Problemas para jòvenes de 5 a 15 años

V. I. Arnold

Resumen

Este libro recoge una colección de 77 problemas, formulados o seleccionados por el propio autor, que favorecen el desarrollo del pensamiento. La mayoría de ellos no requieren ningún conocimiento más allá de una educación general, sin embargo, la resolución de algunos puede convertirse en un desafío incluso para profesores universitarios.

El libro está dirigido a estudiantes, desde el colegio hasta la universidad, a profesores, a padres y, en general, a todo el mundo que considere que el pensamiento es una parte fundamental del desarrollo personal.

Reuní estos problemas en unas hojas de papel en la primavera de 2004 en París, cuando unos rusos que vivían allí me pidieron ayuda para que sus hijos adquirieran el pensamiento tradicional en Rusia.

Estoy profundamente convencido que esta cultura se basa principalmente en la reflexión independiente y temprana sobre lo simple, pero no sobre preguntas fáciles similares a las propuestas a continuación (los problemas 1, 3, 13 son los más recomendados).

Mi larga experiencia ha mostrado que, con mucha frecuencia, los alumnos que suspenden en el colegio resuelven mejor los problemas que los mejores estudiantes de la clase, ya que – para sobrevivir al final de la clase – deben pensar permanentemente más de lo necesario "para ser los reyes de mambo", como solía decir Fígaro sobre sí mismo, cuando los estudiantes de sobresaliente no pueden entender qué debe multiplicarse por qué en estos problemas. También he reparado en que los niños de cinco años resuelven problemas similares mejor que los alumnos que han sido contaminados al entrenarlos, que a su vez lo hacen mejor que universitarios, que ganan a sus profesores (los que peor han resuelto los problemas sencillos han sido los ganadores de los premios Nobel y Fields).

* * *

1. A Masha le faltan siete cópecas para comprar un libro de primera lectura, y a Misha le falta una. Juntaron su dinero para comprar un solo libro y compartirlo, pero aun así no tenían suficiente. ¿Cuánto costaba el libro?

2. Una botella con corcho cuesta 10 cópecas, y la botella en sí es 9 cópecas más cara que el corcho. ¿Cuánto cuesta la botella sin el corcho?

3. Un ladrillo pesa una libra y medio ladrillo. ¿Cuántas libras pesa el ladrillo?

4. Se toma una cucharada de vino de un barril y se vierte en una taza de té (que no está llena). A continuación, con la misma cuchara, se toma una cucharada de esta mezcla (no homogénea) de la taza y se vuelve a poner en el barril. Ahora tanto el barril como la taza tienen un cierto volumen de un líquido extraño (vino en la taza y té en el barril). ¿En cuál de ellos el volumen del líquido extraño es mayor: en la taza o en el barril?

5. Dos viejecitas partieron respectivamente desde A hacia B y desde B hacia A al amanecer dirigiéndose la una hacia la otra (por la misma carretera). Se encontraron al mediodía pero no pararon, y cada una continuó su camino a la misma velocidad. La primera señora llegó (a B) a las 4pm, y la segunda (a A) a las 9pm. ¿A qué hora amaneció aquel día?

6. La hipotenusa de un triángulo rectángulo (en un examen estándar americano) mide 10 pulgadas, la altura proyectada sobre ella mide 6 pulgadas. Calcular el área del triángulo.

Los estudiantes americanos se habían enfrentado a este problema durante décadas, pero llegaron estudiantes rusos, de Moscú, y ninguno de ellos fue capaz de encontrar la respuesta como lo hacían sus compañeros americanos (dando como respuesta 30 pulgadas). ¿Por qué?

7. Vasya tiene 2 hermanas más que hermanos. ¿Cuántas hijas más que hijos tienen sus padres?

8. Hay un lago redondo en América del Sur. Cada año, el 1 de junio, aparece en el centro una flor Victoria Regia (el tallo emerge desde el fondo, y sus pétalos están sobre el agua como los de un nenúfar). Cada día se dobla el área de la flor, y el 1 de julio, la flor cubre por fin todo el lago, pierde los pétalos, y la semilla se hunde en el fondo. ¿En qué fecha el área de la flor es la mitad del área del lago?

9. Un campesino tiene que transportar un lobo, una cabra y un repollo de una orilla a otra del río en una barca. Sin embargo la barca es tan pequeña que sólo hay sitio para él y uno de los tres. ¿Cómo debería transportarlos a los tres de una orilla a otra? (El lobo y la cabra no pueden quedarse solos, y la cabra y el repollo tampoco)

10. Durante el día un caracol sube 3 centímetros en un poste, y durante la noche, como se duerme, resbala accidentalmente 2 cm hacia abajo. El poste tiene 10 m de altura, y encima de él hay un manjar (para el caracol). ¿Cuánto tiempo tardará en alcanzar el manjar?

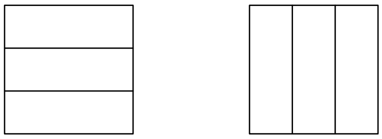
11. Un guardabosques camina desde su tienda 10 km en dirección sur, gira hacia el este, camina en línea recta 10 km más en dirección este, se encuentra con su amigo el oso, gira hacia el norte , y después de 10 km vuelve a estar en la tienda. ¿De qué color era el oso y dónde ocurrió todo esto?

12. Hoy a las 12 del mediodía hubo pleamar. ¿A qué hora será la pleamar en el mismo sitio (en el mismo lugar) mañana?

13. Los dos primeros volúmenes de Pushkin están uno al lado del otro en una estantería. Las páginas de cada uno de ellos tienen un grosor de 2 cm, y las cubiertas –delantera y trasera – de 2 mm. Una polilla ha carcomido el libro (perpendicularmente a las páginas) desde la primera del volumen 1 hasta la última del volumen 2. ¿Cuánto mide el rastro que ha dejado la polilla?

[Este problema topológico con una respuesta increíble – 4 mm – es imposible para los académicos, pero hay niños pequeños que lo resuelven fácilmente.]

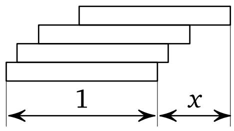
14. Encontrar el cuerpo cuyas vistas en planta y alzado sean como las que se representan (politopos). Representar su perfil (dibujando los lados invisibles del politopo en línea discontínua).



Planta Alzado

15. ¿De cuántas maneras se puede descomponer el número 64 en 10 sumandos naturales (enteros ≥ 1), tales que el máximo sea 12? [Las formas que sólo difieran en el orden de los sumandos no se cuentan como diferentes.]

16. Colocando unas cuantas barras una sobre otra (por ejemplo, piezas de dominó), se puede conseguir una longitud x de la parte que cuelga. ¿Cuál es el máximo valor esperado para la longiud x de la parte que cuelga?



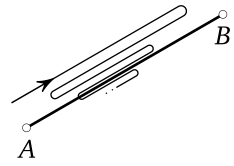
18. Una pieza de dominó cubre dos casillas de un tablero de ajedrez. Cubrir todos los cuadrados excepto los dos opuestos (en la misma diagonal) con 31 piezas. [Un tablero de ajedrez está formado por $8 \times 8 = 64$ casillas.]

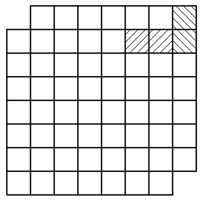
19. Una oruga quiere deslizarse desde una esquina de una habitación cúbica (la esquina izquierda del suelo) a la opuesta (la esquina derecha del techo). Encontrar el camino más corto para el viaje por las paredes de la habitación.

20. Se tienen dos vasos de volúmenes 5 litros y 3 litros. Medir un litro (obtenerlo en uno de los vasos).

21. En una familia hay cinco cabezas y catorce piernas. ¿Cuántas personas y cuántos perros forman la familia?

17. La distancia entre las ciudades A y B es de 40 km. Dos ciclistas salen respectivamente de A y de B a la vez, dirigiéndose el uno hacia el otro, uno con velocidad de 10 km/h y el otro con velocidad de 15 km/h. Una mosca sale desde el primer ciclista cuando está en A volando a una velocidad de 100km/h, toca la frente del segundo, vuelve a volar hasta la frente del primero, regresa hasta la del segundo, y continúa así hasta que las frentes de los ciclistas se chocan y aplastan a la mosca. ¿Cuántos kilómetros ha volado en total la mosca?



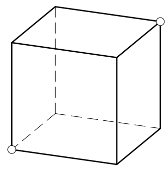


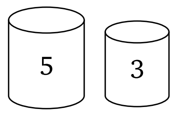
23. ¿Qué polígonos se pueden obtener al intersecar un cubo con un plano? ¿Se puede obtener un pentágono? ¿Un heptágono? ¿Un hexágono regular?

24. Dibujar una recta que pase por el centro de un cubo y tal que la suma de los cuadrados de las distancias a los ocho vértices del cubo sea: a) máxima,
b) mínima (comparar con otras rectas que pasen por el centro).

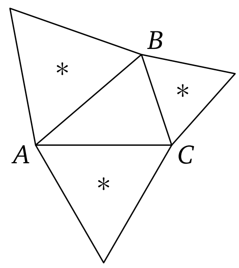
25. Un cono circular recto se corta con un plano dando lugar a una curva cerrada. Se inscriben dos bolas en el cono, tangentes al plano en los puntos A y B respectivamente. Encontrar un punto C en la línea de corte tal que la suma de las distancias $CA + CB$ sea: a) máxima, b) mínima.

26. La superficie de la Tierra se proyecta sobre un cilindro formado por rectas tangentes a los meridianos en el Ecuador siguiendo rayos paralelos al Ecuador y que pasan por el eje que une los polos. ¿El área de la proyección de Francia será mayor o menor que el área de la propia Francia?





22. En cada uno de los lados AB, BC y CA del triángulo ABC se construye hacia fuera un triángulo equilátero. Probar que sus centros ($*$) forman un triángulo equilátero.



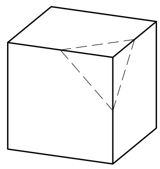
27. Probar que al dividir el número 2^{p-1} por el primo impar p es resto es 1 (ejemplos: $2^2 = 3a + 1$, $2^4 = 5b + 1$, $2^6 = 7c + 1$, $2^{10} - 1 = 1023 = 11 \cdot 93$).

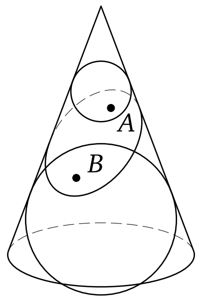
28. Una aguja de 10 cm de longitud se lanza aleatoriamente sobre un papel de rayas con un espaciado de 10 cm entre dos rayas consecutivas. Se repite esto N (un millón) veces. ¿Cuántas veces (aproximadamente, salvo un pequeño error en el porcentaje) la aguja intersecará alguna raya del papel?

Uno puede realizar este experimento (como lo hice yo cuando tenía 10 años) con $N = 100$ en lugar de un millón de lanzamientos. [La respuesta a este problema es sorprendente: $\frac{2}{\pi}N$. Además incluso doblando la aguja hasta una longitud $a \cdot 10$ cm el número de intersecciones observadas en N lanzamientos es aproximadamente $\frac{2a}{\pi}N$. El número $\pi \approx \frac{355}{113} \approx \frac{22}{7}$.]

29. Los poliedros con caras triangulares son, por ejemplo, sólidos platónicos: tetraedro (4 caras), octaedro (8 caras), icosaedro (20 – y todas las caras son iguales; es interesante dibujarlo, tiene 20 vértices y 30 aristas).

¿Es cierto que para todos éstos (poliedros cerrados convexos con caras triangulares) el número de caras es igual a dos veces el número de vértices menos cuatro?





Otro sólido platónico (en total hay 5):

30. Un dodecaedro es un poliedro convexo con doce caras que son pentágonos (regulares), veinte vértices y treinta aristas (sus vértices son los centros de las caras de un icosaedro).

Inscribir en un dodecaedro cinco cubos (los vértices de cada cubo son vértices del dodecaedro) cuyas aristas son diagonales de las caras del dodecaedro (el dodecaedro tiene 12 aristas, una en cada cara). [Esto lo inventó Kepler al interesarse por los planetas.]

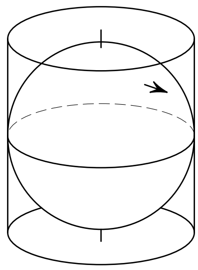
31. Encontrar la intersección de dos tetraedros inscritos en un cubo (tales que los vértices de cada uno lo son también del cubo, y las aristas son diagonales de las caras).

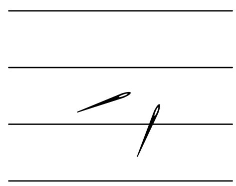
¿Qué fracción del volumen del cubo está contenido en la intersección de los tetraedros?

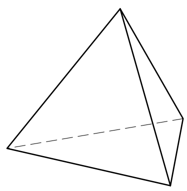
31bis. Construir la sección de un cubo por un plano que pasa por tres puntos dados en las aristas. [Dibujar el polígono resultante de la intersección con las caras del cubo.]

32. ¿Cuántas simetrías tiene tetraedro?¿Cuántas tiene un cubo?¿Y un octaedro?¿Y un icosaedro? ¿Y un dodecaedro? La simetría es una transformación que conserva las distancias.

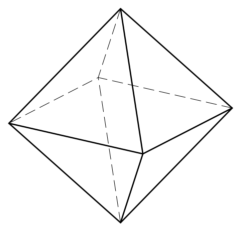
Entre las simetrías, ¿cuántas rotaciones hay? y entre éstas, ¿cuántas reflexiones? (en cada uno de los cinco casos propuestos)







tetraedro (tetra = 4)



octaedro (octo = 8)

?

icosaedro

33. ¿De cuántas formas diferentes se pueden colorear las 6 caras un cubo con seis colores (1,...,6) [uno por cada cara] de modo que los las formas sean distintos dos a dos (es decir, no se puede pasar de una forma a otra mediante una rotación)?

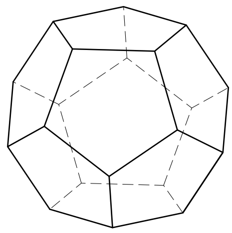
34. ¿De cuántas formas distintas se pueden permutar n objetos?

Hay seis permutaciones posibles para $n = 3$: (1,2,3), (1,3,2), (2,1,3), (2,3,1), (3,1,2), (3,2,1). ¿Cuántas hay para: $n = 4$? $n = 5$? $n = 6$? $n = 10$?

35. Un cubo tiene 4 diagonales largas ¿Cuántas permutaciones distintas de estos cuatro objetos se obtienen por rotación del cubo?

36. La suma de los cubos de tres enteros se resta del cubo de la suma de estos números. ¿Esta diferencia es siempre divisible por 3?

37. Misma pregunta con la potencia quinta y la divisivilidad por 5, y para la potencia séptima y la divisibilidad por 7.



38. Calcular la siguiente suma (con un margen de error del 1%).

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{99\cdot 100}$$

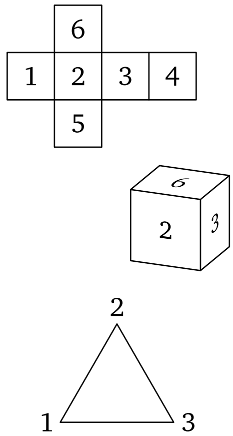
39. Si dos polígonos tienen el mismo area, entonces se pueden cortar en un número finito de polígonos, que reordenados permiten obtener el segundo a partir del primero y viceversa. ¡Probarlo! [Para sólidos en el espacio esto no ocurre: ¡un cubo y un tetraedro con el mismo volumen no se pueden cortar de esta forma!]

40. Se eligen 4 vértices de un paralelogramo entre los nodos de una cuadrícula. Si ningún nodo de la cuadrícula queda encerrado en el interior del paralelogramo, probar que el área del paralelogramo es igual al de cada uno de los cuadros de la cuadrícula.

41. Con las condiciones de la pregunta 40, si a nodos están encerrados en el interior del paralelogramo y b nodos están en la frontera. Calcular el área del paralelogramo.

42. Para paralelepípedos en tres dimensiones, ¿sigue siendo cierta la afirmación de la pregunta 40?

43. Los números del conejo (o de Fibonacci) forman la secuencia ($a_1 = 1$), 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, …, en la que $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ para cada $n = 1, 2, \ldots$ Encontrar el máximo común divisor (mcd) de los números a_{100} y a_{99}.



44. Encontrar el número (de Catalan) de formas de dividir un n-ágono convexo en triángulos cortándolo por las diagonales que no se intersequen. Por ejemplo, $c(4) = 2$, $c(5) = 5$, $c(6) = 14$. ¿Cuántos se pueden encontrar para $c(10)$?

45. En un torneo participan n equipos, los que pierden abandonan la competición, y el ganador se decide tras $n - 1$ encuentros. El cuadro del torneo se puede escribir de forma simbólica como, por ejemplo, $((a, (b, c)), d)$ que significa que b juega contra c, y el ganador se cruza con a, y el ganador de éstos con d].

¿Cuántos cuadros distintos hay para 10 equipos?

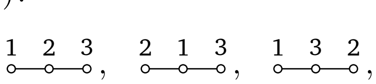
Para 2 equipos, sólo puede ser (a, b), luego un solo cuadro.

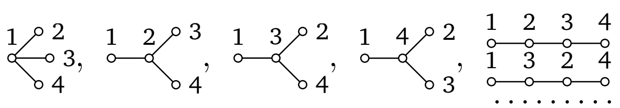
Para 3 equipos, sólo puede ser $((a, b), c)$, o $((a, c), b)$, o $((b, c), a)$, luego hay 3 posibles cuadros.

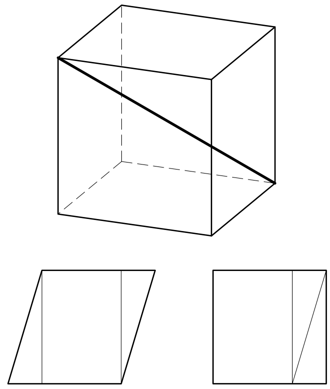
Para 4 equipos:

$(((a, b), c), d)$	$(((a, c), b), d)$	$(((a, d), b), c)$	$(((b, c), a), d)$
$(((b, d), a), c)$	$(((c, d), a), b)$	$(((a, b), d), c)$	$(((a, c), d), b)$
$(((a, d), c), b)$	$(((b, c), d), a)$	$(((b, d), c), a)$	$(((c, d), b), a)$
$((a, b), (c, d))$	$((a, c), (b, d))$	$((a, d), (b, c))$	

46. Unir n puntos $1, 2, \ldots, n$ con $n-1$ trazos (en una sola pieza) para obtener un árbol. ¿Cuántos árboles distintos se pueden obtener (¡el caso $n = 5$ ya es interesante!)?

$n = 3$:  el número es 3;

$n = 4$:  el número es 16.



47. Una pernutación $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de los números $\{1, 2, \ldots, n\}$ se denomina una *serpiente* (de longitud n) si $x_1 < x_2 > x_3 < x_4 \ldots$.

EJEMPLO: $n = 2$, only $1 < 2$, el número es 1,

$$n = 3, \quad \left.\begin{array}{l} 1 < 3 > 2 \\ 2 < 3 > 1 \end{array}\right\}, \quad \text{el número es 2,}$$

$$n = 4, \quad \left.\begin{array}{l} 1 < 3 > 2 < 4 \\ 1 < 4 > 2 < 3 \\ 2 < 3 > 1 < 4 \\ 2 < 4 > 1 < 3 \\ 3 < 4 > 1 < 2 \end{array}\right\}, \quad \text{el número es 5.}$$

Encontrar el número de serpientes de longitud 10.

48. Sea s_n el número de serpientes de longitud n:

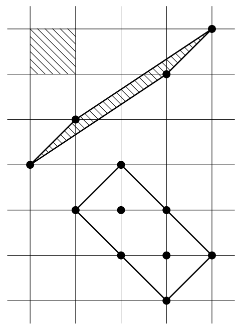
$$s_1 = 1, \quad s_2 = 1, \quad s_3 = 2, \quad s_4 = 5, \quad s_5 = 16, \quad s_6 = 61.$$

Probar que la serie de Taylor de la tangente es:

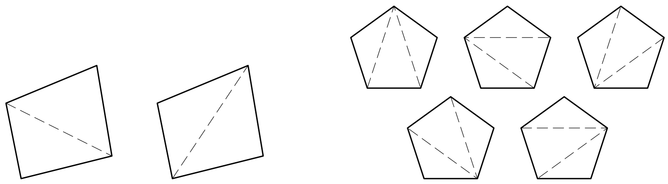
$$\tan x = 1\,\frac{x^1}{1!} + 2\,\frac{x^3}{3!} + 16\,\frac{x^5}{5!} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} s_{2k-1}\,\tfrac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}.$$

49. Encontrar la suma de las series

$$1 + 1\,\frac{x^2}{2!} + 5\,\frac{x^4}{4!} + 61\,\frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} s_{2k}\,\tfrac{x^{2k}}{(2k)!}.$$



$a=2,\ b=2$



50. Para $s > 1$, probar la identidad

$$\prod_{p=2}^{\infty} \frac{1}{1 - \dfrac{1}{p^s}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

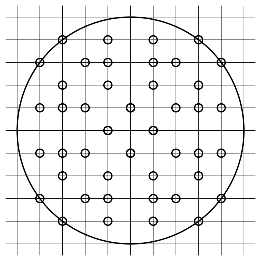
(el producto afecta a todos los números primos p, y el sumatorio a los números naturales n).

51. Encontrar la suma de las series

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

(probar que es $\pi^2/6$, es decir, aproximadamente $3/2$).

52. Encontrar la probabilidad de una fracción p/q sea irreducible (se define de la siguiente forma: en el disco $p^2 + q^2 \leqslant R^2$, se cuenta el número N de vectores con dos componentes enteras p y q que no tengan divisores comunes mayores que 1, después de hacer ésto, la probabilidad de que sea irreducible es el límite del cociente $N(R)/M(R)$, donde $M(R)$ es el número de puntos enteros en el disco ($M \sim \pi R^2$)).

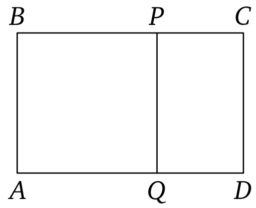


$M(5) = 81$, $N(5) = 44$, $N/M = 44/81$

53. Para la secuencia de los números de Fibonacci a_n del problema 43, encontrar el límite del cociente a_{n+1}/a_n cuando n tiende a infinito:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 2,\ \frac{3}{2},\ \frac{5}{3},\ \frac{8}{5},\ \frac{13}{8},\ \frac{34}{21}.$$

Respuesta: "la razón aurea o número aureo", $\frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1{,}618$. [Es la razón de los lados de una tarjeta que es similar a la tarjeta resultante de quitar el cuadrado de lado el menor lado de la tarjeta, $\frac{AB}{BC} = \frac{PC}{CD}$.] ¿Cuánto vale la razón aurea relativa a un pentágono regular y una estrella de 5 puntas?



54. Calcular la fracción contínua infinita

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\dots}}}}} = a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\dots}}} \qquad \begin{bmatrix} a_{2k}=1 \\ a_{2k+1}=2 \end{bmatrix}$$

(es decir, el límite de las fracciones

$$a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\ddots+\cfrac{1}{a_n}}}$$

cuando $n \to \infty$).

55. Encontrar los polinomios

$$y=\cos 3(\arccos x),\ \ y=\cos 4(\arccos x),\ \ y=\cos n(\arccos x),$$

para $|x| \leqslant 1$.

56. Calcular la suma de las potencias k-ésimas para los n complejos raíces n-ésimas de la unidad.

57. En el plano (x,y), dibujar las curvas definidas paramétricamente por:

$$\{x=\cos 2t, y=\sin 3t\}, \quad \{x=t^3-3t, y=t^4-2t^2\}.$$

58. Calcular (con una cota de error menor del 10%)

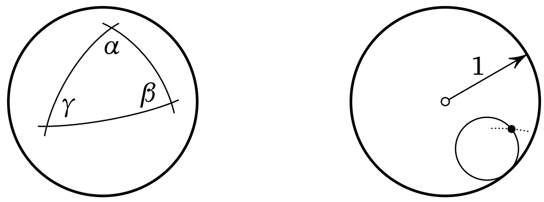
$$\int_0^{2\pi} \sin^{100} x\, dx.$$

59. Calcular (con una cota de error menor del 10%)

$$\int_1^{10} x^x\, dx.$$

60. Encontrar el área de un triángulo cuyos ángulos (α, β, γ) están en una esfera de radio 1, y cuyos lados son circunferencias grandes (secciones de una esfera con un plano que pasa por el centro de la esfera).

RESPUESTA: $S = \alpha + \beta + \gamma - \pi$ (por ejemplo, en un triángulo con tres ángulos rectos, $S = \pi/2$, es decir, la octava parte del área total de la esfera).

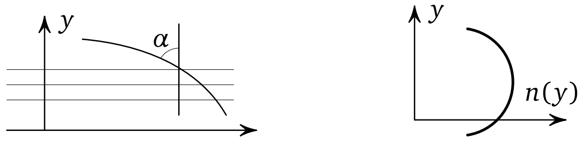


61. Un círculo de radio r rueda (sin deslizarse) por el interior de un círculo de radio 1. Dibujar la trayectoria completa de un punto del círculo que se desplaza (esta trayectoria se denomina hipocicloide) para $r = 1/3$, para $r = 1/4$, para $r = 1/n$, y para $r = 1/2$.

62. En una clase de n alumnos, estimar la probabilidad de haya dos que cumplan años el mismo día. ¿Es alta o baja?

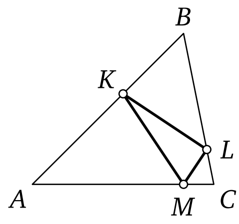
RESPUESTA: (muy) alta si el número de alumnos es (bastante) mayor que n_0, (muy) baja si es (bastante) más pequeño que n_0, y hay que buscar qué es realmente n_0 (cuando la probabilidad es $p \approx 1/2$).

63. La ley de Snell (o Snellius) establece que el ángulo α que forma un rayo de luz con el vector normal a las capas de un medio estratificado satisface la ecuación $n(y) \sin\alpha = \text{const}$, donde $n(y)$ es el índice de refracción de la capa a una altura y (la cantidad n es inversamente proporcional a la velocidad de la luz en este medio. La velocidad en el vacío vale 1, y en el agua $n = 4/3$).



Dibujar las trayectorias de un rayo en el medio “aire en un desierto”, donde el índice $n(y)$ tiene un máximo a una determinada altura (una solución a este problema explica los espejismos en un desierto a aquellos que entiendan cómo se relacionan con las imágenes las trayectorias de los rayos que salen de los objetos).

64. Inscribir en un triángulo acutángulo ABC un triángulo KLM de perímetro mínimo (con los vértices K en AB, L en BC, M en CA).



Pista: La respuesta para los triángulos no acutángulos no es tan bonita como la de los acutángulos.

65. Calcular el valor medio de la función $1/r$ (donde $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, s es la distancia al origen) en la esfera de radio R centrada en el punto (X, Y, Z).

Pista: El problema está relacionado con la Ley de Gravitación de Newton y la Ley de Coulomb del campo eléctrico. En la versión bidimensional del problema, hay que reemplazar la función por $\ln r$, y la esfera por el círculo.

66. Como $2^{10} = 1024 \approx 10^3$, entonces $\log_{10} 2 \approx 0.3$.

Estimar cuánto difieren y calcular, con tres decimales, $\log_{10} 2$.

67. Hallar $\log_{10} 4$, $\log_{10} 8$, $\log_{10} 5$, $\log_{10} 50$, $\log_{10} 32$, $\log_{10} 128$, $\log_{10} 125$, $\log_{10} 64$ con la misma precisión.

68. Usando que $7^2 \approx 50$, encontrar un valor aproximado de $\log_{10} 7$.

69. Sabiendo que $\log_{10} 64$ y que $\log_{10} 7$, calcular $\log_{10} 9$, $\log_{10} 3$, $\log_{10} 27$, $\log_{10} 6$, $\log_{10} 12$.

70. Sabiendo que $\ln(1 + x) \approx x$ ($\ln$ es $\log_e$), hallar $\log_{10} e$ y $\ln 10$ usando la relación [1]

$$\log_{10} a = \frac{\ln a}{\ln 10}$$

y para los valores de $\log_{10} a$ calculados previamente (por ejemplo, para $a = 128/125$, $1024/1000$ y así sucesivamente).

[1] El número de Euler $e = 2{,}71828\ldots$ se define como el límite de la sucesión $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ para $n \to \infty$, y es igual a la suma de la serie $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots$. También se puede definir mediante la fórmula citada como $\ln(1 + x)$: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

[Las soluciones de los problemas 65–69 conducen, después de media hora, a una tabla de logaritmos con cuatro dígitos de cualquier número usando productos de números que ya conocemos como datos básicos y la fórmula

$$\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

para realizar correcciones.] ⟨De este modo, Newton construyó una tabla de logaritmos con 40 dígitos.⟩.

71. Se considera la sucesión de potencias de dos: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, ... Entre los primeros doce números, hay cuatro cuya expresión decimal empieza por 1, y ninguno que comienza por 7.

Probar que en el límite $n \to \infty$ el primer dígito de los n 'umeros 2^m, $0 \leqslant m \leqslant n$ es, con una determinada frecuencia: $p_1 \approx 30\%$, $p_2 \approx 18\%$, $\dots$, $p_9 \approx 4\%$.

72. Verificar el comportamiento del primer dígito para las potencias de tres: 1, 3, 9, 2, 8, 2, 7, ... Probar que, en el límite, también aquí se obtienen unas ciertas frecuencias y, además, son las mismas que para las potencias de dos. Encontrar la fórmula exacta para $p_1, \dots, p_9$.

Pista: El primer dígito del número x queda determinado por la parte decimal del número $\log_{10} x$, por lo tanto hay que considerar la sucesión de las partes decimales de los números $m\alpha$, donde $\alpha = \log_{10} 2$.

Probar que estas partes decimales se distribuyen uniformemente en un intervalo de 0 a 1: entre los n números decimales $m\alpha$, $0 \leqslant m < n$, un subintervalo A contendrá una cantidad $k_n(A)$ de ellos de tal forma que, para $n \to \infty$, $\lim(k_n(A)/n) =$ (la longitud del subintervalo A).

73. Sea $g\colon M \to M$ la parte regular de un dominio acotado M sobre si mismo uno-a-uno y que preserva las áreas (volúmenes en el caso multidimensional) de los dominios.

Probar que en todo entorno U de un punto M cualquiera y para todo N existe un punto x tal que $g^T x$ también está en U para un cierto entero $T > N$ ("el teorema de recurrencia").

74. Sea M la superficie del toro (con coordenadas α (mod 2π), β (mod 2π)), y $g(\alpha, \beta) = (\alpha + 1, \beta + \sqrt{2})$ (mod 2π). Probar que la sucesión de puntos $\{g^T(x)\}$, $T = 1, 2, \dots$, es siempre densa en el toro.

75. Con la notación del problema 74, sea

$$g(\alpha, \beta) = (2\alpha + \beta, \alpha + \beta) \pmod{2\pi}.$$

Probar que existe un subconjunto denso del toro que consiste en los puntos periódicos x (es decir, los puntos tales que $g^{T(x)}x = x$ para un cierto entero $T > 0$).

76. Con la notación del problema 74 probar que, para casi todo punto x del toro, la sucesión de puntos $\{g^T(x)\}$, $T = 1, 2, \dots$, es densa en el toro (los puntos x que no satisfacen esta propiedad forman un conjunto de medida nula).

77. En los problemas 74 y 76 probar que la sucesión $\{g^T(x)\}$, $T = 1, 2, \dots$, se distribuye uniformemente en el toro: si un dominio A contiene $k_n(A)$ puntos del tipo $g^T(x)$, $T = 1, 2, \dots, n$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{k_n(A)}{n} = \frac{\operatorname{med} A}{\operatorname{med} M}$$

(por ejemplo, para un dominio de Jordan medible A de medida $\operatorname{med} A$).

Nota sobre el problema 13. Con este problema he intentado ilustrar la diferencia entre como abordan las tareas los matemáticos y los físicos, en mi papel de invitado en la revista "Physics – Uspekhi" durante la Navidad del año 2000. El éxito sobrepasó mis expectativas: como los editores, a diferencia de los niños de preescolar en quienes yo había basado mi experiencia, no lograron resolver el problema, lo modificaron de la siguiente manera para encontrar mi respuesta de 4mm: en lugar de "desde la primera página del volumen 1 hasta la última del volumen 2", escribieron "desde la *última* página del volumen 1 hasta la *primera* página del volumen 2".

Esta historia real es tan increíble que he decidido incluírla aquí: la prueba de esto es la versión que publicaron los editores en la revista.

Traducido por
Victor Goryunov y Sabir Gusein-Zade
de la versión original en ruso:
Moscú, MCCME, 2004
ISBN 5-94057-183-2

Traducción ruso - inglés:
Victor Goryunov y Sabir Gusein-Zade

Traducción inglés - español:
Ana Isabel Pérez Martín
Valladolid, RSME-UVA, 2013
Con apoyo de la Real Sociedad Matemática Española (www.rsme.es)

Del original ruso:
В. И. Арнольд: Задачи для детей от 5 до 15 лет
Moskau, MCCME, 2004
ISBN 5-94057-183-2

Créditos de la imagen de cubierta:
Archivos del Mathematisches
Forschungsinstitut Oberwolfach.