Ejercicios de examen: funciones de varias variables

academialibreros
692 81 92 85 91 880 48 30

1. *(3 ptos.)* Calcular la derivada $\frac{dy}{dx}$ de la función $y(x)$ dada implícitamente por la ecuación $Ln(\sqrt{x^2+y^2}) + xy = 4x$ en un punto cualquiera x. Particularizar en $x = 0$, esto es, calcular $y_x'(0)$.

1.- Dada la función $g(x,y) = \sqrt{x^2+3y^2} + xy$, calcular el valor máximo de la derivada direccional en el punto $A(3,3)$. Indicar un vector en la dirección en la que esa derivada direccional es máxima.

4. Para la superficie con ecuación $z = 3x^2 - y^2$, calcula la recta normal y el plano tangente en el punto $(2,3,3)$. Además, determina todos los puntos de la superficie en los que el plano tangente es paralelo al anterior.

4. Para la función $f(x,y) = 3x^2 + 4y^2 - 2x + 3y - 4$:

   (a) Calcula el plano tangente y la recta normal a la superficie $z = f(x,y)$ en el punto de la superficie que está encima de $p = (2,3)$.

   (b) Si consideras la curva intersección de $z = f(x,y)$ con el plano vertical que pasa por el punto p anterior y sigue la dirección del vector $(1,4)$, ¿cuál es la pendiente de la recta tangente a esa curva en el punto de la superficie que está encima de p?

Problema 11

Si $F(x,y)=0$, demostrar que $\dfrac{d^2y}{dx^2} = -\dfrac{F_{xx}F_y^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_{yy}F_x^2}{F_y^3}$

Fórmulas: $\boxed{\begin{array}{l} \dfrac{d}{dx}(F) = F_x + F_y \dfrac{dy}{dx} \\ \dfrac{d}{dy}(F) = F_x \dfrac{dx}{dy} + F_y \end{array}}$

Derivando la ecuación $F(x,y)=0$ con respecto a x,

$$\frac{d}{dx}(F) = \frac{d}{dx}(0) \rightarrow \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0 \rightarrow F_x + F_y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(-\frac{F_x}{F_y}\right) = -\frac{\frac{d}{dx}(F_x)\cdot F_y - F_x\frac{d}{dx}(F_y)}{F_y^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\left(F_{xx}\frac{dx}{dx} + F_{xy}\frac{dy}{dx}\right)F_y - F_x\left(F_{yx}\frac{dx}{dx} + F_{yy}\frac{dy}{dx}\right)}{F_y^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\left(F_{xx} + F_{xy}\left(-\frac{F_x}{F_y}\right)\right)F_y - F_x\left(F_{yx} + F_{yy}\left(-\frac{F_x}{F_y}\right)\right)}{F_y^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{F_{xx}F_y - F_{xy}F_x - F_xF_{yx} + F_{yy}F_x^2/F_y}{F_y^2} \qquad (F_{xy} = F_{yx})$$

Multiplicando y dividiendo por F_y

$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{F_{xx}F_y^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_{yy}F_x^2}{F_y^3}}$$

Ejercicios de examen: optimización

2.- Clasificar los puntos críticos de la función

$f(x, y) = 2x^3 - 4xy + 2y^2 + 4$

2. *(3´5 ptos.)* Clasificar los puntos críticos de la función

$$f(x, y) = -x^3 + 4xy - 2y^2 + 1$$

3.- Una caja rectangular sin tapa debe tener un volumen de 108 metros cúbicos. Determinar las dimensiones para que la superficie total sea mínima.

3. *(3,5 ptos.)* Descomponer el número 21 como suma de tres números positivos de forma que la suma de los inversos de esos tres números sea mínima.

5. Tu empresa recibe el encargo de fabricar un pedido de latas de aluminio. Cada una de ellas ha de ser un cilindro, con sus tapas, y debe tener un volumen de 1000 cm^3. Como la situación económica no está para tirar el dinero, el jefe te pregunta ¿cuál es la menor cantidad de aluminio (en cm^2) necesaria para fabricar cada lata?

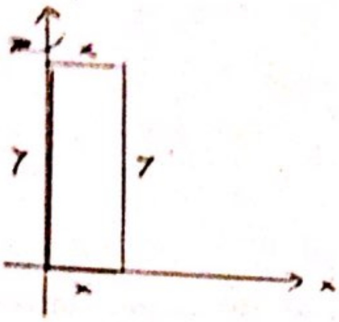
5. Una empresa se propone fabricar patatas tipo Pringle. Para ello una impresora 3D usará pasta de patata para generar una lámina, que tendrá la forma del paraboloide hiperbólico $z = 2x^2 - 3y^2$. Después esa lámina se cortará con un tubo cilíndrico de ecuación $x^2 + y^2 = 1$. Por último, una máquina espolvoreará con sal la parte que ha quedado dentro del tubo, según la función $x^2 + y^2 + z^2$. Calcula los puntos de la patata que recibirán la mayor y la menor cantidad de sal.

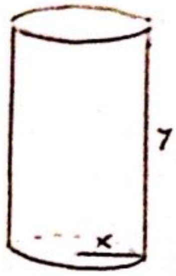
Problema 23

Hallar un rectángulo de perímetro $2p$ de modo que al girar alrededor de uno de sus lados forme un cilindro de volumen máximo.

Función a optimizar: volumen del cilindro $(\pi r^2 h)$

Dato: perímetro $= 2p \to 2x + 2y = 2p \to \boxed{x + y = p}$





Cilindro: radio $r = x$

altura $h = y$

$\boxed{\text{Volumen: } \pi x^2 y}$

Por tanto, $\begin{cases} f(x,y) = \pi x^2 y \\ x + y = p \end{cases} \quad 0 \leq x \leq p$

Lagrangiano: $\mathcal{L}(x,y,\lambda) = \pi x^2 y + \lambda(p - x - y)$

Puntos críticos

$$\begin{cases} 2\pi x y - \lambda = 0 \\ \pi x^2 - \lambda = 0 \\ x + y = p \end{cases} \to \begin{cases} \lambda = 2\pi x y \\ \lambda = \pi x^2 \\ x + y = p \end{cases} \to \begin{cases} \pi x^2 = 2\pi x y \\ x + y = p \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 2xy = 0 \\ x + y = p \end{cases} \to \begin{cases} x(x - 2y) = 0 \\ x + y = p \end{cases} \to \begin{cases} x = 0 \to y = p \to A(0, p) \\ x = 2y \to 3y = p \to B\left(\frac{2p}{3}, \frac{p}{3}\right) \end{cases}$$

Clasificación $x + y = p$, $x \leq x \leq p$ es un conjunto compacto

$f(x,y)$ es continua

Aplicando Weierstrass $f(0,p) = f(p,0) = 0 \qquad f(B) = \pi \frac{4p^3}{27} > 0$

Por tanto las dimensiones del rectángulo que maximizan el volumen del cilindro son $x = 2p/3$, $y = p/3$. Y el volumen máximo es: $4\pi p^3/27$

(7) Clasificar los puntos estacionarios de

$$f(x,y) = x-2y+\ln\sqrt{x^2+y^2}+\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$$

Recordatorio:
$\ln a^b = b\cdot\ln a$
$(\operatorname{arctg} u)' = \frac{u'}{1+u^2}$

$f(x,y) = x-2y+\ln(x^2+y^2)^{1/2}+\operatorname{arctg} y/x$

$f(x,y) = x-2y+\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+\operatorname{arctg} y/x$

(3)

Puntos Críticos $\begin{cases} f'_x=0 \\ f'_y=0\end{cases}$

$$\begin{cases} 1+\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{x^2+y^2}+\dfrac{-\frac{y}{x^2}}{1+\frac{y^2}{x^2}}=0 \\ -2+\frac{1}{2}\frac{2y}{x^2+y^2}+\dfrac{\frac{1}{x}}{1+\frac{y^2}{x^2}}=0\end{cases} \to \begin{cases} 1+\frac{x}{x^2+y^2}-\frac{y}{x^2+y^2}=0 \\ -2+\frac{y}{x^2+y^2}+\frac{x}{x^2+y^2}=0\end{cases}$$

$$\to \begin{cases} x^2+y^2+x-y=0 \\ -2x^2-2y^2+x+y=0\end{cases} \to 2\cdot 1^a ec + 2^a ec \to 3x-y=0 \to y=3x$$

$\to$ introduciendo en la 1^a ec $\to x^2+9x^2+x-3x=0 \to 10x^2-2x=0$

$\to x\cdot(10x-2)=0$ $\to x=0\to y=0 \to A(0,0) \to$ descartado, pues $f(0,0)\notin\mathbb{R}$
$\to x=1/5 \to y=3/5 \to \boxed{B(1/5,3/5)}$

Clasificación $Hf(x,y)=\begin{pmatrix} \partial^2 f/\partial x^2 & \partial^2 f/\partial x\partial y \\ \partial^2 f/\partial x\partial y & \partial^2 f/\partial y^2\end{pmatrix}$

$$Hf(x,y)=\begin{pmatrix} \frac{y^2-x^2+2xy}{(x^2+y^2)^2} & \frac{y^2-x^2-2xy}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{y^2-x^2-2xy}{(x^2+y^2)^2} & \frac{x^2-y^2-2xy}{(x^2+y^2)^2}\end{pmatrix}$$

$$Hf(1/5,3/5)=\begin{pmatrix} 7/2 & 1/2 \\ 1/2 & -7/2\end{pmatrix}$$

$\Delta_2<0$

$\boxed{B(\tfrac{1}{5},\tfrac{3}{5},-1+\tfrac{1}{2}\ln\tfrac{2}{5}+\operatorname{arctg}3)\ \text{punto de silla}}$

(7) Clasificar los puntos estacionarios de

$$f(x,y) = x-2y+\ln\sqrt{x^2+y^2}+\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$$

Recordatorio
$\ln a^b = b\cdot\ln a$
$(\operatorname{arctg} u)' = \frac{u'}{1+u^2}$

$$f(x,y) = x-2y+\ln(x^2+y^2)^{1/2}+\operatorname{arctg} y/x$$

$$f(x,y) = x-2y+\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+\operatorname{arctg} y/x$$

Puntos Críticos $\begin{cases} f'_x=0 \\ f'_y=0 \end{cases}$

$$\begin{cases} 1+\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{x^2+y^2}+\frac{-\frac{y}{x^2}}{1+\frac{y^2}{x^2}}=0 \\ -2+\frac{1}{2}\frac{2y}{x^2+y^2}+\frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{y^2}{x^2}}=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 1+\frac{x}{x^2+y^2}-\frac{y}{x^2+y^2}=0 \\ -2+\frac{y}{x^2+y^2}+\frac{x}{x^2+y^2}=0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x^2+y^2+x-y=0 \\ -2x^2-2y^2+x+y=0 \end{cases} \rightarrow 2\cdot 1^a ec+2^a ec \rightarrow 3x-y=0 \rightarrow y=3x$$

$\rightarrow$ introduciendo en la 1^a ec $\rightarrow x^2+9x^2+x-3x=0 \rightarrow 10x^2-2x=0$

$\rightarrow x\cdot(10x-2)=0$ $\nearrow x=0 \rightarrow y=0 \rightarrow A(0,0) \rightarrow$ descartado, pues $f(0,0)\notin\mathbb{R}$
$\searrow x=1/5 \rightarrow y=3/5 \rightarrow \boxed{B(1/5,3/5)}$

Clasificación $Hf(x,y)=\begin{pmatrix} \partial^2 f/\partial x^2 & \partial^2 f/\partial x\partial y \\ \partial^2 f/\partial x\partial y & \partial^2 f/\partial y^2 \end{pmatrix}$

$$Hf(x,y)=\begin{pmatrix} \frac{y^2-x^2+2xy}{(x^2+y^2)^2} & \frac{y^2-x^2-2xy}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{y^2-x^2-2xy}{(x^2+y^2)^2} & \frac{x^2-y^2-2xy}{(x^2+y^2)^2} \end{pmatrix}$$

$$Hf(1/5,3/5)=\begin{pmatrix} 7/2 & 1/2 \\ 1/2 & -7/2 \end{pmatrix}$$

$\Delta_2<0$ $\rightarrow$ $\boxed{B\left(\frac{1}{5},\frac{3}{5},-1+\frac{1}{2}\ln\frac{2}{5}+\operatorname{arctg}3\right) \text{ punto de silla}}$

(7) Clasificar los puntos estacionarios de

$$f(x,y) = x-2y+\ln\sqrt{x^2+y^2}+\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$$

Recordatorio
$\ln a^b = b\cdot\ln a$
$(\operatorname{arctg} u)' = \frac{u'}{1+u^2}$

$$f(x,y) = x-2y+\ln(x^2+y^2)^{1/2}+\operatorname{arctg} y/x$$

$$f(x,y) = x-2y+\tfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+\operatorname{arctg} y/x$$

Puntos Críticos $\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} 1+\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{x^2+y^2}+\frac{-\frac{y}{x^2}}{1+\frac{y^2}{x^2}} = 0 \\ -2+\frac{1}{2}\frac{2y}{x^2+y^2}+\frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{y^2}{x^2}} = 0 \end{cases} \to \begin{cases} 1+\frac{x}{x^2+y^2}-\frac{y}{x^2+y^2} = 0 \\ -2+\frac{y}{x^2+y^2}+\frac{x}{x^2+y^2} = 0 \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} x^2+y^2+x-y=0 \\ -2x^2-2y^2+x+y=0 \end{cases} \to 2\cdot 1^a ec + 2^a ec \to 3x-y=0 \to y=3x$$

$\to$ introduciendo en la 1^a ec $\to x^2+9x^2+x-3x=0 \to 10x^2-2x=0$

$\to x\cdot(10x-2)=0$ $\begin{cases} \to x=0 \to y=0 \to A(0,0) \to \text{descartado, pues } f(0,0)\notin\mathbb{R} \\ \to x=1/5 \to y=3/5 \to \boxed{B(1/5,3/5)} \end{cases}$

Clasificación $Hf(x,y) = \begin{pmatrix} \partial^2 f/\partial x^2 & \partial^2 f/\partial x\partial y \\ \partial^2 f/\partial x\partial y & \partial^2 f/\partial y^2 \end{pmatrix}$

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{y^2-x^2+2xy}{(x^2+y^2)^2} & \frac{y^2-x^2-2xy}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{y^2-x^2-2xy}{(x^2+y^2)^2} & \frac{x^2-y^2-2xy}{(x^2+y^2)^2} \end{pmatrix}$$

$$Hf(1/5,3/5) = \begin{pmatrix} 7/2 & 1/2 \\ 1/2 & -7/2 \end{pmatrix}$$

$\Delta_2 < 0$ $\to$ $\boxed{B\left(\frac{1}{5},\frac{3}{5},-1+\frac{1}{2}\ln\frac{2}{5}+\operatorname{arctg}3\right) \text{ punto de silla}}$

SOLUCIONES HOJA 7 (MÁXIMOS Y MINIMOS)

Matemáticas Avanzadas (Grado en Informática)

10) $x^2+y^2 \leq 1$ $\quad T(x,y) = x^2+2y^2-x$

$x^2+y^2 \leq 1$ cerrado y acotado (compacto)

$T(x,y)$ continua (polinómica)

Por el Th. Weierstrass, $T(x,y)$ tiene máximo y mínimo absoluto sobre el conjunto $x^2+y^2 \leq 1$.

Para hallarlos

1) Calculamos los puntos críticos de $T(x,y)$ contenidos en el compacto

2) Calculamos los puntos críticos de $T(x,y)$ con la condición de igualdad $x^2+y^2=1$ (es decir, sobre la frontera)

3) Hallamos el valor de T en cada punto hallado:

donde se alcance mayor valor → máximo absoluto

donde se alcance menor valor → mínimo absoluto.

1) $\begin{cases} T'_x = 0 \\ T'_y = 0 \end{cases} \to \begin{cases} 2x-1=0 \\ 4y=0 \end{cases} \to A(1/2, 0)$ (pertenece a $x^2+y^2 \leq 1$)

2) $\mathcal{L}(x,y,\lambda) = x^2+2y^2-x+\lambda(x^2+y^2-1)$

$\begin{cases} \mathcal{L}'_x = 0 \\ \mathcal{L}'_y = 0 \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \to \begin{cases} 2x-1+2\lambda x = 0 \\ 4y+2\lambda y = 0 \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \to 2y(2+\lambda)=0$

$\to y=0 \to x^2=1 \to x=-1 \to B(-1,0)$; $x=1 \to C(1,0)$

$\to \lambda=-2 \to x=-1/2 \to y^2=\frac{3}{4} \to D\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $E\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

3) $T\left(\frac{1}{2}, 0\right) = -1/4$ → mínimo absoluto

$T(-1,0) = 2$ → máximo absoluto

$T(1,0) = 0$

$T\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 5/4$

$T\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 5/4$

INTERPOLACIÓN

Método de Lagrange

Puntos: $x_0 \dots x_n \in [a,b]$

$$L_i(x) = \frac{(x-x_0)\cdot\ldots\cdot(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdot\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdot\ldots\cdot(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)}$$

Polinomio interpolador de Lagrange

$$P(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + \ldots + f(x_n)L_n(x)$$

Método de Newton (DIFERENCIAS DIVIDIDAS)

Puntos $x_0 \dots x_n \in [a,b]$

Diferencias divididas:

- si $x_0 = \ldots = x_n$ $\quad f[x_0,\ldots,x_n] = \dfrac{f^{n)}(x_0)}{n!}$

- si $x_0 \neq x_n$ $\quad f[x_0,\ldots,x_n] = \dfrac{f[x_1,\ldots,x_n] - f[x_0,\ldots,x_{n-1}]}{x_n - x_0}$

ejemplos $f[x_0] = f(x_0)$ $\quad f[x_0,x_1] = \dfrac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0} = \dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$

Polinomio interpolador de Newton

$$P_n(x) = f[x_0] + f[x_0,x_1](x-x_0) + f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1) + \ldots + f[x_0,\ldots,x_{n-1}](x-x_0)\cdot\ldots(x-x_{n-1})$$

Método de Hermite

Puntos: $x_0 \dots x_n \in [a,b]$ Conocemos $f(x_i)$ y $f'(x_i)$ $\forall i = 0 \ldots n$

Polinomio interpolador de Hermite: se puede obtener aplicando **diferencias divididas**

Problema 19

Hallar el polinomio interpolador de grado ≤ 2 a la función

$f(x) = \cos x$ en los puntos $x = 0, 1/2, 1$

Calcular el error y dar una cota, al aproximar en $x = 3/4$

Usando la calculadora y 4 cifras decimales con redondeo.

tenemos:

$x_0 = 0 \qquad f(x_0) = 1$

$x_1 = 0'5 \qquad f(x_1) = 0'8776 \qquad h = 0'5$

$x_2 = 1 \qquad f(x_2) = 0'5403$

Tabla de diferencias

x_i	$f(x_i)$	$\Delta f(x_i)$	$\Delta^2 f(x_i)$
0	1		
		$0'8776 - 1 = -0'1224$	
0'5	0'8776		$-0'3373 - (-0'1224) = -0'2149$
		$0'5403 - 0'8776 = -0'3373$	
1	0'5403		

Diferencias ordinarias:

$$P_2 = 1 + \frac{-0'1224}{1!} s + \frac{-0'2149}{2!} s(s-1) \quad \text{donde } s = \frac{x-0}{0'5} = 2x$$

$$P_2 = 1 - 0'1224 \cdot 2x - 0'2149\, x\,(2x-1) \qquad P_2 = -0'4298x^2 - 0'0299x + 1$$

Diferencias descendentes

$$P_2 = 0'5403 + \frac{-0'3373}{1!} t + \frac{-0'2149}{2!} t(t+1) \quad \text{donde } t = \frac{x-1}{0'5} = 2x-2$$

$$P_2 = 0'5403 - 0'3373(2x-2) - 0'2149(x-1)(2x-1)$$

$$P_2 = -0'4298x^2 - 0'0299x + 1$$

(Problema 19)

Diferencias divididas

x_i	$f[x_i]$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$
0	1		
		$\dfrac{f(0'5)-f(0)}{0'5-0} = -0'2448$	
			$\dfrac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0} = \dfrac{-0'6746-(-0'2448)}{1-0} = -0'4298$
0'5	0'8776		
		$\dfrac{f(1)-f(0'5)}{1-0'5} = -0'6746$	
1	0'5403		

$P_2 = 1 - 0'2448(x-0) - 0'4298(x-0)(x-0'5)$

$P_2 = 1 - 0'2448x - 0'4298(x^2-0'5x)$ $\quad P_2 = -0'4298x^2 - 0'0299x + 1$

Lagrange

$L_0 = \dfrac{(x-0'5)(x-1)}{(0-0'5)(0-1)}$ $\quad L_0 = 2(x^2-1'5x+0'5)$

$L_1 = \dfrac{(x-0)(x-1)}{(0'5-0)(0'5-1)}$ $\quad L_1 = -4(x^2-x)$

$L_2 = \dfrac{(x-0)(x-0'5)}{(1-0)(1-0'5)}$ $\quad L_2 = 2(x^2-0'5x)$

$P_2 = 1\cdot L_0 + 0'8776 L_1 + 0'5403 L_2$ $\quad P_2 = -0'4298x^2 - 0'0299x + 1$

Observación: el polinomio interpolador es único

Taylor $(n=2, a=0)$

$f(x) = \cos x \quad f'(x) = -\operatorname{sen} x \quad f''(x) = -\cos x \quad f'''(x) = \operatorname{sen} x$

$f(0) = 1 \quad f'(0) = 0 \quad f''(0) = 1 \quad f'''(c) = \operatorname{sen} c$

$T_2 = 1 - \dfrac{1}{2}x^2$ $\quad T_2 = -0'5x^2 + 1$

(Problema 19)

ERROR

Para $x = 0'75$, aproximación

$P_2(0'75) = 0'7358125$

Es decir:

$\cos(0'75) \approx 0'7358125$

(calculadora: $\cos(0'75) = 0'7316888689\ldots$)

(error a mano: $0'0041236311 2\ldots$)

Error de interpolación:

$f^{n+1}(\alpha) = f'''(\alpha) = \operatorname{sen}\alpha$

$$\cos x = P_2(x) + \frac{\operatorname{sen}\alpha}{3!}(x-0)(x-0'5)(x-1), \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

Cota del error:

$$|\cos(0'75) - P_2(0'75)| = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{6}|(0'75-0)(0'75-0'5)(0'75-1)| \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

$$|\cos(0'75) - P_2(0'75)| \leq \frac{\operatorname{sen} 1}{6}|0'75 \cdot 0'25 \cdot 0'25|$$

$$|\cos(0'75) - P_2(0'75)| \leq 0'00657399206$$

b)

Ejercicios de examen: interpolación

3. (*3,5 ptos.*) Razonadamente, hallar el polinomio interpolador para la siguiente tabla

x_i	-4	-1	0	2
$f(x_i)$	2	1	3	-2

3.- Razonadamente, hallar el polinomio interpolador para la siguiente tabla:

x_i	-4	-2	0	1
$f(x_i)$	2	1	3	-2

3. Calcula el polinomio de Hermite para la siguiente tabla de datos:

x_i	1	5	7
$f(x_i)$	1	-7	1
$f'(x_i)$	6	6	-4

4.- (*2 ptos.*) Hallar el polinomio interpolador para los siguientes datos de una función $f(x)$: $f(-1)=3, f'(-1)=-2/5, f(0)=2, f'(0)=-1, f(2)=4, f(3)=1$

5.- (*2 puntos*) Hallar el polinomio interpolador para una función $f(x)$, de la que se conocen los siguientes datos:

$$f(0)=-3, f'(0)=1, f(1)=0, f'(1)=5, f''(1)=6$$

3. Utiliza el método de Lagrange para obtener el polinomio $L(x)$ que interpola estos datos (deja expresado el polinomio en la forma de Lagrange, no hace falta que calcules los coeficientes de cada potencia de la x):

x_i	0	90	180	270
$f(x_i)$	0	100	0	-100

La función $f(x)$ es, en grados, $f(x) = 100\,\mathrm{sen}(x)$ (quizá ya te habías dado cuenta). Acota el error de truncamiento asociado a $L(x)$ para $x \in [0, 270]$ (es decir, da una cota de cómo de grande puede ser la diferencia entre tu polinomio $L(x)$ y la función $f(x)$ en ese intervalo).

$\boxed{\lambda = -1} \rightarrow \begin{cases} 4x - 1 - 2\mu x = 0 \\ 4y - x - 2\mu y = 0 \\ xy + z^2 = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$ $\ominus \rightarrow 5(x-y) - 2\mu x + 2\mu y = 0 \rightarrow 5(x-y)$

$\rightarrow (x-y)(5 - 2\mu) = 0 \rightarrow y = x$

$\hookrightarrow \mu = 5/2$

$\underline{y = x} \rightarrow \begin{cases} 3x - 2\mu x = 0 \\ x^2 + z^2 = 0 \\ 2x^2 = 1 \end{cases} \rightarrow x = y = 0$

$\hookrightarrow$ S.I

$\mu = 5/2 \rightarrow \begin{matrix} -x - y = 0 \\ xy + z^2 = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{matrix} \rightarrow y = -x$

$\hookrightarrow -x^2 + z^2 = 0$

$2x^2 = 1 \rightarrow x = 1/\sqrt{2} \rightarrow E$

$\hookrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right.$

$H\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad I\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$

⊛ FOTOCOPIAS EJERCICIOS PLANO - TANGENTE

Hallar el polinomio interpolado para la siguiente tabla

x_i	1	3	5
$f(x_i)$	-1	0	2

- LAGRANGE

$L(x) = -1 \cdot L_0 + 0 \cdot L_1 + 2 \cdot L_2$

$L_0 = \frac{(x-3)(x-5)}{(1-3)(1-5)} = \frac{1}{8}(x^2 - 8x + 15)$

$L_1 = \frac{(x-1)(x-5)}{(3-1)(3-5)} = -\frac{1}{4}(x^2 - 6x + 5)$

$L_2 = \frac{(x-1)(x-3)}{(5-1)(5-3)} = \frac{2}{8}(x^2 - 4x + 3)$

$L(x) = -\frac{1}{8}(x^2 - 8x + 15) + 0 + \frac{2}{8}(x^2 - 4x + 3)$

$\boxed{L(x) = \frac{1}{8}x^2 - \frac{9}{8}}$

- NEWTON (DIFERENCIAS DIVIDIDAS)

x_i	$f[x_i]$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$
1	-1		
		$\frac{0-(-1)}{3-1} = \frac{1}{2}$	
3	0		$\frac{1 - \frac{1}{2}}{5-1} = \frac{1}{8}$
		$\frac{2-0}{5-3} = 1$	
5	2		

Scanned by CamScanner

$P_2(x) = -1 - \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{8}(x-1)(x-3)$

$P_2(x) = -1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + \frac{1}{8}(x^2 - 4x + 3)$

$\boxed{P_2(x) = \frac{1}{8}x^2 - \frac{9}{8}}$ EL POLINOMIO INTERPOLADOR ES ÚNICO.

LAGRANGE Y NEWTON SE PUEDEN HACER SIEMPRE

- MÉTODO DE HERMITE

No se pueden hacer. Faltan $f'(1)$, $f'(3)$ y $f'(5)$

- NEWTON (DIFERENCIAS ORDINARIAS) ASCENDENTES

x_i	$f[x_i]$	$\Delta f[x_i]$	$\Delta^2 f[x_i]$
1	-1		
3	0	$0-(-1)=1$	
5	2	$2-0=2$	$2-1=1$

$P_3(x) = -1 + \frac{1}{1!}s + \frac{1}{2!}s(s-2)$ siendo $s = \frac{x-1}{2}$

$P_3(x) = -1 + s + \frac{1}{2}(s^2 - 2s)$

$P_3(x) = -1 + \frac{x-1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{(x-1)^2}{4} - \cancel{2}\frac{x-1}{\cancel{2}}\right)$

$P_3(x) = -1 + \frac{1}{4}\, x - 1$

$\boxed{P_3(x) = \frac{1}{8}x^2 - \frac{9}{8}}$

NEWTON (DIFERENCIAS ORDINARIAS) DESCENDENTES

x_i	$f[x_i]$	$\Delta f[x_i]$	$\Delta^2 f[x_i]$
1	-1		

MÉTODO DE HERMITE

No se pueden hacer. Faltan $f'(1)$, $f'(3)$ y $f'(5)$

- NEWTON (DIFERENCIAS ORDINARIAS) ASCENDENTES

x_i	$f[x_i]$	$\Delta f[x_i]$	$\Delta^2 f[x_i]$
1	-1		
		$0-(-1)=1$	
3	0		$2-1=1$
		$2-0=2$	
5	2		

$$P_3(x) = -1 + \frac{1}{1!} s + \frac{1}{2!} s(s-2) \quad \text{siendo } s = \frac{x-1}{2}$$

$$P_3(x) = -1 + s + \frac{1}{2}(s^2 - 2s)$$

$$P_3(x) = -1 + \frac{x-1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{(x-1)^2}{4} - \cancel{2}\,\frac{x-1}{\cancel{2}}\right)$$

$$P_3(x) = -1 + \frac{1}{4} x - 1$$

$$\boxed{P_3(x) = \frac{1}{8}x^2 - \frac{9}{8}}$$

- NEWTON (DIFERENCIAS ORDINARIAS) DESCENDENTES

x_i	$f[x_i]$	$\Delta f[x_i]$	$\Delta^2 f[x_i]$
1	-1		
		1	
3	0		1
		2	
5	2		

$$P_4(x) = 2 + \frac{2}{1!} s + \frac{1}{3!} s(s-1) \quad \text{siendo } s. \quad s = \frac{x-5}{2}$$

$$P_4(x) = 2 + 2s + \frac{1}{6}(s^2 - s) = 2 + x - 5 + \frac{1}{8}(x-5)^2 + \frac{1}{4}(x-5) =$$

$$= x - 3 + \frac{1}{8}(x^2 + 10x + 15) + \frac{1}{4}x - \frac{9}{4} = \boxed{\frac{1}{8}x^2 - \frac{9}{8}}$$

POLINOMIO INTERPOLADOR DE LOS DATOS $f(0) = 1$

- NEWTON

$x_i \quad f(x_i) \quad f(x_i, x_{i+1})$

$0 \quad 1$

$\frac{f'(0)}{1!} = 2$

$0 \quad 1$

$\frac{1-2}{1-0} = -1$

$\frac{2-(-1)}{(1-0)} = 3$

$\frac{2-1}{1-0} = 1$

-5

$1 \quad 2$

$\frac{3-1}{1-0} = 2$

$\frac{f'(1)}{1!} = 3$

5

$\frac{0-2}{1-0} = -2$

$1 \quad 2$

$\frac{f''(1)}{2!} = 0$

0

$\frac{f'(1)}{1!} = 3$

$\frac{f'''(1)}{3!} = -2$

$1 \quad 2$

$\frac{f''(1)}{2!} = 0$

$\frac{f'(1)}{1!} = 3$

$1 \quad 2$

$P_1(x) = 1 + 2x - 1x^2 + 3x^2(x-1) - 5x^2(x-1)^2 + 5x^2(x-1)^3$

$f(x) = \sqrt{1+x} \qquad x_0 = -1 \qquad x_1 = 3 \qquad x_2 = 8$

a) LAGRANGE b) NEWTON c) TAYLOR ORDEN 2 (CENTRADO EN 0). d) ERROR LAGRANGE Y NEWTON e) ERROR TAYLOR

x_i	-1	3	8
$f(x_i)$	0	2	3

a) $L(x) = 0 \cdot l_0 + 2 \cdot l_1 + 3 \cdot l_2$

$l_0 = \frac{(x-3)(x-8)}{(-1-3)(-1-8)} = \frac{1}{36}(x^2 - 11x + 24)$

$l_1 = \frac{(x+1)(x-8)}{(3+1)(3-8)} = -\frac{1}{20}(x^2 - 7x - 8)$

$l_2 = \frac{(x+1)(x-3)}{(8+1)(8-3)} = \frac{1}{45}(x^2 - 2x - 3)$

$L(x) = -2 \cdot \frac{1}{20}(x^2 - 7x - 8) + 3 \cdot \frac{1}{45}(x^2 - 2x - 3) =$

$= -\frac{1}{10}(x^2 - 7x - 8) + \frac{1}{15}(x^2 - 2x - 3) = -\frac{1}{30}x^2 + \frac{13}{30}x + \frac{18}{30}$

b) NEWTON

x_i	$f(x_i)$	$f(x_i, x_{i+1})$	$f(x_i, x_{i+1}, x_{i+2})$
-1	0		
		$\frac{2-0}{3-(-1)} = \frac{1}{2}$	
3	2		$\frac{1/5 - 1/2}{8-(-1)} = \frac{-1}{30}$
		$\frac{3-2}{8-3} = \frac{1}{5}$	
8	3		

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(x+1) - \frac{1}{30}(x+1)(x-8) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} - \frac{1}{30}(x^2-2$$

$$= -\frac{1}{30}x^2 + \left(-\frac{2x}{30} + \frac{\cancel{x}}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - 3\right) =$$

$$= -\frac{1}{30}x^2 + \frac{13x}{30} + \frac{18}{30}$$

c) TAYLOR

$$T_3(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(x-0) + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2$$

$f(x) = \sqrt{1+x}$ $\quad f(0) = 1$

$f'(x) = \frac{1}{2}(t+1)^{-1/2}$ $\quad f'(0) = \frac{1}{2}$

$f''(x) = -\frac{1}{4}(t+1)^{-2/4}$ $\quad f''(0) = -\frac{1}{4}$

$f'''(x) = \frac{3}{8}(t+1)^{-5/2}$ $\quad f'''(0) = \frac{3}{8\sqrt{(t+1)^5}}$

$$T_3(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2$$

d) APROXIMACIÓN $\sqrt{1,1} \rightarrow \sqrt{1,1} = f(0,1)$

$L(0,1) = P_3(0,1) = 0,6555567$ ← LAGRANGE

$T(0,1) = T_3(0,1) = 1,04878$ ← TAYLOR

e) ERROR TAYLOR

$$|f(0,1) - T(0,1)| = \left| \frac{f'''(c)}{3!}(0,1-0^3) \right| \quad 0 < c < 0,1$$

$$|f(0,1) - T(0,1)| = \left| \frac{1}{16\,(1+t)^{5/2}} \, 0,1^3 \right| \quad 0 < c < 0,1$$

$$|f(0,1) - T(0,1)| = \left| \frac{1}{16000\,(1+t)^{5/2}} \right| \quad 0 < c < 0,1$$

$|f(0,1) - T(0,1)| \leq \frac{1}{16000}$ sustituyo 1 por 0.

$|ERROR| \leq 0,0000625$

ERROR EN LAGRANGE / NEWTON

Supongamos que la tabla era

x_i	0	3	8
f_i	1	2	3

$|L(x) - f(x)| = \left| \frac{f'''(\alpha)}{3!} \cdot x (x-3)(x-8) \right| \quad 0 < \alpha < 8$

$|L(0,1) - f(0,1)| = \left| \frac{1}{16(1+\alpha)^{5/2}} \; 0,1\,(0,1-3)\,(0,1-8) \right| \quad 0 < \alpha < 8$

$|L(0,1) - f(0,1)| \leq \left| \frac{1}{16} \; 0,1\,(0,1-3)\,(0,1-8) \right| \quad (\alpha \to 0)$

$|L(0,1) - f(0,1)| \leq 0,1431875$

EJERCICIOS DE EXAMEN: FUNCIÓN DE VARIAS VARIABLES

1) $f(x,y) = 3x^2 + 4y^2 - 2x + 3y - 4$

a) Plano tangente y recta normal a $z = f(x,y)$ en $P(2,3)$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 6x - 2$ $\quad \vec{\nabla} f P\,(10, 27) \to \vec{\nabla} f P\,(10, 27,$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 8y + 3$

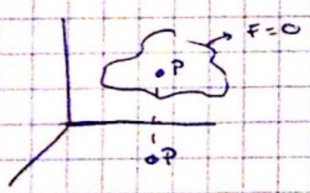
Plano tangente:

$P(2, 3, 49)$

$3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 3^2 - 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3 - 4 = 12 + 36 - 6 + 9 - 4 = 48 - 6 + 5 = 49$

$\pi : (2, 3, 49)(x-2, y-3, z-47) = 0$

a)



$F = 3x^2 + 4y^2 - 2x + 3y - 4 - z$

$P(2,3,49)$

$\vec{\nabla} F\,(6x-2,\ 8y+3, -1)$

$\vec{\nabla} F(P) = (10, 27, -1)$

$\pi : (10, 27, -1)(x-2,\ y-3,\ z-49) = 0$

Rnor: $(x,y,z) = (2,3,49) + \lambda(10, 27, -1)$

b)

$z = 3x^2 + 4y^2 - 16 + 8y - 4 \longrightarrow \bar{u}(10, 27, -1)$

$x + 4y = 16 \longrightarrow \bar{v}(1, 4, 0)$

$$\bar{w} = \bar{u} \cdot \bar{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 10 & 27 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = (4, -1, 13)$$

Recta tangente $R(x, y, z) = P + \lambda \cdot \bar{w}$

$R(x, y, z) = (2, 3, 49) + \lambda (4, -1,$