Дискретная математика

Пономарев Николай, Бабин Руслан
Курс Григорьевой Н.С.

Осень 2021 г.

Оглавление

Глава 1

Комбинаторика

1.1. Основные правила

Правило суммы

Если комбинации можно разбить на классы A и B, то общее число кобинаций $|A| + |B|$.

Правило произведения

При составлении пары из двух элементов (A, B) известно, что первый элемент пары можно выбрать $|A|$ способами, а второй $|B|$.

1.2. Основные объекты комбинаторики

Множество перестановок

$$|P_k| = k!$$

Множество размещений

$$|A_n^k| = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Множество сочетаний

$$|C_n^k| = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Перестановки с повторениями

Пусть имеется n_k элементов типа k. Всего элементов $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$.

$$P(n_1, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$

Сочетания с повторениями

Имеются предметы n различных типов. Сколько k комбинаций можно из них сделать, если не учитывать порядок.

Если n различных типов. Пусть сначала идут все элементы первого типа, потом второго и тд. Всего k элементов. Добавим к ним $n-1$ перегородок. Всего будет $n-1+k$ мест. Выбор расположения перегородок = сочетания.

$$\overline{C_n^k} = C_{n+k-1}^{n-1} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$$

1.3. Формула включений-исключений

Для двух множеств (A и B)

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Общая

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \dots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|$$

Доказателсьво по индукции

База: $n = 2$ – верно.

Переход: предположим, что верно для $n = 1$, докажем что верно для n.

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \left|\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i \cup A_n\right| = \left|\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right| + |A_n| - \left|\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cap A_n\right| =$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} |A_i| - \sum_{1\leq i<j\leq n-1} |A_i \cap A_j| + \sum_{1\leq i<j<k\leq n-1} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots +$$

$$(-1)^{n-2}|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}| + |A_n| - \left|\bigcup_{i=1}^{n-1}(A_i \cap A_n)\right| =$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} |A_i| - \sum_{1\leq i<j\leq n-1} |A_i \cap A_j| + \sum_{1\leq i<j<k\leq n-1} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots +$$

$$(-1)^{n-2}|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}| + |A_n| -$$

$$\Bigg(\sum_{i=1}^{n-1} |A_i \cap A_n| - \sum_{1\leq i<j\leq n-1} |A_i \cap A_j \cap A_n| + \ldots +$$

$$(-1)^{n-2}|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|\Bigg) =$$

$$\sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1\leq i<j\leq n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1\leq i<j<k\leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots +$$

$$(-1)^{n-1}|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|$$

Примеры

Пример 1. В отделе 67 человек. 47 знают английский, 35 - немецкий, 23 - оба языка. Тогда знают языки по формуле.

Пример 2. 5 писем адресатам раскладывают по 5 конвертам. Сколько вариантов, в которых ни одно письмо не попадет к адресату?

Пусть A_i - количество вариантов, в которых адресат i получил свое письмо. Тогда количество вариантов, когда хотя бы один получил свое письмо:

$$|A_1 \cup \ldots \cup A_5| = 5 * 4! - C_5^2 * 3! + C_5^3 * 2! - C_5^4 * 1! + 1 = 76$$

Всего вариантов: 120. Ответ: $120 - 76 = 44$.

1.4. Двоичные векторы

Определение 1. Двоичный вектор — упорядоченный набор фиксированного размера из 0 и 1.

Примеры

1. вершины единичного куба в n-мерном пространстве
2. характеристический вектор подмножества. (1, 0, 1, 0, 0) - подмножество входят первый и третий элементы множества из 5 элементов
3. двоичное число
4. кодирование изображения

1.5. Перебор векторов

Последовательно

Рассматривая вектор как двоичное число. Начиная с нулевого, последовательно прибавляем единицу. $0000- > 0001- > 0010$

Код Грея

Алгоритм: Определим два набора: $x = (0, 0, \dots, 0)$ и $y = (0, 0, \dots, 0)$

1. Прибавляем 1 к числу y
2. Фиксируем позицию k, в которой 0 сменился на 1
3. $x[k] = \neg x[k]$

1.6. Прямое произведение множеств

Определение 2. Пусть даны k множеств M_i. Прямым произведением этих множеств $M = M_1 \times M_2 \times \dots \times M_i$ называется множество всех упорядоченных наборов $(a_1, \dots, a_k)$, где $a_i \in M_i$.

Количество элементов в прямом произведении:

$$|M_i| = |M_1 \times ... \times M_k| = m_1 \cdot ... \cdot m_k, \text{ где } m_i = |M_i|$$

Нумерация элементов прямого произведения

Занумеруем элементы каждого множества от 0 до $m_i - 1$. Элемент произведения — вектор чисел $(r_1, \dots, r_k)$.

Сопоставим каждому набору номер:

$$num(r_1, \dots r_k) = \sum_{i=1}^{k} \left(r_i \cdot \prod_{j=1}^{i-1} m_j \right) = \\ = r_1 + r_2 \cdot m_1 + r_3 \cdot m_1 \cdot m_2 + \dots + r_k m_1 m_2 \dots m_{k-1} \quad (1.1)$$

1.7. Перебор перестановок v1

Идея

Введем вспомогательный набор множеств M_i, т.ч. $|M_i| = i$. $T_k = M_k \times M_{k-1} \times \dots \times M_1, |T_k| = k!$ - ровно столько, сколько перестановок в P_k. T_k перебирать умеем. Чтобы научиться перебирать и перенумеровывать P_k, построим взаимно-однозначное соответсвие между T_k и P_k

i	1	2	3	4	5	6	7	8
r_i	4	8	1	5	7	2	3	6
t_i	3	6	0	2	3	0	0	0

$r_i \in P_k$
$t_i \in T_k$

Алгоритм

Используем вспомогательный вектор t, представляющий номре перестановки в факториальной системе счисления, начиная с $t = (0, 0, 0, 0)$

1. Прибавить 1 к текущему значению вектора t
2. По t построить перестановку p
3. Если $t = (k-1, \dots, 1, 0)$, завершить работу
4. Перейти к шагу 1

№	0 0 0 0	1 2 3 4
1	0 0 1 0	1 2 4 3
2	0 1 0 0	1 3 2 4
3	0 1 1 0	1 3 4 2
4	0 2 0 0	1 4 2 3
5	0 2 1 0	1 4 3 2
6	1 0 0 0	2 1 3 4

1.8. Перебор перестановок v2

Алгоритм

Так же перебирает перестановки в лексикоргафическом порядке, но гораздо проще и быстрее. Начинаем с перестановки $(1, 2, \ldots, k)$.

1. В данной перестановке $(r_1, \ldots, r_k)$ найти такое q, что $r_q > r_{q+1} > \ldots > r_k$ и $r_{q-1} < r_q$
2. Если была перестановка $(k, k-1, \ldots, 1)$, то алгоритм завершает работу
3. Выбрать в суффиксе $(r_q, \ldots, r_k)$ элемент, следующий по значению после r_{q-1} и поменять его и r_{q-1} местами
4. Упорядочить суффикс по возрастанию

Пример

Красным цветом выделен суффикс

1. (3,4,1,2,6,5,8,7)
2. (3,4,1,2,6,7,5,8)
3. (3,4,1,2,6,7,8,5)
4. (3,4,1,2,6,8,5,7)
5. (3,4,1,2,6,8,7,5)
6. (3,4,1,2,7,5,6,8)
7. (3,4,1,2,7,5,8,6)
8. (3,4,1,2,7,6,5,8)

1.9. Перебор перестановок v3: "аналог кода Грея"

Алгоритм

Дополнительно условие: хотим, чтобы только два соседних элемента менялись местами.
Перестановка $p = (1, 2, \dots, n)$
Вектор (младший разряд последний) $t = (0, 0, \dots, 0)$
Вектор, ответственный за смену навправлений $d = (-1, -1, \dots, -1)$
Номер разряда j, в котором значение увеличилось на 1

1. Прибавить 1 к вектору t

2. Определить номер разряда j, в котором значение увеличилось на 1

3. Изменить направление движения у всех элементов, больших j, т.е. для всех $i > g$ положим $d_i = -d_i$

4. Поменять местами элемент перестановки j с элементом справа (если $d_j > 0$) или слева (если $d_j < 0$)

1.10. Задача о минимуме скалярного произведения.

Условие

Пусть даны два вектора $x = (x_1, \dots, x_n)$ и $y = (y_1, \dots, x_n)$.

Рассмотрим скалярное произведение $(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.

Как переставить элементы этих векторов, чтобы минимизировать (x, y)?

Решение

Теорема 1. *Скалярное произведение будет минимальным, если* $x_1 \geq \dots \geq x_n$, *а* $y_1 \leq \dots \leq y_n$.

Доказательство. Пусть нашлась пара i и j, т.ч. $x_i \geq x_j$ и $y_i \geq y_j$. Переставим их местами. Значение скалярного произведения не увеличилось:

$$
\begin{aligned}
x_i y_i + x_j y_j &\geq x_i y_j + x_j y_i \\
(x_i - x_j)(y_i - y_j) &\geq 0
\end{aligned}
$$

■

1.11. Задача о максимальной возрастающей подпоследовательности

Условие

Дана перестановка. Требуется найти самую длинную возрастающую подпоследовательность.

Решение

Алгоритм

1. Просматриваем перестановку с начала и формируем первую подпоследовательность, записывая элементы перестановки, пока они идут в убывающем порядке

2. Если очередной элемент больше предыдущего, то начинаем с него новую подпоследовательность

3. Каждый следующий элемент перестановки пытаемся поставить в подпоследовательность с минимальным номером, а если это не удается, начинаем с него новую подпоследовательность

4. Из каждой подпоследовательности, начиная с последней, выбираем по одному элементу и строим возрастающую подпоследовательность. Каждый раз выбираем элемент, меньший текущего и стоящий левее.

Пример. Если дана подпоследовательность

$$18, 2, 4, 15, 17, 16, 3, 20, 5, 1, 7, 19, 6, 14, 11, 9, 8, 13, 12, 10$$

В результате работы алгоритма сформируются подпоследовательности:

$$\begin{array}{l} 18, 2, 1 \\ 4, 3 \\ 15, 5 \\ 17, 16, 7, 6 \\ 20, 19, 14, 11, 9, 8 \\ 13, 12, 10 \end{array}$$

Результат:

$$2, 3, 5, 6, 8, 10$$

1.12. Свойства сочетаний

1. $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
2. $C_n^k = C_n^{n-k}$
3. $C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1}$ (геометрический интерпретация $\to$ треугольник паскаля $\to$ биномиальные коэффициенты $\to$ бином Ньютона)

1.13. Бином Ньютона

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

1.14. Перебор сочетаний

Сочетание - вектор $x = (1, 2, ..., k)$

1. Просматривать вектор x справа и искать компонент, который можно увеличить
2. Если такой элемент не нашелся – закончить процесс
3. Увеличить найденный компонент x_i на 1
4. Все последющие компоненты заполнить последовательными натуральными числами, начиная с $x_i + 1$

1.15. Нумерация перестановок

Представим сочетание в виде характеристического вектора: $b = (1, 0, 0, 1, 1, ...)$, где k - число единиц в нем.

$$num(b[1:n], k) = \begin{cases} num[b[1:n-1], k], & b[n] = 0 \\ C_{n-1}^{k} + num([1:n-1], k-1), & b[n] = 1 \end{cases}$$

Пример. Пусть $b = (1, 0, 0, 1, 1)$, тогда:

$$num((1,0,0,1,1),3) = \binom{4}{3} + num((1,0,0,1),2) =$$

$$\binom{4}{3} + \binom{3}{2} + num((1),1) = 4 + 3 + 0 = 7$$