Геометрия и топология

Курс Солынина А.А.

Весна 2022 г.

Примечания

В тексте использованы рисунки из конспектов Солынина А.А.

Оглавление

Общая топология

Глава 1

Метрические пространства

1.1. Метрические пространства

Определение 1.1. M – множество. M вместе с $\rho : M \times M \to \mathbb{R}$ называется метрическим пространством, если:

1. $\forall x, y\ \rho(x, y) \geqslant 0$ и $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $\forall x, y\ \rho(x, y) = \rho(y, x)$
3. Неравенство треугольника: $\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z)$

(M, ρ) – метрическое пространство, ρ – метрика на M.

Пример 1.1. M – множество домов в городе. $\rho(x, y)$ – минимальное время, за которое можно добраться от x до y. (1 свойство очевидно, 2 свойство выполняется при симметричности дорог, 3 очевидно)

Пример 1.2. Расстояние на плоскости.

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$$
$$\rho_1((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$
$$\rho_2((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$
$$\rho_k((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := \left(|x_1 - x_2|^k + |y_1 - y_2|^k\right)^{1/k}$$
$$k \to \infty : \rho_\infty((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := \max\{|x_1 - x_2|; |y_1 - y_2|\}$$

Если перейти к $\mathbb{R}^n$, то

$$\rho_k((x_1, x_2, ..., x_n); (y_1, y_2, ..., y_n)) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^k\right)^{1/k}$$

$$\left(|\underbrace{x_1 - x_3}_{a_1+b_1}|^k + |\underbrace{y_1 - y_3}_{a_2+b_2}|^k\right)^{1/k} \leqslant \left(|\underbrace{x_1 - x_2}_{a_1}|^k + |\underbrace{y_1 - y_2}_{a_2}|^k\right)^{1/k} + \left(|\underbrace{x_2 - x_3}_{b_1}|^k + |\underbrace{y_2 - y_3}_{b_2}|^k\right)^{1/k}$$

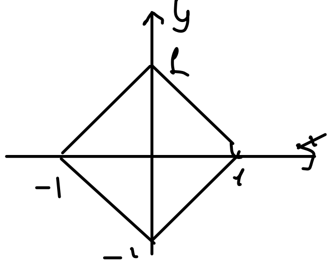
$$\left(\sum |a_i + b_i|^k\right)^{1/k} \leqslant \left(|a_1|^k + |a_2|^k\right)^{1/k} + \left(|b_1|^k + |b_2|^k\right)^{1/k}$$

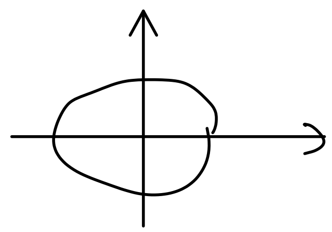
Неравенство Йенсена (к чему это?)

Определение 1.2. $B(x_0, r) := \{x \in M : \rho(x, x_0) < r\}$ – шар с центром в точке x_0 и радиусом r.

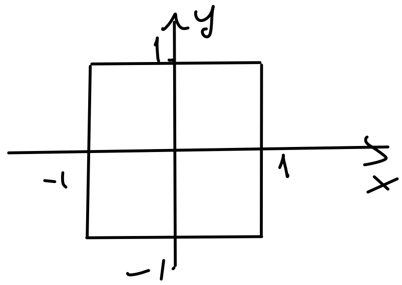
Нарисуем $B((0, 0); 1)$ в $\rho_1, \rho_2, \rho_\infty$.

$\rho_1: \ |x-0|+|y-0|<1.$ $\qquad$ $\rho_2 \ \sqrt{x^2+y^2}<1.$

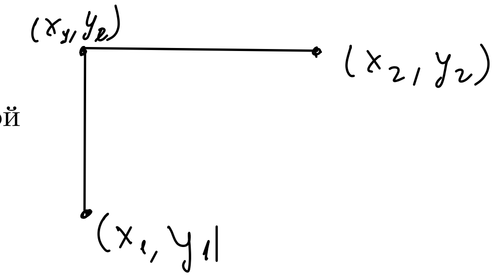




$\rho_\infty: \ \max\{|x|;|y|\}<1$



ρ_1 называется манхэттенской метрикой.



$$\rho_1((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = |x_1-x_2|+|y_1-y_2|$$
$$\rho_1((x_1,y_1),(x_1,y_2)) = |y_1-y_2|$$
$$\rho_1((x_1,y_2),(x_2,y_2)) = |x_1-x_2|$$

Пример 1.3. M – пространство «некоторых»[1] функций. Функции определены на $X \subset \mathbb{R}$.

$$\rho_1(f,g) := \int_X |f(x)-g(x)|dx$$

Есть проблемы: если $f(x)=g(x)$ всюду, кроме 1 точки, то $\rho_1(f,g)=0$.

[1]«некоторых» – обладающих естественными свойствами, какими именно – зависит от функци

1 и 2 свойство очевидны. Третье:

$$\int_X |f-h|dx \leqslant \int_X |f-g|dx + \int_X |g-h|dx$$

Аналогично определяются другие метрики, например:

$$\rho_2(f,g) = \left(\int_X |f(x)-g(x)|^2 dx\right)^{1/2}$$

$$\rho_k(f,g) = \left(\int_X |f(x)-g(x)|^k dx\right)^{1/k}$$

$$\rho_\infty(f,g) = \sup_{x\in X} |f(x)-g(x)|$$

Естественные свойства:

$$\rho_2 : \int_X |f(x)|^2 dx < \infty$$

Определение 1.3. (M,ρ) – метрическое пространство. $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset M$ – последовательность. Говорим, что $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) : \forall n > N\ \rho(x_n; x_0) < \varepsilon$$

В частности, в пространстве функций с разными метриками бывают разные пределы последовательностей функций.

$$f_n(x) \to f_0(x) \text{ по метрике } \rho_1$$

Аналогично для других метрик.

$$f_n(x) \to f_0(x) \text{ по метрике } \rho_\infty$$

называется равномерной сходимостью. $f_n \rightrightarrows f_0$:

$$f_n(x) \rightrightarrows f_0(x) \Leftrightarrow \lim \sup_X |f_n(x) - f_0(x)|$$

Пример 1.4. Дискретное метрическое пространство. M – любое множество.

$$\rho(x,y) = \begin{cases} 1 & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$$

дискретная метрика.

Пример 1.5. На самом деле дискретная метрика – это обобщение $\rho(x, y) \geqslant \varepsilon > 0$. ε не зависит от x или y.

Пример 1.6. M – множество строк длины n. $\rho(x, y)$ – количество символов, где эти строки отличаются

Пример 1.7. Задача: есть код из N бит. Можем переслать, но возникнет не более k ошибок. Сколько бит надо переслать, чтобы эти ошибки можно было исправить?

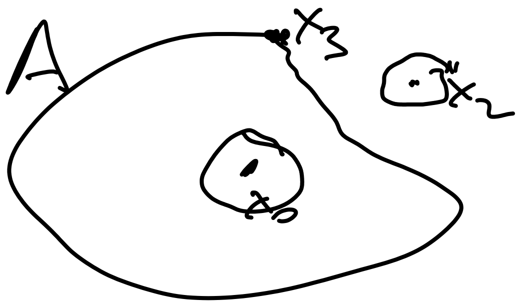
Решать не будем, переформулируем на язык метрических пространств.

(M, ρ). M состоит из строк, каждая из $N + k$ двоичных символов. Хотим выбрать $\{x_1, x_2, ..., x_{2^N}\} \subset M : \rho(x_i, x_j) > 2k$. $l \to \min$.

x_i – строки из $N + l$ символов.

$$x_i = a_{i1}a_{i2}...a_{iN+l}$$
$$x_j = b_{i1}b_{i2}...b_{iN+l}$$

1.2. Расположение точки относительно множества

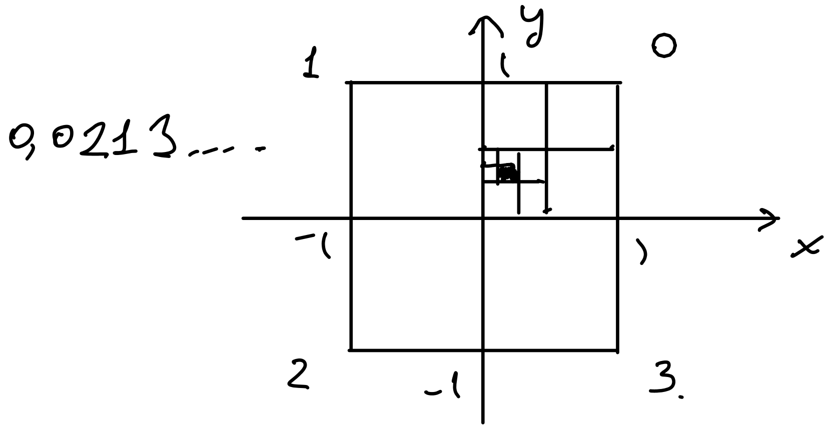


> **Теорема 1.1** (Жордана)**.** Любая замкнутая непересекающаяся кривая на плоскости делит плоскость на две части; равно одна из частей не ограничена.

Доказательство. Доказать невероятно сложно. ■

Кривая Пеано

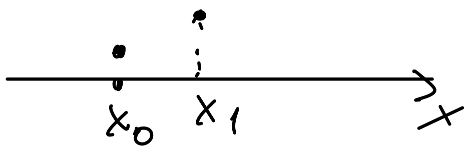
$$f : [0, 1] \to [-1, 1] \times [-1, 1]$$



Разложим $a \in [0, 1]$ в четверичную систему счисления: $a = 0.a_1a_2a_3a_4....$ Если $a_1 = 0$, то идем в I квадрант. Разбиваем его на 4 части. Далее, если $a_2 = 2$, то идем в III квадрант, и так далее.

То есть, сопоставляем числу последовательность квадратов. Эта последовательность квадратов сходится к одной точке.

По теореме о вложенных отрезках, пересечение квадратов не пусто. Но это пересечение не может состоять более чем из одной точки.



Подберем N:

$$|x_0 - x_1| > 2^{-N}$$
$$2^N > \frac{1}{|x_0 - x_1|}$$

Кривая Пеано сопоставляет точке $a = 0.a_1a_2a_3...$ единственную существующую точку, содержащуюся в пересечении всех соответствующих квадратов

Почему эта кривая непрерывна?

$$|a - b| < \delta$$
$$a = 0.a_1a_2a_3... \qquad b = 0.b_1b_2b_3...$$

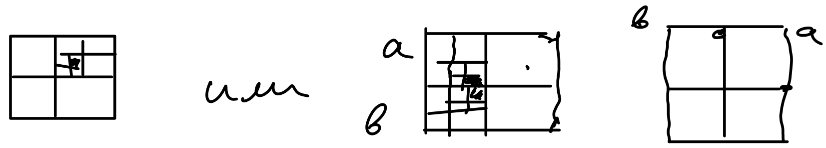
Это значит, что либо

$$a_1 = b_1, a_2 = b_2, ..., a_k = b_k$$

либо

$$a_1 = b_1, ..., a_{l-1} = b_{l-1} \text{ и } b_l = a_{l+1} = ... = a_k = 3, b_{l+1} = ... = b_k = 0$$

k достаточно большое число



Строится кривая, чтобы она была непрерывна. Такая кривая полностью заметает квадрат.

Существуют кривые, такие что их образ покрывают квадрат.

Определения

Определение 1.4. (M, ρ) – метрическое пространство. $A \subset M, x_0 \in M (x_0 \in A$ или $x_0 \notin A)$.
$B(x_0, \varepsilon) := \{x : \rho(x, x_0) < \varepsilon\}$ – шар с центром в x_0 и радиусом ε.
x_0 называется внутренней точкой для A, если $\exists \delta > 0 : B(x_0, \delta) \subset A$.
x_0 называется внешней точкой для A, если $\exists \delta > 0 : B(x_0, \delta) \cap A = \varnothing$.
В противном случае точка называется граничной. А именно, x_0 – граничная, если $\forall \delta > 0 \ B(x_0, \delta) \not\subset A$ и $B(x_0, \delta) \cap A \neq \varnothing$, то есть $\exists x_1 \in B(x_0, \delta) \cap A$ и $\exists x_2 \in B(x_0, \delta) \setminus A$.

Определение 1.5. Множество внутренних точек A называется внутренностью $A : \operatorname{Int} A$.
Множество внешних точек A называется внешностью $A : \operatorname{Ex} A$.
Множество граничных точек A называется границей $A : \partial A$ или $\operatorname{Fr} A$

Замечание. Эти множества не пересекаются. В объединении – множество M.

Определение 1.6. Замыкание $A : \operatorname{Cl} A = \operatorname{Int} A \cup \partial A$ или $\operatorname{Cl} A = M \setminus \operatorname{Ex} A$

Определение 1.7. $U \subset M$. U называется открытым, если $U = \operatorname{Int} U$. Или $\forall x_0 \in U \exists \varepsilon > 0 : B(x_0, \varepsilon) \subset U$

Теорема 1.2 (Свойства открытых множеств).

1. $\{U_i\}_{i\in I}$ – семейство открытых множеств, тогда $\bigcup_{i\in I} U_i$ открыто.
2. $U_1, U_2, ..., U_n$ – открытые множества, тогда $\bigcap_{i=1}^n U_i$ открыто.
3. $\varnothing, M$ открыто

Доказательство.

1. Возьмем $x_0 \in \bigcup_{i\in I} U_i \implies \exists i_0 : x_0 \in U_{i_0}$. Пусть U_{i_0} открыто, тогда $\exists\delta > 0 : B(x_0, \delta) \subset U_{i_0} \subset \bigcup_{i\in I} U_i$. Значит, $\bigcup_{i\in I} U_i$ открыто
2. Рассмотрим $\forall x_0 \in \bigcap_{i=1}^n U_i \implies \forall i : x_0 \in U_i$. Значит $\exists\delta_i > 0 : B(x_0, \delta_i) \subset U_i$. Возьмем $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n\} > 0$. $B(x_0, \delta) \subset B(x_0, \delta_i) \subset U_i\ \forall i$. Раз выполнено для любого i, значит $B(x_0, \delta) \subset \bigcap_{i=1}^n U_i$
3. Очевидно ■

Определение 1.8. $F \subset M$, F называется замкнутым множеством, если $M \setminus F$ открыто.

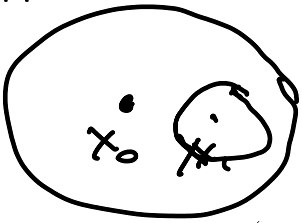
Теорема 1.3 (Свойства замкнутых множеств).

1. $\{F_i\}_{i\in I}$ – семейство замкнутых множеств, значит $\bigcap_{i\in I} F_i$ замкнуто.
2. $F_1, F_2, ..., F_n$ – замкнутые множества, значит $\bigcup_{i=1}^n F_i$ замкнуто.
3. $\varnothing, M$ замкнуты

Доказательство. Упражнение.
Hint: $U_i := M \setminus F_i$. U_i открытое $\Leftrightarrow F_i$ замкнутое. По формулам де Моргана: $M \setminus (F_1 \cup F_2) = (M \setminus F_1) \cap (M \setminus F_2)$ и т.д.. ■

Лемма 1.4. $B(x_0, \delta)$ – открытое множество.

Доказательство.



Пусть $x_1 \in B(x_0, \delta)$, $\rho(x_0, x_1) = \varepsilon < \delta$.
Если взять $r := \delta - \varepsilon$, то $B(x_1, r) \subset B(x_0, \delta)$. Почему так?
Допустим $x_2 \in B(x_1, r)$, то есть $\rho(x_1, x_2) < r = \delta - \varepsilon$. Но допустим $x_2 \notin B(x_0, \delta)$, то есть $\rho(x_0, x_2) \geqslant \delta$.
$\underbrace{\rho(x_0, x_2)}_{\geqslant \delta} \leqslant \underbrace{\rho(x_0, x_1)}_{=\varepsilon} + \underbrace{\rho(x_1, x_2)}_{<\delta-\varepsilon}$ – противоречие. ■

Теорема 1.5. M – метрическое пространство; $A \subset M$; Тогда

$$\operatorname{Int} A = \bigcup_{\substack{U_i \text{ открыто} \\ U_i \subset A}} U_i,$$

где U_i открыты и $U_i \subset A$

Доказательство. $\bigcup\limits_{\substack{U_i \text{ открыто} \\ U_i \subset A}} U_i$ открыто. $\operatorname{Int} A$ – открытое множество по лемме 1.4.
Если x_0 внутренняя точка, а $x_1 \in B(x_0, \delta) \subset A$, тогда по лемме x_1 – внутренняя точка $B(x_1, \delta - \rho(x_0, x_1)) \subset B(x_0, \delta) \subset A$, значит все точки шара являются внутренними.
$\operatorname{Int} A = \bigcup_{x_0 \in \operatorname{Int} A} B(x_0, \delta_{x_0})$, где $B(x_0, \delta_{x_0}) \subset A$, тогда $\operatorname{Int} A$ является открытым множеством. Следовательно $\operatorname{Int} A \subset \bigcup\limits_{\substack{U_i \text{ открыто} \\ U_i \subset A}} U_i$.
С другой стороны, $\operatorname{Int} A \supset \bigcup\limits_{\substack{U_i \text{ открыто} \\ U_i \subset A}} U_i$. Возьмем любое U_i, т.ч. оно открыто и $U_i \subset A$. По определению $\forall x_o \in U_i \ \exists \varepsilon > 0 \ B(x_0, \varepsilon) \subset A$, тогда $x_0 \in \operatorname{Int} A$.
Итого: $\operatorname{Int} A = \bigcup\limits_{\substack{U_i \text{ открыто} \\ U_i \subset A}} U_i$. ■

Следствие 1.5.1. Следующие определения внутренности равносильны:

1. Множество внутренних точек
2. $\bigcup\limits_{B(x_0,\delta)\subset A} B(x_0,\delta)$
3. $\operatorname{Int} A = \bigcup\limits_{\substack{U_i \text{ открыто} \\ U_i\subset A}} U_i$
4. $\operatorname{Int} A$ – максимальное открытое подмножество A.

Теорема 1.6.

$$\operatorname{Cl} A = \bigcap_{\substack{F \text{ замкнуто} \\ F\supset A}} F$$

Доказательство. Упражнение. ■

Пример 1.8. $M = \mathbb{R}; A = \mathbb{Q}$. A не открыто и не замкнуто.

$$\operatorname{Int} A = \varnothing \qquad \operatorname{Cl} A = \mathbb{R} \qquad \partial A = \mathbb{R}$$

$B(x_0,\varepsilon) = (x_0-\varepsilon; x_0+\varepsilon)$. В этом (как и в любом другом интервале) есть рациональные и иррациональные числа, тогда $x_0 \in \partial\mathbb{Q} \implies \partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$.

Предложение 1.7. (M,ρ) – метрическое пространство. $A \subset M \implies \operatorname{Cl} A$ – это:

1. $\operatorname{Int} A \cup \partial A = M \setminus \operatorname{Ex} A = M \setminus \operatorname{Int}(M \setminus A)$
2. $\bigcap\limits_{\substack{Z \text{ замкнуто} \\ Z\supset A}} Z$
3. Наименьшее замкнутое множество, которое содержит A.

Доказательство. (2) $\Leftrightarrow$ (3): наименьшее замкнутое множество, содержащее A входит в пересечение, т.е. пересечение заведомо не больше. Пересечение замкнуто как пересечение замкнутых множеств, и оно содержит A, значит оно не меньше, чем наимень-

шее.
(1) $\Leftrightarrow$ (2): $x_0 \in \operatorname{Ex} A \implies \exists\varepsilon > 0 : B(x_0, \varepsilon) \in \operatorname{Ex} A$ (B открыт). $M \setminus B(x_0, \varepsilon) \supset A$ – замкнуто. Если $x_0 \in \operatorname{Ex} A \implies x_0 \notin \bigcap\limits_{\substack{Z \text{ замкнуто} \\ Z \supset A}} Z$.

Если $x_0 \notin \operatorname{Ex} A$, допустим, что $x_0 \notin \bigcap\limits_{\substack{Z \text{ замкнуто} \\ Z \supset A}} Z$. Значит существует замкнутое $Z_i : x_0 \notin Z_i$, тогда x_0 лежит в открытом $M \setminus Z_i$. Но $\exists\varepsilon > 0 : B(x_0, \varepsilon) \in M \setminus Z \subset M \setminus A \implies x_0 \in \operatorname{Ex} A$. ■

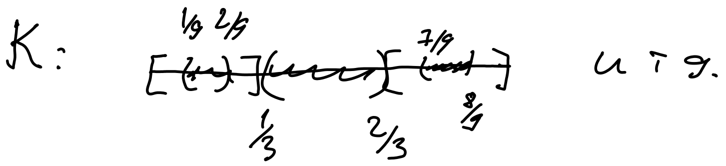
Предложение 1.8. U – открытое, Z – замкнутое.

$$U \setminus Z \text{ – открытое}$$
$$Z \setminus U \text{ – замкнутое}$$

Доказательство.
$$U \setminus Z = U \cap (M \setminus Z),$$
где U и $M \setminus Z$ открытые, значит их пересечение открыто.
$$Z \setminus U = Z \cap (M \setminus U),$$
где Z и $M \setminus U$ замкнутые, значит их пересечение замкнуто. ■

Следствие 1.8.1. $\operatorname{Cl} A$ замкнуто, $\operatorname{Cl} A = M \setminus \operatorname{Ex} A$.
∂A замкнуто, $\partial A = \operatorname{Cl} A \setminus \operatorname{Int} A$.

Пример 1.9. Канторово множество.



$$K = \left([0;1] \setminus \left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)\right) \setminus \left(\left(\frac{1}{9};\frac{2}{9}\right) \cup \left(\frac{7}{9};\frac{8}{9}\right)\right) \setminus \ldots$$

Мера $K = 0$:

$$1-\frac{1}{3}-\frac{2}{9}-\frac{4}{27}-\ldots = 1-\frac{1}{3}\left(1+\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\ldots\right) = 1-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-(2/3)} = 1-\frac{1}{3}\cdot 3 = 0$$

K несчетно. $K = \{0.a_1a_2a_3... : a_i = \{0, 2\}\}$ в троичной системе.

K равномощно множеству двоичных бесконечных последовательностей. K замкнутое множество.

Теорема 1.9. (M, ρ_1) и (M, ρ_2) – два метрических пространства на M. Пусть существует $C > 0 : \forall x, y$

$$\rho_1(x, y) \leqslant C\rho_2(x, y)$$

Тогда, если множество U открыто в (M, ρ_1), то U открыто и в (M, ρ_2).

Доказательство. U открыто в (M, ρ_1). $\forall x_0 \in U \implies \exists \varepsilon > 0 :$ $B_{\rho_1}(x_0, \varepsilon) \subset U$, то есть, если $\rho_1(x_0, x_1) < \varepsilon \implies x_1 \in U$.
Пусть $\delta = \frac{\varepsilon}{C}$ и x_1 – точка, такая что $\rho_2(x_1, x_0) < \delta$.

$$\implies \rho_1(x_1, x_0) \leqslant C\rho_2(x_1, x_0) < C\delta = \varepsilon$$
$$\implies B_{\rho_2}(x_0, \delta) \subset B_{\rho_1}(x_0, \varepsilon) \subset U$$

тогда U открыто в ρ_2. ■

Следствие 1.9.1. В $\mathbb{R}^n$ $\rho_1, \rho_2, \rho_\infty$ порождают один и тот же набор открытых множеств.

Доказательство. $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$

$$\rho_1(x, y) \overset{1}{\geqslant} \rho_2(x, y) \overset{2}{\geqslant} \rho_\infty(x, y)$$
$$\sum |x_i - y_i| \geqslant \sqrt{\sum (x_i - y_i)^2} \geqslant \max(x_i, y_i)$$

Докажем 1:

$$\left(\sum |x_i - y_i|\right)^2 \geqslant \sum (x_i - y_i)^2$$

Докажем 2:

$$\sum (x_i - y_i)^2 \geqslant \max |x_i - y_i|^2$$
$$\rho_1(x, y) \leqslant n\rho_\infty(x, y), \text{ где } n \text{ – размерность пространства}$$
$$\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \overset{?}{\leqslant} n \cdot \max(x_i - y_i)$$

У всех метрик одинаковые открытые множества. ■

Замечание. В дискретный метрике ($\rho(x, y) = 1$ при $x \neq y$) любое множество открытое.

Теорема 1.10. (M, ρ) – метрическое пространство. Срезающая метрика:

$$\rho_1(x, y) = \begin{cases} \rho(x, y) & \rho(x, y) \leqslant 1 \\ 1 & \rho(x, y) > 1 \end{cases}$$

1. ρ_1 – метрика
2. Набор открытых множеств у ρ и ρ_1 одинаков.

Доказательство. Докажем 1: ρ_1 – метрика.

1. $\rho_1(x, y) \geqslant 0$ и $\rho_1(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ – очевидно
2. $\rho_1(x, y) = \rho_1(y, x)$ – очевидно
3. $\rho_1(x, z) \overset{?}{\leqslant} \rho_1(x, y) + \rho_1(y, z)$

$$\rho_1(x, z) \leqslant \rho_1(x, y) + \rho_1(y, z)$$
$$\left[\begin{array}{l} \rho(x, z) \\ 1 \end{array}\right. \leqslant \left[\begin{array}{l} \rho(x, y) \\ 1 \end{array}\right. + \left[\begin{array}{l} \rho(y, z) \\ 1 \end{array}\right.$$

Докажем 2: U открыто в ρ_1, значит U открыто в ρ:

$$\rho_1(x, y) \leqslant 1 \cdot \rho(x, y)$$

Пусть U открыто в ρ, тогда для любого $x_0 \in U\ \exists \varepsilon > 0 : B(x_0, \varepsilon) \subset U$. Пусть $\varepsilon < 1$, тогда $B_\rho(x_0, \varepsilon) = B_{\rho_1}(x_0, \varepsilon) \subset U$, значит U открыто в ρ_1. ∎

Глава 2

Топологические пространства

2.1. Топологические пространства

Пример 2.1. В $\mathbb{R}^2$

$$\rho_p((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = (|x_1 - x_2|^p + |y_1 - y_2|^p)^{1/p} \ \forall p \geqslant 1$$
$$\rho_\infty = \max\{|x_1 - x_2|; |y_1 - y_2|\}$$
$$\rho_{\text{срезающая}}(A, B) = \begin{cases} \rho_i(A, B) & \text{если } \rho_i(A, B) \leqslant 1 \\ 1 & \text{если } \rho_i(A, B) > 1 \end{cases}$$
$$\rho'(A, B) = \frac{\rho(A, B)}{1 + \rho(A, B)}, \ \rho'(A, B) < 1$$

У всех этих метрик одинаковые открытые множества

Вывод: метрические пространства не всегда удобны.

Определение 2.1. Пусть X – множество, а Ω – система подмножеств X. ($\Omega \subset 2^X$ – множество всех подмножеств X) Пара (X, Ω) называется топологическим пространством, если

1. $\forall \{U_i\}_{i \in I} \subset \Omega \implies \bigcup_{i \in I} U_i \in \Omega$
2. $U_1, U_2 \in \Omega$, тогда $U_1 \cap U_2 \in \Omega$
3. $\varnothing, X \in \Omega$

Определение 2.2. Ω называется топологией на X. Любое $U \in \Omega$ называется открытым подмножеством X.

Определение 2.3. (X, Ω) – топологическое пространство. $F \subset X$. F назовем замкнутым, если $X \setminus F$ – открыто, т.е. $X \setminus F \in \Omega$.

Теорема 2.1 (Свойства замкнутых подмножеств).

1. $\forall \{F_i\}_{i \in I}$ - замкнутые, то $\bigcap_{i \in I} F_i$ замкнутые
2. F_1, F_2 – замкнутые, то $F_1 \cup F_2$ замкнуты
3. $\varnothing, X$ – замкнуты

Доказательство. Переход к дополнениям множеств и свойства объединения, пересечения и разности множеств. ■

Таким образом топологическое пространство можно задавать при помощи замкнутых множеств.

Пример 2.2. Метрическая топология: (X, ρ) – метрическое пространство, Ω – множество всех открытых подмножеств. U называет открытым, если $\forall x_0 \in U \; \exists \varepsilon > 0 : B(x_0, \varepsilon) := \{x \in X : \rho(x, x_0) < \varepsilon\} \subset U$.

Пример 2.3. Дискретная топология: X – множество, $\Omega = 2^X$ (любое подмножество открыто).

Пример 2.4. Антидискретная топология: X – множество, $\Omega = \{\varnothing, X\}$.

Замечание. 2 пример – частный случай 1-ого.

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$$

$$B(x_0, 1/2) = \{x_0\} \text{ – открыто}$$

А если любая точка открыта, значит любое подмножество открыто

Определение 2.4. Топология называется метризуемой, если существует метрика ρ, порождающая данную топологию.

Антидискретная топология не метризуема.

$$a, b \in X.\ r := \rho(a, b).\ b \notin B(a, r/2), a \in B(a, r/2)$$
$$B(a, r/2) \text{ – открыто}$$

Вопрос: (X, Ω) – топологическое пространство. Выяснить является ли оно метризуемым.

Пример 2.5. Топология конечных дополнений (Зариского). X – бесконечное множество. F называется замкнутым, если F конечное или $F = X$. $\Omega := \{X \setminus F : F \text{ конечно или } F = X\}$

Теорема 2.2 (Гильберта о базисе)**.** Любой идеал $I \subset F[x_1, x_2, ..., x_n]$ порождается конечным набором многочленов.

Пример 2.6. Развитие предыдущего примера. F – поле (в алгебраическом смысле). $F^n = F \times F \times ... \times F$ – координатное пространство. $f_1, f_2, ..., f_k$ – некоторые многочлены от n переменных с коэффициентами в поле F. Тогда множество совместных корней этих многочленов назовем замкнутым множеством:

$$G = \{(x_1, x_2, ..., x_n) : \forall i = 1...k\ f_i(x_1, ..., x_n) = 0\}$$

Это семейство замкнутых множеств порождает топологию.

$$I = \{f_1g_1 + f_2g_2 + ... + f_kg_k : g_i \text{ – любые многочлены от } n \text{ переменных}\}$$

идеал, порожденный $f_1, ..., f_n$

По теореме 2.2 возникает соответствие $G \leftrightarrow I$. Это биекция, только если F алгебраически замкнуто (по теореме Гильберта о нулях).

Зачем это надо?

$$x^n + y^n - z^n = f(x, y, z)$$
$$n > 2, F = \mathbb{Q}$$

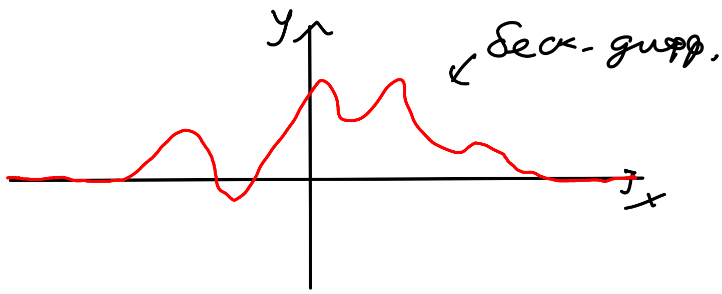
Существуют ли корни этого многочлена? А это великая теорема Ферма. $x^n + y^n - z^n = 0$ (Решения в $\mathbb{Z}$ существуют, н.р. $x = y = z = 0$)

Пример 2.7. Стрелка. $X = \mathbb{R}$ (или $\mathbb{R}_+$).

$$\Omega = \{(a, +\infty) : a \in X\} \cup \{\varnothing\} \cup \{X\}$$

Это топология.

Пример 2.8. D – множество бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем, т.е. $f(x) = 0$ если $|x| > M$. ($\forall f \in D\ \exists M > 0$: если $|x| > M$, то $f(x) = 0$).



$$f_n(x) \rightrightarrows f(x) \text{ если } \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\ \forall x$$

Пусть $f_n(x)$ – последовательность функций в D. $f_n(x) \xrightarrow{D} f(x)$, если

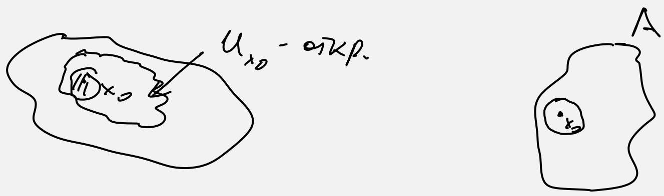
1. $\exists M : \forall |x| > M\ \forall n\ f_n(x) = 0$
2. $f_n(x) \rightrightarrows f(x); f_n'(x) \rightrightarrows f'(x)$ и т.д.

$F \subset D$ называется замкнутым, если из $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset F$ и $f_n(x) \to f(x)$, следует $f(x) \in F$. Это порождает топологию на D.

2.2. Расположение точки относительно множества

Определение 2.5. (X, Ω) – топологическое пространство. $x_0 \in X$. Окрестностью точки x_0 называется любое открытое подмножество $U_{x_0} : x_0 \in U_{x_0}$.

Определение 2.6. $A \subset X$ – подмножество. $x_0 \in X$.
x_0 – внутренняя точка для A, если $\exists$ окрестность $U_{x_0} \subset A$
x_0 – внешняя точка A, если есть окрестность $U_{x_0} \cap A = \varnothing$ (т.е. $U_{x_0} \subset X \setminus A$)
x_0 называется граничной, если $\forall U_{x_0}$ неверно $U_{x_0} \subset A$ и неверно $U_{x_0} \subset X \setminus A$.



Определение 2.7. $\operatorname{Int} A = \{x_0 \in X : x_0$ – внутренняя для $A\}$
$\operatorname{Ex} A = \{x_0 \in X : x_0$ – внешняя для $A\}$
$\partial A = \{x_0 \in X : x_0$ – граничная для $A\}$
$\operatorname{Cl} A = \operatorname{Int} A \cup \partial A$

Теорема 2.3.

1. $\operatorname{Int} A = \bigcup\limits_{\substack{U_i \in \Omega \\ U_i \subset A}} U_i$

2. $\operatorname{Ex} A = \bigcup\limits_{\substack{U_i \in \Omega \\ U_i \cap A = \varnothing}} U_i$

3. $\operatorname{Cl} A = \bigcap\limits_{\substack{Z_i \text{ – замкнуто} \\ A \subset Z_i}} Z_i$

Замечание. Часто именно это дается в качестве определения $\operatorname{Int} A$, $\operatorname{Ex} A$, $\operatorname{Cl} A$, $\partial A = \operatorname{Cl} A \setminus \operatorname{Int} A$

Доказательство. Докажем 1: заметим, что $\bigcup\limits_{\substack{U_i \in \Omega \\ U_i \subset A}} U_i \supset \operatorname{Int} A$.
Потому что $\operatorname{Int} A$ – множество внутренних точек, а каждая такая точка входит вместе с окрестностью. Значит все окрестности включаются в левую часть.

Почему $\bigcup\limits_{\substack{U_i\in\Omega\\ U_i\subset A}} U_i \subset \operatorname{Int} A$?
Возьмем x_0 из левой части, тогда $x_0 \in U_i \subset A$, значит U_i нужная окрестность, чтобы считать x_0 внутренней.
Докажем 2: аналогично 1.
Докажем 3: следует из 1 потому что $U_i := X \setminus F_i$.

$$\bigcap_{\substack{F_i\text{ – замкнуто}\\ A\subset F_i}} F_i = \bigcap_{\substack{U_i\text{ – открыто}\\ U_i\cap A=\varnothing\\ U_i\subset X\setminus A}} (X\setminus U_i) = X \setminus \bigcup_{\substack{U_i\in\Omega\\ U_i\subset X\setminus A}} U_i =$$

$$X \setminus \operatorname{Ex} A = \operatorname{Cl} A$$

■

2.3. Базы и предбазы

Определение 2.8. (X,Ω) – топологическое пространство. $\mathfrak{B} \subset 2^X$ (Точнее $\mathfrak{B} \subset \Omega$). $\mathfrak{B}$ называется базой топологии Ω, если

$$\forall U \in \Omega \quad U = \bigcup_{i\in I} B_i\ (\exists I\ \exists B_i) : B_i \in \mathfrak{B}.$$

Определение 2.9. $\mathfrak{B}$ называется базой некоторой топологии, если существует $\Omega : \mathfrak{B}$ база топологии.

Замечание. Такая Ω единственна:

$$\Omega = \left\{ \bigcup_{i\in I} B_i : B_i \in \mathfrak{B} \right\}.$$

Пример 2.9. В $\mathbb{R}^n$ $\mathfrak{B} := \{B(x,\varepsilon) : x \in R^n; \varepsilon > 0\}$. $\mathbb{R}^n$ можно заменить на любое метрическое пространство.

Пример 2.10. $X = \mathbb{N}$. $\mathfrak{B}$ – множество арифметических прогрессий, тогда $\mathfrak{B}$ база некоторой топологии. (обоснование позже)

Пример 2.11. (X,Ω) – дискретное пространство. $\mathfrak{B}$ все одноточечные множества. $\mathfrak{B}$ – база Ω.

Пример 2.12. $C(\mathbb{R}^n)$ – множество непрерывных функций из $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. (Это обобщается)

$K_1, ..., K_n$ – замкнутые и ограниченные подмножества $\mathbb{R}^n$. $U_1, ..., U_n$ – открытые множества в $\mathbb{R}$.

$$V_{K_1,...,K_n}^{U_1,...,U_n} := \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \text{ – непрерывно} : f(K_i) \subset U_i, i = 1, ..., n\}$$

Множество таких $V_{K_1,...,K_n}^{U_1,...,U_n}$ – база некоторой топологии. Она называется компактно-открытая топология.

Теорема 2.4. (X, Ω) – топологическое пространство, $\mathfrak{B} \subset \Omega$, то $\mathfrak{B}$ – база $\Omega \Leftrightarrow \forall U \in \Omega\ \forall x_0 \in U\ \exists B \in \mathfrak{B} : x_0 \in B \subset U$.

Доказательство. $U = \bigcup_{x_0 \in U} B_{x_0}$ ■

Теорема 2.5. X – множество, $\mathfrak{B} \subset 2^X$. $\mathfrak{B}$ является базой некоторой топологии

$$\Leftrightarrow \forall B_1, B_2 \in \mathfrak{B}\ \forall x_0 \in B_1 \cap B_2\ \exists B_3 \in \mathfrak{B} : x_0 \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$$

и $\bigcup_{B \in \mathfrak{B}} B = X$.

Замечание. Частный случай: Если $B_1 \cap B_2 \in \mathfrak{B}$, то $\mathfrak{B}$ – база топологии.

Доказательство. Прямое доказательство: по предыдущей теореме. ($U := B_1 \cap B_2$)
Обратное доказательство: $\Omega := \left\{\bigcup_{i \in I} B_i : B_i \in \mathfrak{B}\right\}$. Ω – топология?

1. $U_i = \bigcup_{j \in J_i} B_{ij}$, $(B_{ij} \in \mathfrak{B})$, тогда

$$\bigcup_{i \in I} U_i = \bigcup_{i \in I} \bigcup_{j \in J} B_{ij} \in \Omega$$

2. $U_1 = \bigcup_{i \in I} B_i$, $U_2 = \bigcup_{j \in J} C_j$, $B_i, C_j \in \mathfrak{B}$, $B_i \cap C_j = \bigcup_{x_0 \in B_i \cap C_j} B_3(x_0)$

Почему $U_1 \cap U_2 \in \Omega$?

$$U_1 \cap U_2 = \left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) \cap \left(\bigcup_{j\in J} C_j\right) = \bigcup_{(i,j)\in I\times J} (B_i \cap C_j) = \bigcup_{(i,j)} \bigcup_{x_0\in B_i\cap C_j} B_3(x_0; B_i \cap C_j) \in \Omega$$

и каждое $B_3(x_0; B_i \cap C_j) \in \mathfrak{B}$

3. $\varnothing = \bigcup_{i\in\varnothing} B_i$, $X = \bigcup_{B\in\mathfrak{B}} B$

■

Определение 2.10. (X, Ω) – топологическое пространство. $\mathfrak{A}$ называется предбазой Ω, если $\mathfrak{B} := \{\bigcap_{i=1}^n A_i : A_i \in \mathfrak{A}\}$ – база Ω. То есть предбаза – любой набор подмножеств, объединение которых X.

Определение 2.11. (X, Ω) – топологическое пространство. $\forall x_0 \in X$ задано $\mathfrak{B}_{x_0}$ – множество некоторых окрестностей x_0. $\mathfrak{B}_{x_0} \in \Omega$. Говорим, что $\{\mathfrak{B}_{x_0}\}_{x_0\in X}$ является базой окрестностей точек Ω, если $\forall U \in \Omega\ \forall x_0 \in X : x_0 \in U\ \exists B(x_0, U) \in \mathfrak{B}_{x_0} : x_0 \in B(x_0, U) \subset U$.

Замечание. $\bigcup_{x_0\in X} \mathfrak{B}_{x_0}$ – база Ω.

$$U = \bigcup_{x_0\in U} B(x_0, U)$$

Пример 2.13. (M, ρ) – метрическое пространство, тогда $\mathfrak{B}_{x_0} = \{B(x_0, \varepsilon) : \varepsilon > 0\}$.

Теорема 2.6. X – множество. $\forall x_0 \in X\ \exists \mathfrak{B}_{x_0} \subset 2^X$: $(\mathfrak{B}_{x_0} \neq \varnothing)$

1. $\forall B \in \mathfrak{B}_{x_0}\ x_0 \in B$
2. $\forall B_1, B_2 \in \mathfrak{B}_{x_0} \implies \exists B_3 \in \mathfrak{B}_{x_0} : B_3 \in B_1 \cap B_2$
3. $\forall B_1 \in \mathfrak{B}_{x_0}, \forall x_1 \in B_1\ \exists B_2 \in \mathfrak{B}_{x_1} : x_1 \in B_2 \subset B_1$

Если все это выполнено, то $\bigcup_{x_0 \in X} \mathfrak{B}_{x_0}$ – база некоторой топологии.

Доказательство. Смотри предыдущую теорему. ∎

Глава 3

Непрерывные отображения

3.1. Непрерывные отображения

Определение 3.1. $(X, \rho), (Y, d)$ – метрические пространства. $f : X \to Y$ – отображение. Говорим, что f непрерывно в $x_0 \in X$, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 :$ если $\rho(x_1, x_0) < \delta \implies d(f(x_0), f(x_1)) < \varepsilon$.

Определение 3.2. f непрерывно если f непрерывно в любой точке.

Замечание. $f : X \to Y$ непрерывно в $x_0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : f(B_X(x_0, \delta)) \subset B_Y(f(x_0), \varepsilon)$.

Определение 3.3. (X, Ω_X) и (Y, Ω_Y) – топологические пространства. $f : X \to Y$ – отображение. f называется непрерывным в точке $x_0 \in X$, если $\forall U \in \Omega_Y : f(x_0) \in U \ \exists V \in \Omega_X : x_0 \in V : f(V) \subset U$

Теорема 3.1. (X, ρ) и (Y, d) метрические пространства. $f : X \to Y$ отображение. f непрерывно $\Leftrightarrow \forall U \subset Y$, U открыто, $f^{-1}(U)$ открыто в X.

Доказательство. Прямое доказательство: f непрерывное, т.е. $\forall x_0\ \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta(\varepsilon, x_0) > 0 : f(B_X(x_0, \delta)) \subset B_Y(f(x_0), \varepsilon)$. $\forall U \subset Y$ – открыто, $V := f^{-1}(U)$. Хотим доказать, что V открыто. $\forall x_0 \in V \implies f(x_0) \in U$. U – отрытое, значит $\exists\varepsilon > 0 : B(f(x_0), \varepsilon) \subset U$. Тогда $\exists\delta > 0 : f(B_X(x_0, \delta)) \subset B_Y(f(x_0), \varepsilon) \subset U$. Если $f(B_X(x_0, \delta)) \subset U \implies B_X(x_0, \delta) \subset V$.
Обратное: $\forall x_0 \in X, \forall\varepsilon > 0$. $U := B(f(x_0); \varepsilon)$ открытое. Значит $f^{-1}(U)$ открыт, $x_0 \in f^{-1}(U)$, т.к. $f(x_0) \in U$. Тогда $\exists\delta > 0 : B(x_0, \delta) \subset f^{-1}(U)$. $f(B(x_0), \delta) \subset U := B(f(x_0), \varepsilon)$. ■

Определение 3.4. (X, Ω_X) и (Y, Ω_Y) – топологические пространства. $f : X \to Y$ – отображение. f называется непрерывным, если $\forall U \in \Omega_Y\ f^{-1}(U) \in \Omega_X$.

Замечание. X, Y – множества, $A, B \subset X; C, D \subset Y$.

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$$
$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B) \text{ – неверно!}$$
$$f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$$
$$f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$$

Почему неверно второе:

$$f(A \cap B) = \{f(x_0) : x_0 \in A \cap B\}$$
$$f(A) \cap f(B) = \{f(x_0) : x_0 \in A\} \cap \{f(y_0) : y_0 \in B\} = \{f(x_0) = f(y_0) : x_0 \in A, y_0 \in B\}$$

Почему неверны остальные – упражнение.

Определение 3.5. $f : X \to Y$ называется

1. непрерывным, если прообраз открытого множества открыт
2. непрерывным, если прообраз замкнутого замкнут
3. открытым, если образ открытого открыт
4. замкнутым, если образ замкнутого замкнут

$F \subset X$ замкнутое, $U := Y \setminus F$ открытое. $f^{-1}(Y \setminus U) = X \setminus f^{-1}(U)$ замкнуто, если U открыто. $f^{-1}(U)$ и $f^{-1}(Y \setminus U)$ не пересекаются и в объединении дают X.

Пример 3.1. $X = Y = \mathbb{R}$, на X дискретная топология, на Y стандартная, $f : X \to Y$, $f(x) = x$ непрерывно, но не открытое и не замкнутое.

U подмножество, не открытое в стандартной топологии, но открытое в дискретной.

Пример 3.2. Разница между открытым и замкнутым: рассмотрим отображения включения: $i : U \hookrightarrow X, i(x) = x$. Если

- U открытое множество, тогда i открытое
- U не открытое в X, тогда i не открытое отображение
- U замкнутое множество в X, тогда i замкнутое

3.2. Гомеоморфизмы

Определение 3.6. $f : X \to Y$ называется гомеоморфизмом, если

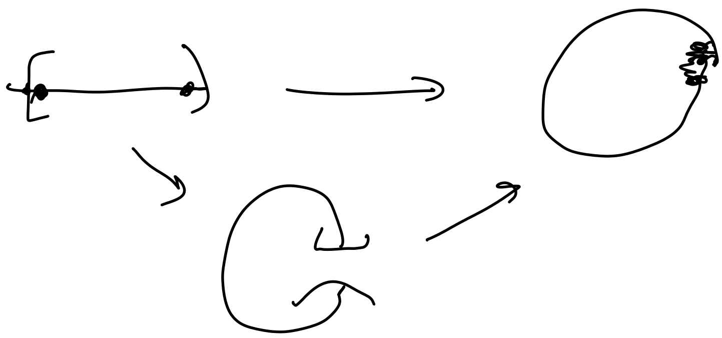
1. f непрерывно
2. f биективно
3. f^{-1} непрерывно

Пример 3.3. $X = Y = \mathbb{R}$, на X дискретная топология, на Y стандартная.

$f : X \to Y; f(x) = x$, f непрерывно и биективно, но не f^{-1} не непрерывно, не гомеоморфизм!

Пример 3.4. $X = [0, 2\pi)$, $Y = S' = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$

$f : X \to Y; f(t) = e^{it}$ – биекция и непрерывное отображение, но обратное не непрерывно:



Теорема 3.2.

1. Гомеоморфность, т.е. существование какого-то гомеоморфизма, есть эквивалентность
2. $f : X \to Y$ – гомеоморфизм, тогда f индуцирует биекцию между Ω_X и Ω_Y (и между замкнутыми множествами X и Y тоже)

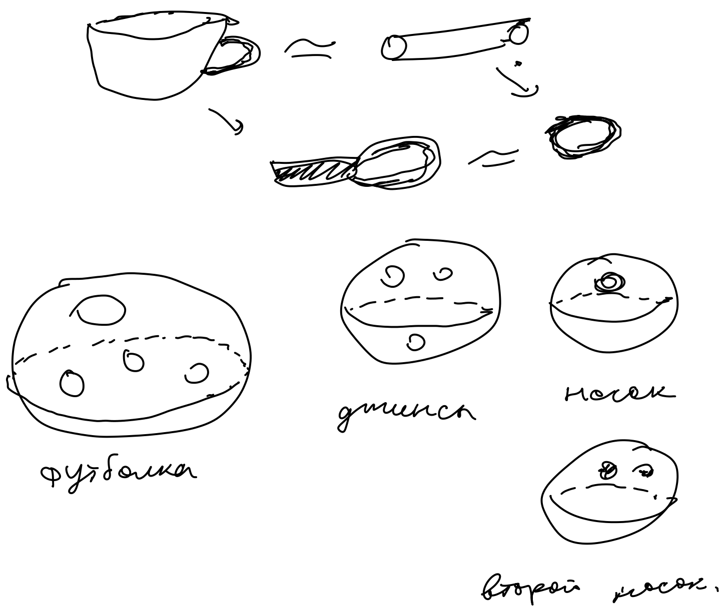
Доказательство. Докажем 1: будем означать гомеоморфность символом эквивалентности: $\sim$. Пусть $X \sim X, id : x \mapsto x$. $id(X) = X$. Пусть $X \sim Y \implies \exists f : X \to Y$ – гомеоморфизм, тогда $f^{-1} : Y \to X$ – гомеоморфизм. Пусть $X \sim Y, Y \sim Z \implies X \sim Z$. $f : X \to Y, g : Y \to Z, g \circ f : X \to Z$ – гомеоморфизм.
Доказательство 2 очевидно ■

Пример 3.5. $(0,1) \overset{f}{\sim} (a,b) \overset{g}{\sim} \mathbb{R} \overset{\text{упр}}{\sim} (0,+\infty)$

$$g : \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}; g(x) = \operatorname{tg} x$$
$$f(0,1) \to (a,b); f(x) = (b-a)x + a$$

Но $(0,1) \nsim [0,1]$. Почему? Нужно искать инварианты.

Пример 3.6. Шуточные примеры:



3.3. Инициальная топология

Прообраз топологии

$f : X \to Y$ отображение, (Y, Ω_Y) топологическое пространство. X пока нет. Цель: ввести топологию на X, т.ч. f непрерывно, топология на X слабейшая из возможных.

Определение 3.7. (X, Ω_1) и (X, Ω_2) топологические пространства. Говорим, что Ω_1 сильнее Ω_2, если $\Omega_2 \subset \Omega_1$.

Определение 3.8. Самая слабая топология на X, т.ч. $f : X \to Y$ непрерывно, называется прообразом топологии Ω_Y

Теорема 3.3. Прообраз топологии существует.

Доказательство. $U \in \Omega_Y \implies f^{-1}(U)$ должен быть открыт в X. Прообраз $\Omega_X := \{f^{-1}(U) : U \in \Omega_Y\}$.

$$f^{-1}(U_1 \cap U_2) = f^{-1}(U_1) \cap f^{-1}(U_2)$$

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} U_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(U_i)$$

$$f^{-1}(\varnothing) = \varnothing, f^{-1}(Y) = X.$$

■

Важный частный случай: (X, Ω_X) – топологическое пространство. $Y \subset X$. $i : Y \hookrightarrow X$. Тогда Y наделяется топологией.

Определение 3.9. Такая топология на Y называется индуцированной.

$V \subset Y$. V открыто в Y если $\exists U$ – открытое в X: $i^{-1}(U) = V = U \cap Y$.

Определение 3.10. Переформулируем: $V \subset Y$ называется открытым, если $\exists U$ – открытое в $X : U \cap Y = V$.

Замечание. V открыто в Y, но это не означает, что V открыто в X.

$Y = [0, 1], X = \mathbb{R}$ со стандартной топологией. $U = (-1, 0.5)$ открыто в $\mathbb{R} = X$. $U \cap [0, 1] = [0, 0.5)$ открыто в Y, но не открыто в X.

Инициальная топология

Определение 3.11. X – множество. (Y_i, Ω_i) – топологические пространства. $f_i : X \to Y_i$. Хотим завести на X топологию, такую что все f_i непрерывные, а топология на X слабейшая из возможных. Такая топология называется инициальной.

Теорема 3.4. Инициальная топология существует и единственна.

Доказательство. $f_i^{-1}(U_i)$ должны быть открытыми, $U_i \subset Y_i$ открытые. Все такие множества – предбаза. По критерию базы:

$$\mathfrak{B} = \{f_{i_1}^{-1}(U_{i_1}) \cap ... \cap f_{i_k}^{-1}(U_{i_k}) : U_{i_j} \in \Omega_j\}$$

является базой некоторой топологии. ■

Пример 3.7. (X, Ω_X) и (Y, Ω_Y) – топологические пространства. Как ввести топологию на $X \times Y$? Берем проекции на X и Y и инициальную топологию. Как ее описать? Далее.

Бесконечное произведение. Ликбез

$\{X_i\}_{i \in I}$ – семейство множеств. Пусть (X_i, Ω_i) – топологические пространства.

$$\prod_{i \in I} X_i = \{f : I \to \bigcup_{i \in I} X_i : f(j) \in X_j\}$$

Пусть $\forall i \ X_i \neq \varnothing$. Почему $\prod_{i \in I} X_i \neq \varnothing$? Это равносильно аксиоме выбора.

Аксиома 3.5 (выбора)**.** $\{X_i\}_{i \in I}$ – семейство непустых множеств. Тогда $\exists Y$ состоящее из элементов X_i (по одному элементу из каждого множества)

Лемма 3.6 (Цорна)**.** X – непустое частично упорядоченное множество (введено отношение порядка, которое рефлексивно, антисимметрично и транзитивно). $\forall x_1 \leqslant x_2 \leqslant ... \ \exists x_* : x_* > x_i \forall i$, тогда в множестве X существует максимальный элемент

Теорема 3.7 (Цермело)**.** Любое непустое множество можно вполне упорядочить (ввести такой порядок, что любое подмножество будет иметь наименьший элемент).

Стандартное $\leqslant$ на $\mathbb{R}$ – неполный порядок, например $(0, 1)$ не имеет наименьшего.

Преположение 3.8. Аксиома выбора $\Leftrightarrow$ лемме Цорна $\Leftrightarrow$ теореме Цермело.

Теорема 3.9. У любого векторного пространства есть базис.

Доказательство. A – множество всех ЛНЗ наборов. $(A; \subset)$ – частично упорядоченное множество.

$$x_1 \subset x_2 \subset \ldots \implies x_* = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$$

по лемме Цорна существует максимальный элемент. Он и является базисом. ∎

Декартово произведение

$$\begin{tikzcd} X \times Y \arrow[r, "pr_X"] \arrow[d, "pr_Y"] & X \\ Y & \end{tikzcd}$$

Есть $X \times Y$, $p_X(x, y) = x$, $p_Y(x, y) = y$

$(X, \Omega_X), (Y, \Omega_Y)$ – топологические пространства. На $X \times Y$ введем топологию (инициальную). $U \subset X$ открыто $p_X^{-1}(U) = U \times Y$. $V \subset Y$

открыто $p_Y^{-1}(V) = X \times V$.

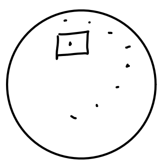
$$(U_1 \times Y) \cap (U_2 \times Y) = (U_1 \cap U_2) \times Y$$
$$(U \times Y) \cap (X \times V) = U \times V$$

Таким образом $\{U \times V : U \in \Omega_X; V \in \Omega_Y\}$ – база топологии $X \times Y$

Иначе: множество $W \subset X \times Y$ является открытым, тогда и только тогда, когда $\forall (x_0, y_0) \in W\ \exists U_{x_0} \in \Omega_X, V_{y_0} \in \Omega_Y : x_0 \in U_{x_0}, y_0 \in V_{y_0}, U_{x_0} \times V_{y_0} \subset W$

Пример 3.8. Это совпадает с топологией на $\mathbb{R}^2$:

Пример 3.9.



Круг – это (беск.) объединение прямоугольников.

$\prod_{i \in I} X_i$ хотим снабдить топологией. $U \subset X_i$ – открыто, тогда $U \times \prod_{j \neq i} X_j$ – открытое множество в инициальной топологии. Такие множества предбаза.

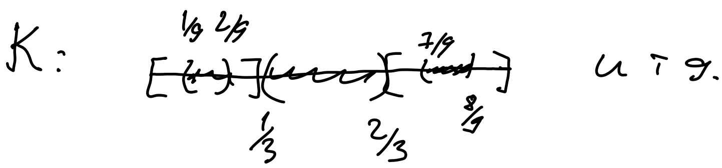
$$U_1 \times U_2 \times ... \times U_k \times \prod_{j \neq 1, \ldots, k} X_j$$

– база топологии.

НО $U_i \subset X_i$ открыто, $\prod U_i$ не является открытым в $\prod X_i$!

Свойство 3.1. Если на X_i дискретная топология, то $\prod_{i \in I} X_i$ не является дискретным пространством, если I бесконечно

В частности счетное произведение $\{0,1\} \times \{0,1\} \times ... = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ не дискретно. Такое множество гомеоморфно K – канторову множеству.



Свойство 3.2. 1. $l(K) = 0$. $l(K) = 1 - (1/3 + 2/9 + 4/27 + ...)$

2. K замкнуто
3. K состоит из чисел без 1 в троичной записи. $1/3 = 0.1 = 0.022222...$ в троичной записи
4. $K \simeq \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ – гомеоморфизм. $K = \{0.a_1a_2a_3... : a_i \in \{0,2\}\}$ (не очень простое упражнение)
5. K несчетно
6. $K \simeq K \times K$, по пункту 4: $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \times \{0,1\}^{\mathbb{N}} = \{0,1\}^{\mathbb{N}^2}$, а $\mathbb{N}^2 \sim \mathbb{N}$, поэтому $\{0,1\}^{\mathbb{N}^2} \simeq \{0,1\}^{\mathbb{N}}$

3.4. Финальная топология

(X_i, Ω_i) – топологические пространства $(i \in I)$. $f_i : X_i \to Y$, Y – множество. Хотим задать топологию на Y так, чтобы f_i было непрерывным и эта топология была сильнейшей из возможных.

Определение 3.12. Такая топология называется финальной.

Теорема 3.10. Финальная топология существует и единственна.

Доказательство. $U \subset Y$ открыто, если $\forall i\ f_i^{-1}(U)$ открыто в X_i (другие множества все равно не можем назвать открытыми). Такие U образуют топологию:

- $\varnothing$ и Y – открытые
- $U_1, ..., U_k$ – открытые, значит $U_1 \cap ... \cap U_k$ открыто?

  $$\forall i\ f_i^{-1}(U_1 \cap ... \cap U_k) = f_i^{-1}(U_1) \cap ... \cap f_i^{-1}(U_k)$$

  каждое $f_i^{-1}(U_k)$ открыто в X_i, их пересечение тоже открыто в X_i
- $$f_i^{-1}\left(\bigcup_{j \in J} U_j\right) = \bigcup_{j \in J} f_i^{-1}(U_j)$$

  открыто в X как объединение открытых.

■

Пример 3.10. $(X_1, \Omega_1), (X_2, \Omega_2)$ – непересекающиеся топологические пространства. $Y = X_1 \sqcup X_2$. Хотим ввести топологию на Y. Введем финальную топологию:

$$X_1 \overset{i_1}{\hookrightarrow} X_1 \cup X_2 \overset{i_2}{\hookleftarrow} X_2$$
$$U \subset X_1 \cup X_2$$
$$U_1 = U \cap X_1 \quad U_2 = U \cap X_2$$
$$U_1 = i_1^{-1}(U) \quad U_2 = i_2^{-1}(U)$$

U_1 и U_2 открыты $\Leftrightarrow$ U открыто. Аналогично вводим топологию на $\bigsqcup X_i$, U называем открытым, если $U \cap X_i$ открыто в X_i $\forall i$.

Замечание. $X_1 = (0,1), X_2 = [1,2)$. Топология на $X_1 \sqcup X_2$ не совпадает с топологией на $(0,2)$!

$U_1 = \varnothing, U_2 = [1, 1.5]$ открыты в X_1 и X_2 соответственно. $[1, 1.5)$ открыто в $X_1 \sqcup X_2$.

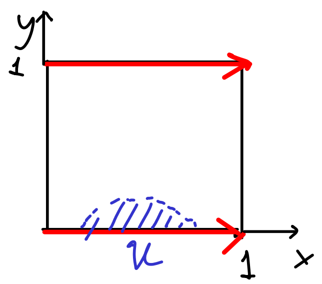
Или $\forall X = \bigcup_{x_i \in X} \{x_i\}$. На каждом $\{x_i\}$ дискретная топология, тогда $\bigsqcup \{x_i\}$ имеет дискретную топологию.

Пример 3.11. (X, Ω) – топологическое пространство, $\sim$ – отношения эквивалентности на X. Пусть $\exists p : X \to X/\sim$. На $X/\sim$ естественным образом вводится финальная топология. $U \subset X/\sim$ открыто $\Leftrightarrow p^{-1}(U)$ открыто в X.

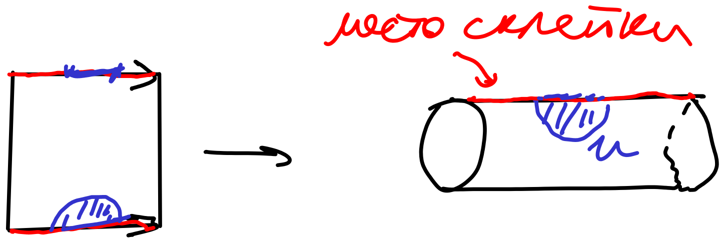
Топология фактор-множества

(X, Ω) - топологическое пространство, $\sim$ - отношение эквивалентности на X. $p : X \to X/{\sim}$. На $X/{\sim}$ вводится финальная топология. $\tilde{U} \subset X/{\sim}$ называется открытым, если $p^{-1}(\tilde{U})$ открыто в X.

Пример 3.12. Склеивание. Хотим отождествлять некоторые пары точек.

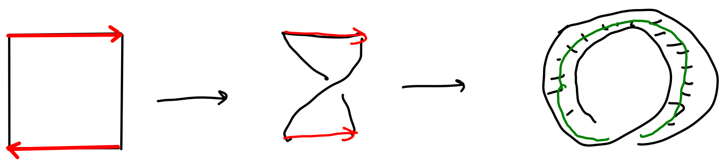


Склеим горизонтальные стороны квадрата как нарисовано. $(x,0) \sim (x,1)$, а остальные эквиваленты только себе.



U открыто в квадрате, U не открыто в цилиндре, т.к. $p^{-1}(U)$ не открыто.

Лента Мёбиуса:



Свойства ленты Мёбиуса:

- только одна сторона
- только один край
- средняя линия не делит на части
- на ленте Мёбиуса можно нарисовать полный граф на шести вершинах без пересечения ребер (упражнение) [На плоскости только K_4]
- на ленте Мёбиуса любая карта красится в 6 цветов (довольно просто) [Для плоскости 4 цвета, очень сложно]

Теорема 3.11 (Жордана). Замкнутая непересекающаяся кривая на плоскости делит плоскость ровно на две компоненты связанности. Ровно одна из них ограниченна.

Теорема 3.12 (Эйлера). Для плоскости:

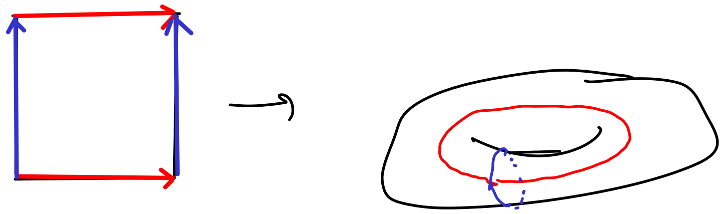
$$(\text{количество вершин}) + (\text{количество граней}) = \\ = (\text{количество ребер}) + 2$$

(для связного графа с непересекающимися ребрами)
Для ленты Мёбиуса:

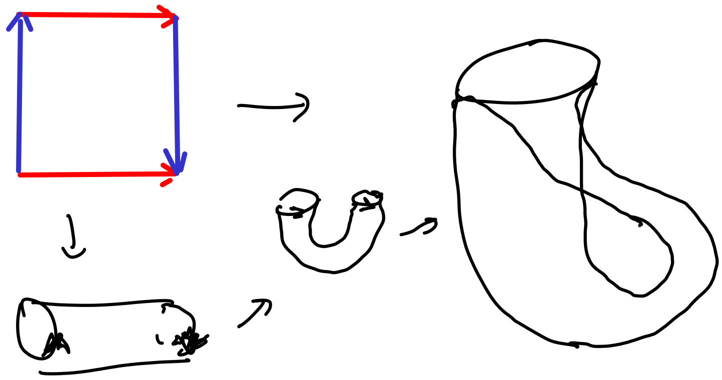
$$\text{В} + \Gamma = \text{Р} + \chi$$

где $\chi = 1$, если есть цикл, опоясывающий ленту, или 2.

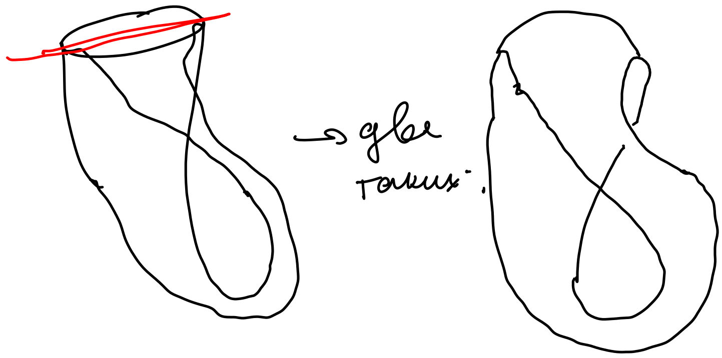
Тор:



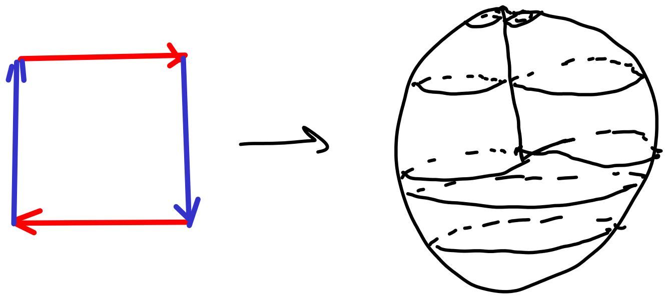
Бутылка Клейна:



Бутылка Клейна – это 2 склеенные ленты Мёбиуса:

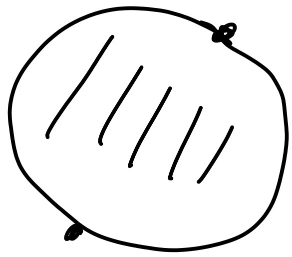


1. Проективная плоскость

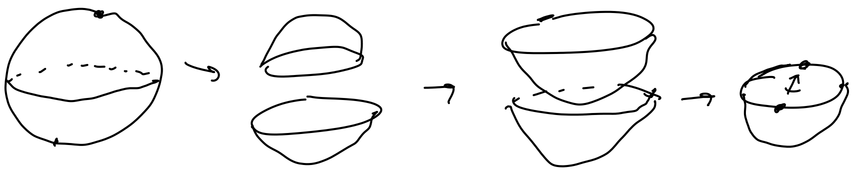


Другие интерпретации проективной плоскости ($\mathbb{R}P^2$):

2. $x \sim -x$ (x – крайняя точка круга)



3. $S^2/x \sim -x$



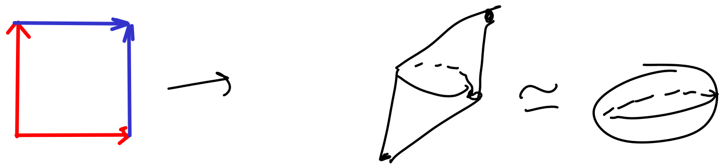
4. $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}/(x,y,z) \sim (\lambda x; \lambda y; \lambda z)$

5. Множество прямых в $\mathbb{R}^3$, проходящих через $(0,0,0)$. Метрика - угол между прямыми

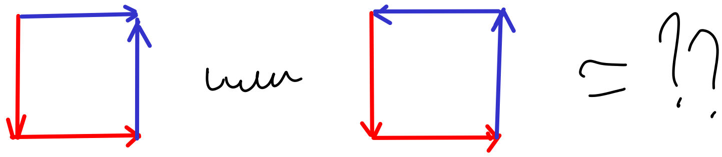
6. $\{[x:y:z] : x,y,z \in \mathbb{R},\ x^2+y^2+z^2 \neq 0\}$ – однородные координаты: $[x:y:z] = [\lambda x : \lambda y : \lambda z]$. $Ax+By+Cz=0$ – уравнение любой прямой на проективной плоскости

7. $\mathbb{R}P^2 = \mathbb{R}^2 \cup \mathbb{R}^1 \cup \mathbb{R}^0$

Сфера:



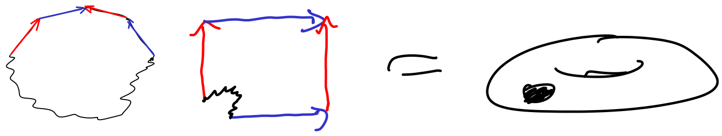
Упражнение: что будет, если склеить по-другому?



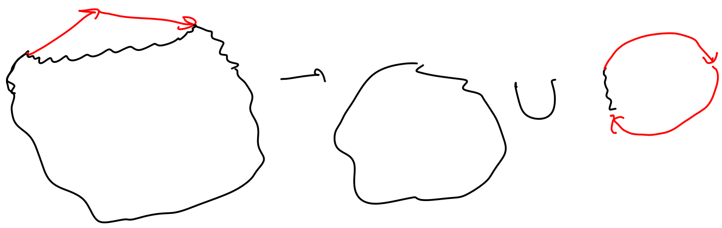
Еще: Если ленту повернуть на 2 полуоборота и склеить, то получится лента, гомеоморфная обычной. (в $\mathbb{R}^2$ не очевидно, в $\mathbb{R}^4$ переводится – упражнение)

Поверхности:

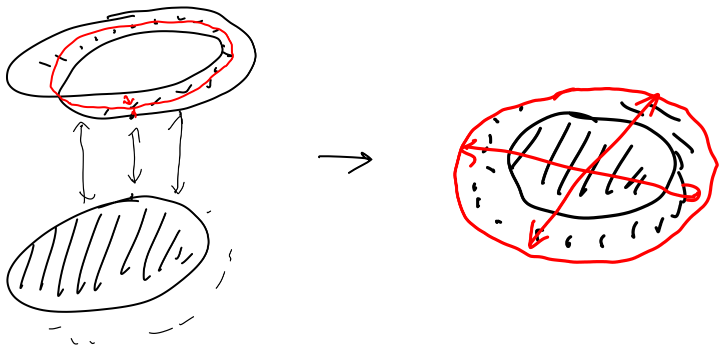
Поверхность можно задать, если есть многоугольник. Приклеивание ручки (тора):



Приклеивание пленки (ленты Мёбиуса):



Почему проективная плоскость с дыркой это лента Мёбиуса? Край ленты Мёбиуса – окружность.

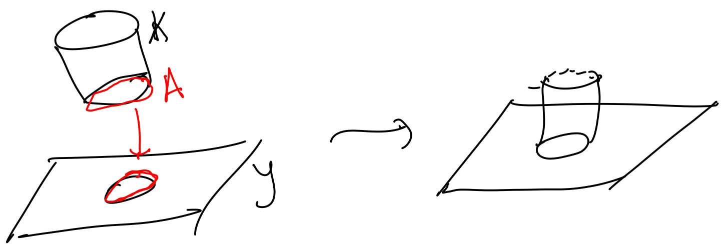


Теорема 3.13. (почти) Любая двумерная поверхность – либо сфера с k ручками, либо проективная плоскость с k ручками, либо бутылка Клейна с k ручками.

Проективная плоскость – сфера с пленкой, бутылка Клейна – сфера с 2 пленками.

Пример 3.13. Приклеивание. X, Y – топологические пространства. $A \subset X$, $f : A \to Y$ – непрерывное отображение.

Приклеивание: $X \sqcup_f Y = X \sqcup Y / a \sim f(a)$.



Глава 4

Связность

4.1. Связность

Связность

Определение 4.1. (X, Ω) – топологическое пространство. Если существуют $U_1, U_2 \subset \Omega$: $U_1 \cup U_2 = X$; $U_1 \cap U_2 = \varnothing$; $U_1, U_2 \neq \varnothing$, тогда X называется несвязным. Иначе X называется связным.

Переформулировки:

1. X несвязно $\Leftrightarrow$ $U_1 = X \setminus U_2$, $U_1 \neq \varnothing$ и $U_1 \neq X$. U_1 открытое и U_1 замкнутое. X несвязно $\Leftrightarrow \exists U \neq \varnothing$; $U \neq X$; U открыто и замкнуто одновременно.

2. X связно $\Leftrightarrow \forall U_1, U_2 \in \Omega$, если $U_1 \cup U_2 = X$ и $U_1 \cap U_2 = \varnothing \implies U_1 = \varnothing$ или $U_2 = \varnothing$

Определение 4.2. (X, Ω) – топологическое пространство. $A \subset X$ называется связным, если A связно как топологическое пространство с индуцированной топологией.

Переформулировка: A связно $\Leftrightarrow \forall U_1, U_2 \in \Omega_X$, если $(U_1 \cap A) \cup (U_2 \cap A) = A$ (то есть $U_1 \cup U_2 \supset A$), $(U_1 \cap A) \cap (U_2 \cap A) = \varnothing$ (т.е. $U_1 \cap U_2 \cap A = \varnothing$), то есть или $U_1 \cap A = \varnothing$, или $U_2 \cap A = \varnothing$

Еще раз: A связно $\Leftrightarrow \forall U_1, U_2 \in \Omega_X$ если $U_1 \cup U_2 \supset A$ и $U_1 \cap U_2 \cap A = \varnothing$, то или $U_1 \cap A = \varnothing$, или $U_2 \cap A = \varnothing$

Пример 4.1. Антидискретное пространство связно, т.к. любое подмножество связно.

Пример 4.2. Дискретное пространство. Если в дискретном пространстве больше 1 точки, то оно несвязно.

$$U_1 := \{x_0\} \quad U_2 = X \setminus U_1$$

Любое подмножество дискретного пространства, в котором больше 1 точки, несвязно

Пример 4.3. Топология Зариского (замкнутые = конечные). Конечные подмножества (более чем из 1 точки) несвязны. Бесконечные подмножества связны.

Если A – конечное подмножество, тогда в A топология такая: замкнутое = конечное = любое, значит в A дискретная топология. Если A – бесконечное и U открыто и замкнуто одновременно ($U \neq \varnothing, U \neq A$), тогда U – конечное и $A \setminus U$ – конечное, но так не бывает. Поэтому бесконечные связны, на них реализуется топология Зариского.

Пример 4.4. Стрелка на $\mathbb{R}$. Открытые – лучи $(a, +\infty)$. Стрелка связная. Потому что нет непересекающихся открытых подмножеств. Любое подмножество стрелки связно.

Пример 4.5. $\mathbb{R}$ со стандартной топологией. $A = [0,1] \cup [2,3]$ – несвязно. Пусть $U_1 = (-\infty, 1.5), U_2 = (1.5, 4)$ – Ок. Или $V_1 = (-\infty, 2), V_2 = (1, +\infty)$ тоже Ок.

Теорема 4.1. Интервал $(0,1)$ связен.

Доказательство. Пусть U_1, U_2 открыты в $\mathbb{R}$, $U_1 \cup U_2 \supset (0,1)$, $U_1 \cap U_2 \cap (0,1) = \varnothing$, $x_1 \in U_1 \cap (0,1) \neq \varnothing$ и $x_2 \in U_2 \cap (0,1) \neq \varnothing$. НУО считаем $x_2 > x_1$. Рассмотрим $[x_1; x_2]$

$$x_* := \sup\{x \in [x_1; x_2] \cap U_1\} \implies x_1 \leqslant x_* \leqslant x_2$$

1 случай: $x_1 < x_* < x_2$ (т.е $x_* \neq x_1;\ x_* \neq x_2$)
Если $x_* \in U_1 \implies \exists \varepsilon > 0 : (x_* - \varepsilon; x_* + \varepsilon) \subset U_1$. $(x_* - \varepsilon; x_* + \varepsilon) \subset [x_1, x_2] \implies x_* + \varepsilon/2 \in U_1$ и $x_* + \varepsilon/2 \in [x_1; x_2] \implies x_*$ не sup.
Если $x_* \in U_2 \implies \exists \varepsilon > 0 : (x_* - \varepsilon; x_* + \varepsilon) \subset U_2$. $(x_* - \varepsilon; x_* + \varepsilon) \subset [x_1, x_2] \implies x_*$ не является точной верхней гранью $U_1 \cap [x_1, x_2]$, т.к. $x_* - \varepsilon$ тоже верхняя грань. Получили противоречие.

2 случай: $x_* = x_1 \in U_1$
Если U_1 открыто, то $\exists \varepsilon > 0 : [x_1; x_1 + \varepsilon) \subset U_1$, далее случай 1.
3 случай: $x_* = x_2 \in U_2$ (упражнение) ■

Теорема 4.2. (X, Ω) – топологическое пространство. $A \subset X$, A связно. $A \subset B \subset \operatorname{Cl} A \implies B$ связно.

Доказательство. Допустим, что B несвязно, тогда существуют U_1, U_2 открытые в X: $U_1 \cup U_2 \supset B$, $U_1 \cap U_2 \cap B = \varnothing$, $U_1 \cap B \neq \varnothing$ и $U_2 \cap B \neq \varnothing$.
$U_1 \cup U_2 \supset A$, $U_1 \cap U_2 \cap A = \varnothing$, но A связно, тогда НУО считаем $U_1 \cap A = \varnothing$
$B \subset \operatorname{Cl} A$. $F := \operatorname{Cl} A \cap (X \setminus U_1)$ замкнутое. $F \supset A$ и $F \subset \operatorname{Cl} A \implies F = \operatorname{Cl} A \implies X \setminus U_1 = \varnothing$, т.е. $U_1 \cap \operatorname{Cl} A = \varnothing$ и $U_1 \cap B \neq \varnothing$ – противоречие. ■

Следствие 4.2.1. $\operatorname{Cl} A$ связно, если A связно.

Замечание. A связно, $\operatorname{Int} A$ не обязательно связна!

Теорема 4.3. (X, Ω) – топологическое пространство. A_1, A_2 связные и $A_1 \cap A_2 \neq \varnothing \implies A_1 \cup A_2$ связное.

Доказательство. Допустим $A_1 \cup A_2$ несвязно. Тогда существуют $U_1, U_2 : U_1 \cup U_2 \supset A_1 \cup A_2, U_1 \cap U_2 \cap (A_1 \cup A_2) = \varnothing, U_1 \cap (A_1 \cup A_2) \neq \varnothing$, $U_2 \cap (A_1 \cup A_2) \neq \varnothing$.
Тогда с помощью U_1 и U_2 можно разбить A_1: $U_1 \cup U_2 \supset A_1$, $U_1 \cap U_2 \cap A_1 = \varnothing$, но A_1 связно. НУО $U_1 \cap A_1 = \varnothing$. Пусть $x_0 \in A_1 \cap A_2$, тогда $x_0 \in U_2$.
Аналогично с A_2: $U_1 \cup U_2 \supset A_2$, $U_1 \cap U_2 \cap A_2 = \varnothing$, но A_2 связно. тогда

- или $U_2 \cap A_2 = \varnothing$, но $x_0 \in A_2 \cap U_2$ – так не бывает
- или $U_1 \cap A_2 = \varnothing$, но $U_1 \cap A_1 = \varnothing \implies U_1 \cap (A_1 \cup A_2) = \varnothing$ – противоречие.

■

Теорема 4.4. $f : X \to Y$ непрерывно. $A \subset X$. A связно, значит $f(A)$ связно.

Доказательство. Допустим $f(A)$ несвязно $\implies \exists U_1, U_2$ – открытые в Y : $U_1 \cup U_2 \supset f(A)$, $U_1 \cap U_2 \cap f(A) = \varnothing$, $U_1 \cap f(A) \neq \varnothing$, $U_2 \cap f(A) \neq \varnothing$.
Заметим, что $U_1, U_2 \subset Y$. $V_1 := f^{-1}(U_1), V_2 := f^{-1}(U_2)$ – открыты в X. Тогда $V_1 \cup V_2 \supset A$, $V_1 \cap V_2 \cap A = \varnothing$. $V_1 \cap A \neq \varnothing$ и $V_2 \cap A \neq \varnothing$ получается, что A несвязное – противоречие. ■

Следствие 4.4.1. Если X связно, то $X/\!\sim$ связно.

Следствие 4.4.2. Связность – топологическое свойство, т.е. сохраняется при гомеоморфизме.

Следствие 4.4.3. $\mathbb{R} \not\simeq \mathbb{R}^2$, т.к. $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y)\}$ связна, а $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ несвязна.

Следствие 4.4.4. $\mathbb{R}$ связна, т.к. $\mathbb{R} \simeq (0,1)$

Лемма 4.5. X связно $\Leftrightarrow \forall f : X \to \{0,1\}$; f непрерывно, тогда $f = const$

Доказательство. Если X связен, то $f(X)$ связно, то $f(x) = \{0\}$ или $f(x) = \{1\}$.
В обратную сторону: допустим X несвязно. Тогда $X = U_1 \cup U_2$, U_1, U_2 – открытые. $U_1, U_2 \neq \varnothing$ и $U_1 \cap U_2 = \varnothing \implies f(U_1) = 0$, $f(U_2) = 1$ отсюда f – непрерывно и $f \neq const$. ■

Теорема 4.6. $\{X_i\}_{i \in I}$ $\forall X_i$ связно $\Leftrightarrow \prod_{i \in I} X_i$ связно.

Теорема 4.7. X, Y связны $\Leftrightarrow X \times Y$ связно.

Доказательство. В обратную сторону: $p_X : X \times Y \to X$ – непрерывно, если $X \times Y$ связно, то $p_X(X \times Y) = X$ связно по теореме 4.4.
Прямое доказательство: Допустим, что X, Y связны, но $X \times Y$ несвязно, тогда $\exists f : X \times Y \to \{0, 1\}$ непрерывно и сюръективно. $f(x_0, y_0) = 0, f(x_1, y_1) = 1$. Тогда чему равняется $f(x_1, y_0)$ пусть оно НУО равно 0. Рассмотрим $f|_{\{x_1\}\times Y}$. Пусть $g(y) := f(x_1, y)$, $g : Y \to \{0, 1\}$. g непрерывно, т.к. $g = f \circ h$, тогда $h(x, y) = (x_1, y)$ – проекция.

$$g(y_0) = f(x_1, y_0) = 0$$
$$g(y_1) = f(x_1, y_1) = 1$$

Y – связно. Противоречие с леммой, т.к. g непрерывно, но $f \neq const$. ■

Следствие 4.7.1. $X_1, ..., X_n$ связны $\Leftrightarrow X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$ связно.

Следствие 4.7.2. $\mathbb{R}^n$ связно. Полуплоскость $\simeq (0, +\infty) \times \mathbb{R}$ связно

4.2. Компоненты связности

Определение 4.3. (X, Ω) – топологическое пространство. K является компонентой связности X, если K связно и $\forall K' \underset{\neq}{\supset} K$, K' несвязно. (т.е. K – максимальное связное подмножество X)

Теорема 4.8. Свойства компонент связности:

1. Компоненты связности совпадают или не пересекаются (отношение эквивалентности)
2. Компоненты связности замкнуты
3. Любое связное подмножество лежит в компоненте связности
4. $\forall x, y \in X$ лежат в одной компоненте связности тогда и только тогда, когда $\exists$ связное $A : x, y \in A$

Доказательство.
1. $K_1 \neq K_2$ и $K_1 \cap K_2 \neq \varnothing$, то по теореме 4.3 $K_1 \cup K_2$ связно, значит K_1 и K_2 не компоненты
2. $\operatorname{Cl} K$ связно, значит $K = \operatorname{Cl} K$
3. Рассмотрим максимальное связное множество содержащее A. Это компонента связности содержащая A
4. прямо: $x, y \in K$, тогда $A = K$, обратно: пункт 3

■

Замечание. Компонента связности не обязана быть открытой

Пример 4.6. Компоненты связности $\mathbb{Q}$ – отдельные точки.

Замечание. Если есть конечное количество компонент связность, то они открыты.

$K_1, ..., K_n$ – компоненты. K_1 замкнуто, значит $U_1 = K_2 \cup K_3 \cup ... \cup K_n$ открыто. Аналогично $U_i = X \setminus K_i$ открыто. $K_1 = U_2 \cap U_3 \cap ... \cap U_n$ открыто.

Теорема 4.9. (X, Ω) – топологическое пространство. $\{K_i\}$ – компоненты связности. Эквивалентные определения:

1. K_i открыты
2. $X = \bigsqcup_i K_i$ (как топологическое пространство) На K_i задана топология. На X есть два топологических пространства: исходная и топология объединения $\bigsqcup_i K_i$
3. $\forall x_0 \in X \ \exists$ связная U_{x_0} – открытая окрестность

Доказательство. $(1) \to (3)$ K_i – связная окрестность
$(3) \to (1)$ $K_i = \bigcup_{x_0 \in K} U_{x_0}$ открыто (U_{x_0} открытое связное)
$(2) \to (1), (3)$ упражнение ■

Упражнение: Есть X, K_i его компоненты. Есть Y, L_J – его компоненты, тогда $K_i \times L_j$ компоненты связности $X \times Y$.

4.3. Линейная связность

Определение 4.4. Путь в топологическом пространстве (X, Ω) – непрерывное отображение: $f : [0, 1] \to X$. $f(0)$ начало пути, $f(1)$ конец пути

Определение 4.5. x_0 и x_1 соединены путем, если существует путь с началом в x_0 и концом в x_1

Определение 4.6. X называется линейно связным, если любые две точки можно соединить путем.
$A \subset X$ линейно связно, если A линейно связно как топологическое пространство (с индуцированной топологией) A линейно связно $\Leftrightarrow \forall x_0, x_1 \in A$ можно соединить путем в A.

Теорема 4.10. X линейно связно, значит X связно

Доказательство. Допустим X несвязно, тогда x_0, x_1 в разных компонентах связности. Рассмотрим $f : [0, 1] \to X : f(0) = x_0, f(1) = x_1$. Образ связного связен: $f([0, 1])$ связное, значит лежит в одной компоненте, но $f(0)$ и $f(1)$ в разных. Противоречие. ∎

Замечание. Обратное неверно.

Пример 4.7. Контрпример: график функции $\sin \frac{1}{x} \cup [-1, 1]$ по OY

Иначе это Cl(график $\sin \frac{1}{x}$) – связное, но не линейно связное.

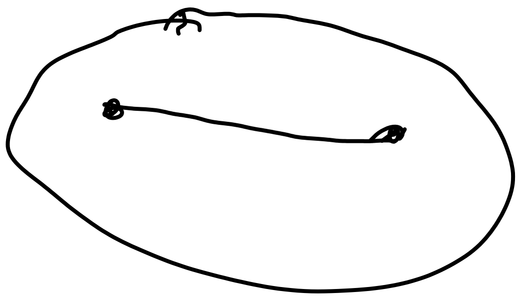
Замечание.

1. A линейно связное, $\operatorname{Cl} A$ не обязательно линейно связное
2. Компоненты линейной связности не обязательно замкнуты
3. Отношения «соединены путем» – отношения эквивалентности:
   - Рефлексивность: $x_0 \sim x_0 : f(t) = x_0$
   - Симметричность: $f(t) : f(0) = x_0, f(1) = x_1, g(t) = f(1-t) : g(0) = x_1, g(1) = x_0$
   - Транзитивность: $f(t)$ соединяет x_0 и x_1, $g(t)$ соединяет x_1 и x_2.

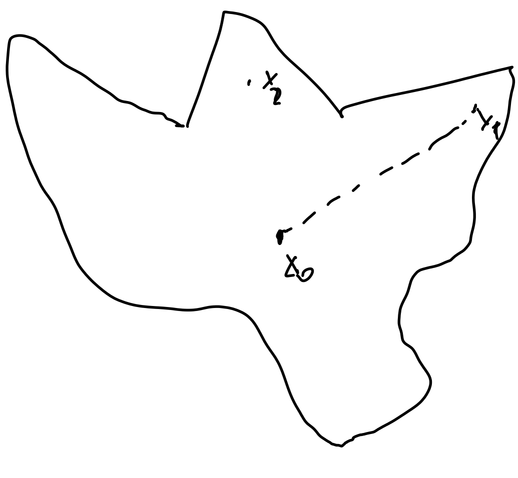
$$h(t) = \begin{cases} f(2t) & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ g(2t-1) & t \geqslant \frac{1}{2} \end{cases}$$

Пример 4.8. Выпуклые множества. A называется выпуклым, если для любой точки $x_0, x_1 \in A : [x_0, x_1] \subset A$. Такое множество линейно связно.

$$f(t) = (1-t)x_0 + tx_1$$



Пример 4.9. Звездные множества $\mathbb{R}^n$. A называется звездным, если $\exists x_0 \in A : \forall x_1 \in A \; [x_0, x_1] \subset A$.



Замечание. Связность и линейная связность – топологические свойства.

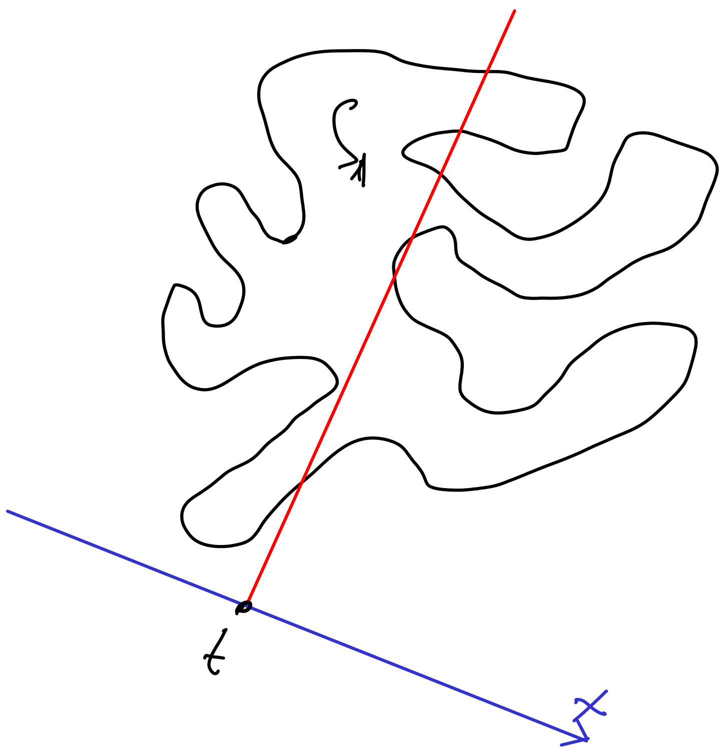
Теорема 4.11 (Вейерштрасса о промежуточном значении). X – связное пространство, $f : X \to \mathbb{R}$ непрерывная функция. $f(x_0) = a$, $f(x_1) = b$. Пусть $a \leqslant c \leqslant b \implies \exists x_* \in X : f(x_*) = c$

Доказательство. Допустим противное: $f^{-1}(c) = \varnothing$. Пусть $U_1 = (-\infty, c)$, $U_2 = (c, +\infty)$. Тогда $f^{-1}(U_1)$ и $f^{-1}(U_2)$ – открытые непересекающиеся подмножества. $f^{-1}(U_1) \cup f^{-1}(U_2) = X$. $x_0 \in f^{-1}(U_1)$ и $x_1 \in f^{-1}(U_2)$, значит X несвязно. ■

Пример 4.10. Блин – открытое связное ограниченное подмножество $\mathbb{R}^2$. Его можно разрезать прямой на 2 равновеликие части.

$$f(t) = S_1 \quad f(-\infty) = 0 \quad f(+\infty) = S \implies \exists t : f(t) = S/2$$

(надо доказать непрерывность, например, f).



Глава 5

Компактность

5.1. Компактность

Определение 5.1. (X, Ω) – топологическое пространство,

$$\{U_i\}_{i\in I} \subset \Omega : \bigcup_i U_i = X.$$

Такое $\{U_i\}_{i\in I}$ – покрытие X. (точнее открытое покрытие)
$\{V_j\}_{j\in J}$ называется подпокрытием $\{U_i\}_{i\in I}$, если $\forall j \ \exists i : V_j = U_i$ и $\{V_j\}$ – покрытие.

По умолчанию: покрытие = открытое покрытие.

Определение 5.2. X называется компактным, если $\forall \{U_i\}_{i\in I}$ – покрытия X можно выбрать $U_{i_1}, ..., U_{i_n}$ конечное подпокрытие.

В старых учебниках это называется бикомпактностью.

Определение 5.3. $A \subset X$ компактно, если A компактно в индуцированной топологии или $\forall \{U_i\}_{i\in I} \subset \Omega : \bigcup U_i \supset A \ \exists U_{i_1}, ..., U_{i_n}$: $\bigcup_{k=1}^n U_{i_k} \supset A$

Пример 5.1. X – антидискретное пространство, значит X компактно.

Пример 5.2. X – конечное, тогда X компактно

$X = \{x_1, ..., x_n\}$ и $\{U_i\}_{i \in I}$ – некоторое покрытие. Различных U_i не более 2^n, поэтому считаем весь набор U_i конечным.

Пример 5.3. Бесконечное дискретное пространство не компактно.

$X = \bigcup_{x_i \in X} \{x_i\}$, $\{x_i\}$ – открыто. Ни одно из подмножеств нельзя выкинуть. Конечного подпокрытия быть не может.

Пример 5.4. Топология Зариского компактна.

Пусть $X = \bigcup_{i \in I} U_i$, $U_{i_0} = X \setminus \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Но $x_1 \in U_{i_1}, x_2 \in U_{i_2}, ..., x_n \in U_{i_n}$. $\{U_{i_k}\}_{k=0}^n$ – покрытие X. Из этого следует, что $\forall A \subset X$ компактно.

Пример 5.5. Стрелка: топология на $\mathbb{R}$, где $(x; +\infty) + \varnothing + \mathbb{R}$ открытые. Сама по себе не компактна.

$U_i = (-i; +\infty), \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i = \mathbb{R}$. Но конечного набора, который бы давал $\mathbb{R}$ не существует.

Какие подмножества стрелки является компактными?

$A = [0, \infty)$, такое A компактно.

$B \subset \mathbb{R}$, B компактно тогда и только тогда, когда $\inf B \in B$. Если $\inf B = x_0$ и $x_0 \notin B$, тогда $U_n = (x_0 + 1/n; +\infty)$. Тогда $\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n \supset B$, но конечное подпокрытие выбрать нельзя.

Пример 5.6. $\mathbb{R}^{(n)}$ со стандартной топологией. Само по себе не компактно (см. стрелку): $U_i = (-i; +\infty)$

Какие подмножества $\mathbb{R}^n$ компактны? Читайте далее!

Теорема 5.1. X – компактное пространство. A – замкнутое подмножество в X, тогда A компактно.

Доказательство. Пусть $\{U_i\}_{i \in I}$ покрывает A. $\{U_i\} \cup \{X \setminus A\}$ – открытое покрытие X, значит существует конечное подпокрытие. Уберем из него $X \setminus A$ (если есть), получим конечное подпокрытие A. ∎

Теорема 5.2. $f : X \to Y$ непрерывно. $A \subset X$. A компактно, тогда $f(A)$ компактен.

Доказательство. Пусть $\{U_i\}_{i \in I}$ покрывают $f(A)$. Тогда $\{f^{-1}(U_i)\}$

открытое покрытие A. Тогда

$$\exists U_{i_1}, ..., U_{i_n} : \bigcup_{k=1}^{n} f^{-1}(U_{i_k}) \supset A,$$

значит $U_{i_1}, ..., U_{i_n}$ покрывают $f(A)$ ■

Следствие 5.2.1. Компактность – топологическое свойство.

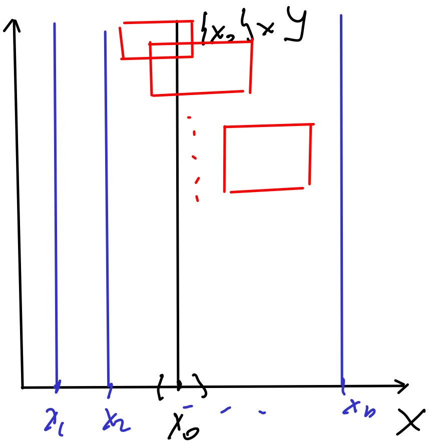
Теорема 5.3 (Тихонова)**.** $\prod_{i\in I} X_i$ компактно $\Leftrightarrow \forall i \ X_i$ компактно.

Доказательство. Не будет. ■

Теорема 5.4. X и Y компактны $\Leftrightarrow X \times Y$ компактно

Доказательство. В обратную сторону: $p : X\times Y \to X$ – проекция, она непрерывна. $X \times Y$ компактно, значит по теореме 5.2 $p(X \times Y) = X$ тоже компактно.
Прямо. рассмотрим любое открытое покрытие $X \times Y$:

1. Считаем, что это покрытие прямоугольными множествами, т.е. $\{U_i\times V_i\}_{i\in I}$, U_i открыто в X, V_i открыто в Y. Достаточно выбрать конечное подмножество из него.



2. $\forall x_0 \in X$, $\{x_0\} \times Y \simeq Y$ в $X \times Y$. Существует минимальное покрытие $U_1 \times V_1, ..., U_n \times V_n$, которое покрывает $\{x_0\} \times Y$, значит $V_1, ..., V_n$ покрывает Y.

   $W_{x_0} := \bigcap_{i=1}^{n} U_i$ – открытое в X подмножество. $x_0 \in W_{x_0}$, тогда $\{W_{x_0}\}_{x_0\in X}$ – покрытие X, следовательно существует

$W_{x_1}, ..., W_{x_k}$ – конечное подпокрытие.

$$W_{x_j} \leftrightarrow \{U_{j_1} \times V_{j_1}, ..., U_{j_{n_j}} \times V_{j_{n_j}}\}$$

Возьмем все множества, соответствующие W_j. Это конечный набор. Почему покрытие? $\forall (x, y) \in X \times Y$, $x \in W_{x_l}$, $(x_l, y) \in U_i \in V_i$ ($U_i \times V_i$ из нашего набора). $x \in U_i$ и $y \in V_i$, $(x, y) \in U_i \times V_i$

■

5.2. Компактность и хаусдорфовость

Аксиома 5.5 (Хаусдорфа). X называется хаусдорфовым, если $\forall x_0 \neq x_1 \in X\ \exists U_{x_0}, U_{x_1} : U_{x_0} \cap U_{x_1} = \varnothing$

Пример 5.7. Любое метрическое пространство хаусдорфово.

$$U_{x_0} = B(x_0, \rho(x_0, x_1)/2)$$
$$U_{x_1} = B(x_1, \rho(x_0, x_1)/2)$$

Замечание. X хаусдорфово, $A \subset X \implies A$ хаусдорфово.

Теорема 5.6. X – хаусдорфово пространство. $A \subset X$, A компактно в X, тогда A замкнуто.

Замечание. Докажем, что $X \setminus A$ открыто. Для этого возьмем любой $x_0 \in X \setminus A$. Найдем $U_{x_0} \cap A = \varnothing$

$$\bigcup_{x_0} = X \setminus A \text{ - открыто}$$

Это базовая схема как доказать замкнутость подмножеств.

Доказательство. Рассмотрим $\forall y \in A\ \exists U_{x_0 y}$ и V_y – окрестности: $x_0 \in U_{x_0 y}, y \in V_y,\ U_{x_0 y} \cap V_y = \varnothing$ (по хаусдорфовости).
$\{V_y\}_{y \in A}$ – покрывают A, тогда $\exists y_1, ..., y_n : V_{y_1}, ..., V_{y_n}$ – покрытие A, рассмотрим $\bigcap_{i=1}^{n} U_{x_0 y_i}$ открытое подмножество, не пересека-

ющееся с $V_{y_i} \forall i = 1, \dots, n$, значит $\bigcap_{i=1}^{n} U_{x_0 y_i}$ не пересекается с A. ∎

Следствие 5.6.1. X – компактно и хаусдорфово, $A \subset X$, тогда A компактно $\Leftrightarrow$ A замкнуто.

Теорема 5.7. $f : X \to Y$ непрерывно. X компактно, Y хаусдорфово. $A \subset X$, A замкнутое, значит $f(A)$ замкнут.

Доказательство. A замкнуто, тогда по теореме 5.1 A компактно, значит по теореме 5.2 $f(A)$ компактен, тогда по теореме 5.6 $f(A)$ замкнут. ∎

Следствие 5.7.1. $f : X \to Y$ непрерывное и биекция. X компактно. Y хаусдорфово. A открытое, тогда $f(A)$ открыт.

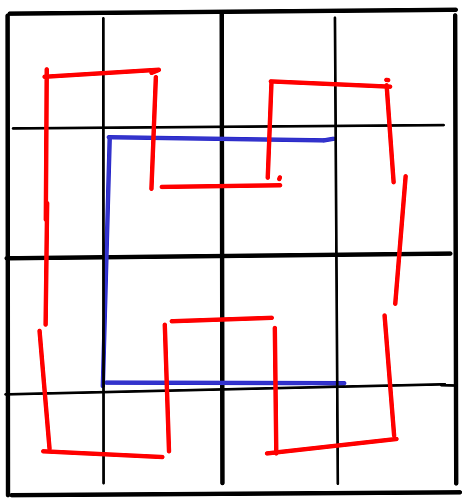
Доказательство. A открытое, значит $X \setminus A$ замкнутое, значит $f(X \setminus A)$ замкнут, значит $f(A)$ открыт.

$$f(X \setminus A) = Y \setminus f(A), \text{ если } f \text{ биективно}$$

∎

Следствие 5.7.2. $f : X \to Y$ непрерывная биекция, X компактно, Y хаусдорфово, тогда f гомеоморфизм.

Кривые Пеано: $f : [0,1] \to [0,1] \times [0,1]$ – непрерывное и сюръективное отображение.
В пределе непрерывная кривая, которая заметает весь квадрат.
Кривая Пеано не может быть биективной!



5.3. Компактность в $\mathbb{R}^n$

Лемма 5.8 (Лебега)**.** $I = [0,1], \{U_i\}$ – открытое покрытие I, тогда существует $\varepsilon > 0$ (число Лебега, зависит от покрытия): $\forall x_0 \in I$ $(x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon) \subset U_i$ для некоторого i.

Доказательство. Допустим такого ε не существует. $\varepsilon_i := 1/2^i$ (или $\varepsilon_i \to 0$).
$\exists x_i : (x_i - \varepsilon_i; x_i + \varepsilon)$ не попадает ни в одно U_i. $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ – последовательность точек I. $\exists x_{i_j} \to x_0$ в $[0,1]$. $x_0 \in U_i$, U_i открыто, значит $\exists \varepsilon > 0 : (x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon) \subset U_i$
$\exists N_1$: если $j > N_1$, то $|x_0 - x_j| < \varepsilon/2$. Так же $\exists N_2 : \varepsilon_{N_2} < \varepsilon/2$. Выберем $N := \max\{N_1, N_2\}$, тогда

$$(x_{i_j} - \varepsilon_{i_j}; x_{i_j} + \varepsilon_{i_j}) \subset (x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon) \subset U_i$$

Противоречие, значит число Лебега существует. ■

Теорема 5.9. $[0,1]$ компактен

Доказательство. $\{U_i\}$ покрывает $I = [0,1]$, тогда по теореме 5.8 $\exists \varepsilon$ – число Лебега. $x_0 = 0, x_k = k\varepsilon \implies \exists N : x_N > 1$. Тогда $(x_{k-1}; x_{k+1}) = (x_k - \varepsilon; x_k + \varepsilon) \subset U_{i_k}$. Рассмотрим $U_{i_1}, U_{i_2}, ..., U_{i_{N-1}}$ – покрытие $[0;1]$. ■

Замечание. $(0,1)$ не компактно. $U_k = (1/k, 1)$. Нельзя выбрать конечное подпокрытие

Следствие 5.9.1. $[a_1, b_1] \times ... \times [a_n, b_n]$ компактно в $\mathbb{R}^n$

Определение 5.4. $A \subset \mathbb{R}^n$, A называется ограниченным, если $A \subset B(0, N)$, такое N существует. Или $A \subset [a_1, b_1] \times ... \times [a_n, b_n]$

Теорема 5.10 (Компактность подмножества в $\mathbb{R}^n$)**.** $A \subset \mathbb{R}^n$, A компактно $\Leftrightarrow$ A – замкнуто и ограниченно.

Доказательство. Прямое доказательство A замкнуто по 5.6, A ограниченно, иначе $\{B(0,n)\}_{n=1}^{\infty}$ – покрытие, из которого нельзя выбрать конечное.
Обратное доказательство: A ограниченно, значить $A \subset X = [a_1, b_1] \times ... \times [a_n, b_n]$, X компактно по 5.9.1, A замкнуто в X, значит по 5.1 A компактно. ■

Теорема 5.11. $f : X \to \mathbb{R}$ – непрерывная функция, X компактен, тогда $\exists x_0 : f(x_0) \geqslant f(x)\ \forall x \in X$. (т.е. непрерывная функция на компакте достигает своего максимума)

Доказательство. $f(X)$ компактна в $\mathbb{R}$, значит $f(X)$ замкнута и ограничена. Ограничена, значит $\sup f(X) < +\infty$. Замкнута, значит $\sup f(X) \in f(X) \implies$ sup достигается. ■

Пример 5.8. В прошлом семестре: брали квадратичную форму

$$F(x, y, z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz$$

Поворотом можно избавиться от двойных слагаемых.

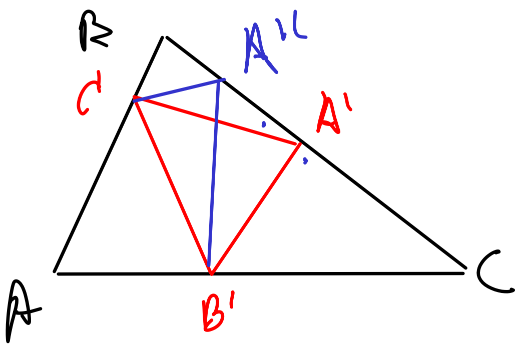
Для этого мы проецировали на сферу

$$F(x, y, z)|_{S^2} \qquad S^2 := \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

(x_*, y_*, z_*) – максимум F на S^2

F – непрерывна, S^2 – компактна, значит существует максимум.

Пример 5.9 (Задача Фаньяно)**.** ABC – остроугольный треугольник. Хотим выбрать $A' \in [BC], B' \in [AC], C' \in [AB]$, так чтобы $P_{A'B'C'} \to$ min. Ответ: это основания высот.



Если $A'B'C'$ – искомый, тогда $\angle C'A'B = \angle B'A'C$. Если нет, то A'' : $\angle C'A''B = \angle B'A''C$.

$$C'A'' + A''B' < C'A' + A'B'$$

(это доказано в оптическом свойстве эллипса.)

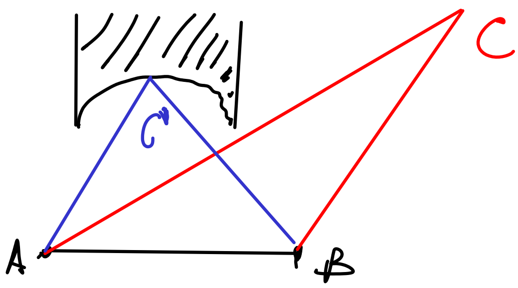
Значит оптимальная конфигурация: с равными соответствующими углами. Такое бывает, если A', B', C' – основания высот. (почему? – упражнение)

Принцип. Из множества конфигураций M есть лишь одна не улучшаемая, значит именно она оптимальная.

Почему этот принцип вообще работает? Он работает не всегда, он работает только если M компактна.

В задаче Фаньяно $M = \{(A'; B'; C')\}$, $A' \in [BC]$ и т.д, значит $M \simeq [a_1, a_2] \times [b_1, b_2] \times [c_1, c_2] \implies M$ компактно.

Пример 5.10. Пример, в котором принцип не работает. Найти C : $S_{ABC} \to \max$, если есть область, которая не должна пересекать ABC и куда нельзя поставить C. Очевидно, что такой C нет.



Любая конфигурация, кроме C' улучшаема.

Пример 5.11 (Задача Томсона). Расположить n единичных одноименных зарядов на S^2 с минимальной потенциальной энергией.

$$E = \sum_{i \neq j} \frac{1}{\rho^2(a_i, a_j)} \to \min$$

Задача полностью не решена. Но мы знаем, что min достигается. $E : M \to \mathbb{R}$. $M \simeq S^2 \times S^2 \times ... \times S^2$ (n раз). Но есть проблема с тем, что знаменатель может обратиться в 0. Исправим это:

$$E'(a_1, a_2, ..., a_n) = \begin{cases} E(a_1, ..., a_n) & \rho(a_i, a_j) > \varepsilon \\ \displaystyle\sum_{\rho(a_i, a_j) > \varepsilon} \frac{1}{\rho^2(a_i, a_j)} + \sum_{\rho(a_i, a_j) \leqslant \varepsilon} \frac{1}{\varepsilon^2} & \end{cases}$$

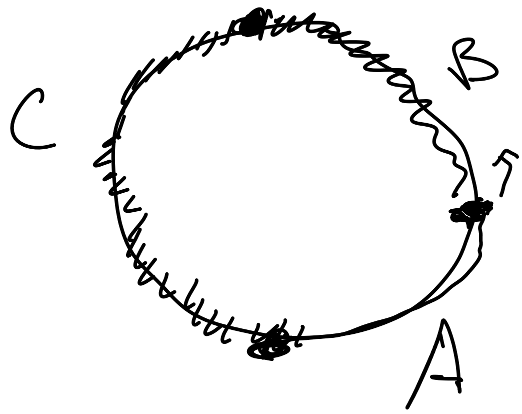
ε взять такое, чтобы не мешало.

Пример 5.12. Есть n сотрудников, существует k групп из них, таких, что любые 2 группы пересекаются. Требуется доказать, что сотрудников можно расположить на окружности длиной 1, так чтобы любая группа была растянута по дуге не меньше чем $\frac{1}{3}$.

Решение: пусть x – расстановка сотрудников, $S(x)$ – минимальная длина дуги, которая покрывает какую-то группу.

Хотим доказать: $\exists x_* : S(x_*) \geqslant \frac{1}{3}$.

Возьмем x_*, для нее $S(x_*) = \max, S \geqslant \frac{1}{3}$



5.4. Локальная компактность

Определение 5.5. X называется локально компактным, если

$$\forall x_0 \ \exists U_{x_0} : \operatorname{Cl} U_{x_0} \text{ компактна}$$

Теорема 5.12 (Компактификация по П.С. Александрову)**.** X – локально компактное хаусдорфово пространство, тогда

$$\exists \hat{X} = X \cup \{\infty\}$$

X – подпространство $\hat{X}$ и $\hat{X}$ – компактно и хаусдорфово.

Пример 5.13.

$$\mathbb{R} \cup \{\infty\} \simeq S^1$$
$$\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\} \simeq S^2$$
$$\mathbb{R}^n \cup \{\infty\} \simeq S^n$$

Доказательство. $\hat{X} = X \cup \{\infty\}$, но какая топология?
Пусть $U \subset \hat{X}$. Если $\infty \notin U$, то U открыто в $\hat{X} \Leftrightarrow U$ открыто в X.
Если $\infty \in U \implies U$ открыто $\Leftrightarrow X \setminus U$ компактно.
Это топология: $X \setminus U$ компактно, значит по хаусдорфовости замкнуто.

$$X \setminus \bigcup_{i \in I} U_i = \bigcap_{i \in I} (X \setminus U_i) \subset X \setminus U_{i_0}$$
$$X \setminus \bigcap_{i=1}^{n} U_i = \bigcup_{i=1}^{n} (X \setminus U_i) \text{ -- компактно}$$

Это топология, $X \subset \hat{X}$ (в смысле топологии) (упражнение)
Почему $\hat{X}$ компактен?
$\{U_i\}_{i \in I}$ – покрытие $\hat{X}$, $\infty \in U_{i_0}$. $X \setminus U_{i_0}$ – компактно. (т.е. остальные множества покрывают компакт, можно выбрать конечное число)
$\hat{X}$ – хаусдорфово?
$x, y \neq \infty$, тогда по хаусдорфовости X $\exists U_x, U_y : U_x \cap U_y = \varnothing$.
x, ∞ как определить? $\exists U_x : \operatorname{Cl} U_x$ компактна. $U_\infty := \hat{X} \setminus \operatorname{Cl} U_x$. U_∞ открыто в $\hat{X}$. ■

Замечание. Пересечение компактов не обязательно компакт! Но в хаусдорфовых пространствах пересечение компактов компакт. Потому что в хаусдорфовом пространстве компакт – это замкнутое подмножество некоторого компакта.

Замечание. Объединение конечного числа компактов – компакт.

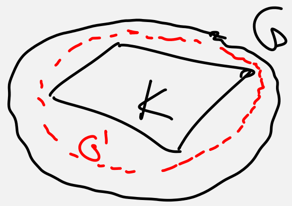
Пример 5.14. $\hat{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$.

$\infty \in U$. U открыто $\Leftrightarrow \mathbb{Q} \setminus U$ компактно.

Докажем, что ∞ и 0 не разделяются. Пусть они разделяются, тогда U_0 и U_∞, $U_0 \supset (-\varepsilon, \varepsilon) \cap \mathbb{Q} \implies \hat{\mathbb{Q}} \setminus U_\infty$ не компактно.

Теорема 5.13.

1. X локально компактно и хаусдорфово, $x_0 \in X$, U_{x_0} – открытая окрестность x_0, тогда $\exists V_{x_0} : \operatorname{Cl} V_{x_0} \subset U_{x_0}$ и $\operatorname{Cl} V_{x_0}$ компактно. (X локально компактно и хаусдорфово, $U \subset X$ открыто, тогда U локально компактно и хаусдорфово)
2. X локально компактно и хаусдорфово, $K \subset X$ компакт. $K \subset G$, G открытое, тогда $\exists$ открытое $G' : G \supset \operatorname{Cl} G' \supset G' \supset K$



Доказательство.

1. X локально компактно, значит существует $W_{x_0} : \operatorname{Cl} W_{x_0}$ компактно. $x_0 \in X$ $\forall y \notin U$. Существуют непересекающиеся окрестности $W_{x_0,y}$ и W_y. Если $y \in \operatorname{Cl} W_{x_0} \cap (X \setminus U)$. $\operatorname{Cl} W_{x_0} \cap (X \setminus U)$ компакт (пересечение замкнутых – замкнуто, оно подмножество $\operatorname{Cl} W_{x_0}$ – компакт).

   $\{W_y\}$ – покрытие $F \implies \exists$ конечное подпокрытие $y_1, \ldots, y_n$: $\{W_{y_i}\}_{i=1}^n$ – подпокрытие F.

   $V_{x_0} = \bigcap_{i=1}^n W_{x_0,y_i}$ – открытая окрестность x_0.

$$\operatorname{Cl} V_{x_0} \subset \bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{Cl} W_{x_0,y_i} \subset U$$

$$\operatorname{Cl} W_{x_0,y_i} \subset X \setminus W_{y_i} \implies \bigcap \operatorname{Cl} W_{x_0,y_i} \subset X \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n} W_{y_i} \right) \subset U$$

2. $K \subset U, \forall x \in K\ \exists V_x : V_x \subset \operatorname{Cl} V_x \subset U$ (по 1 пункту).

   $\{V_x\}_{x \in K}$ – покрытие K, значит существует конечное подпокрытие $\{V_{x_1}, \ldots, V_{x_k}\}$.

$$G' := \operatorname{Cl} \left(\bigcup_{i=1}^{k} V_{x+i} \right) \qquad \blacksquare$$

Глава 6

Аксиомы счетности

6.1. Сепарабельность

Определение 6.1. (X, Ω) – топологическое пространство. Говорят, что X обладает второй аксиомой счетности, если у X есть счетная база.

Определение 6.2. (X, Ω) – топологическое пространство. $A \subset X$ называется всюду плотным в X, если $\operatorname{Cl} A = X$

Определение 6.3. X называется сепарабельным, если существует счетное всюду плотное множество в X.

Теорема 6.1. Из второй аксиомы счетности следует сепарабельность

Доказательство. $\{U_i\}_{i \in I}^{\infty}$ – счетная база. $x_i \in U_i \implies \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ – счетное всюду плотное. Тогда $\operatorname{Cl}\{x_i\}_{i=1}^{\infty} = X$?
Допустим противное: $y \in \operatorname{Ex}\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$, значит $\operatorname{Ex}\{x_i\}_{i=1}^{\infty} = \bigcup_j U_{i_j} \ni x_{i_j}$. Внешность множества $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ содержит x_{i_j} – противоречие. ∎

Замечание. Вторая аксиома счетности и сепарабельность – топологические свойства.

Здесь и далее в этой главе под словом «счетное» подразумевается «не более чем счетное».

Пример 6.1. X НБЧС, тогда X сепарабельно.

Пример 6.2. X – антидискретное, тогда вторая аксиома счетности и сепарабельность есть.

Пример 6.3. X – дискретное:

1. X счетное, тогда есть вторая аксиома счетности: база – одноточечные подмножества

2. X более чем счетное, нет ни сепарабельности, ни второй аксиомы счетности. $\operatorname{Cl} A = A$ в дискретной топологии.

Пример 6.4. На $\mathbb{R}^n$ со стандартной топологией, есть вторая аксиома счетности и сепарабельность

Рассмотрим $\mathfrak{B} = \{B(x, \varepsilon) : x, \varepsilon > 0 \in \mathbb{Q}\}$. Это счетная база. Возьмем $y_0 \in B(x_0, \varepsilon)$, где x_0, ε не обязательно рациональные. $\rho := \rho(x_0, y_0)$, тогда существует z_0 с рациональными координатами: $\rho(z_0, y_0) < \frac{\varepsilon - \rho}{2}$, выберем $r \in \mathbb{Q}_+ \rho(z_0, y_0) < r < \frac{\varepsilon-\rho}{2}$. Рассмотрим $B(z_0, r)$ такой что y_0 принадлежит ему. $B(z_0, r) \subset B(x_0, \varepsilon)$.

Сепарабельность: множество точек с рациональными координатами – счетное всюду плотное.

Замечание. НЕ любое метрическое пространство обладает второй аксиомой счетности или сепарабельностью.

Пусть X континуальное, $\rho(x, y) = 1$ если $x \neq y$, тогда порождается дискретная топология.

Пример 6.5. $X = \mathbb{R}$ с топологией Зариского (замкнутые, значит конечные). X сепарабельно (любое бесконечное множество всюду плотно). Второй аксиомы счетности нет.

Предположим, что она есть: $\{U_i\}_{i \in I}^{\infty}$ – счетная база. $U_i = X \setminus \{x_{i_1}, ..., x_{i_{n_i}}\}$, тогда $\bigcup_{i=1}^{\infty} \{x_{i_1}, ..., x_{i_{n_i}}\}$ счетно. А $\mathbb{R}$ несчетно, тогда $\exists y \in U_i \ \forall i$. $U = X \setminus \{y\}$, $y \notin U \neq \bigcup_j U_j \ni y$, значит счетной базы нет.

Теорема 6.2 (Линделёфа)**.** Если на X есть вторая аксиома счетности, тогда из любого открытого покрытия X можно выбрать НБЧС подпокрытие.

Доказательство. $X = \bigcup_{i \in I} U_i, \mathfrak{B} = \{B_i\}_{i=1}^{\infty}$ – счетная база. $\forall i\ U_i = \bigcup_j B_j$
$\{U_i\}$ вполне упорядочены (по теореме Цермело так можно). Рассмотрим U_{i_1}, отметим все $B_j \subset U_{i_1}$. Пусть $x_2 \notin U_{i_1} \implies \exists U_{i_2} \ni x_2$ тогда $U_{i_2} = \bigcup_j B_j$, отметим все такие B_j. На этом шаге мы отметили как минимум одно новое B_j.
Продолжаем: $x_3 \notin U_{i_1} \cup U_{i_2} \implies x_3 \in U_3 = \bigcup_j B_j$, отметили новое B_j.
Таких шагов нельзя сделать более чем счетное количество. Таких U_{i_k} НБЧС количество, после которых новую точку, не входящую в их объединение, нельзя выбрать. ■

6.2. Секвенциальная компактность

Определение 6.4. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность в X. Говорим, что $x_0 \in \lim_{n\to\infty} x_n$ если ($\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N$ выполнено $\rho(x_n, x_0) < \varepsilon$ или $x_n \in B(x_0, \varepsilon)$)
$\forall U_{x_0}$ окрестность $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n > \mathbb{N}\ x_n \in U_{x_0}$

Пример 6.6. $\mathbb{R}$ с топологией Зариского. Пусть $x_i \neq x_j \implies \forall x_0\ x_n \to x_0$

$$\forall U_{x_0} = X \setminus \{a_1, a_2, ..., a_n\}\ \exists N : \forall n > N\ x_n \neq a_n \implies x_n \in U_{x_0}$$

Пример 6.7. $\mathbb{R}$ с топологией типа Зариского: замкнутые = НБЧС. Если $x_i \neq x_j$, то $\nexists x_0 : x_n \to x_0$. Возьмем любой x_0 (считаем, что $x_0 \neq x_n$, иначе начнем последовательность с x_{n+1})

$$U_{x_0} = \mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2, ..., \} \text{ – открыто}$$

U_{x_0} не содержит ни одного члена последовательности.

Замечание. Если X хаусдорфово, тогда предел не более чем единственный.

Доказательство. Допустим x_0 и $\tilde{x}_0$ – пределы x_n.

$$U_{x_0} \cap U_{\tilde{x}_0} = \varnothing$$

Тогда с некоторого места: все $x_n \in U_{x_0}$ и все $x_n \in U_{\tilde{x}_0}$. Но это противоречит с хаусдорфовостью. ■

Определение 6.5. X называется секвенциально компактным пространством, если $\{x_i\}_{i=1}^{\infty} \subset X \ \exists x_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} x_0$ (из любой подпоследовательности можно выбрать сходящуюся).

Определение 6.6. X обладает первой аксиомой счетности если $\forall x_0 \in X$, существует счетная база окрестностей x_0, т.е. $\exists \{B_{x_0,i}\}_{i=1}^{\infty} : x_0 \in B_{x_0,i}$ $x_0 \in \forall U$ открытому
$\exists B_i : x_0 \in B_{x_0,i} \subset U \implies \{B_{x_0,i}\}_{i,x_0}$ – база топологии.
Это обобщение $B(x_0, \varepsilon)$.

Замечание. X – метрическое пространство, тогда X обладает первой аксиомой счетности. $B(x_0, \varepsilon)$, где $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+$.

Пример 6.8. $\mathbb{R}$ с топологией Зариского не обладает первой аксиомой счетности.

Допустим: есть счетное $\{U_{x_0,i}\}$ $\forall x_0$. Рассмотрим $U_{x_0,1}, U_{x_0,2}$ и так далее, каждое из них НЕ содержит счетное число точек, в итоге счетный набор точек НЕ содержится в каком-то из этих множеств. Значит $\exists y \in U_{x_0,i}$ $\forall i$. Возьмем $U = \mathbb{R} \setminus \{y\}$ – окрестность x_0. $\nexists U_{x_0,i} \subset U$ т.к. $U \not\ni y$.

Замечание. Из второй аксиомы счетности следует первая аксиома счетности.

Определение 6.7. a называется точкой накопления, если для любой U_a выполнено: $U_a \cap A$ – бесконечно.

Замечание. Точка накопления не обязательно лежит в A.

[Примечание редактора: для следующих теорем большое доказательство будет разбито на несколько блоков для простоты восприятия]

Теорема 6.3. Для утверждений:

1. X компактно
2. $A \subset X : |A| = \infty \implies \exists a$ – точка накопления A.
3. X секвенциально компактно
4. $\forall F_1 \supset F_2 \supset \dots$ и $F_i \neq \varnothing$ – замкнутое, тогда $\bigcap_{i=1}^{\infty} F_i \neq \varnothing$

выполнено:

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, Rightarrow] & 2 \arrow[d, Rightarrow, "+\text{ I AC}"] \\ 4 \arrow[u, Rightarrow, "+\text{ II AC}"] & 3 \arrow[l, Rightarrow] \end{tikzcd}$$

Доказательство. Из 1 в 2:
Допустим противное: любая $a \in X$ – не точка накопления. Тогда $\exists U_a : U_a \cap A$ – конечна.
Соберем все $\{U_a\}_{a \in X}$ – открытое покрытие X, значит $\exists U_{a_1}, \dots, U_{a_n}$ – конечное подпокрытие.
Каждое $U_{a_i} \cap A$ – конечное, тогда $\bigcup_{i=1} (U_{a_i} \cap A)$ – конечное. Но это объединение есть A – противоречие. ■

Доказательство. Из 2 в 3:
Хотим для любой последовательности иметь сходящуюся подпоследовательность. A – множество членов последовательности.
Если A конечно, то какой-то член повторяется бесконечное количество раз, его возьмем как подпоследовательность.
Пусть A бесконечное, тогда возьмем x_0 – точка накопления. По первой аксиоме счетности: существует $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ – счетная база окрестностей x_0 и считаем, что $U_1 \supset U_2 \supset U_3 \supset \dots$
Пусть $V_1, V_2, \dots$ – какая-то счетная база окрестностей. Тогда $U_1 := V_1$, $U_2 := V_1 \cap V_2$, $U_3 := V_1 \cap V_2 \cap V_3$ и т.д.
$|U_i \cap A| = \infty$, значит выберем $a_i \in U_i \cap A$ так, чтобы все a_i различны и номер a_i в последовательности больше номеров предыдущих выбранных. Тогда $a_i \to x_0$. Почему?
$\forall U$ – окрестность x_0 $\exists U_n \subset U, U_{n+1} \subset U, U_{n+2} \subset U \dots$ Рассмотрим

$a_n \in U_n \subset U$, $a_{n+1} \in U_{n+1} \subset U$ и т.д. $\forall k \geqslant n$ $a_k \in U \implies \lim_{n\to\infty} a_n = x_0$. ■

Доказательство. Из 3 в 4:
$F_1 \supset F_2 \supset F_3 \supset \ldots$ – замкнутые, $F_i \neq \varnothing$. $F_i \neq F_{i+1}$ (иначе сократим). Хотим $\bigcap F_i \neq \varnothing$.
Выберем $x_n \in F_n \backslash F_{n-1}$. Отсюда $\{x_n\}$ – последовательность. Тогда $\exists x_{n_k} \to x_0$. Утверждение: $x_0 \in \bigcap_{i=1}^{\infty} F_i$. Покажем, что $x_0 \in F_i$ $\forall i$.
Допустим: $x_0 \notin F_m$. Выберем $U_m := X \setminus F_m$ – открытое. $x_0 \in U_m$ значит $\exists N : \forall k \geqslant N$ $x_{n_k} \in U_m$. Все $x_{n_k} \notin F_m$.
НО если $n_k \geqslant m$, то $x_{n_k} \in F_{n_k} \subset F_m$. Противоречие. ■

Доказательство. Из 4 в 1:
X удовлетворяет второй аксиоме счетности. Пусть $\{U_i\}$ – любое открытое покрытие X. Считаем, что $\{U_i\}$ счетно (по 6.2), т.е. $\{U_i\} = \{U_1, U_2, \ldots\}$.
Построим замкнутые множества: $V_1 = U_1, V_2 = U_1 \cup U_2, \ldots, V_n := \bigcup_{i=1}^{n} U_i$. $V_1 \subset V_2 \subset V_3 \subset \ldots$ – открытые.
Тогда $F_i := X \backslash V_i$ – замкнутые. $F_1 \supset F_2 \supset F_3 \supset \ldots$ Почему $F_i \neq \varnothing$?
Если $F_k = \varnothing \implies V_k = X$. $U_1 \cup \ldots \cup U_k = X$ – победа.
Иначе по (3) $\bigcap_{k=1}^{\infty} F_k \neq \varnothing \implies \bigcup_{k=1}^{\infty} V_k \neq X$. Тогда и $\bigcup_{k=1}^{\infty} U_k \neq X$ значит $\{U_k\}$ не покрытие, НО изначально брали покрытие – противоречие. ■

6.3. Компактность в метрических пространствах

Замечание. $A \subset \mathbb{R}^n$ компактно $\Leftrightarrow$ A – замкнуто и ограниченно. Если $A \subset (M, \rho)$ – не обязательно.

Пример 6.9. Есть $\mathbb{R}$ с дискретной топологией. $\rho(x, y) = 1$, если $x \neq y$.

$\forall U$ – замкнуто и ограничено. $B(x_0, 2) = X \supset U$, значит U – ограничено, U замкнуто, т.к. любое множество замкнуто в дискретной топологии. Но если U бесконечное множество, тогда U не компактно.

Определение 6.8. (M, ρ) – метрическое пространство. $\{x_n\}$ – последовательность. $\{x_n\}$ называется фундаментальной, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon): \text{ если } \forall n, k \geqslant N \text{ то } \rho(x_n, x_k) < \varepsilon$$

Определение 6.9. Пространство M называется полным, если любая фундаментальная последовательность сходится.

Пример 6.10. $\mathbb{Q}$ – не полное, $\mathbb{R}$ – полное.

Теорема 6.4 (из курса матанализа)**.** Следующие определения равносильны:

1. $[a_1; b_1] \supset [a_2; b_2] \supset \ldots \implies \exists x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n; b_n]$
2. Любая фундаментальная последовательность сходится

Определение 6.10. Пусть $\varepsilon > 0$, тогда $\{x_i\}_{i \in I}$ называете ε-сетью пространства M, если $\forall y \in M\ \exists x_i : \rho(x_i, y) < \varepsilon$.
Переформулируем: $\{B(x_i, \varepsilon)\}_{i \in I}$ – покрытие M.

Задача: Есть код из n бинарных символов. При передаче портится не более чем k символов. Сколько различных кодов можно передать?

Пусть $K_1, \ldots, K_l$ – коды, которые можем передать. Это означает $\rho(K_i, K_j) \geqslant 2k$ (расстояние – количество отличающихся бит). Если набор $K_1, \ldots, K_l$ – максимальный, тогда $\nexists K_{l+1} : \rho(K_{l+1}; K_i) \geqslant 2k \implies \{K_i\}$ – $2k$-сеть.

Определение 6.11. Если $\forall \varepsilon\ \exists$ конечная ε-сеть, то M называется вполне ограниченным.

Предложение 6.5. Если M вполне ограниченно, то M удовлетворяет второй аксиоме счетности.

Доказательство. Пусть $\varepsilon_k = \frac{1}{k}$, X – множество точек, входящих в какую либо из ε_k-сетей. Значит X – счетное множество, как счетное объединение счетных множеств. $\left\{B\left(x_k, \frac{1}{l}\right) : x_k \in X, l \in \mathbb{N}\right\}$ – база.

Пусть $U \subset M$ – открытое, $y_0 \in U$ – точка. Докажем: $\exists B\left(x_k, \frac{1}{l}\right) \subset U$, y_0 лежит в этом шаре.
$\exists B(y_0, \varepsilon) \subset U$ (т.к. U открыто). Скажем, что $\frac{1}{l} < \frac{\varepsilon}{2}$, тогда $\exists x_n$: $\rho(x_n, y_0) < \frac{1}{l}, B\left(x_n, \frac{1}{l}\right)$ подходит. ■

Замечание. Первая аксиома счетности выполняется в любом метрическом пространстве.

Теорема 6.6. (M, ρ) – метрическое пространство. Следующие определения равносильны:

1. M компактно
2. M секвенциально компактно
3. M полное и вполне ограниченное

План доказательства: $1 \implies 2 \implies 3 \implies 2$, $2 \;\&\; 3 \implies 1$.

Доказательство. $1 \implies 2$
M – метрическое пространство, значит первая аксиома счетности выполнена, тогда из компактности следует секвенциальная компактность по 6.3. [далее прямой ссылки на теорему при применении нет] ■

Доказательство. $2 \implies 3$
Полнота:
Допустим, что $\{x_n\}$ – фундаментальная, но не сходящаяся последовательность. M – секвенциально компактно, тогда существует $\{x_{n_k}\} : x_{n_k} \to x_0$, тогда и $x_n \to x_0$.

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N : \text{ если } n_k > N \text{ то } \rho(x_{n_k}, x_0) < \varepsilon/2$$

Если $l > N$, то $\rho(x_{n_k}, x_l) < \varepsilon/2$, значит $\rho(x_l, x_0) < \varepsilon$ и x_n сходится.
Вполне ограниченность:
Допустим $\exists \varepsilon$, что нет конечной ε-сети. Тогда

$$\exists x_1, x_2, ... : \rho(x_n, x_k) > \varepsilon.$$

Выберем x_1, $\exists x_2 : \rho(x_1, x_2) \geqslant \varepsilon$, $\exists x_3 : \rho(x_3, x_1) \geqslant \varepsilon$ и $\rho(x_3, x_2) \geqslant \varepsilon$ и т.д. $\{x_i\}$ – последовательность. У нее нет сходящейся подпоследовательности. ■

Доказательство. $3 \implies 2$
Пусть $\{x_n\}$ – последовательность, хотим выбрать фундаментальную подпоследовательность. (из-за полноты она будет сходящейся) Возьмем $\varepsilon_1 = 1$, тогда существует конечная ε_1-сеть.
Пусть y_1 точка из конечной ε_1-сети. Тогда в $B(y_1, 1)$ есть бесконечно много x_i. Выберем один из них: x_{n_1}. В следующих выборках будем брать только из x_i, входящих в $B(y_1, 1)$. Пусть $\varepsilon_2 = 1/2$. Существует конечная ε_2-сеть. В $B(y_2, 1/2)$ есть бесконечно много x_i. Выберем один из них: x_{n_2}. Пусть $\varepsilon_3 = 1/3$ и т.д.
Получим $\{x_{n_k}\}$: $x_{n_k} \in \bigcap_{i=1}^k B(y_k, \varepsilon_i)$. Тогда $|x_{n_k} - x_{n_l}| < 2 \cdot \max\left\{\frac{1}{k}, \frac{1}{l}\right\}$. Пусть $k < l$, тогда $x_{n_k}, x_{n_l} \in B\left(y_k, \frac{1}{k}\right)$. Отсюда $\rho(x_{n_k}, x_{n_l}) < \frac{2}{k}$ и это означает, что $\{x_{n_k}\}$ – фундаментальная. ■

Доказательство. $2 \,\&\, 3 \implies 1$
Из вполне ограниченности следует вторая аксиома счетности. Секвенциальная компактность со второй аксиомой счетности дает компактность. ■