin \theta_2 \Big(\sin q_6 (\sin q_4 (\sin q_1 \sin q_3 - \cos q_1 \cos q_2 \cos q_3) \\
&+ \cos q_1 \cos q_4 \sin q_2) \\
&+ \cos q_6 \big(cos\, q_5 (cos\, q_4 (\sin q_1 \sin q_3 - \cos q_1 \cos q_2 \cos q_3) \\
&- \cos q_1 \sin q_2 \sin q_4) - \sin q_5 (cos\, q_3 \sin q_1 + \cos q_1 \cos q_2 \sin q_3)) \big) \Big) \Big) \\
&- \big(\sin q_5 (cos\, q_4 (\sin q_1 \sin q_3 - \cos q_1 \cos q_2 \cos q_3) \\
&- \cos q_1 \sin q_2 \sin q_4) \\
&+ cos\, q_5 (cos\, q_3 \sin q_1 \\
&+ \cos q_1 \cos q_2 \sin q_3)) \big) \big(l_5 \cos \theta_2 \big(\sin q_6 (\cos q_5 (\cos q_2 \sin q_4 \\
&- \cos q_3 \cos q_4 \sin q_2) - \sin q_2 \sin q_3 \sin q_5) \\
&+ \cos q_6 (cos\, q_2\, cos\, q_4 + \cos q_3 \sin q_2 \sin q_4) \big) \\
&- l_5 \sin \theta_2 \big(\cos q_6 (\cos q_5 (\cos q_2 \sin q_4 - \cos q_3 \cos q_4 \sin q_2) \\
&- \sin q_2 \sin q_3 \sin q_5) - \sin q_6 (cos\, q_2\, cos\, q_4 + \cos q_3 \sin q_2 \sin q_4)) \big) \big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
J_{L6_3} = \Big(&\sin q_5\,(cos\,q_4\,(\cos q_1 \sin q_3 + \cos q_2 \cos q_3 \sin q_1) + \sin q_1 \sin q_2 \sin q_4) \\
&+ cos\,q_5\,(cos\,q_1\,cos\,q_3 \\
&- \cos q_2 \sin q_1 \sin q_3)\Big)\Big(l_5 \cos\theta_2\Big(\cos q_6\,(\sin q_4\,(\sin q_1 \sin q_3 \\
&- \cos q_1 \cos q_2 \cos q_3\big) + \cos q_1 \cos q_4 \sin q_2\big) \\
&- \sin q_6\,\big(cos\,q_5\,(cos\,q_4\,(\sin q_1 \sin q_3 - \cos q_1 \cos q_2 \cos q_3) \\
&- \cos q_1 \sin q_2 \sin q_4) - \sin q_5\,(cos\,q_3 \sin q_1 + \cos q_1 \cos q_2 \sin q_3))\big)\Big) \\
&+ l_5 \sin\theta_2\Big(\sin q_6\,(\sin q_4\,(\sin q_1 \sin q_3 - \cos q_1 \cos q_2 \cos q_3) \\
&+ \cos q_1 \cos q_4 \sin q_2) \\
&+ \cos q_6\,\big(cos\,q_5\,(cos\,q_4\,(\sin q_1 \sin q_3 - \cos q_1 \cos q_2 \cos q_3) \\
&- \cos q_1 \sin q_2 \sin q_4) - \sin q_5\,(cos\,q_3 \sin q_1 + \cos q_1 \cos q_2 \sin q_3))\big)\Big)\Big) \\
&- \Big(\sin q_5\,(cos\,q_4\,(\sin q_1 \sin q_3 - \cos q_1 \cos q_2 \cos q_3) \\
&- \cos q_1 \sin q_2 \sin q_4) \\
&+ cos\,q_5\,(cos\,q_3 \sin q_1 \\
&+ \cos q_1 \cos q_2 \sin q_3)\Big)\Big(l_5 \cos\theta_2\Big(\cos q_6\,(\sin q_4\,(\cos q_1 \sin q_3 \\
&+ \cos q_2 \cos q_3 \sin q_1) - \cos q_4 \sin q_1 \sin q_2) \\
&- \sin q_6\,\big(cos\,q_5\,(cos\,q_4\,(\cos q_1 \sin q_3 + \cos q_2 \cos q_3 \sin q_1) \\
&+ \sin q_1 \sin q_2 \sin q_4) - \sin q_5\,(cos\,q_1\,cos\,q_3 - \cos q_2 \sin q_1 \sin q_3))\big)\Big) \\
&+ l_5 \sin\theta_2\Big(\sin q_6\,(\sin q_4\,(\cos q_1 \sin q_3 + \cos q_2 \cos q_3 \sin q_1) \\
&- \cos q_4 \sin q_1 \sin q_2) \\
&+ cos\,q_6\,\big(cos\,q_5\,(cos\,q_4\,(\cos q_1 \sin q_3 + \cos q_2 \cos q_3 \sin q_1) \\
&+ \sin q_1 \sin q_2 \sin q_4) - \sin q_5\,(cos\,q_1\,cos\,q_3 - \cos q_2 \sin q_1 \sin q_3))\big)\Big)\Big)
\end{aligned}
$$

και

$$J_{A6} = b_6 = \begin{bmatrix} J_{A6_1} \\ J_{A6_2} \\ J_{A6_3} \end{bmatrix},$$

όπου:

$$
\begin{aligned}
J_{A6_1} = &- sinq_5\,(cosq_4\,(sinq_1\,sinq_3 - cosq_1\,cosq_2\,cosq_3) - cosq_1\,sinq_2\,sinq_4) \\
&- cosq_5\,(cosq_3\,sinq_1 + cosq_1 cosq_2 sinq_3)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
J_{A6_2} = &\, sinq_5\,(cosq_4\,(cosq_1\,sinq_3 + cosq_2\,cosq_3\,sinq_1) + sinq_1\,sinq_2\,sinq_4) \\
&+ cosq_5\,(cosq_1\,cosq_3 - cosq_2\,sinq_1\,sinq_3)
\end{aligned}
$$

$$J_{A6_3} = sinq_5\,(cosq_2\,sinq_4 - cosq_3\,cosq_4\,sinq_2) + cosq_5\,sinq_2\,sinq_3$$

Τέλος, ο πίνακας περιστροφής για $\boldsymbol{i = 7}$ είναι:

$$\begin{bmatrix} \alpha_{7\_11} & \alpha_{7\_12} & \alpha_{7\_13} \\ \alpha_{7\_21} & \alpha_{7\_22} & \alpha_{7\_23} \\ \alpha_{7\_31} & \alpha_{7\_32} & \alpha_{7\_33} \end{bmatrix}$$

$$\alpha_{7\_11} = sinq_7\,(sinq_5\,(cosq_4\,(sinq_1\,sinq_3 - cosq_1\,cosq_2\,cosq_3) - cosq_1\,sinq_2\,sinq_4) + cosq_5\,(cosq_3\,sinq_1 + cosq_1\,cosq_2\,sinq_3)) - cosq_7\,(sinq_6\,(sinq_4\,(sinq_1\,sinq_3 - cosq_1\,cosq_2\,cosq_3) + cosq_1\,cosq_4\,sinq_2) + cosq_6\,(cosq_5\,(cosq_4\,(sinq_1\,sinq_3 - cosq_1\,cosq_2\,cosq_3) - cosq_1\,sinq_2\,sinq_4) - sinq_5\,(cosq_3\,sinq_1 + cosq_1\,cosq_2\,sinq_3)))$$

$$\alpha_{7\_12} = sinq_7\,(sinq_6\,(sinq_4\,(sinq_1\,sinq_3 - cosq_1\,cosq_2\,cosq_3) + cosq_1\,cosq_4\,sinq_2) + cosq_6\,(cosq_5\,(cosq_4\,(sinq_1\,sinq_3 - cosq_1\,cosq_2\,cosq_3) - cosq_1\,sinq_2\,sinq_4) - sinq_5\,(cosq_3\,sinq_1 + cosq_1\,cosq_2\,sinq_3))) + cosq_7\,(sinq_5\,(cosq_4\,(sinq_1\,sinq_3 - cosq_1\,cosq_2\,cosq_3) - cosq_1\,sinq_2\,sinq_4) + cosq_5\,(cosq_3\,sinq_1 + cosq_1\,cosq_2\,sinq_3))$$

$$\alpha_{7\_13} = sinq_6\,(cosq_5\,(cosq_4\,(sinq_1\,sinq_3 - cosq_1\,cosq_2\,cosq_3) - cosq_1\,sinq_2\,sinq_4) - sinq_5\,(cosq_3\,sinq_1 + cosq_1\,cosq_2\,sinq_3)) - cosq_6\,(sinq_4\,(sinq_1\,sinq_3 - cosq_1\,cosq_2\,cosq_3) + cosq_1\,cosq_4\,sinq_2)$$

$$\alpha_{7\_21} = cosq_7\,(sinq_6\,(sinq_4\,(cosq_1\,sinq_3 + cosq_2\,cosq_3\,sinq_1) - cosq_4\,sinq_1\,sinq_2) + cosq_6\,(cosq_5\,(cosq_4\,(cosq_1\,sinq_3 + cosq_2\,cosq_3\,sinq_1) + sinq_1\,sinq_2\,sinq_4) - sinq_5\,(cosq_1\,cosq_3 - cosq_2\,sinq_1\,sinq_3))) - sinq_7\,(sinq_5\,(cosq_4\,(cosq_1\,sinq_3 + cosq_2\,cosq_3\,sinq_1) + sinq_1\,sinq_2\,sinq_4) + cosq_5\,(cosq_1\,cosq_3 - cosq_2\,sinq_1\,sinq_3))$$

$$\alpha_{7\_22} = -sinq_7\,(sinq_6(sinq_4\,(cosq_1\,sinq_3 + cosq_2\,cosq_3\,sinq_1) - cosq_4\,sinq_1\,sinq_2) + cosq_6\,(cosq_5\,(cosq_4\,(cosq_1\,sinq_3 + cosq_2\,cosq_3\,sinq_1) + sinq_1\,sinq_2\,sinq_4) - sinq_5\,(cosq_1\,cosq_3 - cosq_2\,sinq_1\,sinq_3))) - cosq_7\,(sinq_5\,(cosq_4\,(cosq_1\,sinq_3 + cosq_2\,cosq_3\,sinq_1) + sinq_1\,sinq_2\,sinq_4) + cosq_5\,(cosq_1\,cosq_3 - cosq_2\,sinq_1\,sinq_3))$$

$$\alpha_{7\_23} = cosq_6\,(sinq_4\,(cosq_1\,sinq_3 + cosq_2\,cosq_3\,sinq_1) - cosq_4\,sinq_1\,sinq_2) - sinq_6\,(cosq_5\,(cosq_4\,(cosq_1\,sinq_3 + cosq_2\,cosq_3\,sinq_1) + sinq_1\,sinq_2\,sinq_4) - sinq_5\,(cosq_1\,cosq_3 - cosq_2\,sinq_1\,sinq_3))$$

$$\alpha_{7\_31} = cosq_7\,(cosq_6\,(cosq_5\,(cosq_2\,sinq_4 - cosq_3\,cosq_4\,sinq_2) - sinq_2\,sinq_3\,sinq_5) - sinq_6\,(cosq_2\,cosq_4 + cosq_3\,sinq_2\,sinq_4)) - sinq_7\,(sinq_5\,(cosq_2\,sinq_4 - cosq_3\,cosq_4\,sinq_2) + cosq_5\,sinq_2\,sinq_3)$$

$$\alpha_{7\_32} = -cosq_7\,(sinq_5\,(cosq_2\,sinq_4 - cosq_3\,cosq_4\,sinq_2) + cosq_5\,sinq_2\,sinq_3) - sinq_7\,(cosq_6\,(cosq_5\,(cosq_2\,sinq_4 - cosq_3\,cosq_4\,sinq_2) - sinq_2\,sinq_3\,sinq_5) - sinq_6\,(cosq_2\,cosq_4 + cosq_3\,sinq_2\,sinq_4))$$

$$\alpha_{7\_33} = -sinq_6\,(cosq_5\,(cosq_2\,sinq_4 - cosq_3 cosq_4)\,sinq_2 - sinq_2\,sinq_3\,sinq_5) - cosq_6\,(cosq_2\,cosq_4 + cosq_3\,sinq_2\,sinq_4)$$

Επομένως, $b_7 = [\alpha_{7\_13} \quad \alpha_{7\_23} \quad \alpha_{7\_33}]^{\mathrm{T}}$

Έχουμε $r_{7,E} = r_{0E} - r_{07} = \begin{bmatrix} r_{7E\_1} \\ r_{7E\_2} \\ r_{7E\_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Άρα,

$$J_{L7} = b_7 \times r_{7,E} = \begin{bmatrix} J_{L7_1} \\ J_{L7_2} \\ J_{L7_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

και

$$J_{A7} = b_7 = \begin{bmatrix} J_{A7_1} \\ J_{A7_2} \\ J_{A7_3} \end{bmatrix},$$

όπου:

$$J_{A7_1} = sinq_6\,(cosq_5\,(cosq_4\,(sinq_1\,sinq_3 - cosq_1\,cosq_2\,cosq_3) - cosq_1\,sinq_2\,sinq_4) - sinq_5\,(cosq_3\,sinq_1 + cosq_1\,cosq_2\,sinq_3)) - cosq_6\,(sinq_4\,(sinq_1\,sinq_3 - cosq_1\,cosq_2\,cosq_3) + cosq_1\,cosq_4\,sinq_2)$$

$$J_{A7_2} = cosq_6\,(sinq_4\,(cosq_1\,sinq_3 + cosq_2\,cosq_3\,sinq_1) - cosq_4\,sinq_1\,sinq_2) - sinq_6\,(cosq_5\,(cosq_4\,(cosq_1\,sinq_3 + cosq_2\,cosq_3\,sinq_1) + sinq_1\,sinq_2\,sinq_4) - sinq_5\,(cosq_1\,cosq_3 - cosq_2\,sinq_1\,sinq_3))$$

$$J_{A7_3} = -sinq_6\,(cosq_5\,(cosq_2\,sinq_4 - cosq_3 cosq_4)\,sinq_2 - sinq_2\,sinq_3\,sinq_5) - cosq_6\,(cosq_2\,cosq_4 + cosq_3\,sinq_2\,sinq_4)$$

Συνδυάζοντας τους παραπάνω πίνακες προκύπτει η ιακωβιανή μήτρα του ρομπότ:

$$J(q) = \begin{bmatrix} J_{L1_1} & J_{L2_1} & J_{L3_1} & J_{L4_1} & J_{L5_1} & J_{L6_1} & J_{L7_1} \\ J_{L1_2} & J_{L2_2} & J_{L3_2} & J_{L4_2} & J_{L5_2} & J_{L6_2} & J_{L7_2} \\ J_{L1_3} & J_{L2_3} & J_{L3_3} & J_{L4_3} & J_{L5_3} & J_{L6_3} & J_{L7_3} \\ J_{A1_1} & J_{A2_1} & J_{A3_1} & J_{A4_1} & J_{A5_1} & J_{A6_1} & J_{A7_1} \\ J_{A1_2} & J_{A2_2} & J_{A3_2} & J_{A4_2} & J_{A5_2} & J_{A6_2} & J_{A7_2} \\ J_{A1_3} & J_{A2_3} & J_{A3_3} & J_{A4_3} & J_{A5_3} & J_{A6_3} & J_{A7_3} \end{bmatrix}$$

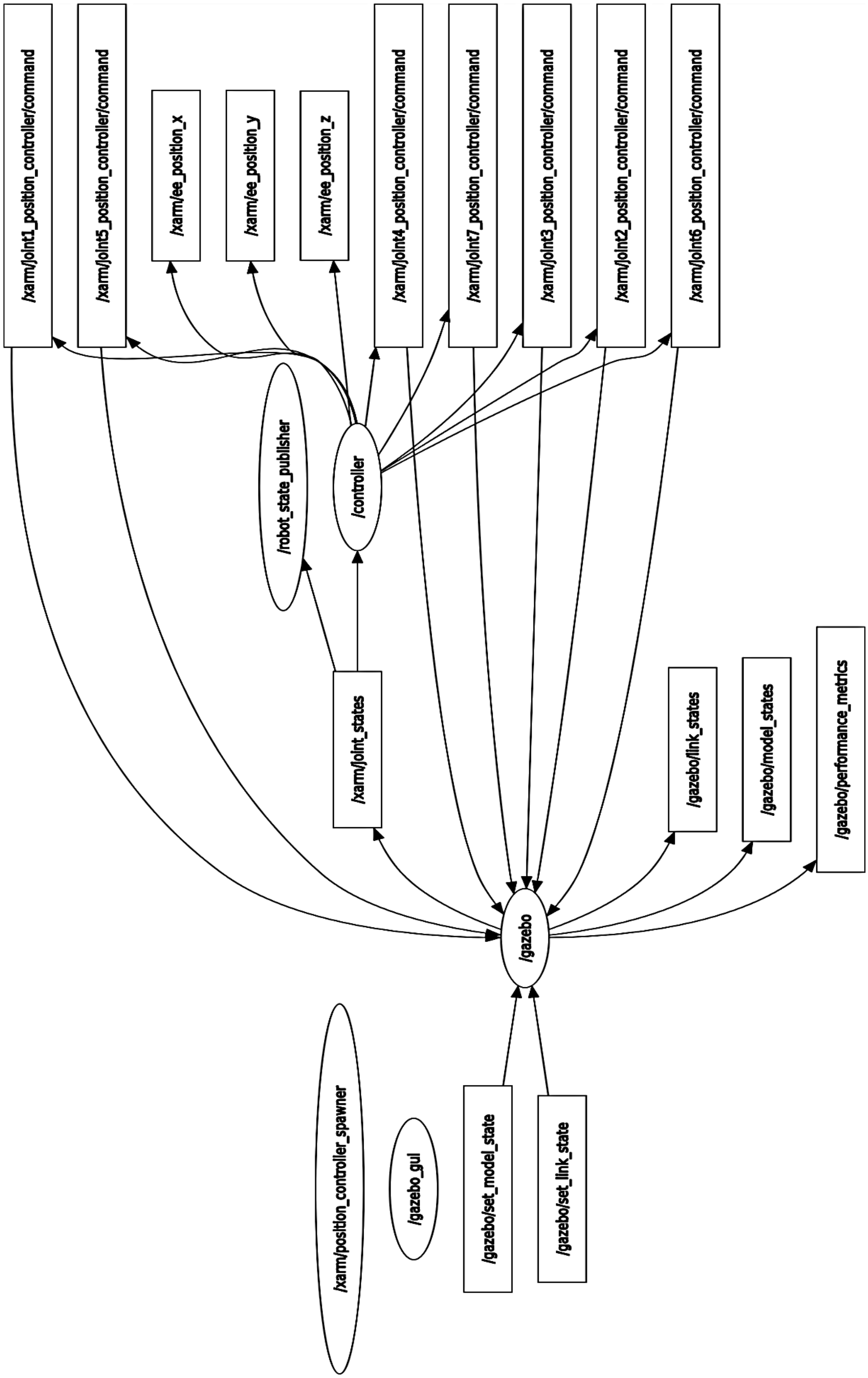
2. Προσομοίωση και Προγραμματισμός Ρομποτικού Χειριστή

2.1 Προσομοίωση Πρώτης Διεργασίας Ελέγχου

Ως στόχο η πρώτη διεργασία έχει να υλοποιηθεί ο κινηματικός έλεγχος του τελικού στοιχείου δράσης με χρήση τριών αρθρώσεων. Οι αρθρώσεις οι οποίες λειτουργούν είναι οι q_1, q_2 και q_4. Οι υπόλοιπες αρθρώσεις διατηρούν σταθερή την γωνία περιστροφή τους ($q_3 = q_5 = q_7 = 0, q_6 = 0.75\ rad$).

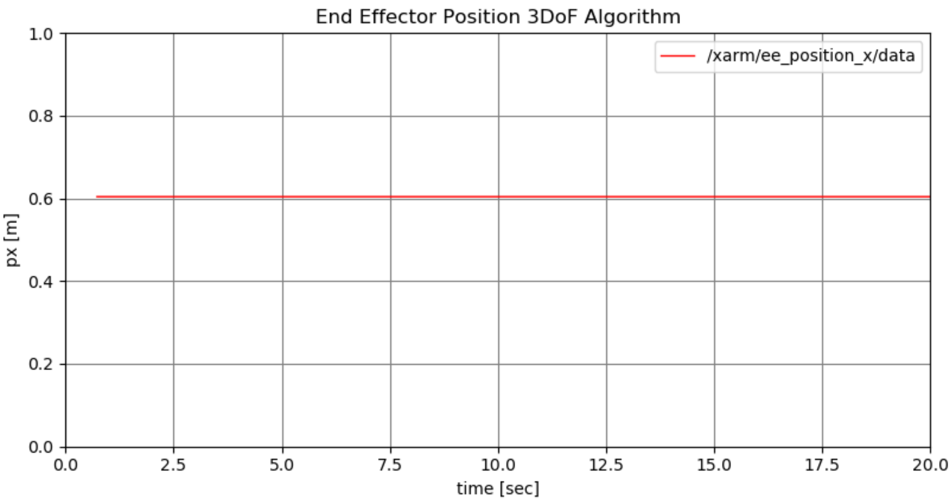
Αναλυτικότερα, η διεργασία που θα έχει να εκτελέσει το τελικό στοιχείο δράσης του βραχίονα είναι να εκτελέσει μια περιοδική κίνηση μεταξύ των σημείων p_A και p_B. Οι τροχιές για την εκτέλεση της κίνησης έχουν αναλυθεί στην ενότητα 1.1. Για να την εκτέλεση της συγκεκριμένης διεργασίας χρησιμοποιήθηκε το ROS και το γραφικό περιβάλλον προσομοίωσης του gazebo. Για την εκτέλεση του παρόντος αλγορίθμου δημιουργήθηκε ο κόμβος ***Controller*** ο οποίος περιλαμβάνει όλη την κινηματική ανάλυση του βραχίονα, μαζί και των topics που είναι να εγγράφεται (***publish***) η απαραίτητη πληροφορία. Σε κάθε χρονική εκτέλεση της διεργασίας υπάρχει ανάδραση από τους encoders των αρθρώσεων, έτσι ώστε να έχουμε έναν κλειστό σύστημα κινηματικού ελέγχου. Σε κάθε χρονική επανάληψη έχουμε τον υπολογισμό των ενεργών αρθρώσεων με την χρήση του αντίστροφου κινηματικού μοντέλου. Ως είσοδο το αντίστροφο κινηματικό δέχεται την επιθυμητή τροχιά και για τους τρεις άξονές του. Οι νέες γωνίες εγγράφονται στα αντίστοιχα topics που αφορούν την εκάστοτε άρθρωση. Έτσι, οι νέες γωνίες γίνονται ***publish*** στο μοντέλο του βραχίονα που υπάρχει στο gazebo και παρατηρούμε την κίνηση αυτή που επιθυμούμε. Αναλυτικά, μπορούμε να δούμε όλη την λειτουργία του προγράμματος στον παρακάτω γράφο του σχήματος 6.

Επιπλέον, άξιο σχολιασμού είναι το γεγονός πως η αρχικοποίηση του βραχίονα είναι στο μέσο του ευθυγράμμου τμήματος. Η διαδικασία που ακολουθήθηκε σε αυτό το σημείο ήταν να επανασχεδιάζεται η τροχιά με είσοδο τα κατάλληλα σημεία του του χώρου εργασίας με την κατάλληλη περίοδο και χρόνο που διαθέτει το ***ROS***. Επιπρόσθετα, σε αυτό τον αλγόριθμο δεν γίνεται η χρήση του προσανατολισμού, διότι δεν είναι ενεργές όλες οι αρθρώσεις. Επίσης, όταν κοντεύει να φτάσει στο άκρο, η αλλαγή του σημείου γίνεται με διαφορά σφάλματος της τάξης $O(|\varepsilon|^4)$, έτσι ώστε να μην ξεπεράσει την θέση αυτή στον άξονα y.

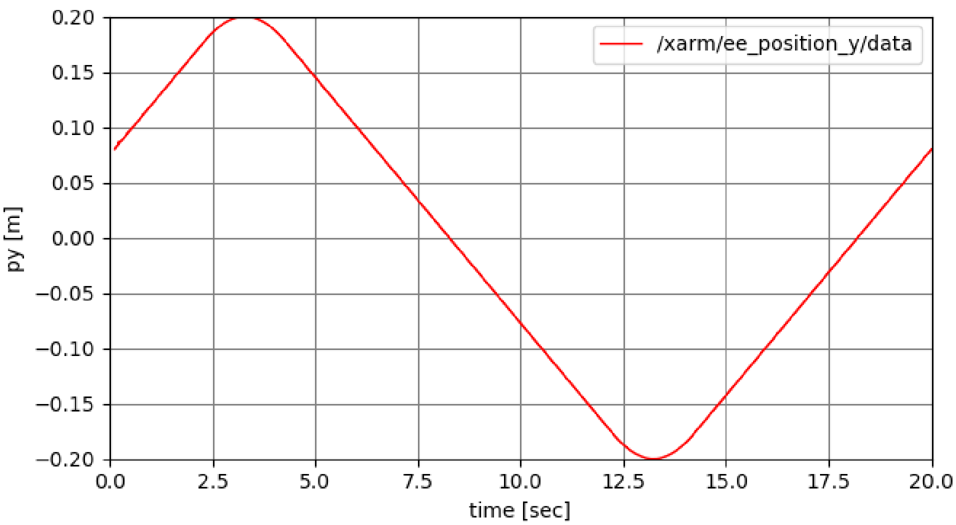


Σχήμα 6. Γράφος αλγορίθμου ελέγχου τριών βαθμών ελευθερίας.

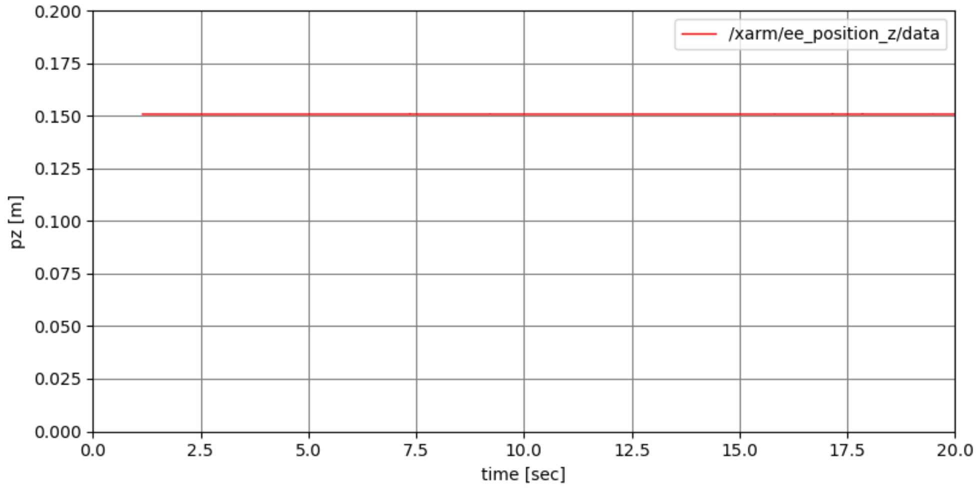
Συνεπώς, με την παραπάνω λειτουργία του προγράμματος προσομοιώθηκε το σύστημα με τα αποτελέσματα να φαίνονται στα παρακάτω γραφήματα. Παρατηρούμε πως η θέση του τελικού στοιχείου δράσης είναι όντως αυτή που επιθυμούμε, καθώς τα x, z παραμένουν σταθερά με βάση την τροχιά εισαγωγής και το y εκτελεί κανονικά την τροχιά τριών φάσεων που εισάγεται ως μια επιθυμητή τροχιά. Έτσι, το τελικό στοιχείο δράσης παρουσιάζεται στο σχήμα 7.



(α)



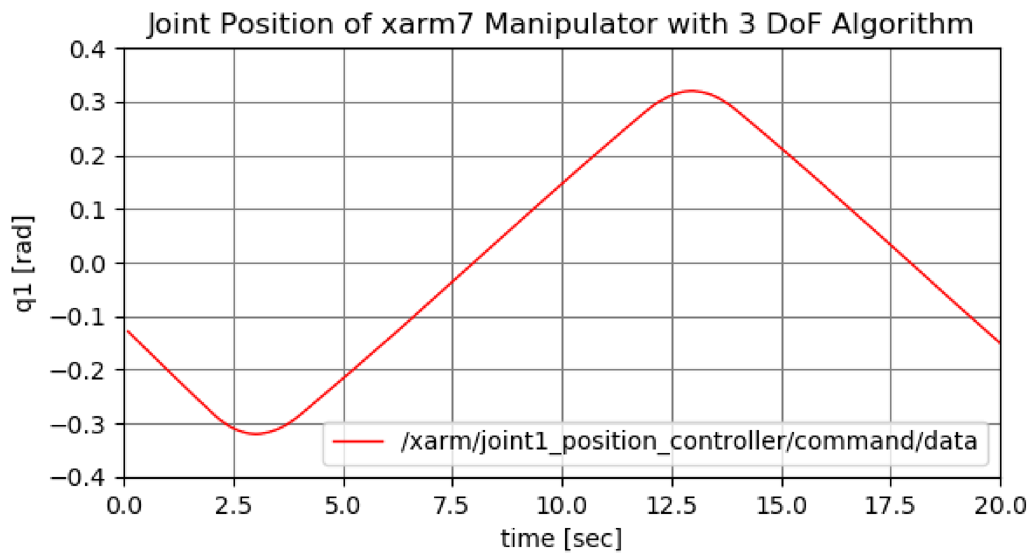
(β)



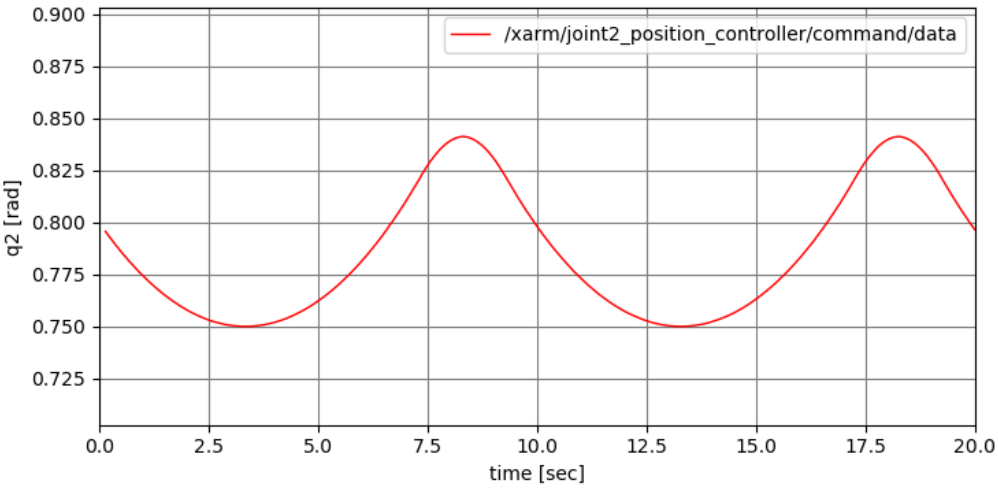
(γ)

Σχήμα 7. Προσομοίωση τελικού στοιχείου δράσης ρομποτικού χειριστή xarm7: (α) Άξονας p_x, (β) Άξονας p_y, (γ) Άξονας p_z.

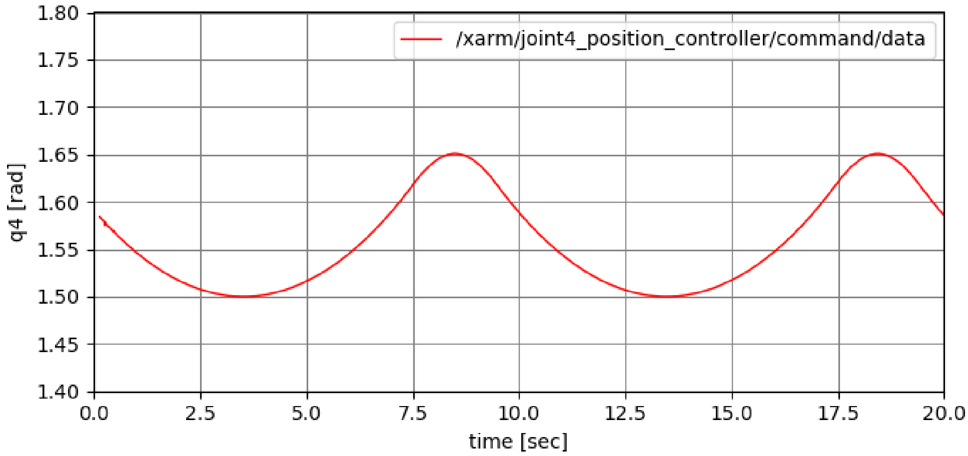
Αυτό που παρατηρούμε από την προσομοίωση είναι πως το τελικό στοιχείο δράσης προσομοιώνει σωστά την τροχιά που του έχει εισαχθεί, με αποτέλεσμα να εκτελείται η επιθυμητή περιοδική κίνηση. Επίσης, για την επίτευξη της αυτής κίνησης, οι ενεργές γωνίες των αρθρώσεων κυμαίνονται με βάσει τις τροχιές που σχεδιάστηκαν και την αντίστροφη κινηματική. Μπορούμε αναλυτικά να παρατηρήσουμε την τροχιά που διέγραψαν στο σχήμα 8.



(α)



(β)



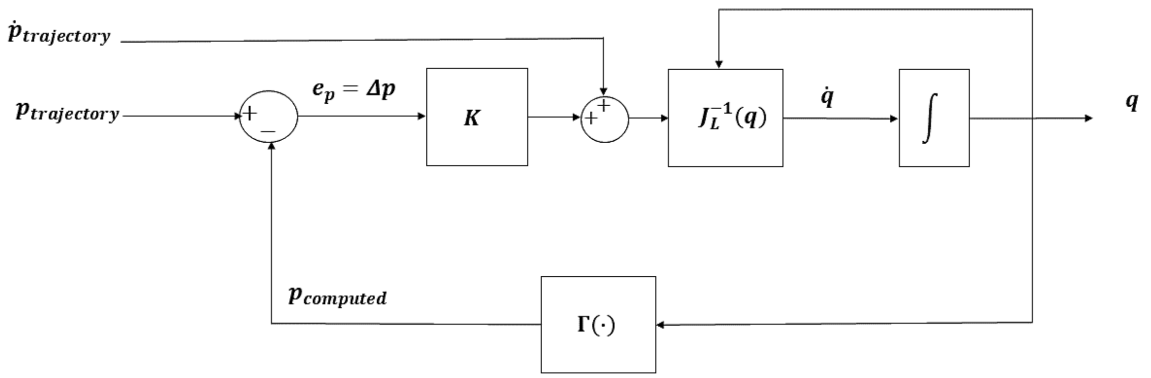
(γ)

Σχήμα 8. Προσομοίωση ενεργών αρθρώσεων ρομποτικού χειριστή xarm7: (α) Άρθρωση περιστροφής q_1, (β) Άρθρωση περιστροφής q_2, (γ) Άρθρωση περιστροφής q_3.

Με την κατάλληλη κίνηση των παραπάνω αρθρώσεων επιτυγχάνεται η επιθυμητή πορεία στον χώρο εργασίας του ρομποτικού βραχίονα. Τέλος, μπορούμε να διαπιστώσουμε πως στον παρών αλγόριθμο προκύπτουν τα επιθυμητά αποτέλεσμα που θέσαμε εξ' αρχής.

2.2 Προσομοίωση Δεύτερης Διεργασίας Ελέγχου

Η δεύτερη διεργασία κινηματικού ελέγχου είναι πανομοιότυπη με την πρώτη διεργασία. Ωστόσο, σε αυτή την περίπτωση απαιτείται ο πλήρης κινηματικός έλεγχος (θέση και προσανατολισμό) του ρομποτικού βραχίονα. Έτσι σε αυτή την περίπτωση θα έχουμε όλες τις αρθρώσεις του βραχίονα ενεργές. Άρα θα έχουμε ένα πλεονάζον βαθμό ελευθερίας. Για να γίνει κινηματικός έλεγχος στον ρομποτικό βραχίονα θα χρησιμοποιηθεί ο αλγόριθμος υπολογισμού αντίστροφης διαφορικής κινηματικής, που παρουσιάζεται στο σχήμα 9.



Σχήμα 9. Μπλοκ διάγραμμα αντίστροφου διαφορικού κινηματικού ελέγχου.

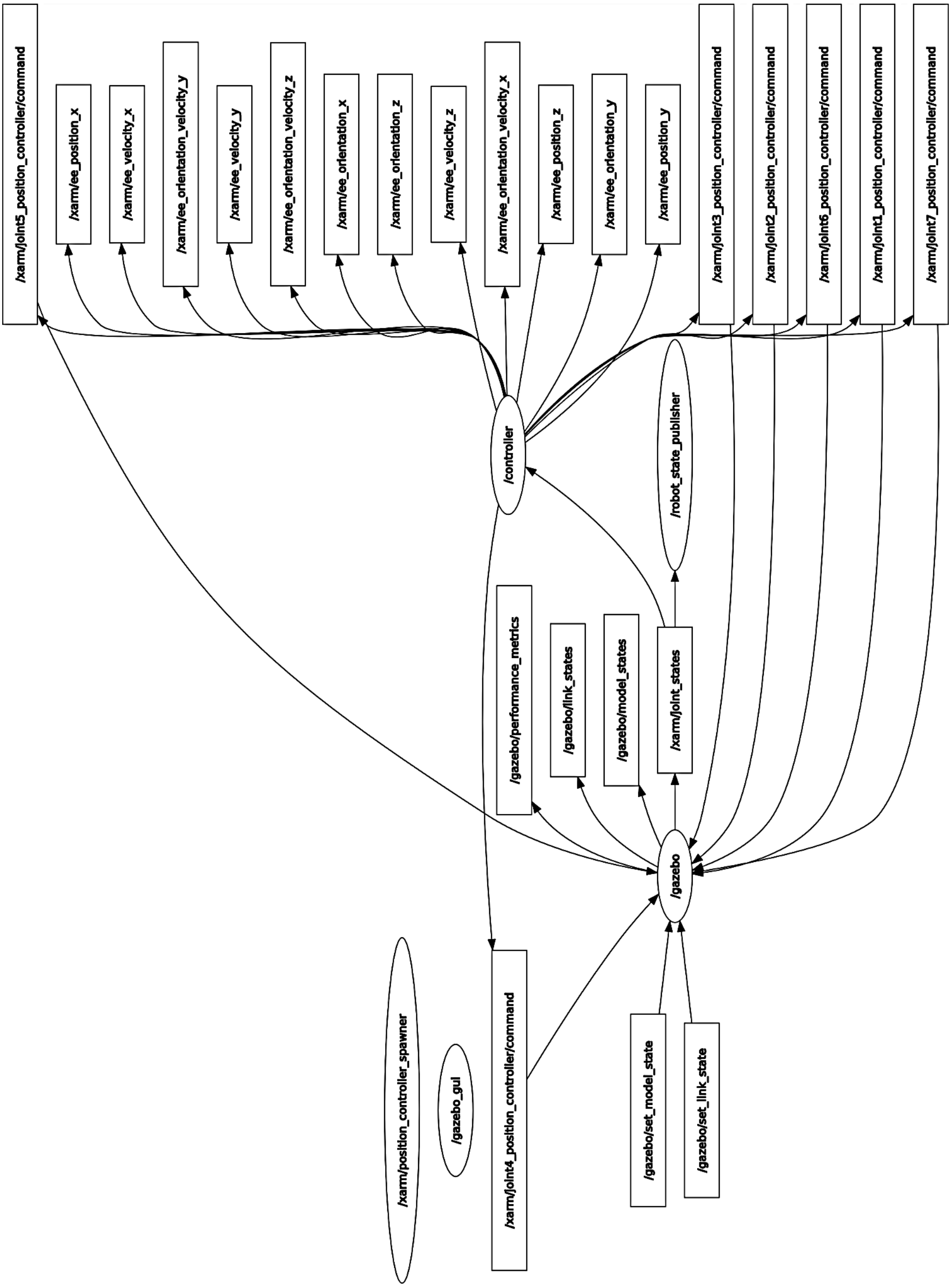
Όμως, για να χρησιμοποιήσουμε τον παρών αλγόριθμο θα ήταν αναγκαία η χρήση της αντίστροφης Ιακωβιανής Μήτρας. Το συγκεκριμένο ρομπότ αποτελείται από 7 βαθμούς ελευθέριάς, με αποτέλεσμα να μην υπάρχει η αντίστροφη ιακωβιανή, καθώς έχει διαστάσεις 6×7. Γενικότερα, η εύρεση της αντίστροφης διαφορικής κινηματικής στην περίπτωση πλεοναζόντων βαθμών ελευθερίας δεν αποτελεί μονοσήμαντη λύση όπως στην περίπτωση ύπαρξης της αντίστροφης και απαιτεί την χρήση τεχνικών βελτιστοποίησης για την εύρεση αντίστροφης. Έτσι, επιλέχθηκε να χρησιμοποιηθεί η ψευδοαντίστροφη Ιακωβιανή Μήτρα ώστε να μπορέσουμε να εκτελέσουμε τον παραπάνω αλγόριθμο. Η ψευδοαντίστροφη αποτελεί μια προσέγγιση της αντίστροφης Ιακωβιανής μήτρας και την λύση στο πρόβλημα της εκτέλεσης με του αντίστροφου κινηματική με την ελάχιστη ταχύτητα. Η ψευδοαντίστροφη θα δοθεί από τον υπολογισμό:

$$J^{+}(q) = \left(J^{T}(q)J(q)\right)^{-1}J^{T}(q) \tag{2.1}$$

Με την χρήση της ψευδοαντίστροφης Ιακωβιανής μήτρας θα μπορέσουμε να χρησιμοποιήσουμε τον παραπάνω αλγόριθμο.

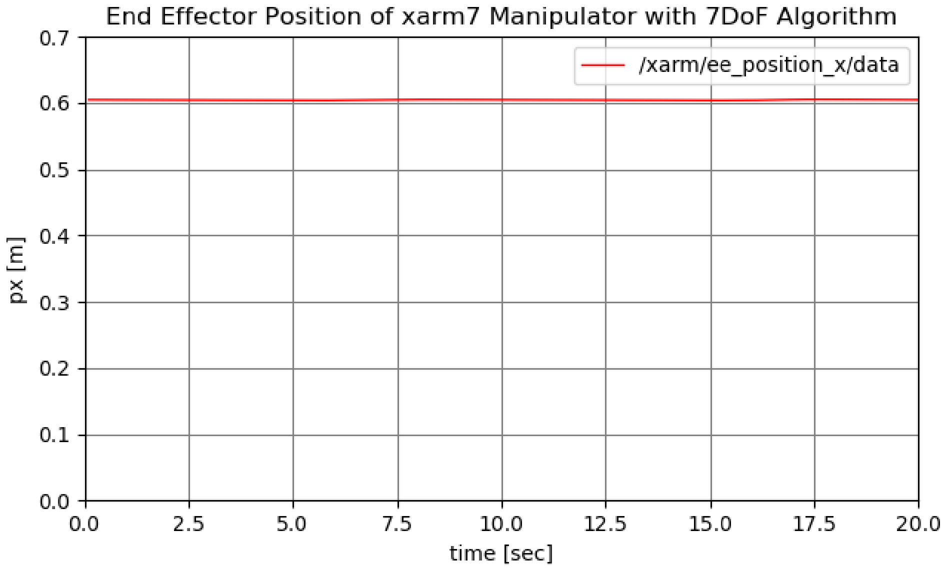
Κατά την λειτουργία του αλγορίθμου χρησιμοποιήθηκε ως είσοδο στο σύστημα η επιθυμητή τροχιά που σχεδιάστηκε στην ενότητα 1.1. Σε αυτή την περίπτωση χρησιμοποιήθηκαν τροχιές και για το διάνυσμα της θέσης και του προσανατολισμού του τελικού στοιχείου δράσης. Η διαδικασία για την θέση παραμένει ίδια με αυτή της προηγούμενης διεργασίας. Σε αυτή την διεργασία επιλέχθηκε να κρατάμε σταθερό τον προσανατολισμό κατά την διάρκεια εκτέλεσης της πορείας. Για να συμβεί αυτό θα φτιαχτεί η επιθυμητή ταχύτητα εισόδου, η οποία παράγεται από τις τροχιές θέσης και ταχύτητας που σχεδιάσαμε. Ως είσοδο στο σύστημα θα έχουμε το σφάλμα θέσης του τελικού στοιχείου δράσης πολλαπλασιασμένο με έναν πίνακα K: 6×6, οποίος αποτελεί τα κέρδη. Σε αυτό το σημείο επισημαίνεται πως θέλουμε μόνο μετατόπιση του τελικού στοιχείου δράσης. Επομένως, τα κέρδη που αφορούν τον προσανατολισμό θα είναι 0 έτσι ώστε να μην επηρεάζει την κίνηση και να μην μεταβάλλεται. Ο προσανατολισμός θα τροποποιείται από την επιθυμητή τροχιά της ταχύτητας που πρακτικά θα είναι σταθερή και μηδέν. Έτσι, ο προσανατολισμός θα παραμένει σταθερός στο σημείο $\varphi_i = [\pi \quad 0 \quad 0]^T$ που είχε οριστεί εξ' αρχής από την τροχιά. Με την χρήση αυτής της εισόδου θα υπολογίζουμε τις ταχύτητες των αρθρώσεων με την χρήση της ψευδοαντίστροφης ιακωβιανής. Το επόμενο βήμα που κάνουμε είναι να υπολογίζουμε τις γωνίες των αρθρώσεων με την μέθοδο ολοκλήρωσης του ***Euler***. Το αποτέλεσμα αυτό θα γίνεται ***publish*** στα ***topics*** των γωνιών των αρθρώσεων, με αποτέλεσμα να κινείται ο βραχίονας και να εκτελεί την αντίστοιχη περιοδική κίνηση η οποία του ανατέθηκε. Η διαδικασία ανάδρασης είναι παρόμοια με αυτή της πρώτης διεργασίας ελέγχου. Όλη αυτή την διαδικασία την εκτελεί ο κόμβος ***Controller*** που επικοινωνεί με το ***Gazebo*** έτσι ώστε να προωθεί την πληροφορία των αρθρώσεων στο μοντέλο για να αποτυπωθεί η κίνηση. Η λειτουργία του προγράμματος και οι επικοινωνίες μεταξύ των ***node*** και ***topic*** φαίνεται και στο σχήμα 10, το οποίο αποτελείται από τον γράφο της παραπάνω διαδικασίας.

Τέλος, να επισημανθεί πως όταν ο βραχίονας φτάνει κοντά στα άκρα του ευθυγράμμου τμήματος, η τροχιά επανασχεδιάζεται με παρόμοιο τρόπο όπως αναλύθηκε και στην ενότητα 2.1. Επίσης, όταν κοντεύει να φτάσει στο άκρο, η αλλαγή του σημείου γίνεται με διαφορά σφάλματος της τάξης $O(|\varepsilon|^3)$, έτσι ώστε να μην ξεπεράσει την θέση αυτή στον άξονα y.

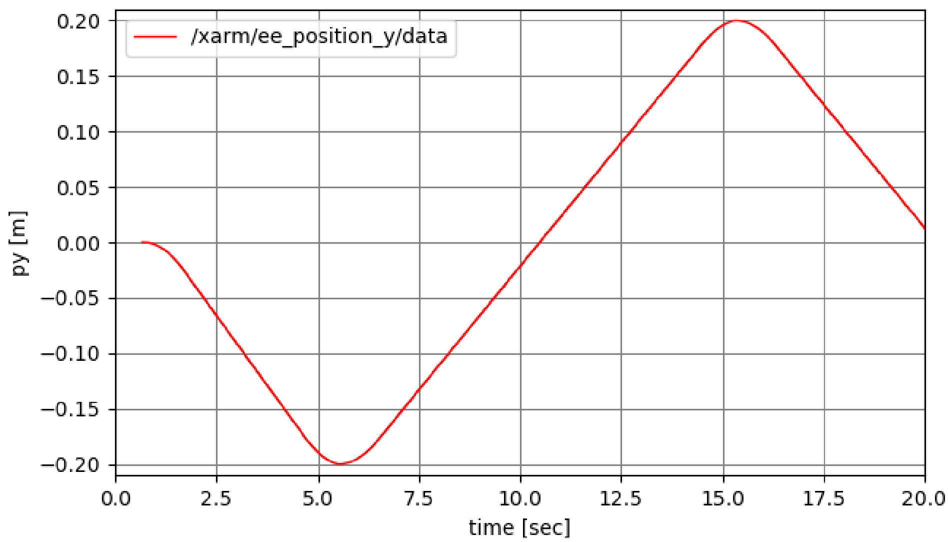


Σχήμα 10. Γράφος αλγορίθμου ελέγχου επτά βαθμών ελευθερίας.

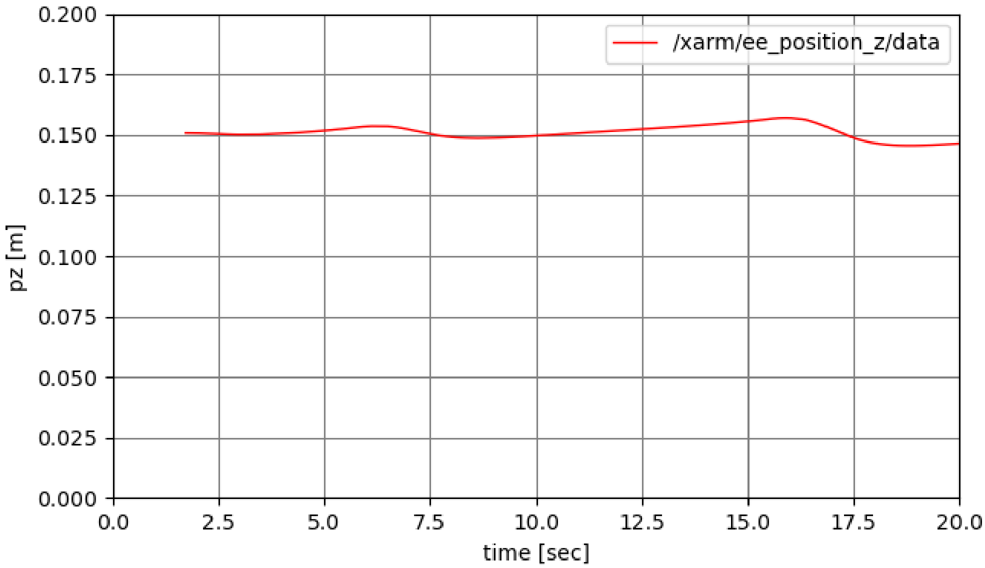
Συνεπώς, με την παραπάνω λειτουργία του προγράμματος προσομοιώθηκε το σύστημα με τα αποτελέσματα να φαίνονται στα παρακάτω γραφήματα. Παρατηρούμε πως η θέση του τελικού στοιχείου δράσης είναι όντως αυτή που επιθυμούμε, καθώς τα x, z παραμένουν σταθερά με βάση την τροχιά εισαγωγής και το y εκτελεί κανονικά την τροχιά τριών φάσεων που εισάγεται ως μια επιθυμητή τροχιά. Έτσι, το τελικό στοιχείο δράσης παρουσιάζεται στο σχήμα 11. Στον άξονα z παρατηρούμε πως δεν παραμένει σταθερή η θέση του όσο στην περίπτωση του πρώτου αλγορίθμου. Αυτό οφείλεται στην μικρή αλλαγή της γραμμικής ταχύτητας στον άξονα z (βλ. σχήμα 13).



(α)



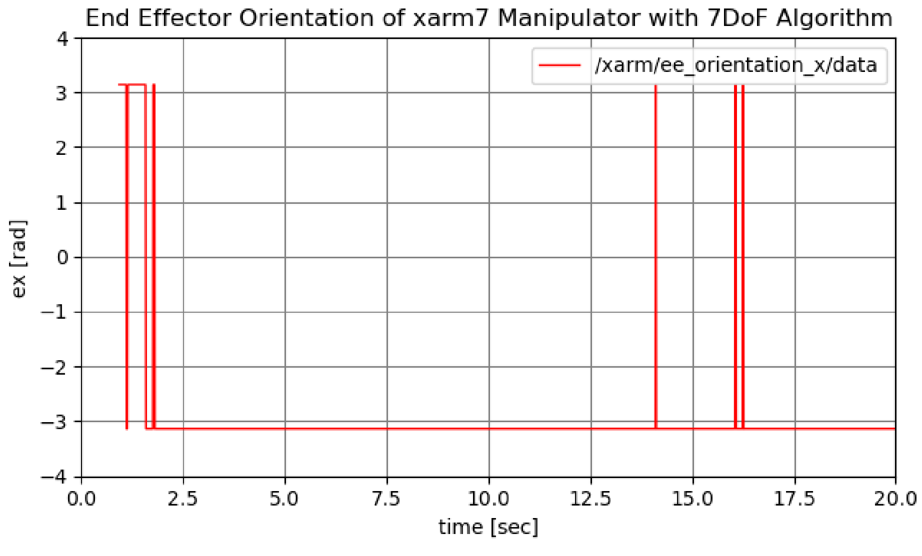
(β)



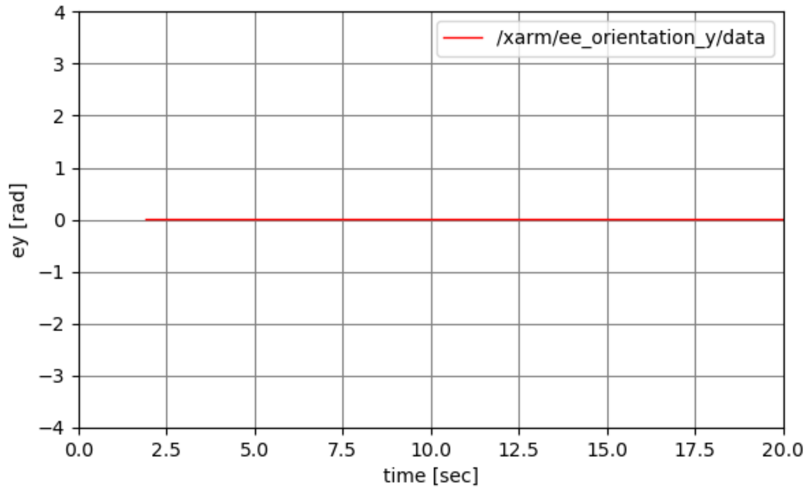
(γ)

Σχήμα 11. Θέση τελικού στοιχείου δράσης κατά την προσομοίωση: (α) Άξονας p_x, (β) Άξονας p_y, (γ) Άξονας p_z.

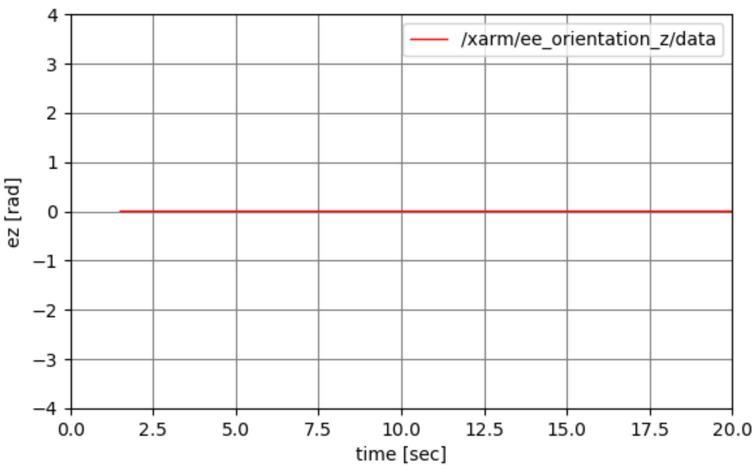
Επίσης, ο προσανατολισμός του τελικού στοιχείου δράσης παραμένει σταθερός, με την γωνία *euler* e_x να αλλάζει μεταβάλλεται ελάχιστα (βλ. σχήμα 12). Η αλλαγή του προσήμου δεν αποτελεί πρόβλημα καθώς οφείλεται στην μέθοδο εύρεσης της γωνίας μέσω της *atan2* και εκφράζει δύο διπλανές και διαδοχικές θέσεις. Έτσι, παρατηρείται ότι θα παραμένει σταθερός ο προσανατολισμός χωρίς να επηρεάζει την κίνηση όλου του συστήματος.



(α)



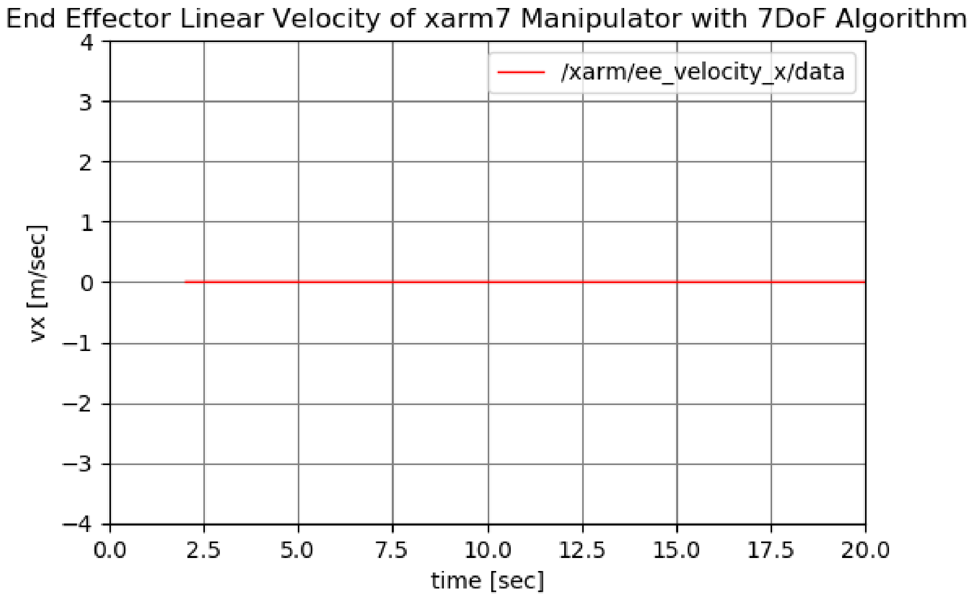
(β)



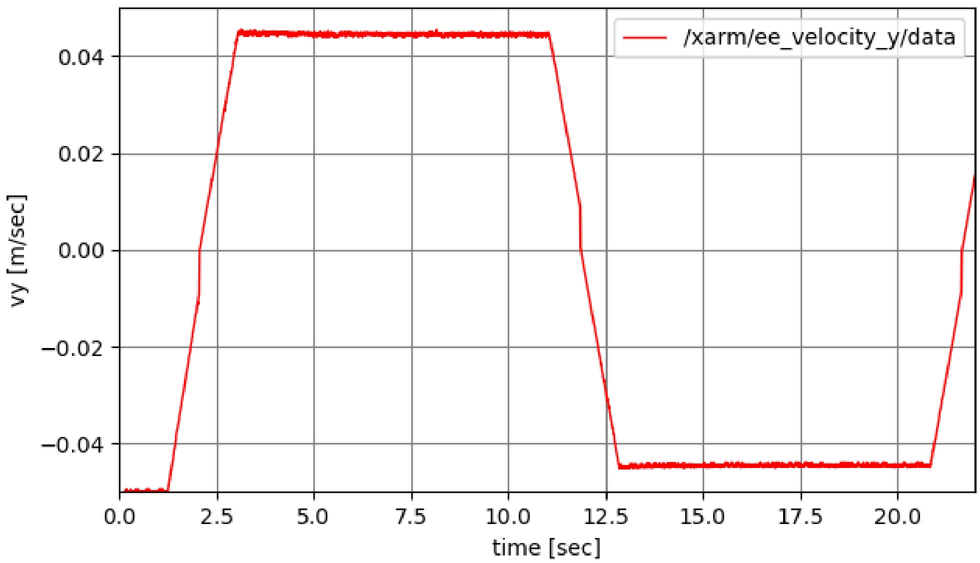
(γ)

Σχήμα 12. Προσανατολισμός τελικού στοιχείου δράσης κατά την προσομοίωση: (α) Άξονας e_x, (β) Άξονας e_y, (γ) Άξονας e_z

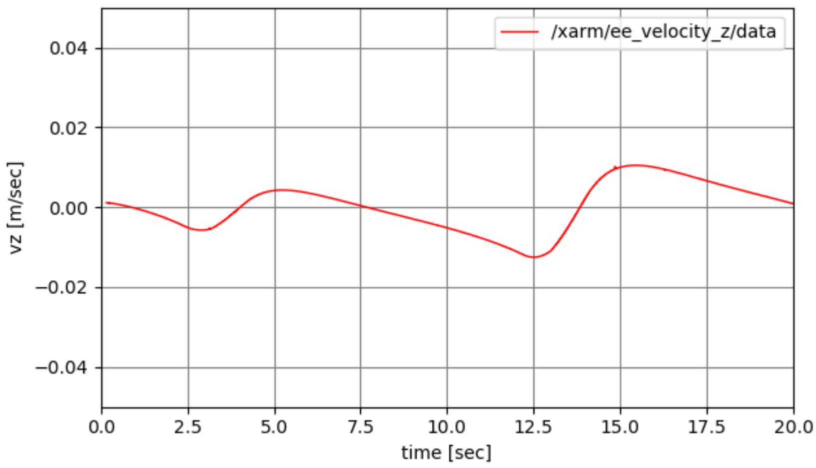
Στα γραφήματα του σχήματος 13 βλέπουμε την γραμμική ταχύτητα που έχει το τελικό στοιχείο δράσης κατά την εκτέλεση της περιοδικής κίνησης. Αυτό που παρατηρούμε είναι στον άξονα x δεν επηρεάζεται καθόλου η κίνηση λόγω του σφάλματος. Ωστόσο, στον άξονα z παρατηρούμε το αντίθετο. Λόγω του σφάλματος ως προς την z −συνιστώσα υπάρχει αντίστοιχη μικρή ταχύτητα. Όμως αυτό δεν επηρεάζει καθόλου την κίνηση του βραχίονα γενικά καθώς είναι τάξης μεγέθους μικρότερη από αυτή της κίνησης. Τέλος, παρατηρούμε πως στην y −συνιστώσα δημιουργείται τραπεζοειδής ταχύτητα το οποίο είναι το αναμενόμενο αποτέλεσμα, καθώς ως είσοδο στο σύστημα είναι και η επιθυμητή τροχιά της ταχύτητας που σχεδιάστηκε προηγουμένως.



(a)



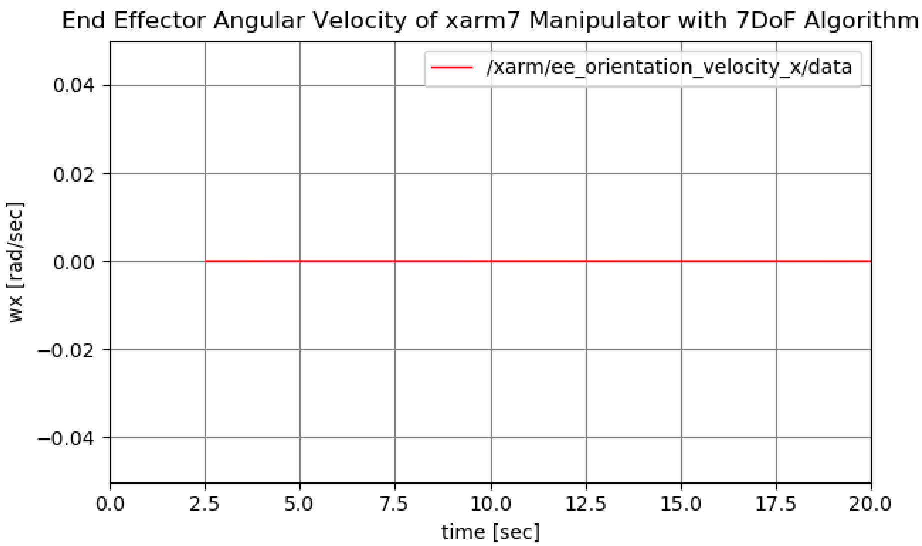
(β)



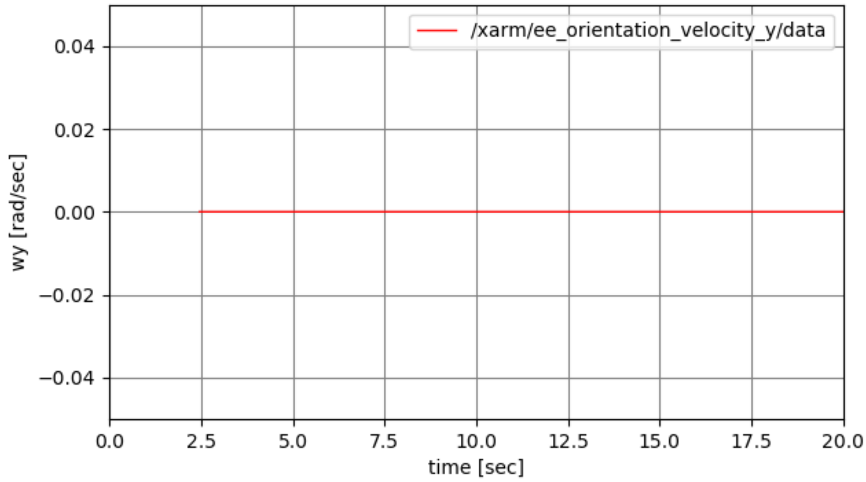
(γ)

Σχήμα 13. Γραμμική ταχύτητα τελικού στοιχείου δράσης: (α) Άξονας v_x, (β) Άξονας v_y, (γ) Άξονας v_z

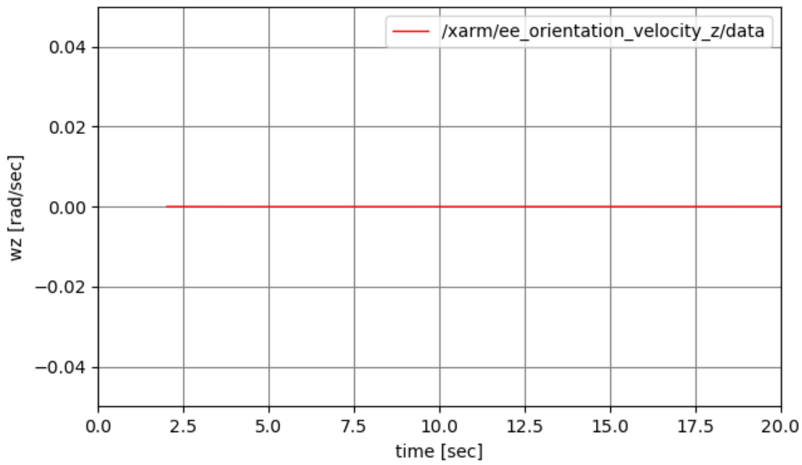
Τέλος, στο σχήμα 14 παρατηρούμε την γωνιακή ταχύτητα που έχει το τελικό στοιχείο δράσης. Βλέπουμε πως οι ταχύτητες προσανατολισμού είναι μηδενικές. Έτσι, δεν θα έχουμε περιστροφές του τελικού στοιχείου δράσης και θα εκτελείται σωστά η πορεία που τέθηκε στο σύστημα.



(α)



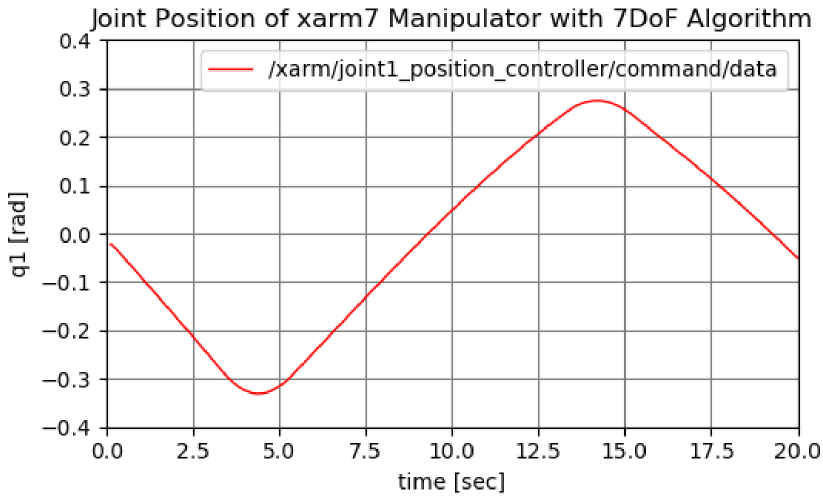
(β)



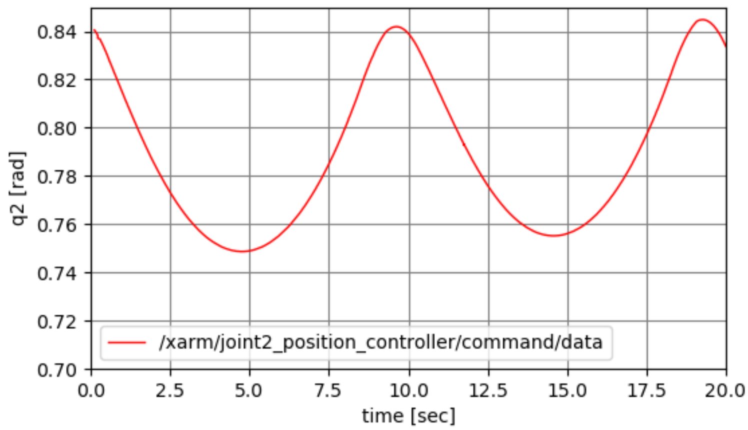
(γ)

Σχήμα 14. Γωνιακή ταχύτητα τελικού στοιχείου δράσης: (α) Άξονας ω_x, (β) Άξονας ω_y, (γ) Άξονας ω_z

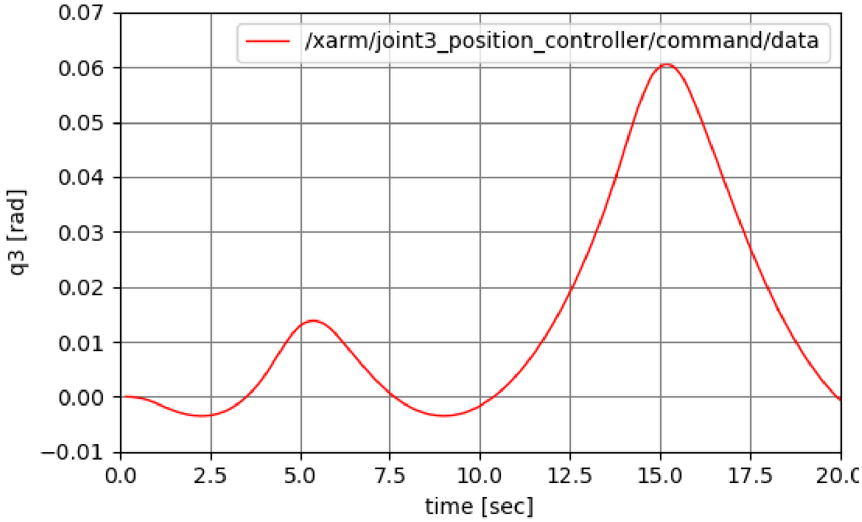
Για την επίτευξη των παραπάνω αποτελεσμάτων, θα πρέπει να υπολογιστούν οι γωνίες περιστροφής των αρθρώσεων κατάλληλα. Αυτό γίνεται με τον αλγόριθμο αντίστροφης κινηματικής που περιεγράφηκε προηγουμένως. Έτσι, σύμφωνα τον αλγόριθμο παράγονται τα παρακάτω διαγράμματα γωνιών των αρθρώσεων (βλ. Σχήμα 15).


Joint Position of xarm7 Manipulator with 7DoF Algorithm
/xarm/joint1_position_controller/command/data
q1 [rad]
time [sec]

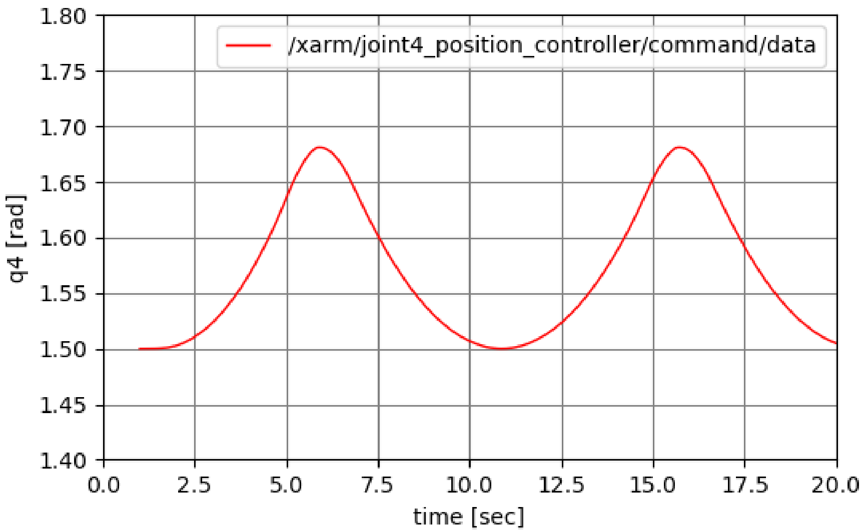
(α)


/xarm/joint2_position_controller/command/data
q2 [rad]
time [sec]

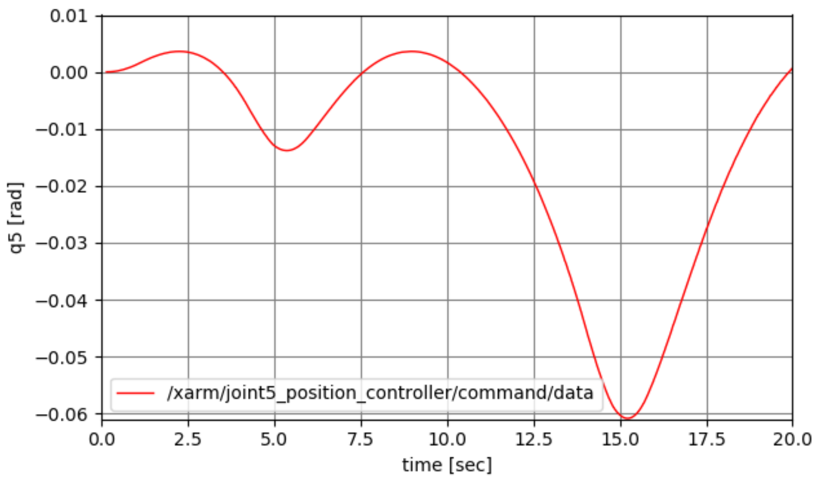
(β)


/xarm/joint3_position_controller/command/data
q3 [rad]
time [sec]

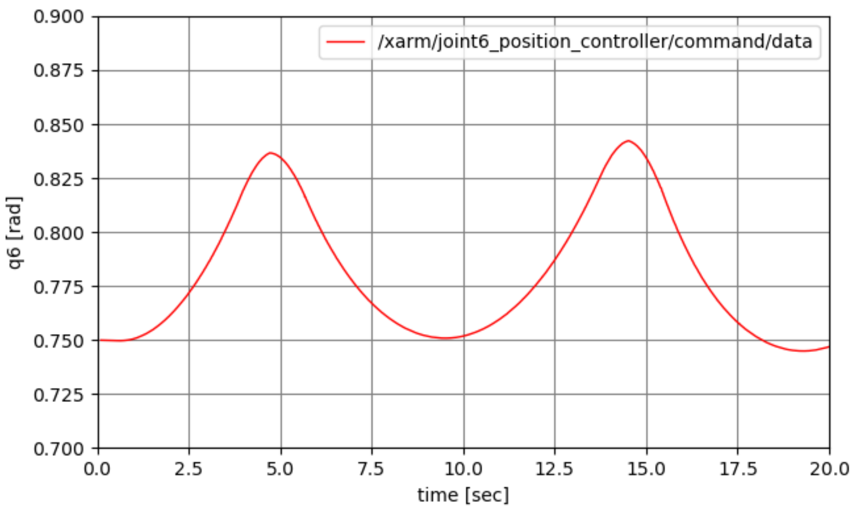
(γ)


/xarm/joint4_position_controller/command/data
q4 [rad]
time [sec]

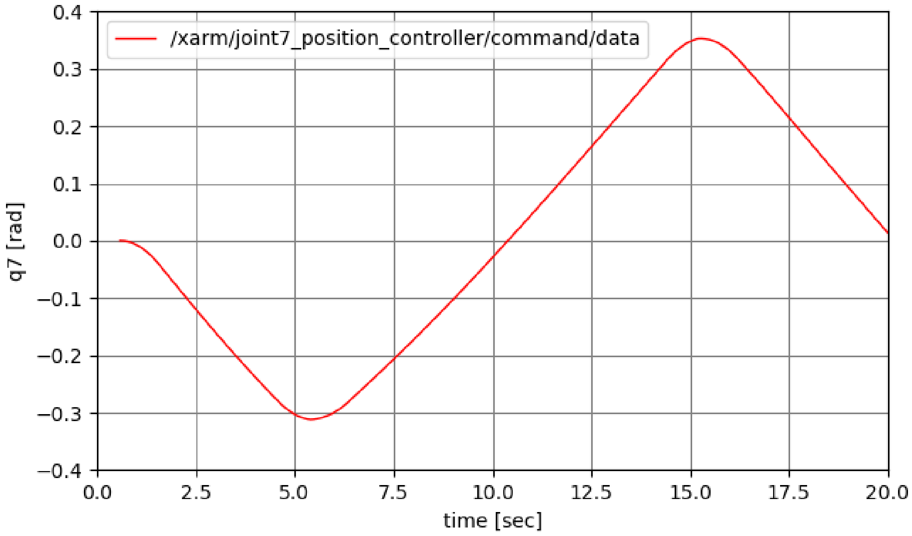
(δ)


/xarm/joint5_position_controller/command/data
q5 [rad]
time [sec]

(ε)


/xarm/joint6_position_controller/command/data
q6 [rad]
time [sec]

(στ)



(ζ)

Σχήμα 15. Γωνίες περιστροφικών αρθρώσεων κατά την προσομοίωση: (α) Άρθρωση περιστροφής q_1, (β) Άρθρωση περιστροφής q_2, (γ) Άρθρωση περιστροφής q_3, (δ) Άρθρωση περιστροφής q_4, (ε) Άρθρωση περιστροφής q_5, (στ) Άρθρωση περιστροφής q_6, (ζ) Άρθρωση περιστροφής q_7.

Συμπερασματικά παρατηρούμε πως με τις παραπάνω γραφικές παραστάσεις και την επιβολή της σχεδιαζόμενης πορείας, στον βραχίονα, αυτός θα την εκτελέσει επιτυχώς, δίχως να δημιουργούνται προβλήματα κατά την διαδικασία του ελέγχου. Οπότε και το τελικό στοιχείο δράσης θα εκτελεί το επιθυμητό ευθύγραμμο τμήμα που του ανατέθηκε χωρίς να διέρχεται από ιδιόμορφες διατάξεις του ρομποτικού χειριστή και χωρίς να προκαλείται αστάθεια στο σύστημα όταν βρεθεί στα άκρα του ευθύγραμμου τμήματος. Συνοπτικά, και οι δύο τρόποι ελέγχου έχουν ποιοτικά το ίδιο αποτέλεσμα όπως παρατηρείται από όλες τις γραφικές παραστάσεις.

Βιβλιογραφία

[1] B. Siciliano, L. Sciavicco, L. Villani, G. Oriolo, *Robotics: Modeling, Planning and Control*, Springer, 2009.

[2] ROS Documentation

[3] J. J. Craig, *Introduction to Robotics: Mechanics and Control*, Third Edition, Pearson Limited Education, 2014.

[4] A. Martinez, E. Fernández, *Learning ROS for Robotics Programming*, Packt Publishing, September 2013.

[5] W. S. Newman, *A Systematic Approach to Learning Robot Programming with ROS,* CRC Press – Taylor & Francis Group, 2018.

[6] R. N. Jazar, *Theory of Applied Robotics: Kinematics, Dynamics, and Control*, Second Edition, Springer, 2010.

[7] P. Corke, *Robotics, Vision, and Control: Fundamental Algorithms in MATLAB*, Springer, 2011.

[8] J. Angeles, *Fundamentals of Robotic Mechanical Systems: Theory, Methods, and Algorithms*, Fourth Edition, Springer, 2014.