Геометрия и топология

Курс Солынина А. А.

Осень 2021 г.

Оглавление

Часть I

Аналитическая геометрия

ГЛАВА 1

Введение

1.1. Множества

Определение 1. Множество — неопределяемое понятие.

A, B — множества
$A \cup B = \{x : x \in A$ или $x \in B\}$ — объединение
$A \cap B = \{x : x \in A$ и $x \in B\}$ — пересечение
$A \setminus B = \{x : x \in A$ or $x \notin B\}$ — разность
$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ — симметрическая разность
$A \times B = \{(x, y) : x \in A; y \in B\}$ — декартово произведение множеств

Примеры декартового произведения множеств

1. Координатная плоскость $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

2. Множество полей шахматной доски $\{A, B, C, D, E, F, G, H\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

3. Колода карт {масти} × {достоинства}

4. Нумерация мест в театре

5. Нумерация аудиторий на ММ

1.2. Отображения

Определение 2. Пусть A, B — множества. Говорим, что задано отображение $f : A \to B$, если задано правило, сопоставляющее каждому $x \in A$ ровно один $y \in B$.
Пишем: $y = f(x)$.

Пример. $f(x) = \frac{1}{x}$ — не отображение, т.к. $f(0)\nexists$.
Однако при $\mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ такое отображение существует.

Пример.

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$(x, y) \mapsto x + y$$

Любая операция является отображением

Пример. $A \subset B \quad i : A \to B \quad i(a) = a$
$A \hookrightarrow B$ — отображение включения
$\mathrm{id} : A \to A \quad \mathrm{id}(x) = A$ — тождественное отображение

1.3. Отношения эквивалентности

Определение 3. M – множество, $\mu \subset M \times M \Rightarrow \mu$ называется отношением над M.

$\forall a, b \in M$ два случая

1. $(a, b) \in \mu$ пишем $a\mu b$
2. $(a, b) \notin \mu$ пишем $a\not\mu b$

Пример. $=, <, \leqslant, >, \geqslant, \vdots$

$\subset$ тоже отношение, но только на множестве некоторых множеств.

Если M – множество людей, то слова «отец», «мать», «муж», «жена» и т.д.

Определение 4. Отношение μ называется рефлексивным, если $\forall a : a\mu a$

Определение 5. Отношение μ называется симметричным, если $a\mu b \implies b\mu a$

Определение 6. Отношение μ называется транзитивным, если

$$\left.\begin{matrix} a\mu b \\ b\mu c \end{matrix}\right\} \implies a\mu c$$

Определение 7. Отношение называется отношением эквивалентности, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно. Обозначение:$\sim$.

Определение 8. Если $a \in M, K_a = \{b : a \sim b\}$ – класс эквивалентности.

Теорема 1. $K_a = K_b$ *либо* $K_a \cap K_b = \varnothing$

Доказательство. Допустим противоречие, тогда $\exists c \in K_a \cap K_b, \exists d \in K_a \setminus K_b$ (или $\in K_b \setminus K_a$)

$$a \sim c; b \sim c \qquad a \sim d; b \nsim d$$

$$\left.\begin{array}{l} a \sim c \\ c \sim b \end{array}\right\} \Longrightarrow a \sim b \qquad \left.\begin{array}{l} d \sim a \\ a \sim b \end{array}\right\} \Longrightarrow d \sim b \qquad \perp$$

■

Определение 9. Множество классов эквивалентности называется фактор-множество. Обозначается $M/\sim$

ГЛАВА 2

Векторные пространства

2.1. Понятие векторного пространства

Определение 10. Множество V с двумя операциями: $+ : V \times V \to V; \quad (a, b) \mapsto a+b$ и $\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$ называется векторным пространством (над $\mathbb{R}$), если при условии $\forall a, b, c \in V; \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, выполнены следующие свойства:

Элементы a, b, c – векторы (иногда $\vec{a}$ или $\overline{a}$). Элементы α, β – скаляры.

1. $a + (b + c) = (a + b) + c$ — ассоциативность
2. $a + b = b + a$ — коммутативность
3. $\exists \mathbf{0} : \forall a \quad \mathbf{0} + a = a + \mathbf{0} = a$
4. $\forall a \exists (-a) : a + (-a) = \mathbf{0}$
5. $\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b$ —дистрибутивность

Если выполнены свойства 1–4, то V называется коммутативной (абелевой) группой.

Доказательство.

$$\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b$$
$$a = (x_1, y_1) \quad b = (x_2, y_2)$$

$$\alpha(a + b) = \alpha((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) = \alpha(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (\alpha(x_1 + x_2), \alpha(y_1 + y_2)) = (\alpha x_1 + \alpha x_2, \alpha y_1 + \alpha y_2) = (\alpha x_1, \alpha y_1) + (\alpha x_2, \alpha y_2) = \alpha(x_1, y_1) + \alpha(x_2, y_2) = \alpha a + \alpha b$$

■

6. $(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a$ — дистрибутивность
7. $(\alpha \cdot \beta)a = \alpha(\beta a)$ — ассоциативность
8. $1 \cdot a = a, \forall a \in \mathbb{R}$

Свойства векторного пространства

0 — векторный ноль

1. $\mathbf{0}$ — единственный

   Доказательство. $\mathbf{0}_1 = \mathbf{0}_1 + \mathbf{0}_2 = \mathbf{0}_2$ ■

2. $-a$ — единственный

   Доказательство. Пусть b_1, b_2 – противоположные к a

   $b_1 + a = \mathbf{0} \quad b_2 + a = \mathbf{0}$

   $b_1 = b_1 + \mathbf{0} = b_1 + (a + b_2) = (b_1 + a) + b_2 = \mathbf{0} + b_2 = b_2$ ■

3. $\mathbf{0} \cdot a = \mathbf{0}$

   Доказательство. !!! ■

4. $-1 \cdot a = -a$

   Доказательство. !!! ■

Примеры векторных пространств

1. Координатная плоскость $\{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}\}$
2. Координатное трехмерное пространство $\{(x, y, z) | x, y, z \in \mathbb{R}\}$
3. Строки длины n из вещественных чисел
   $V = \{(x_1, x_2, ..., x_n) | x_i \in \mathbb{R}\}$ или матрицы (2d массивы)

2.2. Операции над векторами

$$a = (x_1, y_1) \quad b = (x_2, y_2)$$

Сложение

$$a + b = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

Умножение вектора на число

Свойства 1–8, очевидно выполняются

$$\alpha a = (\alpha \cdot x_1, \alpha \cdot y_1)$$

2.3. Линейные комбинация и (не)зависимость

Определение 11. V - векторное пространство и векторы $v_1, v_2, v_3, ..., v_n \in V$. Система $v_1, ..., v_n$ называется линейно независимой (ЛНЗ), если из $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n = 0 \implies \alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$.

Определение 12. Если $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$, $v_1, ..., v_n \in V$. То $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n$ – линейная комбинация (ЛК) векторов $v_1, ..., v_n$.

Определение 13. Если $\exists \alpha_1, ..., \alpha_n$, не все $= 0$, но $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n = 0$, то система $v_1, ..., v_n$ называется линейно зависимой (ЛЗ).

$\Leftrightarrow$ – тогда и только тогда

Утверждение 1. *$v_1, ..., v_n$ – ЛЗ $\Leftrightarrow$ один из этих векторов можно представить как ЛК остальных. $\exists i : v_i = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_{i-1} v_{i-1} + \alpha_{i+1} v_{i+1} + ... + \alpha_n v_n$*

Доказательство. $\Rightarrow$: $\exists \alpha_1, ..., \alpha_n (\exists i : \alpha_i \neq 0)$

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n = 0$$
$$\alpha_i v_i = -\alpha_1 v_1 - \alpha_2 v_2 - ... - \alpha_{i-1} v_{i-1} - \alpha_{i+1} v_{i+1} - ... - \alpha_n v_n$$
$$\alpha_i \neq 0 \quad v_i = -\frac{\alpha_1}{\alpha_i} v_1 - ... - \frac{\alpha_n}{\alpha_i} v_n$$

$$\Leftarrow: v_i = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n \text{ без } i\text{-ого слагаемого}$$
$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + (-\mathbf{1}) v_i + ... + \alpha_n v_n = 0$$
$$\text{ЛК } = 0 \text{ не все коэффициенты} = 0$$

■

Свойство 1. $v_1, ..., v_n$ – ЛНЗ, то любой его поднабор тоже ЛНЗ.
$v_1, ..., v_n$ – ЛЗ, то при добавлении векторов, набор останется ЛЗ.

Утверждение 2. *$v_1, ..., v_n$ – ЛНЗ $\Leftrightarrow$ если*

$$\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n = \beta_1 v_1 + ... + \beta_n v_n$$
$$\Rightarrow \alpha_1 = \beta_1; \alpha_2 = \beta_2; ...; \alpha_n = \beta_n$$

Доказательство.

$$(\alpha_1 - \beta_1)v_1 + (\alpha_2 - \beta_2)v_2 + ... + (\alpha_n - \beta_n)v_n = \mathbf{0}$$
$$\alpha_i - \beta_i = 0 \Leftrightarrow v_1, ..., v_n \text{– ЛНЗ}$$

■

ГЛАВА 3

Базис векторного пространства

Определение 14. Набор $v_1, v_2, ..., v_n$ называется порождающим для V, если $\forall w \in V \exists \alpha_1, ..., \alpha_n : w = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n$

Свойство 2. Если к порождающему набору прибавить вектор, то он останется порождающим. Если убрать векторы из непорождающего набора векторы, то набор останется непорождающим.

Определение 15. $v_1, v_2, ..., v_n$ называется базисом V, если этот набор ЛНЗ и порождающий.

Теорема 2 (О базисе)**.** *Следующие определения базиса равносильны:*

1. *ЛНЗ и порождающий набор*
2. *Минимальный порождающий набор (минимальный по включениям)*
3. *Максимальный ЛНЗ набор (максимальный по включениям)*
4. *Набор $\forall w \in V \exists! \alpha_1, ..., \alpha_2 : w = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n$*

Доказательство. Цепочка доказательств: $1 \to 2 \to 4 \to 3 \to 1$ (цикл)

$1 \to 2$. Дан $v_1, ..., v_n$ – ЛНЗ и порождающий набор. Доказать, что он минимальный порождающий.

Допустим, что v_i выкинули, оставшийся набор остался порождающим $\Rightarrow v_i$ – ЛК остальных $\Rightarrow$ ЛЗ $\quad \perp$.

$2 \to 4$. Дан $v_1, ..., v_n$ – минимальный порождающий набор. Доказать $v_1, ..., v_n$ – порождающий с единственностью коэффициентов.

Допустим противное: $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n = \beta_1 v_1 + ... + \beta_n v_n$

$$\alpha_1 \neq \beta_1$$
$$(\alpha_i - \beta_i)v_i = (\beta_1 - \alpha_1)v_1 + ... \text{ (без } i\text{-ого)} + (\beta_n - \alpha_n)v_n$$
$$v_i = \frac{\beta_1 - \alpha_1}{\alpha_i - \beta_i} + ... \text{ (без } i\text{-ого)} + \frac{\beta_n - \alpha_n}{\alpha_i - \beta_i}$$

v_i – выкинем. В любой ЛК с v_i заменим v_i на выражение выше $\implies$ набор порождающий

$4 \to 3$. Дан $v_1, ..., v_n$ – порождающий набор с единственностью коэффициентов. Доказать: $v_1, ..., v_n$ – минимальный ЛНЗ (ЛНЗ уже доказана)

Допустим противное: $v_1, v_2, ..., v_n; u$ – ЛНЗ набор

$$u = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n (\alpha_1, ... \alpha_n \exists!)$$
$$\implies v_1, ..., v_n, u \text{ – ЛЗ} \qquad \perp$$

$3 \to 1$. Дан $v_1, ..., v_n$ – минимальный ЛНЗ. Доказать $v_1, ..., v_n$ – ЛНЗ и порождающий набор.

$\forall w \in V$	$v_1, v_2, ..., v_n, w$ – ЛЗ набор
	$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n + \beta w = \mathbf{0}$
Если $\beta = 0 \implies$	$\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n = \mathbf{0}$
	не все коэффициенты $= 0 (\alpha_i \neq 0)$
	$\implies v_1, ..., v_n$ – ЛЗ
$\beta \neq 0 \implies$	$w = -\frac{\alpha_1}{\beta} v_1 - \frac{\alpha_2}{\beta} v_2 - ... - \frac{\alpha_n}{\beta} v_n$

■

Замечание. Любую конечную порождающую систему можно сузить до базиса.

Замечание. Если есть конечный порождающий набор, то любую ЛНЗ систему можно расширить до базиса.

Определение 16. Размерность пространства равна количеству элементов в базисе. (пока нет доказательств корректности)

Лемма 1. *Система линейных уравнений:* $(a_{ij} \in \mathbb{R}; x_i \in \mathbb{R}; 0 \in \mathbb{R})$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0 \\ ... \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + ... + a_{kn}x_n = 0 \end{cases}$$

Имеет ненулевые решения, если $n > k$.

Доказательство. Индукция по k.

База $k = 1$:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0$$

$$\text{Пусть } a_{11} \neq 0 \implies x_1 = -\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 - \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 - ... - -\frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n$$

$$\forall x_2, ..., x_n : x_1 \text{ выражается через них}$$

$$a_{11} = 0 \implies x_1 = 1; x_2 = x_3 = ... = x_n = 0$$

Переход

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0$$

$$\exists i : a_{1i} \neq 0, \text{ иначе выкинем предыдущее уравнение}$$

$$x_i = -\frac{a_{11}}{a_{1i}}x_1 - ... \text{ (без } i\text{-ого)} - -\frac{a_{1n}}{a_{1i}}x_n$$

Подставим выраженное x_i во все остальные уравнения. Уравнений на 1 меньше, переменных на 1 меньше. ■

Пример.

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ z + y - z = 0 \end{cases} \implies z = 0 \qquad x + y = 0$$

Теорема 3. *Если* $v_1, ..., v_k$ *и* $w_1, ..., w_n$ *базисы* $\in V$, *то* $k = n$.

Доказательство. $v_1, ..., v_n$ – порождающая система.

$$w_1 = a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + a_{31}v_3 + ... + a_{k1}v_k$$
$$w_2 = a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + a_{32}v_3 + ... + a_{k2}v_k$$
$$...$$
$$w_n = a_{1n}v_1 + a_{2n}v_2 + a_{3n}v_3 + ... + a_{kn}v_k$$

$$x_1w_1 + x_2w_2 + ... + x_nw_n = \mathbf{0}, x_i \in \mathbb{R} \qquad (\star)$$

т.к. $w_1, ..., w_n$ – ЛНЗ $\implies$ все $x_i = 0$

$$x_1(a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + ... + a_{k1}v_k) + x_2(a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + ... + a_{k2}v_k) \\ + ... + x_n(a_{1n}v_1 + a_{2n}v_2 + ... + a_{kn}v_k) = \mathbf{0}$$

$$v_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n) + v_2(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n) \\ + ... + v_k(a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + ... + a_{kn}x_n) = \mathbf{0}$$

$v_1, v_2, ..., v_k$ – ЛНЗ $\implies$ все коэффициенты равны 0.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0 \\ ... \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + ... + a_{kn}x_n = 0 \end{cases}$$

Если $n > k \implies \exists$ ненулевые решения $\implies$ противоречие с $(\star)$ и ЛНЗ $w_i \implies n \leqslant k$. Аналогично $k \leqslant n \implies n = k$. ■

Если $\exists$ хотя бы один конечный базис, то все базисы будут равномощными.

3.1. Координаты вектора в базисе

Пусть $v_1, v_2, ..., v_n$ – базис.

$$\forall w \in V \implies \exists! \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n : w = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n$$

$w = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ – координаты w в базисе $\{v_i\}_{i=1}^n$

$$\begin{gathered} v_1 = (1, 0, ..., 0) \\ v_2 = (0, 1, ..., 0) \\ ... \\ v_n = (0, 0, ..., 1) \end{gathered}$$

ГЛАВА 4

Скалярное произведение

Обозначение скалярного произведения векторов: $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ или $(\mathbf{v}, \mathbf{w})$

Определение 17. Если V - векторное пространство, в котором есть операция $\cdot : V \times V \to \mathbb{R}$, со свойствами:

1. $(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geqslant 0; (\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0}$
2. $(\mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u}, \mathbf{v}) + (\mathbf{u}, \mathbf{w})$
3. $(\alpha\mathbf{u}, \mathbf{w}) = \alpha(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = (\mathbf{u}, \alpha\mathbf{w})$
4. $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{v}, \mathbf{u})$

то такая операция называется скалярным произведением, а V вместе со скалярным произведением называется евклидовым пространством

Пример. V – множество некоторых функций, $\phi(x)$ - одна функция, которая называется весом, важно, что $\phi > 0$, тогда $(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)\phi(x)dx$

Определение 18. $|\mathbf{v}| = \sqrt{(\mathbf{v}, \mathbf{v})}, |\mathbf{v}| \geqslant 0, |\mathbf{v}| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0}$

Определение 19. $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$, тогда $\cos\angle(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \dfrac{(\mathbf{u}, \mathbf{v})}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|}$

$$\angle(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \arccos\frac{(\mathbf{u}, \mathbf{v})}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|} \in [0; 2\pi]$$

Теорема 4 (Неравенство Коши-Буняковского-Шварца)**.** $|(\mathbf{u}, \mathbf{v})| \leqslant |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|$

Доказательство.

$$(\mathbf{u}+t\mathbf{v},\mathbf{u}+t\mathbf{v}) \geqslant 0 \quad \forall t$$
$$(\mathbf{u},\mathbf{u})+(\mathbf{u},t\mathbf{v})+(t\mathbf{v},\mathbf{u})+(t\mathbf{v},t\mathbf{v}) \geqslant 0$$
$$|\mathbf{u}|^2+2t(\mathbf{u},\mathbf{v})+t^2|\mathbf{v}|^2 \geqslant 0 \quad \forall t$$
$$\frac{D}{4} \leqslant 0 \quad (\mathbf{u},\mathbf{v})^2-|\mathbf{u}|^2|\mathbf{v}|^2 \leqslant 0$$
$$|(\mathbf{u},\mathbf{v})| \leqslant |\mathbf{u}||\mathbf{v}|$$

■

Замечание. 2 и 3 аксиомы можно заменить одной: $(\mathbf{u},\alpha\mathbf{v}+\beta\mathbf{w}) = \alpha(\mathbf{u},\mathbf{v})+\beta(\mathbf{u},\mathbf{w})$

Пример.

$$V=\mathbb{R}^n=\{(a_1,a_2,...,a_n):a_i\in\mathbb{R}\}$$

«стандартное» скалярное произведение:

$$\mathbf{u}=(a_1,a_2,...,a_n) \qquad \mathbf{v}=(b_1,b_2,...,b_n)$$
$$(a_1,a_2,...,a_n)(b_1,b_2,...,b_n)=a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n$$

Аксиомы 1–4 выполняются

$$|(a_1,...,a_n)|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+...+a_n^2}$$

КБШ: $(a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n)^2 \leqslant (a_1^2+a_2^2+...+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+...+b_n^2)$

Теорема 5 (Неравенство треугольника)**.** $|\mathbf{u}+\mathbf{v}| \leqslant |\mathbf{u}|+|\mathbf{v}|$

Доказательство.

$$(\mathbf{u}+\mathbf{v};\mathbf{u}+\mathbf{v}) \overset{?}{\leqslant} (|\mathbf{u}|+|\mathbf{v}|)^2$$
$$(\mathbf{u},\mathbf{u})+2(\mathbf{u},\mathbf{v})+(\mathbf{v},\mathbf{v}) \overset{?}{\leqslant} (\mathbf{u},\mathbf{u})+(\mathbf{v},\mathbf{v})+2|\mathbf{u}||\mathbf{v}|$$
$$(\mathbf{u},\mathbf{v}) \overset{?}{\leqslant} |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \text{ – верно по неравенству КБШ}$$

■

Определение 20. $\mathbf{u},\mathbf{v}\in V;\mathbf{u}\perp\mathbf{v}$ (ортогональные векторы), если $(\mathbf{u},\mathbf{v})=\mathbf{0}$. Для $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,...,\mathbf{u}_n\in V$, $\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,...,\mathbf{u}_n\}$ называется ортогональной системой, если $\forall i\neq j,\mathbf{u}_i\perp\mathbf{u}_j$.

Определение 21. $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_n\}$ называется ортонормированной системой, если $\mathbf{u}_i \perp \mathbf{u}_j (i \neq j)$ и $|\mathbf{u}_i| = 1$

Определение 22. Если $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_n\}$ – ортонормированная система и базис, то это ортонормированный базис (ОНБ).

Утверждение 3. $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_n\}$ *– ортогональная система и* $\mathbf{u}_i \neq \mathbf{0}$*, то она ЛНЗ.*

Доказательство.

$$\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha \mathbf{u}_2 + ... + \alpha_n \mathbf{u}_n = \mathbf{0} \quad | \cdot \mathbf{u}_i$$
$$\alpha_1(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_i) + \alpha_2(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_i) + ... + \alpha_n(\mathbf{u}_n, \mathbf{u}_i) = 0$$
$$\alpha_i(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i) = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0 \forall i$$

■

Утверждение 4. $\{\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_n\}$ *– ортогональная система и* $\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2 + ... + \alpha_n \mathbf{u}_n \implies \alpha_i = \frac{(\mathbf{u}_i, \mathbf{v})}{|\mathbf{u}_i|^2}$

Доказательство.

$$\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha \mathbf{u}_2 + ... + \alpha_n \mathbf{u}_n = \mathbf{v} \quad | \cdot \mathbf{u}_i$$
$$\alpha_i(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i) = (\mathbf{v}, vu_i)$$

■

Пример. V – множество 2π-периодических функций.

$$(f, g) = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx$$

(можем ограничиться кусочно-непрерывными функциями)

$$\begin{pmatrix} \cos 0x, \cos x, \cos 2x, \cos 3x, ... \\ \sin x, \sin 2x, \sin 3x, ... \end{pmatrix}$$

– ортогональная система.

Для проверки достаточно взять

$$\int_0^{2\pi} \sin kx \cos nx dx = 0 \text{ и } \int_0^{2\pi} \cos kx \cos nx dx = 0 \quad (k \neq n)$$

Аналогично с sin

Любая 2π-периодическая функция раскладывается по этой системе.

$$f(x) = a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + ...$$

$$a_i = \frac{\int_0^{2\pi} f(x) \cos ixdx}{\int_0^{2\pi} \cos^2 ixdx} \qquad b_i = ...$$

4.1. Построение ортонормированного базиса

Ортогонализация Грама-Шмидта

Есть $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$ – ЛНЗ

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{v}_1}{|\mathbf{v}_1|} \qquad |\mathbf{u}_1| = 1$$
$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2 - \alpha\mathbf{u}_1 \qquad \mathbf{w}_2 \perp \mathbf{u}_1 \qquad \mathbf{u}_2 = \frac{\mathbf{w}_2}{|\mathbf{w}_2|}$$
$$|\mathbf{u}_2| = 1 \qquad \mathbf{u}_2 \perp \mathbf{u}_1$$
$$(\mathbf{u}_1, \mathbf{w}_2) = 0$$
$$(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2 - \alpha\mathbf{u}_1) = 0$$
$$(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2) - \alpha(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1) = 0$$
$$\alpha = (\mathbf{u}_1, \mathbf{v} - 2)$$

Пусть $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_{k-1}$ построены (ОНС)

Построим $\mathbf{u}_k$

$$\mathbf{w}_k = \mathbf{v}_k - \alpha_1\mathbf{u}_1 - \alpha_2\mathbf{u}_2 - ... - \alpha_{k-1}\mathbf{u}_{k-1}$$
$$\mathbf{w}_k \perp \mathbf{u}_i \qquad (i \leqslant k-1)$$
$$0 = (\mathbf{w}_k, \mathbf{u}_i) = (\mathbf{v}_k, \mathbf{u}_i) = \alpha(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i)$$
$$\alpha_i = (\mathbf{v}_k, \mathbf{u}_i)$$
$$\mathbf{u}_k = \frac{\mathbf{w}_k}{|\mathbf{w}_k|}$$

Строим $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_n$ с помощью данного алгоритма.

Замечание. $\mathbf{u}_i$ – ЛК $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_i$

Следствие 1. *Если* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$ *– базис* $\implies$ $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_n$ *– ОНБ, т.е. если* $\dim V = n$*, то* $\exists$ *ОНБ*

Пусть V - евклидово пространство, $\dim V = n$, $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_n$ – ОНБ, $\mathbf{w} = a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2 + ... + a_n\mathbf{u}_n$, то можем записать $\mathbf{w} = (a_1, ..., a_n)$, соответственно $\mathbf{v} = b_1\mathbf{u}_1 + b_2\mathbf{u}_2 + ... + b_n\mathbf{u}_n$, тогда

$$\begin{aligned}(\mathbf{w}, \mathbf{v}) = (a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2 + ... + a_n\mathbf{u}_n, b_1\mathbf{u}_1 + b_2\mathbf{u}_2 + ... + b_n\mathbf{u}_n) = \\ = a_1b_1(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) + a_1b_2(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) + ... + a_1b_n(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_n) + \\ + a_2b_1(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2) + a_2b_2(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2) + ... + a_2b_n(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_n) + \\ + a_nb_1(\mathbf{u}_n, \mathbf{u}_2) + a_nb_2(\mathbf{u}_n, \mathbf{u}_2) + ... + a_nb_n(\mathbf{u}_n, \mathbf{u}_n) = \\ = a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n\end{aligned}$$

4.2. Геометрический подход

Есть $\mathbb{R}^n$ (например $\mathbb{R}^2$ или $\mathbb{R}^3$), так же есть расстояния и углы.

Определение 23. Связанный вектор — направленный отрезок.

Определение 24. Свободный вектор — класс эквивалентности связанных векторов. $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$, если $ABDC$ – параллелограмм (возможно вырожденный)