Геометрия и топология

Курс Солынина А.А.

Осень 2022 г.

Оглавление

Дифференциальная геометрия

Глава 1

Дифференциальная геометрия кривых

1.1. Понятие кривой

05.09.22

Кривую можно задать множеством способов, например:

- в декартовых координатах: $y = f(x)$
- в полярных координатах: $r = r(\varphi)$
- неявным уравнением: $F(x, y) = 0$

но обычно её задают в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

В таком случае кривая

- в декартовых координатах принимает вид: $\begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases}$
- в полярных координатах: $\begin{cases} x = r(t)\cos t \\ y = r(t)\sin t \end{cases}$

- для неявных уравнений свои методы, т.к. не очень понятно как с ними работать

Например, для неявных уравнений существует следующая теорема:

Теорема (О неявной функции). Если $F(x,y)=0$ и $F(x_0,y_0)=0$, а так же $\frac{\partial F}{\partial y}|_{(x_0,y_0)} \neq 0$, $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}$ существуют и непрерывны в окрестности (x_0,y_0), тогда существует $f(x)$ в некоторой окрестности x_0, что $F(x,f(x))=0$.

Пример 1.1. Имеем стандартное уравнение окружности: $x^2+y^2-1=0$. В окрестности большинства его точек можно выразить y через x: $y=\pm\sqrt{1-x^2}$. Но это выражение перестает работать в точке $x=-1$ или $x=1$ (то есть для любой другой точки, можно найти окрестность, такую что функция будет иметь конкретный знак, в то время как для $x=\pm 1$ такое сделать невозможно). Воспользуется теоремой выше, соблюдены почти все условия, кроме:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2y|_{\substack{x=\pm 1\\ y=0}} = 0$$

Соответственно, именно в этих точках найти искомую f нельзя.

Параметрическое задание кривой

$\mathbf{f}(t)$ - векторное уравнение. $\mathbf{f} : [a,b] \to \mathbb{R}^3$. Кривую определяет вектор-функция.

Определение 1.1 (Вектор-функция). $\mathbf{f}$ – вектор-функция как выше. На протяжении всего курса предполагаем, что у функции необходимая нам гладкость.

Определение 1.2 (Предел вектор-функции). $\lim\limits_{t\to t_0} \mathbf{f}(t) = \mathbf{v}$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; |t-t_0| < \delta \; |\mathbf{f}(t) - \mathbf{v}| < \varepsilon$$

Свойства. Везде считаем, что свойство выполнено, если существуют соответствующие пределы.

1. $\lim\limits_{t\to t_0}(\mathbf{f}(t) \pm \mathbf{g}(t)) = \lim\limits_{t\to t_0} \mathbf{f}(t) \pm \lim\limits_{t\to t_0} \mathbf{g}(t)$

2. $\lim\limits_{t\to t_0}(\mathbf{f}(t)\mathbf{g}(t)) = \lim\limits_{t\to t_0}\mathbf{f}(t)\lim\limits_{t\to t_0}\mathbf{g}(t)$
3. $\lim\limits_{t\to t_0}(\mathbf{f}(t)\times\mathbf{g}(t)) = \lim\limits_{t\to t_0}\mathbf{f}(t)\times\lim\limits_{t\to t_0}\mathbf{g}(t)$
4. Смешанное произведение аналогично

Определение 1.3 (Производная вектор-функции).

$$\mathbf{f}'(t)|_{t=t_0} = \lim_{t\to t_0}\frac{\mathbf{f}(t)-\mathbf{f}(t_0)}{t-t_0}$$

Свойства.

1. $(\mathbf{f}\pm\mathbf{g})' = \mathbf{f}'\pm\mathbf{g}'$
2. $(c\mathbf{f})' = c\mathbf{f}'$
3. $(\mathbf{f}\mathbf{g})' = \mathbf{f}'\mathbf{g}+\mathbf{f}\mathbf{g}'$
4. $(\mathbf{f}\times\mathbf{g})' = \mathbf{f}'\times\mathbf{g}+\mathbf{f}\times\mathbf{g}'$

Доказательство.

$$(\mathbf{f}\times\mathbf{g})'|_{t=t_0} = \lim_{t\to t_0}\frac{\mathbf{f}(t)\times\mathbf{g}(t)-\mathbf{f}(t_0)\times\mathbf{g}(t_0)}{t-t_0} =$$
$$\lim_{t\to t_0}\frac{\mathbf{f}(t)\times\mathbf{g}(t)-\mathbf{f}(t_0)\times\mathbf{g}(t)+\mathbf{f}(t_0)\times\mathbf{g}(t)-\mathbf{f}(t_0)\times\mathbf{g}(t_0)}{t-t_0} =$$
$$\lim_{t\to t_0}\frac{\mathbf{f}(t)-\mathbf{f}(t_0)}{t-t_0}\times\mathbf{g}(t)+\lim_{t\to t_0}\mathbf{f}(t_0)\times\frac{\mathbf{g}(t)-\mathbf{g}(t_0)}{t-t_0} =$$
$$\mathbf{f}'(t_0)\times\mathbf{g}(t_0)+\mathbf{f}(t_0)\times\mathbf{g}'(t_0)$$

■

5. $(\mathbf{f},\mathbf{g},\mathbf{h})' = (\mathbf{f}',\mathbf{g},\mathbf{h})+(\mathbf{f},\mathbf{g}',\mathbf{h})+(\mathbf{f},\mathbf{g},\mathbf{h}')$

Доказательство.

$$(\mathbf{f},\mathbf{g},\mathbf{h})' = ((\mathbf{f}\times\mathbf{g})\mathbf{h})' = (\mathbf{f}\times\mathbf{g})'\mathbf{h}+(\mathbf{f}\times\mathbf{g})\mathbf{h}' =$$
$$(\mathbf{f}'\times\mathbf{g})\mathbf{h}+(\mathbf{f}\times\mathbf{g}')\mathbf{h}+(\mathbf{f}\times\mathbf{g})\mathbf{h}'$$

■

В свойствах отсутствует деление, т.к. операция деления векторов не определена. В вещественном анализе множество теорем доказывается с помощью следующей теоремы:

Теорема (Лагранжа). Если $f(x)$ непрерывно дифференцируема на $[a, b]$, тогда существует $c \in [a, b] : f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

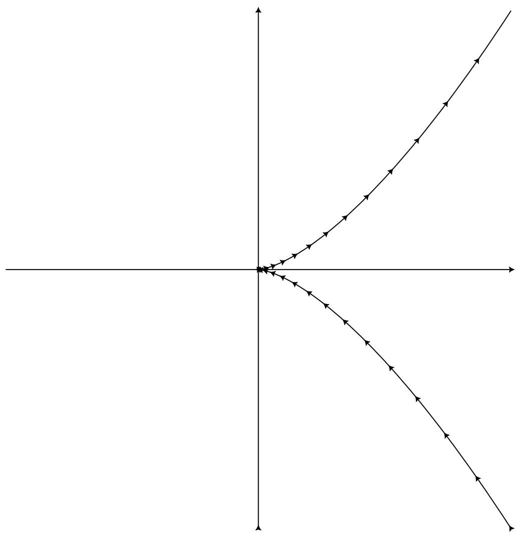
Для вектор-функций эта теорема, однако, не существует!

Определение 1.4 (Интеграл вектор-функции).

$$\int_a^b \mathbf{f}(t)dt = \lim_{\max|\Delta_i t| \to 0} \sum_i \mathbf{f}(\sigma_i)\Delta_i t.$$

Определение 1.5 (Кривая). Кривая – образ $\mathbf{f}(t)$. Кривая не пересекает саму себя, то есть $\mathbf{f}(t_1) \neq \mathbf{f}(t_2)$. $\mathbf{f}(t)$ – параметризация кривой. Параметризация регулярна, если $\mathbf{f}'(t) \neq \mathbf{0}$ $\forall t$.

Пример 1.2 (Нерегулярная параметризация). $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases}$ или $\mathbf{r}(t) = (t^2, t^3)$ – полукубическая парабола. $y = x^{3/2}$ (плохо при $x < 0$).



$(0, 0)$ – точка излома (т.е. точка, в которой параметризация теряет регулярность).

Перепараметризация

Пусть $\varphi : [a,b] \to [c,d]$, φ строго возрастает, $\varphi(a) = c, \varphi(b) = d$, также существует φ^{-1}. $\mathbf{f} : [c,d] \to \mathbb{R}^3$, тогда $\mathbf{g} := \mathbf{f} \circ \varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^3$. В таком случае $\mathbf{g}$ – перепараметризация кривой и $\mathbf{f} = \mathbf{g} \circ \varphi^{-1}$.

Если такая φ существует, то $\mathbf{f} \sim \mathbf{g}$ (эквивалентны).

Если образы $\mathbf{f}(t)$ и $\mathbf{g}(t)$ совпадают, кривые не самопересекаются, а их параметризации регулярны, то существует такое φ и $\mathbf{f} = \mathbf{g} \circ \varphi$.

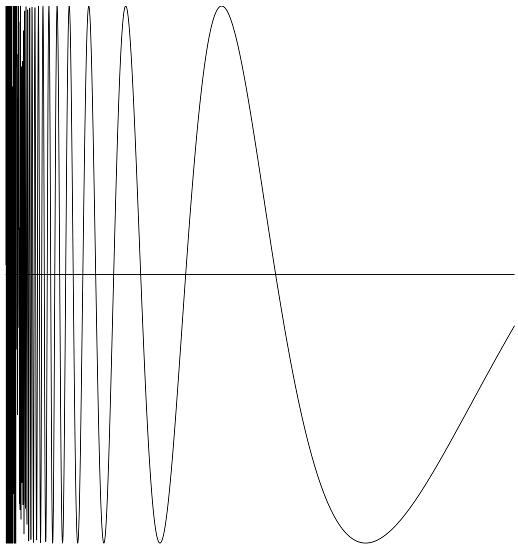
1.2. Длина кривой

Определение 1.6 (Длина кривой). $\mathbf{f} : [a,b] \to \mathbb{R}^3$, $a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$, $\Delta_i t = t_i - t_{i-1}$.

$$L := \lim_{\max \Delta_i t \to 0} \sum_{i=1}^{n} |\mathbf{f}(t_i) - \mathbf{f}(t_{i-1})|$$

Определение 1.7 (Спрямляемая кривая). Прямая называется спрямляемой, если существует её длина.

Пример 1.3. $y = \sin 1/x$ на $(0,1]$ не спрямляемая.



Пример 1.4. $y = \sqrt{x} \sin 1/x$, $y(0) = 0$, ее сумма оценивается $L \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{1}{n}} = \infty$.

Теорема 1.1.

$$L = \int_a^b |\mathbf{f}'(t)| dt$$

Замечание. $|\sum \mathbf{f}_i| \leqslant \sum |\mathbf{f}_i|$, $||\mathbf{f}| - |\mathbf{g}|| \leqslant |\mathbf{f} - \mathbf{g}|$, $|\int \mathbf{f} dt| \leqslant \int |\mathbf{f}| dt$.

Доказательство. Хотим доказать:

$$\left| \int_a^b |\mathbf{f}'(t)| dt - \sum |\mathbf{f}(t_i) - \mathbf{f}(t_{i-1})| \right| \to 0$$

оценим это:

$$\left| \int_a^b |\mathbf{f}'(t)| dt - \sum |\mathbf{f}(t_i) - \mathbf{f}(t_{i-1})| \right| =$$

$$\left| \int_a^b |\mathbf{f}'(t)| dt - \sum |\mathbf{f}'(\sigma_i)| \Delta_i t + \sum |\mathbf{f}'(\sigma_i)| \Delta_i t - \sum |\mathbf{f}(t_i) - \mathbf{f}(t_{i-1})| \right|$$

$$\leqslant \left| \int_a^b |\mathbf{f}'(t)| dt - \sum |\mathbf{f}'(\sigma_i)| \Delta_i t \right| +$$

$$\left| \sum |\mathbf{f}'(\sigma_i)| \Delta_i t - \sum |\mathbf{f}(t_i) - \mathbf{f}(t_{i-1})| \right|$$

$\left| \int_a^b |\mathbf{f}'(t)| dt - \sum |\mathbf{f}'(\sigma_i)| \Delta_i t \right| \to 0$ по определению интеграла.
$\mathbf{f}'$ непрерывная, значит равномерно непрерывна, тогда если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ |x_1 - x_2| < \delta \implies |\mathbf{f}(x_1) - \mathbf{f}(x_2)| < \varepsilon$. Выберем любое ε и зафиксируем δ, удовлетворяющее мелкости разбиения и получим:

$$\left| \sum |\mathbf{f}'(\sigma_i)| \Delta_i t - \sum |\mathbf{f}(t_i) - \mathbf{f}(t_{i-1})| \right| =$$

$$\left| \sum \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\mathbf{f}'(\sigma_i)| dt - \sum \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \mathbf{f}'(t) dt \right| \right| \leqslant \sum \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\mathbf{f}'(\sigma_i) - \mathbf{f}'(t)|\, dt$$

$$\leqslant \sum \int_{t_{i-1}}^{t_i} \varepsilon dt = \varepsilon(b - a) \to 0$$

■

Попытаемся понять как вычислять длину прямой в некоторых случаях: 12.09.22

- в случае явного задания:

$$\begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases} \Leftrightarrow y = f(t)$$

$$|(x', y')| = \sqrt{1 + \mathbf{f}'^2(t)} \implies L = \int_a^b \sqrt{1 + \mathbf{f}'^2(t)} dt$$

  К сожалению, такая формула мало применима, так как интегралы берутся редко.

- в случае параметрического задания:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \implies L = \int_a^b \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} dt$$

- в случае полярных координат:

$$r = r(\varphi) \Leftrightarrow \begin{cases} x = r(\varphi)\cos\varphi \\ y = r(\varphi)\sin\varphi \end{cases} \implies \begin{cases} x' = r'\cos\varphi - r\sin\varphi \\ y' = r'\sin\varphi + r\cos\varphi \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x'^2 + y'^2 = (r'\cos\varphi - r\sin\varphi)^2 + (r'\sin\varphi + r\cos\varphi)^2 = \\ r'^2\cos^2\varphi - 2rr'\sin\varphi\cos\varphi + r^2\sin^2\varphi + \\ r'^2\sin^2\varphi + 2rr'\sin\varphi\cos\varphi + r^2\cos^2\varphi = \\ r'^2 + r^2 \end{aligned}$$

$$L = \int_a^b \sqrt{x'^2 + y'^2} d\varphi = \int_a^b \sqrt{r'^2 + r^2} d\varphi$$

1.3. Касательный вектор

Лемма 1.2. Если $|\mathbf{f}(t)| = const$, то $\mathbf{f}'(t) \perp \mathbf{f}(t)$.

Доказательство. Из $\mathbf{f}'(t) \perp \mathbf{f}(t)$ получаем: $(\mathbf{f}'(t), \mathbf{f}(t)) = 0 \ \forall t$.

Возьмем производную скалярного квадрата и получим:

$$(\mathbf{f}(t), \mathbf{f}(t))' = 2(\mathbf{f}'(t), \mathbf{f}(t)) = 0 = |\mathbf{f}(t)|^{2'}$$

Тогда, $|\mathbf{f}(t)| = const$. ■

Определение 1.8 (Касательный вектор). $\mathbf{f}'(t_0)$ называется касательным вектором к кривой в точке t_0. Прямая, на которой лежит $\mathbf{f}'(t)$ – касательная прямая.

Теорема 1.3. Касательная прямая не зависит от параметризации, если она регулярна.

Доказательство. φ – скалярная функция, $\mathbf{f}(t)$ – вектор-функция. Также $\mathbf{f}(\varphi(t)) = \mathbf{g}(t)$. $\mathbf{f}'(t)$, $\mathbf{g}'(t) = \mathbf{f}'(\varphi(t))\varphi'(t)$ – касательные векторы $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$ соответственно. Обозначим $\tau = \varphi(t)$. $\mathbf{f}'(t)$ и $\mathbf{g}'(t)$ отличаются друг от друга на скаляр, тогда $\mathbf{f}'(\tau) \parallel \mathbf{g}'(t)$. Следовательно, при перепараметризации касательный вектор будет параллелен предыдущему, значит касательная прямая инвариантно определена. ■

Замечание. Регулярная параметризация – это параметризации для которой в любой точке существует касательная прямая.

Определение 1.9 (Натуральная параметризация). Параметризация $\mathbf{f}(t)$ называется натуральной, если $|\mathbf{f}'(t)| \equiv 1$ $\forall t$.

По сути, мы идем по кривой с единичной скоростью. Но пока не ясно существует и единственна ли натуральная параметризация.

Доказательство. Проверить единственность достаточно просто: $\mathbf{g}(t) = \mathbf{f}(\varphi(t))$, $\varphi(t) = \tau$

$$|\mathbf{g}'(t)| = |\mathbf{f}'(\tau)||\varphi(t)| \implies |\varphi'(t)| = 1$$

тогда $\varphi = t + t_0$ (с точностью до выбора начального момента времени). ■

Теорема 1.4. Натуральная параметризация существует.

Доказательство. Вспомним про длину кривой. Глобальная идея: параметризация говорит сколько мы проходим по кривой за данное время; чтобы перейти к натуральной параметризации мы откажемся от стандартного времени, и скажем, что новое время это тот участок кривой, за которое мы его проходим, или единичное расстояние мы проходим за единичное время, значит параметр времени – это участок дуги.
Реализуем эту идею:

$$s = \int_{t_0}^{t} |\mathbf{f}'(\tau)| d\tau$$

s – искомый натуральный параметр. Будем считать $t - t_0$ временем. Обозначим $s = \varphi(t)$:

$$\varphi(t) = \int_{t_0}^{t} |\mathbf{f}'(\tau)| d\tau$$

Заметим, что $\varphi(t)$ возрастает и непрерывна. Значит существует $t = \varphi^{-1}(s) = \psi(s)$. Тогда $\mathbf{f}(t) = \mathbf{f}(\psi(s))$ должна быть натуральной параметризацией.
Теперь докажем, что $\mathbf{f}(\psi(s))$ есть натуральная параметризация. Хотим убедиться, что

$$\left|\frac{d\mathbf{f}(\psi(s))}{ds}\right| = 1.$$

Для этого

$$\psi'(s) = \frac{1}{\varphi'(t(s))} = \frac{1}{|\mathbf{f}'(t)|}$$
$$\frac{d}{ds}\mathbf{f}(\psi(s)) = \mathbf{f}'(\psi(s))\psi'(s) = \frac{\mathbf{f}'(t)}{|\mathbf{f}'(t)|}$$
$$\left|\frac{\mathbf{f}'(t)}{|\mathbf{f}'(t)|}\right| = 1$$

■

1.4. Репе́р Френе́

Есть кривая и $\mathbf{f}(s)$ – ее натуральная параметризация, тогда $\mathbf{v}(s)$ – ее касательный вектор. $|\mathbf{v}(s)| = 1$. Тогда $\mathbf{v}'(s) \perp \mathbf{v}(s)$ по лемме 1.2.

Определение 1.10 (Кривизна кривой). Определим $\mathbf{n}(s)$: $\mathbf{n}(s) \upuparrows \mathbf{v}'(s)$, $|\mathbf{n}(s)| = 1$, такой $\mathbf{n}$ – вектор главной нормали.

$$k = \frac{\mathbf{v}'(s)}{\mathbf{n}} \Leftrightarrow \mathbf{v}' = k\mathbf{n}$$

Такая k – кривизна кривой. А выражение $\mathbf{v}' = k\mathbf{n}$ называется первой формулой Френе.

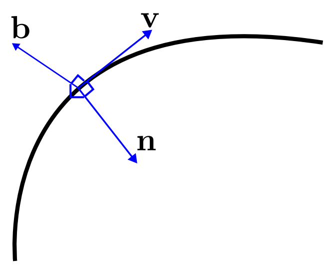
Замечание. $k \geqslant 0$.

Замечание. $\mathbf{n}$ – не везде определен, необходима бирегулярность.

Определение 1.11. Кривая называется бирегулярной, если $\mathbf{f}''(t) \nparallel \mathbf{f}'(t)$ для любой параметризации. Или, если $\mathbf{v}'(s) \neq 0$ для натуральной параметризации. Или $\mathbf{n}$ корректно определен. (почему они эквивалентны – вопрос будущего)

По умолчанию считаем, что все кривые бирегулярны.

У нас есть вектор $\mathbf{v}$ и перпендикулярный ему $\mathbf{n}$. Они единичные, хотим превратить их в базис пространства. Для этого построим вектор $\mathbf{b}$ перпендикулярный им обоим и тоже единичный.



Определение 1.12 (Вектор бинормали).

$$\mathbf{b} := \mathbf{v} \times \mathbf{n}$$

Правая тройка $(\mathbf{v}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$ – репер Френе.

Изучим $\mathbf{b}'$: $\mathbf{b}'(s) \perp \mathbf{b}(s)$ из леммы 1.2, также $\mathbf{b}' \perp \mathbf{v}$. Почему?

$$\mathbf{b}' = (\mathbf{v} \times \mathbf{n})' = \mathbf{v}' \times \mathbf{n} + \mathbf{v} \times \mathbf{n}' = 0 + \mathbf{v} \times \mathbf{n}' \perp \mathbf{v}$$

Таким образом, $\mathbf{b}' \parallel \mathbf{n}$ и $\mathbf{b}' = -\kappa \mathbf{n}$ – вторая формула Френе.

Определение 1.13 (Кручение кривой). κ, определенная выше – кручение кривой.

Изучим $\mathbf{n}$:

$$\mathbf{n}' = (\mathbf{b} \times \mathbf{v})' = \mathbf{b}' \times \mathbf{v} + \mathbf{b} \times \mathbf{v}' = -\kappa \mathbf{n} \times \mathbf{v} + \mathbf{b} \times k\mathbf{n} = \kappa \mathbf{b} - k\mathbf{v}$$

получили третью формулу Френе.

Определение 1.14 (Формулы Френе).

	$\mathbf{v}$	$\mathbf{n}$	$\mathbf{b}$
$\mathbf{v}'$	0	k	0
$\mathbf{n}'$	$-k$	0	κ
$\mathbf{b}'$	0	$-\kappa$	0

Производная везде берется по натуральному параметру.

Определение 1.15. Плоскость $(\mathbf{n}, \mathbf{b})$ – нормальная плоскость кривой. Плоскость $(\mathbf{v}, \mathbf{n})$ – соприкасающаяся плоскость кривой. Плоскость $(\mathbf{v}, \mathbf{b})$ – спрямляющая плоскость кривой.

Вопрос: а как это посчитать?

Пример 1.5. Есть окружность:

$$\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \\ z = 0 \end{cases}$$

Хотим найти натуральную параметризацию: сейчас мы проходим окружность за время 2π, наверное нужно проходить окружность за время $2\pi R$. Тогда получим:

$$\begin{cases} x = R\cos(t/R) \\ y = R\sin(t/R) \\ z = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x' = -\sin(t/R) \\ y' = \cos(t/R) \end{cases}$$

1.5. Соприкасающаяся плоскость

19.09.22

В натуральной параметризации $\mathbf{v} = \mathbf{f}'$ и $\mathbf{n} = \mathbf{f}''/k$. Тогда плоскость $\langle \mathbf{f}', \mathbf{f}'' \rangle$ – соприкасающаяся плоскость для натуральной параметризации.

А что будет в случае не натуральной параметризации? Посмотрим, что в таком случае происходит с вектором $\mathbf{f}''$, будет ли он перпендикулярен $\mathbf{f}'$? Нет, не будет, потому что, если вектор $\mathbf{f}'' \perp \mathbf{f}'$, то $|\mathbf{f}'| = const$ и параметризация почти натуральная, в том смысле, что наша скорость постоянная, но возможно не единичная. Вывод: в обычной ситуации $\mathbf{f}''$ не перпендикулярен $\mathbf{f}'$, однако плоскость в которой он лежит не меняется.

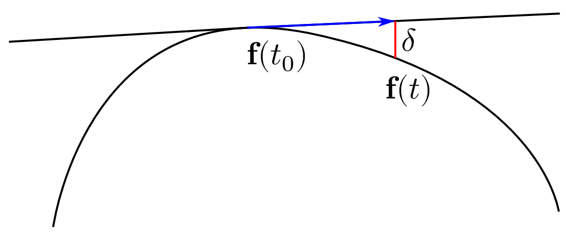
Теорема 1.5. Плоскость $\langle \mathbf{f}', \mathbf{f}'' \rangle$ не зависит от параметризации.

Доказательство. Пусть $\mathbf{f}(t) = \mathbf{g}(s)$, где s не обязательно натуральный параметр и $s = \varphi(t)$, тогда $\mathbf{g}(\varphi(t)) = \mathbf{f}(t)$. Уже доказано, что $\mathbf{f}' \parallel \mathbf{g}'$. Теперь выясним, что

$$\mathbf{f}''(t) = (\mathbf{g}(\varphi(t)))'' = (\mathbf{g}'(\varphi(t))\varphi'(t))' = \mathbf{g}''(\varphi(t))\varphi'^2(t) + \mathbf{g}'(\varphi(t))\varphi''(t) \in \langle \mathbf{g}', \mathbf{g}'' \rangle$$

■

Теорема 1.6. Есть регулярная параметризация $\mathbf{f}(t)$, $\delta(t)$ – расстояние от $\mathbf{f}(t)$ до касательной в точке $\mathbf{f}(t_0)$.



$$\lim_{t \to t_0} \frac{\delta}{|\mathbf{f}(t) - \mathbf{f}(t_0)|} = 0.$$

Такой $\lim = 0$ тогда и только тогда, когда касательная прямая.

Доказательство. Выберем удобную для нас координатную систему:

- $\mathbf{f}(t_0) = (0, 0, 0)$
- $t_0 = 0$
- Касательная прямая – прямая OX. Тогда $\mathbf{f}(0) = (a, 0, 0)$.

Пусть $\mathbf{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$, выясним что такое δ.

$$\delta = \sqrt{f_2^2(t) + f_3^2(t)}$$

Разложим f_1 по Тейлору:

$$f_1(t) = f_1(0) + f_1'(0)t + o(|\mathbf{f}(t) - \mathbf{f}(t_0)|) = at + o(t)$$

На малом промежутке $|\mathbf{f}(t) - \mathbf{f}(t_0)| \approx t$. Аналогично с f_2, f_3:

$$f_2(t) = f_2(0) + f_2'(0)t + o(t) = o(t)$$
$$f_3(t) = o(t)$$

Отсюда, $\delta(t) = o(t)$ и

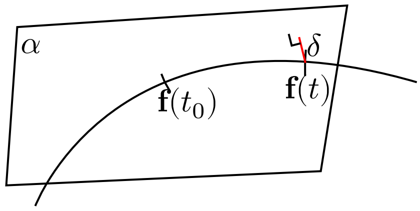
$$\lim_{t\to 0} \frac{\delta(t)}{t} = 0$$

А так же

$$\lim_{t\to 0} \frac{|\mathbf{f}(t) - \mathbf{f}(0)|}{t} = |\mathbf{f}'(0)|$$

Обратное доказательство – упражнение. (Hint: если δ – расстояние от данной точки до любой прямой, кроме OX, то в формуле для δ появится слагаемое $f_1^2(t)$) ■

Теорема 1.7. Пусть $\mathbf{f}(t)$ – бирегулярная параметризация. δ – расстояние от $\mathbf{f}(t)$ до плоскости α.



$$\lim_{t\to t_0}\frac{\delta}{t^2}=0\left(\lim_{t\to t_0}\frac{\delta}{|\mathbf{f}(t)-\mathbf{f}(t_0)|^2}=0\right)$$

Такой $\lim = 0 \Leftrightarrow \alpha$ – соприкасающаяся плоскость.

Доказательство. Введем удобную систему координат:

1. $t_0 = 0$
2. $\mathbf{f}(0) = (0,0,0)$
3. $\mathbf{f}'(0) = (a,0,0)$ и $\mathbf{f}''(0) = (b,c,0)$

Тогда соприкасающаяся плоскость, должна быть плоскостью $z = 0$. Докажем это.
Запишем вектор-функцию в координатах: $\mathbf{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$. Пусть плоскость α задана уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$ и $A^2 + B^2 + C^2 = 1$. Подсчитаем δ используя разложение по Тейлору:

$$\begin{aligned}\delta = |Af_1(t) + Bf_2(t) + Cf_3(t) + D| = \\ \Bigg|A\left(f_1(0)+f_1'(0)t+\frac{f_1''(0)}{2}t^2+o(t^2)\right)+ \\ B\left(f_2(0)+f_2'(0)t+\frac{f_2''(0)}{2}t^2+o(t^2)\right)+ \\ C\left(f_3(0)+f_3'(0)t+\frac{f_3''(0)}{2}t^2+o(t^2)\right)+D\Bigg| = \\ \left|Aat+\frac{Ab}{2}t^2+\frac{Bc}{2}t^2+D+o(t^2)\right|\end{aligned}$$

Теперь хотим выяснить чему равносильно $\delta = o(t^2)$.

$$\begin{cases} Aa = 0 \\ Bc = 0 \\ D = 0 \end{cases}$$

При этом $a \neq 0$, т.к. это единственная ненулевая координата касательного вектора, она не может быть нулем. И $c \neq 0$, иначе $\mathbf{f}''$ коллинеарно $\mathbf{f}'$. Тогда

$$\begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \\ D = 0 \end{cases}$$

и α имеет единственно возможное уравнение $z = 0$. ■

Посмотрим как задаются все эти плоскости в координатах. Пусть

$$\mathbf{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$$

и $\mathbf{f}$ не натуральная параметризация (т.к. к натуральной параметризации тяжело перейти).

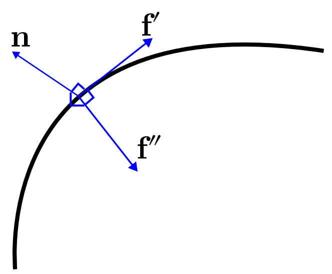
$$\mathbf{f}'(t) = (f_1', f_2', f_3')$$

Построим нормальную плоскость:

$$f_1'(t_0)(x - f_1(t_0)) + f_2'(t_0)(y - f_2(t_0)) + f_3(t_0)(z - f_3(t_0)) = 0$$

Построим соприкасающуюся плоскость: для этого найдем вектор главной нормали

$$\mathbf{n} = \mathbf{f}' \times \mathbf{f}'' = (f_2'f_3'' - f_3'f_2'', f_3'f_1'' - f_1'f_3'', f_1'f_2'' - f_2'f_1'')$$



и уравнение плоскости

$$(f_2'f_3'' - f_3'f_2'')(x - f_1) + (f_3'f_1'' - f_1'f_3'')(y - f_2) + (f_1'f_2'' - f_2'f_1'')(z - f_3) = 0$$

Построение спрямляющей плоскости опущено в виду громоздкости выкладок.

1.6. Вычисление кривизны и кручения

В натуральной параметризации $\mathbf{f}(s_0) = |\mathbf{f}''(s_0)|$.

Теорема 1.8. $k \equiv 0 \Leftrightarrow$ кривая является частью прямой.

Доказательство. В натуральной параметризации $k = 0$ равносильно $\mathbf{f}''(t) = 0$, а это равносильно тому, что $\mathbf{f}(t) = \mathbf{u}t + \mathbf{v}$, где $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v} = const$. ■

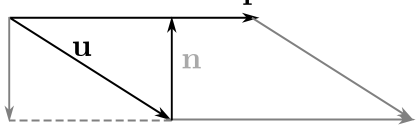
Теорема 1.9. Для любой регулярной параметризации

$$k = \frac{|\mathbf{f}'(t) \times \mathbf{f}''(t)|}{|\mathbf{f}'(t)|^3}.$$

Доказательство. Пусть $\mathbf{g}(s)$ – натуральная параметризация, а $\mathbf{f}(t)$ любая другая параметризация.

$$s = \varphi(t) = \int_{t_0}^{t} |\mathbf{f}'(\tau)| d\tau$$

Тогда связь между ними: $\mathbf{f}(t) = \mathbf{g}(\varphi(t))$. И существует $\psi(s) = t$ – обратная функция и $\mathbf{g}(s) = \mathbf{f}(\psi(s))$.
Пусть $\mathbf{u} \in \langle \mathbf{f}', \mathbf{f}'' \rangle$



$$|\operatorname{Пр}_{\mathbf{n}} u| = \frac{|\mathbf{f}' \times \mathbf{u}|}{|\mathbf{f}'|}$$

Вычислим k:

$$k = |\mathbf{g}''(s)| = |(\mathbf{f}(\psi(s)))''| = \\ |\mathbf{f}''(\psi(s))\psi'^2(s) + \mathbf{f}'(\psi(s))\psi''(s)| = \\ \operatorname{Пр}_{\mathbf{n}}(\mathbf{f}''(\psi(s))\psi'^2(s) + \mathbf{f}'(\psi(s))\psi''(s))$$

Пусть

$$\mathbf{u} = \mathbf{f}''(\psi(s))\psi'^2(s) + \mathbf{f}'(\psi(s))\psi''(s)$$
$$\mathbf{f}' \times \mathbf{u} = \mathbf{f}' \times \mathbf{f}''\psi'^2 + 0$$
$$\psi'(s) = \frac{1}{\varphi'(t)} = \frac{1}{|\mathbf{f}'(t)|}$$

тогда

$$\frac{|\mathbf{f}' \times \mathbf{u}|}{|\mathbf{f}'|} = \frac{|\mathbf{f}' \times \mathbf{f}''|}{|\mathbf{f}'|}\psi'^2(s) = \frac{|\mathbf{f}' \times \mathbf{f}''|}{|\mathbf{f}'|^3}$$

■

Если $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)$, то

$$k = \frac{\sqrt{(f_2'f_3'' - f_3'f_2'')^2 + (f_3'f_1'' - f_1'f_3'')^2 + (f_1'f_2'' - f_2'f_1'')^2}}{(f_1^2 + f_2^2 + f_3^2)^{3/2}}$$

В случае плоских кривых ($f_3 = 0$):

$$k = \frac{|f_1'f_2'' - f_2'f_1''|}{(f_1^2 + f_2^2)^{3/2}}$$

При явном задании

$$y = f(x) \quad \begin{cases} x = f_1 = t \\ y = f_2 = f(t) \end{cases}$$
$$k = \frac{|f''|}{(1 + f'^2)^{3/2}}$$

В полярных координатах

$$r = r(\varphi) \quad \begin{cases} f_1 = x = r\cos\varphi \\ f_2 = y = r\sin\varphi \end{cases}$$
$$|f'| = \sqrt{r^2 + r'^2} = \sqrt{f_1'^2 + f_2'^2}$$
$$\begin{cases} f_1' = r'\cos\varphi - r\sin\varphi \\ f_2' = r'\sin\varphi + r\cos\varphi \end{cases}$$
$$\begin{cases} f_1'' = r''\cos\varphi - 2r'\sin\varphi - r\cos\varphi \\ f_2'' = r''\sin\varphi + 2r'\cos\varphi - r\sin\varphi \end{cases}$$

Чему равно $|f_1'f_2''-f_2'f_1''|$ – упражнение.

Теорема 1.10. Кривая плоская тогда и только тогда, когда ее $\varkappa = 0$.

26.09.22

Доказательство. Вспомним, что $\mathbf{b}' = -\varkappa\mathbf{n}$ в натуральной параметризации. Тогда $\varkappa = 0 \Leftrightarrow \mathbf{b}' = 0 \Leftrightarrow \mathbf{b} = const \Leftrightarrow$ соприкасающаяся плоскость $= const$.
Если соприкасающаяся плоскость постоянная, то кривая лежит в ней. Докажем это.
Ориентируем систему так, чтобы $\mathbf{b} = (0,0,1)$. Кривая в натуральной параметризации имеет уравнение $\mathbf{g}(s) = (g_1(s), g_2(s), g_3(s))$. И мы хотим доказать, что $g_3(s) = 0$. Рассмотрим вектор $\mathbf{b}$:

$$\mathbf{b} = \frac{\mathbf{g}'\times\mathbf{g}''}{k}$$

(Напоминание: в натуральной параметризации $\mathbf{v} = \mathbf{g}'$, $k\mathbf{n} = \mathbf{v}' = \mathbf{g}''$, $\mathbf{b} = \mathbf{v}\times\mathbf{n}$)

$$\mathbf{g}'\times\mathbf{g}'' = (\underbrace{g_2'g_3''-g_3'g_2''}_{=0}, \underbrace{g_3'g_1''-g_1'g_3''}_{=0}, \underbrace{g_1'g_2''-g_2'g_1''}_{\neq 0})$$

Получим систему:

$$\begin{cases} g_2'g_3''-g_3'g_2''=0 \\ g_1'g_3''-g_1''g_3'=0 \quad |\cdot g_2' \end{cases} \Longrightarrow$$

$$g_1'g_3'g_2''-g_1''g_3'g_2'=0$$

$$g_3'(g_1'g_2''-g_1''g_2')=0 \implies g_3'=0\ \forall s \implies g_3 = const$$

значит третья координата кривой всегда одна и та же, а значит кривая лежит в плоскости $z = g_3 = const$. ■

Теорема 1.11. В натуральной параметризации

$$\varkappa = \frac{(\mathbf{g}',\mathbf{g}'',\mathbf{g}''')}{k^2}.$$

Доказательство. По формулам Френе

$$\mathbf{b}' = -\kappa\mathbf{n} = -\kappa\frac{\mathbf{g}''}{k}$$

при этом

$$\mathbf{b} = \frac{\mathbf{g}' \times \mathbf{g}''}{k}$$

тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{b}' = \left(\frac{\mathbf{g}' \times \mathbf{g}''}{k}\right)' = \\ = \frac{(\mathbf{g}'' \times \mathbf{g}'')k + (\mathbf{g}' \times \mathbf{g}''')k - k'(\mathbf{g}' \times \mathbf{g}'')}{k^2} = \\ = -\kappa\frac{\mathbf{g}''}{k} \end{aligned}$$

Посмотрим, чем являются производные $\mathbf{g}$:

$$\begin{gathered} \mathbf{g}' = \mathbf{v} \\ \mathbf{g}'' = \mathbf{v}' = k\mathbf{n} \\ \mathbf{g}''' = k'\mathbf{n} + k\mathbf{n}' = k'\mathbf{n} + k(-k\mathbf{v} + \kappa\mathbf{b}) = k'\mathbf{n} - k^2\mathbf{v} + k\kappa\mathbf{b} \\ \mathbf{g}' \times \mathbf{g}'' = \mathbf{v} \times k\mathbf{n} = k\mathbf{b} \end{gathered}$$

теперь посчитаем такое выражение:

$$(\mathbf{g}' \times \mathbf{g}'') \cdot \mathbf{g}''' = k \cdot k\kappa$$

итого получаем

$$\kappa = \frac{(\mathbf{g}', \mathbf{g}''\mathbf{g}''')}{k^2}$$

■

Теорема 1.12. Для любой параметризации:

$$\kappa = \frac{(\mathbf{f}', \mathbf{f}'', \mathbf{f}''')}{|\mathbf{f}' \times \mathbf{f}''|^2}.$$

Доказательство. Введем

$$s = \int_{t_0}^{t} |\mathbf{f}'(\tau)| d\tau = \varphi(t)$$

– натуральный параметр.
Пусть $t = \psi(s)$, тогда $\mathbf{g}(s) = \mathbf{f}(t) = \mathbf{f}(\psi(s))$ и $\psi'(s) = 1/\varphi'(t) = 1/|\mathbf{f}'(t)|$. Рассмотрим производные $\mathbf{g}$:

$$\mathbf{g}'(t) = \mathbf{f}'(t)\psi'(s) = \frac{\mathbf{f}'}{|\mathbf{f}'|}$$
$$\mathbf{g}'' = \mathbf{f}''\psi'^2 + \mathbf{f}'\psi''$$
$$\mathbf{g}''' = \mathbf{f}'''\psi'^3 + 3\mathbf{f}''\psi'\psi'' + \mathbf{f}'\psi'''$$

по свойствам смешаного произведения, все коллинеарные слагаемые можно записать один раз

$$(\mathbf{g}', \mathbf{g}'', \mathbf{g}''') = (\mathbf{f}'\psi', \mathbf{f}''\psi'^2, \mathbf{f}'''\psi'^3) = \psi'^6(\mathbf{f}', \mathbf{f}'', \mathbf{f}''')$$
$$\kappa = \frac{(\mathbf{g}', \mathbf{g}'', \mathbf{g}'')}{k^2} = \frac{(\mathbf{f}', \mathbf{f}'', \mathbf{f}''')}{|\mathbf{f}'|^6} \cdot \frac{|\mathbf{f}'|^6}{|\mathbf{f}' \times \mathbf{f}''|^2}$$

■

1.7. Натуральные уравнения кривой

Есть кривая в натуральной параметризации. Знаем $k(s)$ и $\kappa(s)$. Верно ли, что существует ровно одна кривая, что эти функции являются ее кривизной и кручением? Единственность точно верно, с существованием – не всегда, k должно быть положительно.

Теорема 1.13. Если $\mathbf{g}_1(s)$ и $\mathbf{g}_2(s)$ – кривые с одинаковыми k и κ, тогда они отличаются друг от друга движением.

Доказательство. В точке s_0 состыкуем реперы Френе. $(\mathbf{v}_1(s), \mathbf{n}_1(s), \mathbf{b}_1(s))$ – репер Френе для $\mathbf{g}_1$. Аналогично, $(\mathbf{v}_2(s), \mathbf{n}_2(s), \mathbf{b}_2(s))$ – репер Френе для $\mathbf{g}_2$.

Что означает «состыкуем»?

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_1(s_0) = \mathbf{v}_2(s_0)\\ \mathbf{n}_1(s_0) = \mathbf{n}_2(s_0)\\ \mathbf{b}_1(s_0) = \mathbf{v}_2(s_0)\end{aligned}$$

Заведем скалярную функцию

$$h(s) = \mathbf{v}_1(s)\mathbf{v}_2(s) + \mathbf{n}_1(s)\mathbf{n}_2(s) + \mathbf{b}_1(s)\mathbf{b}_2(s)$$

заметим, что

- $h(s_0) = 3$
- $h(s) \leqslant 3$ и $h(s) = 3 \Leftrightarrow \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2, \mathbf{n}_1 = \mathbf{n}_2, \mathbf{b}_1 = \mathbf{b}_2$

Как доказать, что скалярная функция равна константе во всех точках, если мы знаем, что она равна константе в одной точке? Достаточно взять производную и показать, что она ноль. Возьмем производную h:

$$\begin{aligned}h'(s) = \mathbf{v}_1'\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1\mathbf{v}_2' + \mathbf{n}_1'\mathbf{n}_2 + \mathbf{n}_1\mathbf{n}_2' + \mathbf{b}_1'\mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_1\mathbf{b}_2' =\\ = k\mathbf{n}_1\mathbf{v}_2 + k\mathbf{v}_1\mathbf{n}_2 + \kappa\mathbf{b}_1\mathbf{n}_2 + \kappa\mathbf{n}_1\mathbf{b}_2\\ - k\mathbf{n}_1\mathbf{v}_2 - k\mathbf{v}_1\mathbf{n}_2 - \kappa\mathbf{b}_1\mathbf{n}_2 - \kappa\mathbf{n}_1\mathbf{b}_2 = 0\end{aligned}$$

тогда $h(s) = 3\ \forall s$. ■

Определение 1.16 (Натуральные уравнения кривой). $(k(s), \kappa(s))$ – натуральные уравнения кривой.

Практический вывод: хотим спроектировать резьбу. Что такое резьба – кривая. Нам известна такая резьба – винтовая линия:

$$\begin{cases}x = R\cos t\\ y = R\sin t\\ z = at\end{cases}$$

Меняем R – меняем радиус резьбы, меняем a – меняем шаг резьба. Вопрос: есть ли другая кривая, подходящая для нарезки резьбы? Ответ: нет, нельзя. Выясним почему: когда мы завинчиваем (то есть делаем движение одной кривой, относительно другой кривой) болт в гайку, кривые болта и гайки должны самосовместиться, то есть кривизна и кручение у кривой в во всех точках одинаковые. То есть наша кривая должна удовлетворять условию, что $k = const, \varkappa = const$. Подсчитаем их для винтовой кривой:

$$\mathbf{f} = (R\cos t, R\sin t, at)$$
$$\mathbf{f}' = (-R\sin t, R\cos t, a)$$
$$\mathbf{f}'' = (-R\cos t, -R\sin t, 0)$$
$$\mathbf{f}''' = (R\sin t, -R\cos t, 0)$$
$$\mathbf{f}' \times \mathbf{f}'' = (aR\sin t, -aR\cos t, R^2)$$
$$|\mathbf{f}' \times \mathbf{f}''| = \sqrt{a^2R^2 + R^4} = R\sqrt{R^2 + a^2}$$
$$|\mathbf{f}'| = \sqrt{R^2 + a^2}$$
$$k = \frac{|\mathbf{f}' \times \mathbf{f}''|}{|\mathbf{f}'|^3} = \frac{R\sqrt{R^2 + a^2}}{(R^2 + a^2)\sqrt{R^2 + a^2}} = \frac{R}{R^2 + a^2}$$
$$(\mathbf{f}', \mathbf{f}'', \mathbf{f}''') = \begin{vmatrix} -R\sin t & R\cos t & a \\ -R\cos t & -R\sin t & 0 \\ R\sin t & -R\cos t & 0 \end{vmatrix} = aR^2$$
$$\varkappa = \frac{(\mathbf{f}', \mathbf{f}'', \mathbf{f}''')}{|\mathbf{f}' \times \mathbf{f}''|^2} = \frac{aR^2}{R^2(R^2 + a^2)} = \frac{a}{R^2 + a^2}.$$