

Геометрия и топология

Курс Солынина А. А.

Осень 2021 г.

Оглавление

Оглавление	i
I Векторные пространства	1
1 Введение	2
1.1 Множества	2
1.2 Отображения	3
1.3 Отношения эквивалентности	3
1.4 Определители	4
2 Понятие векторного пространства	6
2.1 Операции над векторами	7
2.2 ЛК, ЛЗ и ЛНЗ	8
3 Базис V	10
3.1 Координаты вектора в базисе	13
4 Скалярное произведение	14
4.1 Построение ортонормированного базиса	17
4.2 Геометрический подход	18
5 Векторное произведение	19
5.1 Геометрический смысл векторного произведения	22
6 Смешанное произведение	23
6.1 Свойства	23
II Линейная геометрия	24
7 Точечное пространство	25

ОГЛАВЛЕНИЕ

ii

8	Прямые на плоскости	26
9	Плоскость в пространстве	31
10	Прямая в пространстве	34

Часть I

Векторные пространства

ГЛАВА 1

Введение

1.1. Множества

Определение 1.1. Множество — неопределяемое понятие.

A, B — множества

$A \cup B = \{x : x \in A \text{ или } x \in B\}$ — объединение

$A \cap B = \{x : x \in A \text{ и } x \in B\}$ — пересечение

$A \setminus B = \{x : x \in A \text{ or } x \notin B\}$ — разность

$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ — симметрическая разность

$A \times B = \{(x, y) : x \in A; y \in B\}$ — декартово произведение множеств

Примеры декартового произведения множеств

1. Координатная плоскость $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$
2. Множество полей шахматной доски $\{A, B, C, D, E, F, G, H\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
3. Колода карт $\{\text{масти}\} \times \{\text{достоинства}\}$
4. Нумерация мест в театре
5. Нумерация аудиторий на ММ

1.2. Отображения

Определение 1.2. Пусть A, B — множества. Говорим, что задано отображение $f : A \rightarrow B$, если задано правило, сопоставляющее каждому $x \in A$ ровно один $y \in B$.

Пишем: $y = f(x)$.

Пример. $f(x) = \frac{1}{x}$ — не отображение, т.к. $f(0) \nexists$.

Однако при $\mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ такое отображение существует.

Пример.

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto x + y$$

Любая операция является отображением

Пример. $A \subset B \quad i : A \rightarrow B \quad i(a) = a$

$A \hookrightarrow B$ — отображение включения

$\text{id} : A \rightarrow A \quad \text{id}(x) = x$ — тождественное отображение

1.3. Отношения эквивалентности

Определение 1.3. M — множество, $\mu \subset M \times M \Rightarrow \mu$ называется отношением над M .

$\forall a, b \in M$ два случая

1. $(a, b) \in \mu$ пишем $a\mu b$

2. $(a, b) \notin \mu$ пишем $a\not\mu b$

Пример. $=, <, \leq, >, \geq, :$

\subset тоже отношение, но только на множестве некоторых множеств.

Если M — множество людей, то слова «отец», «мать», «муж», «жена» и т.д.

Определение 1.4. Отношение μ называется рефлексивным, если

$$\forall a : a\mu a$$

Определение 1.5. Отношение μ называется симметричным, если

$$a\mu b \Rightarrow b\mu a$$

Определение 1.6. Отношение μ называется транзитивным, если

$$\left. \begin{array}{l} a\mu b \\ b\mu c \end{array} \right\} \Rightarrow a\mu c$$

Определение 1.7. Отношение называется отношением эквивалентности, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно. Обозначение: \sim .

Определение 1.8. Если $a \in M$, $K_a = \{b : a \sim b\}$ – класс эквивалентности.

Теорема 1.1. $K_a = K_b$ либо $K_a \cap K_b = \emptyset$

Доказательство. Допустим противоречие, тогда $\exists c \in K_a \cap K_b, \exists d \in K_a \setminus K_b$ (или $\in K_b \setminus K_a$)

$$\left. \begin{array}{l} a \sim c \\ c \sim b \end{array} \right\} \Rightarrow a \sim b \quad \left. \begin{array}{l} a \sim d; b \not\sim d \\ d \sim a \\ a \sim b \end{array} \right\} \Rightarrow d \sim b \quad *$$

■

Определение 1.9. Множество классов эквивалентности называется фактор-множеством. Обозначается M / \sim

1.4. Определители 2×2 и 3×3

Определение 1.10 (Неформальное). На плоскости: $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$; $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = S_{\mathbf{a}, \mathbf{b}} \text{ (ориентированная площадь)}$$

В пространстве: $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$; $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$; $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = V_{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}} \text{ (ориентированный объем)}$$

Определение 1.11 (Формальное).

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 - a_3 b_2 c_1$$

Мнемоническое правило:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

По бирюзовой стрелке сложение, по зеленой – вычитание.

Свойства

Замечание. Данные свойства справедливы для матриц любого порядка.

1. Если строку или столбец умножить на α , то определитель тоже умножится на α .
2. Если меняем 2 строки или столбца, то знак определителя меняется.
3. Если есть 2 одинаковых строки, то определитель равен 0.
4. Если к одному из векторов прибавить вектор кратный другому, то определитель не поменяется

$$\begin{vmatrix} a_1 + \alpha b_1 & a_2 + \alpha b_2 & a_3 + \alpha b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \alpha \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Утверждение 1.1. Эти свойства и $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$ полностью определяют функцию объема

Понятие векторного пространства

Определение 2.1. Множество V с двумя операциями: $+: V \times V \rightarrow V$; $(a, b) \mapsto a + b$ и $\cdot: \mathbb{R} \times V \rightarrow V$ называется векторным пространством (над \mathbb{R}), если при условии $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in V; \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, выполнены следующие свойства:

1. $\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$ — ассоциативность
2. $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$ — коммутативность
3. $\exists \mathbf{0} : \forall \mathbf{a} \quad \mathbf{0} + \mathbf{a} = \mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$
4. $\forall \mathbf{a} \exists (-\mathbf{a}) : \mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$ ¹
5. $\alpha(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \alpha\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b}$ — дистрибутивность

Доказательство.

$$\begin{aligned} \alpha(\mathbf{a} + \mathbf{b}) &= \alpha\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b} \\ \mathbf{a} &= (x_1, y_1) \quad \mathbf{b} = (x_2, y_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha(\mathbf{a} + \mathbf{b}) &= \alpha((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) = \alpha(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = \\ &= (\alpha(x_1 + x_2), \alpha(y_1 + y_2)) = (\alpha x_1 + \alpha x_2, \alpha y_1 + \alpha y_2) = \\ &= (\alpha x_1, \alpha y_1) + (\alpha x_2, \alpha y_2) = \alpha(x_1, y_1) + \alpha(x_2, y_2) = \\ &= \alpha\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b} \end{aligned}$$

¹Если выполнены свойства 1–4, то V называется коммутативной (абелевой) группой.



6. $(\alpha + \beta)\mathbf{a} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{a}$ — дистрибутивность

7. $(\alpha \cdot \beta)\mathbf{a} = \alpha(\beta\mathbf{a})$ — ассоциативность

8. $1 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}$

Свойства векторного пространства

1. $\mathbf{0}$ — единственный

Доказательство. $\mathbf{0}_1 = \mathbf{0}_1 + \mathbf{0}_2 = \mathbf{0}_2$



2. $-\mathbf{a}$ — единственный

Доказательство. Пусть $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ — противоположные к \mathbf{a}

$$\mathbf{b}_1 + \mathbf{a} = \mathbf{0} \quad \mathbf{b}_2 + \mathbf{a} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{b}_1 + \mathbf{0} = \mathbf{b}_1 + (\mathbf{a} + \mathbf{b}_2) = (\mathbf{b}_1 + \mathbf{a}) + \mathbf{b}_2 = \mathbf{0} + \mathbf{b}_2 = \mathbf{b}_2$$



3. $\mathbf{0} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{0}$

Доказательство. !!!



4. $-1 \cdot \mathbf{a} = -\mathbf{a}$

Доказательство. !!!



Примеры векторных пространств

1. Координатная плоскость $\{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$

2. Координатное трехмерное пространство $\{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$

3. Строки длины n из вещественных чисел

$V = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}\}$ или матрицы (2d массивы)

2.1. Операции над векторами

$$\mathbf{a} = (x_1, y_1) \quad \mathbf{b} = (x_2, y_2)$$

Сложение

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

Умножение вектора на число

$$\alpha \mathbf{a} = (\alpha \cdot x_1, \alpha \cdot y_1)$$

2.2. Линейные комбинация, зависимость и независимость

Определение 2.2. V - векторное пространство и векторы $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_n \in V$. Система $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ называется линейно независимой (ЛНЗ), если из $\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n = 0 \implies \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$.

Определение 2.3. Если $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in V$. То $\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n$ - линейная комбинация (ЛК) векторов $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$.

Определение 2.4. Если $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n$, не все $= 0$, но $\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n = 0$, то система $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ называется линейно зависимой (ЛЗ).

Утверждение 2.1. $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ - ЛЗ \Leftrightarrow один из этих векторов можно представить как ЛК остальных. $\exists i : \mathbf{v}_i = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_{i-1} \mathbf{v}_{i-1} + \alpha_{i+1} \mathbf{v}_{i+1} + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n$

Доказательство. $\Rightarrow: \exists \alpha_1, \dots, \alpha_n (\exists i : \alpha_i \neq 0)$

$$\begin{aligned} \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n &= 0 \\ \alpha_i \mathbf{v}_i &= -\alpha_1 \mathbf{v}_1 - \alpha_2 \mathbf{v}_2 - \dots - \alpha_{i-1} \mathbf{v}_{i-1} - \alpha_{i+1} \mathbf{v}_{i+1} - \dots - \alpha_n \mathbf{v}_n \\ \alpha_i \neq 0 \quad \mathbf{v}_i &= -\frac{\alpha_1}{\alpha_i} \mathbf{v}_1 - \dots - \frac{\alpha_n}{\alpha_i} \mathbf{v}_n \\ \Leftrightarrow: \mathbf{v}_i &= \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n \text{ без } i\text{-ого слагаемого} \\ \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \dots + (-1) \mathbf{v}_i + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n &= 0 \\ \text{ЛК} &= 0 \text{ не все коэффициенты} = 0 \end{aligned}$$

■

Свойство 2.1. $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ - ЛНЗ, то любой его поднабор тоже ЛНЗ.
 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ - ЛЗ, то при добавлении векторов, набор останется ЛЗ.

Утверждение 2.2. $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ – ЛНЗ \Leftrightarrow если

$$\begin{aligned}\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n &= \beta_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \beta_n \mathbf{v}_n \\ \Rightarrow \alpha_1 &= \beta_1; \alpha_2 = \beta_2; \dots; \alpha_n = \beta_n\end{aligned}$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}(\alpha_1 - \beta_1) \mathbf{v}_1 + (\alpha_2 - \beta_2) \mathbf{v}_2 + \dots + (\alpha_n - \beta_n) \mathbf{v}_n &= \mathbf{0} \\ \alpha_i - \beta_i &= 0 \Leftrightarrow \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \text{ – ЛНЗ}\end{aligned}$$

■

Базис векторного пространства

Определение 3.1. Набор $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ называется порождающим для V , если $\forall \mathbf{w} \in V \exists \alpha_1, \dots, \alpha_n : \mathbf{w} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n$

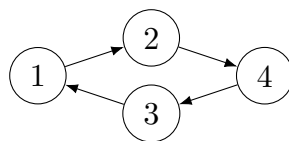
Свойство 3.1. Если к порождающему набору прибавить вектор, то он останется порождающим. Если убрать векторы из непорождающего набора векторы, то набор останется непорождающим.

Определение 3.2. $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ называется базисом V , если этот набор ЛНЗ и порождающий.

Теорема 3.1 (О базисе). *Следующие определения базиса равносильны:*

1. ЛНЗ и порождающий набор
2. Минимальный порождающий набор (минимальный по включениям)
3. Максимальный ЛНЗ набор (максимальный по включениям)
4. Набор $\forall \mathbf{w} \in V \exists! \alpha_1, \dots, \alpha_n : \mathbf{w} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n$

Доказательство. Цепочка доказательств:



$1 \rightarrow 2$. Дан $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ – ЛНЗ и порождающий набор. Доказать, что он минимальный порождающий.

Допустим, что \mathbf{v}_i выкинули, оставшийся набор остался порождающим $\Rightarrow \mathbf{v}_i$ – ЛК остальных \Rightarrow ЛЗ $\quad \ast$.

$2 \rightarrow 4$. Дан $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ – минимальный порождающий набор. Доказать $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ – порождающий с единственностью коэффициентов.

Допустим противное: $\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n = \beta_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \beta_n \mathbf{v}_n$

$$\begin{aligned} \alpha_1 &\neq \beta_1 \\ (\alpha_i - \beta_i) \mathbf{v}_i &= (\beta_1 - \alpha_1) \mathbf{v}_1 + \dots \text{ (без } i\text{-ого)} + (\beta_n - \alpha_n) \mathbf{v}_n \\ \mathbf{v}_i &= \frac{\beta_1 - \alpha_1}{\alpha_i - \beta_i} + \dots \text{ (без } i\text{-ого)} + \frac{\beta_n - \alpha_n}{\alpha_i - \beta_i} \end{aligned}$$

\mathbf{v}_i – выкинем. В любой ЛК с \mathbf{v}_i заменим \mathbf{v}_i на выражение выше \Rightarrow набор порождающий

$4 \rightarrow 3$. Дан $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ – порождающий набор с единственностью коэффициентов. Доказать: $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ – минимальный ЛНЗ (ЛНЗ уже доказана)

Допустим противное: $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n; \mathbf{u}$ – ЛНЗ набор

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n (\alpha_1, \dots, \alpha_n \exists!) \\ \Rightarrow \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n, \mathbf{u} &\text{ – ЛЗ} \quad \ast \end{aligned}$$

$3 \rightarrow 1$. Дан $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ – минимальный ЛНЗ. Доказать $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ – ЛНЗ и порождающий набор.

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{w} \in V & \quad \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n, \mathbf{w} \text{ – ЛЗ набор} \\ & \quad \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n + \beta \mathbf{w} = \mathbf{0} \\ \text{Если } \beta = 0 & \Rightarrow \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n = \mathbf{0} \\ & \quad \text{не все коэффициенты} = 0 (\alpha_i \neq 0) \\ & \quad \Rightarrow \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \text{ – ЛЗ} \\ \beta \neq 0 & \Rightarrow \mathbf{w} = -\frac{\alpha_1}{\beta} \mathbf{v}_1 - \frac{\alpha_2}{\beta} \mathbf{v}_2 - \dots - \frac{\alpha_n}{\beta} \mathbf{v}_n \end{aligned}$$

■

Замечание. Любую конечную порождающую систему можно сузить до базиса.

Замечание. Если есть конечный порождающий набор, то любую ЛНЗ систему можно расширить до базиса.

Определение 3.3. Размерность пространства равна количеству элементов в базисе. (пока нет доказательств корректности)

Лемма 3.1. Система линейных уравнений: $(a_{ij} \in \mathbb{R}; x_i \in \mathbb{R}; 0 \in \mathbb{R})$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n = 0 \end{cases}$$

Имеет ненулевые решения, если $n > k$.

Доказательство. Индукция по k .

База $k = 1$:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0$$

$$\text{Пусть } a_{11} \neq 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 - \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 - \dots - \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n$$

$$\forall x_2, \dots, x_n : x_1 \text{ выражается через них}$$

$$a_{11} = 0 \Rightarrow x_1 = 1; x_2 = x_3 = \dots = x_n = 0$$

Переход

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0$$

$\exists i : a_{1i} \neq 0$, иначе выкинем предыдущее уравнение

$$x_i = -\frac{a_{11}}{a_{1i}}x_1 - \dots \text{ (без } i\text{-ого)} - \frac{a_{1n}}{a_{1i}}x_n$$

Подставим выраженное x_i во все остальные уравнения. Уравнений на 1 меньше, переменных на 1 меньше. ■

Пример.

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ z + y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow z = 0 \quad x + y = 0$$

Теорема 3.2. Если $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ и $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n$ базисы $\in V$, то $k = n$.

Доказательство. $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ – порождающая система.

$$\mathbf{w}_1 = a_{11}\mathbf{v}_1 + a_{21}\mathbf{v}_2 + a_{31}\mathbf{v}_3 + \dots + a_{k1}\mathbf{v}_k$$

$$\mathbf{w}_2 = a_{12}\mathbf{v}_1 + a_{22}\mathbf{v}_2 + a_{32}\mathbf{v}_3 + \dots + a_{k2}\mathbf{v}_k$$

...

$$\mathbf{w}_n = a_{1n}\mathbf{v}_1 + a_{2n}\mathbf{v}_2 + a_{3n}\mathbf{v}_3 + \dots + a_{kn}\mathbf{v}_k$$

$$x_1 \mathbf{w}_1 + x_2 \mathbf{w}_2 + \dots + x_n \mathbf{w}_n = \mathbf{0}, x_i \in \mathbb{R} \quad (\star)$$

т.к. $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n$ — ЛНЗ \implies все $x_i = 0$

$$\begin{aligned} x_1(a_{11}\mathbf{v}_1 + a_{21}\mathbf{v}_2 + \dots + a_{k1}\mathbf{v}_k) + x_2(a_{12}\mathbf{v}_1 + a_{22}\mathbf{v}_2 + \dots + a_{k2}\mathbf{v}_k) \\ + \dots + x_n(a_{1n}\mathbf{v}_1 + a_{2n}\mathbf{v}_2 + \dots + a_{kn}\mathbf{v}_k) = \mathbf{0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n) + \mathbf{v}_2(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n) \\ + \dots + \mathbf{v}_k(a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n) = \mathbf{0} \end{aligned}$$

$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ — ЛНЗ \implies все коэффициенты равны 0.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n = 0 \end{cases}$$

Если $n > k \implies \exists$ ненулевые решения \implies противоречие с (\star) и ЛНЗ $\mathbf{w}_i \implies n \leq k$. Аналогично $k \leq n \implies n = k$. ■

Если \exists хотя бы один конечный базис, то все базисы будут равно-мощными.

3.1. Координаты вектора в базисе

Пусть $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ — базис.

$$\forall \mathbf{w} \in V \implies \exists! \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n : \mathbf{w} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n$$

$\mathbf{w} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ — координаты \mathbf{w} в базисе $\{\mathbf{v}_i\}_{i=1}^n$

$$\mathbf{v}_1 = (1, 0, \dots, 0)$$

$$\mathbf{v}_2 = (0, 1, \dots, 0)$$

...

$$\mathbf{v}_n = (0, 0, \dots, 1)$$

Скалярное произведение

Обозначение скалярного произведения векторов: $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ или (\mathbf{v}, \mathbf{w})

Определение 4.1. Если V - векторное пространство, в котором есть операция $\cdot : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, со свойствами:

1. $(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq 0; (\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0}$
2. $(\mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u}, \mathbf{v}) + (\mathbf{u}, \mathbf{w})$
3. $(\alpha \mathbf{u}, \mathbf{w}) = \alpha(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = (\mathbf{u}, \alpha \mathbf{w})$
4. $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{v}, \mathbf{u})$

то такая операция называется скалярным произведением, а V вместе со скалярным произведением называется евклидовым пространством

Пример. V – множество некоторых функций, $\varphi(x)$ - одна функция, которая называется весом, важно, что $\varphi > 0$, тогда $(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)\varphi(x)dx$

Определение 4.2. $|\mathbf{v}| = \sqrt{(\mathbf{v}, \mathbf{v})}, |\mathbf{v}| \geq 0, |\mathbf{v}| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0}$

Определение 4.3. $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$, тогда $\cos \angle(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{(\mathbf{u}, \mathbf{v})}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|}$

$$\angle(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \arccos \frac{(\mathbf{u}, \mathbf{v})}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|} \in [0; 2\pi]$$

Теорема 4.1 (Неравенство Коши-Буняковского-Шварца). $|(\mathbf{u}, \mathbf{v})| \leq |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{u} + t\mathbf{v}, \mathbf{u} + t\mathbf{v}) &\geq 0 \quad \forall t \\
 (\mathbf{u}, \mathbf{u}) + (\mathbf{u}, t\mathbf{v}) + (t\mathbf{v}, \mathbf{u}) + (t\mathbf{v}, t\mathbf{v}) &\geq 0 \\
 |\mathbf{u}|^2 + 2t(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + t^2|\mathbf{v}|^2 &\geq 0 \quad \forall t \\
 \frac{D}{4} &\leq 0 \quad (\mathbf{u}, \mathbf{v})^2 - |\mathbf{u}|^2|\mathbf{v}|^2 \leq 0 \\
 |(\mathbf{u}, \mathbf{v})| &\leq |\mathbf{u}||\mathbf{v}|
 \end{aligned}$$

■

Замечание. 2 и 3 аксиомы можно заменить одной: $(\mathbf{u}, \alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w}) = \alpha(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \beta(\mathbf{u}, \mathbf{w})$

Пример.

$$V = \mathbb{R}^n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) : a_i \in \mathbb{R}\}$$

«стандартное» скалярное произведение:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u} &= (a_1, a_2, \dots, a_n) \quad \mathbf{v} = (b_1, b_2, \dots, b_n) \\
 (a_1, a_2, \dots, a_n)(b_1, b_2, \dots, b_n) &= a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n
 \end{aligned}$$

Аксиомы 1–4 выполняются

$$|(a_1, \dots, a_n)| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$$

$$\text{КБШ: } (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2)$$

Теорема 4.2 (Неравенство треугольника). $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v}) &\stackrel{?}{\leq} (|\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|)^2 \\
 (\mathbf{u}, \mathbf{u}) + 2(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + (\mathbf{v}, \mathbf{v}) &\stackrel{?}{\leq} (\mathbf{u}, \mathbf{u}) + (\mathbf{v}, \mathbf{v}) + 2|\mathbf{u}||\mathbf{v}| \\
 (\mathbf{u}, \mathbf{v}) &\stackrel{?}{\leq} |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \text{ — верно по неравенству КБШ}
 \end{aligned}$$

■

Определение 4.4. $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$; $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$ (ортогональные векторы), если $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$. Для $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n \in V$, $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$ называется ортогональной системой, если $\forall i \neq j, \mathbf{u}_i \perp \mathbf{u}_j$.

Определение 4.5. $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$ называется ортонормированной системой, если $\mathbf{u}_i \perp \mathbf{u}_j (i \neq j)$ и $|\mathbf{u}_i| = 1$

Определение 4.6. Если $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$ – ортонормированная система и базис, то это ортонормированный базис (ОНБ).

Утверждение 4.1. $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$ – ортогональная система и $\mathbf{u}_i \neq \mathbf{0}$, то она ЛНЗ.

Доказательство.

$$\begin{aligned} \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{u}_n &= \mathbf{0} \quad | \cdot \mathbf{u}_i \\ \alpha_1 (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_i) + \alpha_2 (\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_i) + \dots + \alpha_n (\mathbf{u}_n, \mathbf{u}_i) &= 0 \\ \alpha_i (\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i) &= 0 \Rightarrow \alpha_i = 0 \forall i \end{aligned}$$

■

Утверждение 4.2. $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ – ортогональная система и $\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{u}_n \Rightarrow \alpha_i = \frac{(\mathbf{u}_i, \mathbf{v})}{|\mathbf{u}_i|^2}$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{u}_n &= \mathbf{v} \quad | \cdot \mathbf{u}_i \\ \alpha_i (\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i) &= (\mathbf{v}, \mathbf{u}_i) \end{aligned}$$

■

Пример. V – множество 2π -периодических функций.

$$(f, g) = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx$$

(можем ограничиться кусочно-непрерывными функциями)

$$\begin{pmatrix} \cos 0x, \cos x, \cos 2x, \cos 3x, \dots \\ \sin x, \sin 2x, \sin 3x, \dots \end{pmatrix}$$

– ортогональная система.

Для проверки достаточно взять

$$\int_0^{2\pi} \sin kx \cos nxdx = 0 \text{ и } \int_0^{2\pi} \cos kx \cos nxdx = 0 \quad (k \neq n)$$

Аналогично с \sin

Любая 2π -периодическая функция раскладывается по этой системе.

$$f(x) = a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \dots$$

$$a_i = \frac{\int_0^{2\pi} f(x) \cos ixdx}{\int_0^{2\pi} \cos^2 ixdx} \quad b_i = \dots$$

4.1. Построение ортонормированного базиса

Ортогонализация Грама-Шмидта

Есть $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ — ЛНЗ

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= \frac{\mathbf{v}_1}{|\mathbf{v}_1|} & |\mathbf{u}_1| &= 1 \\ \mathbf{w}_2 &= \mathbf{v}_2 - \alpha \mathbf{u}_1 & \mathbf{w}_2 &\perp \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 &= \frac{\mathbf{w}_2}{|\mathbf{w}_2|} \\ |\mathbf{u}_2| &= 1 & \mathbf{u}_2 &\perp \mathbf{u}_1 \\ (\mathbf{u}_1, \mathbf{w}_2) &= 0 \\ (\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2 - \alpha \mathbf{u}_1) &= 0 \\ (\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2) - \alpha(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1) &= 0 \\ \alpha &= (\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2) \end{aligned}$$

Пусть $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{k-1}$ построены (ОНС)

Построим \mathbf{u}_k

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_k &= \mathbf{v}_k - \alpha_1 \mathbf{u}_1 - \alpha_2 \mathbf{u}_2 - \dots - \alpha_{k-1} \mathbf{u}_{k-1} \\ \mathbf{w}_k &\perp \mathbf{u}_i & (i \leq k-1) \\ 0 &= (\mathbf{w}_k, \mathbf{u}_i) = (\mathbf{v}_k, \mathbf{u}_i) - \alpha_i (\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i) \\ \alpha_i &= (\mathbf{v}_k, \mathbf{u}_i) \\ \mathbf{u}_k &= \frac{\mathbf{w}_k}{|\mathbf{w}_k|} \end{aligned}$$

Строим $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ с помощью данного алгоритма.

Замечание. \mathbf{u}_i — ЛК $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_i$

Следствие 4.1. Если $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ — базис $\implies \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ — ОНБ, т.е. если $\dim V = n$, то \exists ОНБ

Пусть V - евклидово пространство, $\dim V = n$, $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ - ОНБ, $\mathbf{w} = a_1 \mathbf{u}_1 + a_2 \mathbf{u}_2 + \dots + a_n \mathbf{u}_n$, то можем записать $\mathbf{w} = (a_1, \dots, a_n)$, соответственно $\mathbf{v} = b_1 \mathbf{u}_1 + b_2 \mathbf{u}_2 + \dots + b_n \mathbf{u}_n$, тогда

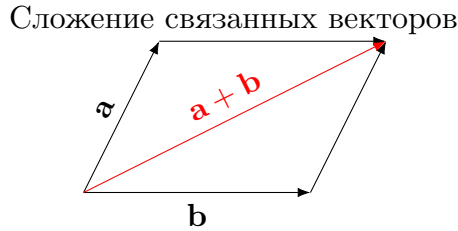
$$\begin{aligned} (\mathbf{w}, \mathbf{v}) &= (a_1 \mathbf{u}_1 + a_2 \mathbf{u}_2 + \dots + a_n \mathbf{u}_n, b_1 \mathbf{u}_1 + b_2 \mathbf{u}_2 + \dots + b_n \mathbf{u}_n) = \\ &= a_1 b_1 (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1) + a_1 b_2 (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) + \dots + a_1 b_n (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_n) + \\ &\quad + a_2 b_1 (\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1) + a_2 b_2 (\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2) + \dots + a_2 b_n (\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_n) + \\ &\quad + a_n b_1 (\mathbf{u}_n, \mathbf{u}_1) + a_n b_2 (\mathbf{u}_n, \mathbf{u}_2) + \dots + a_n b_n (\mathbf{u}_n, \mathbf{u}_n) = \\ &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n \end{aligned}$$

4.2. Геометрический подход

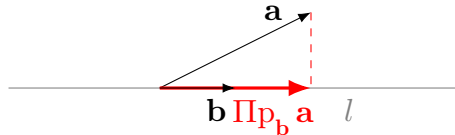
Есть \mathbb{R}^n (например \mathbb{R}^2 или \mathbb{R}^3), так же есть расстояния и углы.

Определение 4.7. Связанный вектор — направленный отрезок.

Определение 4.8. Свободный вектор — класс эквивалентности связанных векторов. $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$, если $ABDC$ — параллелограмм (возможно вырожденный)



Нетривиальный момент: почему $(\mathbf{a}, \mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a}, \mathbf{b}) + (\mathbf{a}, \mathbf{c})$?



Определение 4.9.

$$\text{Pr}_{\mathbf{b}} \mathbf{a} = |\mathbf{a}| \cos \alpha \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} = \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{|\mathbf{b}|} \cdot \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} = \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{|\mathbf{b}|^2} \mathbf{b}$$

Теорема 4.3.

$$\text{Pr}_{\mathbf{b}} (\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) = \text{Pr}_{\mathbf{b}} \mathbf{a}_1 + \text{Pr}_{\mathbf{b}} \mathbf{a}_2$$

Следствие 4.2.

$$\frac{(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2, \mathbf{b})}{|\mathbf{b}|^2} \mathbf{b} = \frac{(\mathbf{a}_1, \mathbf{b})}{|\mathbf{b}|^2} \mathbf{b} + \frac{(\mathbf{a}_2, \mathbf{b})}{|\mathbf{b}|^2} \mathbf{b} = (\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2, \mathbf{b}) = (\mathbf{a}_1, \mathbf{b}) + (\mathbf{a}_2, \mathbf{b})$$

Векторное произведение

Замечание. Векторное произведение существует, только если $\dim V = 3$ (т.е. пространство трехмерное).

Определение 5.1 (Формальное). Пусть $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$, $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{v}$ – вектор со свойствами:

1. $\mathbf{v} \perp \mathbf{a}, \mathbf{v} \perp \mathbf{b}$
2. $|\mathbf{v}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin \alpha$
3. $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b})$ – правая тройка векторов

Вопрос: что такое «правая тройка?» — Ответ: нет «правой» или «левой» троек, но про любые две тройки мы можем сказать одинаково ли они ориентированы.

Определение 5.2. Пусть $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ – фиксированный ортонормированный базис, будем называть его правой тройкой векторов.

Введем определения:

	\mathbf{i}	\mathbf{j}	\mathbf{k}
\mathbf{i}	0	\mathbf{k}	$-\mathbf{j}$
\mathbf{j}	$-\mathbf{k}$	0	\mathbf{i}
\mathbf{k}	\mathbf{j}	$-\mathbf{i}$	0

– таблица умножения базисных векторов

Пусть

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j} + a_3 \mathbf{k} = (a_1, a_2, a_3) \\ \mathbf{b} &= b_1 \mathbf{i} + b_2 \mathbf{j} + b_3 \mathbf{k} = (b_1, b_2, b_3)\end{aligned}$$

Тогда векторное произведение \mathbf{a} и \mathbf{b} :

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \times \mathbf{b} &= (a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}) \times (b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}) = \\ &= a_1b_1\mathbf{i} \times \mathbf{i} + a_1b_2\mathbf{i} \times \mathbf{j} + a_1b_3\mathbf{i} \times \mathbf{k} + \\ &+ a_2b_1\mathbf{j} \times \mathbf{i} + a_2b_2\mathbf{j} \times \mathbf{j} + a_2b_3\mathbf{j} \times \mathbf{k} + \\ &+ a_3b_1\mathbf{k} \times \mathbf{i} + a_3b_2\mathbf{k} \times \mathbf{j} + a_3b_3\mathbf{k} \times \mathbf{k} = \\ &= \mathbf{i}(a_2b_3 - a_3b_2) + \mathbf{j}(a_3b_1 - a_1b_3) + \mathbf{k}(a_1b_2 - a_2b_1)\end{aligned}$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{i}(a_2b_3 - a_3b_2) + \mathbf{j}(a_3b_1 - a_1b_3) + \mathbf{k}(a_1b_2 - a_2b_1)$$

Теорема 5.1. Векторное произведение обладает свойствами:

$$1. \mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$$

$$2. \mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$$

$$3. \mathbf{a} \times \mathbf{b} \perp \mathbf{a}, \mathbf{a} \times \mathbf{b} \perp \mathbf{b}$$

$$4. |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin \alpha$$

Доказательство.

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$$

$$\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$$

$$\mathbf{c} = c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k}$$

$$\begin{aligned}1. \quad \mathbf{b} + \mathbf{c} &= (b_1 + c_1)\mathbf{i} + (b_2 + c_2)\mathbf{j} + (b_3 + c_3)\mathbf{k} \\ \mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) &= \mathbf{i}(a_2(b_3 + c_3) - a_3(b_2 + c_2)) + \mathbf{j}(\dots) + \mathbf{k}(\dots) \\ \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c} &= \mathbf{i}(a_2b_3 - a_3b_2) + \mathbf{j}(\dots) + \mathbf{k}(\dots) + \\ &+ \mathbf{i}(a_2c_3 - a_3c_2) + \mathbf{j}(\dots) + \mathbf{k}(\dots)\end{aligned}$$

После преобразований получим то же самое.

2. Аналогично

$$\begin{aligned}3. \quad (\mathbf{a} \times \mathbf{b}; \mathbf{a}) &= \\ &= (\mathbf{i}(a_2b_3 - a_3b_2) + \mathbf{j}(a_3b_1 - a_1b_3) + \mathbf{k}(a_1b_2 - a_2b_1); a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}) = \\ &= a_1(a_2b_3 - a_3b_2) + a_2(a_3b_1 - a_1b_3) + a_3(a_1b_2 - a_2b_1) = 0\end{aligned}$$

4. Будем доказывать $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 \sin^2 \alpha = |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 (1 - \cos^2 \alpha)$

$$\begin{aligned} & (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 = \\ & (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) \left(1 - \frac{(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2}{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)} \right) = \\ & (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2 \end{aligned}$$

Чтобы не расписывать слагаемые перепишем в другом виде:

$$\sum_{i \neq j} a_i^2 b_j^2 - 2 \sum_{i < j} a_i b_i a_j b_j = \sum_i a_i^2 b_i^2 + \sum_{i \neq j} a_i^2 b_j^2 - \sum_{i=1}^3 a_i^2 b_i^2 - 2 \sum_{i < j} a_i b_i a_j b_j$$

■

Замечание.

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Определение 5.3 (Ориентация). Пусть¹ $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ – ОНБ («правая тройка»), $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ – векторы.

$$\mathbf{a} = a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j} + a_3 \mathbf{k}$$

$$\mathbf{b} = b_1 \mathbf{i} + b_2 \mathbf{j} + b_3 \mathbf{k}$$

$$\mathbf{c} = c_1 \mathbf{i} + c_2 \mathbf{j} + c_3 \mathbf{k}$$

Если $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} > 0$, то $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ называется правой тройкой векторов.

Если $\det < 0$, то $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ называется левой тройкой векторов.

Если $\det = 0$, то $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ – ЛЗ.

Выводы:

1. Ориентация бывает только у ЛНЗ троек – у базисов.
2. Ориентаций бывает ровно 2.
3. Одинаковость ориентаций является эквивалентностью.

¹Здесь возможно стоит обратиться к section 1.4

Замечание. После этого можно определить $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ как вектор $\perp \mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ с длиной $|\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin \alpha$ и с нужной ориентацией.

Теорема 5.2. $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b})$ – правая тройка

Доказательство.

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= (a_1, a_2, a_3) & \mathbf{b} &= (b_1, b_2, b_3) \\ \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= (a_2b_3 - a_3b_2) + (a_3b_1 - a_1b_3) + (a_1b_2 - a_2b_1) = \\ &= \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \\ &= (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 > 0 \end{aligned}$$

■

5.1. Геометрический смысл векторного произведения

1. Если нужен вектор $\perp \mathbf{a} \perp \mathbf{b}$, то $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ подойдет.
2. $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = S_{\text{параллелограмма}} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin \alpha$

Смешанное произведение

Определение 6.1. $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ – векторы в \mathbb{R}^3

$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}; \mathbf{c})$ – смешанное произведение

Геометрический смысл: $\pm V_{\text{параллелограмма}}$

Доказательство.

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| |\mathbf{c}| \cos \alpha = S_{\mathbf{a}, \mathbf{b}} |\mathbf{c}| \cos \alpha = \pm V_{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}}$$

■

В координатах:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}; \mathbf{c}) = (a_2 b_3 - a_3 b_2; a_3 b_1 - a_1 b_3; a_1 b_2 - a_2 b_1)(c_1, c_2, c_3) =$$

$$a_2 b_3 c_1 - a_3 b_2 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_1 b_3 c_2 + a_1 b_2 c_3 - a_2 b_1 c_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

6.1. Свойства

1. $(\mathbf{e} + \mathbf{f}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{e}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) + (\mathbf{f}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ для каждого аргумента
2. $(\alpha \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a}, \alpha \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \alpha \mathbf{c}) = \alpha(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$
3. $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ – ЛЗ
4. $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}) = (\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = -(\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}) = -(\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b}) = -(\mathbf{c}, \mathbf{b}, \mathbf{a})$
5. Знак смешанного произведения – ориентация тройки.

Часть II

Линейная геометрия

Точечное пространство

Определение 7.1. V – векторное пространство, E – множество. Назовем E точечным (аффинным) пространством, если определена операция $+: E \times V \rightarrow E$, т.е. $(e; \mathbf{v}) \mapsto (e + \mathbf{v})$ со свойствами:

1. $(e + \mathbf{v}_1) + \mathbf{v}_2 = e + (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)$
2. $e + \mathbf{0} = e$
3. $\forall e_1, e_2 \in E \exists! \mathbf{v} \in V : e_2 = e_1 + \mathbf{v}$

Такой вектор будем обозначать $\mathbf{v} = \overrightarrow{e_1 e_2}$

Если в V есть базис $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ и мы зафиксируем $e_0 \in E \implies \forall e \in E \exists! \mathbf{v} : e_0 + \mathbf{v} = e \implies \mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ – координаты в базисе $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$. Обозначим $e = (v_1, v_2, v_3); e_0 = (0, 0, 0)$

Замечание.

$$e = (e_1, e_2, e_3) \quad f = (f_1, f_2, f_3)$$

$$\overrightarrow{ef} = (f_1 - e_1, f_2 - e_2, f_3 - e_3)$$

Прямые на плоскости

Есть пространство V ; $\dim V = 2$, и ассоциированное с ним точечное пространство E , т.е. E – плоскость

Определение 8.1. Есть $e_0 \in V$ и $\mathbf{n} \in V$. Тогда прямая в E – геометрическое место точек e , таких что $\overrightarrow{e_0 e} \perp \mathbf{n}$

Теорема 8.1. В стандартных координатах прямая задается стандартным линейным уравнением: $ax + by + c = 0$, где координаты $e = (x, y)$, а координаты $(a, b) = \mathbf{n}$.

Или $\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{0e} = -c$ (c – константа).

Точка 0 имеет координаты $(0, 0)$, а $e_0 = (x_0, y_0)$; $e = (x, y)$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{e_0 e} \perp \mathbf{n} & \quad ((x - x_0); (y - y_0)) \cdot (a, b) = 0 \\ & \quad (x - x_0)a + (y - y_0)b = 0 \\ ax + by - ax_0 - by_0 = 0, & \text{ где } -ax_0 - by_0 = c\end{aligned}$$

Наоборот: любое уравнение $ax + by + c = 0$ (если $a^2 + b^2 \neq 0$) задает прямую

Определение 8.2. $(a, b) = \mathbf{n}$ называется вектором нормали к прямой

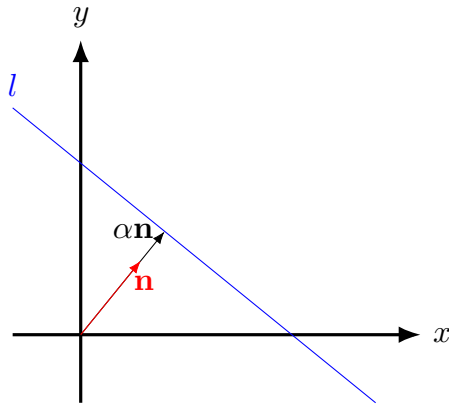
$$\begin{aligned}ax + by + c = 0 & \quad | : \sqrt{a^2 + b^2} \\ a'x + b'y + c' = 0 & \text{ – Нормальное уравнение прямой} \\ a'^2 + b'^2 = 1 & \quad a' = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad b' = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ (a', b') & \text{ – единичный вектор}\end{aligned}$$

Теорема 8.2. 1. $|c'|$ – расстояние от начала координат до прямой.

2. Расстояние от точки (x_1, y_1) до прямой $ax + by + c = 0$ – это

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Доказательство. 1 – частный случай 2, но докажем сперва 1.



Если $|\mathbf{n}| = 1 \Rightarrow |\alpha|$ – искомое расстояние.

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= (a', b') & \alpha \mathbf{n} &= (\alpha a', \alpha b') \\ a' \cdot \alpha a' + b' \cdot \alpha b' + c' &= 0 \\ \alpha(a'^2 + b'^2) + c' &= 0 \\ \alpha &= -c' & |\alpha| &= |c'| \end{aligned}$$

1,5. $ax + by + c = 0$ – такой вид прямой. Расстояние от 0 до e :

$$\begin{aligned} |\mathbf{n}| = 1 \quad \mathbf{n} &= \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) \\ \alpha \mathbf{n} &\in e \\ a \cdot \frac{\alpha a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + b \cdot \frac{\alpha b}{\sqrt{a^2 + b^2}} + c &= 0 \\ \alpha \frac{a^2 + b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} + c &= 0 \\ \alpha &= \frac{-c}{\sqrt{a^2 + b^2}} & |\alpha| &= \frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{aligned}$$

2. Расстояние от (x_1, y_1) до e

$$\tilde{x} = x - x_1 \quad \tilde{y} = y - y_1$$

В новых координатах точка D – начало координат

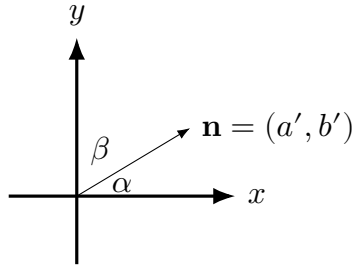
$$\begin{aligned}x &= \tilde{x} + x_1 & y &= \tilde{y} + y_1 \\ax + by + c &= 0 \\a\tilde{x} + b\tilde{y} + ax_1 + by_1 + c &= 0\end{aligned}$$

Воспользуемся 1,5.:

$$\text{dist}(D; e) = \frac{|\tilde{c}|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

■

(a', b') называют направляющими косинусами, т.к.



$$\begin{aligned}|\mathbf{n}| &= 1 & a'^2 + b'^2 &= 1 \\a' &= \cos \alpha \\b' &= \sin \alpha = \cos \beta\end{aligned}$$

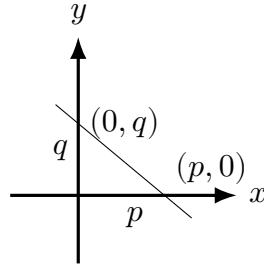
Даны прямые l_1, l_2 :

$$\begin{aligned}l_1 &: a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\l_2 &: a_2x + b_2y + c_2 = 0 \\\angle(l_1, l_2) &= \angle(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2) \\\cos \angle(l_1, l_2) &= \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} + \sqrt{a_2^2 + b_2^2}} \\l_1 \perp l_2 &\Leftrightarrow a_1a_2 + b_1b_2 = 0 \\l_1 \parallel l_2 &\Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}\end{aligned}$$

Определение 8.3 (Уравнение в отрезках). Если $a, b, c \neq 0$, то

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$$

$(p, 0)$ и $(0, q)$ – подходят:



Определение 8.4 (Каноническое уравнение прямой). Если даны 2 точки: $(x_0, y_0); (x_1, y_1)$, тогда

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} \Leftrightarrow (x - x_0)(y_1 - y_0) = (y - y_0)(x_1 - x_0)$$

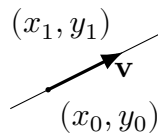
Замечание. Может быть, что $x_1 = x_0$ или $y_1 = y_0$, НО не одновременно, тогда один из знаменателей может быть 0.

Пример.

$$\frac{x - 1}{0} = \frac{y + 2}{-1} \Leftrightarrow x = 1$$

Определение 8.5 (Каноническое уравнение прямой). Если дана точка (x_0, y_0) и вектор $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$, то

$$\begin{aligned} x_1 - x_0 &= v_1 & y_1 - y_0 &= v_2 \\ \frac{x - x_0}{v_1} &= \frac{y - y_0}{v_2} \end{aligned}$$



Замечание. Каноническое уравнение прямой задано не однозначно (точки можно менять точки и получать ту же самую прямую).

Определение 8.6 (Параметрическое уравнение прямой).

$$\frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2} = t \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 + v_1 t \\ y = y_0 + v_2 t \end{cases}$$

Определение 8.7. $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ – направляющий вектор прямой.

Определение 8.8 (Угол между прямыми).

$$l_1 : \frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2} \quad l_2 : \frac{x - x_1}{w_1} = \frac{y - y_1}{w_2}$$

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2) \quad \mathbf{w} = (w_1, w_2)$$

$$\cos \angle(l_1, l_2) = \frac{v_1 w_1 + v_2 w_2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2} \sqrt{w_1^2 + w_2^2}}$$

$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow v_1 w_1 + v_2 w_2 = 0$$

$$l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \frac{v_1}{w_1} = \frac{v_2}{w_2}$$

Плоскость в пространстве

$$\dim V = 3$$

Определение 9.1 (Плоскость по 3 точкам). Пусть $e_1, e_2, e_3 \in E$, $\mathbf{v}_1 = \overrightarrow{e_1 e_2}$; $\mathbf{v}_2 = \overrightarrow{e_1 e_3}$

Плоскость – множество точек $\{e_1 + \alpha \mathbf{v}_1 + \beta \mathbf{v}_2 : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

Определение 9.2. Плоскость – множество решений линейного уравнения:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Теорема 9.1. *Определение 1 равносильно определению 2.*

Теорема 9.2. $(A, B, C) = \mathbf{n} \perp$ плоскости

Доказательство.

$$\begin{aligned} e_0 &= (x_0, y_0, z_0) \\ \mathbf{n} \perp \mathbf{v}_1 \quad \mathbf{n} \perp \mathbf{v}_2 \quad \mathbf{n} &= \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 \quad \mathbf{n} = (A, B, C) \end{aligned}$$

D такое число, что

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 \quad (D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0)$$

$$\begin{array}{r} Ax + By + Cz + D = 0 \\ - \quad Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 \\ \hline A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \\ (A; B; C) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0 \\ (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = \alpha \mathbf{v}_1 + \beta \mathbf{v}_2 \\ (x, y, z) = e_1 + \alpha \mathbf{v}_1 + \beta \mathbf{v}_2 \end{array}$$

Определение 9.3 (Угол между плоскостями).

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0 = \alpha_1 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0 = \alpha_2 \\ \cos \angle(\alpha_1, \alpha_2) &= \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \\ \alpha_1 \perp \alpha_2 : A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 &= 0 \\ \alpha_1 \parallel \alpha_2 : \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \end{aligned}$$

Определение 9.4 (Уравнение плоскости в отрезках).

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1$$

p, q, r – отрезки отсекаемые плоскостью на OX, OY, OZ

Определение 9.5 (Нормальное уравнение плоскости).

$$\begin{aligned} Ax + By + Cz + D &= 0 \quad | : \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \neq 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' &= 0 \\ A'^2 + B'^2 + C'^2 &= 1 \end{aligned}$$

Определение 9.6. A', B', C' – направляющие косинусы
TODO: Сложный рисунок с углами

$$\begin{aligned} A' &= \cos \alpha \\ B' &= \cos \beta \\ C' &= \cos \gamma \end{aligned}$$

Теорема 9.3. 1. $|D'|$ – расстояние от $(0, 0, 0)$ до α .

2. Пусть $Ax + By + Cz + D = 0$ – плоскость, а (x_0, y_0, z_0) – точка, тогда расстояние от точки до плоскости:

$$d = \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Доказательство.

1.

$$\mathbf{n} = (A', B', C')$$

$\alpha\mathbf{n}$ — конец \mathbf{n} , лежащий в плоскости

$$\begin{aligned} |\alpha| &= d \\ \alpha\mathbf{n} &= (\alpha A', \alpha B', \alpha C') \\ A'(\alpha A') + B'(\alpha B') + C'(\alpha C') + D' &= 0 \\ \alpha + D' &= 0 \quad |\alpha| = |D'| \end{aligned}$$

1.5.

$$\begin{aligned} (x_0, y_0, z_0) &= (0, 0, 0) \\ Ax + By + Cz + D &= 0 \\ |D'| &= \frac{|D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = d \end{aligned}$$

2.

$$\tilde{x} = x - x_0 \quad \tilde{y} = y - y_0 \quad \tilde{z} = z - z_0$$

Для точки (x_0, y_0, z_0)

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= 0 \quad \tilde{y} = y_0 \quad \tilde{z} = z_0 \\ A\tilde{x} + B\tilde{y} + C\tilde{z} + (Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D) &= 0 \\ d &= \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \end{aligned}$$

■

Прямая в пространстве

Определение 10.1. Прямая – пересечение двух не параллельных плоскостей.

Определение 10.2 (Каноническое уравнение прямой в пространстве). Если есть (x_0, y_0, z_0) и (x_1, y_1, z_1) , то прямая через эти точки задается уравнением:

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}$$

Определение 10.3 (Каноническое уравнение прямой в пространстве). Если есть 2 уравнения плоскости, то прямая задается как

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

$$\mathbf{n}_1 = (A_1, B_1, C_1) \quad \mathbf{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$$

$$\mathbf{v} \perp \mathbf{n}_1 \quad \mathbf{v} \perp \mathbf{n}_2 \quad \mathbf{v} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2$$

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$$

$$\frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2} = \frac{z - z_0}{v_3}$$

Определение 10.4. $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ – направляющий вектор

Определение 10.5 (Параметрическое уравнение прямой в пространстве).

$$\frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2} = \frac{z - z_0}{v_3} = t \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 + v_1t \\ y = y_0 + v_2t \\ z = z_0 + v_3t \end{cases}$$

Определение 10.6 (Угол между прямыми в пространстве).

$$\begin{aligned}
 l_1 : \frac{x - x_0}{v_1} &= \frac{y - y_0}{v_2} = \frac{z - z_0}{v_3} \\
 l_2 : \frac{x - x_1}{w_1} &= \frac{y - y_1}{w_2} = \frac{z - z_1}{w_3} \\
 \cos \angle(l_1, l_2) &= \frac{v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \sqrt{w_1^2 + w_2^2 + w_3^2}} \\
 l_1 \perp l_2 : v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3 &= 0 \\
 l_1 \parallel l_2 : \frac{v_1}{w_1} &= \frac{v_2}{w_2} = \frac{v_3}{w_3}
 \end{aligned}$$

Определение 10.7 (Угол между прямой и плоскостью).

$$\begin{aligned}
 l_1 : \frac{x - x_0}{v_1} &= \frac{y - y_0}{v_2} = \frac{z - z_0}{v_3} \\
 \alpha : Ax + By + Cz + D &= 0
 \end{aligned}$$

TODO: сделать рисунок

$$\begin{aligned}
 \sin \theta = \cos \angle(\mathbf{n}, \mathbf{v}) &= \frac{Av_1 + Bv_2 + Cv_3}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}} \\
 \alpha \parallel l_1 : Av_1 + Bv_2 + Cv_3 &= 0 \\
 \alpha \perp l_1 : \frac{A}{v_1} &= \frac{B}{v_2} = \frac{C}{v_3}
 \end{aligned}$$

Теорема 10.1. *TODO: Сделать рисунок*

l_1, l_2 – пересекаются в одной точке или параллельны

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = 0$$

Доказательство. l_1 и l_2 – в одной плоскости, только если \mathbf{v}, \mathbf{w} и $(x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$ в одной плоскости, это равносильно тому, что их смешанное произведение равно 0. ■

Пример. \perp к l_1 через (x_1, y_1, z_1)

$$\frac{x - x_1}{A} = \frac{y - y_1}{B} = \frac{z - z_1}{C}$$
$$\left\{ \begin{array}{l} Av_1 + Bv_2 + Cv_3 = 0 \\ \left| \begin{array}{ccc} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ A & B & C \end{array} \right| = 0 \end{array} \right.$$