



2020牛客暑期多校训练营（第十场）

MiFaFaOvO



牛客竞赛

AC.NOWCODER.COM



A. Permutation

- 考虑 x 向 $x*2$ 连边，那么形成了若干个环，并且同一个环内的数 $*3$ 会同时连向另外同一个环。
- 所以做法就是每次能 $*2$ 就 $*2$ 不行就 $*3$ 。





B. KMP Algorithm

- 求出每个字符对应的相同的然后相加，然后考虑nearly d-periodic的两个01串的卷积。
- 令 $Df(i) = f(i) - f(i+d)$, $Dg(i) = g(i) - g(i+d)$ 。
- 那么有 $(Df * Dg)_i = (f * g)_i - 2(f * g)_{i+d} + (f * g)_{i+2d}$ ，这里的*为卷积，并且将下标扩展到整数范围内。
- Df 和 Dg 总共只有 $O(d)$ 项非0，所以求出上式之后可以 $O(n+m)$ 求出原本的卷积。





C. Decrement on the Tree

- 想象成把整棵树拆分成若干条路径。
- 每个节点实际上要把各个分支的边匹配起来。
- 所以没有一条边超过一半，那么一定可以两两匹配（会根据奇偶性多出至多一条）。
- 否则最多的那种不能匹配。
- 修改可以用个set简单维护。





D. Hearthstone Battlegrounds

- 发现如果没有plant则一定比较 $2(a_1+a_2)+(a_3+a_4)$ 和 $2(b_1+b_2)+(b_3+b_4)$ 的大小。
- 在有plant的时候发现敌人的plant一定会被自己的无圣盾怪撞掉，所以没有用，除非在最后双方都只剩plant。自己的plant则可以尽量去破敌人的圣盾，这样相当于一个plant起到了 $1/1e9$ 的作用。所以我们想尽量让最多的plant去破对面的盾。
- 发现贪心就可以做到：首先无论如何如果自己有plant就一定去打对面的圣盾怪，否则自己按3124的优先级进攻，目标按3412的优先级选，发现进攻次数是 $O(a_1+a_2+a_3+a_4+b_1+b_2+b_3+b_4)$ 的，可以通过此题。





E. Game

- 最直接的想法就是二分答案 M ，然后从高度 M 从右往左推即可。
- 实际上等于最大的前缀平均值。





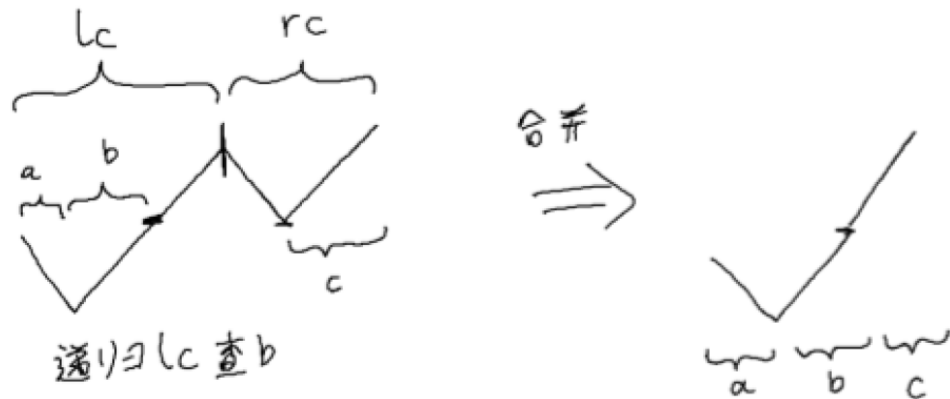
F. Parenthesis sequence

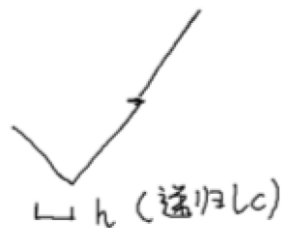
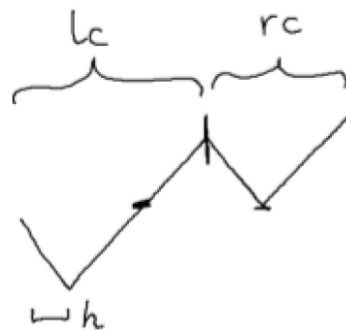
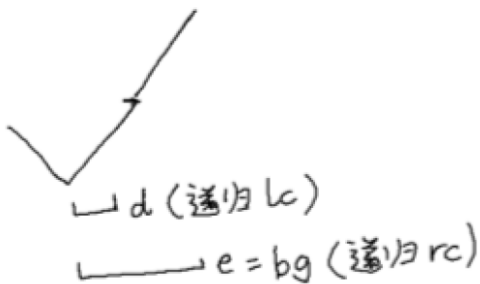
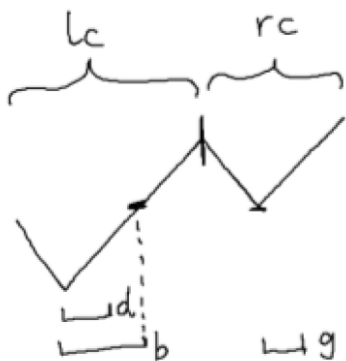
题解 By nzhtl1477

题目中的 `max` 和 `nand` 是为了让信息的性质更少，只保留半群的性质。

考虑使用一棵 leafy 的平衡树维护这个序列，每个叶子对应一个括号，每个节点维护子树对应的不匹配括号，不匹配括号一定形如 `)...))(((((`，上传信息时需要递归查询。

可以发现每次合并两个节点的时候是两个 `)...))(((((` 形式的信息合并，如下图所示我们考虑每种可能的合并方式，发现在合并过程中如果我们记下中间结果，就可以保证单向递归。

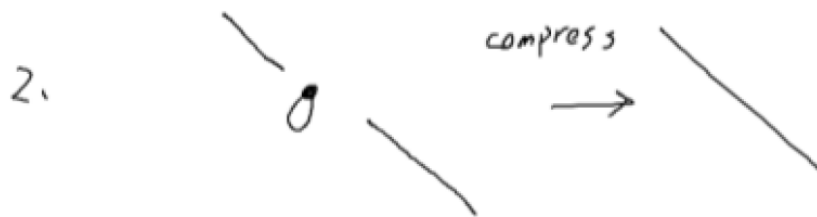
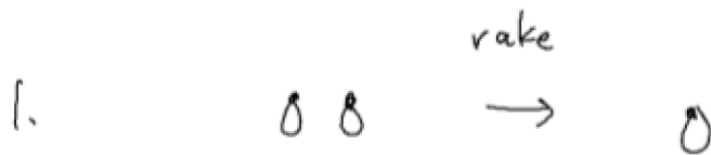


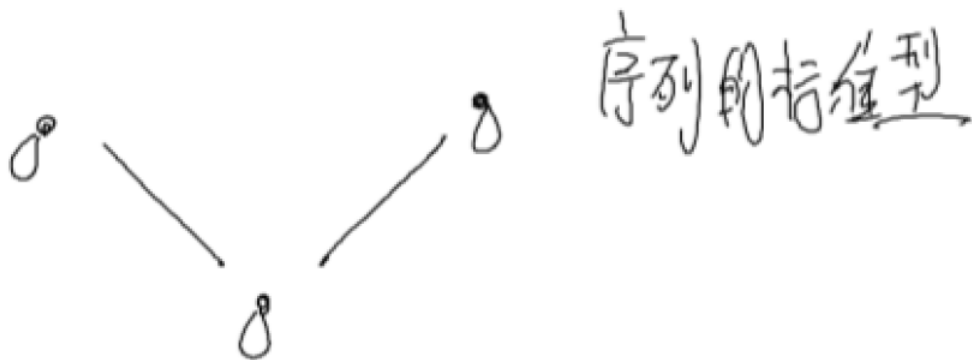


由于是单向递归的合并，所以合并两个节点信息的复杂度为 $O(\log n)$ 。

建树复杂度为 $O(n \log n)$ ，每个操作会访问到 $O(\log n)$ 个节点，总复杂度为 $O(\log^2 n)$ 。

总时间复杂度 $O(n \log n + m \log^2 n)$, 总空间复杂度 $O(n)$ 。





std设计了一种在序列上的类top tree的分治结构，如上图所示。

cluster有三种：

1. 一个合法的括号序列（即没有不匹配括号）
2. 一段左括号（相邻两个左括号之间可以插入一个合法的括号序列）
3. 一段右括号（相邻两个右括号之间可以插入一个合法的括号序列）

最终序列会合并为一个可以简单计算结果的标准形式。

由于其中一个操作的势能不太对，所以并不能证明这个方法是 $O(\log n)$ 的，因为这样的方法在部分情况下也需要单侧的递归，所以只能证明一个 $O(\log^2 n)$ 的上界，并且各种观测发现其行为的确类似于 $O(\log^2 n)$ 。

感觉从这个设计上可以感受到这类问题的在线做法比较难优化到 $O(\log n)$ 。

总时间复杂度 $O(n \log n + m \log^2 n)$ ，总空间复杂度 $O(n)$ 。



G. Math Test

- 如果 $x|y^2+a$, $y|x^2+a$, 那么 $(x, (x^2+a)/y)$ 也是一组解。
- 考虑一组极小的解, 也就是 $(x^2+a)/y \geq x$, 那么有 $x(y-x) \leq a$ 。
- 所以可以枚举所有这样的 x, y 对, 然后用 CRT 求出 a 。
- 接着用 $(x, y) \rightarrow (y, (x^2+a)/y)$ 生成即可。
- 注意回答一组请使用二分而不是重新生成。



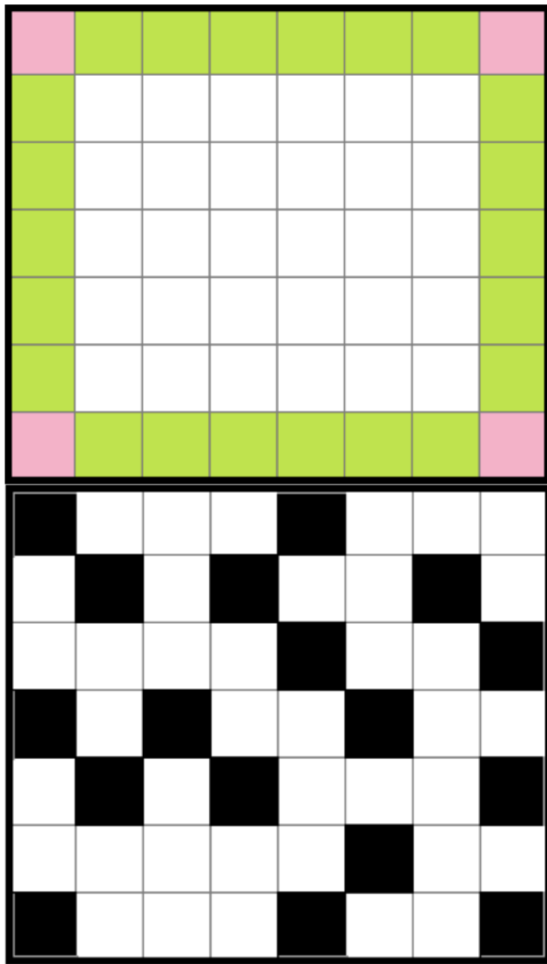


H. Heyawake

首先我们把黑色区域分成三部分，并且记

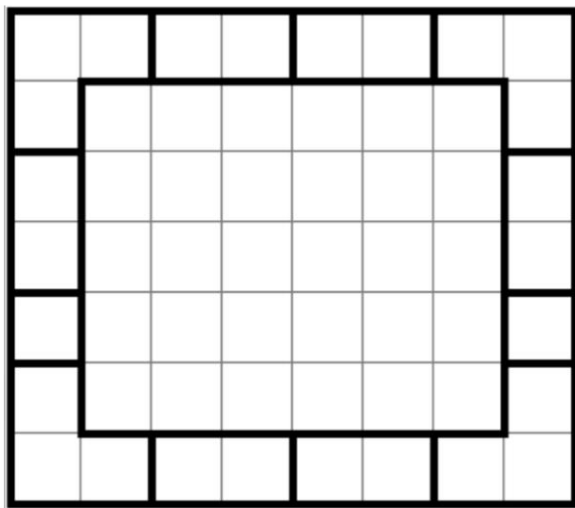
- R, C 为盘面的行和列。
- X 为角落上的黑块（粉色部分）。
- Y 为边界上的黑块（绿色部分）。
- Z 为内部的黑块（白色部分）。

下图中有 $R = 7, C = 8, X = 3, Y = 5, Z = 9$ 。



首先显然有 $X \leq 4$ ，然后下图中每个区域至多一个黑块，所以有

$$X + Y \leq 4 + 2\lceil(R-4)/2\rceil + 2\lceil(C-4)/2\rceil, \text{ 化简之后得 } X + Y \leq 2\lceil R/2\rceil + 2\lceil C/2\rceil - 4.$$



接着考虑 $X + 2Y + 3Z$ ，考虑一张图，白色格子是顶点，相邻的白色格子之间有边相连，那么因为图连通，可以得到边数大于等于点数-1。

而点数等于 $RC - X - Y - Z$ ，也就是面积减去黑格数，而边数为 $(R-1)C + R(C-1) - 2X - 3Y - 4Z$ ，也就是总边数减去所有由黑格删去的边数，角落边界和内部的黑格删去的边数不同。所以有

$$(R-1)C + R(C-1) - 2X - 3Y - 4Z \geq RC - X - Y - Z - 1$$

化简之后有

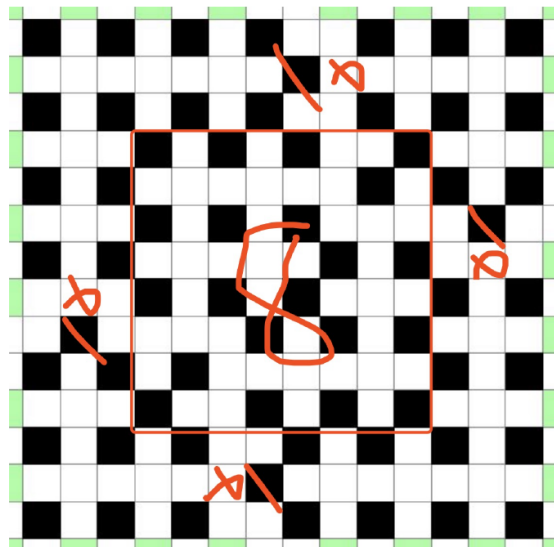
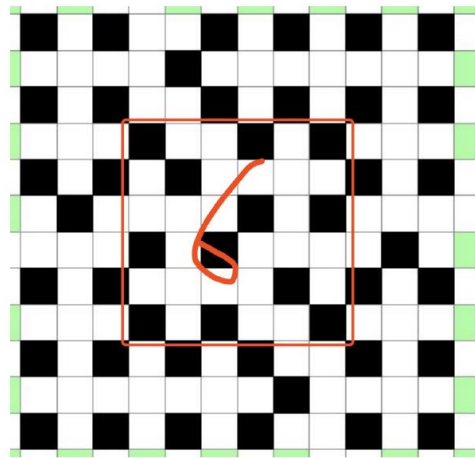
$$X + 2Y + 3Z \leq (R-1)(C-1)$$

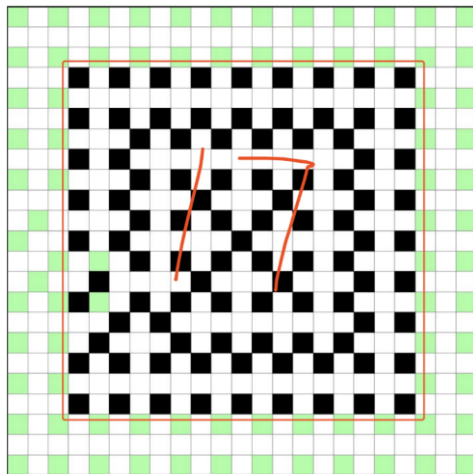
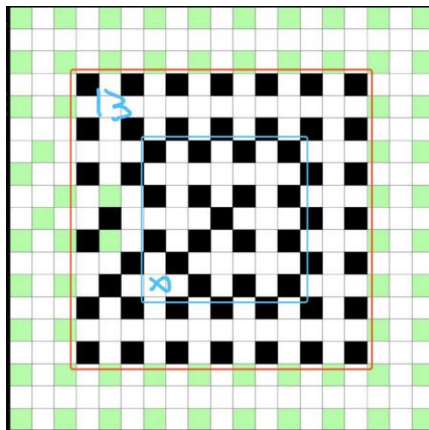
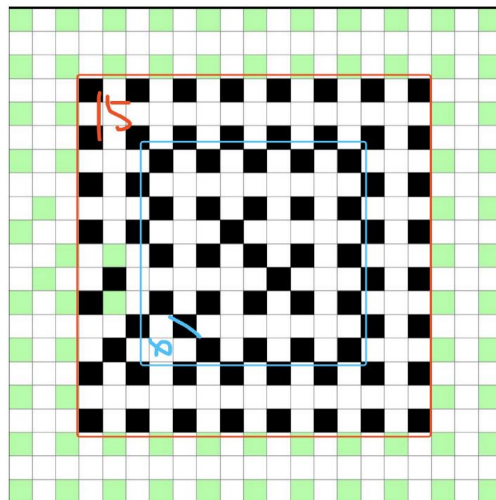
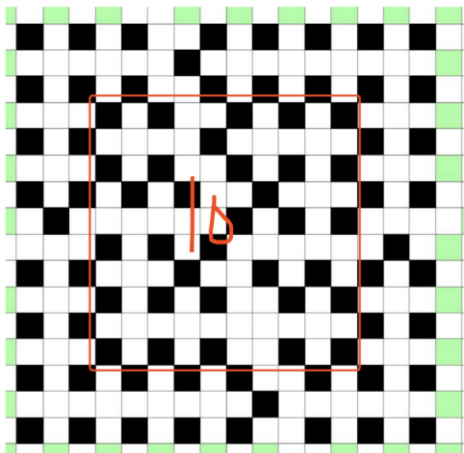
把三式相加，有

$$3(X + Y + Z) \leq (R-1)(C-1) + 2\lceil R/2 \rceil + 2\lceil C/2 \rceil$$

也就是我们能得到黑格的上限。

除了 $6k + 3$ ，上界都能达到。构造 credit to zqmyxtq.







I. Tournament

- 首先住着的人数一定是先递增后递减。
- 有n个人的日子，至少一天，有至少n-1个人的日子，至少四天。依次类推，可以得到个下界。
- 同时还有另外一个下界，有3个人的日子，至少 $n(n-1)/2-2$ 天，依次类推。
- 为了达到这个下界，构造的方法就是首先将人分成两个部分。
- 前后分别内部对打，然后中间将先离场的和最后进场的排在中间。
- 依次往外扩。

2,1 3,1 3,2

4,2 4,3 5,3

3,6

2,5 2,6 1,4 1,5 1,6

4,6 5,6 4,5



牛客竞赛
AC.NOWCODER.COM



J. Identical Trees

- 容易发现这个问题等价于找个对应关系，使得相同的标号尽量多。剩下的标号需要修改。
- 可以用树形dp，转移的时候使用二分图最大权匹配。



Thanks

