Universidade do Minho

Investigação Operacional

Trabalho Prático II

Ano letivo 2021/2022

a97363, Gabriel Alexandre Monteiro da Silva

a96106, Miguel Silva Pinto

a97755, Orlando José da Cunha Palmeira

a97613, Pedro Miguel Castilho Martins

1. Formulação do problema

Neste problema, pretendemos minimizar o custo total da operação de uma empresa em designar equipas a diversos clientes distribuídos geograficamente. Estamos perante um problema de escalonamento de equipas para cobrir tarefas em datas fixas, que é também conhecido como um problema de *fixed scheduling*.

A cada cliente está associado uma hora de serviço, que indica a hora que uma equipa deve estar no local, podendo estar lá mais cedo, mas nunca mais tarde. A duração do serviço no cliente é considerada desprezável, com valor nulo, não sendo necessário ter isso em consideração para o problema.

Tendo em conta que o maior nº de aluno do grupo é 97755, os valores de a1 e a8 são (7+1=8) e como 5 é ímpar os clientes D e E mantêm-se, ficando com a seguinte tabela.

j	cliente	a_j (¼hora)	a_j (hora do serviço)
1	Ana	8	11:00
2	Beatriz	7	10:45
3	Carlos	4	10:00
4	Diogo	2	09:30
5	Eduardo	10	11:30
6	Francisca	6	10:30
7	Gonçalo	9	11:15
8	Helena	8	11:00
9	Inês	2	09:30
10	José	5	10:15

Fig.1 : Quadro de tempos de serviços

Ao analisar o novo quadro de tempos de serviço, selecionamos apenas os caminhos possíveis que uma equipa pode fazer, tendo em conta as restrições temporais de serviço aos clientes e o tempo de deslocação entre clientes, ficando com o seguinte grafo de compatibilidades e tabela que mostra as deslocações possíveis entre clientes.

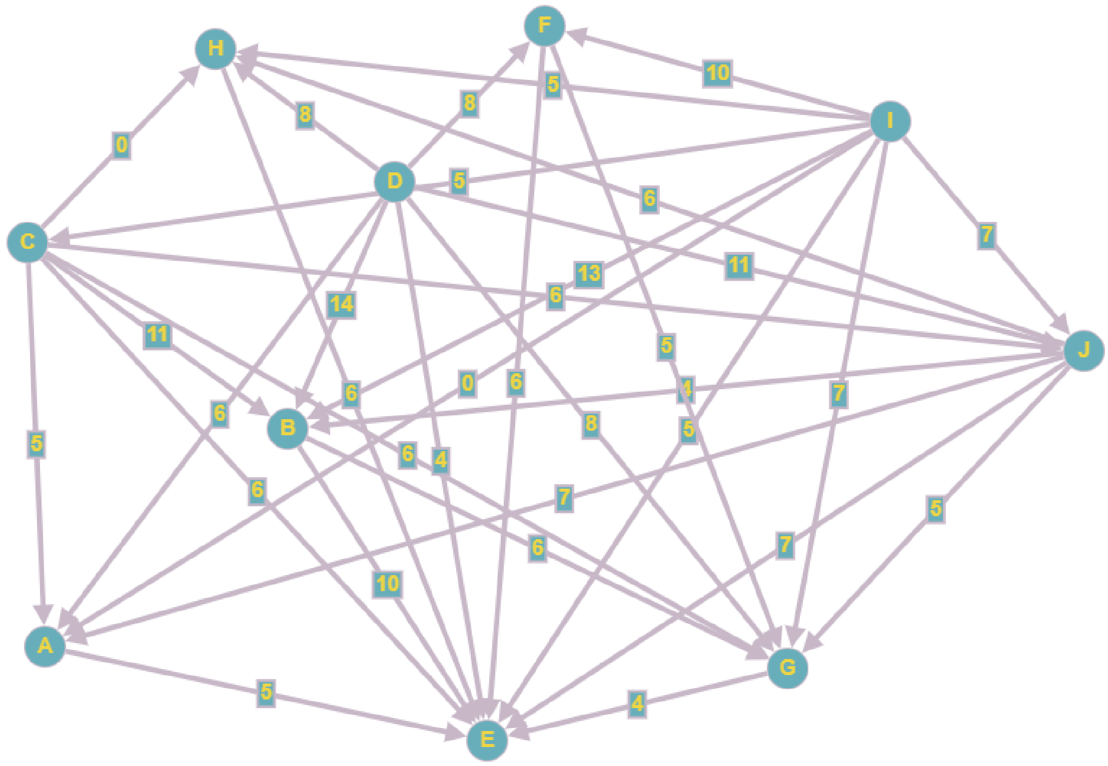


Fig.2 : Grafo de compatibilidades

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
A					5						2
B					10		6				16
C	5	11			6		6	0		6	3
D	6	14			4	8	8	8		11	5
E											7
F					6		5				12
G					4						10
H					6						10
I	0	13	5		5	10	7	5		7	10
J	7	4			7		5	6			11
K	1	15	2	4	6	11	9	9	9	10	

Fig.3 : Quadro de custos de deslocação dos caminhos possíveis.

Nesta tabela, a existência de um caminho no grafo é indicada pela existência de um número a fazer corresponder dois vértices. Por exemplo, na primeira linha e quinta coluna está o número 5, que indica que é possível ser feito o caminho do cliente A para o cliente E, tendo em conta as restrições temporais, e que o custo dessa deslocação é de 5 unidades monetárias.

Na coluna K, que simboliza a sede da empresa, os valores das distâncias estão incrementados em 1 U.M., relativamente ao valor das distâncias para a sede da empresa, para representar o custo fixo associado a cada equipa com serviço.

2. Modelo

Para resolver este problema, podemos modelá-lo como um problema de fluxo de redes, com o objetivo de encontrar o fluxo de custo mínimo na rede que definimos com os caminhos possíveis, dando-nos assim a melhor atribuição de equipas a todos os clientes, de modo a que o custo seja o menor possível.

Com o intuito de encontrar o fluxo de custo mínimo da rede e ao mesmo tempo, assegurar que todos os vértices (clientes) são percorridas por uma equipa, dividimos cada vértice em dois, sendo separados num vértice-origem e um vértice-destino em que todas as arestas do grafo saem de um vértice-origem e entram num vértice-destino. Ao definirmos a oferta dos vértices-origem como 1 e a procura dos vértices-destino como 1, é assegurada a passagem de fluxo de uma unidade nos vértices, ou seja, é assegurada a passagem de uma equipa pelos clientes.

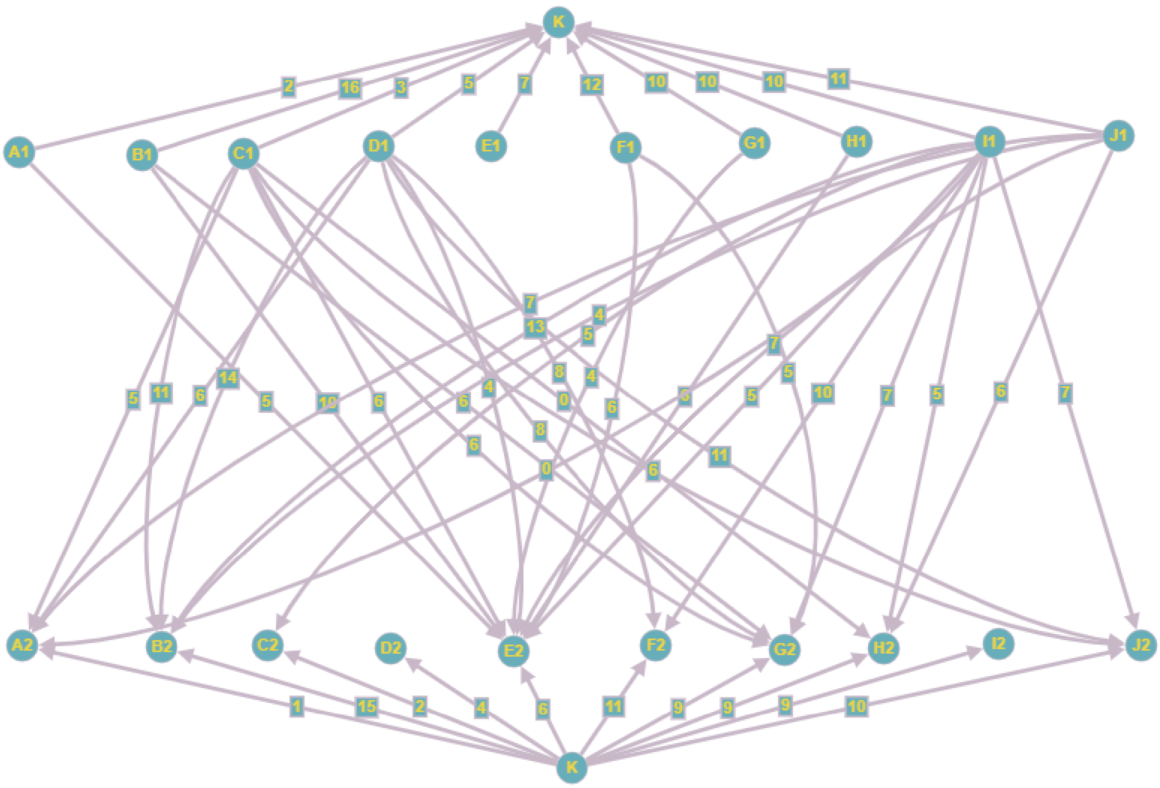


Fig.4 : Grafo bipartido de fluxo de rede.

No grafo da figura 4, os vértices-origem são os vértices na parte superior (A1, B1, ..., J1) e os vértices-destino são os vértices na parte inferior (A2, B2, …, J2).

Com o grafo modulado relativamente ao nosso problema, podemos passá-lo para software de otimização em rede *Relax4*. Para isso, temos de "traduzir" o grafo para um ficheiro de texto, que o software *Relax4* consiga interpretar e dar-nos a solução.

```
1  21
2  53
3  1 15 5 1
4  2 15 10 1
5  2 17 6 1
6  3 11 5 1
7  3 12 11 1
8  3 15 6 1
9  3 17 6 1
10 3 18 0 1
11 3 20 6 1
12 4 11 6 1
13 4 12 14 1
14 4 15 4 1
15 4 16 8 1
16 4 17 8 1
17 4 18 8 1
18 4 20 11 1
19 6 15 6 1
20 6 17 5 1
21 7 15 4 1
22 8 15 6 1
23 9 11 0 1
24 9 12 13 1
25 9 13 5 1
26 9 15 5 1
27 9 16 10 1
28 9 17 7 1
29 9 18 5 1
30 9 20 7 1
31 10 11 7 1
32 10 12 4 1
33 10 15 7 1
34 10 17 5 1
35 10 18 6 1
36 21 11 1 1
37 21 12 15 1
38 21 13 2 1
39 21 14 4 1
40 21 15 6 1
41 21 16 11 1
42 21 17 9 1
43 21 18 9 1
44 21 19 9 1
45 21 20 10 1
46 1 21 2 1
47 2 21 16 1
48 3 21 3 1
49 4 21 5 1
50 5 21 7 1
51 6 21 12 1
52 7 21 10 1
53 8 21 10 1
54 9 21 10 1
55 10 21 11 1
```

Fig.5 : Ficheiro de input pt.1.

Nas primeiras duas linhas definimos o número de vértices (1ª linha) e o número de arestas (2ª linha). De seguida temos 53 linhas, equivalente ao número de arestas, a indicar o vértice origem, o vértice destino, o custo e a capacidade de cada aresta, por esta ordem. Os vértices-origem de A até J são numerados como 1, 2, ..., 10, os vértices-destino de A até J são numerados como 11, 12, …, 20 e o vértice da sede da empresa é numerado como 21 não sendo preciso dividi-lo. A capacidade de todas as arestas é definida com o valor 1 para assegurar que um cliente só é atendido por uma equipa, apesar de que se a capacidade fosse maior, não haveria alterações na solução.

```
1
1
1
1
1
1
1
1
1
1
-1
-1
-1
-1
-1
-1
-1
-1
-1
-1
0
```

Fig.6 : Ficheiro de input pt.2.

As últimas 21 linhas, equivalente ao número de vértices, definem a oferta/procura de cada vértice, tendo os vértices-origem (1 a 10) uma oferta igual a 1, sendo definida pelo valor 1, e os vértices-destino (11 a 20) uma procura igual a 1, sendo definida pelo valor -1, com o vértice que representa a sede da empresa com valor 0, não tendo oferta nem procura.

3. Solução ótima

Depois de submetermos o ficheiro de input no *Relax4*, obtivemos os seguintes resultados.

```
*************************************************************
 NUMBER OF NODES = 21, NUMBER OF ARCS = 53
 UNKNOWN OR UNSPECIFIED INITIALIZATION MODE;USING DEFAULT INITIALIZATION
 ***********************************
 Total algorithm solution time =   0.00254797935 sec.
 OPTIMAL COST =   76.
 NUMBER OF ITERATIONS =  18
 NUMBER OF MULTINODE ITERATIONS =  1
 NUMBER OF MULTINODE ASCENT STEPS =  2
 NUMBER OF REGULAR AUGMENTATIONS =  1
 ***********************************

s 76.
f 1 15 0
f 2 15 0
f 2 17 1
f 3 11 0
f 3 12 0
f 3 15 0
f 3 17 0
f 3 18 1
f 3 20 0
f 4 11 0
f 4 12 0
f 4 15 0
f 4 16 1
f 4 17 0
f 4 18 0
f 4 20 0
f 6 15 0
f 6 17 0
f 7 15 1
f 8 15 0
f 9 11 0
f 9 12 0
f 9 13 0
f 9 15 0
f 9 16 0
f 9 17 0
f 9 18 0
f 9 20 1
f 10 11 0
f 10 12 1
f 10 15 0
f 10 17 0
f 10 18 0
f 21 11 1
f 21 12 0
f 21 13 1
f 21 14 1
f 21 15 0
f 21 16 0
f 21 17 0
f 21 18 0
f 21 19 1
f 21 20 0
f 1 21 1
f 2 21 0
f 3 21 0
f 4 21 0
f 5 21 1
f 6 21 1
f 7 21 0
f 8 21 1
f 9 21 0
f 10 21 0
```

A partir deste output, podemos verificar que a solução ótima tem um custo de **76 U.M.** e que são utilizadas **4 equipas** para atender os vários clientes, pois saem 4 unidades de fluxo do vértice K (sede da empresa). A seguinte tabela apresenta os percursos de cada equipa.

Equipas	Cliente	Hora	Tempo de Deslocação	Custo	Custo Total
1	Keleirós	09:00	[KI] 2/4 Hora	9	37
	Inês	09:30	[IJ] 3/4 Hora	7	
	José	10:15	[JB] 2/4 Hora	4	
	Beatriz	10:45	[BG] 2/4 Hora	6	
	Gonçalo	11:15	[GE] 1/4 Hora	4	
	Eduardo	11:30	[EK] 2/4 Hora	6	
	Keleirós	12:00	-	1	
2	Keleirós	09:00	[KD] 1/4 Hora	4	24
	Diogo	09:30	[DF] 3/4 Hora	8	
	Francisca	10:30	[FK] 4/4 Hora	11	
	Keleirós	11:30	-	1	
3	Keleirós	09:00	[KC] 2/4 Hora	2	12
	Carlos	10:00	[CH] 0/4 Hora	0	
	Helena	11:00	[HK] 1/4 Hora	9	
	Keleirós	11:15	-	1	
4	Keleirós	09:00	[KA] 1/4 Hora	1	3
	Ana	11:00	[AK] 1/4 Hora	1	
	Keleirós	11:15	-	1	

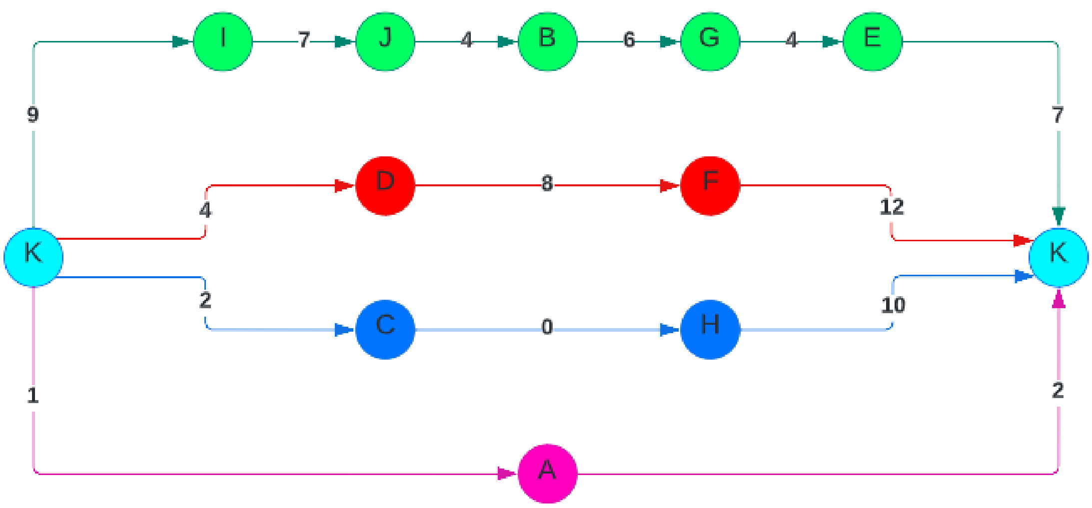


Fig.7 : Representação da solução ótima.

4. Validação do modelo

Para a validação do modelo, primeiro verificamos se a nossa solução é válida perante as restrições de horário de atendimento dos clientes e se todas as equipas faziam um percurso apropriado (sair da sede, atender clientes e voltar à sede), verificando que não havia situações fora do possível na nossa solução .

De modo a verificar a solução ótima decidimos modelar o problema como um problema de programação linear, através do software LPSolve.

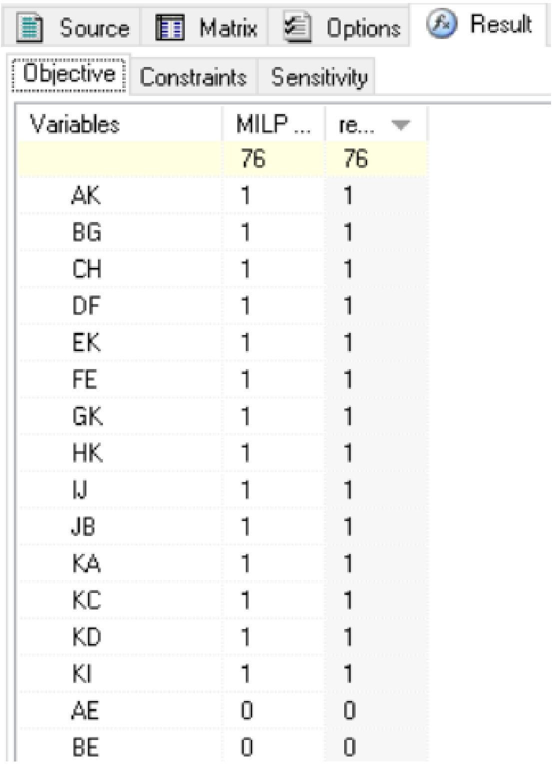
As variáveis de decisão são binárias e indicam a passagem de uma equipa entre dois clientes. A função objetivo consiste em minimizar o custo dos caminhos percorridos pelas equipas durante o atendimento aos seus clientes. A seguinte figura, mostra o ficheiro .lp utilizado.

Source | Matrix | Options | Result

```
/* Objective function */
min: 5AE + 2AK +
10BE + 6BG + 16BK +
5CA + 11CB + 6 CE + 6CG + 0 CH + 6CJ + 3CK +
6DA + 14DB + 4DE + 8DF + 8 DG + 8DH + 11DJ + 5DK +
7EK +
6FE + 5 FG + 12 FK +
4GE + 10GK +
6HE + 10HK +
0IA + 13 IB + 5 IC + 5 IE + 10IF + 7IG + 5IH + 7IJ + 10IK +
7JA + 4JB + 7JE + 5 JG + 6JH + 11JK +
1KA + 15KB + 2KC + 4KD + 6KE + 11KF + 9KG + 9KH + 9KI + 10KJ;

/* Variable bounds */

KA + KB + KC + KD + KE + KF + KG + KH + KI + KJ = AK + BK + CK + DK + EK + FK + GK + HK + IK + JK;
CA + DA + IA + JA + KA = 1;
AE + AK = 1;
CB + DB + IB + JB + KB = 1;
BE + BG + BK = 1;
IC + KC = 1;
CA + CB + CE + CG + CH + CJ + CK = 1;
KD = 1;
DA + DB + DE + DF + DG + DH + DJ + DK = 1;
AE + BE + CE + DE + FE + GE + HE + IE + JE + KE = 1;
EK = 1;
DF + IF + KF = 1;
FE + FG + FK = 1;
BG + CG + DG + FG + IG + JG + KG = 1;
GE + GK = 1;
CH + DH + IH + JH + KH = 1;
HE + HK = 1;
KI = 1;
IA + IB + IC + IE + IF + IG + IH + IJ + IK = 1;
CJ + DJ + IJ + KJ = 1;
JA + JB + JE + JG + JH + JK = 1;

bin AE, AK,
BE, BG, BK,
CA, CB, CE, CG, CH, CJ, CK,
DA, DB, DE, DF, DG, DH, DJ, DK,
FE, FG, FK,
GE, GK,
HE, HK,
IA, IB, IC, IE, IF, IG, IH, IJ, IK,
JA, JB, JE, JG, JH, JK,
KA, KB, KC, KD, KE, KF, KG, KH, KJ;
```

Fig.8 : Ficheiro .lp para o programa LPSolve.

O LPSolve apresenta os seguintes resultados.



Source | Matrix | Options | Result

Objective | Constraints | Sensitivity

Variables	MILP ...	re...
	76	76
AK	1	1
BG	1	1
CH	1	1
DF	1	1
EK	1	1
FE	1	1
GK	1	1
HK	1	1
IJ	1	1
JB	1	1
KA	1	1
KC	1	1
KD	1	1
KI	1	1
AE	0	0
BE	0	0

Fig.9 : Output obtido do programa LPSolve.

O LPSolve indica-nos que o custo ótimo é de 76 com 4 equipas, percorrendo os seguintes caminhos:

-> **K - I - J - B - G - K**

-> **K - D - F - E - K**

-> **K - C - H - K**

-> **K - A - K**

Apesar dos caminhos serem ligeiramente diferentes dos caminhos obtidos através do software Relax4, o custo total deles continua a ser 76 U.M. com 4 equipas diferentes para atender os clientes, não invalidando a nossa solução original, uma vez que estes caminhos são uma alternativa aos originais, e continuam a ter o mesmo custo que os caminhos que obtivemos pelo Relax4.