



*Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο*

*Δ.Π.Μ.Σ. Συστήματα Αυτοματισμού*

*Κατεύθυνση Β:*

*Συστήματα Αυτομάτου Ελέγχου και Ρομποτικής*

**Μεταπτυχιακό Μάθημα:**

***Εργαστήριο Ρομποτικής***

***Ομάδα 4***

***Δεύτερη Εργαστηριακή Άσκηση***

***Έλεγχος Pendubot***

**Μέλη Ομάδας – Α.Μ.:**

***Ειρήνη – Μαρία Γεωργαντά – 02121201***

***Γεώργιος Κασσαβετάκης – 02121203***

***Γεώργιος Κρομμύδας – 02121208***

***Φραντζιέσκα Μιχαήλ – 02121216***

ΑΘΗΝΑ

2023

# Πίνακας περιεχομένων

<b>1. Περιγραφή Πειράματος.....</b>	<b>3</b>
1.1. Στόχοι Πειράματος.....	4
1.2. Σύστημα Ελέγχου Pendubot.....	4
1.3. Μετρήσεις και Διαγράμματα .....	6
1.4. Αντιστάθμιση Βαρύτητας Pendubot.....	13
1.5. Σύγκλιση Μεθόδου .....	15
<b>2. Περιγραφή Μη Γραμμικού Ελεγκτή Pendubot .....</b>	<b>15</b>
2.1. Μη Γραμμικός Ελεγκτής Δύο Φάσεων .....	15
2.1.1. Πρώτη Φάση Ελεγκτή .....	15
2.1.2. Δεύτερη Φάση Ελεγκτή.....	16
2.1.3. Αποτέλεσμα πειράματος μη γραμμικού ελεγκτή.....	17
<b>Παράρτημα .....</b>	<b>18</b>
Πηγαίος Κώδικας Ανάλυσης Μετρήσεων .....	18
<b>Βιβλιογραφία .....</b>	<b>20</b>

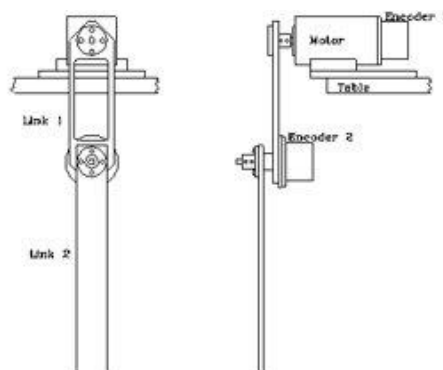
## 1. Περιγραφή Πειράματος

Το παρών πείραμα αποτελείται από το μηχανοτρονικό σύστημα Pendubot. Το σύστημα αυτό αποτελείται από δύο στρωφικές αρθρώσεις (βλ. σχήμα 1).



Σχήμα 1. Πειραματική διάταξη Pendubot.

Η πρώτη άρθρωση κινείται μέσω ενός κινητήρα συνεχούς ρεύματος που παράγει την κατάλληλη ροπή ώστε να κινηθεί. Επίσης στην άρθρωση έχει και έναν οπτικό κωδικοποιητή (optical encoder) ο οποίος μας βοηθά να γνωρίζουμε την γωνία που έχει περιστραφεί η άρθρωση κατά την εφαρμογή κάποιας ροπής. Η δεύτερη άρθρωση δεν είναι συνδεδεμένη με κάποιον κινητήρα με αποτέλεσμα να κινείται μόνο κατά την περιστροφή της πρώτης. Τέλος, η δεύτερη άρθρωση περιέχει και αυτή έναν encoder, ώστε να γνωρίζουμε την γωνία στροφής της κατά την κίνηση του συστήματος. Αναλυτικά η διάταξη φαίνεται και στο σχήμα 2.



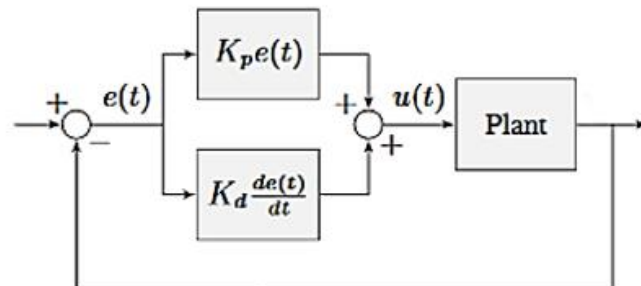
Σχήμα 2. Κινηματική δομή ρομποτικού μηχανισμού Pendubot.

## 1.1. Στόχοι Πειράματος

Σκοπός του συγκεκριμένου πειράματος, είναι να εφαρμοστεί ένα σήμα ελέγχου στο σύστημα, έτσι ώστε να περιστραφεί η πρώτη άρθρωση από τις  $-90^\circ$  στις  $-60^\circ$ . Η ρύθμιση αυτή θα γίνει μέσω ενός PD ελεγκτή. Κατά την εφαρμογή του ελέγχου θα διαπιστωθούν κάποιες επιδράσεις στο σύστημα λόγω του δυναμικού μοντέλου του Pendubot. Έτσι, θα πρέπει να σχεδιαστεί ένας ελεγκτής που θα συμπεριλαμβάνει τους όρους αυτούς του δυναμικού μοντέλου που επηρεάζουν την κίνηση. Τέλος, θα αναλυθεί ένας μη γραμμικός ελεγκτής (δύο φάσεων) ο οποίος θα εφαρμοστεί στο σύστημα.

## 1.2. Σύστημα Ελέγχου Pendubot

Ο έλεγχος του μηχανισμού Pendubot, όπως αναφέρθηκε και παραπάνω, θα γίνει μέσω PD ελεγκτή (Βλ. Σχήμα 3).



Σχήμα 3. Δομικό Διάγραμμα Ελεγκτή Pendubot.

Ο ελεγκτής αυτός βασίζεται στην σχέση (1.1), η οποία περιγράφει το σήμα που θα εφαρμόζεται στο σύστημα.

$$u(t) = K_p e(t) + K_D \frac{de(t)}{dt} = K_p (q_{1d} - q_1) + K_D (\dot{q}_{1d} - \dot{q}_1) \quad (1.1)$$

όπου τα  $q_{1d}$  και  $\dot{q}_{1d}$  είναι οι επιθυμητές τιμές εισόδου για την θέση και την ταχύτητα για στο σύστημα κλειστού βρόχου. Τα  $K_p, K_D$  είναι τα κέρδη του ελεγκτή τα οποία θα είναι υπεύθυνα για την ρύθμιση του κατάλληλου σήματος εισόδου στο plant.

Κατά την εφαρμογή σημάτων ελέγχου στο σύστημα Pendubot, θα δεχόμαστε μία απόκριση του συστήματος. Δηλαδή το πως επιδρά το σύστημα στην επιβολή την οποία

θέσαμε. Αυτή η απόκριση μπορεί να χαρακτηριστεί από κάποια φυσικά χαρακτηριστικά. Τα χαρακτηριστικά αυτά χωρίζονται σε δύο κατηγορίες. Στα χαρακτηριστικά της μεταβατικής απόκρισης και της μόνιμης απόκρισης. Θα μελετήσουμε αρχικά της μεταβατικής απόκρισης. Το πρώτο χαρακτηριστικό μεταβατικής απόκρισης είναι η μέγιστη υπερύψωση. Δηλαδή την μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει η καμπύλη εξόδου κατά την εφαρμογή ενός σήματος. Αυτή δίνεται από τον τύπο της σχέσης (1.2).

$$Overshoot = \frac{q_{1,max} - q_{1d}}{q_{1d}} \% (rad) \quad (1.2)$$

Το δεύτερο χαρακτηριστικό μεταβατικής κατάστασης αποτελεί τον χρόνο ανύψωσης της καμπύλης. Αποτελεί την διαφορά χρόνου μεταξύ των σημείων των οποίων η καμπύλη εξόδου βρίσκεται στο 10% της τελικής τιμής και στο 90% της τελικής τιμής, πριν την πρώτη υπερύψωση. Δηλαδή αποτυπώνεται από την σχέση (1.3).

$$t_{rt} = t_{90\%} - t_{10\%} (sec) \quad (1.3)$$

Καθώς ορίστηκαν τα χαρακτηριστικά μεταβατικής απόκρισης, το επόμενο βήμα είναι να οριστεί και το χαρακτηριστικό μόνιμης απόκρισης. Αυτό αποτελεί την τελική τιμή εξόδου του συστήματος. Δηλαδή την τιμή εκείνη που θα συγκλίνει το σύστημα όταν ο χρόνος θα τείνει στο άπειρο. Κατ' επέκταση αυτού, έχουμε και το σφάλμα μόνιμης κατάστασης, το οποίο μας δείχνει εάν όντως σύγκλινε η έξοδος στην επιθυμητή τιμή. Περιγράφεται από την σχέση (1.4).

$$e_{ss}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \frac{A}{1+K_P} (deg) \quad (1.4)$$

Αυτό που παρατηρούμε από την σχέση (1.4) είναι πως η μόνιμη κατάσταση εξαρτάται από το κέρδος  $K_P$  του  $P$  όρου. Δηλαδή όσο μεγαλύτερο θα είναι το κέρδος τόσο μικρότερο θα είναι το σφάλμα μόνιμης κατάστασης. Η ιδανική του τιμή θα ήταν το άπειρο, ωστόσο στην πράξη δεν είναι εφικτή μια τέτοια τιμή, διότι θα εφαρμόζομε στο σύστημά μας έναν τεράστιο αριθμό που θα μπορούσε να καταστρέψει την ρομποτική διάταξη λόγω ανάπτυξης μεγάλων ροπών από τον κινητήρα.

Στον ελεγκτή του συστήματος Pendubot δεν γίνεται η χρήση του όρου  $I$ , διότι η δεύτερη άρθρωση δεν είναι συνδεδεμένη με κάποιον κινητήρα και έτσι δεν μπορούμε να την ελέγξουμε. Συνεπώς ούτε μπορούμε να γνωρίζουμε τον γεωμετρικό τόπο ριζών του συστήματος, με αποτέλεσμα να κινδυνεύουμε να πέσουμε σε αστάθεια βάζοντας PID ελεγκτή. Αυτό συμβαίνει καθώς η προσθήκη του  $I$  όρου θα δημιουργήσει μιγαδικούς πόλους (περισσότερες ταλαντώσεις στο σύστημα) και οι πόλοι θα βρίσκονται πολύ κοντά στον άξονα των φανταστικών. Έτσι, θα προκύψει μία ταλάντωση που οφείλεται

στον δεύτερο σύνδεσμο μπορεί να μετατοπίσει τον γεωμετρικό τόπο ριζών στα δεξιά προκαλώντας αστάθεια και μπορεί να καταστρέψει το σύστημα. Προκειμένου λοιπόν να μηδενίσουμε το σφάλμα, χωρίς τον Ι όρο, χρησιμοποιούμε άλλον τρόπο και συγκεκριμένα τον υλοποιούμε μέσω αντιστάθμισης της βαρύτητας, η οποία θα αναλυθεί εκτενέστερα παρακάτω.

### 1.3. Μετρήσεις και Διαγράμματα

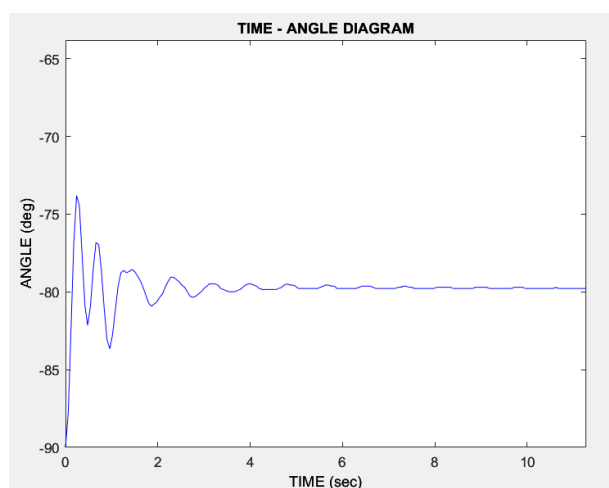
Οι μετρήσεις που έγιναν αφορούν μία διαδοχική ρύθμιση του κέρδους  $K_P$  και  $K_D$  του ελεγκτή PD για την 1<sup>η</sup> άρθρωση του μηχανισμού, έτσι ώστε να επιτευχθεί η κίνηση από την αρχική τιμή στην επιθυμητή τιμή που είναι  $q_{1d} = -60^\circ$ . Πιο αναλυτικά, ξεκινάμε από μία μικρή τιμή του αναλογικού κέρδους  $K_P$  και τη μεταβάλλουμε σταδιακά μέσα σε ένα κατάλληλο εύρος τιμών πλησιάζοντας κάθε φορά όλο και περισσότερο στην επιθυμητή τελική θέση του μηχανισμού, δηλαδή στην επιθυμητή γωνία στροφής. Για κάθε μία από τις τιμές που δίνουμε στο κέρδος  $K_P$ , δίνουμε διαδοχικές αυξανόμενες τιμές και στο  $K_D$  προκειμένου να εντοπίσουμε το «βέλτιστο»  $K_D$  που ελαχιστοποιεί την υπερύψωση (overshoot). Τέλος για κάποιες τιμές του  $K_D$  προκύπτει κρίσιμη απόσβεση. Ο πίνακας με όλες τις μετρήσεις που λάβαμε παρουσιάζεται παρακάτω.

$K_P$	$K_D$	$e_{ss}(deg)$	$t_{rt}(sec)$	$Over(rad)$
1	0	18.768	0.18	0.1156
1	0.15	19.488	0.24	0.0188
1	0.23	19.632	0.48	0.0062
5	0.25	7.896	0.12	0.1093
5	0.4	8.04	0.18	0.0251
5	0.48	8.112	0.42	0.0126
10	0.55	4.512	0.12	0.0339
10	0.65	4.656	0.12	0.0113
10	0.7	4.512	0.42	0.0087
20	0.8	2.496	0.12	0.0403
20	0.95	2.496	0.36	0.0076
20	1.3	2.496	0.36	0.0076

Πίνακας 1. Αποτελέσματα πειραμάτων Pendubot.

Ακολουθώς παρουσιάζονται αναλυτικά όλα τα διαγράμματα για καθεμία από τις παραπάνω μετρήσεις.

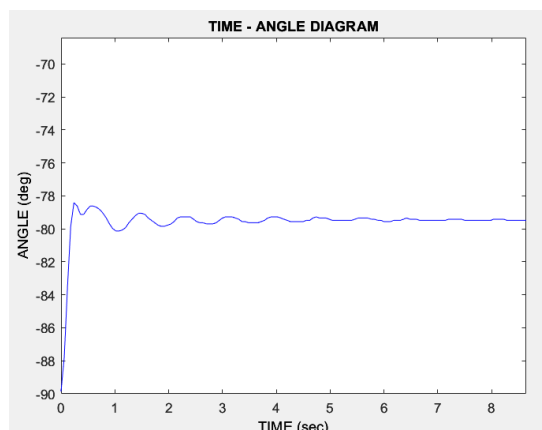
Για κέρδη  $K_P = 1, K_D = 0$  παρατηρούμε ότι το σύστημα στην αρχή εκτελεί ταλάντωση, ενώ σταθεροποιείται στις  $-80^\circ$  περίπου, γωνία που όμως απέχει από την επιθυμητή  $-60^\circ$  (βλ. σχήμα 4). Συγκεκριμένα, από τον πίνακα των μετρήσεων το σφάλμα που προκύπτει είναι  $e_{ss} = 18.768 \text{ deg}$ . Επίσης ο χρόνος ανύψωσης (rise time) είναι  $t_{rt} = 0.18 \text{ sec}$  και η μέγιστη υπερύψωση (overshoot) είναι  $0.1156 \text{ rad}$ . Συνεπώς παρατηρούμε ότι τα κέρδη που δίνουμε δεν είναι αρκετά για να αντισταθμίσουν την βαρύτητα και έτσι βρισκόμαστε μακριά από την επιθυμητή τελική θέση του συστήματος.



Σχήμα 4. Απόκριση Pendubot για τα κέρδη  $K_P = 1, K_D = 0$ .

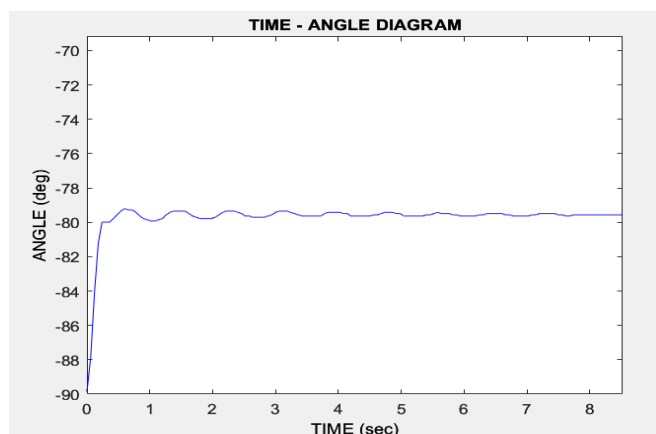
Σε αυτή τη μέτρηση διατηρούμε ίδια τιμή για το κέρδος  $K_P = 1$ , ενώ αυξάνουμε το  $K_D$ , ώστε  $K_D = 0.15$ . Παρατηρούμε ότι έχουν μειωθεί σημαντικά οι ταλαντώσεις που εκτελεί το σύστημα στην αρχή και συνεπώς έχουμε σημαντική μείωση της μέγιστης υπερύψωσης (overshoot) που πλέον είναι  $0.0188 \text{ rad}$ , ενώ ο χρόνος ανύψωσης (rise time) αυξάνεται και είναι  $t_{rt} = 0.24 \text{ sec}$ . Ωστόσο το σφάλμα μόνιμης κατάστασης παραμένει και πάλι μεγάλο και συγκεκριμένα προκύπτει  $e_{ss} = 19.488 \text{ deg}$ . Μάλιστα παρατηρούμε ότι έχει αυξηθεί κατά ελάχιστα σε σχέση με την προηγούμενη μέτρηση, γιατί πλέον η επίδραση του  $K_P$  σε σχέση με την επίδραση του  $K_D$  έχει μειωθεί, αφού αυξήσαμε την τιμή του τελευταίου. Συνολικά, η συμπεριφορά αυτή του συστήματος είναι αναμενόμενη καθώς αυξάνοντας το κέρδος  $K_D$  αυξάνεται η ταχύτητα απόκρισης και μειώνονται οι ταλαντώσεις. Το σφάλμα θέσης παραμένει σχεδόν ίδιο, αφού δεν αλλάζει η τιμή του  $K_P$  (βλ. σχήμα 5). Έτσι και σε αυτή τη μέτρηση οι τιμές που δίνουμε στα κέρδη

δεν αντισταθμίζουν την βαρύτητα και δεν δημιουργούν την απαιτούμενη ροπή ώστε το σύστημα να πάει στην επιθυμητή θέση.



Σχήμα 5. Απόκριση Pendubot για τα κέρδη  $K_P = 1$ ,  $K_D = 0.15$ .

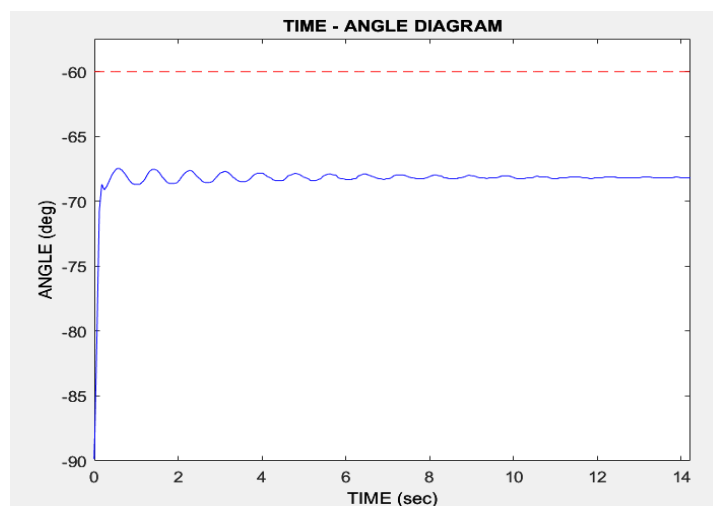
Ακολούθως, επαναλαμβάνουμε την μέτρηση διατηρώντας και πάλι σταθερή την τιμή του κέρδους  $K_P = 1$ , ενώ αυξάνουμε ακόμα το  $K_D$ , ώστε  $K_D = 0.23$  (βλ. σχήμα 6). Όπως και στην προηγούμενη μέτρηση παρατηρούμε ότι μειώνονται κι άλλο οι ταλαντώσεις του συστήματος. Έτσι μειώνεται σημαντικά και η μέγιστη υπερύψωση σε  $0.0062 \text{ rad}$  ενώ ο χρόνος ανύψωσης (rise time) αυξάνεται και έχουμε  $t_{rt} = 0.48 \text{ sec}$ . Όσον αφορά το σφάλμα μόνιμης κατάστασης, παρατηρούμε ότι παραμένει μεγάλο και είναι ελάχιστα μεγαλύτερο από την προηγούμενη μέτρηση ( $e_{ss} = 19.632 \text{ deg}$ ). Η συμπεριφορά αυτή του συστήματος είναι αναμενόμενη, για τους λόγους που αναφέρθηκαν και στην προηγούμενη μέτρηση και οι τιμές των κερδών και εδώ δεν είναι αρκετές ώστε να αντισταθμίσουν την βαρύτητα και να έχουμε την επιθυμητή απόκριση στο σύστημά μας. Επιπλέον, στην μέτρηση αυτή παρουσιάζεται κρίσιμη απόσβεση λόγω της μεγάλης τιμής του όρου  $K_D$ .



Σχήμα 6. Απόκριση Pendubot για τα κέρδη  $K_P = 1$ ,  $K_D = 0.23$ .

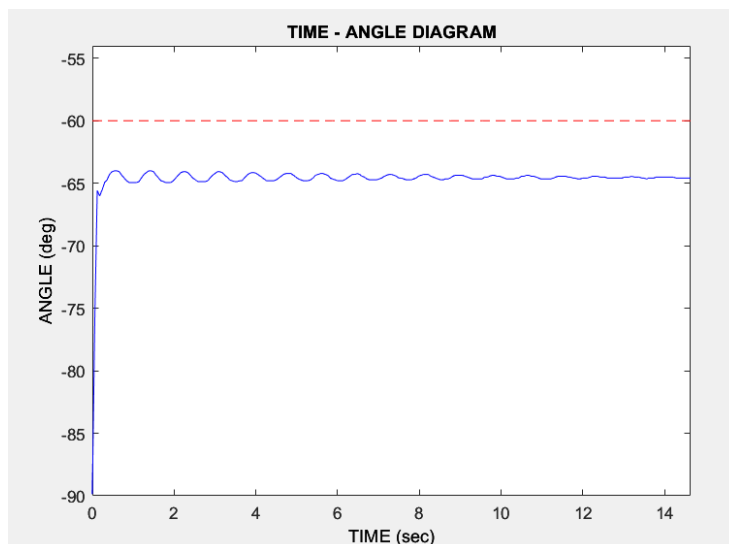


Συνεχίζοντας τις μετρήσεις, προκειμένου να μειώσουμε ακόμα τις ταλαντώσεις και να αυξήσουμε την ταχύτητα απόκρισης του συστήματος, αυξάνουμε κι άλλο το  $K_D$  σε 0.48 και μεταβάλλουμε τώρα το  $K_P = 5$  (βλ. σχήμα 7). Έτσι η μέγιστη υπερύψωση μειώνεται σε 0.0126 rad και ο χρόνος ανύψωσης αυξάνεται σε  $t_{rt} = 0.42 \text{ sec}$ . Με τα νέα αυτά κέρδη παρατηρούμε πως το σφάλμα θέσης έχει μειωθεί δραματικά ( $e_{ss} = 8.112 \text{ deg}$ ), συγκριτικά με την προηγούμενη τιμή του  $K_P$ . Αυτό οφείλεται στο γεγονός πως η σχέση (1.1) θα δίνει μεγαλύτερη ενέργεια στο σύστημα, με αποτέλεσμα να προσεγγίζει πιο κοντά την επιθυμητή τιμή. Επίσης σε αυτή τη μέτρηση παρουσιάζεται κρίσιμη απόσβεση αφού χρησιμοποιήσαμε μεγάλη τιμή του όρου  $K_D$ . Όμως οι τιμές των κερδών συνεχίζουν να μην δύνουν στο σύστημα την ροπή που απαιτείται για να αντισταθμίσει την βαρύτητα και να οδηγηθεί στην επιθυμητή γωνία.



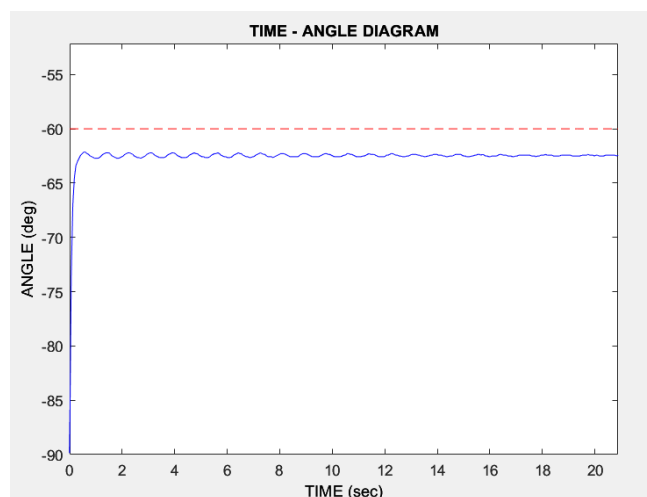
Σχήμα 7. Απόκριση Pendubot για τα κέρδη  $K_P = 5$   $K_D = 0.48$ .

Ακολουθώντας, αυξάνουμε το  $K_P$  στην τιμή 10 και αυξάνουμε επίσης και το  $K_D$  ( $K_D = 0.7$ ) έτσι ώστε να προσπαθήσουμε να προσεγγίσουμε την επιθυμητή τιμή καλύτερα (βλ. σχήμα 8). Με αυτή την τιμή μάλιστα του  $K_D$  πετυχαίνουμε κρίσιμη απόσβεση. Έτσι παρατηρούμε σφάλμα θέσης μειώθηκε συγκριτικά με την προηγούμενη μέτρησης ( $e_{ss} = 4.512 \text{ deg}$ ), ενώ το Overshoot = 0.008 rad και ο χρόνος ανύψωσης  $t_{rt} = 0.42 \text{ sec}$ . Η τελική γωνία του συστήματος και πάλι απέχει από την επιθυμητή, οπότε τα κέρδη που δώσαμε δεν αντισταθμίσαν την βαρύτητα.



Σχήμα 8. Απόκριση Pendubot για τα κέρδη  $K_p = 10$   $K_D = 0.7$ .

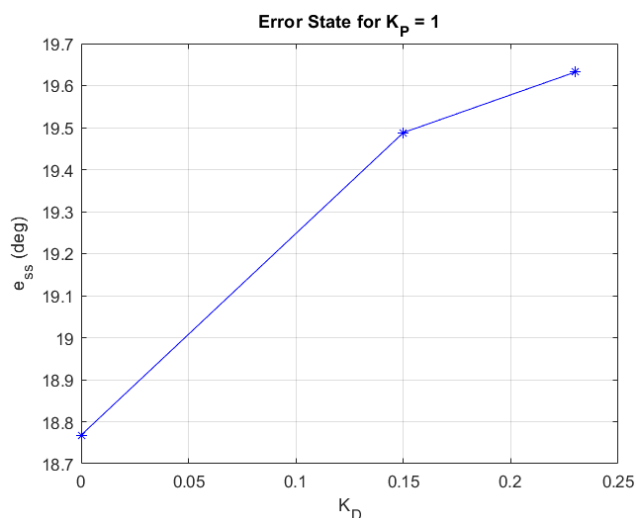
Σε αυτή τη μέτρηση αυξάνουμε πάλι την τιμή του κέρδους  $K_p = 20$  και αυξάνουμε και την τιμή του κέρδους  $K_D$  σε 1.3. Από το διάγραμμα (βλ. σχήμα 9) αλλά και από τις τιμές των μετρήσεων που λαμβάνουμε παρατηρούμε ότι το σφάλμα θέσης, ο χρόνος ανύψωσης και η μέγιστη υπερύψωση μειώθηκαν ( $e_{ss} = 2.496 \text{ deg}$ ,  $t_{rt} = 0.36 \text{ sec}$ ,  $overshoot = 0.0076 \text{ rad}$ ). Μάλιστα λόγω της μεγάλης τιμής του  $K_D$ , το σύστημα παρουσιάζει κρίσιμη απόσβεση. Και σε αυτή τη μέτρηση οι τιμές των κερδών δεν οδήγησαν σε αντιστάθμιση της βαρύτητας ώστε το σύστημα να οδηγηθεί στην επιθυμητή θέση.



Σχήμα 9. Απόκριση Pendubot για τα κέρδη  $K_p = 20$   $K_D = 1.3$ .

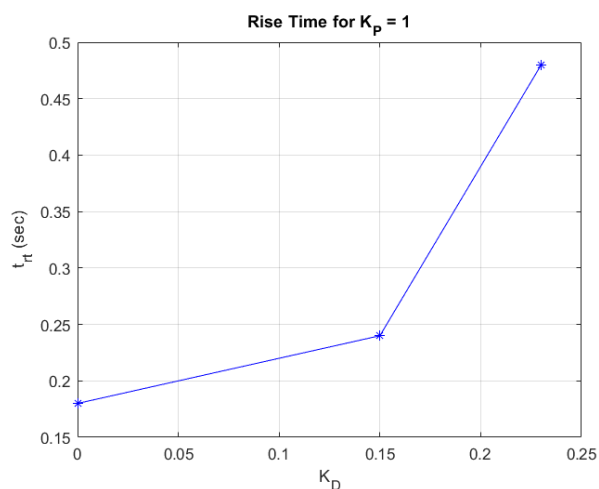
Κατά την λειτουργία του Pendubot στην περίπτωση που το  $K_p = 1$ , διαπιστώσαμε πως τα χαρακτηριστικά μεγέθη των αποκρίσεων στην μέση κατάσταση

τροποποιήθηκαν. Αντιθέτως, στην μόνιμη κατάσταση δεν υπήρξε βελτίωση. Αναλυτικότερα, παρατηρώντας και το σχήμα 10, το σφάλμα μόνιμης κατάστασης δεν μειώθηκε με την αύξηση του κέρδους  $K_D$ , αλλά παρέμεινε. Αυτό οφείλεται στο γεγονός πως στην μόνιμη κατάσταση η ταχύτητα μηδενίζεται. Έτσι δεν μπορεί να επηρεάσει καθόλου.



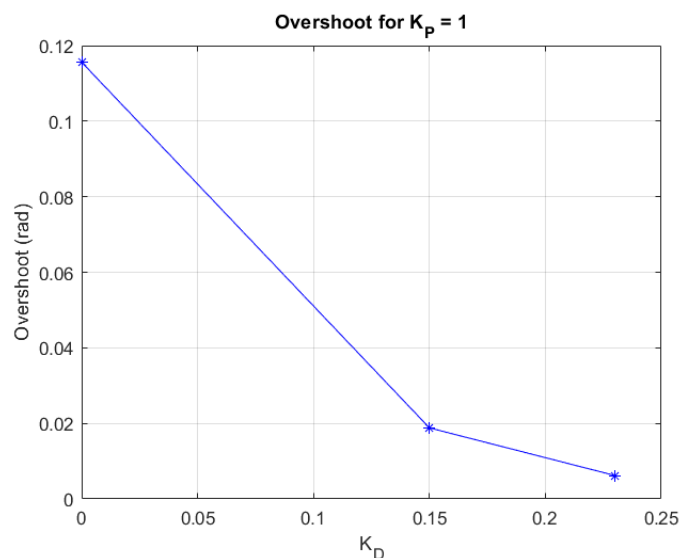
Σχήμα 10. Σφάλμα μόνιμης κατάστασης Pendubot για κέρδος  $K_P = 1$ .

Εκτός από το σφάλμα μόνιμης κατάστασης που παραμένει σταθερό, επηρεάζονται τα υπόλοιπα χαρακτηριστικά. Δηλαδή ο χρόνος ανύψωσης και η ανύψωση της καμπύλης. Όταν εφαρμόζεται το σήμα ελέγχου για τις τιμές του  $K_D$ , διαπιστώνουμε πως ο χρόνος ανύψωσης αυξάνεται (βλ. σχήμα 11). Αυτό συμβαίνει καθώς στο σήμα ελέγχου της (1.1) ο D όρος είναι πάντα αρνητικός και στην ουσία αφαιρείται από το σφάλμα θέσης. Έτσι μειώνεται και η ενέργεια που μεταδίδεται στο σύστημα.



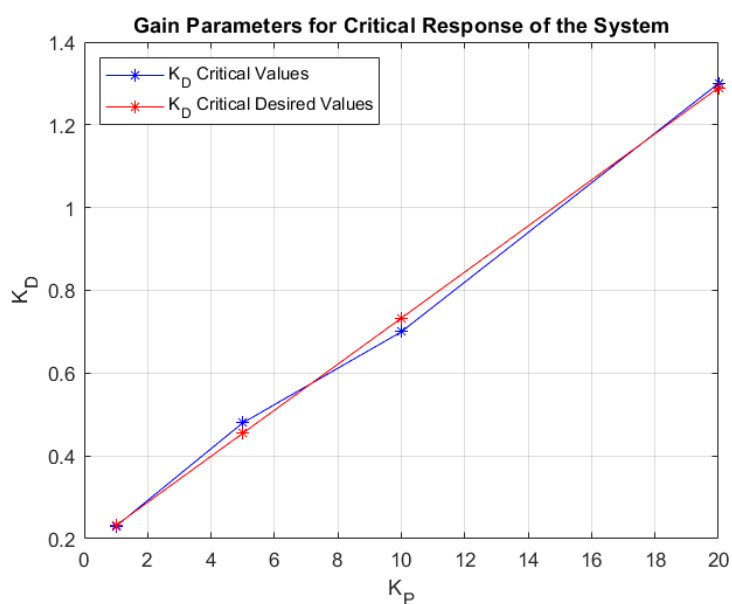
Σχήμα 11. Χρόνος ανύψωσης απόκρισης του Pendubot για κέρδος  $K_P = 1$ .

Για τον αντίστοιχο λόγο μειώνεται η ανύψωση της καμπύλης απόκρισης του Pendubot. Έτσι, παρατηρούμε πως στο σχήμα 12 η ανύψωση μειώνεται με την αύξηση του κέρδους του D όρου.



Σχήμα 12. Μέγιστη τιμή ανύψωσης καμπύλης απόκρισης του Pendubot για κέρδος  $K_P = 1$ .

Κατά την λειτουργία του Pendubot παρατηρήσαμε πως για κάποια ζεύγη κερδών πραγματοποιείται κρίσιμη απόσβεση. Με βάση αυτές τις τιμές εφαρμόσαμε γραμμική παλινδρόμηση και βρήκαμε την ιδανική καμπύλη των κερδών για να παρουσιάζεται κρίσιμη απόσβεση (βλ. σχήμα 12).



Σχήμα 13. Σύγκριση ιδανικής καμπύλης ζευγαριών κερδών του ελεγκτή με πραγματικής για κρίσιμη απόσβεση

Συνοψίζοντας τα αποτελέσματα όλων των παραπάνω μετρήσεων, με την αύξηση της τιμής του κέρδους  $K_P$  επιτυγχάναμε καλύτερο έλεγχο θέσης, μειώνοντας το σφάλμα και πλησιάζοντας κάθε φορά όλο και περισσότερο στην επιθυμητή θέση του συστήματος, ενώ αυξάνοντας την τιμή του  $K_D$  επιτυγχάναμε γρηγορότερη απόκριση με μικρότερη μέγιστη υπερύψωση (overshoot). Πιο αναλυτικά, κάθε φορά που μεταβάλλαμε την τιμή του  $K_P$  πλησιάζαμε περισσότερο στην επιθυμητή γωνία των  $-60^\circ$ , αλλά το σύστημα παρουσίαζε ταλάντωση και μεγάλο overshoot. Για τον λόγο αυτό, για την ίδια τιμή  $K_P$  αυξάναμε διαδοχικά το  $K_D$ , ώστε να μειωθεί η ταλάντωση και το overshoot, μέχρι να φτάσουμε στην κρίσιμη απόσβεση, όπου επαναλαμβάναμε την ίδια διαδικασία για νέα τιμή  $K_P$ , μεγαλύτερη. Οι τελικές τιμές των κερδών που προέκυψαν ήταν  $K_P = 20$  και  $K_D = 1.3$ . Παρατηρήσαμε όμως ότι ακόμη και για αυτά τα κέρδη, το σύστημα δεν αποκτά την ροπή που χρειάζεται προκειμένου να μπορέσει να αντισταθμίσει την βαρύτητα και να οδηγηθεί στην επιθυμητή θέση. Έτσι χρησιμοποιείται η μέθοδος της αντιστάθμισης που περιγράφεται αναλυτικά στην επόμενη ενότητα.

#### 1.4. Αντιστάθμιση Βαρύτητας Pendubot

Αυτό που παρατηρήσαμε κατά την ανάλυση των πειραμάτων είναι πως ο PD ελεγκτής της σχέσης (1.1) δεν μπορεί να πάει το σφάλμα στο μηδέν. Αυτό οφείλεται στο γεγονός πως στην μόνιμη κατάσταση θα προκύψει ότι το σήμα ελέγχου θα είναι:

$$u_{ss}(t) = K_P e_{ss} \quad (1.5)$$

Έτσι, η πρώτη άρθρωση δεν θα μπορέσει να δίνει την κατάλληλη ροπή ώστε να βρεθεί στην επιθυμητή θέση. Συγκεκριμένα, το βάρος πάνω στους κινούμενους συνδέσμους επιδρά στον έλεγχο της θέσης της 1ης άρθρωσης, προκαλώντας μόνιμο σφάλμα. Μάλιστα από το δυναμικό μοντέλο Lagrange, [1], προκύπτει ότι η ροπή εξαρτάται από την σχέση (1.6), και μάλιστα από την βαρύτητα στους συνδέσμους.

$$\tau = D(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) \quad (1.6)$$

Με περεταίρω ανάλυση της σχέσης (1.6), στην μόνιμη κατάσταση θα συμβεί:

$$\tau = g(q)$$

Οπότε, με την χρήση του PD ελεγκτή θα προκύψει η βαρυτική δύναμη στον σύνδεσμο:

$$g_1(q_{ss}) = u_{ss}(t) = K_P e_{ss} \quad (1.7)$$

έτσι από την σχέση (1.7) βλέπουμε ότι το  $e_{ss}$  παράγει ουσιαστικά την ροπή που χρειάζεται για την αντιστάθμιση της βαρύτητας με αποτέλεσμα να μην μπορεί να πάει στο 0 το σφάλμα. Επομένως για τον έλεγχο θέσης αρκεί να συμπεριλάβουμε στον PD έλεγχο τον όρο της βαρύτητας, δηλαδή το  $g(q)$ , προκειμένου να τον αντισταθμίσουμε και να τον εξαλείψουμε. Οπότε θα έχουμε την σχέση (1.8):

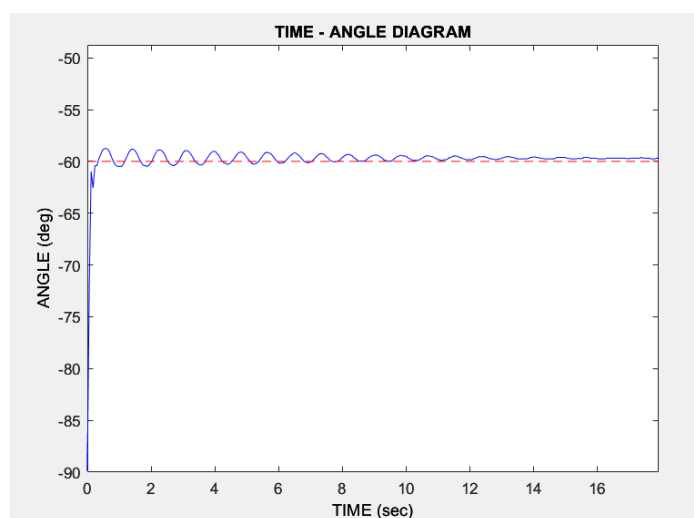
$$u(t) = K_P e(t) + K_D \frac{de(t)}{dt} + \tau_{g(q)} \quad (1.8)$$

Χρησιμοποιώντας λοιπόν στο πείραμά μας τις βέλτιστες τιμές για τα  $K_P$  και  $K_D$  που βρήκαμε παραπάνω και προσθέτοντας τον όρο της βαρύτητας, παρατηρούμε ότι πλησιάζουμε αρκετά την επιθυμητή τελική θέση του συστήματος, έχοντας ελαχιστοποιήσει το σφάλμα μόνιμης κατάστασης. Τα χαρακτηριστικά επίδοσης του συστήματος που προκύπτουν για τον έλεγχο θέσης της 1<sup>ης</sup> άρθρωσης φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

$K_P$	$K_D$	$e_{ss}(deg)$	$t_{rt}(sec)$	$Over(rad)$
20	0.95	-0.312	0.42	0.0176

Πίνακας 2. Αποτέλεσμα πειράματος Pendubot με αντιστάθμιση βαρύτητας

Με βάσει αυτές τις τιμές και με τον όρο της αντιστάθμισης της βαρύτητας, παρατηρούμε πως το σύστημα συγκλίνει στην επιθυμητή τιμή. Αυτό φαίνεται και πιο αναλυτικά στο σχήμα 14.



Σχήμα 14. Απόκριση Pendubot με αντιστάθμιση βαρύτητας.

## 1.5. Σύγκλιση Μεθόδου

Στην τελευταία τροποποίηση του ελεγκτή φαινομενικά έχουμε συγκλίνει στην επιθυμητή τιμή την οποία θέσαμε. Αυτό οφείλεται στο γεγονός πως το σήμα ελέγχου της σχέσης (1.6) δεν θα μηδενίζεται ποτέ. Θα δημιουργείται ροπή στον κινητήρα λόγω του όρου  $\tau_{g(q)}$ . Επίσης, η απόκριση του συστήματος καταφέρνει να προσεγγίσει την επιθυμητή τιμή λόγω των τιμών των κερδών. Έτσι, κατά την λειτουργία του Pendubot γνωρίζουμε πως με τα κατάλληλα κέρδη θα φτάσει στην επιθυμητή τιμή και θα μπορέσει να παραμείνει σταθερή εκεί λόγω της αντιστάθμισης της βαρύτητας που εφαρμόστηκε στον έλεγχο.

## 2. Περιγραφή Μη Γραμμικού Ελεγκτή Pendubot

Εκτός από τον κλασικό ελεγκτή τύπου PD και την αντιστάθμιση της βαρύτητας στα πειράματα που εκτελέστηκαν προηγουμένως, θα θέλαμε να εκτελέσουμε κινήσεις ο οποίες να στρέφουν και την δεύτερη άρθρωση με αυτή να παραμένει σε μια θέση ισορροπίας· δίχως αυτή να μετακινείται από το σημείο που θέλουμε να ισορροπεί. Για την λειτουργία αυτή θα χρειαστεί να σχεδιάσουμε έναν μη γραμμικό ελεγκτή δύο φάσεων ο οποίος με κατάλληλες ροπές στην κινητήρα της πρώτης άρθρωσης, θα μεταδίδει την επιθυμητή κίνηση και στην δεύτερη άρθρωση και σύνδεσμο.

### 2.1. Μη Γραμμικός Ελεγκτής Δύο Φάσεων

Ο μη γραμμικός ελεγκτής αποτελείται από δύο φάσεις. Η πρώτη φάση αποτελείται από την επιβολή μιας διαταραχής στις εξισώσεις κίνησης του Pendubot έτσι ώστε να εκτελέσει ταλάντωση. Η δεύτερη φάση είναι η εξισορρόπηση γύρω από το σημείο ισορροπίας μέσω γραμμικοποίησης.

#### 2.1.1. Πρώτη Φάση Ελεγκτή

Το πρώτο στάδιο του ελεγκτή αφορά την επιβολή μιας ταλάντωσης ώστε να περιστραφεί ο δεύτερος σύνδεσμος κατά  $\pi$ . Καθώς η δεύτερη άρθρωση δεν ελέγχεται,

μπορούμε να τροποποιήσουμε το δυναμικό μοντέλο του Pendubot από τους δύο βαθμούς ελευθερίας στον ένα. Θα χρησιμοποιηθεί μία μερικώς γραμμικοποιημένη ανάδραση στο μοντέλο, [1]. Έτσι το νέο μοντέλο θα γίνει:

$$\dot{x} = Ax + bu + d \quad (2.1)$$

Ο παρών αλγόριθμος θα είναι ανθεκτικός στον θόρυβο που δημιουργείται κατά την κίνηση των συνδέσμων. Ωστόσο, λόγω της υποεπενέργειας της δεύτερης άρθρωσης, δεν μπορεί να γραμμικοποιηθεί πλήρως η σχέση (2.1). Έτσι θα προκύψει μία γραμμική σχέση μόνο για την διαφορική εξίσωση του πρώτου βαθμού ελευθερίας. Θα γίνει πρακτικά ανάδραση των μη γραμμικών όρων της πρώτης διαφορικής εξίσωσης, με αποτέλεσμα να ακυρώνονται. Έτσι, η εφαρμογή του PD ελεγκτή στην πρώτη άρθρωση δεν θα επηρεάζεται από τις διαταραχές της δεύτερης άρθρωσης. Αυτό που θα προκύψει για την πρώτη άρθρωση θα είναι ένας Computed Torque Controller για την πρώτη άρθρωση. Με την εφαρμογή της επιθυμητής ταλάντωσης θα ξεκινήσει το Pendubot να περιστρέφεται, μέχρις ότου περιστραφεί η δεύτερη άρθρωση κατά 180°. Όταν το καταφέρει, τότε εισάγεται η λειτουργία της δεύτερης φάσης του μη γραμμικού ελεγκτή.

### 2.1.2. Δεύτερη Φάση Ελεγκτή

Η δεύτερη φάση του ελεγκτή αφορά την εξισορρόπησης του συστήματος στο σημείο ισορροπίας το οποίο θέλουμε. Θα εφαρμοστεί γραμμικοποίηση στις δυναμικές εξισώσεις του μοντέλου κίνησης. Η μέθοδος που θα χρησιμοποιηθεί είναι η σειρά Taylor, και θα σχεδιαστεί ένα πλήρες μοντέλο ανάδρασης με γραμμικοποίηση. Η γραμμικοποίηση θα γίνει γύρω από το σημείο ισορροπίας που θέσαμε στην προηγούμενη φάση του μη γραμμικού ελεγκτή. Η σχέση της γραμμικοποίησης παρουσιάζεται στην σχέση (2.2)

$$V_l(x, t) = \ln(1 + x^T Px) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (x^T Px)^n = x^T Px - \frac{1}{2}(x^T Px)^2 + \frac{1}{3}(x^T Px)^3 - \dots \quad (2.2)$$

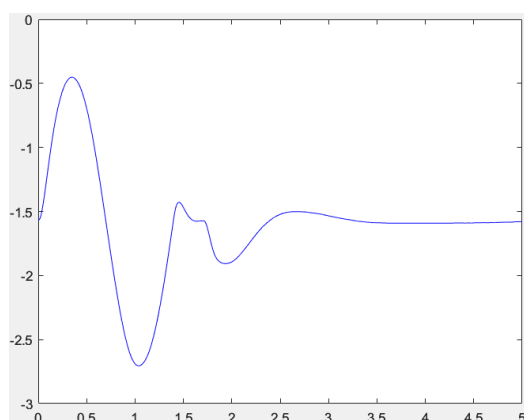
Με την εφαρμογή της σχέσης (2.2) θα γραμμικοποιηθεί πλήρως το δυναμικό μοντέλο του Pendubot γύρω από το σημείο ισορροπίας. Επίσης, η εφαρμογή των κατάλληλων κερδών στο σύστημα θα επιφέρουν αυτή την εξισορρόπηση. Αναλυτικότερα, σύμφωνα με το [1], αυτό που εφαρμόζεται στην εύρεση των κατάλληλων κερδών για να υπάρξει ισορροπία του συστήματος, είναι ένας ελεγκτής LQR.



Προσδιορίζει κατάλληλα τα κέρδη του συστήματος ώστε το σύστημα να βρεθεί εκτός των ορίων ισορροπίας του γραμμικού μοντέλου (2.2). Τέλος, να σημειωθεί πως η θέση ισορροπίας του μη γραμμικού συστήματος κλειστού βρόχου, την οποία θέλουμε να πετύχουμε, είναι μία ασταθής θέση ισορροπίας.

### 2.1.3. Αποτέλεσμα πειράματος μη γραμμικού ελεγκτή

Κατά την εφαρμογή του ελεγκτή δύο φάσεων θα πάρουμε το αποτέλεσμα που παρουσιάζεται στο σχήμα.



Σχήμα 15. Απόκριση Pendubot με την χρήση του μη γραμμικού ελεγκτή δύο φάσεων.

Για το πρώτο χρονικό διάστημα παρατηρούμε πως λειτουργεί η πρώτη φάση του μη γραμμικού ελεγκτή. Εκτελεί το σύστημα την ταλάντωση, έτσι ώστε να περιστραφεί η δεύτερη άρθρωση κατά  $\pi$ . Όταν ολοκληρωθεί η πρώτη φάση, προκύπτει αστάθεια λόγω των μη γραμμικών όρων της δεύτερης άρθρωσης. Έτσι, ξεκινάει η λειτουργία της δεύτερης φάσης του μη γραμμικού ελεγκτή. Το σύστημα έχει υποστεί κάποιες διαταραχές μέχρι να επέλθει η εξισορρόπηση στο σημείο ισορροπίας. Στην περίπτωση που εφαρμοστεί κάποια διαταραχή στο σύστημα και το περιστρέψει εκτός της περιοχής του σημείου, τότε στο σύστημα θα προκύψει αστάθεια, με αποτέλεσμα να επιστρέψει στην αρχική του θέση.

## Παράρτημα

### Πηγαίος Κώδικας Ανάλυσης Μετρήσεων

```
%% Robotics Lab course
% Lab 2 - Pendubot Control
% Team 4
%      Name: Eirini-Maria Georganta, A.M.: 02121201
%      Name: Georgios Kassavetakis,  A.M.: 02121203
%      Name: Georgios Krommydas,     A.M.: 02121208
%      Name: Frantzieska Michail,     A.M.: 02121216

clear;
clc;

%% Pendubot State Characteristics for Kp = 1

Kd = [0 0.15 0.23];
ess = [18.768 19.488 19.632];
trt = [0.18 0.24 0.48];
overshoot = [0.1156 0.0188 0.0062];

figure(1);
clf;
plot(Kd, ess, 'b-*');
grid on;
title("Error State for K_P = 1");
xlabel("K_D");
ylabel("e_s_s (deg)");

figure(2);
clf;
plot(Kd, trt, 'b-*');
grid on;
title("Rise Time for K_P = 1");
xlabel("K_D");
ylabel("t_r_t (sec)");

figure(3);
clf;
plot(Kd, overshoot, 'b-*');
grid on;
title("Overshoot for K_P = 1");
xlabel("K_D");
ylabel("Overshoot (rad)");

%% Critical Region Analysis for Kd

Kp = [1 5 10 20]';
Kd_critical = [0.23 0.48 0.7 1.3]';
b = regress(Kd_critical, [ones(size(Kp)), Kp]);
Kd_critical_desired = [ones(size(Kp)), Kp]*b;
% Kd_critical_desired = a*sqrt(Kp)+b;
figure(4);
clf;
plot(Kp, Kd_critical, 'b-*');
```

```
hold on;  
plot(Kp, Kd_critical_desired, 'r-*');  
grid on;  
title("Gain Parameters for Critical Response of the System");  
xlabel("K_P");  
ylabel("K_D");  
legend("K_D Critical Values", "K_D Critical Desired  
Values", "Location", "northwest");
```

Πίνακας 3. Κώδικας Ανάλυσης Μετρήσεων

## Βιβλιογραφία

- [1] Block, D.J., and Spong, M.W., "Mechanical Design & Control of the Pendubot," SAE Earthmoving Industry Conference, IL, April 4-5, 1995.
- [2] Spong, M.W., and Block, D.J., "The Pendubot: A Mechatronic System for Control Research and Education," 34th IEEE Conf. on Decision and Control (CDC'95), pp. 555-556, New Orleans, Dec., 1995.
- [3] The Pendubot: User's Manual," Mechatronic Systems Inc.
- [4] B. Siciliano, L. Sciavicco, L. Villani, G. Oriolo, *Robotics: Modeling, Planning and Control*, Springer, 2009.