Геометрия и топология

Курс Солынина А.А.

весна 2022 г.

Оглавление

Часть I

Общая топология

ГЛАВА 1

Метрические пространства

1.1. Определения и примеры

Определение 1.1. M – множество. M вместе с $\rho : M \times M \to \mathbb{R}$ называется метрическим пространством, если:

1. $\forall x, y \ \rho(x,y) \geqslant 0$ и $\rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $\forall x, y \ \rho(x,y) = \rho(y,x)$
3. Неравенство треугольника: $\rho(x,z) \leqslant \rho(x,y) + \rho(y,z)$

(M, ρ) – метрическое пространство, ρ – метрика на M.

Пример. M – множество домов в городе. $\rho(x,y)$ – минимальное время, за которое можно добраться от x до y. (1 свойство очевидно, 2 свойство выполняется при симметричности дорог, 3 очевидно)

Пример. Расстояние на плоскости.

$$\mathbb{R}^2 = \{(x,y) : x, y \in \mathbb{R}\}$$
$$\rho_1((x_1,y_1),(x_2,y_2)) := |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$
$$\rho_2((x_1,y_1),(x_2,y_2)) := \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$
$$\rho_k((x_1,y_1),(x_2,y_2)) := \left(|x_1 - x_2|^k + |y_1 - y_2|^k\right)^{1/k}$$
$$k \to \infty : \rho_\infty((x_1,y_1),(x_2,y_2)) := \max\{|x_1 - x_2|; |y_1 - y_2|\}$$

Если перейти к $\mathbb{R}^n$, то

$$\rho_k((x_1, x_2, ..., x_n); (y_1, y_2, ..., y_n)) = \left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^k\right)^{1/k}$$

$$\Big(|\underbrace{x_1-x_3}_{a_1+b_1}|^k+|\underbrace{y_1-y_3}_{a_2+b_2}|^k\Big)^{1/k}\leqslant\Big(|\underbrace{x_1-x_2}_{a_1}|^k+|\underbrace{y_1-y_2}_{a_2}|^k\Big)^{1/k}+$$
$$\Big(|\underbrace{x_2-x_3}_{b_1}|^k+|\underbrace{y_2-y_3}_{b_2}|^k\Big)^{1/k}$$

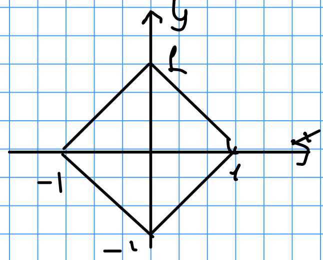
$$\Big(\sum|a_i+b_i|^k\Big)^{1/k}\leqslant(|a_1|^k+|a_2|^k)^{1/k}+(|b_1|^k+|b_2|^k)^{1/k}$$

Неравенство Йенсена (к чему это?)

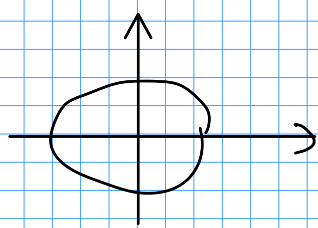
Определение 1.2. $B(x_0,r):=\{x\in M:\rho(x,x_0)<r\}$ – шар с центром в точке x_0 и радиусом r.

Нарисуем $B((0,0);1)$ в $\rho_1,\rho_2,\rho_\infty$.

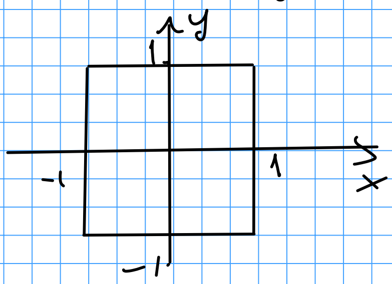
$\rho_1:\ |x-0|+|y-0|<1.$



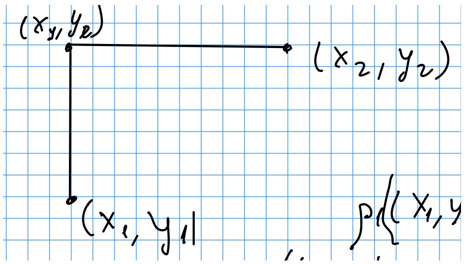
$\rho_2:\ \sqrt{x^2+y^2}<1.$



$\rho_\infty:\ \max\{|x|;|y|\}<1.$



ρ_1 называется манхэттенской метрикой.



$$\rho_1((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$
$$\rho_1((x_1, y_1), (x_1, y_2)) = |y_1 - y_2|$$
$$\rho_1((x_1, y_2), (x_2, y_2)) = |x_1 - x_2|$$

Пример. M – пространство «некоторых»[1] функций. Функции определены на $X \subset \mathbb{R}$.

$$\rho_1(f, g) := \int_X |f(x) - g(x)|dx$$

Есть проблемы: если $f(x) = g(x)$ всюду, кроме 1 точки, то $\rho_1(f, g) = 0$.

1 и 2 свойство очевидны. Третье:

$$\int_X |f - h|dx \leqslant \int_X |f - g|dx + \int_X |g - h|dx$$

Аналогично определяются другие метрики, например:

$$\rho_2(f, g) = \left(\int_X |f(x) - g(x)|^2 dx\right)^{1/2}$$
$$\rho_k(f, g) = \left(\int_X |f(x) - g(x)|^k dx\right)^{1/k}$$
$$\rho_\infty(f, g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|$$

Естественные свойства:

$$\rho_2 : \int_X |f(x)|^2 dx < \infty$$

Определение 1.3. (M, ρ) – метрическое пространство. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset M$ – последовательность. Говорим, что $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N(\varepsilon) : \forall n > N \; \rho(x_n; x_0) < \varepsilon$$

[1] «некоторых» – обладающих естественными свойствами, какими именно – зависит от функци

В частности, в пространстве функций с разными метриками бывают разные пределы последовательностей функций.

$$f_n(x) \to f_0(x) \text{ по метрике } \rho_1$$

Аналогично для других метрик.

$$f_n(x) \to f_0(x) \text{ по метрике } \rho_\infty$$

называется равномерной сходимостью. $f_n \rightrightarrows f_0$:

$$f_n(x) \rightrightarrows f_0(x) \Leftrightarrow \lim \sup_X |f_n(x) - f_0(x)|$$

Пример. Дискретное метрическое пространство. M – любое множество.

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 1 & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$$

дискретная метрика.

Пример. На самом деле дискретная метрика – это обобщение $\rho(x, y) \geqslant \varepsilon > 0$. ε не зависит от x или y.

Пример. M – множество строк длины n. $\rho(x, y)$ – количество символов, где эти строки отличаются

Пример. Задача: есть код из N бит. Можем переслать, но возникнет не более k ошибок. Сколько бит надо переслать, чтобы эти ошибки можно было исправить?

Решать не будем, переформулируем на язык метрических пространств.

(M, ρ). M состоит из строк, каждая из $N + k$ двоичных символов. Хотим выбрать $\{x_1, x_2, ..., x_{2^N}\} \subset M : \rho(x_i, x_j) > 2k$. $l \to \min$.

x_i – строки из $N + l$ символов.

$$x_i = a_{i1}a_{i2}...a_{iN+l}$$
$$x_j = b_{i1}b_{i2}...b_{iN+l}$$