

Геометрия и топология

Курс Сольниина А.А.

Осень 2022 г.

Оглавление

Оглавление	i
1 Дифференциальная геометрия кривых	2
1.1 Понятие кривой	2
1.2 Длина кривой	6
1.3 Касательный вектор	8
1.4 Репёр Френé	11
1.5 Соприкасающаяся плоскость	13
1.6 Вычисление кривизны	17

Дифференциальная геометрия

Глава 1

Дифференциальная геометрия кривых

1.1. Понятие кривой

05.09.22

Кривую можно задать множеством способов, например:

- в декартовых координатах: $y = f(x)$
- в полярных координатах: $r = r(\varphi)$
- неявным уравнением: $F(x, y) = 0$

но обычно её задают в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

В таком случае кривая

- в декартовых координатах принимает вид: $\begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases}$
- в полярных координатах: $\begin{cases} x = r(t) \cos t \\ y = r(t) \sin t \end{cases}$

- для неявных уравнений свои методы, т.к. не очень понятно как с ними работать

Например, для неявных уравнений существует следующая теорема:

Теорема (О неявной функции). Если $F(x, y) = 0$ и $F(x_0, y_0) = 0$, а так же $\frac{\partial F}{\partial y}|_{(x_0, y_0)} \neq 0$, $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$ существуют и непрерывны в окрестности (x_0, y_0) , тогда существует $f(x)$ в некоторой окрестности x_0 , что $F(x, f(x)) = 0$.

Пример 1.1. Имеем стандартное уравнение окружности: $x^2 + y^2 - 1 = 0$. В окрестности большинства его точек можно выразить y через x : $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$. Но это выражение перестает работать в точке $x = -1$ или $x = 1$ (то есть для любой другой точки, можно найти окрестность, такую что функция будет иметь конкретный знак, в то время как для $x = \pm 1$ такое сделать невозможно). Воспользуемся теоремой выше, соблюдены почти все условия, кроме:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2y|_{x=\pm 1, y=0} = 0$$

Соответственно, именно в этих точках найти искомую f нельзя.

Параметрическое задание кривой

$\mathbf{f}(t)$ - векторное уравнение. $\mathbf{f} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$. Кривую определяет вектор-функция.

Определение 1.1 (Вектор-функция). \mathbf{f} – вектор-функция как выше. На протяжении всего курса предполагаем, что у функции необходимая нам гладкость.

Определение 1.2 (Предел вектор-функции). $\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{f}(t) = \mathbf{v}$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 |t - t_0| < \delta \implies |\mathbf{f}(t) - \mathbf{v}| < \varepsilon$$

Свойства. Везде считаем, что свойство выполнено, если существуют соответствующие пределы.

$$1. \lim_{t \rightarrow t_0} (\mathbf{f}(t) \pm \mathbf{g}(t)) = \lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{f}(t) \pm \lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{g}(t)$$

2. $\lim_{t \rightarrow t_0} (\mathbf{f}(t)\mathbf{g}(t)) = \lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{f}(t) \lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{g}(t)$
3. $\lim_{t \rightarrow t_0} (\mathbf{f}(t) \times \mathbf{g}(t)) = \lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{f}(t) \times \lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{g}(t)$
4. Смешанное произведение аналогично

Определение 1.3 (Производная вектор-функции).

$$\mathbf{f}'(t)|_{t=t_0} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\mathbf{f}(t) - \mathbf{f}(t_0)}{t - t_0}$$

Свойства.

1. $(\mathbf{f} \pm \mathbf{g})' = \mathbf{f}' \pm \mathbf{g}'$
2. $(c\mathbf{f})' = c\mathbf{f}'$
3. $(\mathbf{f}\mathbf{g})' = \mathbf{f}'\mathbf{g} + \mathbf{f}\mathbf{g}'$
4. $(\mathbf{f} \times \mathbf{g})' = \mathbf{f}' \times \mathbf{g} + \mathbf{f} \times \mathbf{g}'$

Доказательство.

$$\begin{aligned} (\mathbf{f} \times \mathbf{g})'|_{t=t_0} &= \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\mathbf{f}(t) \times \mathbf{g}(t) - \mathbf{f}(t_0) \times \mathbf{g}(t_0)}{t - t_0} = \\ &= \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\mathbf{f}(t) \times \mathbf{g}(t) - \mathbf{f}(t_0) \times \mathbf{g}(t) + \mathbf{f}(t_0) \times \mathbf{g}(t) - \mathbf{f}(t_0) \times \mathbf{g}(t_0)}{t - t_0} = \\ &= \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\mathbf{f}(t) - \mathbf{f}(t_0)}{t - t_0} \times \mathbf{g}(t) + \lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{f}(t_0) \times \frac{\mathbf{g}(t) - \mathbf{g}(t_0)}{t - t_0} = \\ &= \mathbf{f}'(t_0) \times \mathbf{g}(t_0) + \mathbf{f}(t_0) \times \mathbf{g}'(t_0) \end{aligned}$$

■

5. $(\mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{h})' = (\mathbf{f}', \mathbf{g}, \mathbf{h}) + (\mathbf{f}, \mathbf{g}', \mathbf{h}) + (\mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{h}')$

Доказательство.

$$\begin{aligned} (\mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{h})' &= ((\mathbf{f} \times \mathbf{g})\mathbf{h})' = (\mathbf{f} \times \mathbf{g})'\mathbf{h} + (\mathbf{f} \times \mathbf{g})\mathbf{h}' = \\ &= (\mathbf{f}' \times \mathbf{g})\mathbf{h} + (\mathbf{f} \times \mathbf{g}')\mathbf{h} + (\mathbf{f} \times \mathbf{g})\mathbf{h}' \end{aligned}$$

■

В свойствах отсутствует деление, т.к. операция деления векторов не определена. В вещественном анализе множество теорем доказывается с помощью следующей теоремы:

Теорема (Лагранжа). Если $f(x)$ непрерывно дифференцируема на $[a, b]$, тогда существует $c \in [a, b] : f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

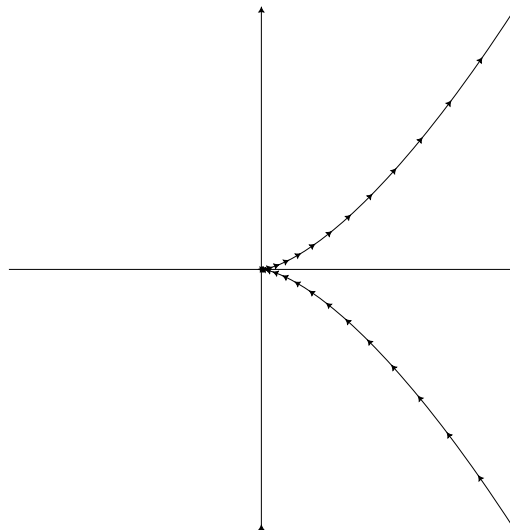
Для вектор-функций эта теорема, однако, не существует!

Определение 1.4 (Интеграл вектор-функции).

$$\int_a^b \mathbf{f}(t) dt = \lim_{\max |\Delta_i t| \rightarrow 0} \sum_i \mathbf{f}(\sigma_i) \Delta_i t.$$

Определение 1.5 (Кривая). Кривая – образ $\mathbf{f}(t)$. Кривая не пересекает сама себя, то есть $\mathbf{f}(t_1) \neq \mathbf{f}(t_2)$. $\mathbf{f}(t)$ – параметризация кривой. Параметризация регулярна, если $\mathbf{f}'(t) \neq \mathbf{0} \forall t$.

Пример 1.2 (Нерегулярная параметризация). $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases}$ или $\mathbf{r}(t) = (t^2, t^3)$ – полукубическая парабола. $y = x^{3/2}$ (плохо при $x < 0$).



$(0, 0)$ – точка излома (т.е. точка, в которой параметризация теряет регулярность).

Перепараметризация

Пусть $\varphi : [a, b] \rightarrow [c, d]$, φ строго возрастает, $\varphi(a) = c, \varphi(b) = d$, также существует φ^{-1} . $\mathbf{f} : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^3$, тогда $\mathbf{g} := \mathbf{f} \circ \varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$. В таком случае \mathbf{g} – перепараметризация кривой и $\mathbf{f} = \mathbf{g} \circ \varphi^{-1}$.

Если такая φ существует, то $\mathbf{f} \sim \mathbf{g}$ (эквивалентны).

Если образы $\mathbf{f}(t)$ и $\mathbf{g}(t)$ совпадают, кривые не самопересекаются, а их параметризации регулярны, то существует такое φ и $\mathbf{f} = \mathbf{g} \circ \varphi$.

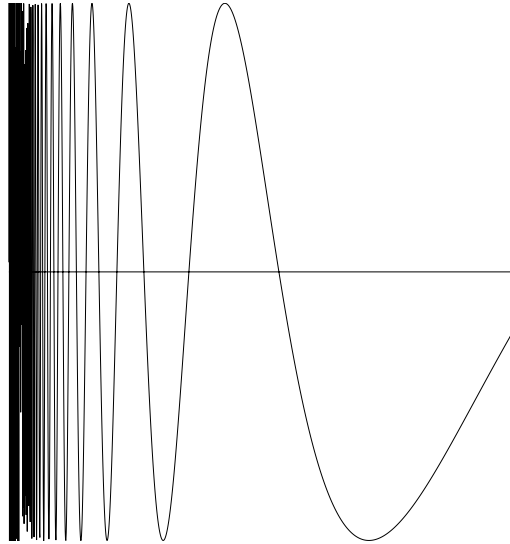
1.2. Длина кривой

Определение 1.6 (Длина кривой). $\mathbf{f} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$, $\Delta_i t = t_i - t_{i-1}$.

$$L := \lim_{\max \Delta_i t \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n |\mathbf{f}(t_i) - \mathbf{f}(t_{i-1})|$$

Определение 1.7 (Спряmlяемая кривая). Прямая называется спряmlяемой, если существует её длина.

Пример 1.3. $y = \sin 1/x$ на $(0, 1]$ не спряmlяемая.



Пример 1.4. $y = \sqrt{x} \sin 1/x$, $y(0) = 0$, её сумма оценивается $L \geq \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{1}{n}} = \infty$.

Теорема 1.1.

$$L = \int_a^b |\mathbf{f}'(t)| dt$$

Замечание. $|\sum \mathbf{f}_i| \leq \sum |\mathbf{f}_i|$, $||\mathbf{f}| - |\mathbf{g}|| \leq |\mathbf{f} - \mathbf{g}|$, $|\int \mathbf{f} dt| \leq \int |\mathbf{f}| dt$.

Доказательство. Хотим доказать:

$$\left| \int_a^b |\mathbf{f}'(t)| dt - \sum |\mathbf{f}(t_i) - \mathbf{f}(t_{i-1})| \right| \rightarrow 0$$

оценим это:

$$\begin{aligned} & \left| \int_a^b |\mathbf{f}'(t)| dt - \sum |\mathbf{f}(t_i) - \mathbf{f}(t_{i-1})| \right| = \\ & \left| \int_a^b |\mathbf{f}'(t)| dt - \sum |\mathbf{f}'(\sigma_i)| \Delta_i t + \sum |\mathbf{f}'(\sigma_i)| \Delta_i t - \sum |\mathbf{f}(t_i) - \mathbf{f}(t_{i-1})| \right| \\ & \leq \left| \int_a^b |\mathbf{f}'(t)| dt - \sum |\mathbf{f}'(\sigma_i)| \Delta_i t \right| + \\ & \quad \left| \sum |\mathbf{f}'(\sigma_i)| \Delta_i t - \sum |\mathbf{f}(t_i) - \mathbf{f}(t_{i-1})| \right| \end{aligned}$$

$\left| \int_a^b |\mathbf{f}'(t)| dt - \sum |\mathbf{f}'(\sigma_i)| \Delta_i t \right| \rightarrow 0$ по определению интеграла.

\mathbf{f}' непрерывная, значит равномерно непрерывна, тогда если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |\mathbf{f}(x_1) - \mathbf{f}(x_2)| < \varepsilon$. Выберем любое ε и зафиксируем δ , удовлетворяющее мелкости разбиения и получим:

$$\begin{aligned} & \left| \sum |\mathbf{f}'(\sigma_i)| \Delta_i t - \sum |\mathbf{f}(t_i) - \mathbf{f}(t_{i-1})| \right| = \\ & \left| \sum \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\mathbf{f}'(\sigma_i)| dt - \sum \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \mathbf{f}'(t) dt \right| \right| \leq \sum \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\mathbf{f}'(\sigma_i) - \mathbf{f}'(t)| dt \\ & \leq \sum \int_{t_{i-1}}^{t_i} \varepsilon dt = \varepsilon(b-a) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

■

Попытаемся понять как вычислять длину прямой в некоторых случаях: 12.09.22

- в случае явного задания:

$$\begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases} \Leftrightarrow y = f(t)$$

$$|(x', y')| = \sqrt{1 + \mathbf{f}'^2(t)} \Rightarrow L = \int_a^b \sqrt{1 + \mathbf{f}'^2(t)} dt$$

К сожалению, такая формула мало применима, так как интегралы берутся редко.

- в случае параметрического задания:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \Rightarrow L = \int_a^b \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} dt$$

- в случае полярных координат:

$$r = r(\varphi) \Leftrightarrow \begin{cases} x = r(\varphi) \cos \varphi \\ y = r(\varphi) \sin \varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = r' \cos \varphi - r \sin \varphi \\ y' = r' \sin \varphi + r \cos \varphi \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x'^2 + y'^2 &= (r' \cos \varphi - r \sin \varphi)^2 + (r' \sin \varphi + r \cos \varphi)^2 = \\ &= r'^2 \cos^2 \varphi - 2rr' \sin \varphi \cos \varphi + r^2 \sin^2 \varphi + \\ &+ r'^2 \sin^2 \varphi + 2rr' \sin \varphi \cos \varphi + r^2 \cos^2 \varphi = \\ &= r'^2 + r^2 \end{aligned}$$

$$L = \int_a^b \sqrt{x'^2 + y'^2} d\varphi = \int_a^b \sqrt{r'^2 + r^2} d\varphi$$

1.3. Касательный вектор

Лемма 1.2. Если $|\mathbf{f}(t)| = \text{const}$, то $\mathbf{f}'(t) \perp \mathbf{f}(t)$.

Доказательство. Из $\mathbf{f}'(t) \perp \mathbf{f}(t)$ получаем: $(\mathbf{f}'(t), \mathbf{f}(t)) = 0 \quad \forall t$.

Возьмем производную скалярного квадрата и получим:

$$(\mathbf{f}(t), \mathbf{f}(t))' = 2(\mathbf{f}'(t), \mathbf{f}(t)) = 0 = |\mathbf{f}(t)|^{2'}$$

Тогда, $|\mathbf{f}(t)| = \text{const.}$ ■

Определение 1.8 (Касательный вектор). $\mathbf{f}'(t_0)$ называется касательным вектором к кривой в точке t_0 . Прямая, на которой лежит $\mathbf{f}'(t)$ – касательная прямая.

Теорема 1.3. Касательная прямая не зависит от параметризации, если она регулярна.

Доказательство. φ – скалярная функция, $\mathbf{f}(t)$ – вектор-функция. Также $\mathbf{f}(\varphi(t)) = \mathbf{g}(t)$. $\mathbf{f}'(t)$, $\mathbf{g}'(t) = \mathbf{f}'(\varphi(t))\varphi'(t)$ – касательные векторы \mathbf{f} и \mathbf{g} соответственно. Обозначим $\tau = \varphi(t)$. $\mathbf{f}'(t)$ и $\mathbf{g}'(t)$ отличаются друг от друга на скаляр, тогда $\mathbf{f}'(\tau) \parallel \mathbf{g}'(t)$. Следовательно, при перепараметризации касательный вектор будет параллелен предыдущему, значит касательная прямая инвариантно определена. ■

Замечание. Регулярная параметризация – это параметризации для которой в любой точке существует касательная прямая.

Определение 1.9 (Натуральная параметризация). Параметризация $\mathbf{f}(t)$ называется натуральной, если $|\mathbf{f}'(t)| \equiv 1 \ \forall t$.

По сути, мы идем по кривой с единичной скоростью. Но пока не ясно существует и единственна ли натуральная параметризация.

Доказательство. Проверить единственность достаточно просто: $\mathbf{g}(t) = \mathbf{f}(\varphi(t))$, $\varphi(t) = \tau$

$$|\mathbf{g}'(t)| = |\mathbf{f}'(\tau)||\varphi'(t)| \implies |\varphi'(t)| = 1$$

тогда $\varphi = t + t_0$ (с точностью до выбора начального момента времени). ■

Теорема 1.4. Натуральная параметризация существует.

Доказательство. Вспомним про длину кривой. Глобальная идея: параметризация говорит сколько мы проходим по кривой за данное время; чтобы перейти к натуральной параметризации мы откажемся от стандартного времени, и скажем, что новое время это тот участок кривой, за которое мы его проходим, или единичное расстояние мы проходим за единичное время, значит параметр времени – это участок дуги.

Реализуем эту идею:

$$s = \int_{t_0}^t |\mathbf{f}'(\tau)| d\tau$$

s – искомый натуральный параметр. Будем считать $t - t_0$ временем. Обозначим $s = \varphi(t)$:

$$\varphi(t) = \int_{t_0}^t |\mathbf{f}'(\tau)| d\tau$$

Заметим, что $\varphi(t)$ возрастает и непрерывна. Значит существует $t = \varphi^{-1}(s) = \psi(s)$. Тогда $\mathbf{f}(t) = \mathbf{f}(\psi(s))$ должна быть натуральной параметризацией.

Теперь докажем, что $\mathbf{f}(\psi(s))$ есть натуральная параметризация. Хотим убедиться, что

$$\left| \frac{d\mathbf{f}(\psi(s))}{ds} \right| = 1.$$

Для этого

$$\begin{aligned} \psi'(s) &= \frac{1}{\varphi'(t(s))} = \frac{1}{|\mathbf{f}'(t)|} \\ \frac{d}{ds} \mathbf{f}(\psi(s)) &= \mathbf{f}'(\psi(s)) \psi'(s) = \frac{\mathbf{f}'(t)}{|\mathbf{f}'(t)|} \\ \left| \frac{\mathbf{f}'(t)}{|\mathbf{f}'(t)|} \right| &= 1 \end{aligned}$$

■

1.4. Репёр Френé

Есть кривая и $\mathbf{f}(s)$ – ее натуральная параметризация, тогда $\mathbf{v}(s)$ – ее касательный вектор. $|\mathbf{v}(s)| = 1$. Тогда $\mathbf{v}'(s) \perp \mathbf{v}(s)$ по лемме 1.2.

Определение 1.10 (Кривизна кривой). Определим $\mathbf{n}(s)$: $\mathbf{n}(s) \uparrow \mathbf{v}'(s)$, $|\mathbf{n}(s)| = 1$, такой \mathbf{n} – вектор главной нормали.

$$k = \frac{|\mathbf{v}'(s)|}{|\mathbf{n}|} \Leftrightarrow \mathbf{v}' = k\mathbf{n}$$

Такая k – кривизна кривой. А выражение $\mathbf{v}' = k\mathbf{n}$ называется первой формулой Френе.

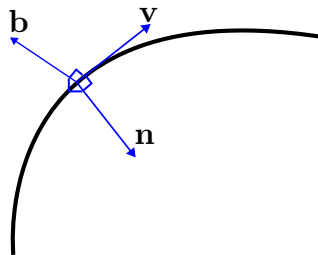
Замечание. $k \geq 0$.

Замечание. \mathbf{n} – не везде определен, необходима бигулярность.

Определение 1.11. Кривая называется бигулярной, если $\mathbf{f}''(t) \nparallel \mathbf{f}'(t)$ для любой параметризации. Или, если $\mathbf{v}'(s) \neq 0$ для натуральной параметризации. Или \mathbf{n} корректно определен. (почему они эквивалентны – вопрос будущего)

По умолчанию считаем, что все кривые бигулярны.

У нас есть вектор \mathbf{v} и перпендикулярный ему \mathbf{n} . Они единичные, хотим превратить их в базис пространства. Для этого построим вектор \mathbf{b} перпендикулярный им обоим и тоже единичный.



Определение 1.12 (Вектор бинормали).

$$\mathbf{b} := \mathbf{v} \times \mathbf{n}$$

Правая тройка $(\mathbf{v}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$ – репер Френе.

Изучим \mathbf{b}' : $\mathbf{b}'(s) \perp \mathbf{b}(s)$ из леммы 1.2, также $\mathbf{b}' \perp \mathbf{v}$. Почему?

$$\mathbf{b}' = (\mathbf{v} \times \mathbf{n})' = \mathbf{v}' \times \mathbf{n} + \mathbf{v} \times \mathbf{n}' = 0 + \mathbf{v} \times \mathbf{n}' \perp \mathbf{v}$$

Таким образом, $\mathbf{b}' \parallel \mathbf{n}$ и $\mathbf{b}' = -\kappa \mathbf{n}$ – вторая формула Френе.

Определение 1.13 (Кручение кривой). κ , определенная выше – кручение кривой.

Изучим \mathbf{n} :

$$\mathbf{n}' = (\mathbf{b} \times \mathbf{v})' = \mathbf{b}' \times \mathbf{v} + \mathbf{b} \times \mathbf{v}' = -\kappa \mathbf{n} \times \mathbf{v} + \mathbf{b} \times k \mathbf{n} = \kappa \mathbf{b} - k \mathbf{v}$$

получили третью формулу Френе.

Определение 1.14 (Формулы Френе).

	\mathbf{v}	\mathbf{n}	\mathbf{b}
\mathbf{v}'	0	k	0
\mathbf{n}'	$-k$	0	κ
\mathbf{b}'	0	$-\kappa$	0

Производная везде берется по натуральному параметру.

Определение 1.15. Плоскость (\mathbf{n}, \mathbf{b}) – нормальная плоскость кривой. Плоскость (\mathbf{v}, \mathbf{n}) – соприкасающаяся плоскость кривой. Плоскость (\mathbf{v}, \mathbf{b}) – спрямляющая плоскость кривой.

Вопрос: а как это посчитать?

Пример 1.5. Есть окружность:

$$\begin{cases} x = R \cos t \\ y = R \sin t \\ z = 0 \end{cases}$$

Хотим найти натуральную параметризацию: сейчас мы проходим окружность за время 2π , наверное нужно проходить окружность за время $2\pi R$. Тогда получим:

$$\begin{cases} x = R \cos(t/R) \\ y = R \sin(t/R) \\ z = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x' = -\sin(t/R) \\ y' = \cos(t/R) \end{cases}$$

1.5. Соприкасающаяся плоскость

19.09.22

В натуральной параметризации $\mathbf{v} = \mathbf{f}'$ и $\mathbf{n} = \mathbf{f}''/k$. Тогда плоскость $\langle \mathbf{f}', \mathbf{f}'' \rangle$ – соприкасающаяся плоскость для натуральной параметризации.

А что будет в случае не натуральной параметризации? Посмотрим, что в таком случае происходит с вектором \mathbf{f}'' , будет ли он перпендикулярен \mathbf{f}' ? Нет, не будет, потому что, если вектор $\mathbf{f}'' \perp \mathbf{f}'$, то $|\mathbf{f}'| = \text{const}$ и параметризация почти натуральная, в том смысле, что наша скорость постоянная, но возможно не единичная. Вывод: в обычной ситуации \mathbf{f}'' не перпендикулярен \mathbf{f}' , однако плоскость в которой он лежит не меняется.

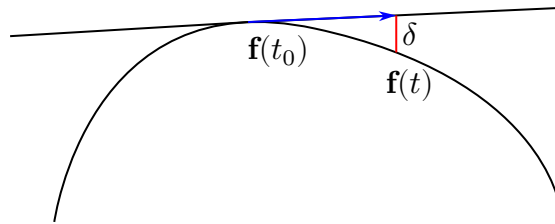
Теорема 1.5. Плоскость $\langle \mathbf{f}', \mathbf{f}'' \rangle$ не зависит от параметризации.

Доказательство. Пусть $\mathbf{f}(t) = \mathbf{g}(s)$, где s не обязательно натуральный параметр и $s = \varphi(t)$, тогда $\mathbf{g}(\varphi(t)) = \mathbf{f}(t)$. Уже доказано, что $\mathbf{f}' \parallel \mathbf{g}'$. Теперь выясним, что

$$\begin{aligned} \mathbf{f}''(t) &= (\mathbf{g}(\varphi(t)))'' = (\mathbf{g}'(\varphi(t))\varphi'(t))' = \\ &= \mathbf{g}''(\varphi(t))\varphi'^2(t) + \mathbf{g}'(\varphi(t))\varphi''(t) \in \langle \mathbf{g}', \mathbf{g}'' \rangle \end{aligned}$$

■

Теорема 1.6. Есть регулярная параметризация $\mathbf{f}(t)$, $\delta(t)$ – расстояние от $\mathbf{f}(t)$ до касательной в точке $\mathbf{f}(t_0)$.



$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\delta}{|\mathbf{f}(t) - \mathbf{f}(t_0)|} = 0.$$

Такой $\lim = 0$ тогда и только тогда, когда касательная прямая.

Доказательство. Выберем удобную для нас координатную систему:

- $\mathbf{f}(t_0) = (0, 0, 0)$
- $t_0 = 0$
- Касательная прямая – прямая OX . Тогда $\mathbf{f}'(0) = (a, 0, 0)$.

Пусть $\mathbf{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$, выясним что такое δ .

$$\delta = \sqrt{f_2^2(t) + f_3^2(t)}$$

Разложим f_1 по Тейлору:

$$f_1(t) = f_1(0) + f_1'(0)t + o(|\mathbf{f}(t) - \mathbf{f}(t_0)|) = at + o(t)$$

На малом промежутке $|\mathbf{f}(t) - \mathbf{f}(t_0)| \approx t$. Аналогично с f_2, f_3 :

$$\begin{aligned} f_2(t) &= f_2(0) + f_2'(0)t + o(t) = o(t) \\ f_3(t) &= o(t) \end{aligned}$$

Отсюда, $\delta(t) = o(t)$ и

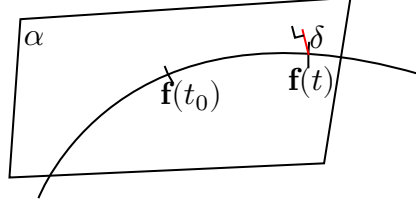
$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\delta(t)}{t} = 0$$

А так же

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{|\mathbf{f}(t) - \mathbf{f}(0)|}{t} = |\mathbf{f}'(0)|$$

Обратное доказательство – упражнение. (Hint: если δ – расстояние от данной точки до любой прямой, кроме OX , то в формуле для δ появится слагаемое $f_1^2(t)$) ■

Теорема 1.7. Пусть $\mathbf{f}(t)$ – бирегулярная параметризация. δ – расстояние от $\mathbf{f}(t)$ до плоскости α .



$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\delta}{t^2} = 0 \left(\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\delta}{|\mathbf{f}(t) - \mathbf{f}(t_0)|^2} = 0 \right)$$

Такой $\lim = 0 \Leftrightarrow \alpha$ – соприкасающаяся плоскость.

Доказательство. Введем удобную систему координат:

1. $t_0 = 0$
2. $\mathbf{f}(0) = (0, 0, 0)$
3. $\mathbf{f}'(0) = (a, 0, 0)$ и $\mathbf{f}''(0) = (b, c, 0)$

Тогда соприкасающаяся плоскость, должна быть плоскостью $z = 0$. Докажем это.

Запишем вектор-функцию в координатах: $\mathbf{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$. Пусть плоскость α задана уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$ и $A^2 + B^2 + C^2 = 1$. Подсчитаем δ используя разложение по Тейлору:

$$\begin{aligned} \delta &= |Af_1(t) + Bf_2(t) + Cf_3(t) + D| = \\ &= \left| A \left(f_1(0) + f_1'(0)t + \frac{f_1''(0)}{2}t^2 + o(t^2) \right) + \right. \\ &\quad \left. B \left(f_2(0) + f_2'(0)t + \frac{f_2''(0)}{2}t^2 + o(t^2) \right) + \right. \\ &\quad \left. C \left(f_3(0) + f_3'(0)t + \frac{f_3''(0)}{2}t^2 + o(t^2) \right) + D \right| = \\ &= \left| Aat + \frac{Ab}{2}t^2 + \frac{Bc}{2}t^2 + D + o(t^2) \right| \end{aligned}$$

Теперь хотим выяснить чему равносильно $\delta = o(t^2)$.

$$\begin{cases} Aa = 0 \\ Bc = 0 \\ D = 0 \end{cases}$$

При этом $a \neq 0$, т.к. это единственная ненулевая координата касательного вектора, она не может быть нулем. И $c \neq 0$, иначе \mathbf{f}'' коллинеарно \mathbf{f}' . Тогда

$$\begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \\ D = 0 \end{cases}$$

и α имеет единственно возможное уравнение $z = 0$. ■

Посмотрим как задаются все эти плоскости в координатах. Пусть

$$\mathbf{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$$

и \mathbf{f} не натуральная параметризация (т.к. к натуральной параметризации тяжело перейти).

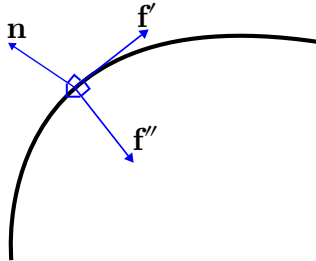
$$\mathbf{f}'(t) = (f'_1, f'_2, f'_3)$$

Построим нормальную плоскость:

$$f'_1(t_0)(x - f_1(t_0)) + f'_2(t_0)(y - f_2(t_0)) + f'_3(t_0)(z - f_3(t_0)) = 0$$

Построим соприкасающуюся плоскость: для этого найдем вектор главной нормали

$$\mathbf{n} = \mathbf{f}' \times \mathbf{f}'' = (f'_2 f''_3 - f'_3 f''_2, f'_3 f''_1 - f'_1 f''_3, f'_1 f''_2 - f'_2 f''_1)$$



и уравнение плоскости

$$(f'_2 f''_3 - f'_3 f''_2)(x - f_1) + (f'_3 f''_1 - f'_1 f''_3)(y - f_2) + (f'_1 f''_2 - f'_2 f''_1)(z - f_3) = 0$$

Построение спрямляющей плоскости опущено в виду громоздкости выкладок.

1.6. Вычисление кривизны

В натуральной параметризации $\mathbf{f}(s_0) = |\mathbf{f}''(s_0)|$.

Теорема 1.8. $k \equiv 0 \Leftrightarrow$ кривая является частью прямой.

Доказательство. В натуральной параметризации $k = 0$ равносильно $\mathbf{f}''(t) = 0$, а это равносильно тому, что $\mathbf{f}(t) = \mathbf{u}t + \mathbf{v}$, где \mathbf{u} и $\mathbf{v} = \text{const}$. ■

Теорема 1.9. Для любой регулярной параметризации

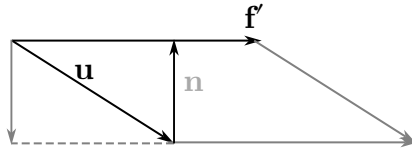
$$k = \frac{|\mathbf{f}'(t) \times \mathbf{f}''(t)|}{|\mathbf{f}'(t)|^3}.$$

Доказательство. Пусть $\mathbf{g}(s)$ – натуральная параметризация, а $\mathbf{f}(t)$ любая другая параметризация.

$$s = \varphi(t) = \int_{t_0}^t |\mathbf{f}'(\tau)| d\tau$$

Тогда связь между ними: $\mathbf{f}(t) = \mathbf{g}(\varphi(t))$. И существует $\psi(s) = t$ – обратная функция и $\mathbf{g}(s) = \mathbf{f}(\psi(s))$.

Пусть $\mathbf{u} \in \langle \mathbf{f}', \mathbf{f}'' \rangle$



$$|\text{Pr}_{\mathbf{n}} u| = \frac{|\mathbf{f}' \times \mathbf{u}|}{|\mathbf{f}'|}$$

Вычислим k :

$$\begin{aligned} k &= |\mathbf{g}''(s)| = |(\mathbf{f}(\psi(s)))''| = \\ &= |\mathbf{f}''(\psi(s))\psi'^2(s) + \mathbf{f}'(\psi(s))\psi''(s)| = \\ &= \text{Pr}_{\mathbf{n}}(\mathbf{f}''(\psi(s))\psi'^2(s) + \mathbf{f}'(\psi(s))\psi''(s)) \end{aligned}$$

Пусть

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \mathbf{f}''(\psi(s))\psi'^2(s) + \mathbf{f}'(\psi(s))\psi''(s) \\ \mathbf{f}' \times \mathbf{u} &= \mathbf{f}' \times \mathbf{f}''\psi'^2 + 0 \\ \psi'(s) &= \frac{1}{\varphi'(t)} = \frac{1}{|\mathbf{f}'(t)|}\end{aligned}$$

тогда

$$\frac{|\mathbf{f}' \times \mathbf{u}|}{|\mathbf{f}'|} = \frac{|\mathbf{f}' \times \mathbf{f}''|}{|\mathbf{f}'|}\psi'^2(s) = \frac{|\mathbf{f}' \times \mathbf{f}''|}{|\mathbf{f}'|^3}$$

■

Если $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)$, то

$$k = \frac{\sqrt{(f_2'f_3'' - f_3'f_2'')^2 + (f_3'f_1'' - f_1'f_3'')^2 + (f_1'f_2'' - f_2'f_1'')^2}}{(f_1'^2 + f_2'^2 + f_3'^2)^{3/2}}$$

В случае плоских кривых ($f_3 = 0$):

$$k = \frac{|f_1'f_2'' - f_2'f_1''|}{(f_1'^2 + f_2'^2)^{3/2}}$$

При явном задании

$$\begin{aligned}y = f(x) \quad & \begin{cases} x = f_1 = t \\ y = f_2 = f(t) \end{cases} \\ k &= \frac{|f''|}{(1 + f'^2)^{3/2}}\end{aligned}$$

В полярных координатах

$$\begin{aligned}r = r(\varphi) \quad & \begin{cases} f_1 = x = r \cos \varphi \\ f_2 = y = r \sin \varphi \end{cases} \\ |f'| &= \sqrt{r^2 + r'^2} = \sqrt{f_1'^2 + f_2'^2} \\ & \begin{cases} f_1' = r' \cos \varphi - r \sin \varphi \\ f_2' = r' \sin \varphi + r \cos \varphi \end{cases} \\ & \begin{cases} f_1'' = r'' \cos \varphi - 2r' \sin \varphi - r \cos \varphi \\ f_2'' = r'' \sin \varphi + 2r' \cos \varphi - r \sin \varphi \end{cases}\end{aligned}$$

Чему равно $|f_1'f_2'' - f_2'f_1''|$ – упражнение.