Геометрия и топология

Курс Солынина А. А.

Осень 2021 г.

Оглавление

Оглавление i

I Векторные пространства 1

1 Введение 2

1.1 Множества . . . 2
1.2 Отображения . . . 3
1.3 Отношения эквивалентности . . . 3
1.4 Определители . . . 4

2 Понятие векторного пространства 6

2.1 Операции над векторами . . . 7
2.2 ЛК, ЛЗ и ЛНЗ . . . 8

3 Базис V 10

3.1 Координаты вектора в базисе . . . 13

4 Скалярное произведение 14

4.1 Построение ортонормированного базиса . . . 17
4.2 Геометрический подход . . . 18

5 Векторное произведение 19

5.1 Геометрический смысл векторного произведения . . . 22

6 Смешанное произведение 23

6.1 Свойства . . . 23

II Линейная геометрия 24

7 Точечное пространство 25

8 Прямые на плоскости **26**

Часть I

Векторные пространства

ГЛАВА 1

Введение

1.1. Множества

Определение 1.1. Множество — неопределяемое понятие.

A, B — множества
$A \cup B = \{x : x \in A$ или $x \in B\}$ — объединение
$A \cap B = \{x : x \in A$ и $x \in B\}$ — пересечение
$A \setminus B = \{x : x \in A$ or $x \notin B\}$ — разность
$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ — симметрическая разность
$A \times B = \{(x, y) : x \in A; y \in B\}$ — декартово произведение множеств

Примеры декартового произведения множеств

1. Координатная плоскость $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$
2. Множество полей шахматной доски $\{A, B, C, D, E, F, G, H\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
3. Колода карт $\{$масти$\} \times \{$достоинства$\}$
4. Нумерация мест в театре
5. Нумерация аудиторий на ММ

1.2. Отображения

Определение 1.2. Пусть A, B — множества. Говорим, что задано отображение $f : A \to B$, если задано правило, сопоставляющее каждому $x \in A$ ровно один $y \in B$.
Пишем: $y = f(x)$.

Пример. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ — не отображение, т.к. $f(0)\nexists$.
Однако при $\mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ такое отображение существует.

Пример.

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$(x, y) \mapsto x + y$$

Любая операция является отображением

Пример. $A \subset B \quad i : A \to B \quad i(a) = a$
$A \hookrightarrow B$ — отображение включения
$\mathrm{id} : A \to A \quad \mathrm{id}(x) = A$ — тождественное отображение

1.3. Отношения эквивалентности

Определение 1.3. M – множество, $\mu \subset M \times M \Rightarrow \mu$ называется отношением над M.

$\forall a, b \in M$ два случая

1. $(a, b) \in \mu$ пишем $a\mu b$
2. $(a, b) \notin \mu$ пишем $a\not\mu b$

Пример. $=, <, \leqslant, >, \geqslant, \vdots$

$\subset$ тоже отношение, но только на множестве некоторых множеств.

Если M – множество людей, то слова «отец», «мать», «муж», «жена» и т.д.

Определение 1.4. Отношение μ называется рефлексивным, если

$$\forall a : a\mu a$$

Определение 1.5. Отношение μ называется симметричным, если

$$a\mu b \implies b\mu a$$

Определение 1.6. Отношение μ называется транзитивным, если

$$\left.\begin{matrix} a\mu b \\ b\mu c \end{matrix}\right\} \implies a\mu c$$

Определение 1.7. Отношение называется отношением эквивалентности, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно. Обозначение:$\sim$.

Определение 1.8. Если $a \in M, K_a = \{b : a \sim b\}$ – класс эквивалентности.

Теорема 1.1. $K_a = K_b$ *либо* $K_a \cap K_b = \varnothing$

Доказательство. Допустим противоречие, тогда $\exists c \in K_a \cap K_b, \exists d \in K_a \setminus K_b$ (или $\in K_b \setminus K_a$)

$$a \sim c; b \sim c \qquad a \sim d; b \nsim d$$

$$\left.\begin{matrix} a \sim c \\ c \sim b \end{matrix}\right\} \implies a \sim b \qquad \left.\begin{matrix} d \sim a \\ a \sim b \end{matrix}\right\} \implies d \sim b \qquad \perp$$

∎

Определение 1.9. Множество классов эквивалентности называется фактор-множество. Обозначается $M/\sim$

1.4. Определители 2×2 и 3×3

Определение 1.10 (Неформальное)**.** На плоскости: $\mathbf{a} = (a_1, a_2); \mathbf{b} = (b_1, b_2)$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = S_{\mathbf{a},\mathbf{b}} \text{ (ориентированная площадь)}$$

В пространстве: $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3); \mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3); \mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = V_{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}} \text{ (ориентированный объем)}$$

Определение 1.11 (Формальное)**.**

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1$$

Мнемоническое правило:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_1 & a_2 & a_3 & a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_1 & c_2 \end{array}\right|$$

По бирюзовой стрелке сложение, по зеленой – вычитание.

Свойства

Замечание. Данные свойства справедливы для матриц любого порядка.

1. Если строку или столбец умножить на α, то определитель тоже умножится на α.

2. Если меняем 2 строки или столбца, то знак определителя меняется.

3. Если есть 2 одинаковых строки, то определитель равен 0.

4. Если к одному из векторов прибавить вектор кратный другому, то определитель не поменяется

$$\begin{vmatrix} a_1 + \alpha b_1 & a_2 + \alpha b_2 & a_3 + \alpha b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \alpha \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Утверждение 1. *Эти свойства и* $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$ *полностью определяют функцию объема*

ГЛАВА 2

Понятие векторного пространства

Определение 2.1. Множество V с двумя операциями: $+ : V \times V \to V; \quad (a,b) \mapsto a+b$ и $\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$ называется векторным пространством (над $\mathbb{R}$), если при условии $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in V; \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, выполнены следующие свойства:

1. $\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$ — ассоциативность
2. $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$ — коммутативность
3. $\exists \mathbf{0} : \forall \mathbf{a} \quad \mathbf{0} + \mathbf{a} = \mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$
4. $\forall \mathbf{a} \exists (-\mathbf{a}) : \mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$[1]
5. $\alpha(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \alpha\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b}$ — дистрибутивность

Доказательство.

$$\alpha(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \alpha\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b}$$
$$\mathbf{a} = (x_1, y_1) \quad \mathbf{b} = (x_2, y_2)$$

$$\alpha(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \alpha((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) = \alpha(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (\alpha(x_1 + x_2), \alpha(y_1 + y_2)) = (\alpha x_1 + \alpha x_2, \alpha y_1 + \alpha y_2) = (\alpha x_1, \alpha y_1) + (\alpha x_2, \alpha y_2) = \alpha(x_1, y_1) + \alpha(x_2, y_2) = \alpha\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b}$$

[1] Если выполнены свойства 1–4, то V называется коммутативной (абелевой) группой.

■

6. $(\alpha + \beta)\mathbf{a} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{a}$ — дистрибутивность
7. $(\alpha \cdot \beta)\mathbf{a} = \alpha(\beta\mathbf{a})$ — ассоциативность
8. $1 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}$

Свойства векторного пространства

1. $\mathbf{0}$ — единственный

   Доказательство. $\mathbf{0}_1 = \mathbf{0}_1 + \mathbf{0}_2 = \mathbf{0}_2$ ■

2. $-\mathbf{a}$ — единственный

   Доказательство. Пусть $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ – противоположные к $\mathbf{a}$

   $\mathbf{b}_1 + \mathbf{a} = \mathbf{0} \quad \mathbf{b}_2 + \mathbf{a} = \mathbf{0}$

   $\mathbf{b}_1 = \mathbf{b}_1 + \mathbf{0} = \mathbf{b}_1 + (\mathbf{a} + \mathbf{b}_2) = (\mathbf{b}_1 + \mathbf{a}) + \mathbf{b}_2 = \mathbf{0} + \mathbf{b}_2 = \mathbf{b}_2$ ■

3. $\mathbf{0} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{0}$

   Доказательство. !!! ■

4. $-1 \cdot \mathbf{a} = -\mathbf{a}$

   Доказательство. !!! ■

Примеры векторных пространств

1. Координатная плоскость $\{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$
2. Координатное трехмерное пространство $\{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$
3. Строки длины n из вещественных чисел
   $V = \{(x_1, x_2, ..., x_n) : x_i \in \mathbb{R}\}$ или матрицы (2d массивы)

2.1. Операции над векторами

$$\mathbf{a} = (x_1, y_1) \quad \mathbf{b} = (x_2, y_2)$$

Сложение

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}=(x_1+x_2, y_1+y_2)$$

Умножение вектора на число

$$\alpha\mathbf{a}=(\alpha\cdot x_1, \alpha\cdot y_1)$$

2.2. Линейные комбинация, зависимость и независимость

Определение 2.2. V - векторное пространство и векторы $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, ..., \mathbf{v}_n \in V$. Система $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n$ называется линейно независимой (ЛНЗ), если из $\alpha_1\mathbf{v}_1+\alpha_2\mathbf{v}_2+...+\alpha_n\mathbf{v}_n=0 \implies \alpha_1=\alpha_2=...=\alpha_n=0$.

Определение 2.3. Если $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$, $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n \in V$. То $\alpha_1\mathbf{v}_1+\alpha_2\mathbf{v}_2+...+\alpha_n\mathbf{v}_n$ – линейная комбинация (ЛК) векторов $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n$.

Определение 2.4. Если $\exists\alpha_1, ..., \alpha_n$, не все $=0$, но $\alpha_1\mathbf{v}_1+\alpha_2\mathbf{v}_2+...+\alpha_n\mathbf{v}_n=0$, то система $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n$ называется линейно зависимой (ЛЗ).

Утверждение 2. $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n$ – *ЛЗ* $\Leftrightarrow$ *один из этих векторов можно представить как ЛК остальных.* $\exists i : \mathbf{v}_i=\alpha_1\mathbf{v}_1+\alpha_2\mathbf{v}_2+...+\alpha_{i-1}\mathbf{v}_{i-1}+\alpha_{i+1}\mathbf{v}_{i+1}+...+\alpha_n\mathbf{v}_n$

Доказательство. $\Rightarrow$: $\exists\alpha_1, ..., \alpha_n(\exists i : \alpha_i\neq 0)$

$$\alpha_1\mathbf{v}_1+\alpha_2\mathbf{v}_2+...+\alpha_n\mathbf{v}_n=0$$
$$\alpha_i\mathbf{v}_i=-\alpha_1\mathbf{v}_1-\alpha_2\mathbf{v}_2-...-\alpha_{i-1}\mathbf{v}_{i-1}-\alpha_{i+1}\mathbf{v}_{i+1}-...-\alpha_n\mathbf{v}_n$$
$$\alpha_i\neq 0 \quad \mathbf{v}_i=-\frac{\alpha_1}{\alpha_i}\mathbf{v}_1-...-\frac{\alpha_n}{\alpha_i}\mathbf{v}_n$$
$$\Leftarrow: \mathbf{v}_i=\alpha_1\mathbf{v}_1+...+\alpha_n\mathbf{v}_n \text{ без } i\text{-ого слагаемого}$$
$$\alpha_1\mathbf{v}_1+\alpha_2\mathbf{v}_2+...+(-\mathbf{1})\mathbf{v}_i+...+\alpha_n\mathbf{v}_n=0$$
$$\text{ЛК }=0 \text{ не все коэффициенты }=0$$

■

Свойство 1. $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n$ – ЛНЗ, то любой его поднабор тоже ЛНЗ. $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n$ – ЛЗ, то при добавлении векторов, набор останется ЛЗ.

Утверждение 3. $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n$ *– ЛНЗ* $\Leftrightarrow$ *если*

$$\alpha_1\mathbf{v}_1 + ... + \alpha_n\mathbf{v}_n = \beta_1\mathbf{v}_1 + ... + \beta_n\mathbf{v}_n$$
$$\Rightarrow \alpha_1 = \beta_1; \alpha_2 = \beta_2; ...; \alpha_n = \beta_n$$

Доказательство.

$$(\alpha_1 - \beta_1)\mathbf{v}_1 + (\alpha_2 - \beta_2)\mathbf{v}_2 + ... + (\alpha_n - \beta_n)\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$
$$\alpha_i - \beta_i = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n \text{– ЛНЗ}$$

■

ГЛАВА 3

Базис векторного пространства

Определение 3.1. Набор $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$ называется порождающим для V, если $\forall \mathbf{w} \in V \exists \alpha_1, ..., \alpha_n : \mathbf{w} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + ... + \alpha_n \mathbf{v}_n$

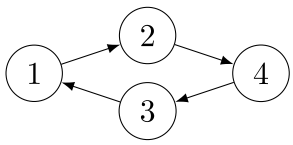
Свойство 2. Если к порождающему набору прибавить вектор, то он останется порождающим. Если убрать векторы из непорождающего набора векторы, то набор останется непорождающим.

Определение 3.2. $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$ называется базисом V, если этот набор ЛНЗ и порождающий.

Теорема 3.1 (О базисе)**.** *Следующие определения базиса равносильны:*

1. *ЛНЗ и порождающий набор*
2. *Минимальный порождающий набор (минимальный по включениям)*
3. *Максимальный ЛНЗ набор (максимальный по включениям)*
4. *Набор* $\forall \mathbf{w} \in V \exists ! \alpha_1, ..., \alpha_2 : \mathbf{w} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + ... + \alpha_n \mathbf{v}_n$

Доказательство. Цепочка доказательств:



$1 \to 2$. Дан $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n$ – ЛНЗ и порождающий набор. Доказать, что он минимальный порождающий.

Допустим, что $\mathbf{v}_i$ выкинули, оставшийся набор остался порождающим $\Rightarrow \mathbf{v}_i$ – ЛК остальных $\Rightarrow$ ЛЗ $\quad \perp$.

$2 \to 4$. Дан $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n$ – минимальный порождающий набор. Доказать $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n$ – порождающий с единственностью коэффициентов.

Допустим противное: $\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + ... + \alpha_n\mathbf{v}_n = \beta_1\mathbf{v}_1 + ... + \beta_n\mathbf{v}_n$

$$\alpha_1 \neq \beta_1$$
$$(\alpha_i - \beta_i)\mathbf{v}_i = (\beta_1 - \alpha_1)\mathbf{v}_1 + ... \text{ (без } i\text{-ого)} + (\beta_n - \alpha_n)\mathbf{v}_n$$
$$\mathbf{v}_i = \frac{\beta_1 - \alpha_1}{\alpha_i - \beta_i} + ... \text{ (без } i\text{-ого)} + \frac{\beta_n - \alpha_n}{\alpha_i - \beta_i}$$

$\mathbf{v}_i$ – выкинем. В любой ЛК с $\mathbf{v}_i$ заменим $\mathbf{v}_i$ на выражение выше $\Longrightarrow$ набор порождающий

$4 \to 3$. Дан $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n$ – порождающий набор с единственностью коэффициентов. Доказать: $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n$ – минимальный ЛНЗ (ЛНЗ уже доказана)

Допустим противное: $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n; \mathbf{u}$ – ЛНЗ набор

$$\mathbf{u} = \alpha_1\mathbf{v}_1 + ... + \alpha_n\mathbf{v}_n (\alpha_1, ...\alpha_n \exists!)$$
$$\Longrightarrow \mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n, \mathbf{u} \text{ – ЛЗ} \qquad \perp$$

$3 \to 1$. Дан $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n$ – минимальный ЛНЗ. Доказать $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n$ – ЛНЗ и порождающий набор.

$$\begin{array}{ll}
\forall \mathbf{w} \in V & \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n, \mathbf{w} \text{ – ЛЗ набор} \\
 & \alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + ... + \alpha_n\mathbf{v}_n + \beta\mathbf{w} = \mathbf{0} \\
\text{Если } \beta = 0 \Longrightarrow & \alpha_1\mathbf{v}_1 + ... + \alpha_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0} \\
 & \text{не все коэффициенты } = 0 (\alpha_i \neq 0) \\
 & \Longrightarrow \mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n \text{ – ЛЗ} \\
\beta \neq 0 \Longrightarrow & \mathbf{w} = -\frac{\alpha_1}{\beta}\mathbf{v}_1 - \frac{\alpha_2}{\beta}\mathbf{v}_2 - ... - \frac{\alpha_n}{\beta}\mathbf{v}_n
\end{array}$$

■

Замечание. Любую конечную порождающую систему можно сузить до базиса.

Замечание. Если есть конечный порождающий набор, то любую ЛНЗ систему можно расширить до базиса.

Определение 3.3. Размерность пространства равна количеству элементов в базисе. (пока нет доказательств корректности)

Лемма 1. *Система линейных уравнений:* $(a_{ij} \in \mathbb{R}; x_i \in \mathbb{R}; 0 \in \mathbb{R})$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0 \\ ... \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + ... + a_{kn}x_n = 0 \end{cases}$$

Имеет ненулевые решения, если $n > k$.

Доказательство. Индукция по k.

База $k = 1$:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0$$
$$\text{Пусть } a_{11} \neq 0 \implies x_1 = -\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 - \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 - ... - -\frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n$$
$$\forall x_2, ..., x_n : x_1 \text{ выражается через них}$$
$$a_{11} = 0 \implies x_1 = 1; x_2 = x_3 = ... = x_n = 0$$

Переход

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0$$
$$\exists i : a_{1i} \neq 0, \text{ иначе выкинем предыдущее уравнение}$$
$$x_i = -\frac{a_{11}}{a_{1i}}x_1 - ... \text{ (без } i\text{-ого)} - -\frac{a_{1n}}{a_{1i}}x_n$$

Подставим выраженное x_i во все остальные уравнения. Уравнений на 1 меньше, переменных на 1 меньше. ■

Пример.

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ z + y - z = 0 \end{cases} \implies z = 0 \qquad x + y = 0$$

Теорема 3.2. *Если $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k$ и $\mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_n$ базисы $\in V$, то $k = n$.*

Доказательство. $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n$ – порождающая система.

$$\mathbf{w}_1 = a_{11}\mathbf{v}_1 + a_{21}\mathbf{v}_2 + a_{31}\mathbf{v}_3 + ... + a_{k1}\mathbf{v}_k$$
$$\mathbf{w}_2 = a_{12}\mathbf{v}_1 + a_{22}\mathbf{v}_2 + a_{32}\mathbf{v}_3 + ... + a_{k2}\mathbf{v}_k$$
$$...$$
$$\mathbf{w}_n = a_{1n}\mathbf{v}_1 + a_{2n}\mathbf{v}_2 + a_{3n}\mathbf{v}_3 + ... + a_{kn}\mathbf{v}_k$$

$$x_1\mathbf{w}_1 + x_2\mathbf{w}_2 + ... + x_n\mathbf{w}_n = \mathbf{0}, x_i \in \mathbb{R} \qquad (\star)$$

т.к. $\mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_n$ – ЛНЗ $\implies$ все $x_i = 0$

$$\begin{aligned} x_1(a_{11}\mathbf{v}_1 + a_{21}\mathbf{v}_2 + ... + a_{k1}\mathbf{v}_k) + x_2(a_{12}\mathbf{v}_1 + a_{22}\mathbf{v}_2 + ... + a_{k2}\mathbf{v}_k) \\ + ... + x_n(a_{1n}\mathbf{v}_1 + a_{2n}\mathbf{v}_2 + ... + a_{kn}\mathbf{v}_k) = \mathbf{0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n) + \mathbf{v}_2(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n) \\ + ... + \mathbf{v}_k(a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + ... + a_{kn}x_n) = \mathbf{0} \end{aligned}$$

$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_k$ – ЛНЗ $\implies$ все коэффициенты равны 0.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0 \\ ... \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + ... + a_{kn}x_n = 0 \end{cases}$$

Если $n > k \implies \exists$ ненулевые решения $\implies$ противоречие с $(\star)$ и ЛНЗ $\mathbf{w}_i \implies n \leqslant k$. Аналогично $k \leqslant n \implies n = k$. ■

Если $\exists$ хотя бы один конечный базис, то все базисы будут равномощными.

3.1. Координаты вектора в базисе

Пусть $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$ – базис.

$$\forall \mathbf{w} \in V \implies \exists! \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n : \mathbf{w} = \alpha_1\mathbf{v}_1 + ... + \alpha_n\mathbf{v}_n$$

$\mathbf{w} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ – координаты $\mathbf{w}$ в базисе $\{\mathbf{v}_i\}_{i=1}^n$

$$\begin{gathered} \mathbf{v}_1 = (1, 0, ..., 0) \\ \mathbf{v}_2 = (0, 1, ..., 0) \\ ... \\ \mathbf{v}_n = (0, 0, ..., 1) \end{gathered}$$

ГЛАВА 4

Скалярное произведение

Обозначение скалярного произведения векторов: $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ или $(\mathbf{v}, \mathbf{w})$

Определение 4.1. Если V - векторное пространство, в котором есть операция $\cdot : V \times V \to \mathbb{R}$, со свойствами:

1. $(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geqslant 0; (\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0}$
2. $(\mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u}, \mathbf{v}) + (\mathbf{u}, \mathbf{w})$
3. $(\alpha\mathbf{u}, \mathbf{w}) = \alpha(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = (\mathbf{u}, \alpha\mathbf{w})$
4. $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{v}, \mathbf{u})$

то такая операция называется скалярным произведением, а V вместе со скалярным произведением называется евклидовым пространством

Пример. $V-$ множество некоторых функций, $\phi(x)$ - одна функция, которая называется весом, важно, что $\phi > 0$, тогда $(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)\phi(x)dx$

Определение 4.2. $|\mathbf{v}| = \sqrt{(\mathbf{v}, \mathbf{v})}, |\mathbf{v}| \geqslant 0, |\mathbf{v}| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0}$

Определение 4.3. $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$, тогда $\cos\angle(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \dfrac{(\mathbf{u}, \mathbf{v})}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|}$

$$\angle(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \arccos\frac{(\mathbf{u}, \mathbf{v})}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|} \in [0; 2\pi]$$

Теорема 4.1 (Неравенство Коши-Буняковского-Шварца)**.** $|(\mathbf{u}, \mathbf{v})| \leqslant |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|$

Доказательство.

$$(\mathbf{u}+t\mathbf{v},\mathbf{u}+t\mathbf{v})\geqslant 0\quad\forall t$$
$$(\mathbf{u},\mathbf{u})+(\mathbf{u},t\mathbf{v})+(t\mathbf{v},\mathbf{u})+(t\mathbf{v},t\mathbf{v})\geqslant 0$$
$$|\mathbf{u}|^2+2t(\mathbf{u},\mathbf{v})+t^2|\mathbf{v}|^2\geqslant 0\quad\forall t$$
$$\frac{D}{4}\leqslant 0\quad(\mathbf{u},\mathbf{v})^2-|\mathbf{u}|^2|\mathbf{v}|^2\leqslant 0$$
$$|(\mathbf{u},\mathbf{v})|\leqslant|\mathbf{u}||\mathbf{v}|$$

■

Замечание. 2 и 3 аксиомы можно заменить одной: $(\mathbf{u},\alpha\mathbf{v}+\beta\mathbf{w})=\alpha(\mathbf{u},\mathbf{v})+\beta(\mathbf{u},\mathbf{w})$

Пример.

$$V=\mathbb{R}^n=\{(a_1,a_2,...,a_n):a_i\in\mathbb{R}\}$$

«стандартное» скалярное произведение:

$$\mathbf{u}=(a_1,a_2,...,a_n)\qquad\mathbf{v}=(b_1,b_2,...,b_n)$$
$$(a_1,a_2,...,a_n)(b_1,b_2,...,b_n)=a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n$$

Аксиомы 1–4 выполняются

$$|(a_1,...,a_n)|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+...+a_n^2}$$

КБШ: $(a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n)^2\leqslant(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+...+b_n^2)$

Теорема 4.2 (Неравенство треугольника)**.** $|\mathbf{u}+\mathbf{v}|\leqslant|\mathbf{u}|+|\mathbf{v}|$

Доказательство.

$$(\mathbf{u}+\mathbf{v};\mathbf{u}+\mathbf{v})\overset{?}{\leqslant}(|\mathbf{u}|+|\mathbf{v}|)^2$$
$$(\mathbf{u},\mathbf{u})+2(\mathbf{u},\mathbf{v})+(\mathbf{v},\mathbf{v})\overset{?}{\leqslant}(\mathbf{u},\mathbf{u})+(\mathbf{v},\mathbf{v})+2|\mathbf{u}||\mathbf{v}|$$
$$(\mathbf{u},\mathbf{v})\overset{?}{\leqslant}|\mathbf{u}||\mathbf{v}|\text{ – верно по неравенству КБШ}$$

■

Определение 4.4. $\mathbf{u},\mathbf{v}\in V;\mathbf{u}\perp\mathbf{v}$ (ортогональные векторы), если $(\mathbf{u},\mathbf{v})=\mathbf{0}$. Для $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,...,\mathbf{u}_n\in V$, $\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,...,\mathbf{u}_n\}$ называется ортогональной системой, если $\forall i\neq j,\mathbf{u}_i\perp\mathbf{u}_j$.

Определение 4.5. $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_n\}$ называется ортонормированной системой, если $\mathbf{u}_i \perp \mathbf{u}_j (i \neq j)$ и $|\mathbf{u}_i| = 1$

Определение 4.6. Если $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_n\}$ – ортонормированная система и базис, то это ортонормированный базис (ОНБ).

Утверждение 4. $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_n\}$ *– ортогональная система и* $\mathbf{u}_i \neq \mathbf{0}$*, то она ЛНЗ.*

Доказательство.

$$\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha \mathbf{u}_2 + ... + \alpha_n \mathbf{u}_n = \mathbf{0} \quad | \cdot \mathbf{u}_i$$
$$\alpha_1(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_i) + \alpha_2(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_i) + ... + \alpha_n(\mathbf{u}_n, \mathbf{u}_i) = 0$$
$$\alpha_i(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i) = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0 \forall i$$

■

Утверждение 5. $\{\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_n\}$ *– ортогональная система и* $\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2 + ... + \alpha_n \mathbf{u}_n \implies \alpha_i = \frac{(\mathbf{u}_i, \mathbf{v})}{|\mathbf{u}_i|^2}$

Доказательство.

$$\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha \mathbf{u}_2 + ... + \alpha_n \mathbf{u}_n = \mathbf{v} \quad | \cdot \mathbf{u}_i$$
$$\alpha_i(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i) = (\mathbf{v}, vu_i)$$

■

Пример. V – множество 2π-периодических функций.

$$(f, g) = \int_0^{2\pi} f(x) g(x) dx$$

(можем ограничиться кусочно-непрерывными функциями)

$$\begin{pmatrix} \cos 0x, \cos x, \cos 2x, \cos 3x, ... \\ \sin x, \sin 2x, \sin 3x, ... \end{pmatrix}$$

– ортогональная система.

Для проверки достаточно взять

$$\int_0^{2\pi} \sin kx \cos nx dx = 0 \text{ и } \int_0^{2\pi} \cos kx \cos nx dx = 0 \quad (k \neq n)$$

Аналогично с sin

Любая 2π-периодическая функция раскладывается по этой системе.

$$f(x) = a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + ...$$

$$a_i = \frac{\int_0^{2\pi} f(x) \cos ixdx}{\int_0^{2\pi} \cos^2 ixdx} \qquad b_i = ...$$

4.1. Построение ортонормированного базиса

Ортогонализация Грама-Шмидта

Есть $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$ – ЛНЗ

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{v}_1}{|\mathbf{v}_1|} \qquad |\mathbf{u}_1| = 1$$

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2 - \alpha \mathbf{u}_1 \qquad \mathbf{w}_2 \perp \mathbf{u}_1 \qquad \mathbf{u}_2 = \frac{\mathbf{w}_2}{|\mathbf{w}_2|}$$

$$|\mathbf{u}_2| = 1 \qquad \mathbf{u}_2 \perp \mathbf{u}_1$$

$$(\mathbf{u}_1, \mathbf{w}_2) = 0$$

$$(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2 - \alpha \mathbf{u}_1) = 0$$

$$(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2) - \alpha(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1) = 0$$

$$\alpha = (\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2)$$

Пусть $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_{k-1}$ построены (ОНС)

Построим $\mathbf{u}_k$

$$\mathbf{w}_k = \mathbf{v}_k - \alpha_1 \mathbf{u}_1 - \alpha_2 \mathbf{u}_2 - ... - \alpha_{k-1} \mathbf{u}_{k-1}$$

$$\mathbf{w}_k \perp \mathbf{u}_i \qquad (i \leqslant k-1)$$

$$0 = (\mathbf{w}_k, \mathbf{u}_i) = (\mathbf{v}_k, \mathbf{u}_i) - \alpha_i(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i)$$

$$\alpha_i = (\mathbf{v}_k, \mathbf{u}_i)$$

$$\mathbf{u}_k = \frac{\mathbf{w}_k}{|\mathbf{w}_k|}$$

Строим $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_n$ с помощью данного алгоритма.

Замечание. $\mathbf{u}_i$ – ЛК $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_i$

Следствие 1. *Если* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$ *– базис* $\implies$ $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_n$ *— ОНБ, т.е. если* $\dim V = n$*, то* $\exists$ *ОНБ*

Пусть V - евклидово пространство, $\dim V = n$, $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_n$ – ОНБ, $\mathbf{w} = a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2 + ... + a_n\mathbf{u}_n$, то можем записать $\mathbf{w} = (a_1, ..., a_n)$, соответственно $\mathbf{v} = b_1\mathbf{u}_1 + b_2\mathbf{u}_2 + ... + b_n\mathbf{u}_n$, тогда

$$\begin{aligned}(\mathbf{w}, \mathbf{v}) = (a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2 + ... + a_n\mathbf{u}_n, b_1\mathbf{u}_1 + b_2\mathbf{u}_2 + ... + b_n\mathbf{u}_n) = \\ = a_1b_1(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) + a_1b_2(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) + ... + a_1b_n(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_n) + \\ + a_2b_1(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2) + a_2b_2(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2) + ... + a_2b_n(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_n) + \\ + a_nb_1(\mathbf{u}_n, \mathbf{u}_2) + a_nb_2(\mathbf{u}_n, \mathbf{u}_2) + ... + a_nb_n(\mathbf{u}_n, \mathbf{u}_n) = \\ = a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n\end{aligned}$$

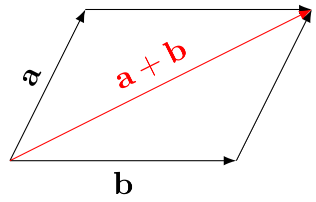
4.2. Геометрический подход

Есть $\mathbb{R}^n$ (например $\mathbb{R}^2$ или $\mathbb{R}^3$), так же есть расстояния и углы.

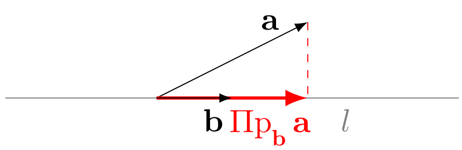
Определение 4.7. Связанный вектор — направленный отрезок.

Определение 4.8. Свободный вектор — класс эквивалентности связанных векторов. $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$, если $ABDC$ – параллелограмм (возможно вырожденный)

Сложение связанных векторов



Нетривиальный момент: почему $(\mathbf{a}, \mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a}, \mathbf{b}) + (\mathbf{a}, \mathbf{c})$?



Определение 4.9.

$$\text{Пр}_{\mathbf{b}}\,\mathbf{a} = |\mathbf{a}|\cos\alpha\frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} = \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{|\mathbf{b}|} \cdot \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} = \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{|\mathbf{b}|^2}\mathbf{b}$$

Теорема 4.3.

$$\text{Пр}_{\mathbf{b}}(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) = \text{Пр}_{\mathbf{b}}\,\mathbf{a}_1 + \text{Пр}_{\mathbf{b}}\,\mathbf{a}_2$$

Следствие 2.

$$\frac{(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2, \mathbf{b})}{|\mathbf{b}|^2}\mathbf{b} = \frac{(\mathbf{a}_1, \mathbf{b})}{|\mathbf{b}|^2}\mathbf{b} + \frac{(\mathbf{a}_2, \mathbf{b})}{|\mathbf{b}|^2}\mathbf{b} = (\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2, \mathbf{b}) = (\mathbf{a}_1, \mathbf{b}) + (\mathbf{a}_2, \mathbf{b})$$

ГЛАВА 5

Векторное произведение

Замечание. Векторное произведение существует, только если $\dim V = 3$ (т.е. пространство трехмерное).

Определение 5.1 (Формальное)**.** Пусть $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$, $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{v}$ – вектор со свойствами:

1. $\mathbf{v} \perp \mathbf{a}, \mathbf{v} \perp \mathbf{b}$
2. $|\mathbf{v}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin \alpha$
3. $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b})$ – правая тройка векторов

Вопрос: что такое «правая тройка?» — Ответ: нет «правой» или «левой» троек, но про любые две тройки мы можем сказать одинаково ли они ориентированы.

Определение 5.2. Пусть $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ – фиксированный ортонормированный базис, будем называть его правой тройкой векторов.

Введем определения:

$$\begin{array}{c|ccc} & \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \hline \mathbf{i} & \mathbf{0} & \mathbf{k} & -\mathbf{j} \\ \mathbf{j} & -\mathbf{k} & \mathbf{0} & \mathbf{i} \\ \mathbf{k} & \mathbf{j} & -\mathbf{i} & \mathbf{0} \end{array}$$ – таблица умножения базисных векторов

Пусть

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k} = (a_1, a_2, a_3)$$
$$\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k} = (b_1, b_2, b_3)$$

Тогда векторное произведение **a** и **b**:

$$\begin{aligned}\mathbf{a}\times\mathbf{b} = (a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k})\times(b_1\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}+b_3\mathbf{k}) = \\ a_1b_1\mathbf{i}\times\mathbf{i}+a_1b_2\mathbf{i}\times\mathbf{j}+a_1b_3\mathbf{i}\times\mathbf{j}+ \\ +a_2b_1\mathbf{i}\times\mathbf{i}+a_2b_2\mathbf{i}\times\mathbf{j}+a_2b_3\mathbf{i}\times\mathbf{j}+ \\ +a_3b_1\mathbf{i}\times\mathbf{i}+a_3b_2\mathbf{i}\times\mathbf{j}+a_3b_3\mathbf{i}\times\mathbf{j} = \\ =\mathbf{i}(a_2b_3-a_3b_2)+\mathbf{j}(a_3b_1-a_1b_3)+\mathbf{k}(a_1b_2-a_2b_1)\end{aligned}$$

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \mathbf{i}(a_2b_3-a_3b_2)+\mathbf{j}(a_3b_1-a_1b_3)+\mathbf{k}(a_1b_2-a_2b_1)$$

Теорема 5.1. *Векторное произведение обладает свойствами:*

1. $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{a}\times\mathbf{c}$
2. $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = -\mathbf{b}\times\mathbf{a}$
3. $\mathbf{a}\times\mathbf{b}\perp\mathbf{a}, \mathbf{a}\times\mathbf{b}\perp\mathbf{b}$
4. $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\alpha$

Доказательство.

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k} \\ \mathbf{b} &= b_1\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}+b_3\mathbf{k} \\ \mathbf{c} &= c_1\mathbf{i}+c_2\mathbf{j}+c_3\mathbf{k}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}1. \qquad \mathbf{b}+\mathbf{c} &= (b_1+c_1)\mathbf{i}+(b_2+c_2)\mathbf{j}+(b_3+c_3)\mathbf{k} \\ \mathbf{a}\times(\mathbf{b}+\mathbf{c}) &= \mathbf{i}(a_2(b_3+c_3)-a_3(b_2+c_2))+\mathbf{j}(...)+\mathbf{k}(...) \\ \mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{a}\times\mathbf{c} &= \mathbf{i}(a_2b_3-a_3b_2)+\mathbf{j}(...)+\mathbf{k}(...)+ \\ &\quad +\mathbf{i}(a_2c_3-a_3c_2)+\mathbf{j}(...)+\mathbf{k}(...)\end{aligned}$$

После преобразований получим то же самое.

2. Аналогично

$$\begin{aligned}3. \qquad (\mathbf{a}\times\mathbf{b};\mathbf{a}) = \\ =(\mathbf{i}(a_2b_3-a_3b_2)+\mathbf{j}(a_3b_1-a_1b_3)+\mathbf{k}(a_1b_2-a_2b_1); a_i\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k}) = \\ =a_1(a_2b_3-a_3b_2)+a_2(a_3b_1-a_1b_3)+a_3(a_1b_2-a_2b_1) = 0\end{aligned}$$

4. Будем доказывать $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 \sin^2 \alpha = |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2(1 - \cos^2 \alpha)$

$$\begin{aligned}
&(a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 = \\
&\quad (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)\left(1 - \frac{(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2}{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)}\right) = \\
&\qquad (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2
\end{aligned}$$

Чтобы не расписывать слагаемые перепишем в другом виде:

$$\sum_{i \neq j} a_i^2 b_j^2 - 2\sum_{i<j} a_ib_ia_jb_j = \sum_i a_i^2b_i^2 + \sum_{i \neq j} a_i^2b_j^2 - \sum_{i=1}^{3} a_i^2b_i^2 - 2\sum_{i<j} a_ib_ia_jb_j$$

■

Замечание.

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Определение 5.3 (Ориентация)**.** Пусть[1] $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ – ОНБ («правая тройка»), $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ – векторы.

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} &= a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k} \\
\mathbf{b} &= b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k} \\
\mathbf{c} &= c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k}
\end{aligned}$$

Если $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} > 0$, то $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ называется правой тройкой векторов.

Если $\det < 0$, то $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ называется левой тройкой векторов.
Если $\det = 0$, то $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ – ЛЗ.

Выводы:

1. Ориентация бывает только у ЛНЗ троек – у базисов.

2. Ориентаций бывает ровно 2.

3. Одинаковость ориентаций является эквивалентностью.

[1]Здесь возможно стоит обратиться к section 1.4

Замечание. После этого можно определить $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ как вектор $\perp \mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ с длиной $|\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin\alpha$ и с нужной ориентацией.

Теорема 5.2. $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b})$ – *правая тройка*

Доказательство.

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) \qquad \mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$$
$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2b_3 - a_3b_2) + (a_3b_1 - a_1b_3) + (a_1b_2 - a_2b_1) =$$
$$= \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \right) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} (a_2b_3 - a_3b_2) - \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} (a_1b_3 - a_3b_1) + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} (a_1b_2 - a_2b_1)$$
$$= (a_2b_3 - a_3b_1)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2a_2b_1)^2 > 0$$

■

5.1. Геометрический смысл векторного произведения

1. Если нужен вектор $\perp \mathbf{a} \perp \mathbf{b}$, то $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ подойдет.
2. $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = S_{\text{параллелограмма}} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin\alpha$

ГЛАВА 6

Смешанное произведение

Определение 6.1. $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ – векторы в $\mathbb{R}^3$

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}; \mathbf{c}) \text{ – смешанное произведение}$$

Геометрический смысл: $\pm V_{\text{параллелограмма}}$

Доказательство.

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}||\mathbf{c}| \cos\alpha = S_{\mathbf{a},\mathbf{b}}|\mathbf{c}| \cos\alpha = \pm V_{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}}$$

∎

В координатах:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}; \mathbf{c}) = (a_2b_3 - a_3b_2; a_3b_1 - a_1b_3; a_1b_2 - a_2b_1)(c_1, c_2, c_3) =$$

$$a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 + a_1b_2c_3 - a_2b_1c_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

6.1. Свойства

1. $(\mathbf{e} + \mathbf{f}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{e}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) + (\mathbf{f}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ для каждого аргумента
2. $(\alpha\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a}, \alpha\mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \alpha\mathbf{c}) = \alpha(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$
3. $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ – ЛЗ
4. $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}) = (\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = -(\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}) = -(\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b}) = -(\mathbf{c}, \mathbf{b}, \mathbf{a})$
5. Знак смешанного произведения – ориентация тройки.

Часть II

Линейная геометрия

ГЛАВА 7

Точечное пространство

Определение 7.1. V – векторное пространство, E – множество. Назовем E точечным (афинным) пространством , если определена операция $+ : E \times V \to E$, т.е. $(e; \mathbf{v}) \mapsto (e + \mathbf{v})$ со свойствами:

1. $(e + \mathbf{v}_1) + \mathbf{v}_2 = e + (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)$
2. $e + \mathbf{0} = e$
3. $\forall e_1, e_2 \in E \exists ! \mathbf{v} \in V : e_2 = e_1 + \mathbf{v}$

Такой вектор будем обозначать $\mathbf{v} = \overrightarrow{e_1 e_2}$

Если в V есть базис $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ и мы зафиксируем $e_0 \in E \implies \forall e \in E \exists ! \mathbf{v} : e_0 + \mathbf{v} = e \implies \mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ – координаты в базисе $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$. Обозначим $e = (v_1, v_2, v_3); e_0 = (0, 0, 0)$

Замечание.

$$e = (e_1, e_2, e_3) \qquad f = (f_1, f_2, f_3)$$
$$\overrightarrow{ef} = (f_1 - e_1, f_2 - e_2, f_3 - e_3)$$

ГЛАВА 8

Прямые на плоскости

Есть пространство $V; \dim V = 2$, и ассоциированное с ним точечное пространство E, т.е. E – плоскость

Определение 8.1. Есть $e_0 \in V$ и $\mathbf{n} \in V$. Тогда прямая в E – геометрическое место точек e, таких что $\overrightarrow{e_0 e} \perp \mathbf{n}$

Теорема 8.1. *В стандартных координатах прямая задается стандартным линейным уравнением: $ax + by + c = 0$, где координаты $e = (x, y)$, а координаты $(a, b) = \mathbf{n}$.*

Или $\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{0e} = -c$ (c – константа).

Точка 0 имеет координаты $(0, 0)$, а $e_0 = (x_0, y_0); e = (x, y)$

$$\overrightarrow{e_0 e} \perp \mathbf{n} \qquad ((x - x_0); (y - y_0)) \cdot (a, b) = 0$$
$$(x - x_0)a + (y - y_0)b = 0$$
$$ax + by - ax_0 - by_0 = 0, \text{ где } -ax_0 - by_0 = c$$

Наоборот: любое уравнение $ax+by+c = 0$ (если $a^2+b^2 \neq 0$) задает прямую

Определение 8.2. $(a, b) = \mathbf{n}$ называется вектором нормали к прямой

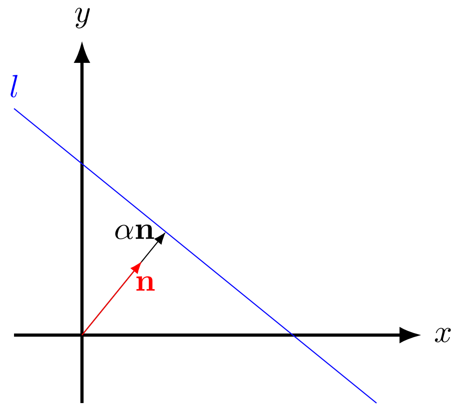
$$ax + by + c = 0 \qquad | : \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$a'x + b'y + c' = 0 \text{ – Нормальное уравнение прямой}$$
$$a'^2 + b'^2 = 1 \qquad a' = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \qquad b' = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$
$$(a', b') \text{ – единичный вектор}$$

Теорема 8.2. *1. $|c'|$ – расстояние от начала координат до прямой.*

2. Расстояние от точки (x_1, y_1) до прямой $ax + by + c = 0$ – это

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Доказательство. 1 – частный случай 2, но докажем сперва 1.



Если $|\mathbf{n}| = 1 \implies |\alpha|$ – искомое расстояние.

$$\mathbf{n} = (a', b') \qquad \alpha\mathbf{n} = (\alpha a', \alpha b')$$
$$a' \cdot \alpha a' + b' \cdot \alpha b' + c' = 0$$
$$\alpha(a'^2 + b'^2) + c' = 0$$
$$\alpha = -c' \qquad |\alpha| = |c'|$$

1,5. $ax + by + c = 0$ – такой вид прямой. Расстояние от 0 до e:

$$|\mathbf{n}| = 1 \qquad \mathbf{n} = \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)$$
$$\alpha\mathbf{n} \in e$$
$$a \cdot \frac{\alpha a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + b \cdot \frac{\alpha b}{\sqrt{a^2 + b^2}} + c = 0$$
$$\alpha \frac{a^2 + b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} + c = 0$$
$$\alpha = \frac{-c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \qquad |\alpha| = \frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

2. Расстояние от (x_1, y_1) до e

$$\tilde{x} = x - x_1 \qquad \tilde{y} = y - y_1$$

В новых координатах точка D – начало координат

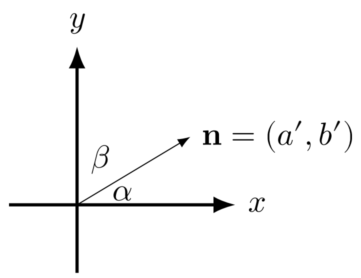
$$x = \tilde{x} + x_1 \qquad y = \tilde{y} + y_1$$
$$ax + by + c = 0$$
$$a\tilde{x} + b\tilde{y} + ax_1 + by_1 + c = 0$$

Воспользуемся 1,5.:

$$\operatorname{dist}(D; e) = \frac{|\tilde{c}|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

■

(a', b') называют направляющими косинусами, т.к.



$$|\mathbf{n}| = 1 \qquad a'^2 + b'^2 = 1$$
$$a' = \cos\alpha$$
$$b' = \sin\alpha = \cos\beta$$

Даны прямые l_1, l_2:

$$l_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$$
$$l_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$$
$$\angle(l_1, l_2) = \angle(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2)$$
$$\cos\angle(l_1, l_2) = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} + \sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$
$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow a_1a_2 + b_1b_2 = 0$$
$$l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$$