Геометрия и топология

Курс Солынина А. А.

Осень 2021 г.

Примечание

Конспекты написаны не полностью и (скорее всего) с большим числом опечаток!

Оглавление

Часть I

Векторные пространства

ГЛАВА 1

Введение

1.1. Множества

Определение 1.1. Множество — неопределяемое понятие.

A, B — множества
$A \cup B = \{x : x \in A$ или $x \in B\}$ — объединение
$A \cap B = \{x : x \in A$ и $x \in B\}$ — пересечение
$A \setminus B = \{x : x \in A$ or $x \notin B\}$ — разность
$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ — симметрическая разность
$A \times B = \{(x, y) : x \in A; y \in B\}$ — декартово произведение множеств

Примеры декартового произведения множеств

1. Координатная плоскость $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$
2. Множество полей шахматной доски $\{A, B, C, D, E, F, G, H\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
3. Колода карт {масти} $\times$ {достоинства}
4. Нумерация мест в театре
5. Нумерация аудиторий на ММ

1.2. Отображения

Определение 1.2. Пусть A, B — множества. Говорим, что задано отображение $f : A \to B$, если задано правило, сопоставляющее каждому $x \in A$ ровно один $y \in B$.
Пишем: $y = f(x)$.

Пример. $f(x) = \frac{1}{x}$ — не отображение, т.к. $f(0)\nexists$.
Однако при $\mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ такое отображение существует.

Пример.

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$(x, y) \mapsto x + y$$

Любая операция является отображением

Пример. $A \subset B \quad i : A \to B \quad i(a) = a$
$A \hookrightarrow B$ — отображение включения
$\mathrm{id} : A \to A \quad \mathrm{id}(x) = A$ — тождественное отображение

1.3. Отношения эквивалентности

Определение 1.3. M – множество, $\mu \subset M \times M \implies \mu$ называется отношением над M.

$\forall a, b \in M$ два случая

1. $(a, b) \in \mu$ пишем $a\mu b$
2. $(a, b) \notin \mu$ пишем $a\not{\mu} b$

Пример. $=, <, \leqslant, >, \geqslant, \vdots$

$\subset$ тоже отношение, но только на множестве некоторых множеств.

Если M – множество людей, то слова «отец», «мать», «муж», «жена» и т.д.

Определение 1.4. Отношение μ называется рефлексивным, если

$$\forall a : a\mu a$$

Определение 1.5. Отношение μ называется симметричным, если

$$a\mu b \implies b\mu a$$

Определение 1.6. Отношение μ называется транзитивным, если

$$\left.\begin{matrix} a\mu b \\ b\mu c \end{matrix}\right\} \Longrightarrow a\mu c$$

Определение 1.7. Отношение называется отношением эквивалентности, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно. Обозначение:$\sim$.

Определение 1.8. Если $a \in M, K_a = \{b : a \sim b\}$ – класс эквивалентности.

Теорема 1.1. $K_a = K_b$ *либо* $K_a \cap K_b = \varnothing$

Доказательство. Допустим противоречие, тогда $\exists c \in K_a \cap K_b, \exists d \in K_a \setminus K_b$ (или $\in K_b \setminus K_a$)

$$a \sim c; b \sim c \qquad a \sim d; b \nsim d$$

$$\left.\begin{matrix} a \sim c \\ c \sim b \end{matrix}\right\} \Longrightarrow a \sim b \qquad \left.\begin{matrix} d \sim a \\ a \sim b \end{matrix}\right\} \Longrightarrow d \sim b \qquad ※$$

■

Определение 1.9. Множество классов эквивалентности называется фактор-множество. Обозначается $M/\sim$

1.4. Определители 2×2 и 3×3

Определение 1.10 (Неформальное)**.** На плоскости: $\mathbf{a} = (a_1, a_2); \mathbf{b} = (b_1, b_2)$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = S_{\mathbf{a},\mathbf{b}} \text{ (ориентированная площадь)}$$

В пространстве: $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3); \mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3); \mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = V_{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}} \text{ (ориентированный объем)}$$

Определение 1.11 (Формальное)**.**

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 - a_3 b_2 c_1$$

Мнемоническое правило:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_1 & a_2 & a_3 & a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_1 & c_2 \end{array}\right|$$

По бирюзовой стрелке сложение, по зеленой – вычитание.

Свойства

Замечание. Данные свойства справедливы для матриц любого порядка.

1. Если строку или столбец умножить на α, то определитель тоже умножится на α.

2. Если меняем 2 строки или столбца, то знак определителя меняется.

3. Если есть 2 одинаковых строки, то определитель равен 0.

4. Если к одному из векторов прибавить вектор кратный другому, то определитель не поменяется

$$\begin{vmatrix} a_1+\alpha b_1 & a_2+\alpha b_2 & a_3+\alpha b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \alpha \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Утверждение 1.1. *Эти свойства и* $\left|\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right| = 1$ *полностью определяют функцию объема*

ГЛАВА 2

Понятие векторного пространства

Определение 2.1. Множество V с двумя операциями: $+ : V \times V \to V; \quad (a,b) \mapsto a+b$ и $\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$ называется векторным пространством (над $\mathbb{R}$), если при условии $\forall \mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c} \in V; \forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}$, выполнены следующие свойства:

1. $\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$ — ассоциативность
2. $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$ — коммутативность
3. $\exists \mathbf{0} : \forall \mathbf{a} \quad \mathbf{0} + \mathbf{a} = \mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$
4. $\forall \mathbf{a} \exists (-\mathbf{a}) : \mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$[1]
5. $\alpha(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \alpha\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b}$ — дистрибутивность

Доказательство.

$$\alpha(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \alpha\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b}$$
$$\mathbf{a} = (x_1, y_1) \quad \mathbf{b} = (x_2, y_2)$$
$$\alpha(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \alpha((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) = \alpha(x_1 + x_2, y_1 + y_2) =$$
$$(\alpha(x_1 + x_2), \alpha(y_1 + y_2)) = (\alpha x_1 + \alpha x_2, \alpha y_1 + \alpha y_2) =$$
$$(\alpha x_1, \alpha y_1) + (\alpha x_2, \alpha y_2) = \alpha(x_1, y_1) + \alpha(x_2, y_2) =$$
$$\alpha\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b}$$

[1] Если выполнены свойства 1–4, то V называется коммутативной (абелевой) группой.

■

6. $(\alpha + \beta)\mathbf{a} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{a}$ — дистрибутивность
7. $(\alpha \cdot \beta)\mathbf{a} = \alpha(\beta\mathbf{a})$ — ассоциативность
8. $1 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}$

Свойства векторного пространства

1. $\mathbf{0}$ — единственный

   Доказательство. $\mathbf{0}_1 = \mathbf{0}_1 + \mathbf{0}_2 = \mathbf{0}_2$ ■

2. $-\mathbf{a}$ — единственный

   Доказательство. Пусть $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ – противоположные к $\mathbf{a}$

$$\mathbf{b}_1 + \mathbf{a} = \mathbf{0} \quad \mathbf{b}_2 + \mathbf{a} = \mathbf{0}$$
$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{b}_1 + \mathbf{0} = \mathbf{b}_1 + (\mathbf{a} + \mathbf{b}_2) = (\mathbf{b}_1 + \mathbf{a}) + \mathbf{b}_2 = \mathbf{0} + \mathbf{b}_2 = \mathbf{b}_2$$

■

3. $0 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{0}$
4. $-1 \cdot \mathbf{a} = -\mathbf{a}$

Примеры векторных пространств

1. Координатная плоскость $\{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$
2. Координатное трехмерное пространство $\{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$
3. Строки длины n из вещественных чисел
   $V = \{(x_1, x_2, ..., x_n) : x_i \in \mathbb{R}\}$ или матрицы (2d массивы)

Операции над векторами

$$\mathbf{a} = (x_1, y_1) \quad \mathbf{b} = (x_2, y_2)$$
$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$
$$\alpha\mathbf{a} = (\alpha \cdot x_1, \alpha \cdot y_1)$$

2.1. Линейная комбинация, линейная зависимость и линейная независимость

Определение 2.2. V - векторное пространство и векторы $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, ..., \mathbf{v}_n \in V$. Система $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n$ называется линейно независимой (ЛНЗ), если из $\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + ... + \alpha_n\mathbf{v}_n = 0 \implies \alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$.

Определение 2.3. Если $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$, $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n \in V$. То $\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + ... + \alpha_n\mathbf{v}_n$ – линейная комбинация (ЛК) векторов $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n$.

Определение 2.4. Если $\exists\alpha_1, ..., \alpha_n$, не все $= 0$, но $\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + ... + \alpha_n\mathbf{v}_n = 0$, то система $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n$ называется линейно зависимой (ЛЗ).

Утверждение 2.1. $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n$ *– ЛЗ $\Leftrightarrow$ один из этих векторов можно представить как ЛК остальных.* $\exists i : \mathbf{v}_i = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + ... + \alpha_{i-1}\mathbf{v}_{i-1} + \alpha_{i+1}\mathbf{v}_{i+1} + ... + \alpha_n\mathbf{v}_n$

Доказательство. $\implies : \exists\alpha_1, ..., \alpha_n(\exists i : \alpha_i \neq 0)$

$$\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + ... + \alpha_n\mathbf{v}_n = 0$$
$$\alpha_i\mathbf{v}_i = -\alpha_1\mathbf{v}_1 - \alpha_2\mathbf{v}_2 - ... - \alpha_{i-1}\mathbf{v}_{i-1} - \alpha_{i+1}\mathbf{v}_{i+1} - ... - \alpha_n\mathbf{v}_n$$
$$\alpha_i \neq 0 \quad \mathbf{v}_i = -\frac{\alpha_1}{\alpha_i}\mathbf{v}_1 - ... - \frac{\alpha_n}{\alpha_i}\mathbf{v}_n$$

$\Leftarrow$: $\mathbf{v}_i = \alpha_1\mathbf{v}_1 + ... + \alpha_n\mathbf{v}_n$ без i-ого слагаемого

$$\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + ... + (-1)\mathbf{v}_i + ... + \alpha_n\mathbf{v}_n = 0$$

ЛК $= 0$ не все коэффициенты $= 0$

■

Свойство 2.1. $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n$ – ЛНЗ, то любой его поднабор тоже ЛНЗ. $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n$ – ЛЗ, то при добавлении векторов, набор останется ЛЗ.

Утверждение 2.2. $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n$ *– ЛНЗ $\Leftrightarrow$ если*

$$\alpha_1\mathbf{v}_1 + ... + \alpha_n\mathbf{v}_n = \beta_1\mathbf{v}_1 + ... + \beta_n\mathbf{v}_n$$
$$\implies \alpha_1 = \beta_1; \alpha_2 = \beta_2; ...; \alpha_n = \beta_n$$

Доказательство.

$$(\alpha_1 - \beta_1)\mathbf{v}_1 + (\alpha_2 - \beta_2)\mathbf{v}_2 + ... + (\alpha_n - \beta_n)\mathbf{v}_n = 0$$
$$\alpha_i - \beta_i = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n\text{– ЛНЗ}$$

■

ГЛАВА 3

Базис векторного пространства

Определение 3.1. Набор $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$ называется порождающим для V, если $\forall \mathbf{w} \in V \exists \alpha_1, ..., \alpha_n : \mathbf{w} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + ... + \alpha_n \mathbf{v}_n$

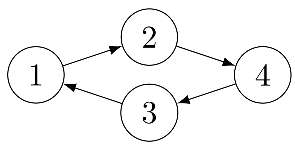
Свойство 3.1. Если к порождающему набору прибавить вектор, то он останется порождающим. Если убрать векторы из непорождающего набора векторы, то набор останется непорождающим.

Определение 3.2. $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$ называется базисом V, если этот набор ЛНЗ и порождающий.

Теорема 3.1 (О базисе)**.** *Следующие определения базиса равносильны:*

1. *ЛНЗ и порождающий набор*
2. *Минимальный порождающий набор (минимальный по включениям)*
3. *Максимальный ЛНЗ набор (максимальный по включениям)*
4. *Порождающий набор* $\forall \mathbf{w} \in V \exists! \alpha_1, ..., \alpha_2 : \mathbf{w} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + ... + \alpha_n \mathbf{v}_n$

Доказательство. Цепочка доказательств:



$1 \to 2$. Дан $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n$ – ЛНЗ и порождающий набор. Доказать, что он минимальный порождающий.

Допустим, что $\mathbf{v}_i$ выкинули, оставшийся набор остался порождающим $\implies$ $\mathbf{v}_i$ – ЛК остальных $\implies$ ЛЗ ※.

$2 \to 4$. Дан $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n$ – минимальный порождающий набор. Доказать $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n$ – порождающий с единственностью коэффициентов.

Допустим противное: $\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + ... + \alpha_n\mathbf{v}_n = \beta_1\mathbf{v}_1 + ... + \beta_n\mathbf{v}_n$

$$\alpha_i \neq \beta_i$$
$$(\alpha_i - \beta_i)\mathbf{v}_i = (\beta_1 - \alpha_1)\mathbf{v}_1 + ... \text{ (без } i\text{-ого)} + (\beta_n - \alpha_n)\mathbf{v}_n$$
$$\mathbf{v}_i = \frac{\beta_1 - \alpha_1}{\alpha_i - \beta_i} + ... \text{ (без } i\text{-ого)} + \frac{\beta_n - \alpha_n}{\alpha_i - \beta_i}$$

$\mathbf{v}_i$ – выкинем. В любой ЛК с $\mathbf{v}_i$ заменим $\mathbf{v}_i$ на выражение выше $\implies$ набор порождающий. Значит без единственности коэффициентов получаем противоречие с дано

$4 \to 3$. Дан $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n$ – порождающий набор с единственностью коэффициентов. Доказать: $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n$ – максимальный ЛНЗ (ЛНЗ уже доказана)

Допустим противное: $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n; \mathbf{u}$ – ЛНЗ набор

$$\mathbf{u} = \alpha_1\mathbf{v}_1 + ... + \alpha_n\mathbf{v}_n (\alpha_1, ...\alpha_n \exists!) \implies \mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n, \mathbf{u} \text{ – ЛЗ} \qquad ※$$

$3 \to 1$. Дан $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n$ – максимальный ЛНЗ. Доказать $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n$ – ЛНЗ и порождающий набор.

$$\begin{array}{ll}
\forall \mathbf{w} \in V & \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n, \mathbf{w} \text{ – ЛЗ набор} \\
 & \alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + ... + \alpha_n\mathbf{v}_n + \beta\mathbf{w} = \mathbf{0} \\
\text{Если } \beta = 0 \implies & \alpha_1\mathbf{v}_1 + ... + \alpha_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0} \\
 & \text{не все коэффициенты } = 0 (\alpha_i \neq 0) \\
 & \implies \mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n \text{ – ЛЗ} \\
\beta \neq 0 \implies & \mathbf{w} = -\frac{\alpha_1}{\beta}\mathbf{v}_1 - \frac{\alpha_2}{\beta}\mathbf{v}_2 - ... - \frac{\alpha_n}{\beta}\mathbf{v}_n
\end{array}$$

■

Замечание. Любую конечную порождающую систему можно сузить до базиса.

Замечание. Если есть конечный порождающий набор, то любую ЛНЗ систему можно расширить до базиса.

Определение 3.3. Размерность пространства равна количеству элементов в базисе. (пока нет доказательств корректности)

Лемма 3.1. *Система линейных уравнений:* $(a_{ij} \in \mathbb{R}; x_i \in \mathbb{R}; 0 \in \mathbb{R})$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0 \\ ... \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + ... + a_{kn}x_n = 0 \end{cases}$$

Имеет ненулевые решения, если $n > k$*.*

Доказательство. Индукция по k. База $k = 1$:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0$$

$$\text{Пусть } a_{11} \neq 0 \implies x_1 = -\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 - \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 - ... - -\frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n$$

$$\forall x_2, ..., x_n : x_1 \text{ выражается через них}$$

$$a_{11} = 0 \implies x_1 = 1; x_2 = x_3 = ... = x_n = 0$$

Переход

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0$$

$$\exists i : a_{1i} \neq 0, \text{ иначе выкинем предыдущее уравнение}$$

$$x_i = -\frac{a_{11}}{a_{1i}}x_1 - ... \text{ (без } i\text{-ого)} - -\frac{a_{1n}}{a_{1i}}x_n$$

Подставим выраженное x_i во все остальные уравнения. Уравнений на 1 меньше, переменных на 1 меньше. ■

Пример.

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases} \implies z = 0 \qquad x + y = 0$$

Теорема 3.2. *Если* $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k$ *и* $\mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_n$ *базисы* $\in V$*, то* $k = n$*.*

Доказательство. $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n$ – порождающая система.

$$\mathbf{w}_1 = a_{11}\mathbf{v}_1 + a_{21}\mathbf{v}_2 + a_{31}\mathbf{v}_3 + ... + a_{k1}\mathbf{v}_k$$
$$\mathbf{w}_2 = a_{12}\mathbf{v}_1 + a_{22}\mathbf{v}_2 + a_{32}\mathbf{v}_3 + ... + a_{k2}\mathbf{v}_k$$
$$...$$
$$\mathbf{w}_n = a_{1n}\mathbf{v}_1 + a_{2n}\mathbf{v}_2 + a_{3n}\mathbf{v}_3 + ... + a_{kn}\mathbf{v}_k$$

$$x_1\mathbf{w}_1 + x_2\mathbf{w}_2 + ... + x_n\mathbf{w}_n = \mathbf{0}, x_i \in \mathbb{R} \tag{3.1}$$

т.к. $\mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_n$ – ЛНЗ $\implies$ все $x_i = 0$

$$\begin{aligned} x_1(a_{11}\mathbf{v}_1 + a_{21}\mathbf{v}_2 + ... + a_{k1}\mathbf{v}_k) + x_2(a_{12}\mathbf{v}_1 + a_{22}\mathbf{v}_2 + ... + a_{k2}\mathbf{v}_k) \\ + ... + x_n(a_{1n}\mathbf{v}_1 + a_{2n}\mathbf{v}_2 + ... + a_{kn}\mathbf{v}_k) = \mathbf{0} \\ \mathbf{v}_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n) + \mathbf{v}_2(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n) \\ + ... + \mathbf{v}_k(a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + ... + a_{kn}x_n) = \mathbf{0} \end{aligned}$$

$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_k$ – ЛНЗ $\implies$ все коэффициенты равны 0.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0 \\ ... \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + ... + a_{kn}x_n = 0 \end{cases}$$

Если $n > k \implies \exists$ ненулевые решения $\implies$ противоречие с (3.1) и ЛНЗ $\mathbf{w}_i \implies n \leqslant k$. Аналогично $k \leqslant n \implies n = k$. ■

Если $\exists$ хотя бы один конечный базис, то все базисы будут равномощными.

3.1. Координаты вектора в базисе

Пусть $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$ – базис.

$$\forall \mathbf{w} \in V \implies \exists! \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n : \mathbf{w} = \alpha_1\mathbf{v}_1 + ... + \alpha_n\mathbf{v}_n$$

$\mathbf{w} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ – координаты $\mathbf{w}$ в базисе $\{\mathbf{v}_i\}_{i=1}^n$

$$\begin{gathered} \mathbf{v}_1 = (1, 0, ..., 0) \\ \mathbf{v}_2 = (0, 1, ..., 0) \\ ... \\ \mathbf{v}_n = (0, 0, ..., 1) \end{gathered}$$

ГЛАВА 4

Скалярное произведение

Обозначение скалярного произведения векторов: $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ или $(\mathbf{v}, \mathbf{w})$

Определение 4.1. Если V - векторное пространство, в котором есть операция $\cdot : V \times V \implies \mathbb{R}$, со свойствами:

1. $(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geqslant 0; (\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0}$
2. $(\mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u}, \mathbf{v}) + (\mathbf{u}, \mathbf{w})$
3. $(\alpha \mathbf{u}, \mathbf{w}) = \alpha(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = (\mathbf{u}, \alpha \mathbf{w})$
4. $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{v}, \mathbf{u})$

то такая операция называется скалярным произведением, а V вместе со скалярным произведением называется евклидовым пространством

Пример. $V-$ множество некоторых функций, $\varphi(x)$ - одна функция, которая называется весом, важно, что $\varphi > 0$, тогда $(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)\varphi(x)dx$

Определение 4.2. $|\mathbf{v}| = \sqrt{(\mathbf{v}, \mathbf{v})}, |\mathbf{v}| \geqslant 0, |\mathbf{v}| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0}$

Определение 4.3. $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$, тогда $\cos \angle(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \dfrac{(\mathbf{u}, \mathbf{v})}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|}$

$$\angle(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \arccos \frac{(\mathbf{u}, \mathbf{v})}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|} \in [0; 2\pi]$$

Теорема 4.1 (Неравенство Коши-Буняковского-Шварца)**.**

$$|(\mathbf{u}, \mathbf{v})| \leqslant |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|$$

Доказательство.

$$(\mathbf{u}+t\mathbf{v},\mathbf{u}+t\mathbf{v})\geqslant 0 \quad \forall t$$
$$(\mathbf{u},\mathbf{u})+(\mathbf{u},t\mathbf{v})+(t\mathbf{v},\mathbf{u})+(t\mathbf{v},t\mathbf{v})\geqslant 0$$
$$|\mathbf{u}|^2+2t(\mathbf{u},\mathbf{v})+t^2|\mathbf{v}|^2\geqslant 0 \quad \forall t$$
$$\frac{D}{4}\leqslant 0 \quad (\mathbf{u},\mathbf{v})^2-|\mathbf{u}|^2|\mathbf{v}|^2\leqslant 0$$
$$|(\mathbf{u},\mathbf{v})|\leqslant|\mathbf{u}||\mathbf{v}|$$

■

Замечание. 2 и 3 аксиомы можно заменить одной: $(\mathbf{u},\alpha\mathbf{v}+\beta\mathbf{w})=\alpha(\mathbf{u},\mathbf{v})+\beta(\mathbf{u},\mathbf{w})$

Пример.

$$V=\mathbb{R}^n=\{(a_1,a_2,...,a_n):a_i\in\mathbb{R}\}$$

«стандартное» скалярное произведение:

$$\mathbf{u}=(a_1,a_2,...,a_n) \qquad \mathbf{v}=(b_1,b_2,...,b_n)$$
$$(a_1,a_2,...,a_n)(b_1,b_2,...,b_n)=a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n$$

Аксиомы 1–4 выполняются

$$|(a_1,...,a_n)|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+...+a_n^2}$$

КБШ: $(a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n)^2\leqslant(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+...+b_n^2)$

Теорема 4.2 (Неравенство треугольника)**.** $|\mathbf{u}+\mathbf{v}|\leqslant|\mathbf{u}|+|\mathbf{v}|$

Доказательство.

$$(\mathbf{u}+\mathbf{v};\mathbf{u}+\mathbf{v})\leqslant(|\mathbf{u}|+|\mathbf{v}|)^2$$
$$(\mathbf{u},\mathbf{u})+2(\mathbf{u},\mathbf{v})+(\mathbf{v},\mathbf{v})\leqslant(\mathbf{u},\mathbf{u})+(\mathbf{v},\mathbf{v})+2|\mathbf{u}||\mathbf{v}|$$
$$(\mathbf{u},\mathbf{v})\leqslant|\mathbf{u}||\mathbf{v}| \text{ – верно по неравенству КБШ}$$

■

Определение 4.4. $\mathbf{u},\mathbf{v}\in V;\mathbf{u}\perp\mathbf{v}$ (ортогональные векторы), если $(\mathbf{u},\mathbf{v})=\mathbf{0}$. Для $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,...,\mathbf{u}_n\in V$, $\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,...,\mathbf{u}_n\}$ называется ортогональной системой, если $\forall i\neq j,\mathbf{u}_i\perp\mathbf{u}_j$.

Определение 4.5. $\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,...,\mathbf{u}_n\}$ называется ортонормированной системой, если $\mathbf{u}_i\perp\mathbf{u}_j(i\neq j)$ и $|\mathbf{u}_i|=1$

Определение 4.6. Если $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_n\}$ – ортонормированная система и базис, то это ортонормированный базис (ОНБ).

Утверждение 4.1. $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_n\}$ *– ортогональная система и* $\mathbf{u}_i \neq \mathbf{0}$, *то она ЛНЗ.*

Доказательство.

$$\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha \mathbf{u}_2 + ... + \alpha_n \mathbf{u}_n = \mathbf{0} \quad | \cdot \mathbf{u}_i$$
$$\alpha_1(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_i) + \alpha_2(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_i) + ... + \alpha_n(\mathbf{u}_n, \mathbf{u}_i) = 0$$
$$\alpha_i(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i) = 0 \implies \alpha_i = 0 \forall i$$

■

Утверждение 4.2. $\{\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_n\}$ *– ортогональная система и* $\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2 + ... + \alpha_n \mathbf{u}_n \implies \alpha_i = \frac{(\mathbf{u}_i, \mathbf{v})}{|\mathbf{u}_i|^2}$

Доказательство.

$$\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha \mathbf{u}_2 + ... + \alpha_n \mathbf{u}_n = \mathbf{v} \quad | \cdot \mathbf{u}_i$$
$$\alpha_i(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i) = (\mathbf{v}, \mathbf{u}_i)$$

■

Пример. V – множество 2π-периодических функций.

$$(f, g) = \int_0^{2\pi} f(x) g(x) dx$$

(можем ограничиться кусочно-непрерывными функциями)

$$\begin{pmatrix} \cos 0x, \cos x, \cos 2x, \cos 3x, ... \\ \sin x, \sin 2x, \sin 3x, ... \end{pmatrix}$$

– ортогональная система.

Для проверки достаточно взять

$$\int_0^{2\pi} \sin kx \cos nx dx = 0 \text{ и } \int_0^{2\pi} \cos kx \cos nx dx = 0 \quad (k \neq n)$$

Аналогично с sin

Любая 2π-периодическая функция раскладывается по этой системе.

$$f(x) = a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + ...$$

$$a_i = \frac{\int_0^{2\pi} f(x) \cos ixdx}{\int_0^{2\pi} \cos^2 ixdx} \qquad b_i = ...$$

4.1. Построение ортонормированного базиса

Ортогонализация Грама-Шмидта

Есть $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$ – ЛНЗ

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{v}_1}{|\mathbf{v}_1|} \qquad |\mathbf{u}_1| = 1$$

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2 - \alpha\mathbf{u}_1 \qquad \mathbf{w}_2 \perp \mathbf{u}_1 \qquad \mathbf{u}_2 = \frac{\mathbf{w}_2}{|\mathbf{w}_2|}$$

$$|\mathbf{u}_2| = 1 \qquad \mathbf{u}_2 \perp \mathbf{u}_1$$

$$(\mathbf{u}_1, \mathbf{w}_2) = 0$$

$$(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2 - \alpha\mathbf{u}_1) = 0$$

$$(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2) - \alpha(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1) = 0$$

$$\alpha = (\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2)$$

Пусть $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_{k-1}$ построены (ОНС)

Построим $\mathbf{u}_k$

$$\mathbf{w}_k = \mathbf{v}_k - \alpha_1\mathbf{u}_1 - \alpha_2\mathbf{u}_2 - ... - \alpha_{k-1}\mathbf{u}_{k-1}$$

$$\mathbf{w}_k \perp \mathbf{u}_i \qquad (i \leqslant k-1)$$

$$0 = (\mathbf{w}_k, \mathbf{u}_i) = (\mathbf{v}_k, \mathbf{u}_i) - \alpha_i(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i)$$

$$\alpha_i = (\mathbf{v}_k, \mathbf{u}_i)$$

$$\mathbf{u}_k = \frac{\mathbf{w}_k}{|\mathbf{w}_k|}$$

Строим $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_n$ с помощью данного алгоритма.

Замечание. $\mathbf{u}_i$ – ЛК $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_i$

Следствие 4.1. *Если* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$ *– базис* $\implies$ $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_n$ *– ОНБ, т.е. если* $\dim V = n$*, то* $\exists$ *ОНБ*

Пусть V - евклидово пространство, $\dim V = n$, $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_n$ – ОНБ, $\mathbf{w} = a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2 + ... + a_n\mathbf{u}_n$, то можем записать $\mathbf{w} = (a_1, ..., a_n)$, соответственно $\mathbf{v} = b_1\mathbf{u}_1 + b_2\mathbf{u}_2 + ... + b_n\mathbf{u}_n$, тогда

$$\begin{aligned}(\mathbf{w}, \mathbf{v}) = (a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2 + ... + a_n\mathbf{u}_n, b_1\mathbf{u}_1 + b_2\mathbf{u}_2 + ... + b_n\mathbf{u}_n) = \\ = a_1b_1(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1) + a_1b_2(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) + ... + a_1b_n(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_n) + \\ + a_2b_1(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2) + a_2b_2(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2) + ... + a_2b_n(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_n) + \\ + a_nb_1(\mathbf{u}_n, \mathbf{u}_2) + a_nb_2(\mathbf{u}_n, \mathbf{u}_2) + ... + a_nb_n(\mathbf{u}_n, \mathbf{u}_n) = \\ = a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n\end{aligned}$$

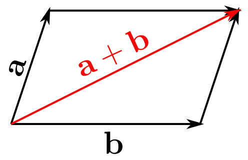
4.2. Геометрический подход

Есть $\mathbb{R}^n$ (например $\mathbb{R}^2$ или $\mathbb{R}^3$), так же есть расстояния и углы.

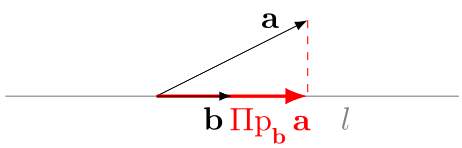
Определение 4.7. Связанный вектор — направленный отрезок.

Определение 4.8. Свободный вектор — класс эквивалентности связанных векторов. $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$, если $ABDC$ – параллелограмм (возможно вырожденный)

Сложение связанных векторов



Нетривиальный момент: почему $(\mathbf{a}, \mathbf{b}+\mathbf{c}) = (\mathbf{a}, \mathbf{b}) + (\mathbf{a}, \mathbf{c})$?



Определение 4.9.

$$\text{Пр}_{\mathbf{b}}\, \mathbf{a} = |\mathbf{a}| \cos\alpha \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} = \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{|\mathbf{b}|} \cdot \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} = \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{|\mathbf{b}|^2}\mathbf{b}$$

Теорема 4.3.

$$\text{Пр}_{\mathbf{b}}(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) = \text{Пр}_{\mathbf{b}}\, \mathbf{a}_1 + \text{Пр}_{\mathbf{b}}\, \mathbf{a}_2$$

Следствие 4.2.

$$\frac{(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2, \mathbf{b})}{|\mathbf{b}|^2}\mathbf{b} = \frac{(\mathbf{a}_1, \mathbf{b})}{|\mathbf{b}|^2}\mathbf{b} + \frac{(\mathbf{a}_2, \mathbf{b})}{|\mathbf{b}|^2}\mathbf{b} \implies (\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2, \mathbf{b}) = (\mathbf{a}_1, \mathbf{b}) + (\mathbf{a}_2, \mathbf{b})$$

ГЛАВА 5

Векторное произведение

Замечание. Векторное произведение существует, только если $\dim V = 3$ (т.е. пространство трехмерное).

Определение 5.1 (Формальное)**.** Пусть $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$, $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{v}$ – вектор со свойствами:

1. $\mathbf{v} \perp \mathbf{a}, \mathbf{v} \perp \mathbf{b}$
2. $|\mathbf{v}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin \alpha$
3. $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b})$ – правая тройка векторов

Вопрос: что такое «правая тройка?» — Ответ: нет «правой» или «левой» троек, но про любые две тройки мы можем сказать одинаково ли они ориентированы.

Определение 5.2. Пусть $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ – фиксированный ортонормированный базис, будем называть его правой тройкой векторов.

Введем определения:

	i	**j**	**k**
i	**0**	**k**	−**j**
j	−**k**	**0**	**i**
k	**j**	−**i**	**0**

– таблица умножения базисных векторов

Пусть

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k} = (a_1, a_2, a_3)$$
$$\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k} = (b_1, b_2, b_3)$$

Тогда векторное произведение **a** и **b**:

$$\begin{aligned}\mathbf{a}\times\mathbf{b} = (a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k})\times(b_1\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}+b_3\mathbf{k}) = \\ a_1b_1\mathbf{i}\times\mathbf{i}+a_1b_2\mathbf{i}\times\mathbf{j}+a_1b_3\mathbf{i}\times\mathbf{j}+ \\ +a_2b_1\mathbf{i}\times\mathbf{i}+a_2b_2\mathbf{i}\times\mathbf{j}+a_2b_3\mathbf{i}\times\mathbf{j}+ \\ +a_3b_1\mathbf{i}\times\mathbf{i}+a_3b_2\mathbf{i}\times\mathbf{j}+a_3b_3\mathbf{i}\times\mathbf{j} = \\ =\mathbf{i}(a_2b_3-a_3b_2)+\mathbf{j}(a_3b_1-a_1b_3)+\mathbf{k}(a_1b_2-a_2b_1)\end{aligned}$$

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{i}(a_2b_3-a_3b_2)+\mathbf{j}(a_3b_1-a_1b_3)+\mathbf{k}(a_1b_2-a_2b_1)$$

Теорема 5.1. *Векторное произведение обладает свойствами:*

1. $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{a}\times\mathbf{c}$
2. $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=-\mathbf{b}\times\mathbf{a}$
3. $\mathbf{a}\times\mathbf{b}\perp\mathbf{a},\mathbf{a}\times\mathbf{b}\perp\mathbf{b}$
4. $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|=|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\alpha$

Доказательство.

$$\begin{aligned}\mathbf{a}&=a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k}\\ \mathbf{b}&=b_1\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}+b_3\mathbf{k}\\ \mathbf{c}&=c_1\mathbf{i}+c_2\mathbf{j}+c_3\mathbf{k}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}1.\qquad \mathbf{b}+\mathbf{c}&=(b_1+c_1)\mathbf{i}+(b_2+c_2)\mathbf{j}+(b_3+c_3)\mathbf{k}\\ \mathbf{a}\times(\mathbf{b}+\mathbf{c})&=\mathbf{i}(a_2(b_3+c_3)-a_3(b_2+c_2))+\mathbf{j}(...)+\mathbf{k}(...)\\ \mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{a}\times\mathbf{c}&=\mathbf{i}(a_2b_3-a_3b_2)+\mathbf{j}(...)+\mathbf{k}(...)+\\ &\quad+\mathbf{i}(a_2c_3-a_3c_2)+\mathbf{j}(...)+\mathbf{k}(...)\end{aligned}$$

После преобразований получим то же самое.

2. Аналогично

$$\begin{aligned}3.\qquad &(\mathbf{a}\times\mathbf{b};\mathbf{a})=\\ &=(\mathbf{i}(a_2b_3-a_3b_2)+\mathbf{j}(a_3b_1-a_1b_3)+\mathbf{k}(a_1b_2-a_2b_1);a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k})=\\ &=a_1(a_2b_3-a_3b_2)+a_2(a_3b_1-a_1b_3)+a_3(a_1b_2-a_2b_1)=0\end{aligned}$$

4. Будем доказывать $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|^2=|\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2\sin^2\alpha=|\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2(1-\cos^2\alpha)$

$$\begin{aligned}&(a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_3b_1-a_1b_3)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2=\\ &(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)\left(1-\frac{(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2}{(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)}\right)=\\ &(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2\end{aligned}$$

Чтобы не расписывать слагаемые перепишем в другом виде:

$$\sum_{i\neq j} a_i^2 b_j^2 - 2\sum_{i<j} a_i b_i a_j b_j = \sum_i a_i^2 b_i^2 + \sum_{i\neq j} a_i^2 b_j^2 - \sum_{i=1}^{3} a_i^2 b_i^2 - 2\sum_{i<j} a_i b_i a_j b_j$$

■

Замечание.

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Определение 5.3 (Ориентация)**.** Пусть[1] $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ – ОНБ («правая тройка»), $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ – векторы.

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k} \\ \mathbf{b} &= b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k} \\ \mathbf{c} &= c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k} \end{aligned}$$

Если $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} > 0$, то $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ называется правой тройкой векторов.

Если $\det < 0$, то $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ называется левой тройкой векторов.
Если $\det = 0$, то $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ – ЛЗ.

Выводы:

1. Ориентация бывает только у ЛНЗ троек – у базисов.

2. Ориентаций бывает ровно 2.

3. Одинаковость ориентаций является эквивалентностью.

Замечание. После этого можно определить $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ как вектор $\perp \mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ с длиной $|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\alpha$ и с нужной ориентацией.

Теорема 5.2. $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a}\times\mathbf{b})$ *– правая тройка*

[1]Здесь возможно стоит обратиться к section 1.4

Доказательство.

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) \qquad \mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$$
$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2b_3 - a_3b_2) + (a_3b_1 - a_1b_3) + (a_1b_2 - a_2b_1) =$$
$$= \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \right) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} (a_2b_3 - a_3b_2) - \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} (a_1b_3 - a_3b_1) + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} (a_1b_2 - a_2b_1)$$
$$= (a_2b_3 - a_3b_1)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 > 0$$

■

5.1. Геометрический смысл векторного произведения

1. Если нужен вектор $\perp \mathbf{a} \perp \mathbf{b}$, то $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ подойдет.
2. $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = S_{\text{параллелограмма}} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin\alpha$

Глава 6

Смешанное произведение

Определение 6.1. $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ – векторы в $\mathbb{R}^3$

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}; \mathbf{c}) \text{ – смешанное произведение}$$

Геометрический смысл: $\pm V_{\text{параллелепипеда}}$

Доказательство.

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}||\mathbf{c}| \cos\alpha = S_{\mathbf{a},\mathbf{b}}|\mathbf{c}| \cos\alpha = \pm V_{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}}$$

∎

В координатах:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}; \mathbf{c}) = (a_2b_3 - a_3b_2; a_3b_1 - a_1b_3; a_1b_2 - a_2b_1)(c_1, c_2, c_3) =$$
$$a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 + a_1b_2c_3 - a_2b_1c_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

6.1. Свойства

1. $(\mathbf{e} + \mathbf{f}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{e}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) + (\mathbf{f}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ для каждого аргумента
2. $(\alpha\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a}, \alpha\mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \alpha\mathbf{c}) = \alpha(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$
3. $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ – ЛЗ
4. $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}) = (\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = -(\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}) = -(\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b}) = -(\mathbf{c}, \mathbf{b}, \mathbf{a})$
5. Знак смешанного произведения – ориентация тройки.

Часть II

Линейная геометрия

ГЛАВА 7

Точечное пространство

Определение 7.1. V – векторное пространство, E – множество. Назовем E точечным (аффинным) пространством , если определена операция $+ : E \times V \to E$, т.е. $(e; \mathbf{v}) \mapsto (e + \mathbf{v})$ со свойствами:

1. $(e + \mathbf{v}_1) + \mathbf{v}_2 = e + (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)$
2. $e + \mathbf{0} = e$
3. $\forall e_1, e_2 \in E \exists! \mathbf{v} \in V : e_2 = e_1 + \mathbf{v}$

Такой вектор будем обозначать $\mathbf{v} = \overrightarrow{e_1 e_2}$

Если в V есть базис $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ и мы зафиксируем $e_0 \in E \implies \forall e \in E \exists! \mathbf{v} : e_0 + \mathbf{v} = e \implies \mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ – координаты в базисе $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$. Обозначим $e = (v_1, v_2, v_3); e_0 = (0, 0, 0)$

Замечание.

$$e = (e_1, e_2, e_3) \qquad f = (f_1, f_2, f_3)$$
$$\overrightarrow{ef} = (f_1 - e_1, f_2 - e_2, f_3 - e_3)$$

ГЛАВА 8

Прямые на плоскости

Есть пространство $V; \dim V = 2$, и ассоциированное с ним точечное пространство E, т.е. E – плоскость

Определение 8.1. Есть $e_0 \in E$ и $\mathbf{n} \in V$. Тогда прямая в E – геометрическое место точек e, таких что $\overrightarrow{e_0e} \perp \mathbf{n}$

Теорема 8.1. *В стандартных координатах прямая задается стандартным линейным уравнением: $ax + by + c = 0$, где координаты $e = (x, y)$, а координаты $(a, b) = \mathbf{n}$.*

Или $\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{Oe} = -c$ (c – константа).

Точка O имеет координаты $(0, 0)$, а $e_0 = (x_0, y_0); e = (x, y)$

$$\overrightarrow{e_0e} \perp \mathbf{n} \qquad ((x - x_0); (y - y_0)) \cdot (a, b) = 0$$
$$(x - x_0)a + (y - y_0)b = 0$$
$$ax + by - ax_0 - by_0 = 0, \text{ где } -ax_0 - by_0 = c$$

Наоборот: любое уравнение $ax + by + c = 0$ (если $a^2 + b^2 \neq 0$) задает прямую

Определение 8.2. $(a, b) = \mathbf{n}$ называется вектором нормали к прямой

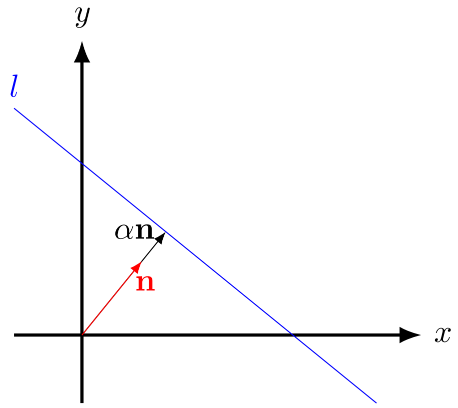
$$ax + by + c = 0 \qquad | : \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$a'x + b'y + c' = 0 \text{ – Нормальное уравнение прямой}$$
$$a'^2 + b'^2 = 1 \qquad a' = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \qquad b' = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$
$$(a', b') \text{ – единичный вектор}$$

Теорема 8.2. *1. $|c'|$ – расстояние от начала координат до прямой.*

2. Расстояние от точки (x_1, y_1) до прямой $ax + by + c = 0$ – это

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Доказательство. 1 – частный случай 2, но докажем сперва 1.



Если $|\mathbf{n}| = 1 \implies |\alpha|$ – искомое расстояние.

$$\mathbf{n} = (a', b') \qquad \alpha\mathbf{n} = (\alpha a', \alpha b')$$
$$a' \cdot \alpha a' + b' \cdot \alpha b' + c' = 0$$
$$\alpha(a'^2 + b'^2) + c' = 0$$
$$\alpha = -c' \qquad |\alpha| = |c'|$$

1.5. $ax + by + c = 0$ – такой вид прямой. Расстояние от 0 до l:

$$|\mathbf{n}| = 1 \qquad \mathbf{n} = \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)$$
$$\alpha\mathbf{n} \in l$$
$$a \cdot \frac{\alpha a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + b \cdot \frac{\alpha b}{\sqrt{a^2 + b^2}} + c = 0$$
$$\alpha \frac{a^2 + b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} + c = 0$$
$$\alpha = \frac{-c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \qquad |\alpha| = \frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

2. Расстояние от (x_1, y_1) до l

$$\tilde{x} = x - x_1 \qquad \tilde{y} = y - y_1$$

В новых координатах точка D – начало координат

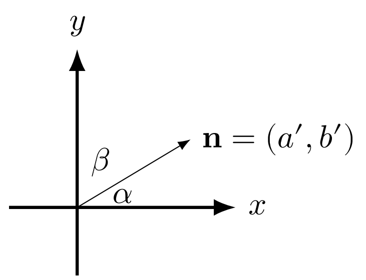
$$x = \tilde{x} + x_1 \qquad y = \tilde{y} + y_1$$
$$ax + by + c = 0$$
$$a\tilde{x} + b\tilde{y} + ax_1 + by_1 + c = 0$$

Воспользуемся 1,5.:

$$\operatorname{dist}(D; e) = \frac{|\tilde{c}|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

■

(a', b') называют направляющими косинусами, т.к.



$$|\mathbf{n}| = 1 \qquad a'^2 + b'^2 = 1$$
$$a' = \cos\alpha$$
$$b' = \sin\alpha = \cos\beta$$

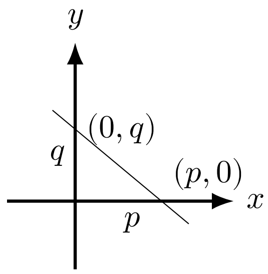
Даны прямые l_1, l_2:

$$l_1 : a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$$
$$l_2 : a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$$
$$\angle(l_1, l_2) = \angle(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2)$$
$$\cos\angle(l_1, l_2) = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} + \sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$
$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0$$
$$l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$$

Определение 8.3 (Уравнение в отрезках)**.** Если $a, b, c \neq 0$, то

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$$

$(p, 0)$ и $(0, q)$ – подходят:



Определение 8.4 (Каноническое уравнение прямой)**.** Если даны 2 точки: $(x_0, y_0); (x_1, y_1)$, тогда

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} \Leftrightarrow (x - x_0)(y_1 - y_0) = (y - y_0)(x_1 - x_0)$$

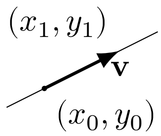
Замечание. Может быть, что $x_1 = x_0$ или $y_1 = y_0$, НО не одновременно, тогда один из знаменателей может быть 0.

Пример.

$$\frac{x - 1}{0} = \frac{y + 2}{-1} \Leftrightarrow x = 1$$

Определение 8.5 (Каноническое уравнение прямой)**.** Если дана точка (x_0, y_0) и вектор $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$, то

$$x_1 - x_0 = v_1 \qquad y_1 - y_0 = v_2$$
$$\frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2}$$



Замечание. Каноническое уравнение прямой задано не однозначно (точки можно менять точки и получать ту же самую прямую).

Определение 8.6 (Параметрическое уравнение прямой)**.**

$$\frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2} = t \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 + v_1 t \\ y = y_0 + v_2 t \end{cases}$$

Определение 8.7. $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ – направляющий вектор прямой.

Определение 8.8 (Угол между прямыми)**.**

$$l_1 : \frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2} \qquad l_2 : \frac{x - x_1}{w_1} = \frac{y - y_1}{w_2}$$

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2) \qquad \mathbf{w} = (w_1, w_2)$$

$$\cos \angle(l_1, l_2) = \frac{v_1 w_1 + v_2 w_2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}\sqrt{w_1^2 + w_2^2}}$$

$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow v_1 w_1 + v_2 w_2 = 0$$

$$l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \frac{v_1}{w_1} = \frac{v_2}{w_2}$$

ГЛАВА 9

Плоскость в пространстве

$\dim V = 3$

Определение 9.1 (Плоскость по 3 точкам)**.** Пусть $e_1, e_2, e_3 \in E$, $\mathbf{v}_1 = \overrightarrow{e_1 e_2}; \mathbf{v}_2 = \overrightarrow{e_1 e_3}$

Плоскость – множество точек $\{e_1 + \alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2 : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

Определение 9.2. Плоскость – множество решений линейного уравнения:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Теорема 9.1. *Определение 1 равносильно определению 2.*

Теорема 9.2. $(A, B, C) = \mathbf{n} \perp$ *плоскости*

Доказательство.

$$e_1 = (x_0, y_0, z_0)$$

$$\mathbf{n} \perp \mathbf{v}_1 \qquad \mathbf{n} \perp \mathbf{v}_2 \qquad \mathbf{n} = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 \qquad \mathbf{n} = (A, B, C)$$

D такое число, что

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 \qquad (D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0)$$

$$\begin{array}{c} - \begin{array}{c} Ax + By + Cz + D = 0 \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 \end{array} \\ \hline A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \end{array}$$

$$(A; B; C) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$$

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = \alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2$$

$$(x, y, z) = e_1 + \alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2$$

■

Определение 9.3 (Угол между плоскостями)**.**

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 = \alpha_1$$
$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 = \alpha_2$$
$$\cos\angle(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$
$$\alpha_1 \perp \alpha_2 : A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$$
$$\alpha_1 \parallel \alpha_2 : \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

Определение 9.4 (Уравнение плоскости в отрезках)**.**

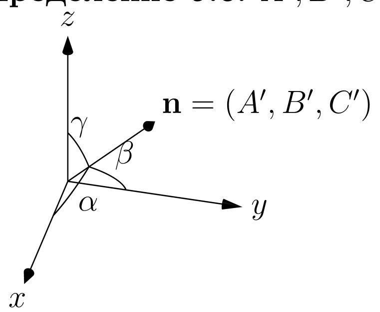
$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1$$

p, q, r – отрезки высекаемые плоскостью на OX, OY, OZ

Определение 9.5 (Нормальное уравнение плоскости)**.**

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad | : \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \neq 0$$
$$A'x + B'y + C'z + D' = 0$$
$$A'^2 + B'^2 + C'^2 = 1$$

Определение 9.6. A', B', C' – направляющие косинусы



$$A' = \cos\alpha$$
$$B' = \cos\beta$$
$$C' = \cos\gamma$$

Теорема 9.3. *1.* $|D'|$ *– расстояние от* $(0, 0, 0)$ *до* α*.*

2. Пусть $Ax + By + Cz + D = 0$ *– плоскость, а* (x_0, y_0, z_0) *– точка, тогда расстояние от точки до плоскости:*

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Доказательство.

1.

$$\mathbf{n} = (A', B', C')$$

$\alpha\mathbf{n}$ – конец $\mathbf{n}$, лежащий в плоскости

$$|\alpha| = d$$
$$\alpha\mathbf{n} = (\alpha A', \alpha B', \alpha C')$$
$$A'(\alpha A') + B'(\alpha B') + C'(\alpha C') + D' = 0$$
$$\alpha + D' = 0 \qquad |\alpha| = |D'|$$

1.5.

$$(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$$
$$Ax + By + Cz + D = 0$$
$$|D'| = \frac{|D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = d$$

2.

$$\tilde{x} = x - x_0 \qquad \tilde{y} = y - y_0 \qquad \tilde{z} = z - z_0$$

Для точки (x_0, y_0, z_0)

$$\tilde{x} = x_0 \qquad \tilde{y} = y_0 \qquad \tilde{z} = z_0$$
$$A\tilde{x} + B\tilde{y} + C\tilde{z} + (Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D) = 0$$
$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

■

ГЛАВА 10

Прямая в пространстве

Определение 10.1. Прямая – пересечение двух не параллельных плоскостей.

Определение 10.2 (Каноническое уравнение прямой в пространстве)**.** Если есть (x_0, y_0, z_0) и (x_1, y_1, z_1), то прямая через эти точки задается уравнением:

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}$$

Определение 10.3 (Каноническое уравнение прямой в пространстве)**.** Если есть 2 уравнения плоскости, то прямая задается как

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

$$\mathbf{n}_1 = (A_1, B_1, C_1) \qquad \mathbf{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$$

$$\mathbf{v} \perp \mathbf{n}_1 \qquad \mathbf{v} \perp \mathbf{n}_2 \qquad \mathbf{v} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2$$

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$$

$$\frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2} = \frac{z - z_0}{v_3}$$

Определение 10.4. $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ – направляющий вектор

Определение 10.5 (Параметрическое уравнение прямой в пространстве)**.**

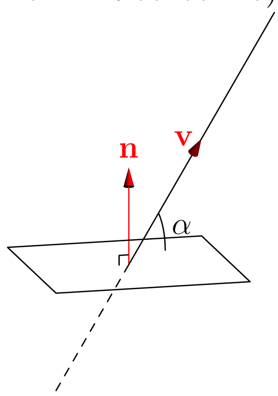
$$\frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2} = \frac{z - z_0}{v_3} = t \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 + v_1t \\ y = y_0 + v_2t \\ z = z_0 + v_3t \end{cases}$$

Определение 10.6 (Угол между прямыми в пространстве)**.**

$$l_1 : \frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2} = \frac{z - z_0}{v_3}$$
$$l_2 : \frac{x - x_1}{w_1} = \frac{y - y_1}{w_2} = \frac{z - z_1}{w_3}$$
$$\cos\angle(l_1, l_2) = \frac{v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}\sqrt{w_1^2 + w_2^2 + w_3^2}}$$
$$l_1 \perp l_2 : v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3 = 0$$
$$l_1 \parallel l_2 : \frac{v_1}{w_1} = \frac{v_2}{w_2} = \frac{v_3}{w_3}$$

Определение 10.7 (Угол между прямой и плоскостью)**.**

$$l_1 : \frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2} = \frac{z - z_0}{v_3}$$
$$\alpha : Ax + By + Cz + D = 0$$



$$\sin\theta = \cos\angle(\mathbf{n}, \mathbf{v}) = \frac{Av_1 + Bv_2 + Cv_3}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}$$
$$\alpha \parallel l_1 : Av_1 + Bv_2 + Cv_3 = 0$$
$$\alpha \perp l_1 : \frac{A}{v_1} = \frac{B}{v_2} = \frac{C}{v_3}$$

Теорема 10.1. *TODO: Сделать рисунок*
l_1, l_2 *– пересекаются в одной точке или параллельны*

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = 0$$

Доказательство. l_1 и l_2 – в одной плоскости, только если $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ и $(x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$ в одной плоскости, это равносильно тому, что их смешанное произведение равно 0. ■

Пример. $\perp$ к l_1 через (x_1, y_1, z_1)

$$\frac{x - x_1}{A} = \frac{y - y_1}{B} = \frac{z - z_1}{C}$$

$$\begin{cases} Av_1 + Bv_2 + Cv_3 = 0 \\ \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ A & B & C \end{vmatrix} = 0 \end{cases}$$

Определение 10.8 (Уравнение плоскости через прямую пересечения)**.** TODO: Сделать рисунок

$$\alpha_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$
$$\alpha_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

Уравнение пучка плоскостей, проходящих через прямую

$$\lambda_1(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \lambda_2(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0 \qquad (10.1)$$

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \lambda \qquad A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0 \quad (10.2)$$

$$\lambda_1 = 0 \implies \lambda_2 \neq 0 \text{ считаем, что } \lambda_2 = 1 \implies \text{уравнение } \alpha_2$$

(10.2) описывает все плоскости проходящие, через прямую кроме α_2.

Предложение 10.1. *Любая плоскость через l выражается через* (10.1).

Доказательство. Если это α_2 – ок $(\lambda_1 = 0; \lambda_2 = 1)$.

Если не $\alpha_2 \implies$ ищем (10.2):

Искомая плоскость проходит через (x_1, y_1, z_1):

$$A_1x_1 + B_1y_1 + C_1z_1 + D_1 + \lambda(A_2x_1 + B_2y_1 + C_2z_1 + D_2) = 0$$
$$\exists\lambda \text{ и находится через это уравнение}$$

■

Если три плоскости: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, хотим провести плоскость через общую точку пересечения

$$\lambda_1(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \lambda_2(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) + \lambda_3(A_3x + B_3y + C_3z + D_3) = 0$$

Часть III

Кривые II порядка

Глава 11

Эллипс

Определение 11.1 (Стандартный вид прямой II порядка)**.**

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + b_1x + b_2y + b_3 = 0$$

$$a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 \neq 0$$

Определение 11.2. Эллипс — кривая, которая в подходящих координатах задается уравнением:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Определение 11.3. Пусть F_1, F_2 – точки (фокусы), если $F_1F_2 = 2c < 2a$, тогда ГМТ M :

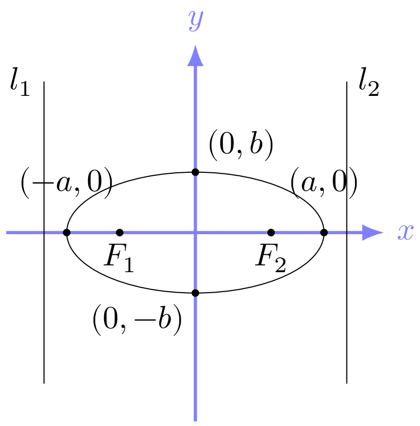
$$F_1M + F_2M = 2a$$

называется эллипсом.

Определение 11.4. F_1 – фокус, l_1 – прямая (директриса). ГМТ M:

$$\frac{\mathrm{dist}(F_1, M)}{\mathrm{dist}(l_1, M)} = e < 1$$

называется эллипсом.



$$F_2(c, 0) \qquad F_1(-c, 0)$$
$$l_{1,2} : x = \pm\frac{a}{e}$$

Параметры эллипса

- a – большая полуось
- b – малая полуось (по умолчанию $a \geqslant b$)
- c – фокальный параметр

$$a^2 = b^2 + c^2$$

- $e = \frac{c}{a} \in [0, 1)$ – эксцентриситет

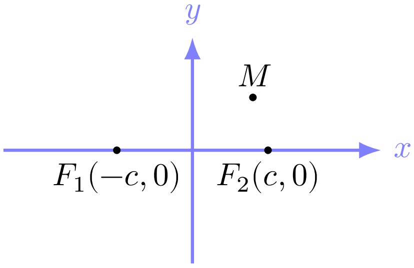
Доказательство

- В определении 11.2 задано $a, b \implies c = \sqrt{a^2 - b^2}, e = \frac{c}{a}$
- В определении 11.3 задано $a, c \implies b = \sqrt{a^2 - c^2}, e = \frac{c}{a}$
- В определении 11.4 задано d расстояние от фокуса до директрисы. Хотим $F(c, 0); l : x = \frac{a}{e}$

$$d = \frac{a}{e} - c = \frac{a}{e} - ae = a\left(\frac{1}{e} - e\right)$$
$$a = \frac{d}{\frac{1}{e} - e}$$
$$c = ae; b = \sqrt{a^2 - c^2}$$

Теорема 11.1. *Определения 11.2, 11.3 и 11.4 равносильны.*

Доказательство. Докажем, что 11.2 и 11.3 равносильны:



$$F_1M + F_2M = 2a$$
$$F_1M = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$
$$F_2M = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$
$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$
$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 + x^2 - 2cx + c^2 + y^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$
$$4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4a^2 - 4cx \quad | : 4a$$

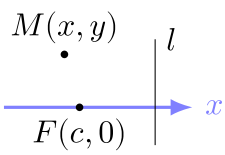
Расстояние от точки на эллипсе до фокуса

$$\boxed{\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a - ex} \qquad \boxed{\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a + ex}$$
$$(x-c)^2 + y^2 = a^2 - 2aex + e^2x^2$$
$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = a^2 - 2aex + e^2x^2$$
$$x^2(1-e^2) + y^2 = a^2 - c^2 = b^2$$
$$x^2\frac{1-e^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Нужно доказать, что:

$$\frac{b^2}{1-e^2} = a^2$$
$$b^2 = a^2 - a^2e^2 \qquad a^2e^2 = c^2$$
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \blacksquare$$

Доказательство. Докажем, что 11.2 и 11.4 равносильны:



$$l : x = \frac{a}{e} \qquad \frac{\sqrt{(x-c)^2 + y^2}}{\frac{a}{e} - x} = e$$
$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = e\left(\frac{a}{e} - x\right) = a - ex$$

Далее смотри равносильность 11.2 и 11.3. $\blacksquare$

Теорема 11.2. *Прямая* $Ax + By + C = 0$ *касается эллипса* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$\Leftrightarrow A^2a^2 + B^2b^2 = C^2$$

Доказательство. Касательная имеет 1 точку пересечения с эллипсом

$$B \neq 0 \qquad y = \frac{-C - Ax}{B} \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{\left(\frac{C+Ax}{B}\right)^2}{b^2} = 1$$
$$x^2b^2B^2 + a^2C^2 + a^2A^2x^2 + 2a^2ACx = a^2b^2B^2$$
$$x^2(a^2A^2 + b^2B^2) + 2a^2ACx + (a^2C^2 - a^2b^2B^2) = 0$$

Это уравнение имеет ровно 1 корень

$$\frac{D}{4} = 0 \qquad a^4A^2C^2 - (a^2C^2 - a^2b^2B^2)(a^2A^2 + b^2B^2) = 0$$
$$a^2A^2C^2 - (C^2 - b^2B^2)(a^2A^2 + b^2B^2) = 0$$
$$a^2A^2C^2 - a^2A^2C^2 - b^2B^2C^2 + a^2b^2A^2B^2 + b^4B^4 = 0$$
$$a^2b^2A^2B^2 + b^4B^4 = b^2B^2C^2$$
$$a^2A^2 + b^2B^2 = C^2$$

■

Теорема 11.3. *Если* (x_0, y_0) *– точка на эллипсе, тогда касательная*

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

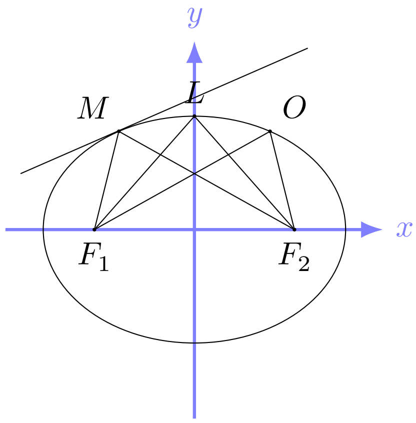
Доказательство.

$$A = \frac{x_0}{a^2} \qquad B = \frac{y_0}{b^2} \qquad C = -1$$
$$a^2A^2 + b^2B^2 = C^2$$
$$a^2\frac{x_0^2}{a^4} + b^2\frac{y_0^2}{b^4} = 1$$
$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$$

Отсюда (x_0, y_0) – точка на эллипсе. ■

Теорема 11.4 (Оптическое свойство эллипса)**.** *l –касательная к эллипсу в точке M* $\implies \angle(l, F_1M) = \angle(l, F_2M)$

Доказательство.



$$l:\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1$$
$$\mathbf{n}=\left(\frac{x_0}{a^2};\frac{y_0}{b^2}\right)$$

Надо доказать:

$$\cos\angle(\mathbf{n};\overrightarrow{F_1M})=\cos\angle(\mathbf{n};\overrightarrow{F_2M})$$
$$\Leftrightarrow\frac{\mathbf{n}\overrightarrow{F_1M}}{|\mathbf{n}||\overrightarrow{F_1M}|}=\frac{\mathbf{n}\overrightarrow{F_2M}}{|\mathbf{n}||\overrightarrow{F_2M}|}$$

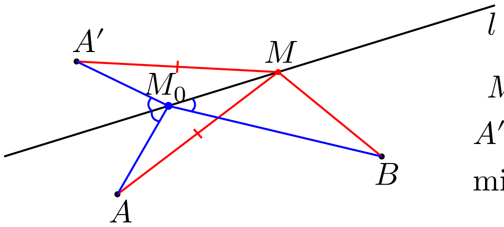
$$\overrightarrow{F_1M}(x_0+c;y_0)\qquad\overrightarrow{F_2M}(x_0-c;y_0)$$

Вспомним:

$$|\overrightarrow{F_1M}|=a+ex\qquad|\overrightarrow{F_2M}|=a-ex$$
$$\frac{\frac{x_0}{a^2}(x_0+c)+\frac{y_0}{b^2}y_0}{a+ex}=\frac{\frac{x_0}{a^2}(x_0-c)+\frac{y_0}{b^2}y_0}{a-ex}$$
$$\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{x_0c}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}\right)(a-ex)=\left(\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{x_0c}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}\right)(a+ex)$$
$$\frac{x_0c}{a^2}=\frac{x_0e}{a}$$
$$\left(1+\frac{x_0e}{a}\right)(a-ex)=\left(1-\frac{x_0e}{a}\right)(a+ex)$$
$$\frac{1}{a}(a+x_0e)(a-x_0e)=\frac{1}{a}(a-x_0e)(a+x_0e)$$

■

Лемма 11.1.



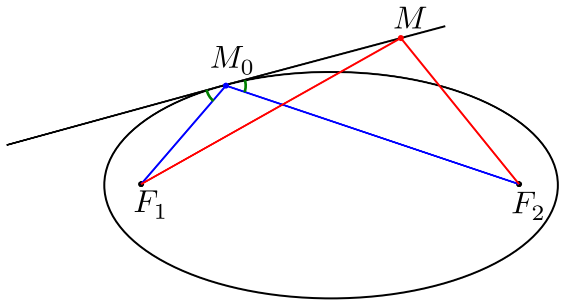
$$AM+MB\to\min$$

M_0 *точка, реализующая* min

A' – *отражение* A *относительно* l

$$\min(AM+MB)=\min(A'M+MB)$$
$$A'M+MB\geqslant A'B$$

Доказательство.



$$\underbrace{F_1M_0 + F_2M_0}_{=2a} < \underbrace{F_1M + F_2M}_{>2a}$$

M_0 – искомая точка из леммы

■

ГЛАВА 12

Гипербола

Определение 12.1. Гипербола – фигура, которая в подходящих координатах задается уравнением:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Определение 12.2. Гипербола – ГМТ M :

$$|F_1M - F_2M| = 2a$$
$$F_1F_2 = 2c > 2a$$
$$(|F_2M - F_2M| \leqslant F_1F_2)$$

Определение 12.3. F_1 – точка, l_1 – прямая. Гипербола – ГМТ M:

$$\frac{F_1M}{\mathrm{dist}(M, l_1)} = e > 1$$

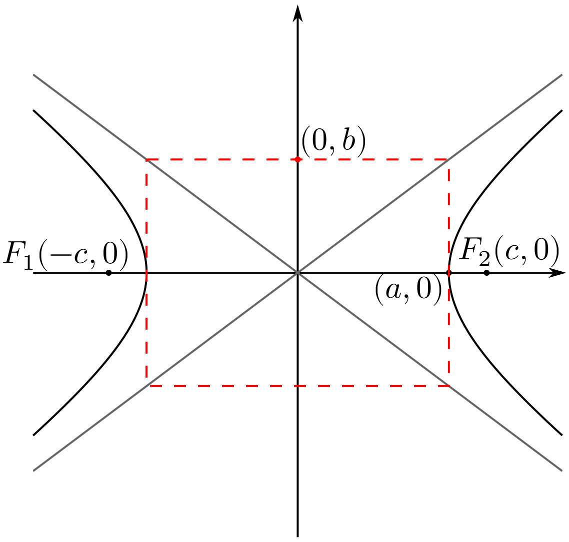
Теорема 12.1. *Определения равносильны*

Доказательство. Доказательство аналогично эллипсу, например т.к.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{(ib)^2}$$

■

Параметры гиперболы



1. a – вещественная полуось
2. b – мнимая полуось
3. c – фокальный параметр (по определению $c > a$)
4. $e = \frac{c}{a} > 1$ – эксцентриситет

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Определение 12.4. Пусть $y = f(x)$ – функция, $y = kx + b$ – прямая. Говорим, что прямая $y = kx + b$ – асимптота функции $y = f(x)$ при $x \to \pm\infty$, если $\lim_{x\to\pm\infty} |f(x) - (kx + b)| = 0$.

Доказательство.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{kx+b} = \lim_{x\to+\infty} \frac{kx+b+g(x)}{kx+b} = \text{ если } g(x) \to 0, x \to \infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{g(x)}{kx+b}\right) = 1 \text{ если } k \neq 0 \text{ или } b \neq 0$$

$$1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{kx+b} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{kx} \cdot \frac{kx}{kx+b} = \frac{1}{k} \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = k \qquad b = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx)$$

■

Теорема 12.2. *Асимптоты гиперболы:*

$$y = \pm\frac{b}{a}x$$

Доказательство.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow y = \pm b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}(\implies x \geqslant a)$$

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$$

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}}{x} = \pm\frac{b}{a}\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}$$

$$k = \pm\frac{b}{a}$$

$$\mathfrak{b} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{b}{a}x\right) = \frac{b}{a}\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2 - a^2 - x^2}{\sqrt{x^2 - a^2} + \sqrt{x^2}} = \frac{b}{a}\cdot 0$$

$\mathfrak{b}$ – коэффициент прямой

$$y = \pm\frac{b}{a}x$$

■

Определение 12.5 (Сопряженные гиперболы)**.**

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

Теорема 12.3. *Прямая* $Ax + By + C = 0$ *касается гиперболы:*

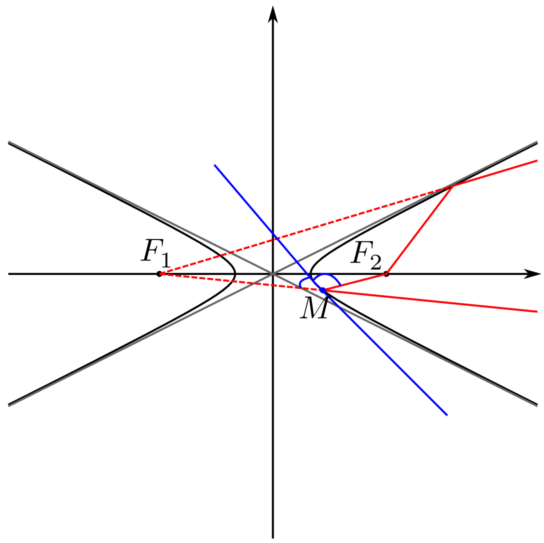
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow a^2A^2 - b^2B^2 = C^2$$

Доказательство. Аналогично эллипсу ■

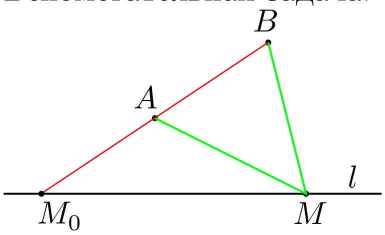
Теорема 12.4. *Если точка* (x_0, y_0) *лежит на гиперболе* $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, *то касательная к этой точке:*

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

Теорема 12.5 (Оптическое свойство гиперболы)**.**



Вспомогательная задача:



$$|AM - BM| \to \max$$
$$AM - BM \leqslant AB \text{ по неравенству } \triangle$$

ГЛАВА 13

Парабола

Определение 13.1. Парабола – кривая, которая в подходящих координатах имеет уравнение:

$$y^2 = 2px$$

где p – параметр параболы

Определение 13.2. Пусть F – точка, l – прямая, тогда парабола – ГМТ M:

$$\frac{FM}{\mathrm{dist}(M;l)} = e = 1$$

Теорема 13.1. *Определения равносильны*

Доказательство.

$$\left(x + \frac{p}{2}\right) = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}$$
$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2$$
$$y^2 = 2px$$

∎

Характеристики параболы

- F – фокус
- l – директриса
- $e = 1$ – эксцентриситет

Теорема 13.2. (x_0, y_0) *– точка на параболе* $y^2 = 2px$*, тогда*

$$yy_0 = p(x + x_0)$$

– уравнение касательной в (x_0, y_0)

Доказательство.

$$px = yy_0 - px_0$$
$$y^2 = 2px = 2yy_0 - 2px_0$$
$$y^2 - 2yy_0 + 2px_0 = 0$$
$$\frac{D}{4} = y_0^2 - 2px_0 = 0$$

1 решение ■

Теорема 13.3 (Оптическое свойство параболы)**.**

ГЛАВА 14

Приведение уравнения II порядка к каноническому виду

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1 + 2b_2y + b_3 = 0$$
$$a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 \neq 0$$

I шаг. Поворот на угол α, чтобы избавиться от a_{12}

Теорема 14.1. (x', y') *получено поворотом* (x, y) *на* α*:*

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha \\ y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{cases} \qquad \begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{cases}$$

Доказательство. Для доказательства используем полярную систему координат $(r, \varphi) \to (r', \varphi')$

$$r' = r \qquad \varphi' = \varphi - \alpha$$
$$x = r\cos\varphi \qquad y = r\sin\varphi$$
$$\begin{cases} x' = r'\cos\varphi' = r\cos(\varphi-\alpha) = r\cos\varphi\cos\alpha + r\sin\varphi\sin\alpha \\ y' = r'\sin\varphi' = r\sin(\varphi-\alpha) = -r\cos\varphi\sin\alpha + r\sin\varphi\cos\alpha \end{cases}$$
$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha \\ y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{cases}$$
$$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha$$
$$y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha$$

■

Получили такое выражение, выясним при каком αa_{12} станет нулем

$$a_{11}(x'\cos\alpha - y'\sin\alpha)^2 + 2a_{12}(x'\cos\alpha - y'\sin\alpha)(x'\sin\alpha + y'\cos\alpha) + \\ + a_{22}(x'\sin\alpha + y'\cos\alpha)^2 + ... = 0$$

Коэффициент при $x'y'$:

$$a_{11}(-2\cos\alpha\sin\alpha) + 2a_{12}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + a_{22}(2\sin\alpha\cos\alpha) = 0$$
$$-a_{11}\sin 2\alpha + 2a_{12}\cos 2\alpha + a_{22}\sin 2\alpha = 0| : \cos 2\alpha$$
$$-a_{11}\operatorname{tg} 2\alpha + a_{22}\operatorname{tg} 2\alpha = -2a_{12}$$
$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}}$$
$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}}$$

Если $a_{12} \neq 0$, то $\operatorname{ctg} 2\alpha$ найдется, то найдем $\alpha \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Если $a_{12} = 0$, то $\alpha = 0$

II шаг. Теперь рассмотрим уравнение

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + b_3 = 0$$

(вообще-то везде штрихи)

Лемма 14.1. *Если $a_{11} \neq 0$, то считаем $b_1 = 0$ (иначе сдвинем переменные: $x' = x - x_0$)*

$$a_{11}x^2 + 2b_1x = a_{11}\left(x^2 + 2\frac{b_1}{a_{11}}x + \frac{b_1^2}{a_{11}^2} - \frac{b_1^2}{a_{11}^2}\right) = a_{11}x'^2 - \frac{b_1^2}{a_{11}}$$
$$x' = x + \frac{b_1}{a_{11}}$$

Аналогично если $a_{22} \neq 0$, то считаем $b_2 = 0$

14.1. Виды кривых

Эллиптический тип

$a_{11} > 0, a_{22} > 0$ (иначе умножим на -1)

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + b^3 = 0$$

1. $b_3 < 0$ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ – эллипс

$$a = \sqrt{\frac{-b_3}{a_{11}}}; b = \sqrt{\frac{-b_3}{a_{22}}}$$

2. $b_3 = 0$ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$ – точка

3. $b_3 > 0$ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$ – пустое множество или мнимый эллипс

Гиперболический тип

$a_{11} > 0, a_{22} < 0$ (или наоборот)

4. $b_3 \neq 0$ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b_2} = 1$ – гипербола

5. $b_3 = 0$ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b_2} = 0$ – пара пересекающихся прямых

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = 0$$
$$\frac{x}{a} = \pm\frac{y}{b}$$

Параболический тип

$a_{11} = 0, a_{22} \neq 0$, считаем, что $b_2 = 0$

$$a_{22}y^2 + 2b_1x + b_3 = 0$$

6. Если $b_1 \neq 0$, то считаем $b_3 = 0$

$$2b_1x + b_3 = 2b_1\left(x + \frac{b_3}{2b_1}\right) = 2b_1x'$$

$y^2 = 2px$ – парабола

7. Если $b_1 = 0, a_{22} > 0 \quad a_{22}y^2 + b_3 = 0$
   $b_3 < 0$ $\frac{y^2}{b^2} = 1$ – пара параллельных прямых

$$\frac{y}{b} = \pm 1$$

8. $b_3 = 0$ $\frac{y^2}{b^2} = 0$ – одна прямая

9. $b_3 > 0$ $\frac{y^2}{b^2} = -1$ – пустое множество или пара мнимых прямых

ГЛАВА 15

Поверхности II порядка

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + \\ 2b_1x + 2b_2y + 2b_3z + b_4 = 0$$

Теорема 15.1. *С помощью вращений можно привести уравнение к виду.*

$$a_{11}x'^2 + a_{22}y'^2 + a_{33}z'^2 + 2b_1'x + 2b_2'y + 2b_3'z + b_4' = 0$$

Штрихи снимаются для удобства

15.1. Виды поверхностей

Эллиптический тип

$$a_{11} > 0 \qquad a_{22} > 0 \qquad a_{33} > 0$$

Если все < 0, то умножим на -1

Лемма 15.1. *Если $a_{11} \neq 0$, то считаем $b_1 = 0$*

$$a_{11}x^2 + 2b_1x = a_{11}\left(x + \frac{b_1}{a_{11}}\right) - \frac{b_1^2}{a_{11}}$$

Получили уравнение:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + b_4 = 0$$

1. Эллипсоид
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$
2. Точка
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$$
3. Мнимая эллипсоид
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$$

Гиперболический тип

$$a_{11}\neq 0 \qquad a_{22}\neq 0 \qquad a_{33}\neq 0$$

Все НЕ одного знака, считаем, что $a_{11}>0$

4. Однополостный гиперболоид
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$
$$z=const \implies \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{z^2}{c^2}$$
$$y=const \implies \frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{y_2}{b_2}$$
$$|y|=b \implies \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=0 \text{ – пара пересекающихся прямых}$$
5. Двуполостный гиперболоид
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$
$$z=const \implies \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}-1$$
$$|z|<c \implies \varnothing$$
$$|z|=c \implies \text{ точка}$$
$$|z|>c \implies \text{ эллипс}$$
$$y=const \implies \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1-\frac{y^2}{b^2} \text{ – гипербола}$$

6. Конус

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$
$$(x, y, z) \in \text{ конусу, то}$$
$$(\alpha x, \alpha y, \alpha z) \in \text{ конусу}$$

Параболический случай

$$a_{33} = 0$$

Лемма 15.2. *Если* $a_{33} = 0, b_3 \neq 0$,*то считаем* $b_4 = 0$

$$b_3 \neq 0 \quad a_{11} \neq 0 \quad a_{22} \neq 0$$

7. Эллиптический параболоид

8._Гиперболический параболоид (седло)

$$\frac{x^2}{a_2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$$

9.

15.2.

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz = f(x, y, z)$$

Рассмотри значения $f(x)$ на $S^2 = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$:

$$f(\alpha x; \alpha y; \alpha z) = \alpha^2 f(x, y, z)$$

Пусть $M \in S^2$ – точка, в которой $f(x, y, z)$ принимает max значение (почему $\exists M$?) Через M проведем OX (x, y, z) новые координаты

$$f(x, y, z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz$$
$$M(1, 0, 0) \max$$

В окрестности M уравнение сферы

$$x = \sqrt{1 - y^2 - z^2}$$

$$f(x, y, z) = a_{11}(1 - y^2 - z^2) + a_{22}y^2 + a_{33}z^2$$

$$+2a_{12}y\sqrt{1 - y^2 - z^2} + 2a_{13}z\sqrt{1 - y^2 - z^2} + 2a_{23}yz$$