

# Геометрия и топология

Курс Сольниина А.А.

Весна 2022 г.

## Примечания

В тексте использованы рисунки из конспектов Сольниина А.А.

---

# Оглавление

---

Оглавление	ii
<b>1 Метрические пространства</b>	<b>2</b>
1.1 Метрические пространства . . . . .	2
1.2 Расположение точки относительно множества . . . . .	6
<b>2 Топологические пространства</b>	<b>15</b>
2.1 Топологические пространства . . . . .	15
2.2 Расположение точки относительно множества . . . . .	18
2.3 Базы и предбазы . . . . .	20
<b>3 Непрерывные отображения</b>	<b>24</b>
3.1 Непрерывные отображения . . . . .	24
3.2 Гомеоморфизмы . . . . .	26
3.3 Инициальная топология . . . . .	28
3.4 Финальная топология . . . . .	32
<b>4 Связность</b>	<b>39</b>
4.1 Связность . . . . .	39
4.2 Компоненты связности . . . . .	43
4.3 Линейная связность . . . . .	45
<b>5 Компактность</b>	<b>48</b>
5.1 Компактность . . . . .	48
5.2 Компактность и хаусдорфовость . . . . .	51
5.3 Компактность в $\mathbb{R}^n$ . . . . .	53
5.4 Локальная компактность . . . . .	56

<b>6</b>	<b>Аксиомы счетности</b>	<b>59</b>
6.1	Сепарабельность . . . . .	59
6.2	Секвенциальная компактность . . . . .	61

# Общая топология

---

# Глава 1

## Метрические пространства

---

### 1.1. Метрические пространства

**Определение 1.1.**  $M$  – множество.  $M$  вместе с  $\rho : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$  называется метрическим пространством, если:

1.  $\forall x, y \rho(x, y) \geq 0$  и  $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2.  $\forall x, y \rho(x, y) = \rho(y, x)$
3. Неравенство треугольника:  $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$

$(M, \rho)$  – метрическое пространство,  $\rho$  – метрика на  $M$ .

**Пример 1.1.**  $M$  – множество домов в городе.  $\rho(x, y)$  – минимальное время, за которое можно добраться от  $x$  до  $y$ . (1 свойство очевидно, 2 свойство выполняется при симметричности дорог, 3 очевидно)

**Пример 1.2.** Расстояние на плоскости.

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^2 &= \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\} \\ \rho_1((x_1, y_1), (x_2, y_2)) &:= |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| \\ \rho_2((x_1, y_1), (x_2, y_2)) &:= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\ \rho_k((x_1, y_1), (x_2, y_2)) &:= (|x_1 - x_2|^k + |y_1 - y_2|^k)^{1/k} \\ k \rightarrow \infty : \rho_\infty((x_1, y_1), (x_2, y_2)) &:= \max\{|x_1 - x_2|; |y_1 - y_2|\}\end{aligned}$$

Если перейти к  $\mathbb{R}^n$ , то

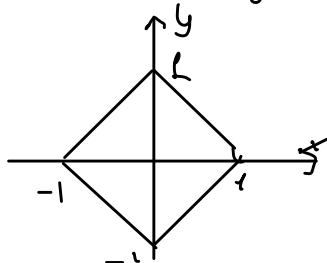
$$\begin{aligned}\rho_k((x_1, x_2, \dots, x_n); (y_1, y_2, \dots, y_n)) &= \left( \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^k \right)^{1/k} \\ \left( \underbrace{|x_1 - x_3|}_{a_1+b_1}^k + \underbrace{|y_1 - y_3|}_{a_2+b_2}^k \right)^{1/k} &\leq \left( \underbrace{|x_1 - x_2|}_{a_1}^k + \underbrace{|y_1 - y_2|}_{a_2}^k \right)^{1/k} + \\ &\quad \left( \underbrace{|x_2 - x_3|}_{b_1}^k + \underbrace{|y_2 - y_3|}_{b_2}^k \right)^{1/k} \\ \left( \sum |a_i + b_i|^k \right)^{1/k} &\leq (|a_1|^k + |a_2|^k)^{1/k} + (|b_1|^k + |b_2|^k)^{1/k}\end{aligned}$$

Неравенство Йенсена (к чему это?)

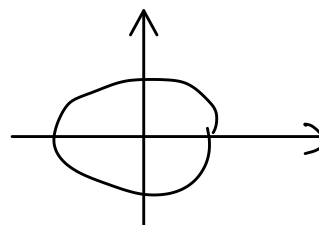
**Определение 1.2.**  $B(x_0, r) := \{x \in M : \rho(x, x_0) < r\}$  – шар с центром в точке  $x_0$  и радиусом  $r$ .

Нарисуем  $B((0, 0); 1)$  в  $\rho_1, \rho_2, \rho_\infty$ .

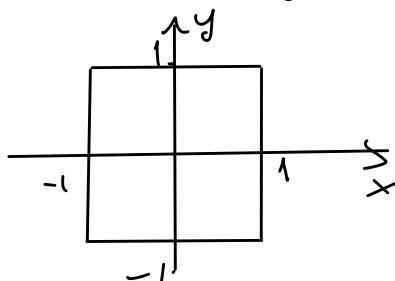
$$f_1: |x-0| + |y-0| < 1.$$



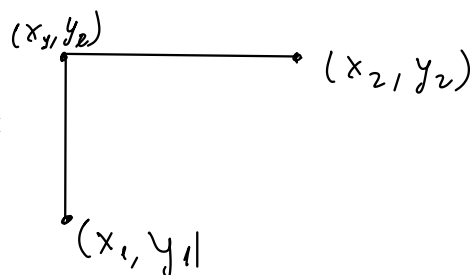
$$f_2: \sqrt{x^2 + y^2} < 1.$$



$$f_\infty: \max\{|x|; |y|\} < 1$$



$\rho_1$  называется манхэттенской метрикой.



$$\rho_1((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

$$\rho_1((x_1, y_1), (x_1, y_2)) = |y_1 - y_2|$$

$$\rho_1((x_1, y_2), (x_2, y_2)) = |x_1 - x_2|$$

**Пример 1.3.**  $M$  – пространство «некоторых»<sup>1</sup> функций. Функции определены на  $X \subset \mathbb{R}$ .

$$\rho_1(f, g) := \int_X |f(x) - g(x)| dx$$

Есть проблемы: если  $f(x) = g(x)$  всюду, кроме 1 точки, то  $\rho_1(f, g) = 0$ .

<sup>1</sup>«некоторых» – обладающих естественными свойствами, какими именно – зависит от функции



1 и 2 свойство очевидны. Третье:

$$\int_X |f - h| dx \leq \int_X |f - g| dx + \int_X |g - h| dx$$

Аналогично определяются другие метрики, например:

$$\begin{aligned} \rho_2(f, g) &= \left( \int_X |f(x) - g(x)|^2 dx \right)^{1/2} \\ \rho_k(f, g) &= \left( \int_X |f(x) - g(x)|^k dx \right)^{1/k} \\ \rho_\infty(f, g) &= \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)| \end{aligned}$$

Естественные свойства:

$$\rho_2 : \int_X |f(x)|^2 dx < \infty$$

**Определение 1.3.**  $(M, \rho)$  – метрическое пространство.  $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset M$  – последовательность. Говорим, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) : \forall n > N \rho(x_n; x_0) < \varepsilon$$

В частности, в пространстве функций с разными метриками бывают разные пределы последовательностей функций.

$$f_n(x) \rightarrow f_0(x) \text{ по метрике } \rho_1$$

Аналогично для других метрик.

$$f_n(x) \rightarrow f_0(x) \text{ по метрике } \rho_\infty$$

называется равномерной сходимостью.  $f_n \rightrightarrows f_0$ :

$$f_n(x) \rightrightarrows f_0(x) \Leftrightarrow \limsup_X |f_n(x) - f_0(x)|$$

**Пример 1.4.** Дискретное метрическое пространство.  $M$  – любое множество.

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 1 & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$$

дискретная метрика.

**Пример 1.5.** На самом деле дискретная метрика – это обобщение  $\rho(x, y) \geq \varepsilon > 0$ .  $\varepsilon$  не зависит от  $x$  или  $y$ .

**Пример 1.6.**  $M$  – множество строк длины  $n$ .  $\rho(x, y)$  – количество символов, где эти строки отличаются

**Пример 1.7.** Задача: есть код из  $N$  бит. Можем переслать, но возникнет не более  $k$  ошибок. Сколько бит надо переслать, чтобы эти ошибки можно было исправить?

Решать не будем, переформулируем на язык метрических пространств.

$(M, \rho)$ .  $M$  состоит из строк, каждая из  $N + k$  двоичных символов. Хотим выбрать  $\{x_1, x_2, \dots, x_{2N}\} \subset M : \rho(x_i, x_j) > 2k$ .  $l \rightarrow \min$ .

$x_i$  – строки из  $N + l$  символов.

$$x_i = a_{i1}a_{i2}\dots a_{iN+l}$$

$$x_j = b_{j1}b_{j2}\dots b_{jN+l}$$

## 1.2. Расположение точки относительно множества

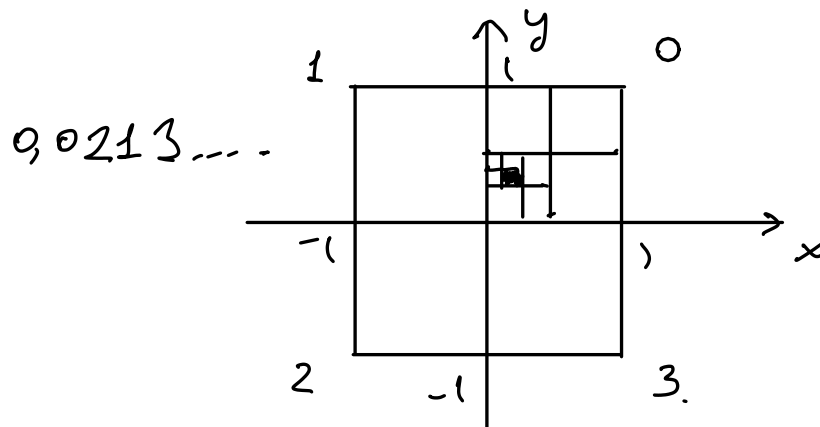


**Теорема 1.1 (Жордана).** Любая замкнутая непересекающаяся кривая на плоскости делит плоскость на две части; равно одна из частей не ограничена.

**Доказательство.** Доказать невероятно сложно. ■

## Кривая Пеано

$$f : [0, 1] \rightarrow [-1, 1] \times [-1, 1]$$

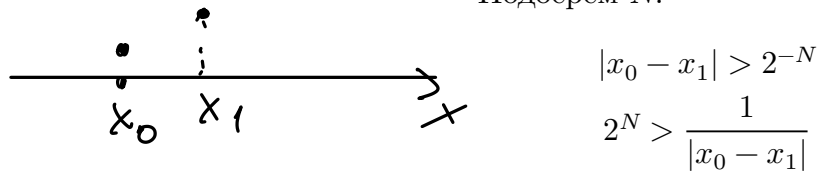


Разложим  $a \in [0, 1]$  в четверичную систему счисления:  $a = 0.a_1a_2a_3a_4\dots$ . Если  $a_1 = 0$ , то идем в I квадрант. Разбиваем его на 4 части. Далее, если  $a_2 = 2$ , то идем в III квадрант, и так далее.

То есть, сопоставляем числу последовательность квадратов. Эта последовательность квадратов сходится к одной точке.

По теореме о вложенных отрезках, пересечение квадратов не пусто. Но это пересечение не может состоять более чем из одной точки.

Подберем  $N$ :



Кривая Пеано сопоставляет точке  $a = 0.a_1a_2a_3\dots$  единственную существующую точку, содержащуюся в пересечении всех соответствующих квадратов

Почему эта кривая непрерывна?

$$|a - b| < \delta$$

$$a = 0.a_1a_2a_3\dots \quad b = 0.b_1b_2b_3\dots$$

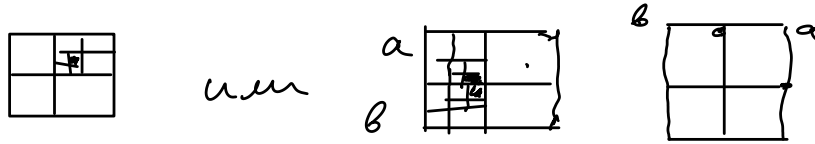
Это значит, что либо

$$a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_k = b_k$$

либо

$$a_1 = b_1, \dots, a_{l-1} = b_{l-1} \text{ и } b_l = a_{l+1} = \dots = a_k = 3, b_{l+1} = \dots = b_k = 0$$

$k$  достаточно большое число



Строится кривая, чтобы она была непрерывна. Такая кривая полностью заметает квадрат.

Существуют кривые, такие что их образ покрывают квадрат.

## Определения

**Определение 1.4.**  $(M, \rho)$  – метрическое пространство.  $A \subset M, x_0 \in M (x_0 \in A \text{ или } x_0 \notin A)$ .

$B(x_0, \varepsilon) := \{x : \rho(x, x_0) < \varepsilon\}$  – шар с центром в  $x_0$  и радиусом  $\varepsilon$ .  $x_0$  называется внутренней точкой для  $A$ , если  $\exists \delta > 0 : B(x_0, \delta) \subset A$ .

$x_0$  называется внешней точкой для  $A$ , если  $\exists \delta > 0 : B(x_0, \delta) \cap A = \emptyset$ .

В противном случае точка называется граничной. А именно,  $x_0$  – граничная, если  $\forall \delta > 0 B(x_0, \delta) \not\subset A$  и  $B(x_0, \delta) \cap A \neq \emptyset$ , то есть  $\exists x_1 \in B(x_0, \delta) \cap A$  и  $\exists x_2 \in B(x_0, \delta) \setminus A$ .

**Определение 1.5.** Множество внутренних точек  $A$  называется внутренностью  $A : \text{Int } A$ .

Множество внешних точек  $A$  называется внешностью  $A : \text{Ex } A$ .

Множество граничных точек  $A$  называется границей  $A : \partial A$  или  $\text{Fr } A$

**Замечание.** Эти множества не пересекаются. В объединении – множество  $M$ .

**Определение 1.6.** Замыкание  $A : \text{Cl } A = \text{Int } A \cup \partial A$  или  $\text{Cl } A = M \setminus \text{Ex } A$

**Определение 1.7.**  $U \subset M$ .  $U$  называется открытым, если  $U = \text{Int } U$ . Или  $\forall x_0 \in U \exists \varepsilon > 0 : B(x_0, \varepsilon) \subset U$

**Теорема 1.2** (Свойства открытых множеств).

1.  $\{U_i\}_{i \in I}$  – семейство открытых множеств, тогда  $\bigcup_{i \in I} U_i$  открыто.
2.  $U_1, U_2, \dots, U_n$  – открытые множества, тогда  $\bigcap_{i=1}^n U_i$  открыто.
3.  $\emptyset, M$  открыто

**Доказательство.**

1. Возьмем  $x_0 \in \bigcup_{i \in I} U_i \Rightarrow \exists i_0 : x_0 \in U_{i_0}$ . Пусть  $U_{i_0}$  открыто, тогда  $\exists \delta > 0 : B(x_0, \delta) \subset U_{i_0} \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ . Значит,  $\bigcup_{i \in I} U_i$  открыто
2. Рассмотрим  $\forall x_0 \in \bigcap_{i=1}^n U_i \Rightarrow \forall i : x_0 \in U_i$ . Значит  $\exists \delta_i > 0 : B(x_0, \delta_i) \subset U_i$ . Возьмем  $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n\} > 0$ .  $B(x_0, \delta) \subset B(x_0, \delta_i) \subset U_i \forall i$ . Раз выполнено для любого  $i$ , значит  $B(x_0, \delta) \subset \bigcap_{i=1}^n U_i$
3. Очевидно ■

**Определение 1.8.**  $F \subset M$ ,  $F$  называется замкнутым множеством, если  $M \setminus F$  открыто.

**Теорема 1.3** (Свойства замкнутых множеств).

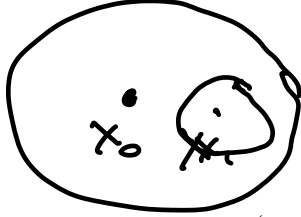
1.  $\{F_i\}_{i \in I}$  – семейство замкнутых множеств, значит  $\bigcap_{i \in I} F_i$  замкнуто.
2.  $F_1, F_2, \dots, F_n$  – замкнутые множества, значит  $\bigcup_{i=1}^n F_i$  замкнуто.
3.  $\emptyset, M$  замкнуты

**Доказательство.** Упражнение.

Hint:  $U_i := M \setminus F_i$ .  $U_i$  открытое  $\Leftrightarrow F_i$  замкнутое. По формулам де Моргана:  $M \setminus (F_1 \cup F_2) = (M \setminus F_1) \cap (M \setminus F_2)$  и т.д. ■

**Лемма 1.4.**  $B(x_0, \delta)$  – открытое множество.

**Доказательство.**



Пусть  $x_1 \in B(x_0, \delta)$ ,  
 $\rho(x_0, x_1) = \varepsilon < \delta$ .

Если взять  $r := \delta - \varepsilon$ , то  
 $B(x_1, r) \subset B(x_0, \delta)$ . Почему  
 так?

Допустим  $x_2 \in B(x_1, r)$ , то есть  $\rho(x_1, x_2) < r = \delta - \varepsilon$ . Но допустим  
 $x_2 \notin B(x_0, \delta)$ , то есть  $\rho(x_0, x_2) \geq \delta$ .

$\underbrace{\rho(x_0, x_2)}_{\geq \delta} \leq \underbrace{\rho(x_0, x_1)}_{=\varepsilon} + \underbrace{\rho(x_1, x_2)}_{< \delta - \varepsilon}$  – противоречие. ■

**Теорема 1.5.**  $M$  – метрическое пространство;  $A \subset M$ ; Тогда

$$\text{Int } A = \bigcup_{\substack{U_i \text{ открыто} \\ U_i \subset A}} U_i,$$

где  $U_i$  открыты и  $U_i \subset A$

**Доказательство.**  $\bigcup_{\substack{U_i \text{ открыто} \\ U_i \subset A}} U_i$  открыто.  $\text{Int } A$  – открытое множе-  
 ство по лемме 1.4.

Если  $x_0$  внутренняя точка, а  $x_1 \in B(x_0, \delta) \subset A$ , тогда по лемме  
 $x_1$  – внутренняя точка  $B(x_1, \delta - \rho(x_0, x_1)) \subset B(x_0, \delta) \subset A$ , значит  
 все точки шара являются внутренними.

$\text{Int } A = \bigcup_{x_0 \in \text{Int } A} B(x_0, \delta_{x_0})$ , где  $B(x_0, \delta_{x_0}) \subset A$ , тогда  $\text{Int } A$  явля-  
 ется открытым множеством. Следовательно  $\text{Int } A \subset \bigcup_{\substack{U_i \text{ открыто} \\ U_i \subset A}} U_i$ .

С другой стороны,  $\text{Int } A \supset \bigcup_{\substack{U_i \text{ открыто} \\ U_i \subset A}} U_i$ . Возьмем любое  $U_i$ , т.ч. оно  
 открыто и  $U_i \subset A$ . По определению  $\forall x_0 \in U_i \exists \varepsilon > 0 B(x_0, \varepsilon) \subset A$ ,  
 тогда  $x_0 \in \text{Int } A$ .

Итого:  $\text{Int } A = \bigcup_{\substack{U_i \text{ открыто} \\ U_i \subset A}} U_i$ . ■

**Следствие 1.5.1.** Следующие определения внутренней равносильны:

1. Множество внутренних точек
2.  $\bigcup_{B(x_0, \delta) \subset A} B(x_0, \delta)$
3.  $\text{Int } A = \bigcup_{\substack{U_i \text{ открыто} \\ U_i \subset A}} U_i$
4.  $\text{Int } A$  – максимальное открытое подмножество  $A$ .

**Теорема 1.6.**

$$\text{Cl } A = \bigcap_{\substack{F \text{ замкнуто} \\ F \supset A}} F$$

**Доказательство.** Упражнение. ■

**Пример 1.8.**  $M = \mathbb{R}$ ;  $A = \mathbb{Q}$ .  $A$  не открыто и не замкнуто.

$$\text{Int } A = \emptyset \quad \text{Cl } A = \mathbb{R} \quad \partial A = \mathbb{R}$$

$B(x_0, \varepsilon) = (x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$ . В этом (как и в любом другом интервале) есть рациональные и иррациональные числа, тогда  $x_0 \in \partial \mathbb{Q} \Rightarrow \partial \mathbb{Q} = \mathbb{R}$ .

**Предложение 1.7.**  $(M, \rho)$  – метрическое пространство.  $A \subset M \Rightarrow \text{Cl } A$  – это:

1.  $\text{Int } A \cup \partial A = M \setminus \text{Ex } A = M \setminus \text{Int}(M \setminus A)$
2.  $\bigcap_{\substack{Z \text{ замкнуто} \\ Z \supset A}} Z$
3. Наименьшее замкнутое множество, которое содержит  $A$ .

**Доказательство.** (2)  $\Leftrightarrow$  (3): наименьшее замкнутое множество, содержащее  $A$  входит в пересечение, т.е. пересечение заведомо не больше. Пересечение замкнуто как пересечение замкнутых множеств, и оно содержит  $A$ , значит оно не меньше, чем наимень-

шее.

(1)  $\Leftrightarrow$  (2):  $x_0 \in \text{Ex } A \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : B(x_0, \varepsilon) \in \text{Ex } A$  ( $B$  открыт).  
 $M \setminus B(x_0, \varepsilon) \supset A$  – замкнуто. Если  $x_0 \in \text{Ex } A \Rightarrow x_0 \notin \bigcap_{\substack{Z \text{ замкнуто} \\ Z \supset A}} Z$ .

Если  $x_0 \notin \text{Ex } A$ , допустим, что  $x_0 \notin \bigcap_{\substack{Z \text{ замкнуто} \\ Z \supset A}} Z$ . Значит существу-

ет замкнутое  $Z_i : x_0 \notin Z_i$ , тогда  $x_0$  лежит в открытом  $M \setminus Z_i$ . Но  $\exists \varepsilon > 0 : B(x_0, \varepsilon) \in M \setminus Z \subset M \setminus A \Rightarrow x_0 \in \text{Ex } A$ . ■

**Предложение 1.8.**  $U$  – открытое,  $Z$  – замкнутое.

$U \setminus Z$  – открытое

$Z \setminus U$  – замкнутое

**Доказательство.**

$$U \setminus Z = U \cap (M \setminus Z),$$

где  $U$  и  $M \setminus Z$  открытые, значит их пересечение открыто.

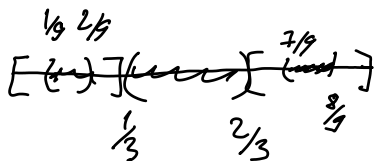
$$Z \setminus U = Z \cap (M \setminus U),$$

где  $Z$  и  $M \setminus U$  замкнутые, значит их пересечение замкнуто. ■

**Следствие 1.8.1.**  $\text{Cl } A$  замкнуто,  $\text{Cl } A = M \setminus \text{Ex } A$ .

$\partial A$  замкнуто,  $\partial A = \text{Cl } A \setminus \text{Int } A$ .

**Пример 1.9.** Канторово множество.

$K :$   и т.д.

$$K = \left( [0; 1] \setminus \left( \frac{1}{3}; \frac{2}{3} \right) \right) \setminus \left( \left( \frac{1}{9}; \frac{2}{9} \right) \cup \left( \frac{7}{9}; \frac{8}{9} \right) \right) \setminus \dots$$

Мера  $K = 0$ :

$$1 - \frac{1}{3} - \frac{2}{9} - \frac{4}{27} - \dots = 1 - \frac{1}{3} \left( 1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \dots \right) = 1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - (2/3)} = 1 - \frac{1}{3} \cdot 3 = 0$$



$K$  несчетно.  $K = \{0.a_1a_2a_3\ldots : a_i = \{0, 2\}\}$  в троичной системе.

$K$  равномощно множеству двоичных бесконечных последовательностей.  $K$  замкнутое множество.

**Теорема 1.9.**  $(M, \rho_1)$  и  $(M, \rho_2)$  – два метрических пространства на  $M$ . Пусть существует  $C > 0 : \forall x, y$

$$\rho_1(x, y) \leq C\rho_2(x, y)$$

Тогда, если множество  $U$  открыто в  $(M, \rho_1)$ , то  $U$  открыто и в  $(M, \rho_2)$ .

**Доказательство.**  $U$  открыто в  $(M, \rho_1)$ .  $\forall x_0 \in U \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : B_{\rho_1}(x_0, \varepsilon) \subset U$ , то есть, если  $\rho_1(x_0, x_1) < \varepsilon \Rightarrow x_1 \in U$ . Пусть  $\delta = \frac{\varepsilon}{C}$  и  $x_1$  – точка, такая что  $\rho_2(x_1, x_0) < \delta$ .

$$\begin{aligned} \Rightarrow \rho_1(x_1, x_0) &\leq C\rho_2(x_1, x_0) < C\delta = \varepsilon \\ \Rightarrow B_{\rho_2}(x_0, \delta) &\subset B_{\rho_1}(x_0, \varepsilon) \subset U \end{aligned}$$

тогда  $U$  открыто в  $\rho_2$ . ■

**Следствие 1.9.1.** В  $\mathbb{R}^n$   $\rho_1, \rho_2, \rho_\infty$  порождают один и тот же набор открытых множеств.

**Доказательство.**  $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$

$$\rho_1(x, y) \stackrel{1}{\geq} \rho_2(x, y) \stackrel{2}{\geq} \rho_\infty(x, y)$$

$$\sum |x_i - y_i| \geq \sqrt{\sum (x_i - y_i)^2} \geq \max(x_i, y_i)$$

Докажем 1:

$$\left(\sum |x_i - y_i|\right)^2 \geq \sum (x_i - y_i)^2$$

Докажем 2:

$$\sum (x_i - y_i)^2 \geq \max |x_i - y_i|^2$$

$\rho_1(x, y) \leq n\rho_\infty(x, y)$ , где  $n$  – размерность пространства

$$\sum_{i=1}^n |x_i - y_i| \stackrel{?}{\leq} n \cdot \max(x_i - y_i)$$

У всех метрик одинаковые открытые множества. ■

**Замечание.** В дискретной метрике ( $\rho(x, y) = 1$  при  $x \neq y$ ) любое множество открытое.

**Теорема 1.10.**  $(M, \rho)$  – метрическое пространство. Срезающая метрика:

$$\rho_1(x, y) = \begin{cases} \rho(x, y) & \rho(x, y) \leq 1 \\ 1 & \rho(x, y) > 1 \end{cases}$$

1.  $\rho_1$  – метрика
2. Набор открытых множеств у  $\rho$  и  $\rho_1$  одинаков.

**Доказательство.** Докажем 1:  $\rho_1$  – метрика.

1.  $\rho_1(x, y) \geq 0$  и  $\rho_1(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$  – очевидно
2.  $\rho_1(x, y) = \rho_1(y, x)$  – очевидно
3.  $\rho_1(x, z) \stackrel{?}{\leq} \rho_1(x, y) + \rho_1(y, z)$

$$\begin{aligned} \rho_1(x, z) &\leq \rho_1(x, y) + \rho_1(y, z) \\ \begin{bmatrix} \rho(x, z) \\ 1 \end{bmatrix} &\leq \begin{bmatrix} \rho(x, y) \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \rho(y, z) \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Докажем 2:  $U$  открыто в  $\rho_1$ , значит  $U$  открыто в  $\rho$ :

$$\rho_1(x, y) \leq 1 \cdot \rho(x, y)$$

Пусть  $U$  открыто в  $\rho$ , тогда для любого  $x_0 \in U \exists \varepsilon > 0 : B(x_0, \varepsilon) \subset U$ . Пусть  $\varepsilon < 1$ , тогда  $B_\rho(x_0, \varepsilon) = B_{\rho_1}(x_0, \varepsilon) \subset U$ , значит  $U$  открыто в  $\rho_1$ . ■

---

## Глава 2

# Топологические пространства

---

### 2.1. Топологические пространства

**Пример 2.1.** В  $\mathbb{R}^2$

$$\rho_p((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = (|x_1 - x_2|^p + |y_1 - y_2|^p)^{1/p} \quad \forall p \geq 1$$

$$\rho_\infty = \max\{|x_1 - x_2|; |y_1 - y_2|\}$$

$$\rho_{\text{срезающая}}(A, B) = \begin{cases} \rho_i(A, B) & \text{если } \rho_i(A, B) \leq 1 \\ 1 & \text{если } \rho_i(A, B) > 1 \end{cases}$$

$$\rho'(A, B) = \frac{\rho(A, B)}{1 + \rho(A, B)}, \quad \rho'(A, B) < 1$$

У всех этих метрик одинаковые открытые множества

Вывод: метрические пространства не всегда удобны.

**Определение 2.1.** Пусть  $X$  – множество, а  $\Omega$  – система подмножеств  $X$ . ( $\Omega \subset 2^X$  – множество всех подмножеств  $X$ ) Пара  $(X, \Omega)$  называется топологическим пространством, если

1.  $\forall \{U_i\}_{i \in I} \subset \Omega \implies \bigcup_{i \in I} U_i \in \Omega$
2.  $U_1, U_2 \in \Omega$ , тогда  $U_1 \cap U_2 \in \Omega$
3.  $\emptyset, X \in \Omega$

**Определение 2.2.**  $\Omega$  называется топологией на  $X$ . Любое  $U \in \Omega$  называется открытым подмножеством  $X$ .

**Определение 2.3.**  $(X, \Omega)$  – топологическое пространство.  $F \subset X$ .  $F$  назовем замкнутым, если  $X \setminus F$  – открыто, т.е.  $X \setminus F \in \Omega$ .

**Теорема 2.1** (Свойства замкнутых подмножеств).

1.  $\forall \{F_i\}_{i \in I}$  – замкнутые, то  $\bigcap_{i \in I} F_i$  замкнуты
2.  $F_1, F_2$  – замкнутые, то  $F_1 \cup F_2$  замкнуты
3.  $\emptyset, X$  – замкнуты

**Доказательство.** Переход к дополнениям множеств и свойства объединения, пересечения и разности множеств. ■

Таким образом топологическое пространство можно задавать при помощи замкнутых множеств.

**Пример 2.2.** Метрическая топология:  $(X, \rho)$  – метрическое пространство,  $\Omega$  – множество всех открытых подмножеств.  $U$  называется открытым, если  $\forall x_0 \in U \exists \varepsilon > 0 : B(x_0, \varepsilon) := \{x \in X : \rho(x, x_0) < \varepsilon\} \subset U$ .

**Пример 2.3.** Дискретная топология:  $X$  – множество,  $\Omega = 2^X$  (любое подмножество открыто).

**Пример 2.4.** Антидискретная топология:  $X$  – множество,  $\Omega = \{\emptyset, X\}$ .

**Замечание.** 2 пример – частный случай 1-ого.

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$$

$$B(x_0, 1/2) = \{x_0\} \text{ – открыто}$$

А если любая точка открыта, значит любое подмножество открыто

**Определение 2.4.** Топология называется метризуемой, если существует метрика  $\rho$ , порождающая данную топологию.

Антидискретная топология не метризуема.

$$a, b \in X. r := \rho(a, b). b \notin B(a, r/2), a \in B(a, r/2) \\ B(a, r/2) - \text{открыто}$$

Вопрос:  $(X, \Omega)$  – топологическое пространство. Выяснить является ли оно метризуемым.

**Пример 2.5.** Топология конечных дополнений (Зариского).  $X$  – бесконечное множество.  $F$  называется замкнутым, если  $F$  конечно или  $F = X$ .  $\Omega := \{X \setminus F : F \text{ конечно или } F = X\}$

**Теорема 2.2** (Гильберта о базисе). Любой идеал  $I \subset F[x_1, x_2, \dots, x_n]$  порождается конечным набором многочленов.

**Пример 2.6.** Развитие предыдущего примера.  $F$  – поле (в алгебраическом смысле).  $F^n = F \times F \times \dots \times F$  – координатное пространство.  $f_1, f_2, \dots, f_k$  – некоторые многочлены от  $n$  переменных с коэффициентами в поле  $F$ . Тогда множество совместных корней этих многочленов назовем замкнутым множеством:

$$G = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : \forall i = 1 \dots k f_i(x_1, \dots, x_n) = 0\}$$

Это семейство замкнутых множеств порождает топологию.

$$I = \{f_1 g_1 + f_2 g_2 + \dots + f_k g_k : g_i - \text{любые многочлены от } n \text{ переменных}\}$$

идеал, порожденный  $f_1, \dots, f_n$

По теореме 2.2 возникает соответствие  $G \leftrightarrow I$ . Это биекция, только если  $F$  алгебраически замкнуто (по теореме Гильберта о нулях).

Зачем это надо?

$$x^n + y^n - z^n = f(x, y, z) \\ n > 2, F = \mathbb{Q}$$

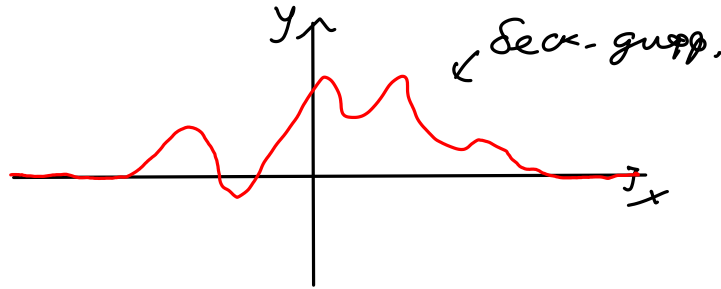
Существуют ли корни этого многочлена? А это великая теорема Ферма.  $x^n + y^n - z^n = 0$  (Решения в  $\mathbb{Z}$  существуют, н.р.  $x = y = z = 0$ )

**Пример 2.7.** Стрелка.  $X = \mathbb{R}$  (или  $\mathbb{R}_+$ ).

$$\Omega = \{(a, +\infty) : a \in X\} \cup \{\emptyset\} \cup \{X\}$$

Это топология.

**Пример 2.8.**  $D$  – множество бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем, т.е.  $f(x) = 0$  если  $|x| > M$ . ( $\forall f \in D \exists M > 0$ : если  $|x| > M$ , то  $f(x) = 0$ ).



$$f_n(x) \rightrightarrows f(x) \text{ если } \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \forall x$$

Пусть  $f_n(x)$  – последовательность функций в  $D$ .  $f_n(x) \xrightarrow{D} f(x)$ , если

1.  $\exists M : \forall |x| > M \forall n f_n(x) = 0$
2.  $f_n(x) \rightrightarrows f(x); f'_n(x) \rightrightarrows f'(x)$  и т.д.

$F \subset D$  называется замкнутым, если из  $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}} \subset F$  и  $f_n(x) \rightarrow f(x)$ , следует  $f(x) \in F$ . Это порождает топологию на  $D$ .

## 2.2. Расположение точки относительно множества

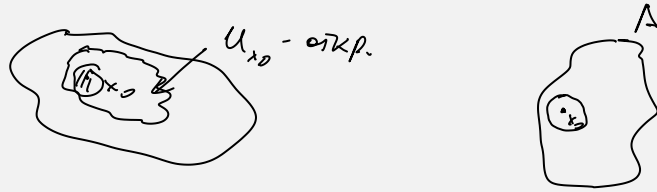
**Определение 2.5.**  $(X, \Omega)$  – топологическое пространство.  $x_0 \in X$ . Окрестностью точки  $x_0$  называется любое открытое подмножество  $U_{x_0} : x_0 \in U_{x_0}$ .

**Определение 2.6.**  $A \subset X$  – подмножество.  $x_0 \in X$ .

$x_0$  – внутренняя точка для  $A$ , если  $\exists$  окрестность  $U_{x_0} \subset A$

$x_0$  – внешняя точка  $A$ , если есть окрестность  $U_{x_0} \cap A = \emptyset$  (т.е.  $U_{x_0} \subset X \setminus A$ )

$x_0$  называется граничной, если  $\forall U_{x_0}$  неверно  $U_{x_0} \subset A$  и неверно  $U_{x_0} \subset X \setminus A$ .



**Определение 2.7.**  $\text{Int } A = \{x_0 \in X : x_0 \text{ – внутренняя для } A\}$

$\text{Ex } A = \{x_0 \in X : x_0 \text{ – внешняя для } A\}$

$\partial A = \{x_0 \in X : x_0 \text{ – граничная для } A\}$

$\text{Cl } A = \text{Int } A \cup \partial A$

**Теорема 2.3.**

$$1. \text{Int } A = \bigcup_{\substack{U_i \in \Omega \\ U_i \subset A}} U_i$$

$$2. \text{Ex } A = \bigcup_{\substack{U_i \in \Omega \\ U_i \cap A = \emptyset}} U_i$$

$$3. \text{Cl } A = \bigcap_{\substack{Z_i \text{ – замкнуто} \\ A \subset Z_i}} Z_i$$

**Замечание.** Часто именно это дается в качестве определения  $\text{Int } A$ ,  $\text{Ex } A$ ,  $\text{Cl } A$ ,  $\partial A = \text{Cl } A \setminus \text{Int } A$

**Доказательство.** Докажем 1: заметим, что  $\bigcup_{\substack{U_i \in \Omega \\ U_i \subset A}} U_i \supset \text{Int } A$ .

Потому что  $\text{Int } A$  – множество внутренних точек, а каждая такая точка входит вместе с окрестностью. Значит все окрестности включаются в левую часть.

Почему  $\bigcup_{\substack{U_i \in \Omega \\ U_i \subset A}} U_i \subset \text{Int } A$ ?

Возьмем  $x_0$  из левой части, тогда  $x_0 \in U_i \subset A$ , значит  $U_i$  нужная окрестность, чтобы считать  $x_0$  внутренней.

Докажем 2: аналогично 1.

Докажем 3: следует из 1 потому что  $U_i := X \setminus F_i$ .

$$\bigcap_{\substack{F_i - \text{замкнуто} \\ A \subset F_i}} F_i = \bigcap_{\substack{U_i - \text{открыто} \\ U_i \cap A = \emptyset \\ U_i \subset X \setminus A}} (X \setminus U_i) = X \setminus \bigcup_{\substack{U_i \in \Omega \\ U_i \subset X \setminus A}} U_i =$$

$$X \setminus \text{Ex } A = \text{Cl } A$$

■

## 2.3. Базы и предбазы

**Определение 2.8.**  $(X, \Omega)$  – топологическое пространство.  $\mathfrak{B} \subset 2^X$  (Точнее  $\mathfrak{B} \subset \Omega$ ).  $\mathfrak{B}$  называется базой топологии  $\Omega$ , если

$$\forall U \in \Omega \quad U = \bigcup_{i \in I} B_i \quad (\exists I \exists B_i) : B_i \in \mathfrak{B}.$$

**Определение 2.9.**  $\mathfrak{B}$  называется базой некоторой топологии, если существует  $\Omega : \mathfrak{B}$  база топологии.

**Замечание.** Такая  $\Omega$  единственна:

$$\Omega = \left\{ \bigcup_{i \in I} B_i : B_i \in \mathfrak{B} \right\}.$$

**Пример 2.9.** В  $\mathbb{R}^n$   $\mathfrak{B} := \{B(x, \varepsilon) : x \in \mathbb{R}^n; \varepsilon > 0\}$ .  $\mathbb{R}^n$  можно заменить на любое метрическое пространство.

**Пример 2.10.**  $X = \mathbb{N}$ .  $\mathfrak{B}$  – множество арифметических прогрессий, тогда  $\mathfrak{B}$  база некоторой топологии. (обоснование позже)

**Пример 2.11.**  $(X, \Omega)$  – дискретное пространство.  $\mathfrak{B}$  все одноточечные множества.  $\mathfrak{B}$  – база  $\Omega$ .



**Пример 2.12.**  $C(\mathbb{R}^n)$  – множество непрерывных функций из  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . (Это обобщается)

$K_1, \dots, K_n$  – замкнутые и ограниченные подмножества  $\mathbb{R}^n$ .  $U_1, \dots, U_n$  – открытые множества в  $\mathbb{R}$ .

$$V_{K_1, \dots, K_n}^{U_1, \dots, U_n} := \{f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \text{ — непрерывно} : f(K_i) \subset U_i, i = 1, \dots, n\}$$

Множество таких  $V_{K_1, \dots, K_n}^{U_1, \dots, U_n}$  – база некоторой топологии. Она называется компактно-открытая топология.

**Теорема 2.4.**  $(X, \Omega)$  – топологическое пространство,  $\mathfrak{B} \subset \Omega$ , то  $\mathfrak{B}$  – база  $\Omega \Leftrightarrow \forall U \in \Omega \forall x_0 \in U \exists B \in \mathfrak{B} : x_0 \in B \subset U$ .

**Доказательство.**  $U = \bigcup_{x_0 \in U} B_{x_0}$  ■

**Теорема 2.5.**  $X$  – множество,  $\mathfrak{B} \subset 2^X$ .  $\mathfrak{B}$  является базой некоторой топологии

$$\Leftrightarrow \forall B_1, B_2 \in \mathfrak{B} \forall x_0 \in B_1 \cap B_2 \exists B_3 \in \mathfrak{B} : x_0 \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$$

$$\text{и } \bigcup_{B \in \mathfrak{B}} B = X.$$

**Замечание.** Частный случай: Если  $B_1 \cap B_2 \in \mathfrak{B}$ , то  $\mathfrak{B}$  – база топологии.

**Доказательство.** Прямое доказательство: по предыдущей теореме. ( $U := B_1 \cap B_2$ )

Обратное доказательство:  $\Omega := \left\{ \bigcup_{i \in I} B_i : B_i \in \mathfrak{B} \right\}$ .  $\Omega$  – топология?

1.  $U_i = \bigcup_{j \in J_i} B_{ij}$ , ( $B_{ij} \in \mathfrak{B}$ ), тогда

$$\bigcup_{i \in I} U_i = \bigcup_{i \in I} \bigcup_{j \in J} B_{ij} \in \Omega$$

2.  $U_1 = \bigcup_{i \in I} B_i$ ,  $U_2 = \bigcup_{j \in J} C_j$ ,  $B_i, C_j \in \mathfrak{B}$ ,  $B_i \cap C_j = \bigcup_{x_0 \in B_i \cap C_j} B_3(x_0)$

Почему  $U_1 \cap U_2 \in \Omega$ ?

$$U_1 \cap U_2 = \left( \bigcup_{i \in I} B_i \right) \cap \left( \bigcup_{j \in J} C_j \right) = \bigcup_{(i,j) \in I \times J} (B_i \cap C_j) =$$

$$\bigcup_{(i,j)} \bigcup_{x_0 \in B_i \cap C_j} B_3(x_0; B_i \cap C_j) \in \Omega$$

и каждое  $B_3(x_0; B_i \cap C_j) \in \mathfrak{B}$

$$3. \emptyset = \bigcup_{i \in \emptyset} B_i, X = \bigcup_{B \in \mathfrak{B}} B$$

■

**Определение 2.10.**  $(X, \Omega)$  – топологическое пространство.  $\mathfrak{A}$  называется предбазой  $\Omega$ , если  $\mathfrak{B} := \{\bigcap_{i=1}^n A_i : A_i \in \mathfrak{A}\}$  – база  $\Omega$ . То есть предбаза – любой набор подмножеств, объединение которых  $X$ .

**Определение 2.11.**  $(X, \Omega)$  – топологическое пространство.  $\forall x_0 \in X$  задано  $\mathfrak{B}_{x_0}$  – множество некоторых окрестностей  $x_0$ .  $\mathfrak{B}_{x_0} \in \Omega$ . Говорим, что  $\{\mathfrak{B}_{x_0}\}_{x_0 \in X}$  является базой окрестностей точек  $\Omega$ , если  $\forall U \in \Omega \forall x_0 \in X : x_0 \in U \exists B(x_0, U) \in \mathfrak{B}_{x_0} : x_0 \in B(x_0, U) \subset U$ .

**Замечание.**  $\bigcup_{x_0 \in X} \mathfrak{B}_{x_0}$  – база  $\Omega$ .

$$U = \bigcup_{x_0 \in U} B(x_0, U)$$

**Пример 2.13.**  $(M, \rho)$  – метрическое пространство, тогда  $\mathfrak{B}_{x_0} = \{B(x_0, \varepsilon) : \varepsilon > 0\}$ .

**Теорема 2.6.**  $X$  – множество.  $\forall x_0 \in X \exists \mathfrak{B}_{x_0} \subset 2^X: (\mathfrak{B}_{x_0} \neq \emptyset)$

1.  $\forall B \in \mathfrak{B}_{x_0} x_0 \in B$
2.  $\forall B_1, B_2 \in \mathfrak{B}_{x_0} \implies \exists B_3 \in \mathfrak{B}_{x_0} : B_3 \in B_1 \cap B_2$
3.  $\forall B_1 \in \mathfrak{B}_{x_0}, \forall x_1 \in B_1 \exists B_2 \in \mathfrak{B}_{x_1} : x_1 \in B_2 \subset B_1$

Если все это выполнено, то  $\bigcup_{x_0 \in X} \mathfrak{B}_{x_0}$  – база некоторой топологии.

**Доказательство.** Смотри предыдущую теорему. ■

---

## Глава 3

# Непрерывные отображения

---

### 3.1. Непрерывные отображения

**Определение 3.1.**  $(X, \rho), (Y, d)$  – метрические пространства.  $f : X \rightarrow Y$  – отображение. Говорим, что  $f$  непрерывно в  $x_0 \in X$ , если  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \text{если } \rho(x_1, x_0) < \delta \implies d(f(x_0), f(x_1)) < \varepsilon$ .

**Определение 3.2.**  $f$  непрерывно если  $f$  непрерывно в любой точке.

**Замечание.**  $f : X \rightarrow Y$  непрерывно в  $x_0 \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : f(B_X(x_0, \delta)) \subset B_Y(f(x_0), \varepsilon)$ .

**Определение 3.3.**  $(X, \Omega_X)$  и  $(Y, \Omega_Y)$  – топологические пространства.  $f : X \rightarrow Y$  – отображение.  $f$  называется непрерывным в точке  $x_0 \in X$ , если  $\forall U \in \Omega_Y : f(x_0) \in U \exists V \in \Omega_X : x_0 \in V : f(V) \subset U$

**Теорема 3.1.**  $(X, \rho)$  и  $(Y, d)$  метрические пространства.  $f : X \rightarrow Y$  отображение.  $f$  непрерывно  $\iff \forall U \subset Y, U$  открыто,  $f^{-1}(U)$  открыто в  $X$ .

**Доказательство.** Прямое доказательство:  $f$  непрерывное, т.е.  $\forall x_0 \forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon, x_0) > 0 : f(B_X(x_0, \delta)) \subset B_Y(f(x_0), \varepsilon)$ .  $\forall U \subset Y$  – открыто,  $V := f^{-1}(U)$ . Хотим доказать, что  $V$  открыто.  $\forall x_0 \in V \Rightarrow f(x_0) \in U$ .  $U$  – открытое, значит  $\exists \varepsilon > 0 : B(f(x_0), \varepsilon) \subset U$ . Тогда  $\exists \delta > 0 : f(B_X(x_0, \delta)) \subset B_Y(f(x_0), \varepsilon) \subset U$ . Если  $f(B_X(x_0, \delta)) \subset U \Rightarrow B_X(x_0, \delta) \subset V$ .

Обратное:  $\forall x_0 \in X, \forall \varepsilon > 0$ .  $U := B(f(x_0), \varepsilon)$  открытое. Значит  $f^{-1}(U)$  открыт,  $x_0 \in f^{-1}(U)$ , т.к.  $f(x_0) \in U$ . Тогда  $\exists \delta > 0 : B(x_0, \delta) \subset f^{-1}(U)$ .  $f(B(x_0), \delta) \subset U := B(f(x_0), \varepsilon)$ . ■

**Определение 3.4.**  $(X, \Omega_X)$  и  $(Y, \Omega_Y)$  – топологические пространства.  $f : X \rightarrow Y$  – отображение.  $f$  называется непрерывным, если  $\forall U \in \Omega_Y f^{-1}(U) \in \Omega_X$ .

**Замечание.**  $X, Y$  – множества,  $A, B \subset X; C, D \subset Y$ .

$$\begin{aligned} f(A \cup B) &= f(A) \cup f(B) \\ f(A \cap B) &= f(A) \cap f(B) \text{ – неверно!} \\ f^{-1}(C \cup D) &= f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D) \\ f^{-1}(C \cap D) &= f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D) \end{aligned}$$

Почему неверно второе:

$$\begin{aligned} f(A \cap B) &= \{f(x_0) : x_0 \in A \cap B\} \\ f(A) \cap f(B) &= \{f(x_0) : x_0 \in A\} \cap \{f(y_0) : y_0 \in B\} = \\ &= \{f(x_0) = f(y_0) : x_0 \in A, y_0 \in B\} \end{aligned}$$

Почему неверны остальные – упражнение.

**Определение 3.5.**  $f : X \rightarrow Y$  называется

1. непрерывным, если прообраз открытого множества открыт
2. непрерывным, если прообраз замкнутого замкнут
3. открытым, если образ открытого открыт
4. замкнутым, если образ замкнутого замкнут

$F \subset X$  замкнутое,  $U := Y \setminus F$  открытое.  $f^{-1}(Y \setminus U) = X \setminus f^{-1}(U)$  замкнуто, если  $U$  открыто.  $f^{-1}(U)$  и  $f^{-1}(Y \setminus U)$  не пересекаются и в объединении дают  $X$ .

**Пример 3.1.**  $X = Y = \mathbb{R}$ , на  $X$  дискретная топология, на  $Y$  стандартная,  $f : X \rightarrow Y, f(x) = x$  непрерывно, но не открытое и не замкнутое.

$U$  подмножество, не открытое в стандартной топологии, но открытое в дискретной.

**Пример 3.2.** Разница между открытым и замкнутым: рассмотрим отображения включения:  $i : U \hookrightarrow X, i(x) = x$ . Если

- $U$  открытое множество, тогда  $i$  открытое
- $U$  не открытое в  $X$ , тогда  $i$  не открытое отображение
- $U$  замкнутое множество в  $X$ , тогда  $i$  замкнутое

## 3.2. Гомеоморфизмы

**Определение 3.6.**  $f : X \rightarrow Y$  называется гомеоморфизмом, если

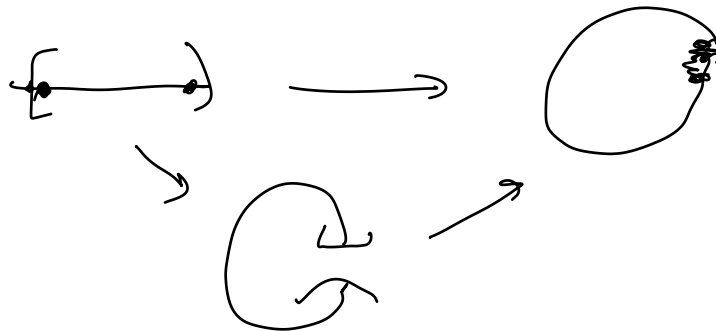
1.  $f$  непрерывно
2.  $f$  биективно
3.  $f^{-1}$  непрерывно

**Пример 3.3.**  $X = Y = \mathbb{R}$ , на  $X$  дискретная топология, на  $Y$  стандартная.

$f : X \rightarrow Y; f(x) = x$ ,  $f$  непрерывно и биективно, но не  $f^{-1}$  не непрерывно, не гомеоморфизм!

**Пример 3.4.**  $X = [0, 2\pi)$ ,  $Y = S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$

$f : X \rightarrow Y; f(t) = e^{it}$  — биекция и непрерывное отображение, но обратное не непрерывно:



**Теорема 3.2.** 1. Гомеоморфность, т.е. существование какого-то гомеоморфизма, есть эквивалентность

2.  $f : X \rightarrow Y$  – гомеоморфизм, тогда  $f$  индуцирует биекцию между  $\Omega_X$  и  $\Omega_Y$  (и между замкнутыми множествами  $X$  и  $Y$  тоже)

**Доказательство.** Докажем 1: будем означать гомеоморфность символом эквивалентности:  $\sim$ . Пусть  $X \sim X, id : x \mapsto x. id(X) = X$ . Пусть  $X \sim Y \Rightarrow \exists f : X \rightarrow Y$  – гомеоморфизм, тогда  $f^{-1} : Y \rightarrow X$  – гомеоморфизм. Пусть  $X \sim Y, Y \sim Z \Rightarrow X \sim Z$ .  $f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow Z, g \circ f : X \rightarrow Z$  – гомеоморфизм. Доказательство 2 очевидно ■

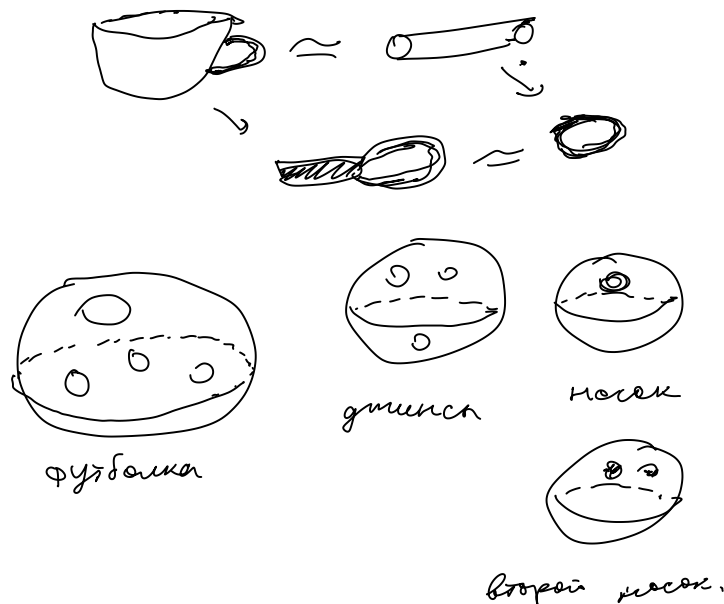
**Пример 3.5.**  $(0, 1) \xrightarrow{f} (a, b) \xrightarrow{g} \mathbb{R}^{\text{нпр}} \xrightarrow{\sim} (0, +\infty)$

$$g : \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}; g(x) = \operatorname{tg} x$$

$$f(0, 1) \rightarrow (a, b); f(x) = (b - a)x + a$$

Но  $(0, 1) \approx [0, 1]$ . Почему? Нужно искать инварианты.

**Пример 3.6.** Шуточные примеры:



### 3.3. Инициальная топология

#### Прообраз топологии

$f : X \rightarrow Y$  отображение,  $(Y, \Omega_Y)$  топологическое пространство.  $X$  пока нет. Цель: ввести топологию на  $X$ , т.ч.  $f$  непрерывно, топология на  $X$  слабейшая из возможных.

**Определение 3.7.**  $(X, \Omega_1)$  и  $(X, \Omega_2)$  топологические пространства. Говорим, что  $\Omega_1$  сильнее  $\Omega_2$ , если  $\Omega_2 \subset \Omega_1$ .

**Определение 3.8.** Самая слабая топология на  $X$ , т.ч.  $f : X \rightarrow Y$  непрерывно, называется прообразом топологии  $\Omega_Y$

**Теорема 3.3.** Прообраз топологии существует.

**Доказательство.**  $U \in \Omega_Y \implies f^{-1}(U)$  должен быть открыт в  $X$ . Прообраз  $\Omega_X := \{f^{-1}(U) : U \in \Omega_Y\}$ .

$$\begin{aligned} f^{-1}(U_1 \cap U_2) &= f^{-1}(U_1) \cap f^{-1}(U_2) \\ f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} U_i\right) &= \bigcup_{i \in I} f^{-1}(U_i) \\ f^{-1}(\emptyset) &= \emptyset, f^{-1}(Y) = X. \end{aligned}$$

■

Важный частный случай:  $(X, \Omega_X)$  – топологическое пространство.  $Y \subset X$ .  $i : Y \hookrightarrow X$ . Тогда  $Y$  наделяется топологией.

**Определение 3.9.** Такая топология на  $Y$  называется индуцированной.

$V \subset Y$ .  $V$  открыто в  $Y$  если  $\exists U$  – открытое в  $X$ :  $i^{-1}(U) = V = U \cap Y$ .

**Определение 3.10.** Переформулируем:  $V \subset Y$  называется открытым, если  $\exists U$  – открытое в  $X$  :  $U \cap Y = V$ .

**Замечание.**  $V$  открыто в  $Y$ , но это не означает, что  $V$  открыто в  $X$ .

$Y = [0, 1]$ ,  $X = \mathbb{R}$  со стандартной топологией.  $U = (-1, 0.5)$  открыто в  $\mathbb{R} = X$ .  $U \cap [0, 1] = [0, 0.5)$  открыто в  $Y$ , но не открыто в  $X$ .



## Инициальная топология

**Определение 3.11.**  $X$  – множество.  $(Y_i, \Omega_i)$  – топологические пространства.  $f_i : X \rightarrow Y_i$ . Хотим завести на  $X$  топологию, такую что все  $f_i$  непрерывны, а топология на  $X$  слабейшая из возможных. Такая топология называется инициальной.

**Теорема 3.4.** Инициальная топология существует и единственна.

**Доказательство.**  $f_i^{-1}(U_i)$  должны быть открытыми,  $U_i \subset Y_i$  открытые. Все такие множества – предбаза. По критерию базы:

$$\mathfrak{B} = \{f_{i_1}^{-1}(U_{i_1}) \cap \dots \cap f_{i_k}^{-1}(U_{i_k}) : U_{i_j} \in \Omega_{i_j}\}$$

является базой некоторой топологии. ■

**Пример 3.7.**  $(X, \Omega_X)$  и  $(Y, \Omega_Y)$  – топологические пространства. Как ввести топологию на  $X \times Y$ ? Берем проекции на  $X$  и  $Y$  и инициальную топологию. Как ее описать? Далее.

## Бесконечное произведение. Ликбез

$\{X_i\}_{i \in I}$  – семейство множеств. Пусть  $(X_i, \Omega_i)$  – топологические пространства.

$$\prod_{i \in I} X_i = \{f : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} X_i : f(j) \in X_j\}$$

Пусть  $\forall i \ X_i \neq \emptyset$ . Почему  $\prod_{i \in I} X_i \neq \emptyset$ ? Это равносильно аксиоме выбора.

**Аксиома 3.5 (выбора).**  $\{X_i\}_{i \in I}$  – семейство непустых множеств. Тогда  $\exists Y$  состоящее из элементов  $X_i$  (по одному элементу из каждого множества)

**Лемма 3.6 (Цорна).**  $X$  – непустое частично упорядоченное множество (введено отношение порядка, которое рефлексивно, антисимметрично и транзитивно).  $\forall x_1 \leq x_2 \leq \dots \exists x_* : x_* > x_i \forall i$ , тогда в множестве  $X$  существует максимальный элемент

**Теорема 3.7** (Цермело). Любое непустое множество можно вполне упорядочить (ввести такой порядок, что любое подмножество будет иметь наименьший элемент).

Стандартное  $\leq$  на  $\mathbb{R}$  – неполный порядок, например  $(0, 1)$  не имеет наименьшего.

**Предположение 3.8.** Аксиома выбора  $\Leftrightarrow$  лемме Цорна  $\Leftrightarrow$  теореме Цермело.

**Теорема 3.9.** У любого векторного пространства есть базис.

**Доказательство.**  $A$  – множество всех ЛНЗ наборов.  $(A; \subset)$  – частично упорядоченное множество.

$$x_1 \subset x_2 \subset \dots \Rightarrow x_* = \bigcup_{i=1}^{\infty} x_i$$

по лемме Цорна существует максимальный элемент. Он и является базисом. ■

## Декартово произведение

$$\begin{array}{ccc} X \times Y & \xrightarrow{p_X} & X \\ \downarrow p_Y & & \\ Y & & \end{array}$$

Есть  $X \times Y$ ,  $p_X(x, y) = x$ ,  $p_Y(x, y) = y$

$(X, \Omega_X)$ ,  $(Y, \Omega_Y)$  – топологические пространства. На  $X \times Y$  введем топологию (инициальную).  $U \subset X$  открыто  $p_X^{-1}(U) = U \times Y$ .  $V \subset Y$

открыто  $p_Y^{-1}(V) = X \times V$ .

$$\begin{aligned}(U_1 \times Y) \cap (U_2 \times Y) &= (U_1 \cap U_2) \times Y \\ (U \times Y) \cap (X \times V) &= U \times V\end{aligned}$$

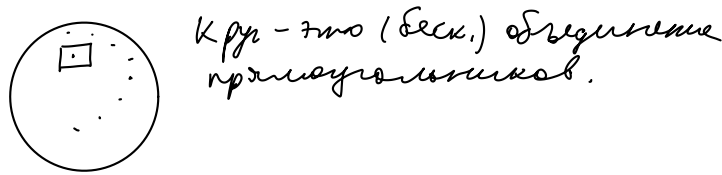
Таким образом  $\{U \times V : U \in \Omega_X; V \in \Omega_Y\}$  – база топологии  $X \times Y$

Иначе: множество  $W \subset X \times Y$  является открытым, тогда и только тогда, когда  $\forall (x_0, y_0) \in W \exists U_{x_0} \in \Omega_X, V_{y_0} \in \Omega_Y : x_0 \in U_{x_0}, y_0 \in V_{y_0}, U_{x_0} \times V_{y_0} \subset W$

**Пример 3.8.** Это совпадает с топологией на  $\mathbb{R}^2$ :



**Пример 3.9.**



$\prod_{i \in I} X_i$  хотим снабдить топологией.  $U \subset X_i$  – открыто, тогда  $U \times \prod_{j \neq i} X_j$  – открытое множество в инициальной топологии. Такие множества предбаза.

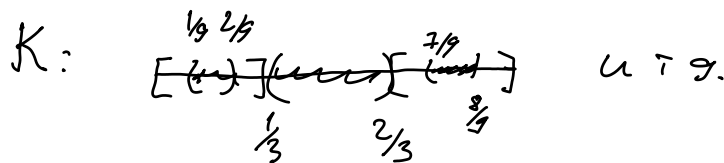
$$U_1 \times U_2 \times \dots \times U_k \times \prod_{j \neq 1, \dots, k} X_j$$

– база топологии.

НО  $U_i \subset X_i$  открыто,  $\prod U_i$  не является открытым в  $\prod X_i$ !

**Свойство 3.1.** Если на  $X_i$  дискретная топология, то  $\prod_{i \in I} X_i$  не является дискретным пространством, если  $I$  бесконечно

В частности счетное произведение  $\{0, 1\} \times \{0, 1\} \times \dots = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  не дискретно. Такое множество гомеоморфно  $K$  – канторову множеству.



**Свойство 3.2.** 1.  $l(K) = 0$ .  $l(K) = 1 - (1/3 + 2/9 + 4/27 + \dots)$

2.  $K$  замкнуто
3.  $K$  состоит из чисел без 1 в троичной записи.  $1/3 = 0.1 = 0.022222\dots$  в троичной записи
4.  $K \simeq \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  – гомеоморфизм.  $K = \{0.a_1a_2a_3\dots : a_i \in \{0, 2\}\}$  (не очень простое упражнение)
5.  $K$  несчетно
6.  $K \simeq K \times K$ , по пункту 4:  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}} \times \{0, 1\}^{\mathbb{N}} = \{0, 1\}^{\mathbb{N}^2}$ , а  $\mathbb{N}^2 \sim \mathbb{N}$ , поэтому  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}^2} \simeq \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$

### 3.4. Финальная топология

$(X_i, \Omega_i)$  – топологические пространства ( $i \in I$ ).  $f_i : X_i \rightarrow Y$ ,  $Y$  – множество. Хотим задать топологию на  $Y$  так, чтобы  $f_i$  было непрерывным и эта топология была сильнейшей из возможных.

**Определение 3.12.** Такая топология называется финальной.

**Теорема 3.10.** Финальная топология существует и единственна.

**Доказательство.**  $U \subset Y$  открыто, если  $\forall i \ f_i^{-1}(U)$  открыто в  $X_i$  (другие множества все равно не можем назвать открытыми). Такие  $U$  образуют топологию:

- $\emptyset$  и  $Y$  – открытые
- $U_1, \dots, U_k$  – открытые, значит  $U_1 \cap \dots \cap U_k$  открыто?

$$\forall i \ f_i^{-1}(U_1 \cap \dots \cap U_k) = f_i^{-1}(U_1) \cap \dots \cap f_i^{-1}(U_k)$$

каждое  $f_i^{-1}(U_k)$  открыто в  $X_i$ , их пересечение тоже открыто в  $X_i$

•

$$f_i^{-1} \left( \bigcup_{j \in J} U_j \right) = \bigcup_{j \in J} f_i^{-1}(U_j)$$

открыто в  $X$  как объединение открытых.

■

**Пример 3.10.**  $(X_1, \Omega_1), (X_2, \Omega_2)$  – непересекающиеся топологические пространства.  $Y = X_1 \sqcup X_2$ . Хотим ввести топологию на  $Y$ . Введем финальную топологию:

$$\begin{aligned} X_1 &\xrightarrow{i_1} X_1 \cup X_2 \xleftarrow{i_2} X_2 \\ U &\subset X_1 \cup X_2 \\ U_1 &= U \cap X_1 \quad U_2 = U \cap X_2 \\ U_1 &= i_1^{-1}(U) \quad U_2 = i_2^{-1}(U) \end{aligned}$$

$U_1$  и  $U_2$  открыты  $\Leftrightarrow U$  открыто. Аналогично вводим топологию на  $\bigsqcup X_i$ ,  $U$  называем открытым, если  $U \cap X_i$  открыто в  $X_i \forall i$ .

**Замечание.**  $X_1 = (0, 1), X_2 = [1, 2)$ . Топология на  $X_1 \sqcup X_2$  не совпадает с топологией на  $(0, 2)$ !

$U_1 = \emptyset, U_2 = [1, 1.5]$  открыты в  $X_1$  и  $X_2$  соответственно.  $[1, 1.5)$  открыто в  $X_1 \sqcup X_2$ .

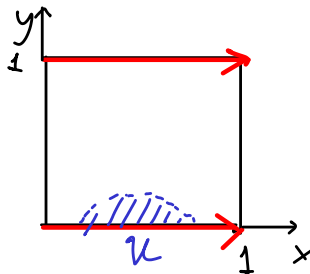
Или  $\forall X = \bigcup_{x_i \in X} \{x_i\}$ . На каждом  $\{x_i\}$  дискретная топология, тогда  $\bigsqcup \{x_i\}$  имеет дискретную топологию.

**Пример 3.11.**  $(X, \Omega)$  – топологическое пространство,  $\sim$  – отношения эквивалентности на  $X$ . Пусть  $\exists p : X \rightarrow X/\sim$ . На  $X/\sim$  естественным образом вводится финальная топология.  $U \subset X/\sim$  открыто  $\Leftrightarrow p^{-1}(U)$  открыто в  $X$ .

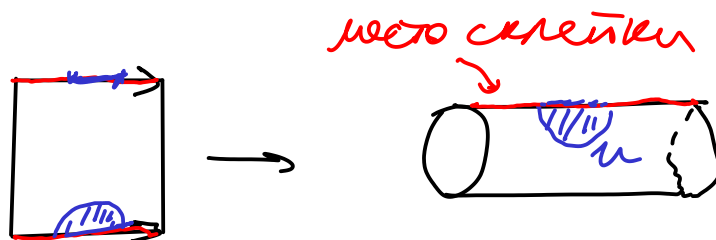
### Топология фактор-множества

$(X, \Omega)$  – топологическое пространство,  $\sim$  – отношение эквивалентности на  $X$ .  $p : X \rightarrow X/\sim$ . На  $X/\sim$  вводится финальная топология.  $\tilde{U} \subset X/\sim$  называется открытым, если  $p^{-1}(\tilde{U})$  открыто в  $X$ .

**Пример 3.12.** Склеивание. Хотим отождествлять некоторые пары точек.

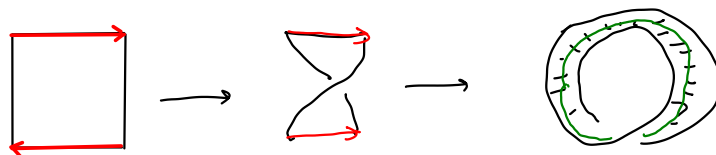


Склеим горизонтальные стороны квадрата как нарисовано.  $(x, 0) \sim (x, 1)$ , а остальные эквиваленты только себе.



$U$  открыто в квадрате,  $U$  не открыто в цилиндре, т.к.  $p^{-1}(U)$  не открыто.

Лента Мёбиуса:



Свойства ленты Мёбиуса:

- только одна сторона
- только один край
- средняя линия не делит на части
- на ленте Мёбиуса можно нарисовать полный граф на шести вершинах без пересечения ребер (упражнение) [На плоскости только  $K_4$ ]
- на ленте Мёбиуса любая карта красится в 6 цветов (довольно просто) [Для плоскости 4 цвета, очень сложно]

**Теорема 3.11 (Жордана).** Замкнутая непересекающаяся кривая на плоскости делит плоскость ровно на две компоненты связности. Ровно одна из них ограничена.

**Теорема 3.12 (Эйлера).** Для плоскости:

$$\begin{aligned} (\text{количество вершин}) + (\text{количество граней}) = \\ = (\text{количество ребер}) + 2 \end{aligned}$$

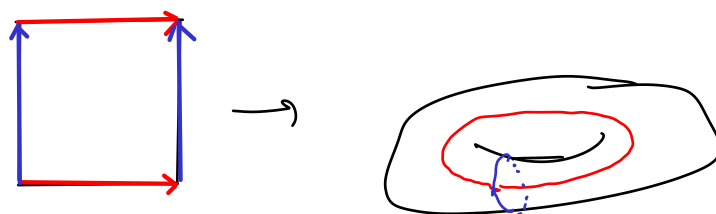
(для связного графа с непересекающимися ребрами)

Для ленты Мёбиуса:

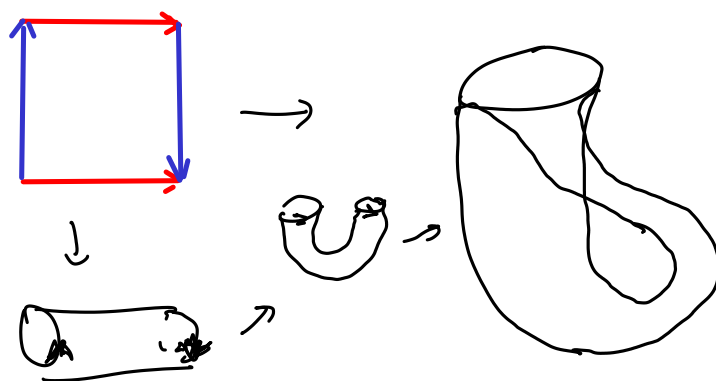
$$B + \Gamma = P + \chi$$

где  $\chi = 1$ , если есть цикл, опоясывающий ленту, или 2.

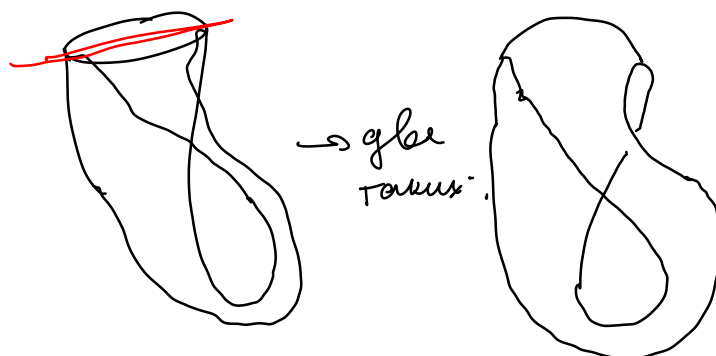
Тор:



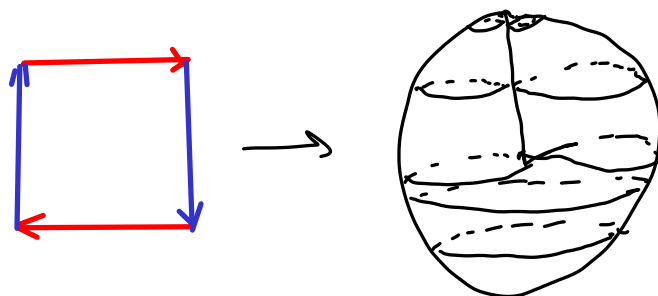
Бутылка Клейна:



Бутылка Клейна – это 2 склеенные ленты Мёбиуса:

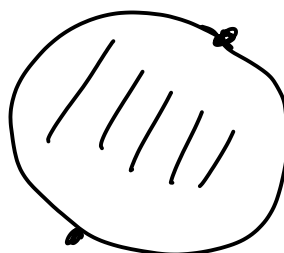


### 1. Проективная плоскость

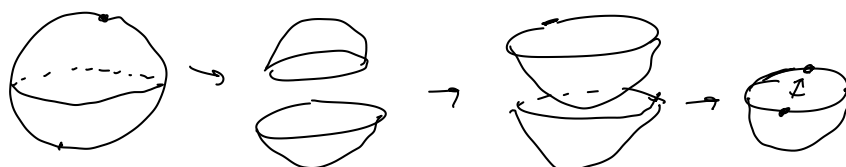


Другие интерпретации проективной плоскости ( $\mathbb{R}P^2$ ):

### 2. $x \sim -x$ ( $x$ – крайняя точка круга)



### 3. $S^2/x \sim -x$



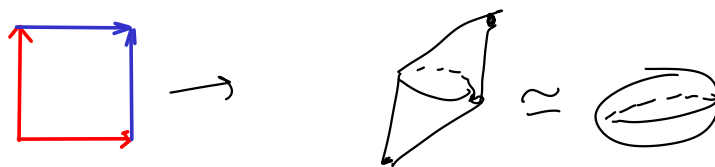
### 4. $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} / (x, y, z) \sim (\lambda x; \lambda y; \lambda z)$



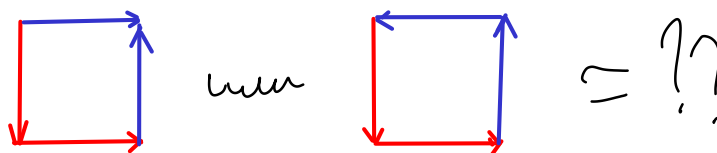
5. Множество прямых в  $\mathbb{R}^3$ , проходящих через  $(0, 0, 0)$ . Метрика - угол между прямыми
6.  $\{[x : y : z] : x, y, z \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 + z^2 \neq 0\}$  – однородные координаты:  $[x : y : z] = [\lambda x : \lambda y : \lambda z]$ .  $Ax + By + Cz = 0$  – уравнение любой прямой на проективной плоскости
7.  $\mathbb{R}P^2 = \mathbb{R}^2 \cup \mathbb{R}^1 \cup \mathbb{R}^0$



Сфера:



Упражнение: что будет, если склеить по-другому?

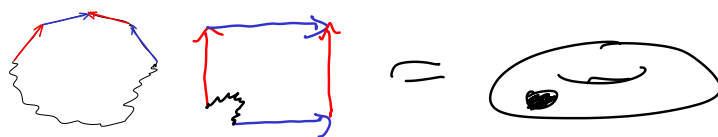


Еще: Если ленту повернуть на 2 полуоборота и склеить, то получится лента, гомеоморфная обычной. (в  $\mathbb{R}^2$  не очевидно, в  $\mathbb{R}^4$  переводится – упражнение)

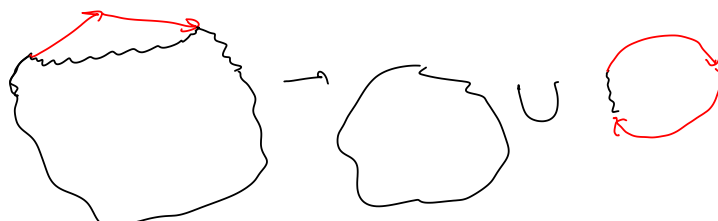


Поверхности:

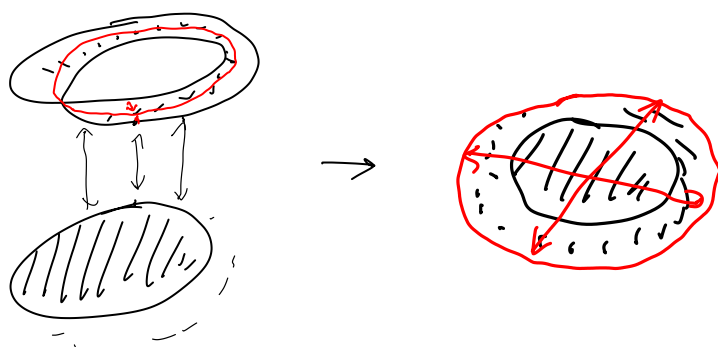
Поверхность можно задать, если есть многоугольник. Приклеивание ручки (тора):



Приклеивание пленки (ленты Мёбиуса):



Почему проективная плоскость с дыркой это лента Мёбиуса? Край ленты Мёбиуса – окружность.

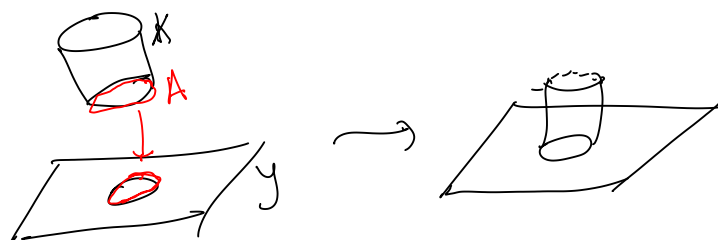


**Теорема 3.13.** (почти) Любая двумерная поверхность – либо сфера с  $k$  ручками, либо проективная плоскость с  $k$  ручками, либо бутылка Клейна с  $k$  ручками.

Проективная плоскость – сфера с пленкой, бутылка Клейна – сфера с 2 пленками.

**Пример 3.13.** Приклеивание.  $X, Y$  – топологические пространства.  $A \subset X, f : A \rightarrow Y$  – непрерывное отображение.

Приклеивание:  $X \sqcup_f Y = X \sqcup Y / a \sim f(a)$ .



---

# Глава 4

## Связность

---

### 4.1. Связность

#### Связность

**Определение 4.1.**  $(X, \Omega)$  – топологическое пространство. Если существуют  $U_1, U_2 \subset \Omega$ :  $U_1 \cup U_2 = X$ ;  $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ ;  $U_1, U_2 \neq \emptyset$ , тогда  $X$  называется несвязным. Иначе  $X$  называется связным.

Переформулировки:

1.  $X$  несвязно  $\Leftrightarrow U_1 = X \setminus U_2$ ,  $U_1 \neq \emptyset$  и  $U_1 \neq X$ .  $U_1$  открытое и  $U_1$  замкнутое.  $X$  несвязно  $\Leftrightarrow \exists U \neq \emptyset$ ;  $U \neq X$ ;  $U$  открыто и замкнуто одновременно.
2.  $X$  связно  $\Leftrightarrow \forall U_1, U_2 \in \Omega$ , если  $U_1 \cup U_2 = X$  и  $U_1 \cap U_2 = \emptyset \Rightarrow U_1 = \emptyset$  или  $U_2 = \emptyset$

**Определение 4.2.**  $(X, \Omega)$  – топологическое пространство.  $A \subset X$  называется связным, если  $A$  связно как топологическое пространство с индуцированной топологией.

Переформулировка:  $A$  связно  $\Leftrightarrow \forall U_1, U_2 \in \Omega_X$ , если  $(U_1 \cap A) \cup (U_2 \cap A) = A$  (то есть  $U_1 \cup U_2 \supset A$ ),  $(U_1 \cap A) \cap (U_2 \cap A) = \emptyset$  (т.е.  $U_1 \cap U_2 \cap A = \emptyset$ ), то есть или  $U_1 \cap A = \emptyset$ , или  $U_2 \cap A = \emptyset$

Еще раз:  $A$  связно  $\Leftrightarrow \forall U_1, U_2 \in \Omega_X$  если  $U_1 \cup U_2 \supset A$  и  $U_1 \cap U_2 \cap A = \emptyset$ , то или  $U_1 \cap A = \emptyset$ , или  $U_2 \cap A = \emptyset$

**Пример 4.1.** Антидискретное пространство связно, т.к. любое подмножество связно.

**Пример 4.2.** Дискретное пространство. Если в дискретном пространстве больше 1 точки, то оно несвязно.

$$U_1 := \{x_0\} \quad U_2 = X \setminus U_1$$

Любое подмножество дискретного пространства, в котором больше 1 точки, несвязно

**Пример 4.3.** Топология Зариского (замкнутые = конечные). Конечные подмножества (более чем из 1 точки) несвязны. Бесконечные подмножества связны.

Если  $A$  – конечное подмножество, тогда в  $A$  топология такая: замкнутое = конечное = любое, значит в  $A$  дискретная топология. Если  $A$  – бесконечное и  $U$  открыто и замкнуто одновременно ( $U \neq \emptyset, U \neq A$ ), тогда  $U$  – конечное и  $A \setminus U$  – конечное, но так не бывает. Поэтому бесконечные связны, на них реализуется топология Зариского.

**Пример 4.4.** Стрелка на  $\mathbb{R}$ . Открытые – лучи  $(a, +\infty)$ . Стрелка связная. Потому что нет непересекающихся открытых подмножеств. Любое подмножество стрелки связно.

**Пример 4.5.**  $\mathbb{R}$  со стандартной топологией.  $A = [0, 1] \cup [2, 3]$  – несвязно. Пусть  $U_1 = (-\infty, 1.5), U_2 = (1.5, 4)$  – Ок. Или  $V_1 = (-\infty, 2), V_2 = (1, +\infty)$  тоже Ок.

**Теорема 4.1.** Интервал  $(0, 1)$  связан.

**Доказательство.** Пусть  $U_1, U_2$  открыты в  $\mathbb{R}$ ,  $U_1 \cup U_2 \supset (0, 1)$ ,  $U_1 \cap U_2 \cap (0, 1) = \emptyset$ ,  $x_1 \in U_1 \cap (0, 1) \neq \emptyset$  и  $x_2 \in U_2 \cap (0, 1) \neq \emptyset$ . НУО считаем  $x_2 > x_1$ . Рассмотрим  $[x_1; x_2]$

$$x_* := \sup\{x \in [x_1; x_2] \cap U_1\} \Rightarrow x_1 \leq x_* \leq x_2$$

1 случай:  $x_1 < x_* < x_2$  (т.е.  $x_* \neq x_1$ ;  $x_* \neq x_2$ )

Если  $x_* \in U_1 \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : (x_* - \varepsilon; x_* + \varepsilon) \subset U_1$ .  $(x_* - \varepsilon; x_* + \varepsilon) \subset [x_1, x_2] \Rightarrow x_* + \varepsilon/2 \in U_1$  и  $x_* + \varepsilon/2 \in [x_1; x_2] \Rightarrow x_*$  не sup.

Если  $x_* \in U_2 \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : (x_* - \varepsilon; x_* + \varepsilon) \subset U_2$ .  $(x_* - \varepsilon; x_* + \varepsilon) \subset [x_1, x_2] \Rightarrow x_*$  не является точной верхней гранью  $U_1 \cap [x_1, x_2]$ , т.к.  $x_* - \varepsilon$  тоже верхняя грань. Получили противоречие.

2 случай:  $x_* = x_1 \in U_1$

Если  $U_1$  открыто, то  $\exists \varepsilon > 0 : [x_1; x_1 + \varepsilon) \subset U_1$ , далее случай 1.

3 случай:  $x_* = x_2 \in U_2$  (упражнение) ■

**Теорема 4.2.**  $(X, \Omega)$  – топологическое пространство.  $A \subset X$ ,  $A$  связно.  $A \subset B \subset \text{Cl } A \Rightarrow B$  связно.

**Доказательство.** Допустим, что  $B$  несвязно, тогда существуют  $U_1, U_2$  открытые в  $X$ :  $U_1 \cup U_2 \supset B$ ,  $U_1 \cap U_2 \cap B = \emptyset$ ,  $U_1 \cap B \neq \emptyset$  и  $U_2 \cap B \neq \emptyset$ .

$U_1 \cup U_2 \supset A$ ,  $U_1 \cap U_2 \cap A = \emptyset$ , но  $A$  связно, тогда НУО считаем  $U_1 \cap A = \emptyset$

$B \subset \text{Cl } A$ .  $F := \text{Cl } A \cap (X \setminus U_1)$  замкнутое.  $F \supset A$  и  $F \subset \text{Cl } A \Rightarrow F = \text{Cl } A \Rightarrow X \setminus U_1 = \emptyset$ , т.е.  $U_1 \cap \text{Cl } A = \emptyset$  и  $U_1 \cap B \neq \emptyset$  – противоречие. ■

**Следствие 4.2.1.**  $\text{Cl } A$  связно, если  $A$  связно.

**Замечание.**  $A$  связно,  $\text{Int } A$  не обязательно связна!

**Теорема 4.3.**  $(X, \Omega)$  – топологическое пространство.  $A_1, A_2$  связные и  $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset \Rightarrow A_1 \cup A_2$  связное.

**Доказательство.** Допустим  $A_1 \cup A_2$  несвязно. Тогда существуют  $U_1, U_2 : U_1 \cup U_2 \supset A_1 \cup A_2$ ,  $U_1 \cap U_2 \cap (A_1 \cup A_2) = \emptyset$ ,  $U_1 \cap (A_1 \cup A_2) \neq \emptyset$ ,  $U_2 \cap (A_1 \cup A_2) \neq \emptyset$ .

Тогда с помощью  $U_1$  и  $U_2$  можно разбить  $A_1$ :  $U_1 \cup U_2 \supset A_1$ ,  $U_1 \cap U_2 \cap A_1 = \emptyset$ , но  $A_1$  связно. НУО  $U_1 \cap A_1 = \emptyset$ . Пусть  $x_0 \in A_1 \cap A_2$ , тогда  $x_0 \in U_2$ .

Аналогично с  $A_2$ :  $U_1 \cup U_2 \supset A_2$ ,  $U_1 \cap U_2 \cap A_2 = \emptyset$ , но  $A_2$  связно. тогда

- или  $U_2 \cap A_2 = \emptyset$ , но  $x_0 \in A_2 \cap U_2$  – так не бывает
- или  $U_1 \cap A_2 = \emptyset$ , но  $U_1 \cap A_1 = \emptyset \Rightarrow U_1 \cap (A_1 \cup A_2) = \emptyset$  – противоречие. ■

**Теорема 4.4.**  $f : X \rightarrow Y$  непрерывно.  $A \subset X$ .  $A$  связно, значит  $f(A)$  связно.

**Доказательство.** Допустим  $f(A)$  несвязно  $\Rightarrow \exists U_1, U_2$  – открытые в  $Y : U_1 \cup U_2 \supset f(A)$ ,  $U_1 \cap U_2 \cap f(A) = \emptyset$ ,  $U_1 \cap f(A) \neq \emptyset$ ,  $U_2 \cap f(A) \neq \emptyset$ .

Заметим, что  $U_1, U_2 \subset Y$ .  $V_1 := f^{-1}(U_1)$ ,  $V_2 := f^{-1}(U_2)$  – открыты в  $X$ . Тогда  $V_1 \cup V_2 \supset A$ ,  $V_1 \cap V_2 \cap A = \emptyset$ .  $V_1 \cap A \neq \emptyset$  и  $V_2 \cap A \neq \emptyset$  получается, что  $A$  несвязное – противоречие. ■

**Следствие 4.4.1.** Если  $X$  связно, то  $X/\sim$  связно.

**Следствие 4.4.2.** Связность – топологическое свойство, т.е. сохраняется при гомеоморфизме.

**Следствие 4.4.3.**  $\mathbb{R} \not\simeq \mathbb{R}^2$ , т.к.  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y)\}$  связна, а  $\mathbb{R} \setminus \{a\}$  несвязна.

**Следствие 4.4.4.**  $\mathbb{R}$  связна, т.к.  $\mathbb{R} \simeq (0, 1)$

**Лемма 4.5.**  $X$  связно  $\Leftrightarrow \forall f : X \rightarrow \{0, 1\}$ ;  $f$  непрерывно, тогда  $f = \text{const}$

**Доказательство.** Если  $X$  связан, то  $f(X)$  связно, то  $f(x) = \{0\}$  или  $f(x) = \{1\}$ .

В обратную сторону: допустим  $X$  несвязно. Тогда  $X = U_1 \cup U_2$ ,  $U_1, U_2$  – открытые.  $U_1, U_2 \neq \emptyset$  и  $U_1 \cap U_2 = \emptyset \Rightarrow f(U_1) = 0$ ,  $f(U_2) = 1$  отсюда  $f$  – непрерывно и  $f \neq \text{const}$ . ■

**Теорема 4.6.**  $\{X_i\}_{i \in I} \forall X_i$  связно  $\Leftrightarrow \prod_{i \in I} X_i$  связно.

**Теорема 4.7.**  $X, Y$  связны  $\Leftrightarrow X \times Y$  связно.

**Доказательство.** В обратную сторону:  $p_X : X \times Y \rightarrow X$  – непрерывно, если  $X \times Y$  связно, то  $p_X(X \times Y) = X$  связно по теореме 4.4.

Прямое доказательство: Допустим, что  $X, Y$  связны, но  $X \times Y$  несвязно, тогда  $\exists f : X \times Y \rightarrow \{0, 1\}$  непрерывно и сюръективно.  $f(x_0, y_0) = 0, f(x_1, y_1) = 1$ . Тогда чему равняется  $f(x_1, y_0)$  пусть оно НУО равно 0. Рассмотрим  $f|_{\{x_1\} \times Y}$ . Пусть  $g(y) := f(x_1, y)$ ,  $g : Y \rightarrow \{0, 1\}$ .  $g$  непрерывно, т.к.  $g = f \circ h$ , тогда  $h(x, y) = (x_1, y)$  – проекция.

$$g(y_0) = f(x_1, y_0) = 0$$

$$g(y_1) = f(x_1, y_1) = 1$$

$Y$  – связно. Противоречие с леммой, т.к.  $g$  непрерывно, но  $f \neq \text{const}$ . ■

**Следствие 4.7.1.**  $X_1, \dots, X_n$  связны  $\Leftrightarrow X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$  связно.

**Следствие 4.7.2.**  $\mathbb{R}^n$  связно. Полуплоскость  $\simeq (0, +\infty) \times \mathbb{R}$  связно

## 4.2. Компоненты связности

**Определение 4.3.**  $(X, \Omega)$  – топологическое пространство.  $K$  является компонентой связности  $X$ , если  $K$  связно и  $\forall K' \supsetneq K, K' \neq K$  несвязно. (т.е.  $K$  – максимальное связное подмножество  $X$ )

**Теорема 4.8.** Свойства компонент связности:

1. Компоненты связности совпадают или не пересекаются (отношение эквивалентности)
2. Компоненты связности замкнуты
3. Любое связное подмножество лежит в компоненте связности
4.  $\forall x, y \in X$  лежат в одной компоненте связности тогда и только тогда, когда  $\exists$  связное  $A : x, y \in A$

- Доказательство.**
1.  $K_1 \neq K_2$  и  $K_1 \cap K_2 \neq \emptyset$ , то по теореме 4.3  $K_1 \cup K_2$  связно, значит  $K_1$  и  $K_2$  не компоненты
  2.  $\text{Cl } K$  связно, значит  $K = \text{Cl } K$
  3. Рассмотрим максимальное связное множество содержащее  $A$ . Это компонента связности содержащая  $A$
  4. прямо:  $x, y \in K$ , тогда  $A = K$ , обратно: пункт 3



**Замечание.** Компонента связности не обязана быть открытой

**Пример 4.6.** Компоненты связности  $\mathbb{Q}$  – отдельные точки.

**Замечание.** Если есть конечное количество компонент связности, то они открыты.

$K_1, \dots, K_n$  – компоненты.  $K_1$  замкнуто, значит  $U_1 = K_2 \cup K_3 \cup \dots \cup K_n$  открыто. Аналогично  $U_i = X \setminus K_i$  открыто.  $K_1 = U_2 \cap U_3 \cap \dots \cap U_n$  открыто.

**Теорема 4.9.**  $(X, \Omega)$  – топологическое пространство.  $\{K_i\}$  – компоненты связности. Эквивалентные определения:

1.  $K_i$  открыты
2.  $X = \bigsqcup_i K_i$  (как топологическое пространство) На  $K_i$  задана топология. На  $X$  есть два топологических пространства: исходная и топология объединения  $\bigsqcup_i K_i$
3.  $\forall x_0 \in X \exists$  связная  $U_{x_0}$  – открытая окрестность

**Доказательство.** (1)  $\rightarrow$  (3)  $K_i$  – связная окрестность  
 (3)  $\rightarrow$  (1)  $K_i = \bigcup_{x_0 \in K_i} U_{x_0}$  открыто ( $U_{x_0}$  открытое связное)  
 (2)  $\rightarrow$  (1), (3) упражнение



Упражнение: Есть  $X$ ,  $K_i$  его компоненты. Есть  $Y$ ,  $L_j$  – его компоненты, тогда  $K_i \times L_j$  компоненты связности  $X \times Y$ .



### 4.3. Линейная связность

**Определение 4.4.** Путь в топологическом пространстве  $(X, \Omega)$  – непрерывное отображение:  $f : [0, 1] \rightarrow X$ .  $f(0)$  начало пути,  $f(1)$  конец пути

**Определение 4.5.**  $x_0$  и  $x_1$  соединены путем, если существует путь с началом в  $x_0$  и концом в  $x_1$

**Определение 4.6.**  $X$  называется линейно связным, если любые две точки можно соединить путем.

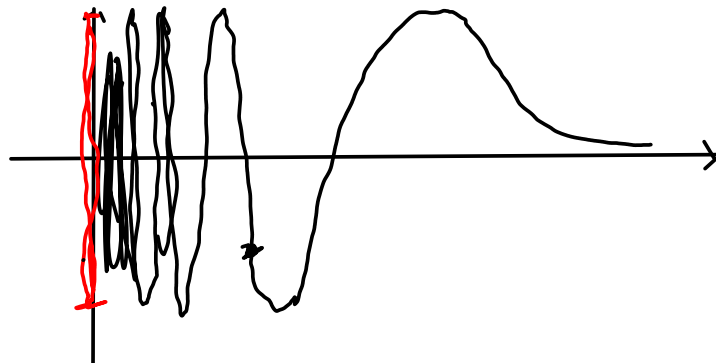
$A \subset X$  линейно связно, если  $A$  линейно связно как топологическое пространство (с индуцированной топологией)  $A$  линейно связно  $\Leftrightarrow \forall x_0, x_1 \in A$  можно соединить путем в  $A$ .

**Теорема 4.10.**  $X$  линейно связно, значит  $X$  связно

**Доказательство.** Допустим  $X$  несвязно, тогда  $x_0, x_1$  в разных компонентах связности. Рассмотрим  $f : [0, 1] \rightarrow X : f(0) = x_0, f(1) = x_1$ . Образ связного связан:  $f([0, 1])$  связное, значит лежит в одной компоненте, но  $f(0)$  и  $f(1)$  в разных. Противоречие. ■

**Замечание.** Обратное неверно.

**Пример 4.7.** Контрпример: график функции  $\sin \frac{1}{x} \cup [-1, 1]$  по  $OY$



Иначе это  $\text{Cl}(\text{график } \sin \frac{1}{x})$  – связное, но не линейно связное.

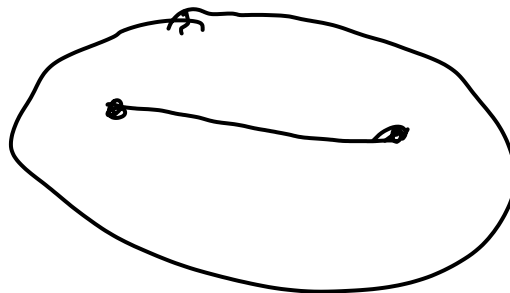
**Замечание.**

1.  $A$  линейно связное,  $Cl A$  не обязательно линейно связное
2. Компоненты линейной связности не обязательно замкнуты
3. Отношения «соединены путем» – отношения эквивалентности:
  - Рефлексивность:  $x_0 \sim x_0 : f(t) = x_0$
  - Симметричность:  $f(t) : f(0) = x_0, f(1) = x_1, g(t) = f(1 - t) : g(0) = x_1, g(1) = x_0$
  - Транзитивность:  $f(t)$  соединяет  $x_0$  и  $x_1$ ,  $g(t)$  соединяет  $x_1$  и  $x_2$ .

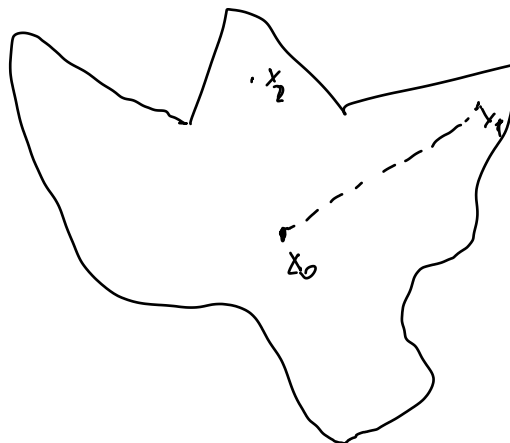
$$h(t) = \begin{cases} f(2t) & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ g(2t - 1) & t \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

**Пример 4.8.** Выпуклые множества.  $A$  называется выпуклым, если для любой точки  $x_0, x_1 \in A : [x_0, x_1] \subset A$ . Такое множество линейно связно.

$$f(t) = (1 - t)x_0 + tx_1$$



**Пример 4.9.** Звездные множества  $\mathbb{R}^n$ .  $A$  называется звездным, если  $\exists x_0 \in A : \forall x_1 \in A [x_0, x_1] \subset A$ .



**Замечание.** Связность и линейная связность – топологические свойства.

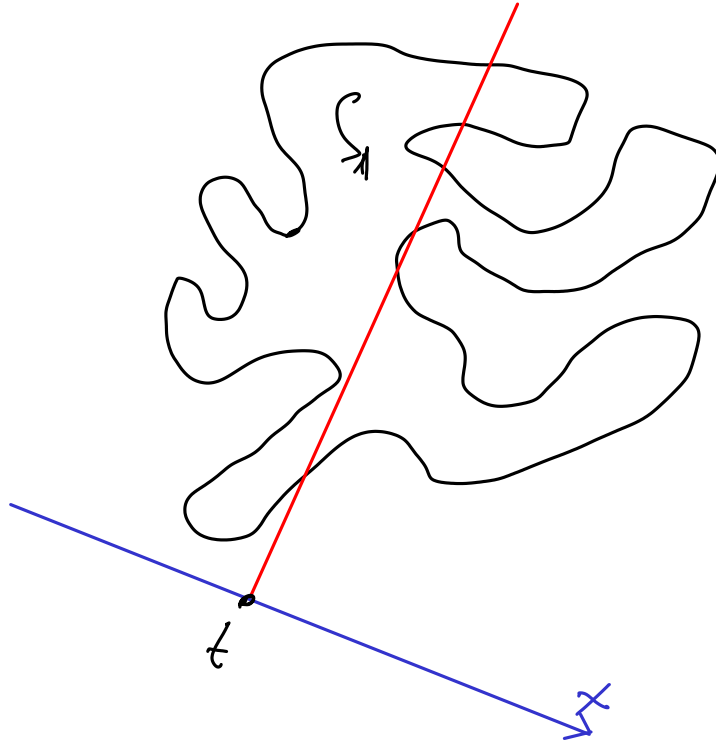
**Теорема 4.11** (Вейерштрасса о промежуточном значении).  $X$  – связное пространство,  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывная функция.  $f(x_0) = a$ ,  $f(x_1) = b$ . Пусть  $a \leq c \leq b \implies \exists x_* \in X : f(x_*) = c$

**Доказательство.** Допустим противное:  $f^{-1}(c) = \emptyset$ . Пусть  $U_1 = (-\infty, c)$ ,  $U_2 = (c, +\infty)$ . Тогда  $f^{-1}(U_1)$  и  $f^{-1}(U_2)$  – открытые непесекающиеся подмножества.  $f^{-1}(U_1) \cup f^{-1}(U_2) = X$ .  $x_0 \in f^{-1}(U_1)$  и  $x_1 \in f^{-1}(U_2)$ , значит  $X$  несвязно. ■

**Пример 4.10.** Блин – открытое связное ограниченное подмножество  $\mathbb{R}^2$ . Его можно разрезать прямой на 2 равновеликие части.

$$f(t) = S_1 \quad f(-\infty) = 0 \quad f(+\infty) = S \implies \exists t : f(t) = S/2$$

(надо доказать непрерывность, например,  $f$ ).



---

## Глава 5

# Компактность

---

### 5.1. Компактность

**Определение 5.1.**  $(X, \Omega)$  – топологическое пространство,

$$\{U_i\}_{i \in I} \subset \Omega : \bigcup_i U_i = X.$$

Такое  $\{U_i\}_{i \in I}$  – покрытие  $X$ . (точнее открытое покрытие)  
 $\{V_j\}_{j \in J}$  называется подпокрытием  $\{U_i\}_{i \in I}$ , если  $\forall j \exists i : V_j = U_i$  и  $\{V_j\}$  – покрытие.

По умолчанию: покрытие = открытое покрытие.

**Определение 5.2.**  $X$  называется компактным, если  $\forall \{U_i\}_{i \in I}$  – покрытия  $X$  можно выбрать  $U_{i_1}, \dots, U_{i_n}$  конечное подпокрытие.

В старых учебниках это называется бикompактностью.

**Определение 5.3.**  $A \subset X$  компактно, если  $A$  компактно в индуцированной топологии или  $\forall \{U_i\}_{i \in I} \subset \Omega : \bigcup U_i \supset A \exists U_{i_1}, \dots, U_{i_n} : \bigcup_{k=1}^n U_{i_k} \supset A$

**Пример 5.1.**  $X$  – антидискретное пространство, значит  $X$  компактно.

**Пример 5.2.**  $X$  – конечное, тогда  $X$  компактно

$X = \{x_1, \dots, x_n\}$  и  $\{U_i\}_{i \in I}$  – некоторое покрытие. Различных  $U_i$  не более  $2^n$ , поэтому считаем весь набор  $U_i$  конечным.

**Пример 5.3.** Бесконечное дискретное пространство не компактно.

$X = \bigcup_{x_i \in X} \{x_i\}$ ,  $\{x_i\}$  – открыто. Ни одно из подмножеств нельзя выкинуть. Конечного подпокрытия быть не может.

**Пример 5.4.** Топология Зариского компактна.

Пусть  $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ ,  $U_{i_0} = X \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ . Но  $x_1 \in U_{i_1}, x_2 \in U_{i_2}, \dots, x_n \in U_{i_n}$ .  $\{U_{i_k}\}_{k=0}^n$  – покрытие  $X$ . Из этого следует, что  $\forall A \subset X$  компактно.

**Пример 5.5.** Стрелка: топология на  $\mathbb{R}$ , где  $(x; +\infty) + \emptyset + \mathbb{R}$  открытые. Сама по себе не компактна.

$U_i = (-i; +\infty), \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i = \mathbb{R}$ . Но конечного набора, который бы давал  $\mathbb{R}$  не существует.

Какие подмножества стрелки являются компактными?

$A = [0, \infty)$ , такое  $A$  компактно.

$B \subset \mathbb{R}$ ,  $B$  компактно тогда и только тогда, когда  $\inf B \in B$ . Если  $\inf B = x_0$  и  $x_0 \notin B$ , тогда  $U_n = (x_0 + 1/n; +\infty)$ . Тогда  $\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n \supset B$ , но конечное подпокрытие выбрать нельзя.

**Пример 5.6.**  $\mathbb{R}^{(n)}$  со стандартной топологией. Само по себе не компактно (см. стрелку):  $U_i = (-i; +\infty)$

Какие подмножества  $\mathbb{R}^n$  компактны? Читайте далее!

**Теорема 5.1.**  $X$  – компактное пространство.  $A$  – замкнутое подмножество в  $X$ , тогда  $A$  компактно.

**Доказательство.** Пусть  $\{U_i\}_{i \in I}$  покрывает  $A$ .  $\{U_i\} \cup \{X \setminus A\}$  – открытое покрытие  $X$ , значит существует конечное подпокрытие. Уберем из него  $X \setminus A$  (если есть), получим конечное подпокрытие  $A$ . ■

**Теорема 5.2.**  $f : X \rightarrow Y$  непрерывно.  $A \subset X$ .  $A$  компактно, тогда  $f(A)$  компактен.

**Доказательство.** Пусть  $\{U_i\}_{i \in I}$  покрывают  $f(A)$ . Тогда  $\{f^{-1}(U_i)\}$

открытое покрытие  $A$ . Тогда

$$\exists U_{i_1}, \dots, U_{i_n} : \bigcup_{k=1}^n f^{-1}(U_{i_k}) \supset A,$$

значит  $U_{i_1}, \dots, U_{i_n}$  покрывают  $f(A)$  ■

**Следствие 5.2.1.** Компактность – топологическое свойство.

**Теорема 5.3** (Тихонова).  $\prod_{i \in I} X_i$  компактно  $\Leftrightarrow \forall i X_i$  компактно.

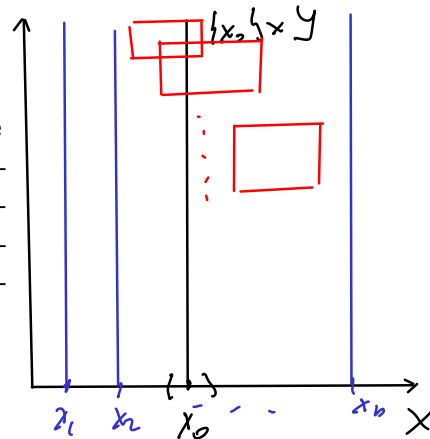
**Доказательство.** Не будет. ■

**Теорема 5.4.**  $X$  и  $Y$  компактны  $\Leftrightarrow X \times Y$  компактно

**Доказательство.** В обратную сторону:  $p : X \times Y \rightarrow X$  – проекция, она непрерывна.  $X \times Y$  компактно, значит по теореме 5.2  $p(X \times Y) = X$  тоже компактно.

Прямо. рассмотрим любое открытое покрытие  $X \times Y$ :

1. Считаем, что это покрытие прямоугольными множествами, т.е.  $\{U_i \times V_i\}_{i \in I}$ ,  $U_i$  открыто в  $X$ ,  $V_i$  открыто в  $Y$ . Достаточно выбрать конечное подмножество из него.



2.  $\forall x_0 \in X$ ,  $\{x_0\} \times Y \simeq Y$  в  $X \times Y$ . Существует минимальное покрытие  $U_1 \times V_1, \dots, U_n \times V_n$ , которое покрывает  $\{x_0\} \times Y$ , значит  $V_1, \dots, V_n$  покрывает  $Y$ .

$W_{x_0} := \bigcap_{i=1}^n U_i$  – открытое в  $X$  подмножество.  $x_0 \in W_{x_0}$ , тогда  $\{W_{x_0}\}_{x_0 \in X}$  – покрытие  $X$ , следовательно существует

$W_{x_1}, \dots, W_{x_k}$  – конечное подпокрытие.

$$W_{x_j} \leftrightarrow \{U_{j_1} \times V_{j_1}, \dots, U_{j_{n_j}} \times V_{j_{n_j}}\}$$

Возьмем все множества, соответствующие  $W_j$ . Это конечный набор. Почему покрытие?  $\forall (x, y) \in X \times Y$ ,  $x \in W_{x_l}$ ,  $(x_l, y) \in U_i \in V_i$  ( $U_i \times V_i$  из нашего набора).  $x \in U_i$  и  $y \in V_i$ ,  $(x, y) \in U_i \times V_i$

■

## 5.2. Компактность и хаусдорфовость

**Аксиома 5.5 (Хаусдорфа).**  $X$  называется хаусдорфовым, если  $\forall x_0 \neq x_1 \in X \exists U_{x_0}, U_{x_1} : U_{x_0} \cap U_{x_1} = \emptyset$

**Пример 5.7.** Любое метрическое пространство хаусдорфово.

$$U_{x_0} = B(x_0, \rho(x_0, x_1)/2)$$

$$U_{x_1} = B(x_1, \rho(x_0, x_1)/2)$$

**Замечание.**  $X$  хаусдорфово,  $A \subset X \implies A$  хаусдорфово.

**Теорема 5.6.**  $X$  – хаусдорфово пространство.  $A \subset X$ ,  $A$  компактно в  $X$ , тогда  $A$  замкнуто.

**Замечание.** Докажем, что  $X \setminus A$  открыто. Для этого возьмем любой  $x_0 \in X \setminus A$ . Найдем  $U_{x_0} \cap A = \emptyset$

$$\bigcup_{x_0} = X \setminus A - \text{открыто}$$

Это базовая схема как доказать замкнутость подмножеств.

**Доказательство.** Рассмотрим  $\forall y \in A \exists U_{x_0 y}$  и  $V_y$  – окрестности:  $x_0 \in U_{x_0 y}$ ,  $y \in V_y$ ,  $U_{x_0 y} \cap V_y = \emptyset$  (по хаусдорфовости).  $\{V_y\}_{y \in A}$  – покрывают  $A$ , тогда  $\exists y_1, \dots, y_n : V_{y_1}, \dots, V_{y_n}$  – покрытие  $A$ , рассмотрим  $\bigcap_{i=1}^n U_{x_0 y_i}$  открытое подмножество, не пересека-

ющеся с  $V_{y_i} \forall i = 1, \dots, n$ , значит  $\bigcap_{i=1}^n U_{x_0 y_i}$  не пересекается с  $A$ . ■

**Следствие 5.6.1.**  $X$  – компактно и хаусдорфово,  $A \subset X$ , тогда  $A$  компактно  $\Leftrightarrow A$  замкнуто.

**Теорема 5.7.**  $f : X \rightarrow Y$  непрерывно.  $X$  компактно,  $Y$  хаусдорфово.  $A \subset X$ ,  $A$  замкнутое, значит  $f(A)$  замкнут.

**Доказательство.**  $A$  замкнуто, тогда по теореме 5.1  $A$  компактно, значит по теореме 5.2  $f(A)$  компактен, тогда по теореме 5.6  $f(A)$  замкнут. ■

**Следствие 5.7.1.**  $f : X \rightarrow Y$  непрерывное и биекция.  $X$  компактно.  $Y$  хаусдорфово.  $A$  открытое, тогда  $f(A)$  открыт.

**Доказательство.**  $A$  открытое, значит  $X \setminus A$  замкнутое, значит  $f(X \setminus A)$  замкнут, значит  $f(A)$  открыт.

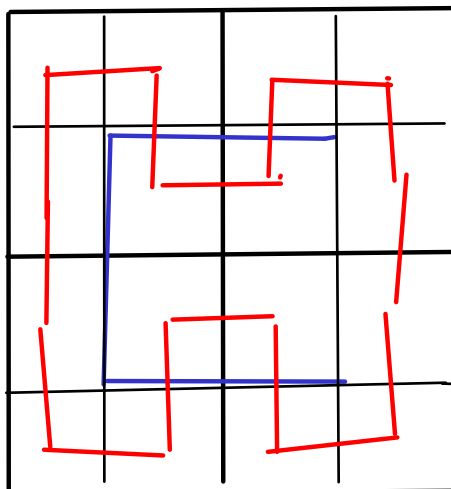
$$f(X \setminus A) = Y \setminus f(A), \text{ если } f \text{ биективно}$$

■

**Следствие 5.7.2.**  $f : X \rightarrow Y$  непрерывная биекция,  $X$  компактно,  $Y$  хаусдорфово, тогда  $f$  гомеоморфизм.

Кривые Пеано:  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1] \times [0, 1]$  – непрерывное и сюръективное отображение.

В пределе непрерывная кривая, которая заметает весь квадрат. Кривая Пеано не может быть биективной!





### 5.3. Компактность в $\mathbb{R}^n$

**Лемма 5.8** (Лебега).  $I = [0, 1]$ ,  $\{U_i\}$  – открытое покрытие  $I$ , тогда существует  $\varepsilon > 0$  (число Лебега, зависит от покрытия):  $\forall x_0 \in I (x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon) \subset U_i$  для некоторого  $i$ .

**Доказательство.** Допустим такого  $\varepsilon$  не существует.  $\varepsilon_i := 1/2^i$  (или  $\varepsilon_i \rightarrow 0$ ).

$\exists x_i : (x_i - \varepsilon_i; x_i + \varepsilon_i)$  не попадает ни в одно  $U_i$ .  $\{x_i\}_{i=1}^\infty$  – последовательность точек  $I$ .  $\exists x_{i_j} \rightarrow x_0$  в  $[0, 1]$ .  $x_0 \in U_i$ ,  $U_i$  открыто, значит  $\exists \varepsilon > 0 : (x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon) \subset U_i$

$\exists N_1$  : если  $j > N_1$ , то  $|x_0 - x_j| < \varepsilon/2$ . Так же  $\exists N_2 : \varepsilon_{N_2} < \varepsilon/2$ . Выберем  $N := \max\{N_1, N_2\}$ , тогда

$$(x_{i_j} - \varepsilon_{i_j}; x_{i_j} + \varepsilon_{i_j}) \subset (x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon) \subset U_i$$

Противоречие, значит число Лебега существует. ■

**Теорема 5.9.**  $[0, 1]$  компактен

**Доказательство.**  $\{U_i\}$  покрывает  $I = [0, 1]$ , тогда по теореме 5.8  $\exists \varepsilon$  – число Лебега.  $x_0 = 0, x_k = k\varepsilon \implies \exists N : x_N > 1$ . Тогда  $(x_{k-1}; x_{k+1}) = (x_k - \varepsilon; x_k + \varepsilon) \subset U_{i_k}$ . Рассмотрим  $U_{i_1}, U_{i_2}, \dots, U_{i_{N-1}}$  – покрытие  $[0; 1]$ . ■

**Замечание.**  $(0, 1)$  не компактно.  $U_k = (1/k, 1)$ . Нельзя выбрать конечное подпокрытие

**Следствие 5.9.1.**  $[a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$  компактно в  $\mathbb{R}^n$

**Определение 5.4.**  $A \subset \mathbb{R}^n$ ,  $A$  называется ограниченным, если  $A \subset B(0, N)$ , такое  $N$  существует. Или  $A \subset [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$

**Теорема 5.10** (Компактность подмножества в  $\mathbb{R}^n$ ).  $A \subset \mathbb{R}^n$ ,  $A$  компактно  $\Leftrightarrow A$  – замкнуто и ограничено.

**Доказательство.** Прямое доказательство  $A$  замкнуто по 5.6,  $A$  ограничено, иначе  $\{B(0, n)\}_{n=1}^{\infty}$  – покрытие, из которого нельзя выбрать конечное.

Обратное доказательство:  $A$  ограничено, значит  $A \subset X = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ ,  $X$  компактно по 5.9.1,  $A$  замкнуто в  $X$ , значит по 5.1  $A$  компактно. ■

**Теорема 5.11.**  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  – непрерывная функция,  $X$  компактен, тогда  $\exists x_0 : f(x_0) \geq f(x) \forall x \in X$ . (т.е. непрерывная функция на компакте достигает своего максимума)

**Доказательство.**  $f(X)$  компактна в  $\mathbb{R}$ , значит  $f(X)$  замкнута и ограничена. Ограничена, значит  $\sup f(X) < +\infty$ . Замкнута, значит  $\sup f(X) \in f(X) \Rightarrow \sup$  достигается. ■

**Пример 5.8.** В прошлом семестре: брали квадратичную форму

$$F(x, y, z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz$$

Поворотом можно избавиться от двойных слагаемых.

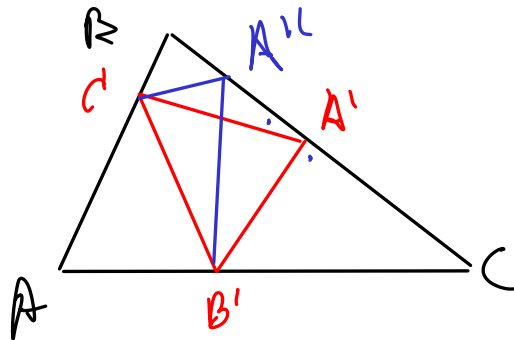
Для этого мы проецировали на сферу

$$F(x, y, z)|_{S^2} \quad S^2 := \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

$(x_*, y_*, z_*)$  – максимум  $F$  на  $S^2$

$F$  – непрерывна,  $S^2$  – компактна, значит существует максимум.

**Пример 5.9 (Задача Фаньяно).**  $ABC$  – остроугольный треугольник. Хотим выбрать  $A' \in [BC], B' \in [AC], C' \in [AB]$ , так чтобы  $P_{A'B'C'} \rightarrow \min$ . Ответ: это основания высот.



Если  $A'B'C'$  – искомый, тогда  $\angle C'A'B = \angle B'A'C$ . Если нет, то  $A''$  :  $\angle C'A''B = \angle B'A''C$ .

$$C'A'' + A''B' < C'A' + A'B'$$

(это доказано в оптическом свойстве эллипса.)

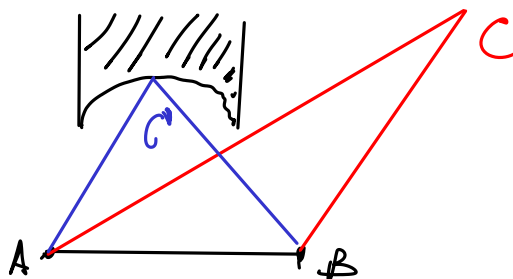
Значит оптимальная конфигурация: с равными соответствующими углами. Такое бывает, если  $A', B', C'$  – основания высот. (почему? – упражнение)

**Принцип.** Из множества конфигураций  $M$  есть лишь одна не улучшаемая, значит именно она оптимальная.

Почему этот принцип вообще работает? Он работает не всегда, он работает только если  $M$  компактна.

В задаче Фаньяно  $M = \{(A'; B'; C')\}$ ,  $A' \in [BC]$  и т.д, значит  $M \simeq [a_1, a_2] \times [b_1, b_2] \times [c_1, c_2] \Rightarrow M$  компактно.

**Пример 5.10.** Пример, в котором принцип не работает. Найти  $C : S_{ABC} \rightarrow \max$ , если есть область, которая не должна пересекать  $ABC$  и куда нельзя поставить  $C$ . Очевидно, что такой  $C$  нет.



Любая конфигурация, кроме  $C'$  улучшаема.

**Пример 5.11** (Задача Томсона). Расположить  $n$  единичных одноименных зарядов на  $S^2$  с минимальной потенциальной энергией.

$$E = \sum_{i \neq j} \frac{1}{\rho^2(a_i, a_j)} \rightarrow \min$$

Задача полностью не решена. Но мы знаем, что  $\min$  достигается.  $E : M \rightarrow \mathbb{R}$ .  $M \simeq S^2 \times S^2 \times \dots \times S^2$  ( $n$  раз). Но есть проблема с тем, что знаменатель может обратиться в 0. Исправим это:

$$E'(a_1, a_2, \dots, a_n) = \begin{cases} E(a_1, \dots, a_n) \\ \sum_{\rho(a_i, a_j) > \varepsilon} \frac{1}{\rho^2(a_i, a_j)} + \sum_{\rho(a_i, a_j) \leq \varepsilon} \frac{1}{\varepsilon^2} \end{cases} \quad \rho(a_i, a_j) > \varepsilon$$

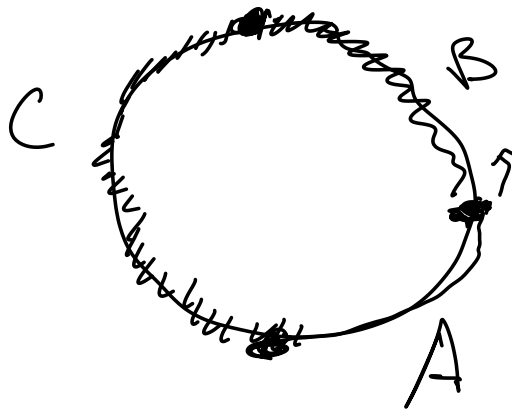
$\varepsilon$  ВЗЯТЬ ТАКОЕ, ЧТОБЫ НЕ МЕШАЛО.

**Пример 5.12.** Есть  $n$  сотрудников, существует  $k$  групп из них, таких, что любые 2 группы пересекаются. Требуется доказать, что сотрудников можно расположить на окружности длиной 1, так чтобы любая группа была растянута по дуге не меньше чем  $\frac{1}{3}$ .

Решение: пусть  $x$  – расстановка сотрудников,  $S(x)$  – минимальная длина дуги, которая покрывает какую-то группу.

Хотим доказать:  $\exists x_* : S(x_*) \geq \frac{1}{3}$ .

Возьмем  $x_*$ , для нее  $S(x_*) = \max S \geq \frac{1}{3}$



## 5.4. Локальная компактность

**Определение 5.5.**  $X$  называется локально компактным, если

$$\forall x_0 \exists U_{x_0} : \text{Cl } U_{x_0} \text{ компактна}$$

**Теорема 5.12** (Компактификация по П.С. Александрову).  $X$  – локально компактное хаусдорфово пространство, тогда

$$\exists \hat{X} = X \cup \{\infty\}$$

$X$  – подпространство  $\hat{X}$  и  $\hat{X}$  – компактно и хаусдорфово.

**Пример 5.13.**

$$\mathbb{R} \cup \{\infty\} \simeq S^1$$

$$\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\} \simeq S^2$$

$$\mathbb{R}^n \cup \{\infty\} \simeq S^n$$

**Доказательство.**  $\hat{X} = X \cup \{\infty\}$ , но какая топология?

Пусть  $U \subset \hat{X}$ . Если  $\infty \notin U$ , то  $U$  открыто в  $\hat{X} \Leftrightarrow U$  открыто в  $X$ .

Если  $\infty \in U \Rightarrow U$  открыто  $\Leftrightarrow X \setminus U$  компактно.

Это топология:  $X \setminus U$  компактно, значит по хаусдорфовости замкнуто.

$$X \setminus \bigcup_{i \in I} U_i = \bigcap_{i \in I} (X \setminus U_i) \subset X \setminus U_{i_0}$$

$$X \setminus \bigcap_{i=1}^n U_i = \bigcup_{i=1}^n (X \setminus U_i) - \text{компактно}$$

Это топология,  $X \subset \hat{X}$  (в смысле топологии) (упражнение)

Почему  $\hat{X}$  компактен?

$\{U_i\}_{i \in I}$  – покрытие  $\hat{X}$ ,  $\infty \in U_{i_0}$ .  $X \setminus U_{i_0}$  – компактно. (т.е. остальные множества покрывают компакт, можно выбрать конечное число)

$\hat{X}$  – хаусдорфово?

$x, y \neq \infty$ , тогда по хаусдорфовости  $X \exists U_x, U_y : U_x \cap U_y = \emptyset$ .

$x, \infty$  как определить?  $\exists U_x : \text{Cl } U_x$  компактна.  $U_\infty := \hat{X} \setminus \text{Cl } U_x$ .  $U_\infty$  открыто в  $\hat{X}$ . ■

**Замечание.** Пересечение компактов не обязательно компакт! Но в хаусдорфовых пространствах пересечение компактов компактно. Потому что в хаусдорфовом пространстве компакт – это замкнутое подмножество некоторого компакта.

**Замечание.** Объединение конечного числа компактов – компакт.

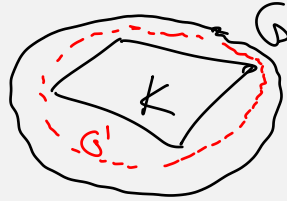
**Пример 5.14.**  $\hat{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ .

$\infty \in U$ .  $U$  открыто  $\Leftrightarrow \mathbb{Q} \setminus U$  компактно.

Докажем, что  $\infty$  и  $0$  не разделяются. Пусть они разделяются, тогда  $U_0$  и  $U_\infty$ ,  $U_0 \supset (-\varepsilon, \varepsilon) \cap \mathbb{Q} \Rightarrow \hat{\mathbb{Q}} \setminus U_\infty$  не компактно.

**Теорема 5.13.**

1.  $X$  локально компактно и хаусдорфово,  $x_0 \in X$ ,  $U_{x_0}$  – открытая окрестность  $x_0$ , тогда  $\exists V_{x_0} : \text{Cl } V_{x_0} \subset U_{x_0}$  и  $\text{Cl } V_{x_0}$  компактно. ( $X$  локально компактно и хаусдорфово,  $U \subset X$  открыто, тогда  $U$  локально компактно и хаусдорфово)
2.  $X$  локально компактно и хаусдорфово,  $K \subset X$  компакт.  $K \subset G$ ,  $G$  открытое, тогда  $\exists$  открытое  $G' : G \supset \text{Cl } G' \supset G' \supset K$



**Доказательство.**

1.  $X$  локально компактно, значит существует  $W_{x_0} : \text{Cl } W_{x_0}$  компактно.  $x_0 \in X \forall y \notin U$ . Существуют непересекающиеся окрестности  $W_{x_0, y}$  и  $W_y$ . Если  $y \in \text{Cl } W_{x_0} \cap (X \setminus U)$ .  $\text{Cl } W_{x_0} \cap (X \setminus U)$  компакт (пересечение замкнутых – замкнуто, оно подмножество  $\text{Cl } W_{x_0}$  – компакт).

$\{W_y\}$  – покрытие  $F \implies \exists$  конечное подпокрытие  $y_1, \dots, y_n : \{W_{y_i}\}_{i=1}^n$  – подпокрытие  $F$ .

$V_{x_0} = \bigcap_{i=1}^n W_{x_0, y_i}$  – открытая окрестность  $x_0$ .

$$\text{Cl } V_{x_0} \subset \bigcap_{i=1}^n \text{Cl } W_{x_0, y_i} \subset U$$

$$\text{Cl } W_{x_0, y_i} \subset X \setminus W_{y_i} \implies \bigcap \text{Cl } W_{x_0, y_i} \subset X \setminus \left( \bigcup_{i=1}^n W_{y_i} \right) \subset U$$

2.  $K \subset U, \forall x \in K \exists V_x : V_x \subset \text{Cl } V_x \subset U$  (по 1 пункту).

$\{V_x\}_{x \in K}$  – покрытие  $K$ , значит существует конечное подпокрытие  $\{V_{x_1}, \dots, V_{x_k}\}$ .

$$G' := \text{Cl} \left( \bigcup_{i=1}^k V_{x_i} \right)$$

■

---

## Глава 6

### Аксиомы счетности

---

#### 6.1. Сепарабельность

**Определение 6.1.**  $(X, \Omega)$  – топологическое пространство. Говорят, что  $X$  обладает второй аксиомой счетности, если у  $X$  есть счетная база.

**Определение 6.2.**  $(X, \Omega)$  – топологическое пространство.  $A \subset X$  называется всюду плотным в  $X$ , если  $\text{Cl } A = X$

**Определение 6.3.**  $X$  называется сепарабельным, если существует счетное всюду плотное множество в  $X$ .

**Теорема 6.1.** Из второй аксиомы счетности следует сепарабельность

**Доказательство.**  $\{U_i\}_{i \in I}^\infty$  – счетная база.  $x_i \in U_i \implies \{x_i\}_{i=1}^\infty$  – счетное всюду плотное. Тогда  $\text{Cl}\{x_i\}_{i=1}^\infty = X$ ?  
Допустим противное:  $y \in \text{Ex}\{x_i\}_{i=1}^\infty$ , значит  $\text{Ex}\{x_i\}_{i=1}^\infty = \bigcup_j U_{i_j} \ni x_{i_j}$ . Внешность множества  $\{x_i\}_{i=1}^\infty$  содержит  $x_{i_j}$  – противоречие. ■

**Замечание.** Вторая аксиома счетности и сепарабельность – топологические свойства.

Здесь и далее в этой главе под словом «счетное» подразумевается «не более чем счетное».

**Пример 6.1.**  $X$  НБЧС, тогда  $X$  сепарабельно.

**Пример 6.2.**  $X$  – антидискретное, тогда вторая аксиома счетности и сепарабельность есть.

**Пример 6.3.**  $X$  – дискретное:

1.  $X$  счетное, тогда есть вторая аксиома счетности: база – одноточечные подмножества
2.  $X$  более чем счетное, нет ни сепарабельности, ни второй аксиомы счетности.  $\text{Cl } A = A$  в дискретной топологии.

**Пример 6.4.** На  $\mathbb{R}^n$  со стандартной топологией, есть вторая аксиома счетности и сепарабельность

Рассмотрим  $\mathfrak{B} = \{B(x, \varepsilon) : x, \varepsilon > 0 \in \mathbb{Q}\}$ . Это счетная база. Возьмем  $y_0 \in B(x_0, \varepsilon)$ , где  $x_0, \varepsilon$  не обязательно рациональные.  $\rho := \rho(x_0, y_0)$ , тогда существует  $z_0$  с рациональными координатами:  $\rho(z_0, y_0) < \frac{\varepsilon - \rho}{2}$ , выберем  $r \in \mathbb{Q}_+$   $\rho(z_0, y_0) < r < \frac{\varepsilon - \rho}{2}$ . Рассмотрим  $B(z_0, r)$  такой что  $y_0$  принадлежит ему.  $B(z_0, r) \subset B(x_0, \varepsilon)$ .

Сепарабельность: множество точек с рациональными координатами – счетное всюду плотное.

**Замечание.** НЕ любое метрическое пространство обладает второй аксиомой счетности или сепарабельностью.

Пусть  $X$  континуальное,  $\rho(x, y) = 1$  если  $x \neq y$ , тогда порождается дискретная топология.

**Пример 6.5.**  $X = \mathbb{R}$  с топологией Зариского (замкнутые, значит конечные).  $X$  сепарабельно (любое бесконечное множество всюду плотно). Второй аксиомы счетности нет.

Предположим, что она есть:  $\{U_i\}_{i \in I}^\infty$  – счетная база.  $U_i = X \setminus \{x_{i_1}, \dots, x_{i_{n_i}}\}$ , тогда  $\bigcup_{i=1}^\infty \{x_{i_1}, \dots, x_{i_{n_i}}\}$  счетно. А  $\mathbb{R}$  несчетно, тогда  $\exists y \in U_i \ \forall i$ .  $U = X \setminus \{y\}$ ,  $y \notin U \neq \bigcup_j U_j \ni y$ , значит счетной базы нет.

**Теорема 6.2 (Линделёфа).** Если на  $X$  есть вторая аксиома счетности, тогда из любого открытого покрытия  $X$  можно выбрать НБЧС подпокрытие.



**Доказательство.**  $X = \bigcup_{i \in I} U_i, \mathfrak{B} = \{B_i\}_{i=1}^{\infty}$  – счетная база.  
 $\forall i U_i = \bigcup_j B_j$   
 $\{U_i\}$  вполне упорядочены (по теореме Цермело так можно). Рассмотрим  $U_{i_1}$ , отметим все  $B_j \subset U_{i_1}$ . Пусть  $x_2 \notin U_{i_1} \Rightarrow \exists U_{i_2} \ni x_2$  тогда  $U_{i_2} = \bigcup_j B_j$ , отметим все такие  $B_j$ . На этом шаге мы отметили как минимум одно новое  $B_j$ .  
 Продолжаем:  $x_3 \notin U_{i_1} \cup U_{i_2} \Rightarrow x_3 \in U_3 = \bigcup_j B_j$ , отметили новое  $B_j$ .  
 Таких шагов нельзя сделать более чем счетное количество. Таких  $U_{i_k}$  НБЧС количество, после которых новую точку, не входящую в их объединение, нельзя выбрать. ■

## 6.2. Секвенциальная компактность

**Определение 6.4.**  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  – последовательность в  $X$ . Говорим, что  $x_0 \in \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  если  $(\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \text{ выполнено } \rho(x_n, x_0) < \varepsilon \text{ или } x_n \in B(x_0, \varepsilon))$   
 $\forall U_{x_0}$  окрестность  $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N x_n \in U_{x_0}$

**Пример 6.6.**  $\mathbb{R}$  с топологией Зариского. Пусть  $x_i \neq x_j \Rightarrow \forall x_0 x_n \rightarrow x_0$

$$\forall U_{x_0} = X \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \exists N : \forall n > N x_n \neq a_n \Rightarrow x_n \in U_{x_0}$$

**Пример 6.7.**  $\mathbb{R}$  с топологией типа Зариского: замкнутые = НБЧС. Если  $x_i \neq x_j$ , то  $\nexists x_0 : x_n \rightarrow x_0$ . Возьмем любой  $x_0$  (считаем, что  $x_0 \neq x_n$ , иначе начнем последовательность с  $x_{n+1}$ )

$$U_{x_0} = \mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2, \dots\} \text{ – открыто}$$

$U_{x_0}$  не содержит ни одного члена последовательности.

**Замечание.** Если  $X$  хаусдорфово, тогда предел не более чем единственный.

**Доказательство.** Допустим  $x_0$  и  $\tilde{x}_0$  – пределы  $x_n$ .

$$U_{x_0} \cap U_{\tilde{x}_0} = \emptyset$$

Тогда с некоторого места: все  $x_n \in U_{x_0}$  и все  $x_n \in U_{\tilde{x}_0}$ . Но это противоречит с хаусдорфовостью. ■

**Определение 6.5.**  $X$  называется секвенциально компактным пространством, если  $\{x_i\}_{i=1}^{\infty} \subset X \exists x_{n_k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} x_0$  (из любой подпоследовательности можно выбрать сходящуюся).

**Определение 6.6.**  $X$  обладает первой аксиомой счетности если  $\forall x_0 \in X$ , существует счетная база окрестностей  $x_0$ , т.е.  $\exists \{B_{x_0,i}\}_{i=1}^{\infty} : x_0 \in B_{x_0,i} \ x_0 \in \forall U$  открытому  $\exists B_i : x_0 \in B_{x_0,i} \subset U \implies \{B_{x_0,i}\}_{i,x_0}$  – база топологии. Это обобщение  $B(x_0, \varepsilon)$ .

**Замечание.**  $X$  – метрическое пространство, тогда  $X$  обладает первой аксиомой счетности.  $B(x_0, \varepsilon)$ , где  $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+$ .

**Пример 6.8.**  $\mathbb{R}$  с топологией Зариского не обладает первой аксиомой счетности.

Допустим: есть счетное  $\{U_{x_0,i}\} \forall x_0$ . Рассмотрим  $U_{x_0,1}, U_{x_0,2}$  и так далее, каждое из них НЕ содержит счетное число точек, в итоге счетный набор точек НЕ содержится в каком-то из этих множеств. Значит  $\exists y \in U_{x_0,i} \forall i$ . Возьмем  $U = \mathbb{R} \setminus \{y\}$  – окрестность  $x_0$ .  $\nexists U_{x_0,i} \subset U$  т.к.  $U \not\ni y$ .

**Замечание.** Из второй аксиомы счетности следует первая аксиома счетности.

Дальнейший план:

1. Компактность + первая аксиома счетности = секвенциальная компактность  
Секвенциальная компактность + вторая аксиома счетности = компактность
2. В метрических пространствах компактность равносильна секвенциальной компактности

**Пример 6.9.** Есть  $\mathbb{R}$  с дискретной топологией.  $\rho(x, y) = 1$ , если  $x \neq y$ .

$\forall U$  – замкнуто и ограничено.  $B(x_0, 2) = X \supset U$ , значит  $U$  – ограничено,  $U$  замкнуто, т.к. любое множество замкнуто в дискретной топологии. Но если  $U$  бесконечное множество, тогда  $U$  не компактно.