Математический анализ

Бабин Руслан, Пономарев Николай
Курс Широкова Н. А.

осень 2021 г.

Оглавление

ГЛАВА 1

Вещественные числа

1.1. Обозначения и нотация

В дальнейшем множество будем понимать как совокупность объектов, называемых его элементами. Приведенное высказывание не является определением, однако в дальнейшем при операциях с конкретными множествами, математический контекст рассматриваемые множества определяет.

Если a, b – некие элементы, A – множество, то запись $a \in A$ означает, что a принадлежит множеству A; запись $b \notin A$ означает, что элемент b не принадлежит множеству A.

Символ $\forall$ означает высказывание «для всякого», далее всегда будет следовать текст конкретизирующий это высказывание.

Символ $\exists$ означает высказывание «существует» и также будет задан математическим контекстом.

Запись $A \Rightarrow B$ или $B \Leftarrow A$ означает «из A следует B»; запись $A \Leftrightarrow B$ означает «A эквивалентно B».

Множества A и B называются совпадающими, что записывают формулой $A = B$, если $(\forall a \in A) \Rightarrow (a \in B)$ и $(\forall b \in B) \Rightarrow (b \in A)$; приведенная формальная запись означает, что $A = B$ в том и только в том случае, когда они состоят из одних и тех же элементов.

Если множества A и B не совпадают, то пишут $A \neq B$.

Определяют также пустое множество, в котором нет элементов, которое будем обозначать символом $\varnothing$.

Запись $A \subset B$ читается «A содержится в B» и означает, что $(\forall a \in A) \Rightarrow (a \in B)$. Полагаем, что $\varnothing \subset A$ для любого множества A. Понятно, что

$$A = B \Leftrightarrow (A \subset B) \text{ и } (B \subset A).$$

В дальнейшем при рассмотрении сразу нескольких множеств в качестве синонима слова «множество» будем использовать слова «семейство», «класс», «совокупность».

1.2. Операции над множествами

Объединением $A \cup B$ множеств A и B будем называть множество:

$$(a \in A \cup B) \Leftrightarrow (a \in A) \text{ или } (a \in B).$$

Если множество A задается каким-то условием, обозначим его «условие», то для задания множества A будем использовать обозначение

$$A = \{a : \text{«условие» на } a\}$$

Пример.

$$A_1 \cup A_2 = \{a : a \in A_1 \text{ или } a \in A_2\}$$

Если имеется произвольное непустое множество I и $\forall \alpha \in I$ имеется множество A_α, то

$$\bigcup_{a \in I} A_\alpha = \{a : \exists \alpha \in I \text{ такое, что } a \in A_\alpha\}$$

Пересечением $A \cap B$ назовем множество

$$A \cap B = \{a : (a \in A) \text{ и } (a \in B)\}.$$

Если элементов a, принадлежащих A и B, не существует, пишем

$$A \cap B = \varnothing$$

и называем A и B дизъюнктивными. Если есть непустое множество I, то, предполагая, что $\forall \alpha \in I \exists A_\alpha$, Полагаем

$$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = \{a : \forall \alpha \in I \quad a \in A_\alpha\}$$

Теоретико-множественной разностью множеств A и B, обозначаемой A
B, называется множество

$$AB = \{a : a \in A, a \notin B\}$$

Теорема 1. *Предположим, что имеется непустое множество I и для любого $\alpha \in I$ имеется множество A_α. Справедливы следующие формулы:*

$$B \cap \left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \right) = \bigcup_{\alpha \in I} (B \cap A_\alpha) \tag{1.1}$$

$$B \cup \left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \right) = \bigcap_{\alpha \in I} (B \cup A_\alpha) \tag{1.2}$$

$$B \setminus \left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \right) = \bigcap_{\alpha \in I} (B \setminus A_\alpha) \tag{1.3}$$

$$B \setminus \left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \right) = \bigcup_{\alpha \in I} (B \cup A_\alpha) \tag{1.4}$$

Доказательство. Докажем (1.1), остальные соотношения доказываются аналогично. Обозначим левую часть (1.1) через C, а правую через D. Если $a \in C$, то $a \in B$ и $a \in \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$, т.е. $\exists \alpha_0 \in I$, такое что $a \in A_\alpha$, тогда $a \in B \cap A_{\alpha_0}$, $a \in \bigcup_{\alpha \in I}(B \cap A_\alpha)$, $a \in D$, то есть $C \subset D$. Если $b \in D$, то $\exists \alpha_1 \in I$ такое что $b \in B \cap A_{\alpha_1}$, то есть $b \in B$ и $b \in A_{\alpha_1}$, тогда $b \in \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$, $b \in B \cap \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$, т.е. $b \in C$ и $D \subset C$, т.е. $C = D$, что и требовалось доказать. ■

1.3. Определение вещественных чисел по Р.Дедекинду

Далее будем считать известными натуральные числа, множество которых всегда обозначается через $\mathbb{N}$, множество целых чисел $\mathbb{Z}$, множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$. Считаем, что свойства арифметических действий с числами из $\mathbb{Q}$и свойства, связанные с упорядочиванием рациональных чисел по возрастанию, известны.

Определение 1. Пусть α - непустое множество, состоящее из рациональных чисел. Будем называть множество α сечением, если выполняются следующие условия:

1. $\alpha \neq \mathbb{Q}$

2. Если $p \in \alpha, q \in \alpha, q < p$, то $q \in \alpha$

3. В α нет наибольшего числа, т.е. не существует $p_0 \in \alpha$, такого что $\forall p \in \alpha$ выполнено $p \leq p_0$

Утверждение 1. *Пусть α – сечение. Если $q \in \mathbb{Q}, p \in \alpha, q \notin \alpha$, то $p < q$.*

Доказательство. Из условия следует, что $p \neq q$. Если бы выполнялось $q < p$, то по п.2 определения сечения $q \in \alpha$, чего нет. Следовательно $p > q$, чтд. ■

Термин 1. Пусть α – сечение. Числа из $\mathbb{Q}$, принадлежащие α, называются нижними числами сечения α, а числа из $\mathbb{Q}$, не принадлежащие α, называются верхними числами сечения α.

Сопоставим теперь $\forall z \in \mathbb{Q}$ сечение, которое будем обозначать z^*. Далее запись $A \overset{def}{=} B$ означает, что объект A определяется через объект B. Полагаем:

$$z^* = \{p \in \mathbb{Q} : p < z\} \tag{1.5}$$

Запись (1.5) является сокращением формальной записи (1.6)

$$z^* = \{p : p \in \mathbb{Q} \wedge p < z\} \tag{1.6}$$

Проверим, что z^* – сечение. $z - 1 < z$, т.е. $z - 1 \in z^*$, множество z^* непустое. $z + 1 > z, z + 1 \notin z^*, z^* \neq \mathbb{Q}$. Если $p \in z^* \wedge q \in \mathbb{Q}, q < p$, то $q < p < z \Rightarrow q < z, q \in z^*$. Если $p_1 \in z^*$, то $p_1 < z$; пусть $p_2 = \frac{p_1+z}{2}$, тогда $p_1 < p_2 < z$, $p_2 \in z^*$, т.е. в z^* нет наибольшего числа.

Определение 2. Множество всех сечений будет называться множеством вещественных чисел, а любое конкретное сечение будем называть вещественным числом. Обозначаем множество вещественных чисел $\mathbb{R}$.

Приведенный подход к определению вещественных чисел принадлежит немецкому математику Р. Дедекинду, поэтому сечения называются сечениями множества рациональных чисел по Дедекинду.

1.4. Упорядочивание по возрастанию и арифметические действия над $\mathbb{R}$числами

Определение 3. Пишем $\alpha < \beta$, говорим, что α меньше β, если $\exists p \in \mathbb{Q}$, т.ч. $p \in \beta \wedge p \notin \alpha$. Пишем $\alpha \leq \beta$, говорим, что α не превосходит β, если $\alpha < \beta \vee \alpha = \beta$.

Теорема 2. *Пусть α, β – сечения. Тогда либо $\alpha < \beta$, либо $\alpha = \beta$, либо $\alpha > \beta$.*

Доказательство. Если $\alpha = \beta$, то определение влечёт, что не может быть при этом $\alpha < \beta$ или $\alpha > \beta$. Пусть $\alpha \neq \beta$. Докажем, что выполнено только одно соотношение $\alpha < \beta$ или $\alpha > \beta$. Предположим, что выполнены оба, т.е. $\alpha < \beta$ и $\beta < \alpha$. Тогда $(\alpha < \beta) \Rightarrow (\exists p \in \mathbb{Q} | p \in \beta, p \notin \alpha)$; $(\beta < \alpha) \Rightarrow (\exists q \in \mathbb{Q} | q \in \alpha, q \notin \beta)$. По утверждению из предыдущей лекции $(p \in \beta, q \notin \beta) \Rightarrow p < q; (q \in \alpha, p \notin \alpha) \Rightarrow q < p$ – получили противоречие.

Таким образом, $\alpha < \beta$ и $\beta < \alpha$ вместе не могут выполняться. Но, если $\alpha \neq \beta$, то в каком-то из этих множеств, например в β имеется элемент $r \in \mathbb{Q}$, не принадлежащий α, тогда по определению имеем $\alpha < \beta$. Аналогично для $\beta < \alpha$. Следовательно, в случае $\alpha \neq \beta$ обязательно выполнится только одно условие $\alpha < \beta$ или $\beta < \alpha$. Теорема доказана. ∎

Теорема 3. *Теорема о трех сечениях. Пусть α, β, γ – сечения. Если $\alpha < \beta \wedge \beta < \gamma$, то $\alpha < \gamma$.*

Доказательство. $(\alpha < \beta) \Rightarrow (\exists p \in \mathbb{Q} | p \in \beta, p \notin \alpha)$; $(\beta < \gamma) \Rightarrow (\exists q \in \mathbb{Q} | q \in \gamma, q \notin \beta)$. Далее, $(p \in \beta, q \notin \beta) \Rightarrow$ по утверждению из прошлой лекции $p < q$. Поскольку $p \notin \alpha$, то тогда и $q \notin \alpha$, в противоположном случае по свойству 2 в определении сечения было бы и $p \in \alpha$. Таким образом, $q \in \gamma, q \notin \alpha$, т.е. $\alpha < \gamma$. Теорема доказана. ∎

Определение 4. Сумма вещественных чисел $=$ сумма сечений.

Теорема 4. *Пусть α и β – сечения, γ – множество рациональных чисел r, т.ч. $r = p + q$, где $p \in \alpha$ - произвольное число, $q \in \beta$ - произвольное число. Тогда γ – сечение.*

Доказательство. Поскольку $\alpha \neq \varnothing$, $\beta \neq \varnothing$, то $\gamma \neq \varnothing$. Поскольку $\alpha \neq \mathbb{Q}, \beta \neq \mathbb{Q}$, то $\exists s \in \mathbb{Q}, s \notin \alpha$ и $\exists t \in \mathbb{Q}, t \notin \beta$. Пусть $p \in \alpha$, $q \in \beta$. По удтверждению из прошлой лекции $(p \in \alpha, s \notin \alpha) \Rightarrow (p < s); (q \in \beta, t \notin \beta) \Rightarrow (q < t)$. Отсюда следует, что $p + q < s + t \ \forall p \in \alpha \wedge \forall q \in \beta$, т.ч. $\forall r \in \gamma$ выполнено $r < s + t$, т.е. $s + t \notin \gamma$, т.е. $\gamma \neq \mathbb{Q}$ – проверен п.1 в определении сечения.

Пусть $r \in \gamma$, $s < r$. Тогда $r = p + q, p \in \alpha, q \in \beta$. Пусть $t = s - q$, тогда $t < r - q = (p + q) - q = p$, из $p \in \alpha$ и $t < \alpha$ следует $t \in \alpha$, т.е. $s = t + q, t \in \alpha, q \in \beta$, т.е. $s \in \gamma$ – проверен п.2 в определении сечения.

Пусть $r \in \gamma, r = p + q, p \in \alpha, q \in \beta$. По п.3 определения сечения $\exists p_1 \in \alpha, p_1 > p$, тогда $r_1 = p_1 + q > p + q = r$, в γ нет наибольшего элемента, проверен п.3 определения сечения.

Теорема доказана. ■

Определение 5. Сечение γ, построенное в предыдущей теореме, называется суммой сечений α и β.

Поскольку вещественные числа определены как сечения, то вещественное число γ называют суммой вещественных чисед α и β, пишут $\gamma = \alpha + \beta$.

Свойства сложения

Теорема 5. *Пусть α, β, γ – вещественные числа. Тогда:*

1. $\alpha + \beta = \beta + \alpha$
2. $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$
3. $\alpha + 0^* = \alpha$

Доказательство. Пункты 1 и 2 следуют из определения сложения и свойств сложения рациональных чисел. Докажем п.3.

Пусть $r \in \alpha + 0^*$, тогда $r = p + q$, $p \in \alpha, q \in 0^*$, т.е. $q < 0$, поэтому $r = p + q < p$, тогда $r \in \alpha$ по условию 2 определения сечений, т.ч. $\alpha + 0^* \subset \alpha$, если мы делаем акцент на том, что $\alpha + 0^*$ и α – множества. Пусть теперь $t \in \alpha$. Выберем $s > t$, но $s \in \alpha$, что возможно по п.3 определения сечений. Полагаем $q_0 = t - s$, тогда $t - s < 0 \Rightarrow t - s \in 0^*, t = s + (t - s) \in \alpha + 0^*$, т.е. $\alpha \subset \alpha + 0^*$, тогда $\alpha = \alpha + 0^*$. Теорема доказана. ■

Теорема 6. *Теорема о разности верхних и нижних чисел сечения. Пусть α – сечение, и пусть $r \in \mathbb{Q}, r > 0$. Тогда $\exists p \in \mathbb{Q}, \exists q \in \mathbb{Q}$, такие что $p \in \alpha, q \notin \alpha$, q не является наименьшим из верхних чисел α и $q - p = r$.*

Доказательство. Возьмем $s \in \alpha$, и пусть $s_n = s + nr, s_0 = s, n = 0, 1, \ldots$. Найдется m_0, т.ч. $s_{m_0} \notin \alpha$: если бы $s_n \in \alpha \forall n \in \mathbb{N}$, то возьмем $\forall t \in \mathbb{Q}, t > s$. По свойствам рациональных чисел $\exists n_0$ т.ч. $s = n_0 r > t$, и тогда $s_{n_0} \in \alpha \Rightarrow t \in \alpha$, т.е. $\alpha = \mathbb{Q}$ в силу произвольности t, что противоречит условию 1.

Таким образом, $\exists m_0 \in \mathbb{N}$, т.ч. $s_{m_0} \notin \alpha$. Поскольку $s_0 \in \alpha$, то имеется максимальное $m \in \mathbb{N}$, т.ч. $s_m \in \alpha, m < m_0$, тогда $s_{m+1} \notin \alpha$. Если

s_{m+1} не является минимальным из верхних чисел сечения, то полагаем $p = s_m, q = s_{m+1}$, тогда $q-p = s_{m+1}-s_m = (s+(m+1)r)-(s+mr) = r$. Если же s_{m+1} является наименьшим из верхних чисел сечения, то пусть $p = s_m+\frac{r}{2}, q = s_{m+1}+\frac{r}{2}, q-p = r, q > s_{m+1} \Rightarrow q \notin \alpha$, s_{m+1} – наименьшее из верхних чисел α и $p = s_m + \frac{r}{2} = s + mr + \frac{r}{2} < s + (m+1)r$, поэтому $p \in \alpha$. Теорема доказана. ∎

Существование противоположного числа

Теорема 7. *Пусть α - вещественное число. Тогда существует единственное число β такое, что $\alpha + \beta = 0^*$*

Доказательство. Вначале докажем единственность β. Предположим, что $\exists \beta_0$ т.ч. $\alpha+\beta_0 = 0^*$. Тогда, по теореме о свойствах сложения имеем

$$\beta_0 = 0^* + \beta_0 = (\alpha + \beta) + \beta_0 = (\beta + \alpha) + \beta_0 = \beta + (\alpha + \beta_0) = \beta + 0^* = \beta$$

т.е. β - единственный, если существует.

Найдем теперь какое-то β, т.ч. $\alpha + \beta = 0^*$. Пусть β – множество всех рациональных чисел таких, что $-p$ является верхним числом α, но не наименьшим из верхним чисел.

Проверим, что β – сечение (= вещественное число). Взяв любое верхнее не наименьшее число t сечения α, полагая $p = -t$, имеем $p \in \beta$, т.е. $\beta \neq \varnothing$. Взяв любое $s \in \alpha$, получаем, что $-s \notin \beta$, т.к. $-(-s) = s \in \alpha$, s - нижнее число α, т.е. $\beta \neq \mathbb{Q}$ – проверено условие 1.

Если $p \in \beta$, $q \in \mathbb{Q}$ и $q < p$, то $-q > -p$, $-p$ – верхнее число $\alpha \Rightarrow -q$ – верхнее число α и $-q$ – не наименьшее верхнее в α, т.е. $q \in \beta$ – проверено условие 2.

Если $p \in \beta$, то $-p$ – врехнее число α и $\exists$ верхнее число α, обозначим его $-q$, т.ч. $-q < -p$; пусть $-z =^{def} -\frac{q+p}{2}$, тогда $-z > -q$, т.е. $-z$ – верхнее число в α и не наименьшее, поэтому $z \in \beta$. Поскольку $-z < -p$, то $z > p$, в β нет наибольшего – проверено условие 3. Таким образом β – сечение.

Проверка свойства $\alpha + \beta = 0^*$ Пусть $p \in \alpha + \beta$, тогда $p = q + z, q \in \alpha, z \in \beta$; $z \in \beta \Rightarrow -z \notin \alpha$, тогда $q \in \alpha \Rightarrow q < -z, q + z < 0, p < 0, p \in 0^*$, т.е. $\alpha + \beta \subset 0^*$, если трактовать $\alpha, \beta, 0^*$ как множества.

Пусть $p \in 0^*$, тогда $p < 0$. По теореме о разности верхних и нижних чисел сечения $\exists q \in \alpha, s \notin \alpha, s$ не является наименьшим верхним числом α, т.ч. $s-q = -p$. Поскольку $-s \in \beta$, то тогда $p = q-s = q+(-s) \in \alpha+\beta$, т.е. $0^* \subset \alpha + \beta$; в итоге $0^* = \alpha + \beta$, теорема доказана. ∎

Определение 6. Вещественное число β, построенное в предыдущей теореме обозначается $-\alpha$, и называется числом, противоположным α.

Утверждение 2. *О сохранении неравенства. Пусть* $\beta < \gamma$*, тогда* $\alpha + \beta < \alpha + \gamma$*. В частности, если* $0^* < \gamma, 0^* < \alpha$*, то* $(\alpha = 0^* + \alpha < \alpha + \gamma, 0^* < \alpha) \Rightarrow 0^* < \alpha + \gamma$*.*

Доказательство. Из определения сложения вещественных чисел следует, что $\alpha + \beta \leq \alpha + \gamma$. Если было бы $\alpha + \beta = \alpha + \gamma$, то тогда

$$\beta = 0^* + \beta = ((-\alpha) + \alpha) + \gamma = 0^* + \gamma = \gamma$$

, что противоречит условию. Утверждение доказано. ■

Определение разности вещественных чисел

Теорема 8. *Пусть* α, β *– вещественные числа. тогда существует единственное вещественное число* $\gamma | \alpha + \beta = \gamma$*.*

Доказательство. Полагаем $\gamma = \beta + (-\alpha)$. Тогда $\alpha + \gamma = \alpha + (\beta + (-\alpha)) = \alpha + ((-\alpha) + \beta) = (\alpha + (-\alpha)) + \beta = 0^* + \beta = \beta$.

Если бы существовало $\gamma_1 | \alpha + \gamma_1 = \beta$, то если бы $\gamma \neq \gamma_1$, то тогда либо $\gamma < \gamma_1$, либо $\gamma_1 < \gamma$. Не уменьшая общности, считаем $\gamma < \gamma_1$. Тогда по удтверждению о сохранении неравенства мы получаем $\alpha + \gamma < \alpha + \gamma_1$, но $\alpha + \gamma = \beta, \alpha + \gamma_1 = \beta$, противоречие.

Итак, вещественное число γ одно. Оно называется разностью β и α, $\gamma = \beta - \alpha$. ■

Определение 7. $|\alpha|$. Полагаем

$$|\alpha| = \begin{cases} \alpha, & \alpha \geq 0^* \\ -\alpha, & \alpha < 0^* \end{cases}$$

Утверждение 3. $|\alpha| \geq 0^* \forall \alpha \in \mathbb{R}$

Доказательство. Если $\alpha \geq 0^*$, это следует из определения $|\alpha|$. Пусть $\alpha < 0^*$, тогда $\alpha \neq 0^*$ и, если неверно, что $\alpha > 0^*$. то $-\alpha < 0^*$. По удтверждению о сохранении неравенства тогда бы выполнялось $\alpha + (-\alpha) < \alpha + 0^* = \alpha$, но $\alpha < 0^*$, тогда $\alpha + (-\alpha) < 0^*, 0^* < 0^*$, что невозможно. Итак $|\alpha| \geq 0^*$. Из определения видно, что $|\alpha| = 0^* \Leftrightarrow \alpha = 0^*$. Удтверждение доказано. ■

Теорема 9. $p^* < \alpha, p \in \mathbb{Q}. p^* < \alpha \Leftrightarrow p \in \alpha, p \in \mathbb{Q}$

Доказательство. Пусть $p \in \alpha; p \notin p^* \Rightarrow p^* < \alpha$. Пусть теперь $p^* < \alpha$, тогада $\exists q \in \mathbb{Q} | q \notin p^*$, т.е. $q \geq p$, и $q \in \alpha$. Тогда $p \in \alpha$. Теорема доказана. ■