Геометрия и топология

Курс Солынина А.А.

Осень 2022 г.

Оглавление

Дифференциальная геометрия

Глава 1

Дифференциальная геометрия кривых

1.1. Понятие кривой

05.09.22

Кривую можно задать множеством способов, например:

- в декартовых координатах: $y = f(x)$
- в полярных координатах: $r = r(\varphi)$
- неявным уравнением: $F(x, y) = 0$

но обычно её задают в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

В таком случае кривая

- в декартовых координатах принимает вид: $\begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases}$
- в полярных координатах: $\begin{cases} x = r(t) \cos t \\ y = r(t) \sin t \end{cases}$

- для неявных уравнений свои методы, т.к. не очень понятно как с ними работать

Например, для неявных уравнений существует следующая теорема:

Теорема (О неявной функции). Если $F(x,y)=0$ и $F(x_0,y_0)=0$, а так же $\frac{\partial F}{\partial y}|_{(x_0,y_0)} \neq 0$, $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}$ существуют и непрерывны в окрестности (x_0, y_0), тогда существует $f(x)$ в некоторой окрестности x_0, что $F(x, f(x)) = 0$.

Пример 1.1. Имеем стандартное уравнение окружности: $x^2+y^2-1=0$. В окрестности большинства его точек можно выразить y через x: $y=\pm\sqrt{1-x^2}$. Но это выражение перестает работать в точке $x=-1$ или $x=1$ (то есть для любой другой точки, можно найти окрестность, такую что функция будет иметь конкретный знак, в то время как для $x=\pm1$ такое сделать невозможно). Воспользуется теоремой выше, соблюдены почти все условия, кроме:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2y|_{\substack{x=\pm1\\ y=0}} = 0$$

Соответственно, именно в этих точках найти искомую f нельзя.

Параметрическое задание кривой

$\mathbf{f}(t)$ - векторное уравнение. $\mathbf{f} : [a,b] \to \mathbb{R}^3$. Кривую определяет вектор-функция.

Определение 1.1 (Вектор-функция). $\mathbf{f}$ – вектор-функция как выше. На протяжении всего курса предполагаем, что у функции необходимая нам гладкость.

Определение 1.2 (Предел вектор-функции). $\lim\limits_{t\to t_0} \mathbf{f}(t) = \mathbf{v}$, если

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ |t-t_0|<\delta\ |\mathbf{f}(t)-\mathbf{v}|<\varepsilon$$

Свойства. Везде считаем, что свойство выполнено, если существуют соответствующие пределы.

1. $\lim\limits_{t\to t_0}(\mathbf{f}(t)\pm\mathbf{g}(t)) = \lim\limits_{t\to t_0}\mathbf{f}(t) \pm \lim\limits_{t\to t_0}\mathbf{g}(t)$

2. $\lim\limits_{t \to t_0} (\mathbf{f}(t)\mathbf{g}(t)) = \lim\limits_{t \to t_0} \mathbf{f}(t) \lim\limits_{t \to t_0} \mathbf{g}(t)$
3. $\lim\limits_{t \to t_0} (\mathbf{f}(t) \times \mathbf{g}(t)) = \lim\limits_{t \to t_0} \mathbf{f}(t) \times \lim\limits_{t \to t_0} \mathbf{g}(t)$
4. Смешанное произведение аналогично

Определение 1.3 (Производная вектор-функции).

$$\mathbf{f}'(t)|_{t=t_0} = \lim_{t \to t_0} \frac{\mathbf{f}(t) - \mathbf{f}(t_0)}{t - t_0}$$

Свойства.

1. $(\mathbf{f} \pm \mathbf{g})' = \mathbf{f}' \pm \mathbf{g}'$
2. $(c\mathbf{f})' = c\mathbf{f}'$
3. $(\mathbf{f}\mathbf{g})' = \mathbf{f}'\mathbf{g} + \mathbf{f}\mathbf{g}'$
4. $(\mathbf{f} \times \mathbf{g})' = \mathbf{f}' \times \mathbf{g} + \mathbf{f} \times \mathbf{g}'$

Доказательство.

$$(\mathbf{f} \times \mathbf{g})'|_{t=t_0} = \lim_{t \to t_0} \frac{\mathbf{f}(t) \times \mathbf{g}(t) - \mathbf{f}(t_0) \times \mathbf{g}(t_0)}{t - t_0} =$$
$$\lim_{t \to t_0} \frac{\mathbf{f}(t) \times \mathbf{g}(t) - \mathbf{f}(t_0) \times \mathbf{g}(t) + \mathbf{f}(t_0) \times \mathbf{g}(t) - \mathbf{f}(t_0) \times \mathbf{g}(t_0)}{t - t_0} =$$
$$\lim_{t \to t_0} \frac{\mathbf{f}(t) - \mathbf{f}(t_0)}{t - t_0} \times \mathbf{g}(t) + \lim_{t \to t_0} \mathbf{f}(t_0) \times \frac{\mathbf{g}(t) - \mathbf{g}(t_0)}{t - t_0} =$$
$$\mathbf{f}'(t_0) \times \mathbf{g}(t_0) + \mathbf{f}(t_0) \times \mathbf{g}'(t_0)$$

■

5. $(\mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{h})' = (\mathbf{f}', \mathbf{g}, \mathbf{h}) + (\mathbf{f}, \mathbf{g}', \mathbf{h}) + (\mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{h}')$

Доказательство.

$$(\mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{h})' = ((\mathbf{f} \times \mathbf{g})\mathbf{h})' = (\mathbf{f} \times \mathbf{g})'\mathbf{h} + (\mathbf{f} \times \mathbf{g})\mathbf{h}' =$$
$$(\mathbf{f}' \times \mathbf{g})\mathbf{h} + (\mathbf{f} \times \mathbf{g}')\mathbf{h} + (\mathbf{f} \times \mathbf{g})\mathbf{h}'$$

■

В свойствах отсутствует деление, т.к. операция деления векторов не определена. В вещественном анализе множество теорем доказывается с помощью следующей теоремы:

Теорема (Лагранжа). Если $f(x)$ непрерывно дифференцируема на $[a, b]$, тогда существует $c \in [a, b] : f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

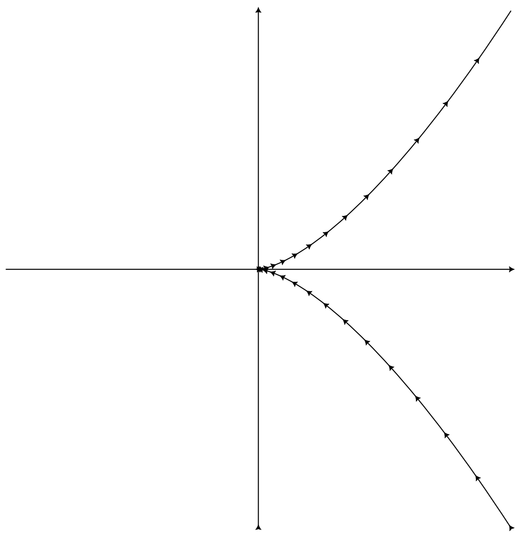
Для вектор-функций эта теорема, однако, не существует!

Определение 1.4 (Интеграл вектор-функции).

$$\int_a^b \mathbf{f}(t)dt = \lim_{\max|\Delta_i t| \to 0} \sum_i \mathbf{f}(\sigma_i)\Delta_i t.$$

Определение 1.5 (Кривая). Кривая – образ $\mathbf{f}(t)$. Кривая не пересекает саму себя, то есть $\mathbf{f}(t_1) \neq \mathbf{f}(t_2)$. $\mathbf{f}(t)$ – параметризация кривой. Параметризация регулярна, если $\mathbf{f}'(t) \neq \mathbf{0}$ $\forall t$.

Пример 1.2 (Нерегулярная параметризация). $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases}$ или $\mathbf{r}(t) = (t^2, t^3)$ – полукубическая парабола. $y = x^{3/2}$ (плохо при $x < 0$).



$(0, 0)$ – точка излома (т.е. точка, в которой параметризация теряет регулярность).

Перепараметризация

Пусть $\varphi : [a,b] \to [c,d]$, φ строго возрастает, $\varphi(a) = c, \varphi(b) = d$, также существует φ^{-1}. $\mathbf{f} : [c,d] \to \mathbb{R}^3$, тогда $\mathbf{g} := \mathbf{f} \circ \varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^3$. В таком случае $\mathbf{g}$ – перепараметризация кривой и $\mathbf{f} = \mathbf{g} \circ \varphi^{-1}$.

Если такая φ существует, то $\mathbf{f} \sim \mathbf{g}$ (эквивалентны).

Если образы $\mathbf{f}(t)$ и $\mathbf{g}(t)$ совпадают, кривые не самопересекаются, а их параметризации регулярны, то существует такое φ и $\mathbf{f} = \mathbf{g} \circ \varphi$.

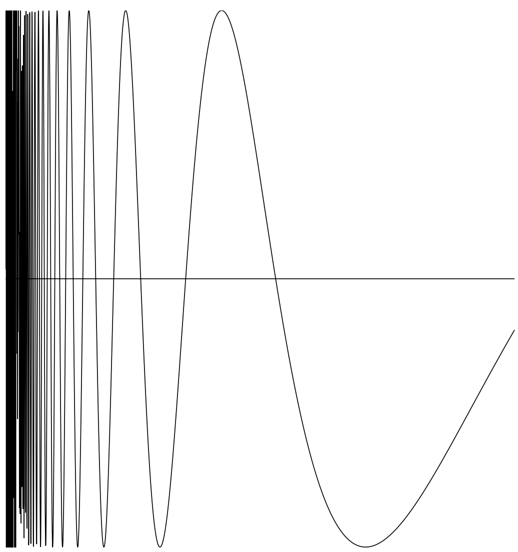
1.2. Длина кривой

Определение 1.6 (Длина кривой). $\mathbf{f} : [a,b] \to \mathbb{R}^3$, $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$, $\Delta_i t = t_i - t_{i-1}$.

$$L := \lim_{\max \Delta_i t \to 0} \sum_{i=1}^{n} |\mathbf{f}(t_i) - \mathbf{f}(t_{i-1})|$$

Определение 1.7 (Спрямляемая кривая). Прямая называется спрямляемой, если существует её длина.

Пример 1.3. $y = \sin 1/x$ на $(0,1]$ не спрямляемая.



Пример 1.4. $y = \sqrt{x} \sin 1/x$, $y(0) = 0$, ее сумма оценивается $L \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{1}{n}} = \infty$.

Теорема 1.1.

$$L = \int_a^b |\mathbf{f}'(t)|dt$$

Замечание. $|\sum \mathbf{f}_i| \leqslant \sum |\mathbf{f}_i|$, $||\mathbf{f}| - |\mathbf{g}|| \leqslant |\mathbf{f} - \mathbf{g}|$, $|\int \mathbf{f}dt| \leqslant \int |\mathbf{f}|dt$.

Доказательство. Хотим доказать:

$$\left|\int_a^b |\mathbf{f}'(t)|dt - \sum |\mathbf{f}(t_i) - \mathbf{f}(t_{i-1})|\right| \to 0$$

оценим это:

$$\left|\int_a^b |\mathbf{f}'(t)|dt - \sum |\mathbf{f}(t_i) - \mathbf{f}(t_{i-1})|\right| =$$

$$\left|\int_a^b |\mathbf{f}'(t)|dt - \sum |\mathbf{f}'(\sigma_i)|\Delta_i t + \sum |\mathbf{f}'(\sigma_i)|\Delta_i t - \sum |\mathbf{f}(t_i) - \mathbf{f}(t_{i-1})|\right|$$

$$\leqslant \left|\int_a^b |\mathbf{f}'(t)|dt - \sum |\mathbf{f}'(\sigma_i)|\Delta_i t\right| + \left|\sum |\mathbf{f}'(\sigma_i)|\Delta_i t - \sum |\mathbf{f}(t_i) - \mathbf{f}(t_{i-1})|\right|$$

$\left|\int_a^b |\mathbf{f}'(t)|dt - \sum |\mathbf{f}'(\sigma_i)|\Delta_i t\right| \to 0$ по определению интеграла.
$\mathbf{f}'$ непрерывная, значит равномерно непрерывна, тогда если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ |x_1 - x_2| < \delta \implies |\mathbf{f}(x_1) - \mathbf{f}(x_2)| < \varepsilon$. Выберем любое ε и зафиксируем δ, удовлетворяющее мелкости разбиения и получим:

$$\left|\sum |\mathbf{f}'(\sigma_i)|\Delta_i t - \sum |\mathbf{f}(t_i) - \mathbf{f}(t_{i-1})|\right| =$$

$$\left|\sum \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\mathbf{f}'(\sigma_i)|dt - \sum \left|\int_{t_{i-1}}^{t_i} \mathbf{f}'(t)dt\right|\right| \leqslant \sum \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\mathbf{f}'(\sigma_i) - \mathbf{f}'(t)|\, dt$$

$$\leqslant \sum \int_{t_{i-1}}^{t_i} \varepsilon dt = \varepsilon(b-a) \to 0$$

■