

Геометрия и топология

Курс Сольниина А.А.

Весна 2022 г.

Примечания

В тексте использованы рисунки из конспектов Сольниина А.А.

Оглавление

Оглавление	ii
1 Метрические пространства	2
1.1 Метрические пространства	2
1.2 Расположение точки относительно множества	6
2 Топологические пространства	15
2.1 Топологические пространства	15
2.2 Расположение точки относительно множества	18
2.3 Базы и предбазы	20
3 Непрерывные отображения	24
3.1 Непрерывные отображения	24
3.2 Гомеоморфизмы	26
3.3 Инициальная топология	28
3.4 Финальная топология	32
4 Связность	39
4.1 Связность	39
4.2 Компоненты связности	43
4.3 Линейная связность	45
5 Компактность	48
5.1 Компактность	48
5.2 Компактность и хаусдорфовость	51
5.3 Компактность в \mathbb{R}^n	53
5.4 Локальная компактность	56

6	Аксиомы счетности	59
6.1	Сепарабельность	59
6.2	Секвенциальная компактность	61
6.3	Компактность в метрических пространствах	64
7	Аксиомы отделимости	68
7.1	Аксиомы отделимости	68
7.2	Нормальные пространства	70

Общая топология

Глава 1

Метрические пространства

1.1. Метрические пространства

Определение 1.1. M – множество. M вместе с $\rho : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ называется метрическим пространством, если:

1. $\forall x, y \rho(x, y) \geq 0$ и $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $\forall x, y \rho(x, y) = \rho(y, x)$
3. Неравенство треугольника: $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$

(M, ρ) – метрическое пространство, ρ – метрика на M .

Пример 1.1. M – множество домов в городе. $\rho(x, y)$ – минимальное время, за которое можно добраться от x до y . (1 свойство очевидно, 2 свойство выполняется при симметричности дорог, 3 очевидно)

Пример 1.2. Расстояние на плоскости.

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^2 &= \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\} \\ \rho_1((x_1, y_1), (x_2, y_2)) &:= |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| \\ \rho_2((x_1, y_1), (x_2, y_2)) &:= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\ \rho_k((x_1, y_1), (x_2, y_2)) &:= (|x_1 - x_2|^k + |y_1 - y_2|^k)^{1/k} \\ k \rightarrow \infty : \rho_\infty((x_1, y_1), (x_2, y_2)) &:= \max\{|x_1 - x_2|; |y_1 - y_2|\}\end{aligned}$$

Если перейти к \mathbb{R}^n , то

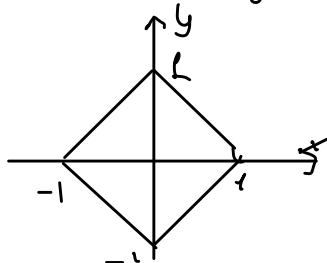
$$\begin{aligned}\rho_k((x_1, x_2, \dots, x_n); (y_1, y_2, \dots, y_n)) &= \left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^k \right)^{1/k} \\ \left(\underbrace{|x_1 - x_3|}_{a_1+b_1}^k + \underbrace{|y_1 - y_3|}_{a_2+b_2}^k \right)^{1/k} &\leq \left(\underbrace{|x_1 - x_2|}_{a_1}^k + \underbrace{|y_1 - y_2|}_{a_2}^k \right)^{1/k} + \\ &\quad \left(\underbrace{|x_2 - x_3|}_{b_1}^k + \underbrace{|y_2 - y_3|}_{b_2}^k \right)^{1/k} \\ \left(\sum |a_i + b_i|^k \right)^{1/k} &\leq (|a_1|^k + |a_2|^k)^{1/k} + (|b_1|^k + |b_2|^k)^{1/k}\end{aligned}$$

Неравенство Йенсена (к чему это?)

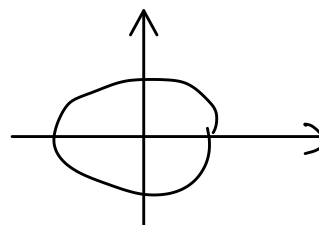
Определение 1.2. $B(x_0, r) := \{x \in M : \rho(x, x_0) < r\}$ – шар с центром в точке x_0 и радиусом r .

Нарисуем $B((0, 0); 1)$ в $\rho_1, \rho_2, \rho_\infty$.

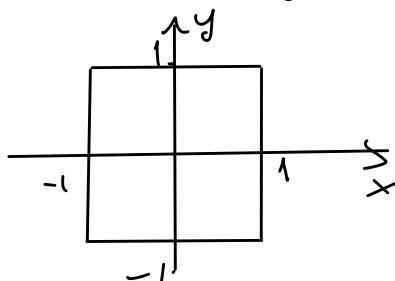
$$f_1: |x-0| + |y-0| < 1.$$



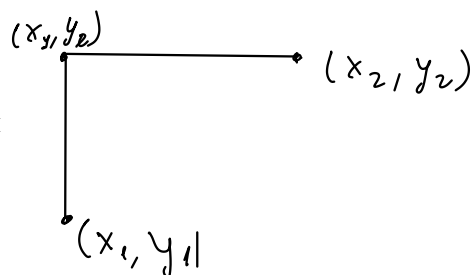
$$f_2: \sqrt{x^2 + y^2} < 1.$$



$$f_\infty: \max\{|x|; |y|\} < 1$$



ρ_1 называется манхэттенской метрикой.



$$\rho_1((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

$$\rho_1((x_1, y_1), (x_1, y_2)) = |y_1 - y_2|$$

$$\rho_1((x_1, y_2), (x_2, y_2)) = |x_1 - x_2|$$

Пример 1.3. M – пространство «некоторых»¹ функций. Функции определены на $X \subset \mathbb{R}$.

$$\rho_1(f, g) := \int_X |f(x) - g(x)| dx$$

Есть проблемы: если $f(x) = g(x)$ всюду, кроме 1 точки, то $\rho_1(f, g) = 0$.

¹«некоторых» – обладающих естественными свойствами, какими именно – зависит от функции

1 и 2 свойство очевидны. Третье:

$$\int_X |f - h| dx \leq \int_X |f - g| dx + \int_X |g - h| dx$$

Аналогично определяются другие метрики, например:

$$\begin{aligned} \rho_2(f, g) &= \left(\int_X |f(x) - g(x)|^2 dx \right)^{1/2} \\ \rho_k(f, g) &= \left(\int_X |f(x) - g(x)|^k dx \right)^{1/k} \\ \rho_\infty(f, g) &= \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)| \end{aligned}$$

Естественные свойства:

$$\rho_2 : \int_X |f(x)|^2 dx < \infty$$

Определение 1.3. (M, ρ) – метрическое пространство. $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset M$ – последовательность. Говорим, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) : \forall n > N \rho(x_n; x_0) < \varepsilon$$

В частности, в пространстве функций с разными метриками бывают разные пределы последовательностей функций.

$$f_n(x) \rightarrow f_0(x) \text{ по метрике } \rho_1$$

Аналогично для других метрик.

$$f_n(x) \rightarrow f_0(x) \text{ по метрике } \rho_\infty$$

называется равномерной сходимостью. $f_n \rightrightarrows f_0$:

$$f_n(x) \rightrightarrows f_0(x) \Leftrightarrow \limsup_X |f_n(x) - f_0(x)|$$

Пример 1.4. Дискретное метрическое пространство. M – любое множество.

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 1 & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$$

дискретная метрика.

Пример 1.5. На самом деле дискретная метрика – это обобщение $\rho(x, y) \geq \varepsilon > 0$. ε не зависит от x или y .

Пример 1.6. M – множество строк длины n . $\rho(x, y)$ – количество символов, где эти строки отличаются

Пример 1.7. Задача: есть код из N бит. Можем переслать, но возникнет не более k ошибок. Сколько бит надо переслать, чтобы эти ошибки можно было исправить?

Решать не будем, переформулируем на язык метрических пространств.

(M, ρ) . M состоит из строк, каждая из $N + k$ двоичных символов. Хотим выбрать $\{x_1, x_2, \dots, x_{2N}\} \subset M : \rho(x_i, x_j) > 2k$. $l \rightarrow \min$.

x_i – строки из $N + l$ символов.

$$x_i = a_{i1}a_{i2}\dots a_{iN+l}$$

$$x_j = b_{j1}b_{j2}\dots b_{jN+l}$$

1.2. Расположение точки относительно множества

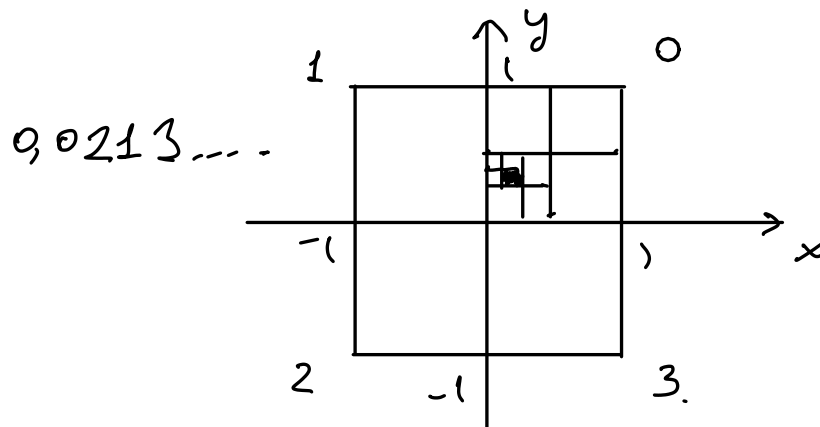


Теорема 1.1 (Жордана). Любая замкнутая непересекающаяся кривая на плоскости делит плоскость на две части; равно одна из частей не ограничена.

Доказательство. Доказать невероятно сложно. ■

Кривая Пеано

$$f : [0, 1] \rightarrow [-1, 1] \times [-1, 1]$$

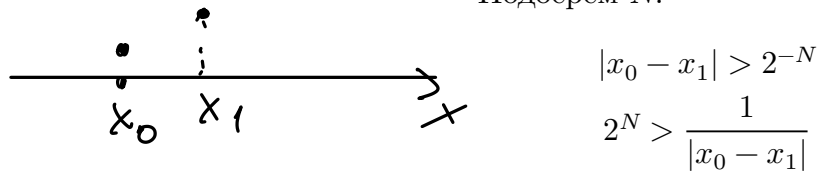


Разложим $a \in [0, 1]$ в четверичную систему счисления: $a = 0.a_1a_2a_3a_4\dots$. Если $a_1 = 0$, то идем в I квадрант. Разбиваем его на 4 части. Далее, если $a_2 = 2$, то идем в III квадрант, и так далее.

То есть, сопоставляем числу последовательность квадратов. Эта последовательность квадратов сходится к одной точке.

По теореме о вложенных отрезках, пересечение квадратов не пусто. Но это пересечение не может состоять более чем из одной точки.

Подберем N :



Кривая Пеано сопоставляет точке $a = 0.a_1a_2a_3\dots$ единственную существующую точку, содержащуюся в пересечении всех соответствующих квадратов

Почему эта кривая непрерывна?

$$|a - b| < \delta$$

$$a = 0.a_1a_2a_3\dots \quad b = 0.b_1b_2b_3\dots$$

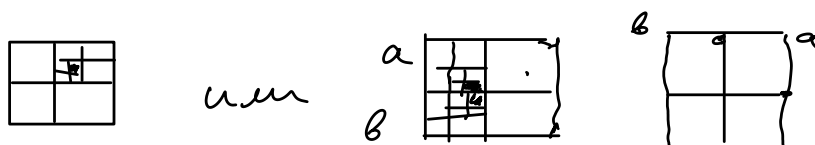
Это значит, что либо

$$a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_k = b_k$$

либо

$$a_1 = b_1, \dots, a_{l-1} = b_{l-1} \text{ и } b_l = a_{l+1} = \dots = a_k = 3, b_{l+1} = \dots = b_k = 0$$

k достаточно большое число



Строится кривая, чтобы она была непрерывна. Такая кривая полностью заметает квадрат.

Существуют кривые, такие что их образ покрывают квадрат.

Определения

Определение 1.4. (M, ρ) – метрическое пространство. $A \subset M, x_0 \in M (x_0 \in A \text{ или } x_0 \notin A)$.

$B(x_0, \varepsilon) := \{x : \rho(x, x_0) < \varepsilon\}$ – шар с центром в x_0 и радиусом ε . x_0 называется внутренней точкой для A , если $\exists \delta > 0 : B(x_0, \delta) \subset A$.

x_0 называется внешней точкой для A , если $\exists \delta > 0 : B(x_0, \delta) \cap A = \emptyset$.

В противном случае точка называется граничной. А именно, x_0 – граничная, если $\forall \delta > 0 B(x_0, \delta) \not\subset A$ и $B(x_0, \delta) \cap A \neq \emptyset$, то есть $\exists x_1 \in B(x_0, \delta) \cap A$ и $\exists x_2 \in B(x_0, \delta) \setminus A$.

Определение 1.5. Множество внутренних точек A называется внутренностью $A : \text{Int } A$.

Множество внешних точек A называется внешностью $A : \text{Ex } A$.

Множество граничных точек A называется границей $A : \partial A$ или $\text{Fr } A$

Замечание. Эти множества не пересекаются. В объединении – множество M .

Определение 1.6. Замыкание $A : \text{Cl } A = \text{Int } A \cup \partial A$ или $\text{Cl } A = M \setminus \text{Ex } A$

Определение 1.7. $U \subset M$. U называется открытым, если $U = \text{Int } U$. Или $\forall x_0 \in U \exists \varepsilon > 0 : B(x_0, \varepsilon) \subset U$

Теорема 1.2 (Свойства открытых множеств).

1. $\{U_i\}_{i \in I}$ – семейство открытых множеств, тогда $\bigcup_{i \in I} U_i$ открыто.
2. U_1, U_2, \dots, U_n – открытые множества, тогда $\bigcap_{i=1}^n U_i$ открыто.
3. \emptyset, M открыто

Доказательство.

1. Возьмем $x_0 \in \bigcup_{i \in I} U_i \implies \exists i_0 : x_0 \in U_{i_0}$. Пусть U_{i_0} открыто, тогда $\exists \delta > 0 : B(x_0, \delta) \subset U_{i_0} \subset \bigcup_{i \in I} U_i$. Значит, $\bigcup_{i \in I} U_i$ открыто
2. Рассмотрим $\forall x_0 \in \bigcap_{i=1}^n U_i \implies \forall i : x_0 \in U_i$. Значит $\exists \delta_i > 0 : B(x_0, \delta_i) \subset U_i$. Возьмем $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n\} > 0$. $B(x_0, \delta) \subset B(x_0, \delta_i) \subset U_i \forall i$. Раз выполнено для любого i , значит $B(x_0, \delta) \subset \bigcap_{i=1}^n U_i$
3. Очевидно ■

Определение 1.8. $F \subset M$, F называется замкнутым множеством, если $M \setminus F$ открыто.

Теорема 1.3 (Свойства замкнутых множеств).

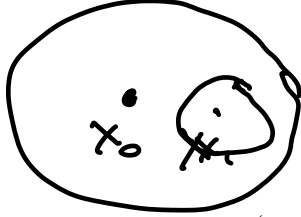
1. $\{F_i\}_{i \in I}$ – семейство замкнутых множеств, значит $\bigcap_{i \in I} F_i$ замкнуто.
2. F_1, F_2, \dots, F_n – замкнутые множества, значит $\bigcup_{i=1}^n F_i$ замкнуто.
3. \emptyset, M замкнуты

Доказательство. Упражнение.

Hint: $U_i := M \setminus F_i$. U_i открытое $\Leftrightarrow F_i$ замкнутое. По формулам де Моргана: $M \setminus (F_1 \cup F_2) = (M \setminus F_1) \cap (M \setminus F_2)$ и т.д. ■

Лемма 1.4. $B(x_0, \delta)$ – открытое множество.

Доказательство.



Пусть $x_1 \in B(x_0, \delta)$,
 $\rho(x_0, x_1) = \varepsilon < \delta$.
 Если взять $r := \delta - \varepsilon$, то
 $B(x_1, r) \subset B(x_0, \delta)$. Почему
 так?

Допустим $x_2 \in B(x_1, r)$, то есть $\rho(x_1, x_2) < r = \delta - \varepsilon$. Но допустим $x_2 \notin B(x_0, \delta)$, то есть $\rho(x_0, x_2) \geq \delta$.

$\underbrace{\rho(x_0, x_2)}_{\geq \delta} \leq \underbrace{\rho(x_0, x_1)}_{=\varepsilon} + \underbrace{\rho(x_1, x_2)}_{< \delta - \varepsilon}$ – противоречие. ■

Теорема 1.5. M – метрическое пространство; $A \subset M$; Тогда

$$\text{Int } A = \bigcup_{\substack{U_i \text{ открыто} \\ U_i \subset A}} U_i,$$

где U_i открыты и $U_i \subset A$

Доказательство. $\bigcup_{\substack{U_i \text{ открыто} \\ U_i \subset A}} U_i$ открыто. $\text{Int } A$ – открытое множество по лемме 1.4.

Если x_0 внутренняя точка, а $x_1 \in B(x_0, \delta) \subset A$, тогда по лемме x_1 – внутренняя точка $B(x_1, \delta - \rho(x_0, x_1)) \subset B(x_0, \delta) \subset A$, значит все точки шара являются внутренними.

$\text{Int } A = \bigcup_{x_0 \in \text{Int } A} B(x_0, \delta_{x_0})$, где $B(x_0, \delta_{x_0}) \subset A$, тогда $\text{Int } A$ является открытым множеством. Следовательно $\text{Int } A \subset \bigcup_{\substack{U_i \text{ открыто} \\ U_i \subset A}} U_i$.

С другой стороны, $\text{Int } A \supset \bigcup_{\substack{U_i \text{ открыто} \\ U_i \subset A}} U_i$. Возьмем любое U_i , т.ч. оно

открыто и $U_i \subset A$. По определению $\forall x_0 \in U_i \exists \varepsilon > 0 B(x_0, \varepsilon) \subset A$, тогда $x_0 \in \text{Int } A$.

Итого: $\text{Int } A = \bigcup_{\substack{U_i \text{ открыто} \\ U_i \subset A}} U_i$. ■

Следствие 1.5.1. Следующие определения внутренности равносильны:

1. Множество внутренних точек
2. $\bigcup_{B(x_0, \delta) \subset A} B(x_0, \delta)$
3. $\text{Int } A = \bigcup_{\substack{U_i \text{ открыто} \\ U_i \subset A}} U_i$
4. $\text{Int } A$ – максимальное открытое подмножество A .

Теорема 1.6.

$$\text{Cl } A = \bigcap_{\substack{F \text{ замкнуто} \\ F \supset A}} F$$

Доказательство. Упражнение. ■

Пример 1.8. $M = \mathbb{R}$; $A = \mathbb{Q}$. A не открыто и не замкнуто.

$$\text{Int } A = \emptyset \quad \text{Cl } A = \mathbb{R} \quad \partial A = \mathbb{R}$$

$B(x_0, \varepsilon) = (x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$. В этом (как и в любом другом интервале) есть рациональные и иррациональные числа, тогда $x_0 \in \partial \mathbb{Q} \Rightarrow \partial \mathbb{Q} = \mathbb{R}$.

Предложение 1.7. (M, ρ) – метрическое пространство. $A \subset M \Rightarrow \text{Cl } A$ – это:

1. $\text{Int } A \cup \partial A = M \setminus \text{Ex } A = M \setminus \text{Int}(M \setminus A)$
2. $\bigcap_{\substack{Z \text{ замкнуто} \\ Z \supset A}} Z$
3. Наименьшее замкнутое множество, которое содержит A .

Доказательство. (2) \Leftrightarrow (3): наименьшее замкнутое множество, содержащее A входит в пересечение, т.е. пересечение заведомо не больше. Пересечение замкнуто как пересечение замкнутых множеств, и оно содержит A , значит оно не меньше, чем наимень-

шее.

(1) \Leftrightarrow (2): $x_0 \in \text{Ex } A \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : B(x_0, \varepsilon) \in \text{Ex } A$ (B открыт).
 $M \setminus B(x_0, \varepsilon) \supset A$ – замкнуто. Если $x_0 \in \text{Ex } A \Rightarrow x_0 \notin \bigcap_{\substack{Z \text{ замкнуто} \\ Z \supset A}} Z$.

Если $x_0 \notin \text{Ex } A$, допустим, что $x_0 \notin \bigcap_{\substack{Z \text{ замкнуто} \\ Z \supset A}} Z$. Значит существу-

ет замкнутое $Z_i : x_0 \notin Z_i$, тогда x_0 лежит в открытом $M \setminus Z_i$. Но $\exists \varepsilon > 0 : B(x_0, \varepsilon) \in M \setminus Z \subset M \setminus A \Rightarrow x_0 \in \text{Ex } A$. ■

Предложение 1.8. U – открытое, Z – замкнутое.

$U \setminus Z$ – открытое

$Z \setminus U$ – замкнутое

Доказательство.

$$U \setminus Z = U \cap (M \setminus Z),$$

где U и $M \setminus Z$ открытые, значит их пересечение открыто.

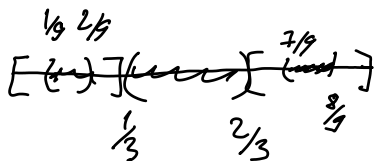
$$Z \setminus U = Z \cap (M \setminus U),$$

где Z и $M \setminus U$ замкнутые, значит их пересечение замкнуто. ■

Следствие 1.8.1. $\text{Cl } A$ замкнуто, $\text{Cl } A = M \setminus \text{Ex } A$.

∂A замкнуто, $\partial A = \text{Cl } A \setminus \text{Int } A$.

Пример 1.9. Канторово множество.

$K :$  и т.д.

$$K = \left([0; 1] \setminus \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3} \right) \right) \setminus \left(\left(\frac{1}{9}; \frac{2}{9} \right) \cup \left(\frac{7}{9}; \frac{8}{9} \right) \right) \setminus \dots$$

Мера $K = 0$:

$$1 - \frac{1}{3} - \frac{2}{9} - \frac{4}{27} - \dots = 1 - \frac{1}{3} \left(1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \dots \right) = 1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - (2/3)} = 1 - \frac{1}{3} \cdot 3 = 0$$

K несчетно. $K = \{0.a_1a_2a_3\ldots : a_i = \{0, 2\}\}$ в троичной системе.

K равномощно множеству двоичных бесконечных последовательностей. K замкнутое множество.

Теорема 1.9. (M, ρ_1) и (M, ρ_2) – два метрических пространства на M . Пусть существует $C > 0 : \forall x, y$

$$\rho_1(x, y) \leq C\rho_2(x, y)$$

Тогда, если множество U открыто в (M, ρ_1) , то U открыто и в (M, ρ_2) .

Доказательство. U открыто в (M, ρ_1) . $\forall x_0 \in U \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : B_{\rho_1}(x_0, \varepsilon) \subset U$, то есть, если $\rho_1(x_0, x_1) < \varepsilon \Rightarrow x_1 \in U$. Пусть $\delta = \frac{\varepsilon}{C}$ и x_1 – точка, такая что $\rho_2(x_1, x_0) < \delta$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \rho_1(x_1, x_0) &\leq C\rho_2(x_1, x_0) < C\delta = \varepsilon \\ \Rightarrow B_{\rho_2}(x_0, \delta) &\subset B_{\rho_1}(x_0, \varepsilon) \subset U \end{aligned}$$

тогда U открыто в ρ_2 . ■

Следствие 1.9.1. В \mathbb{R}^n $\rho_1, \rho_2, \rho_\infty$ порождают один и тот же набор открытых множеств.

Доказательство. $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$

$$\rho_1(x, y) \stackrel{1}{\geq} \rho_2(x, y) \stackrel{2}{\geq} \rho_\infty(x, y)$$

$$\sum |x_i - y_i| \geq \sqrt{\sum (x_i - y_i)^2} \geq \max(x_i, y_i)$$

Докажем 1:

$$\left(\sum |x_i - y_i|\right)^2 \geq \sum (x_i - y_i)^2$$

Докажем 2:

$$\sum (x_i - y_i)^2 \geq \max |x_i - y_i|^2$$

$\rho_1(x, y) \leq n\rho_\infty(x, y)$, где n – размерность пространства

$$\sum_{i=1}^n |x_i - y_i| \stackrel{?}{\leq} n \cdot \max(x_i - y_i)$$

У всех метрик одинаковые открытые множества. ■

Замечание. В дискретной метрике ($\rho(x, y) = 1$ при $x \neq y$) любое множество открытое.

Теорема 1.10. (M, ρ) – метрическое пространство. Срезающая метрика:

$$\rho_1(x, y) = \begin{cases} \rho(x, y) & \rho(x, y) \leq 1 \\ 1 & \rho(x, y) > 1 \end{cases}$$

1. ρ_1 – метрика
2. Набор открытых множеств у ρ и ρ_1 одинаков.

Доказательство. Докажем 1: ρ_1 – метрика.

1. $\rho_1(x, y) \geq 0$ и $\rho_1(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ – очевидно
2. $\rho_1(x, y) = \rho_1(y, x)$ – очевидно
3. $\rho_1(x, z) \stackrel{?}{\leq} \rho_1(x, y) + \rho_1(y, z)$

$$\begin{aligned} \rho_1(x, z) &\leq \rho_1(x, y) + \rho_1(y, z) \\ \begin{bmatrix} \rho(x, z) \\ 1 \end{bmatrix} &\leq \begin{bmatrix} \rho(x, y) \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \rho(y, z) \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Докажем 2: U открыто в ρ_1 , значит U открыто в ρ :

$$\rho_1(x, y) \leq 1 \cdot \rho(x, y)$$

Пусть U открыто в ρ , тогда для любого $x_0 \in U \exists \varepsilon > 0 : B(x_0, \varepsilon) \subset U$. Пусть $\varepsilon < 1$, тогда $B_\rho(x_0, \varepsilon) = B_{\rho_1}(x_0, \varepsilon) \subset U$, значит U открыто в ρ_1 . ■

Глава 2

Топологические пространства

2.1. Топологические пространства

Пример 2.1. В \mathbb{R}^2

$$\rho_p((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = (|x_1 - x_2|^p + |y_1 - y_2|^p)^{1/p} \quad \forall p \geq 1$$

$$\rho_\infty = \max\{|x_1 - x_2|; |y_1 - y_2|\}$$

$$\rho_{\text{срезающая}}(A, B) = \begin{cases} \rho_i(A, B) & \text{если } \rho_i(A, B) \leq 1 \\ 1 & \text{если } \rho_i(A, B) > 1 \end{cases}$$

$$\rho'(A, B) = \frac{\rho(A, B)}{1 + \rho(A, B)}, \quad \rho'(A, B) < 1$$

У всех этих метрик одинаковые открытые множества

Вывод: метрические пространства не всегда удобны.

Определение 2.1. Пусть X – множество, а Ω – система подмножеств X . ($\Omega \subset 2^X$ – множество всех подмножеств X) Пара (X, Ω) называется топологическим пространством, если

1. $\forall \{U_i\}_{i \in I} \subset \Omega \implies \bigcup_{i \in I} U_i \in \Omega$
2. $U_1, U_2 \in \Omega$, тогда $U_1 \cap U_2 \in \Omega$
3. $\emptyset, X \in \Omega$

Определение 2.2. Ω называется топологией на X . Любое $U \in \Omega$ называется открытым подмножеством X .

Определение 2.3. (X, Ω) – топологическое пространство. $F \subset X$. F назовем замкнутым, если $X \setminus F$ – открыто, т.е. $X \setminus F \in \Omega$.

Теорема 2.1 (Свойства замкнутых подмножеств).

1. $\forall \{F_i\}_{i \in I}$ – замкнутые, то $\bigcap_{i \in I} F_i$ замкнуты
2. F_1, F_2 – замкнутые, то $F_1 \cup F_2$ замкнуты
3. \emptyset, X – замкнуты

Доказательство. Переход к дополнениям множеств и свойства объединения, пересечения и разности множеств. ■

Таким образом топологическое пространство можно задавать при помощи замкнутых множеств.

Пример 2.2. Метрическая топология: (X, ρ) – метрическое пространство, Ω – множество всех открытых подмножеств. U называется открытым, если $\forall x_0 \in U \exists \varepsilon > 0 : B(x_0, \varepsilon) := \{x \in X : \rho(x, x_0) < \varepsilon\} \subset U$.

Пример 2.3. Дискретная топология: X – множество, $\Omega = 2^X$ (любое подмножество открыто).

Пример 2.4. Антидискретная топология: X – множество, $\Omega = \{\emptyset, X\}$.

Замечание. 2 пример – частный случай 1-ого.

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$$

$$B(x_0, 1/2) = \{x_0\} \text{ – открыто}$$

А если любая точка открыта, значит любое подмножество открыто

Определение 2.4. Топология называется метризуемой, если существует метрика ρ , порождающая данную топологию.

Антидискретная топология не метризуема.

$$a, b \in X. r := \rho(a, b). b \notin B(a, r/2), a \in B(a, r/2) \\ B(a, r/2) - \text{открыто}$$

Вопрос: (X, Ω) – топологическое пространство. Выяснить является ли оно метризуемым.

Пример 2.5. Топология конечных дополнений (Зариского). X – бесконечное множество. F называется замкнутым, если F конечно или $F = X$. $\Omega := \{X \setminus F : F \text{ конечно или } F = X\}$

Теорема 2.2 (Гильберта о базисе). Любой идеал $I \subset F[x_1, x_2, \dots, x_n]$ порождается конечным набором многочленов.

Пример 2.6. Развитие предыдущего примера. F – поле (в алгебраическом смысле). $F^n = F \times F \times \dots \times F$ – координатное пространство. f_1, f_2, \dots, f_k – некоторые многочлены от n переменных с коэффициентами в поле F . Тогда множество совместных корней этих многочленов назовем замкнутым множеством:

$$G = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : \forall i = 1 \dots k f_i(x_1, \dots, x_n) = 0\}$$

Это семейство замкнутых множеств порождает топологию.

$$I = \{f_1 g_1 + f_2 g_2 + \dots + f_k g_k : g_i - \text{любые многочлены от } n \text{ переменных}\}$$

идеал, порожденный f_1, \dots, f_n

По теореме 2.2 возникает соответствие $G \leftrightarrow I$. Это биекция, только если F алгебраически замкнуто (по теореме Гильберта о нулях).

Зачем это надо?

$$x^n + y^n - z^n = f(x, y, z) \\ n > 2, F = \mathbb{Q}$$

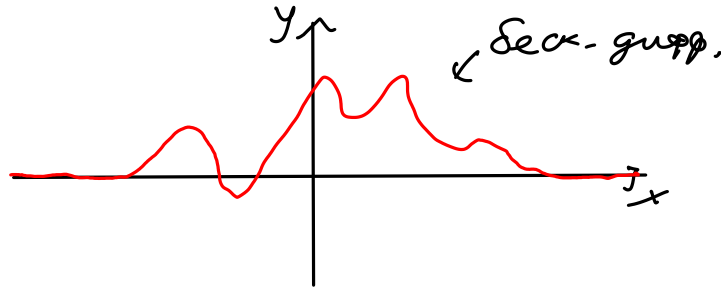
Существуют ли корни этого многочлена? А это великая теорема Ферма. $x^n + y^n - z^n = 0$ (Решения в \mathbb{Z} существуют, н.р. $x = y = z = 0$)

Пример 2.7. Стрелка. $X = \mathbb{R}$ (или \mathbb{R}_+).

$$\Omega = \{(a, +\infty) : a \in X\} \cup \{\emptyset\} \cup \{X\}$$

Это топология.

Пример 2.8. D – множество бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем, т.е. $f(x) = 0$ если $|x| > M$. ($\forall f \in D \exists M > 0$: если $|x| > M$, то $f(x) = 0$).



$$f_n(x) \rightrightarrows f(x) \text{ если } \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \forall x$$

Пусть $f_n(x)$ – последовательность функций в D . $f_n(x) \xrightarrow{D} f(x)$, если

1. $\exists M : \forall |x| > M \forall n f_n(x) = 0$
2. $f_n(x) \rightrightarrows f(x); f'_n(x) \rightrightarrows f'(x)$ и т.д.

$F \subset D$ называется замкнутым, если из $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}} \subset F$ и $f_n(x) \rightarrow f(x)$, следует $f(x) \in F$. Это порождает топологию на D .

2.2. Расположение точки относительно множества

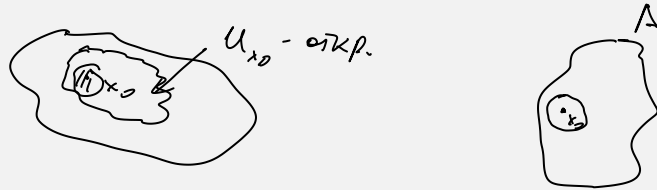
Определение 2.5. (X, Ω) – топологическое пространство. $x_0 \in X$. Окрестностью точки x_0 называется любое открытое подмножество $U_{x_0} : x_0 \in U_{x_0}$.

Определение 2.6. $A \subset X$ – подмножество. $x_0 \in X$.

x_0 – внутренняя точка для A , если \exists окрестность $U_{x_0} \subset A$

x_0 – внешняя точка A , если есть окрестность $U_{x_0} \cap A = \emptyset$ (т.е. $U_{x_0} \subset X \setminus A$)

x_0 называется граничной, если $\forall U_{x_0}$ неверно $U_{x_0} \subset A$ и неверно $U_{x_0} \subset X \setminus A$.



Определение 2.7. $\text{Int } A = \{x_0 \in X : x_0 \text{ – внутренняя для } A\}$

$\text{Ex } A = \{x_0 \in X : x_0 \text{ – внешняя для } A\}$

$\partial A = \{x_0 \in X : x_0 \text{ – граничная для } A\}$

$\text{Cl } A = \text{Int } A \cup \partial A$

Теорема 2.3.

$$1. \text{Int } A = \bigcup_{\substack{U_i \in \Omega \\ U_i \subset A}} U_i$$

$$2. \text{Ex } A = \bigcup_{\substack{U_i \in \Omega \\ U_i \cap A = \emptyset}} U_i$$

$$3. \text{Cl } A = \bigcap_{\substack{Z_i \text{ – замкнуто} \\ A \subset Z_i}} Z_i$$

Замечание. Часто именно это дается в качестве определения $\text{Int } A$, $\text{Ex } A$, $\text{Cl } A$, $\partial A = \text{Cl } A \setminus \text{Int } A$

Доказательство. Докажем 1: заметим, что $\bigcup_{\substack{U_i \in \Omega \\ U_i \subset A}} U_i \supset \text{Int } A$.

Потому что $\text{Int } A$ – множество внутренних точек, а каждая такая точка входит вместе с окрестностью. Значит все окрестности включаются в левую часть.

Почему $\bigcup_{\substack{U_i \in \Omega \\ U_i \subset A}} U_i \subset \text{Int } A$?

Возьмем x_0 из левой части, тогда $x_0 \in U_i \subset A$, значит U_i нужная окрестность, чтобы считать x_0 внутренней.

Докажем 2: аналогично 1.

Докажем 3: следует из 1 потому что $U_i := X \setminus F_i$.

$$\bigcap_{\substack{F_i - \text{замкнуто} \\ A \subset F_i}} F_i = \bigcap_{\substack{U_i - \text{открыто} \\ U_i \cap A = \emptyset \\ U_i \subset X \setminus A}} (X \setminus U_i) = X \setminus \bigcup_{\substack{U_i \in \Omega \\ U_i \subset X \setminus A}} U_i =$$

$$X \setminus \text{Ex } A = \text{Cl } A$$

■

2.3. Базы и предбазы

Определение 2.8. (X, Ω) – топологическое пространство. $\mathfrak{B} \subset 2^X$ (Точнее $\mathfrak{B} \subset \Omega$). \mathfrak{B} называется базой топологии Ω , если

$$\forall U \in \Omega \quad U = \bigcup_{i \in I} B_i \quad (\exists I \exists B_i) : B_i \in \mathfrak{B}.$$

Определение 2.9. \mathfrak{B} называется базой некоторой топологии, если существует $\Omega : \mathfrak{B}$ база топологии.

Замечание. Такая Ω единственна:

$$\Omega = \left\{ \bigcup_{i \in I} B_i : B_i \in \mathfrak{B} \right\}.$$

Пример 2.9. В \mathbb{R}^n $\mathfrak{B} := \{B(x, \varepsilon) : x \in \mathbb{R}^n; \varepsilon > 0\}$. \mathbb{R}^n можно заменить на любое метрическое пространство.

Пример 2.10. $X = \mathbb{N}$. \mathfrak{B} – множество арифметических прогрессий, тогда \mathfrak{B} база некоторой топологии. (обоснование позже)

Пример 2.11. (X, Ω) – дискретное пространство. \mathfrak{B} все одноточечные множества. \mathfrak{B} – база Ω .

Пример 2.12. $C(\mathbb{R}^n)$ – множество непрерывных функций из $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. (Это обобщается)

K_1, \dots, K_n – замкнутые и ограниченные подмножества \mathbb{R}^n . U_1, \dots, U_n – открытые множества в \mathbb{R} .

$$V_{K_1, \dots, K_n}^{U_1, \dots, U_n} := \{f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} - \text{непрерывно} : f(K_i) \subset U_i, i = 1, \dots, n\}$$

Множество таких $V_{K_1, \dots, K_n}^{U_1, \dots, U_n}$ – база некоторой топологии. Она называется компактно-открытая топология.

Теорема 2.4. (X, Ω) – топологическое пространство, $\mathfrak{B} \subset \Omega$, то \mathfrak{B} – база $\Omega \Leftrightarrow \forall U \in \Omega \forall x_0 \in U \exists B \in \mathfrak{B} : x_0 \in B \subset U$.

Доказательство. $U = \bigcup_{x_0 \in U} B_{x_0}$ ■

Теорема 2.5. X – множество, $\mathfrak{B} \subset 2^X$. \mathfrak{B} является базой некоторой топологии

$$\Leftrightarrow \forall B_1, B_2 \in \mathfrak{B} \forall x_0 \in B_1 \cap B_2 \exists B_3 \in \mathfrak{B} : x_0 \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$$

$$\text{и } \bigcup_{B \in \mathfrak{B}} B = X.$$

Замечание. Частный случай: Если $B_1 \cap B_2 \in \mathfrak{B}$, то \mathfrak{B} – база топологии.

Доказательство. Прямое доказательство: по предыдущей теореме. ($U := B_1 \cap B_2$)

Обратное доказательство: $\Omega := \{\bigcup_{i \in I} B_i : B_i \in \mathfrak{B}\}$. Ω – топология?

1. $U_i = \bigcup_{j \in J_i} B_{ij}$, ($B_{ij} \in \mathfrak{B}$), тогда

$$\bigcup_{i \in I} U_i = \bigcup_{i \in I} \bigcup_{j \in J} B_{ij} \in \Omega$$

2. $U_1 = \bigcup_{i \in I} B_i$, $U_2 = \bigcup_{j \in J} C_j$, $B_i, C_j \in \mathfrak{B}$,

$$B_i \cap C_j = \bigcup_{x_0 \in B_i \cap C_j} B_3(x_0, B_i \cap C_j),$$

$$\text{где } B_3(x_0, B_i \cap C_j) : x_0 \in B_3(x_0, B_i \cap C_j) \subset B_i \cap C_j.$$

Почему $U_1 \cap U_2 \in \Omega$?

$$U_1 \cap U_2 = \left(\bigcup_{i \in I} B_i \right) \cap \left(\bigcup_{j \in J} C_j \right) = \bigcup_{(i,j) \in I \times J} (B_i \cap C_j) =$$

$$\bigcup_{(i,j)} \bigcup_{x_0 \in B_i \cap C_j} B_3(x_0; B_i \cap C_j) \in \Omega$$

и каждое $B_3(x_0; B_i \cap C_j) \in \mathfrak{B}$

$$3. \emptyset = \bigcup_{i \in \emptyset} B_i, X = \bigcup_{B \in \mathfrak{B}} B$$

■

Определение 2.10. (X, Ω) – топологическое пространство. \mathfrak{A} называется предбазой Ω , если $\mathfrak{B} := \{\bigcap_{i=1}^n A_i : A_i \in \mathfrak{A}\}$ – база Ω . То есть предбаза – любой набор подмножеств, объединение которых X .

Определение 2.11. (X, Ω) – топологическое пространство. $\forall x_0 \in X$ задано \mathfrak{B}_{x_0} – множество некоторых окрестностей x_0 . $\mathfrak{B}_{x_0} \in \Omega$. Говорим, что $\{\mathfrak{B}_{x_0}\}_{x_0 \in X}$ является базой окрестностей точек Ω , если $\forall U \in \Omega \forall x_0 \in X : x_0 \in U \exists B(x_0, U) \in \mathfrak{B}_{x_0} : x_0 \in B(x_0, U) \subset U$.

Замечание. $\bigcup_{x_0 \in X} \mathfrak{B}_{x_0}$ – база Ω .

$$U = \bigcup_{x_0 \in U} B(x_0, U)$$

Пример 2.13. (M, ρ) – метрическое пространство, тогда $\mathfrak{B}_{x_0} = \{B(x_0, \varepsilon) : \varepsilon > 0\}$.

Теорема 2.6. X – множество. $\forall x_0 \in X \exists \mathfrak{B}_{x_0} \subset 2^X: (\mathfrak{B}_{x_0} \neq \emptyset)$

1. $\forall B \in \mathfrak{B}_{x_0} x_0 \in B$
2. $\forall B_1, B_2 \in \mathfrak{B}_{x_0} \implies \exists B_3 \in \mathfrak{B}_{x_0} : B_3 \in B_1 \cap B_2$
3. $\forall B_1 \in \mathfrak{B}_{x_0}, \forall x_1 \in B_1 \exists B_2 \in \mathfrak{B}_{x_1} : x_1 \in B_2 \subset B_1$

Если все это выполнено, то $\bigcup_{x_0 \in X} \mathfrak{B}_{x_0}$ – база некоторой топологии.

Доказательство. Смотри предыдущую теорему. ■

Глава 3

Непрерывные отображения

3.1. Непрерывные отображения

Определение 3.1. $(X, \rho), (Y, d)$ – метрические пространства. $f : X \rightarrow Y$ – отображение. Говорим, что f непрерывно в $x_0 \in X$, если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \text{если } \rho(x_1, x_0) < \delta \implies d(f(x_0), f(x_1)) < \varepsilon$.

Определение 3.2. f непрерывно если f непрерывно в любой точке.

Замечание. $f : X \rightarrow Y$ непрерывно в $x_0 \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : f(B_X(x_0, \delta)) \subset B_Y(f(x_0), \varepsilon)$.

Определение 3.3. (X, Ω_X) и (Y, Ω_Y) – топологические пространства. $f : X \rightarrow Y$ – отображение. f называется непрерывным в точке $x_0 \in X$, если $\forall U \in \Omega_Y : f(x_0) \in U \exists V \in \Omega_X : x_0 \in V : f(V) \subset U$

Теорема 3.1. (X, ρ) и (Y, d) метрические пространства. $f : X \rightarrow Y$ отображение. f непрерывно $\iff \forall U \subset Y, U$ открыто, $f^{-1}(U)$ открыто в X .

Доказательство. Прямое доказательство: f непрерывное, т.е. $\forall x_0 \forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon, x_0) > 0 : f(B_X(x_0, \delta)) \subset B_Y(f(x_0), \varepsilon)$. $\forall U \subset Y$ – открыто, $V := f^{-1}(U)$. Хотим доказать, что V открыто. $\forall x_0 \in V \Rightarrow f(x_0) \in U$. U – открытое, значит $\exists \varepsilon > 0 : B(f(x_0), \varepsilon) \subset U$. Тогда $\exists \delta > 0 : f(B_X(x_0, \delta)) \subset B_Y(f(x_0), \varepsilon) \subset U$. Если $f(B_X(x_0, \delta)) \subset U \Rightarrow B_X(x_0, \delta) \subset V$.

Обратное: $\forall x_0 \in X, \forall \varepsilon > 0$. $U := B(f(x_0), \varepsilon)$ открытое. Значит $f^{-1}(U)$ открыт, $x_0 \in f^{-1}(U)$, т.к. $f(x_0) \in U$. Тогда $\exists \delta > 0 : B(x_0, \delta) \subset f^{-1}(U)$. $f(B(x_0), \delta) \subset U := B(f(x_0), \varepsilon)$. ■

Определение 3.4. (X, Ω_X) и (Y, Ω_Y) – топологические пространства. $f : X \rightarrow Y$ – отображение. f называется непрерывным, если $\forall U \in \Omega_Y f^{-1}(U) \in \Omega_X$.

Замечание. X, Y – множества, $A, B \subset X; C, D \subset Y$.

$$\begin{aligned} f(A \cup B) &= f(A) \cup f(B) \\ f(A \cap B) &= f(A) \cap f(B) \text{ – неверно!} \\ f^{-1}(C \cup D) &= f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D) \\ f^{-1}(C \cap D) &= f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D) \end{aligned}$$

Почему неверно второе:

$$\begin{aligned} f(A \cap B) &= \{f(x_0) : x_0 \in A \cap B\} \\ f(A) \cap f(B) &= \{f(x_0) : x_0 \in A\} \cap \{f(y_0) : y_0 \in B\} = \\ &= \{f(x_0) = f(y_0) : x_0 \in A, y_0 \in B\} \end{aligned}$$

Почему неверны остальные – упражнение.

Определение 3.5. $f : X \rightarrow Y$ называется

1. непрерывным, если прообраз открытого множества открыт
2. непрерывным, если прообраз замкнутого замкнут
3. открытым, если образ открытого открыт
4. замкнутым, если образ замкнутого замкнут

$F \subset X$ замкнутое, $U := Y \setminus F$ открытое. $f^{-1}(Y \setminus U) = X \setminus f^{-1}(U)$ замкнуто, если U открыто. $f^{-1}(U)$ и $f^{-1}(Y \setminus U)$ не пересекаются и в объединении дают X .

Пример 3.1. $X = Y = \mathbb{R}$, на X дискретная топология, на Y стандартная, $f : X \rightarrow Y, f(x) = x$ непрерывно, но не открытое и не замкнутое.

U подмножество, не открытое в стандартной топологии, но открытое в дискретной.

Пример 3.2. Разница между открытым и замкнутым: рассмотрим отображения включения: $i : U \hookrightarrow X, i(x) = x$. Если

- U открытое множество, тогда i открытое
- U не открытое в X , тогда i не открытое отображение
- U замкнутое множество в X , тогда i замкнутое

3.2. Гомеоморфизмы

Определение 3.6. $f : X \rightarrow Y$ называется гомеоморфизмом, если

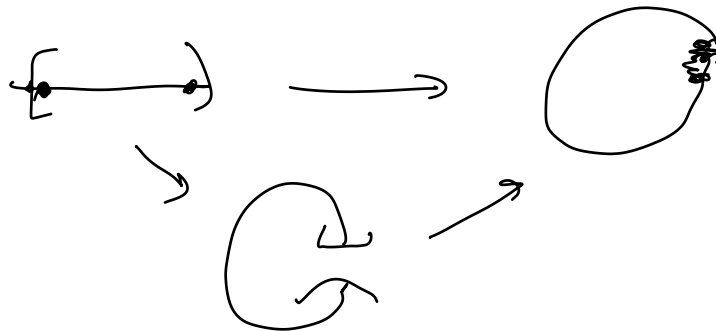
1. f непрерывно
2. f биективно
3. f^{-1} непрерывно

Пример 3.3. $X = Y = \mathbb{R}$, на X дискретная топология, на Y стандартная.

$f : X \rightarrow Y; f(x) = x$, f непрерывно и биективно, но не f^{-1} не непрерывно, не гомеоморфизм!

Пример 3.4. $X = [0, 2\pi)$, $Y = S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$

$f : X \rightarrow Y; f(t) = e^{it}$ — биекция и непрерывное отображение, но обратное не непрерывно:



Теорема 3.2. 1. Гомеоморфность, т.е. существование какого-то гомеоморфизма, есть эквивалентность

2. $f : X \rightarrow Y$ – гомеоморфизм, тогда f индуцирует биекцию между Ω_X и Ω_Y (и между замкнутыми множествами X и Y тоже)

Доказательство. Докажем 1: будем означать гомеоморфность символом эквивалентности: \sim . Пусть $X \sim X, id : x \mapsto x. id(X) = X$. Пусть $X \sim Y \Rightarrow \exists f : X \rightarrow Y$ – гомеоморфизм, тогда $f^{-1} : Y \rightarrow X$ – гомеоморфизм. Пусть $X \sim Y, Y \sim Z \Rightarrow X \sim Z$. $f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow Z, g \circ f : X \rightarrow Z$ – гомеоморфизм. Доказательство 2 очевидно ■

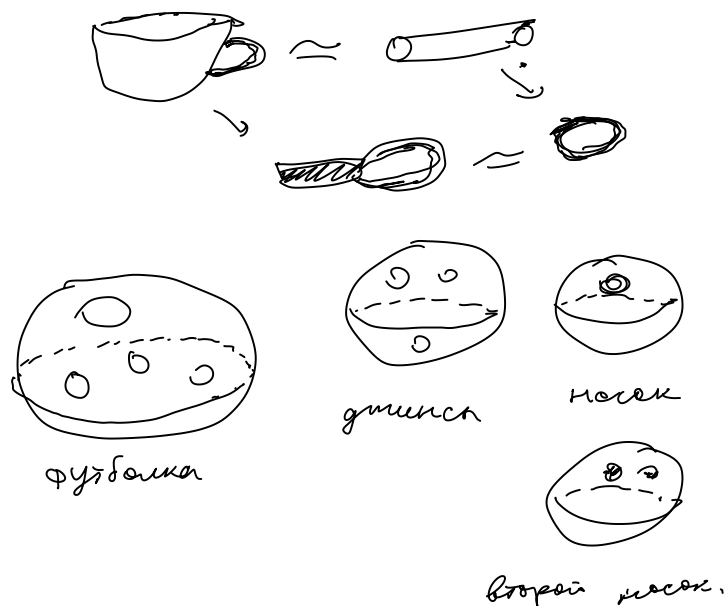
Пример 3.5. $(0, 1) \xrightarrow{f} (a, b) \xrightarrow{g} \mathbb{R}^{\text{нпр}} \xrightarrow{\sim} (0, +\infty)$

$$g : \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}; g(x) = \operatorname{tg} x$$

$$f(0, 1) \rightarrow (a, b); f(x) = (b - a)x + a$$

Но $(0, 1) \approx [0, 1]$. Почему? Нужно искать инварианты.

Пример 3.6. Шуточные примеры:



3.3. Инициальная топология

Прообраз топологии

$f : X \rightarrow Y$ отображение, (Y, Ω_Y) топологическое пространство. X пока нет. Цель: ввести топологию на X , т.ч. f непрерывно, топология на X слабейшая из возможных.

Определение 3.7. (X, Ω_1) и (X, Ω_2) топологические пространства. Говорим, что Ω_1 сильнее Ω_2 , если $\Omega_2 \subset \Omega_1$.

Определение 3.8. Самая слабая топология на X , т.ч. $f : X \rightarrow Y$ непрерывно, называется прообразом топологии Ω_Y

Теорема 3.3. Прообраз топологии существует.

Доказательство. $U \in \Omega_Y \implies f^{-1}(U)$ должен быть открыт в X . Прообраз $\Omega_X := \{f^{-1}(U) : U \in \Omega_Y\}$.

$$\begin{aligned} f^{-1}(U_1 \cap U_2) &= f^{-1}(U_1) \cap f^{-1}(U_2) \\ f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} U_i\right) &= \bigcup_{i \in I} f^{-1}(U_i) \\ f^{-1}(\emptyset) &= \emptyset, f^{-1}(Y) = X. \end{aligned}$$

■

Важный частный случай: (X, Ω_X) – топологическое пространство. $Y \subset X$. $i : Y \hookrightarrow X$. Тогда Y наделяется топологией.

Определение 3.9. Такая топология на Y называется индуцированной.

$V \subset Y$. V открыто в Y если $\exists U$ – открытое в X : $i^{-1}(U) = V = U \cap Y$.

Определение 3.10. Переформулируем: $V \subset Y$ называется открытым, если $\exists U$ – открытое в X : $U \cap Y = V$.

Замечание. V открыто в Y , но это не означает, что V открыто в X .

$Y = [0, 1]$, $X = \mathbb{R}$ со стандартной топологией. $U = (-1, 0.5)$ открыто в $\mathbb{R} = X$. $U \cap [0, 1] = [0, 0.5)$ открыто в Y , но не открыто в X .

Инициальная топология

Определение 3.11. X – множество. (Y_i, Ω_i) – топологические пространства. $f_i : X \rightarrow Y_i$. Хотим завести на X топологию, такую что все f_i непрерывны, а топология на X слабейшая из возможных. Такая топология называется инициальной.

Теорема 3.4. Инициальная топология существует и единственна.

Доказательство. $f_i^{-1}(U_i)$ должны быть открытыми, $U_i \subset Y_i$ открытые. Все такие множества – предбаза. По критерию базы:

$$\mathfrak{B} = \{f_{i_1}^{-1}(U_{i_1}) \cap \dots \cap f_{i_k}^{-1}(U_{i_k}) : U_{i_j} \in \Omega_{i_j}\}$$

является базой некоторой топологии. ■

Пример 3.7. (X, Ω_X) и (Y, Ω_Y) – топологические пространства. Как ввести топологию на $X \times Y$? Берем проекции на X и Y и инициальную топологию. Как ее описать? Далее.

Бесконечное произведение. Ликбез

$\{X_i\}_{i \in I}$ – семейство множеств. Пусть (X_i, Ω_i) – топологические пространства.

$$\prod_{i \in I} X_i = \{f : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} X_i : f(j) \in X_j\}$$

Пусть $\forall i \ X_i \neq \emptyset$. Почему $\prod_{i \in I} X_i \neq \emptyset$? Это равносильно аксиоме выбора.

Аксиома 3.5 (выбора). $\{X_i\}_{i \in I}$ – семейство непустых множеств. Тогда $\exists Y$ состоящее из элементов X_i (по одному элементу из каждого множества)

Лемма 3.6 (Цорна). X – непустое частично упорядоченное множество (введено отношение порядка, которое рефлексивно, антисимметрично и транзитивно). $\forall x_1 \leq x_2 \leq \dots \exists x_* : x_* > x_i \forall i$, тогда в множестве X существует максимальный элемент

Теорема 3.7 (Цермело). Любое непустое множество можно вполне упорядочить (ввести такой порядок, что любое подмножество будет иметь наименьший элемент).

Стандартное \leq на \mathbb{R} – неполный порядок, например $(0, 1)$ не имеет наименьшего.

Предположение 3.8. Аксиома выбора \Leftrightarrow лемме Цорна \Leftrightarrow теореме Цермело.

Теорема 3.9. У любого векторного пространства есть базис.

Доказательство. A – множество всех ЛНЗ наборов. $(A; \subset)$ – частично упорядоченное множество.

$$x_1 \subset x_2 \subset \dots \Rightarrow x_* = \bigcup_{i=1}^{\infty} x_i$$

по лемме Цорна существует максимальный элемент. Он и является базисом. ■

Декартово произведение

$$\begin{array}{ccc} X \times Y & \xrightarrow{p_X} & X \\ \downarrow p_Y & & \\ Y & & \end{array}$$

Есть $X \times Y$, $p_X(x, y) = x$, $p_Y(x, y) = y$

(X, Ω_X) , (Y, Ω_Y) – топологические пространства. На $X \times Y$ введем топологию (инициальную). $U \subset X$ открыто $p_X^{-1}(U) = U \times Y$. $V \subset Y$

открыто $p_Y^{-1}(V) = X \times V$.

$$\begin{aligned}(U_1 \times Y) \cap (U_2 \times Y) &= (U_1 \cap U_2) \times Y \\ (U \times Y) \cap (X \times V) &= U \times V\end{aligned}$$

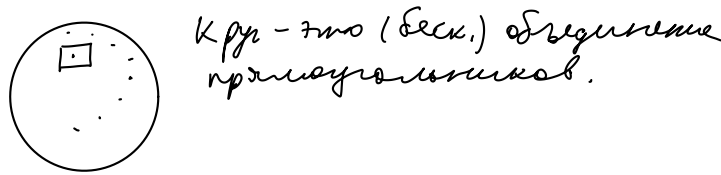
Таким образом $\{U \times V : U \in \Omega_X; V \in \Omega_Y\}$ – база топологии $X \times Y$

Иначе: множество $W \subset X \times Y$ является открытым, тогда и только тогда, когда $\forall (x_0, y_0) \in W \exists U_{x_0} \in \Omega_X, V_{y_0} \in \Omega_Y : x_0 \in U_{x_0}, y_0 \in V_{y_0}, U_{x_0} \times V_{y_0} \subset W$

Пример 3.8. Это совпадает с топологией на \mathbb{R}^2 :



Пример 3.9.



$\prod_{i \in I} X_i$ хотим снабдить топологией. $U \subset X_i$ – открыто, тогда $U \times \prod_{j \neq i} X_j$ – открытое множество в инициальной топологии. Такие множества предбаза.

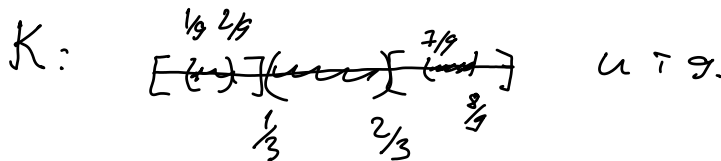
$$U_1 \times U_2 \times \dots \times U_k \times \prod_{j \neq 1, \dots, k} X_j$$

– база топологии.

НО $U_i \subset X_i$ открыто, $\prod U_i$ не является открытым в $\prod X_i$!

Свойство 3.1. Если на X_i дискретная топология, то $\prod_{i \in I} X_i$ не является дискретным пространством, если I бесконечно

В частности счетное произведение $\{0, 1\} \times \{0, 1\} \times \dots = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ не дискретно. Такое множество гомеоморфно K – канторову множеству.



Свойство 3.2. 1. $l(K) = 0$. $l(K) = 1 - (1/3 + 2/9 + 4/27 + \dots)$

2. K замкнуто
3. K состоит из чисел без 1 в троичной записи. $1/3 = 0.1 = 0.022222\dots$ в троичной записи
4. $K \simeq \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ – гомеоморфизм. $K = \{0.a_1a_2a_3\dots : a_i \in \{0, 2\}\}$ (не очень простое упражнение)
5. K несчетно
6. $K \simeq K \times K$, по пункту 4: $\{0, 1\}^{\mathbb{N}} \times \{0, 1\}^{\mathbb{N}} = \{0, 1\}^{\mathbb{N}^2}$, а $\mathbb{N}^2 \sim \mathbb{N}$, поэтому $\{0, 1\}^{\mathbb{N}^2} \simeq \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$

3.4. Финальная топология

(X_i, Ω_i) – топологические пространства ($i \in I$). $f_i : X_i \rightarrow Y$, Y – множество. Хотим задать топологию на Y так, чтобы f_i было непрерывным и эта топология была сильнейшей из возможных.

Определение 3.12. Такая топология называется финальной.

Теорема 3.10. Финальная топология существует и единственна.

Доказательство. $U \subset Y$ открыто, если $\forall i \ f_i^{-1}(U)$ открыто в X_i (другие множества все равно не можем назвать открытыми). Такие U образуют топологию:

- \emptyset и Y – открытые
- U_1, \dots, U_k – открытые, значит $U_1 \cap \dots \cap U_k$ открыто?

$$\forall i \ f_i^{-1}(U_1 \cap \dots \cap U_k) = f_i^{-1}(U_1) \cap \dots \cap f_i^{-1}(U_k)$$

каждое $f_i^{-1}(U_k)$ открыто в X_i , их пересечение тоже открыто в X_i

•

$$f_i^{-1} \left(\bigcup_{j \in J} U_j \right) = \bigcup_{j \in J} f_i^{-1}(U_j)$$

открыто в X как объединение открытых.

■

Пример 3.10. $(X_1, \Omega_1), (X_2, \Omega_2)$ – непересекающиеся топологические пространства. $Y = X_1 \sqcup X_2$. Хотим ввести топологию на Y . Введем финальную топологию:

$$\begin{aligned} X_1 &\xrightarrow{i_1} X_1 \cup X_2 \xleftarrow{i_2} X_2 \\ U &\subset X_1 \cup X_2 \\ U_1 &= U \cap X_1 \quad U_2 = U \cap X_2 \\ U_1 &= i_1^{-1}(U) \quad U_2 = i_2^{-1}(U) \end{aligned}$$

U_1 и U_2 открыты $\Leftrightarrow U$ открыто. Аналогично вводим топологию на $\bigsqcup X_i$, U называем открытым, если $U \cap X_i$ открыто в $X_i \forall i$.

Замечание. $X_1 = (0, 1), X_2 = [1, 2)$. Топология на $X_1 \sqcup X_2$ не совпадает с топологией на $(0, 2)$!

$U_1 = \emptyset, U_2 = [1, 1.5]$ открыты в X_1 и X_2 соответственно. $[1, 1.5)$ открыто в $X_1 \sqcup X_2$.

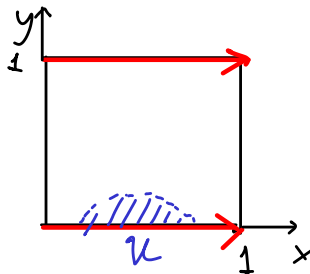
Или $\forall X = \bigcup_{x_i \in X} \{x_i\}$. На каждом $\{x_i\}$ дискретная топология, тогда $\bigsqcup \{x_i\}$ имеет дискретную топологию.

Пример 3.11. (X, Ω) – топологическое пространство, \sim – отношения эквивалентности на X . Пусть $\exists p : X \rightarrow X/\sim$. На X/\sim естественным образом вводится финальная топология. $U \subset X/\sim$ открыто $\Leftrightarrow p^{-1}(U)$ открыто в X .

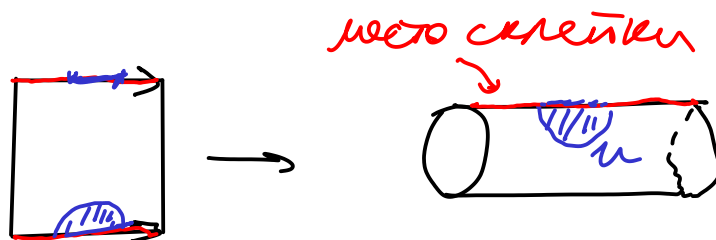
Топология фактор-множества

(X, Ω) – топологическое пространство, \sim – отношение эквивалентности на X . $p : X \rightarrow X/\sim$. На X/\sim вводится финальная топология. $\tilde{U} \subset X/\sim$ называется открытым, если $p^{-1}(\tilde{U})$ открыто в X .

Пример 3.12. Склеивание. Хотим отождествлять некоторые пары точек.

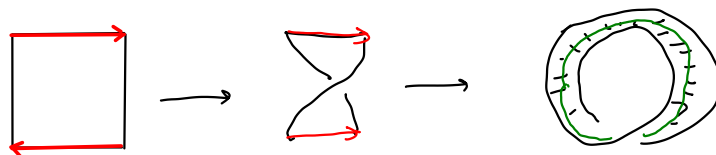


Склеим горизонтальные стороны квадрата как нарисовано. $(x, 0) \sim (x, 1)$, а остальные эквиваленты только себе.



U открыто в квадрате, U не открыто в цилиндре, т.к. $p^{-1}(U)$ не открыто.

Лента Мёбиуса:



Свойства ленты Мёбиуса:

- только одна сторона
- только один край
- средняя линия не делит на части
- на ленте Мёбиуса можно нарисовать полный граф на шести вершинах без пересечения ребер (упражнение) [На плоскости только K_4]
- на ленте Мёбиуса любая карта красится в 6 цветов (довольно просто) [Для плоскости 4 цвета, очень сложно]

Теорема 3.11 (Жордана). Замкнутая непересекающаяся кривая на плоскости делит плоскость ровно на две компоненты связности. Ровно одна из них ограничена.

Теорема 3.12 (Эйлера). Для плоскости:

$$\begin{aligned} (\text{количество вершин}) + (\text{количество граней}) = \\ = (\text{количество ребер}) + 2 \end{aligned}$$

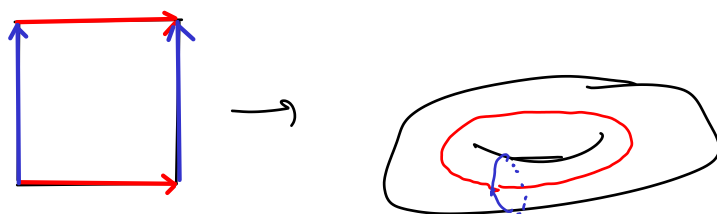
(для связного графа с непересекающимися ребрами)

Для ленты Мёбиуса:

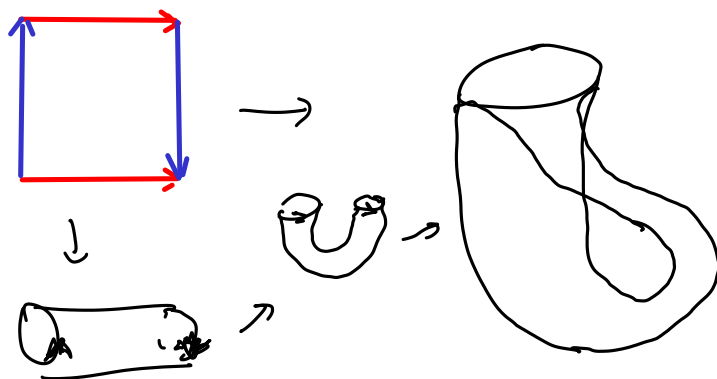
$$B + \Gamma = P + \chi$$

где $\chi = 1$, если есть цикл, опоясывающий ленту, или 2.

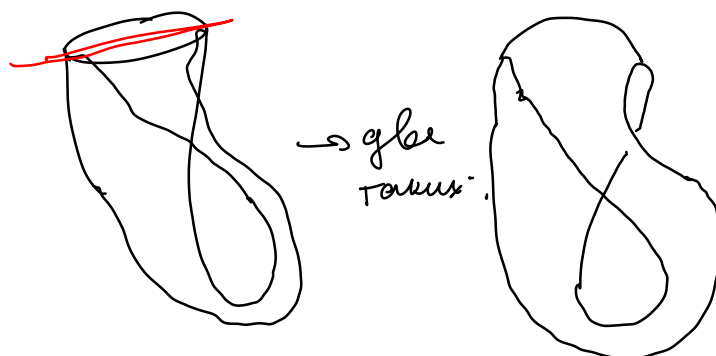
Тор:



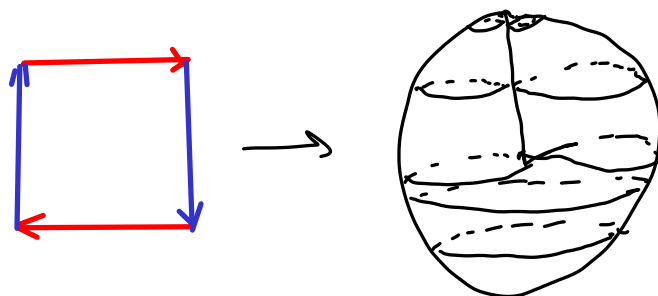
Бутылка Клейна:



Бутылка Клейна – это 2 склеенные ленты Мёбиуса:

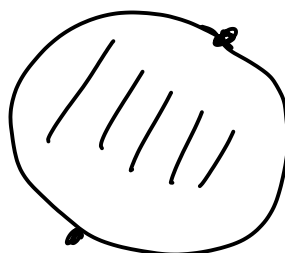


1. Проективная плоскость

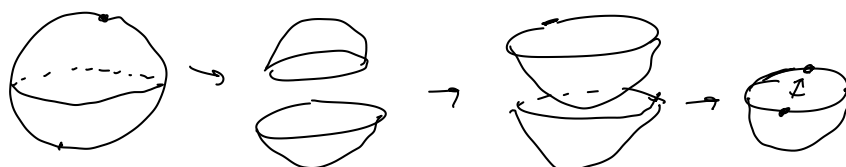


Другие интерпретации проективной плоскости ($\mathbb{R}P^2$):

2. $x \sim -x$ (x – крайняя точка круга)



3. $S^2/x \sim -x$

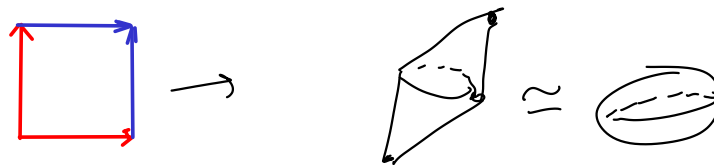


4. $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} / (x, y, z) \sim (\lambda x; \lambda y; \lambda z)$

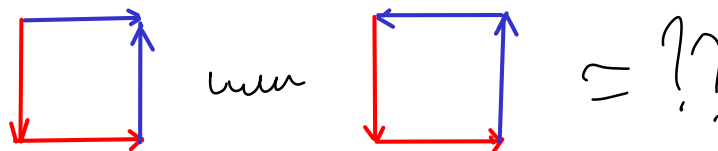
5. Множество прямых в \mathbb{R}^3 , проходящих через $(0, 0, 0)$. Метрика - угол между прямыми
6. $\{[x : y : z] : x, y, z \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 + z^2 \neq 0\}$ – однородные координаты: $[x : y : z] = [\lambda x : \lambda y : \lambda z]$. $Ax + By + Cz = 0$ – уравнение любой прямой на проективной плоскости
7. $\mathbb{R}P^2 = \mathbb{R}^2 \cup \mathbb{R}^1 \cup \mathbb{R}^0$



Сфера:



Упражнение: что будет, если склеить по-другому?

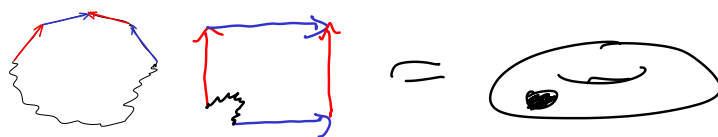


Еще: Если ленту повернуть на 2 полуоборота и склеить, то получится лента, гомеоморфная обычной. (в \mathbb{R}^2 не очевидно, в \mathbb{R}^4 переводится – упражнение)

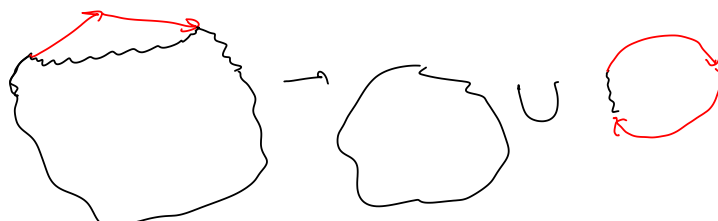


Поверхности:

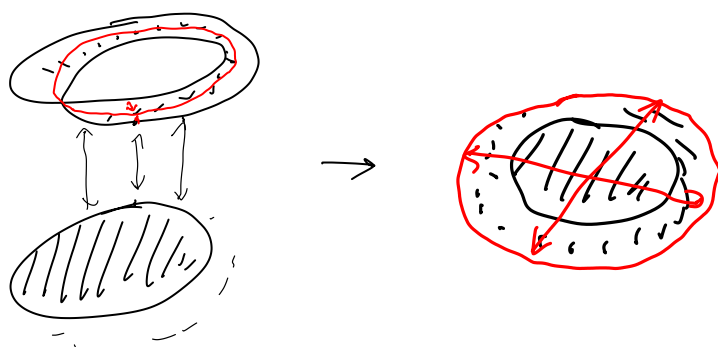
Поверхность можно задать, если есть многоугольник. Приклеивание ручки (тора):



Приклеивание пленки (ленты Мёбиуса):



Почему проективная плоскость с дыркой это лента Мёбиуса? Край ленты Мёбиуса – окружность.

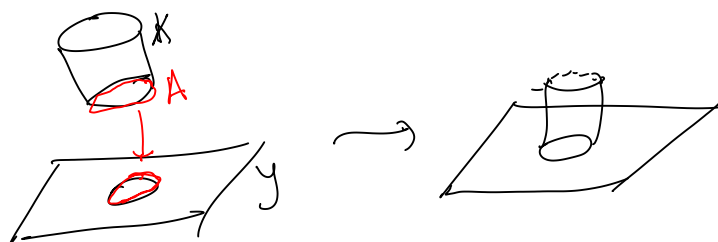


Теорема 3.13. (почти) Любая двумерная поверхность – либо сфера с k ручками, либо проективная плоскость с k ручками, либо бутылка Клейна с k ручками.

Проективная плоскость – сфера с пленкой, бутылка Клейна – сфера с 2 пленками.

Пример 3.13. Приклеивание. X, Y – топологические пространства. $A \subset X, f : A \rightarrow Y$ – непрерывное отображение.

Приклеивание: $X \sqcup_f Y = X \sqcup Y / a \sim f(a)$.



Глава 4

Связность

4.1. Связность

Связность

Определение 4.1. (X, Ω) – топологическое пространство. Если существуют $U_1, U_2 \subset \Omega$: $U_1 \cup U_2 = X$; $U_1 \cap U_2 = \emptyset$; $U_1, U_2 \neq \emptyset$, тогда X называется несвязным. Иначе X называется связным.

Переформулировки:

1. X несвязно $\Leftrightarrow U_1 = X \setminus U_2$, $U_1 \neq \emptyset$ и $U_1 \neq X$. U_1 открытое и U_1 замкнутое. X несвязно $\Leftrightarrow \exists U \neq \emptyset$; $U \neq X$; U открыто и замкнуто одновременно.
2. X связно $\Leftrightarrow \forall U_1, U_2 \in \Omega$, если $U_1 \cup U_2 = X$ и $U_1 \cap U_2 = \emptyset \Rightarrow U_1 = \emptyset$ или $U_2 = \emptyset$

Определение 4.2. (X, Ω) – топологическое пространство. $A \subset X$ называется связным, если A связно как топологическое пространство с индуцированной топологией.

Переформулировка: A связно $\Leftrightarrow \forall U_1, U_2 \in \Omega_X$, если $(U_1 \cap A) \cup (U_2 \cap A) = A$ (то есть $U_1 \cup U_2 \supset A$), $(U_1 \cap A) \cap (U_2 \cap A) = \emptyset$ (т.е. $U_1 \cap U_2 \cap A = \emptyset$), то есть или $U_1 \cap A = \emptyset$, или $U_2 \cap A = \emptyset$

Еще раз: A связно $\Leftrightarrow \forall U_1, U_2 \in \Omega_X$ если $U_1 \cup U_2 \supset A$ и $U_1 \cap U_2 \cap A = \emptyset$, то или $U_1 \cap A = \emptyset$, или $U_2 \cap A = \emptyset$

Пример 4.1. Антидискретное пространство связно, т.к. любое подмножество связно.

Пример 4.2. Дискретное пространство. Если в дискретном пространстве больше 1 точки, то оно несвязно.

$$U_1 := \{x_0\} \quad U_2 = X \setminus U_1$$

Любое подмножество дискретного пространства, в котором больше 1 точки, несвязно

Пример 4.3. Топология Зариского (замкнутые = конечные). Конечные подмножества (более чем из 1 точки) несвязны. Бесконечные подмножества связны.

Если A – конечное подмножество, тогда в A топология такая: замкнутое = конечное = любое, значит в A дискретная топология. Если A – бесконечное и U открыто и замкнуто одновременно ($U \neq \emptyset, U \neq A$), тогда U – конечное и $A \setminus U$ – конечное, но так не бывает. Поэтому бесконечные связны, на них реализуется топология Зариского.

Пример 4.4. Стрелка на \mathbb{R} . Открытые – лучи $(a, +\infty)$. Стрелка связная. Потому что нет непересекающихся открытых подмножеств. Любое подмножество стрелки связно.

Пример 4.5. \mathbb{R} со стандартной топологией. $A = [0, 1] \cup [2, 3]$ – несвязно. Пусть $U_1 = (-\infty, 1.5), U_2 = (1.5, 4)$ – Ок. Или $V_1 = (-\infty, 2), V_2 = (1, +\infty)$ тоже Ок.

Теорема 4.1. Интервал $(0, 1)$ связан.

Доказательство. Пусть U_1, U_2 открыты в \mathbb{R} , $U_1 \cup U_2 \supset (0, 1)$, $U_1 \cap U_2 \cap (0, 1) = \emptyset$, $x_1 \in U_1 \cap (0, 1) \neq \emptyset$ и $x_2 \in U_2 \cap (0, 1) \neq \emptyset$. НУО считаем $x_2 > x_1$. Рассмотрим $[x_1; x_2]$

$$x_* := \sup\{x \in [x_1; x_2] \cap U_1\} \Rightarrow x_1 \leq x_* \leq x_2$$

1 случай: $x_1 < x_* < x_2$ (т.е. $x_* \neq x_1$; $x_* \neq x_2$)

Если $x_* \in U_1 \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : (x_* - \varepsilon; x_* + \varepsilon) \subset U_1$. $(x_* - \varepsilon; x_* + \varepsilon) \subset [x_1, x_2] \Rightarrow x_* + \varepsilon/2 \in U_1$ и $x_* + \varepsilon/2 \in [x_1; x_2] \Rightarrow x_*$ не \sup .

Если $x_* \in U_2 \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : (x_* - \varepsilon; x_* + \varepsilon) \subset U_2$. $(x_* - \varepsilon; x_* + \varepsilon) \subset [x_1, x_2] \Rightarrow x_*$ не является точной верхней гранью $U_1 \cap [x_1, x_2]$, т.к. $x_* - \varepsilon$ тоже верхняя грань. Получили противоречие.

2 случай: $x_* = x_1 \in U_1$

Если U_1 открыто, то $\exists \varepsilon > 0 : [x_1; x_1 + \varepsilon) \subset U_1$, далее случай 1.

3 случай: $x_* = x_2 \in U_2$ (упражнение) ■

Теорема 4.2. (X, Ω) – топологическое пространство. $A \subset X$, A связно. $A \subset B \subset \text{Cl } A \Rightarrow B$ связно.

Доказательство. Допустим, что B несвязно, тогда существуют U_1, U_2 открытые в X : $U_1 \cup U_2 \supset B$, $U_1 \cap U_2 \cap B = \emptyset$, $U_1 \cap B \neq \emptyset$ и $U_2 \cap B \neq \emptyset$.

$U_1 \cup U_2 \supset A$, $U_1 \cap U_2 \cap A = \emptyset$, но A связно, тогда НУО считаем $U_1 \cap A = \emptyset$

$B \subset \text{Cl } A$. $F := \text{Cl } A \cap (X \setminus U_1)$ замкнутое. $F \supset A$ и $F \subset \text{Cl } A \Rightarrow F = \text{Cl } A \Rightarrow X \setminus U_1 = \emptyset$, т.е. $U_1 \cap \text{Cl } A = \emptyset$ и $U_1 \cap B \neq \emptyset$ – противоречие. ■

Следствие 4.2.1. $\text{Cl } A$ связно, если A связно.

Замечание. A связно, $\text{Int } A$ не обязательно связна!

Теорема 4.3. (X, Ω) – топологическое пространство. A_1, A_2 связные и $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset \Rightarrow A_1 \cup A_2$ связное.

Доказательство. Допустим $A_1 \cup A_2$ несвязно. Тогда существуют $U_1, U_2 : U_1 \cup U_2 \supset A_1 \cup A_2$, $U_1 \cap U_2 \cap (A_1 \cup A_2) = \emptyset$, $U_1 \cap (A_1 \cup A_2) \neq \emptyset$, $U_2 \cap (A_1 \cup A_2) \neq \emptyset$.

Тогда с помощью U_1 и U_2 можно разбить A_1 : $U_1 \cup U_2 \supset A_1$, $U_1 \cap U_2 \cap A_1 = \emptyset$, но A_1 связно. НУО $U_1 \cap A_1 = \emptyset$. Пусть $x_0 \in A_1 \cap A_2$, тогда $x_0 \in U_2$.

Аналогично с A_2 : $U_1 \cup U_2 \supset A_2$, $U_1 \cap U_2 \cap A_2 = \emptyset$, но A_2 связно. тогда

- или $U_2 \cap A_2 = \emptyset$, но $x_0 \in A_2 \cap U_2$ – так не бывает
- или $U_1 \cap A_2 = \emptyset$, но $U_1 \cap A_1 = \emptyset \Rightarrow U_1 \cap (A_1 \cup A_2) = \emptyset$ – противоречие. ■

Теорема 4.4. $f : X \rightarrow Y$ непрерывно. $A \subset X$. A связно, значит $f(A)$ связно.

Доказательство. Допустим $f(A)$ несвязно $\Rightarrow \exists U_1, U_2$ – открытые в $Y : U_1 \cup U_2 \supset f(A)$, $U_1 \cap U_2 \cap f(A) = \emptyset$, $U_1 \cap f(A) \neq \emptyset$, $U_2 \cap f(A) \neq \emptyset$.

Заметим, что $U_1, U_2 \subset Y$. $V_1 := f^{-1}(U_1), V_2 := f^{-1}(U_2)$ – открыты в X . Тогда $V_1 \cup V_2 \supset A$, $V_1 \cap V_2 \cap A = \emptyset$. $V_1 \cap A \neq \emptyset$ и $V_2 \cap A \neq \emptyset$ получается, что A несвязное – противоречие. ■

Следствие 4.4.1. Если X связно, то X/\sim связно.

Следствие 4.4.2. Связность – топологическое свойство, т.е. сохраняется при гомеоморфизме.

Следствие 4.4.3. $\mathbb{R} \not\simeq \mathbb{R}^2$, т.к. $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y)\}$ связна, а $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ несвязна.

Следствие 4.4.4. \mathbb{R} связна, т.к. $\mathbb{R} \simeq (0, 1)$

Лемма 4.5. X связно $\Leftrightarrow \forall f : X \rightarrow \{0, 1\}; f$ непрерывно, тогда $f = \text{const}$

Доказательство. Если X связан, то $f(X)$ связно, то $f(x) = \{0\}$ или $f(x) = \{1\}$.

В обратную сторону: допустим X несвязно. Тогда $X = U_1 \cup U_2$, U_1, U_2 – открытые. $U_1, U_2 \neq \emptyset$ и $U_1 \cap U_2 = \emptyset \Rightarrow f(U_1) = 0$, $f(U_2) = 1$ отсюда f – непрерывно и $f \neq \text{const}$. ■

Теорема 4.6. $\{X_i\}_{i \in I} \forall X_i$ связно $\Leftrightarrow \prod_{i \in I} X_i$ связно.

Теорема 4.7. X, Y связны $\Leftrightarrow X \times Y$ связно.

Доказательство. В обратную сторону: $p_X : X \times Y \rightarrow X$ – непрерывно, если $X \times Y$ связно, то $p_X(X \times Y) = X$ связно по теореме 4.4.

Прямое доказательство: Допустим, что X, Y связны, но $X \times Y$ несвязно, тогда $\exists f : X \times Y \rightarrow \{0, 1\}$ непрерывно и сюръективно. $f(x_0, y_0) = 0, f(x_1, y_1) = 1$. Тогда чему равняется $f(x_1, y_0)$ пусть оно НУО равно 0. Рассмотрим $f|_{\{x_1\} \times Y}$. Пусть $g(y) := f(x_1, y)$, $g : Y \rightarrow \{0, 1\}$. g непрерывно, т.к. $g = f \circ h$, тогда $h(x, y) = (x_1, y)$ – проекция.

$$g(y_0) = f(x_1, y_0) = 0$$

$$g(y_1) = f(x_1, y_1) = 1$$

Y – связно. Противоречие с леммой, т.к. g непрерывно, но $f \neq \text{const}$. ■

Следствие 4.7.1. X_1, \dots, X_n связны $\Leftrightarrow X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ связно.

Следствие 4.7.2. \mathbb{R}^n связно. Полуплоскость $\simeq (0, +\infty) \times \mathbb{R}$ связно

4.2. Компоненты связности

Определение 4.3. (X, Ω) – топологическое пространство. K является компонентой связности X , если K связно и $\forall K' \supset K, K' \neq K$ несвязно. (т.е. K – максимальное связное подмножество X)

Теорема 4.8. Свойства компонент связности:

1. Компоненты связности совпадают или не пересекаются (отношение эквивалентности)
2. Компоненты связности замкнуты
3. Любое связное подмножество лежит в компоненте связности
4. $\forall x, y \in X$ лежат в одной компоненте связности тогда и только тогда, когда \exists связное $A : x, y \in A$

- Доказательство.**
1. $K_1 \neq K_2$ и $K_1 \cap K_2 \neq \emptyset$, то по теореме 4.3 $K_1 \cup K_2$ связно, значит K_1 и K_2 не компоненты
 2. $\text{Cl } K$ связно, значит $K = \text{Cl } K$
 3. Рассмотрим максимальное связное множество содержащее A . Это компонента связности содержащая A
 4. прямо: $x, y \in K$, тогда $A = K$, обратно: пункт 3



Замечание. Компонента связности не обязана быть открытой

Пример 4.6. Компоненты связности \mathbb{Q} – отдельные точки.

Замечание. Если есть конечное количество компонент связности, то они открыты.

K_1, \dots, K_n – компоненты. K_1 замкнуто, значит $U_1 = K_2 \cup K_3 \cup \dots \cup K_n$ открыто. Аналогично $U_i = X \setminus K_i$ открыто. $K_1 = U_2 \cap U_3 \cap \dots \cap U_n$ открыто.

Теорема 4.9. (X, Ω) – топологическое пространство. $\{K_i\}$ – компоненты связности. Эквивалентные определения:

1. K_i открыты
2. $X = \bigsqcup_i K_i$ (как топологическое пространство) На K_i задана топология. На X есть два топологических пространства: исходная и топология объединения $\bigsqcup_i K_i$
3. $\forall x_0 \in X \exists$ связная U_{x_0} – открытая окрестность

- Доказательство.** (1) \rightarrow (3) K_i – связная окрестность
 (3) \rightarrow (1) $K_i = \bigcup_{x_0 \in K_i} U_{x_0}$ открыто (U_{x_0} открытое связное)
 (2) \rightarrow (1), (3) упражнение



Упражнение: Есть X , K_i его компоненты. Есть Y , L_j – его компоненты, тогда $K_i \times L_j$ компоненты связности $X \times Y$.

4.3. Линейная связность

Определение 4.4. Путь в топологическом пространстве (X, Ω) – непрерывное отображение: $f : [0, 1] \rightarrow X$. $f(0)$ начало пути, $f(1)$ конец пути

Определение 4.5. x_0 и x_1 соединены путем, если существует путь с началом в x_0 и концом в x_1

Определение 4.6. X называется линейно связным, если любые две точки можно соединить путем.

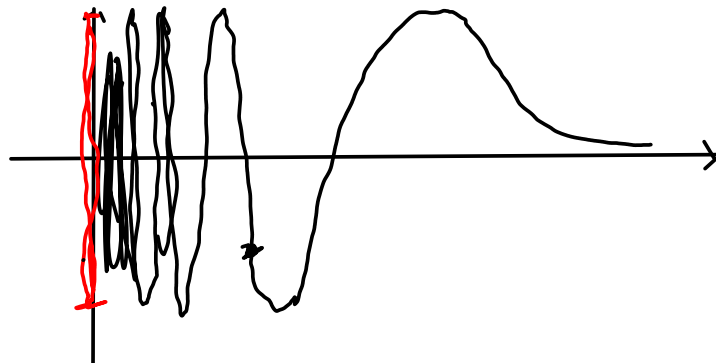
$A \subset X$ линейно связно, если A линейно связно как топологическое пространство (с индуцированной топологией) A линейно связно $\Leftrightarrow \forall x_0, x_1 \in A$ можно соединить путем в A .

Теорема 4.10. X линейно связно, значит X связно

Доказательство. Допустим X несвязно, тогда x_0, x_1 в разных компонентах связности. Рассмотрим $f : [0, 1] \rightarrow X : f(0) = x_0, f(1) = x_1$. Образ связного связан: $f([0, 1])$ связное, значит лежит в одной компоненте, но $f(0)$ и $f(1)$ в разных. Противоречие. ■

Замечание. Обратное неверно.

Пример 4.7. Контрпример: график функции $\sin \frac{1}{x} \cup [-1, 1]$ по OY



Иначе это $\text{Cl}(\text{график } \sin \frac{1}{x})$ – связное, но не линейно связное.

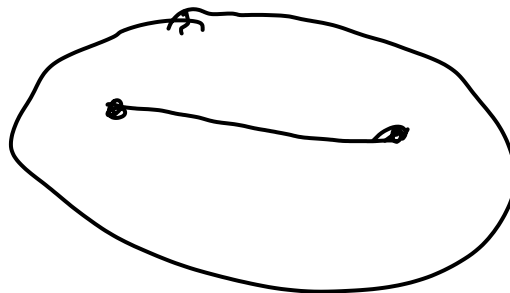
Замечание.

1. A линейно связное, $Cl A$ не обязательно линейно связное
2. Компоненты линейной связности не обязательно замкнуты
3. Отношения «соединены путем» – отношения эквивалентности:
 - Рефлексивность: $x_0 \sim x_0 : f(t) = x_0$
 - Симметричность: $f(t) : f(0) = x_0, f(1) = x_1, g(t) = f(1 - t) : g(0) = x_1, g(1) = x_0$
 - Транзитивность: $f(t)$ соединяет x_0 и x_1 , $g(t)$ соединяет x_1 и x_2 .

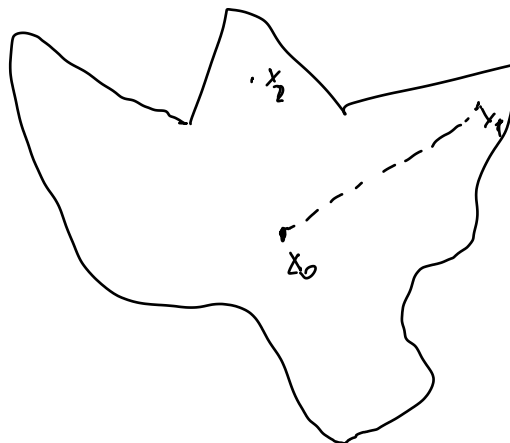
$$h(t) = \begin{cases} f(2t) & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ g(2t - 1) & t \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Пример 4.8. Выпуклые множества. A называется выпуклым, если для любой точки $x_0, x_1 \in A : [x_0, x_1] \subset A$. Такое множество линейно связно.

$$f(t) = (1 - t)x_0 + tx_1$$



Пример 4.9. Звездные множества \mathbb{R}^n . A называется звездным, если $\exists x_0 \in A : \forall x_1 \in A [x_0, x_1] \subset A$.



Замечание. Связность и линейная связность – топологические свойства.

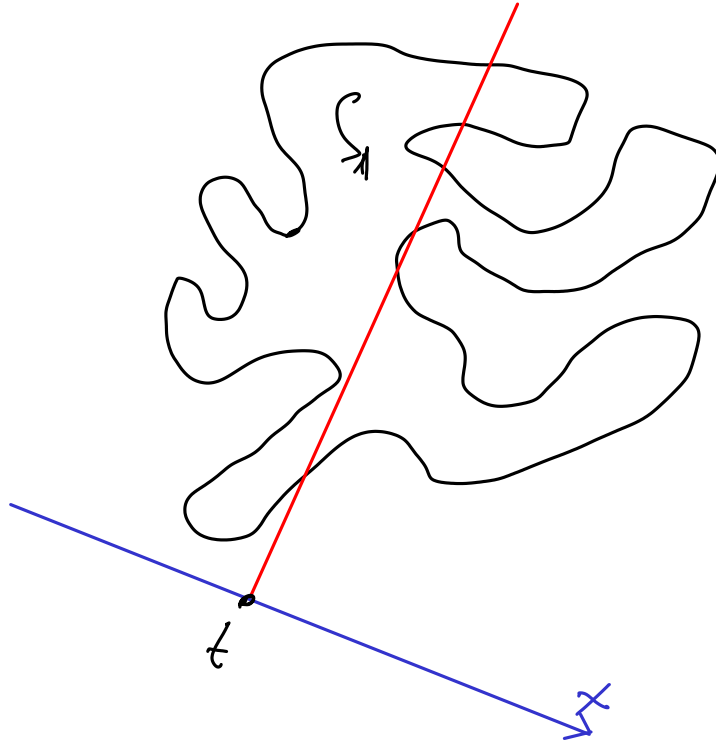
Теорема 4.11 (Вейерштрасса о промежуточном значении). X – связное пространство, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывная функция. $f(x_0) = a$, $f(x_1) = b$. Пусть $a \leq c \leq b \implies \exists x_* \in X : f(x_*) = c$

Доказательство. Допустим противное: $f^{-1}(c) = \emptyset$. Пусть $U_1 = (-\infty, c)$, $U_2 = (c, +\infty)$. Тогда $f^{-1}(U_1)$ и $f^{-1}(U_2)$ – открытые непересекающиеся подмножества. $f^{-1}(U_1) \cup f^{-1}(U_2) = X$. $x_0 \in f^{-1}(U_1)$ и $x_1 \in f^{-1}(U_2)$, значит X несвязно. ■

Пример 4.10. Блин – открытое связное ограниченное подмножество \mathbb{R}^2 . Его можно разрезать прямой на 2 равновеликие части.

$$f(t) = S_1 \quad f(-\infty) = 0 \quad f(+\infty) = S \implies \exists t : f(t) = S/2$$

(надо доказать непрерывность, например, f).



Глава 5

Компактность

5.1. Компактность

Определение 5.1. (X, Ω) – топологическое пространство,

$$\{U_i\}_{i \in I} \subset \Omega : \bigcup_i U_i = X.$$

Такое $\{U_i\}_{i \in I}$ – покрытие X . (точнее открытое покрытие)
 $\{V_j\}_{j \in J}$ называется подпокрытием $\{U_i\}_{i \in I}$, если $\forall j \exists i : V_j = U_i$ и $\{V_j\}$ – покрытие.

По умолчанию: покрытие = открытое покрытие.

Определение 5.2. X называется компактным, если $\forall \{U_i\}_{i \in I}$ – покрытия X можно выбрать U_{i_1}, \dots, U_{i_n} конечное подпокрытие.

В старых учебниках это называется бикompактностью.

Определение 5.3. $A \subset X$ компактно, если A компактно в индуцированной топологии или $\forall \{U_i\}_{i \in I} \subset \Omega : \bigcup U_i \supset A \exists U_{i_1}, \dots, U_{i_n} : \bigcup_{k=1}^n U_{i_k} \supset A$

Пример 5.1. X – антидискретное пространство, значит X компактно.

Пример 5.2. X – конечное, тогда X компактно

$X = \{x_1, \dots, x_n\}$ и $\{U_i\}_{i \in I}$ – некоторое покрытие. Различных U_i не более 2^n , поэтому считаем весь набор U_i конечным.

Пример 5.3. Бесконечное дискретное пространство не компактно.

$X = \bigcup_{x_i \in X} \{x_i\}$, $\{x_i\}$ – открыто. Ни одно из подмножеств нельзя выкинуть. Конечного подпокрытия быть не может.

Пример 5.4. Топология Зариского компактна.

Пусть $X = \bigcup_{i \in I} U_i$, $U_{i_0} = X \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Но $x_1 \in U_{i_1}, x_2 \in U_{i_2}, \dots, x_n \in U_{i_n}$. $\{U_{i_k}\}_{k=0}^n$ – покрытие X . Из этого следует, что $\forall A \subset X$ компактно.

Пример 5.5. Стрелка: топология на \mathbb{R} , где $(x; +\infty) + \emptyset + \mathbb{R}$ открытые. Сама по себе не компактна.

$U_i = (-i; +\infty), \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i = \mathbb{R}$. Но конечного набора, который бы давал \mathbb{R} не существует.

Какие подмножества стрелки являются компактными?

$A = [0, \infty)$, такое A компактно.

$B \subset \mathbb{R}$, B компактно тогда и только тогда, когда $\inf B \in B$. Если $\inf B = x_0$ и $x_0 \notin B$, тогда $U_n = (x_0 + 1/n; +\infty)$. Тогда $\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n \supset B$, но конечное подпокрытие выбрать нельзя.

Пример 5.6. $\mathbb{R}^{(n)}$ со стандартной топологией. Само по себе не компактно (см. стрелку): $U_i = (-i; +\infty)$

Какие подмножества \mathbb{R}^n компактны? Читайте далее!

Теорема 5.1. X – компактное пространство. A – замкнутое подмножество в X , тогда A компактно.

Доказательство. Пусть $\{U_i\}_{i \in I}$ покрывает A . $\{U_i\} \cup \{X \setminus A\}$ – открытое покрытие X , значит существует конечное подпокрытие. Уберем из него $X \setminus A$ (если есть), получим конечное подпокрытие A . ■

Теорема 5.2. $f : X \rightarrow Y$ непрерывно. $A \subset X$. A компактно, тогда $f(A)$ компактен.

Доказательство. Пусть $\{U_i\}_{i \in I}$ покрывают $f(A)$. Тогда $\{f^{-1}(U_i)\}$

открытое покрытие A . Тогда

$$\exists U_{i_1}, \dots, U_{i_n} : \bigcup_{k=1}^n f^{-1}(U_{i_k}) \supset A,$$

значит U_{i_1}, \dots, U_{i_n} покрывают $f(A)$ ■

Следствие 5.2.1. Компактность – топологическое свойство.

Теорема 5.3 (Тихонова). $\prod_{i \in I} X_i$ компактно $\Leftrightarrow \forall i X_i$ компактно.

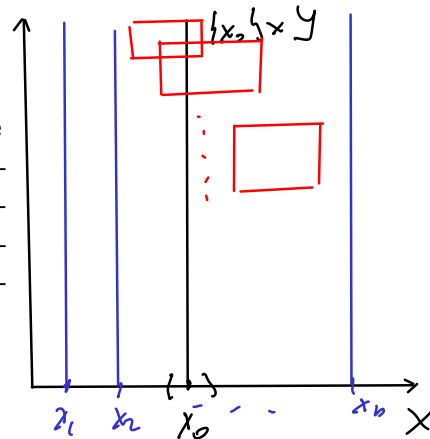
Доказательство. Не будет. ■

Теорема 5.4. X и Y компактны $\Leftrightarrow X \times Y$ компактно

Доказательство. В обратную сторону: $p : X \times Y \rightarrow X$ – проекция, она непрерывна. $X \times Y$ компактно, значит по теореме 5.2 $p(X \times Y) = X$ тоже компактно.

Прямо. рассмотрим любое открытое покрытие $X \times Y$:

1. Считаем, что это покрытие прямоугольными множествами, т.е. $\{U_i \times V_i\}_{i \in I}$, U_i открыто в X , V_i открыто в Y . Достаточно выбрать конечное подмножество из него.



2. $\forall x_0 \in X$, $\{x_0\} \times Y \simeq Y$ в $X \times Y$. Существует минимальное покрытие $U_1 \times V_1, \dots, U_n \times V_n$, которое покрывает $\{x_0\} \times Y$, значит V_1, \dots, V_n покрывает Y .

$W_{x_0} := \bigcap_{i=1}^n U_i$ – открытое в X подмножество. $x_0 \in W_{x_0}$, тогда $\{W_{x_0}\}_{x_0 \in X}$ – покрытие X , следовательно существует

W_{x_1}, \dots, W_{x_k} – конечное подпокрытие.

$$W_{x_j} \leftrightarrow \{U_{j_1} \times V_{j_1}, \dots, U_{j_{n_j}} \times V_{j_{n_j}}\}$$

Возьмем все множества, соответствующие W_j . Это конечный набор. Почему покрытие? $\forall (x, y) \in X \times Y$, $x \in W_{x_l}$, $(x_l, y) \in U_i \in V_i$ ($U_i \times V_i$ из нашего набора). $x \in U_i$ и $y \in V_i$, $(x, y) \in U_i \times V_i$

■

5.2. Компактность и хаусдорфовость

Аксиома 5.5 (Хаусдорфа). X называется хаусдорфовым, если $\forall x_0 \neq x_1 \in X \exists U_{x_0}, U_{x_1} : U_{x_0} \cap U_{x_1} = \emptyset$

Пример 5.7. Любое метрическое пространство хаусдорфово.

$$U_{x_0} = B(x_0, \rho(x_0, x_1)/2)$$

$$U_{x_1} = B(x_1, \rho(x_0, x_1)/2)$$

Замечание. X хаусдорфово, $A \subset X \implies A$ хаусдорфово.

Теорема 5.6. X – хаусдорфово пространство. $A \subset X$, A компактно в X , тогда A замкнуто.

Замечание. Докажем, что $X \setminus A$ открыто. Для этого возьмем любой $x_0 \in X \setminus A$. Найдем $U_{x_0} \cap A = \emptyset$

$$\bigcup_{x_0} = X \setminus A - \text{открыто}$$

Это базовая схема как доказать замкнутость подмножеств.

Доказательство. Рассмотрим $\forall y \in A \exists U_{x_0 y}$ и V_y – окрестности: $x_0 \in U_{x_0 y}$, $y \in V_y$, $U_{x_0 y} \cap V_y = \emptyset$ (по хаусдорфовости). $\{V_y\}_{y \in A}$ – покрывают A , тогда $\exists y_1, \dots, y_n : V_{y_1}, \dots, V_{y_n}$ – покрытие A , рассмотрим $\bigcap_{i=1}^n U_{x_0 y_i}$ открытое подмножество, не пересека-

ющеся с $V_{y_i} \forall i = 1, \dots, n$, значит $\bigcap_{i=1}^n U_{x_0 y_i}$ не пересекается с A . ■

Следствие 5.6.1. X – компактно и хаусдорфово, $A \subset X$, тогда A компактно $\Leftrightarrow A$ замкнуто.

Теорема 5.7. $f : X \rightarrow Y$ непрерывно. X компактно, Y хаусдорфово. $A \subset X$, A замкнутое, значит $f(A)$ замкнут.

Доказательство. A замкнуто, тогда по теореме 5.1 A компактно, значит по теореме 5.2 $f(A)$ компактен, тогда по теореме 5.6 $f(A)$ замкнут. ■

Следствие 5.7.1. $f : X \rightarrow Y$ непрерывное и биекция. X компактно. Y хаусдорфово. A открытое, тогда $f(A)$ открыт.

Доказательство. A открытое, значит $X \setminus A$ замкнутое, значит $f(X \setminus A)$ замкнут, значит $f(A)$ открыт.

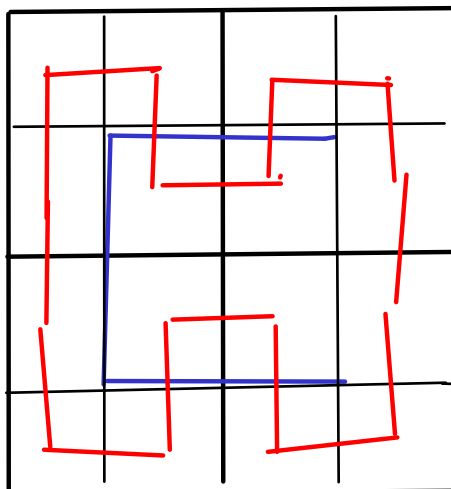
$$f(X \setminus A) = Y \setminus f(A), \text{ если } f \text{ биективно}$$

■

Следствие 5.7.2. $f : X \rightarrow Y$ непрерывная биекция, X компактно, Y хаусдорфово, тогда f гомеоморфизм.

Кривые Пеано: $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1] \times [0, 1]$ – непрерывное и сюръективное отображение.

В пределе непрерывная кривая, которая заметает весь квадрат. Кривая Пеано не может быть биективной!



5.3. Компактность в \mathbb{R}^n

Лемма 5.8 (Лебега). $I = [0, 1]$, $\{U_i\}$ – открытое покрытие I , тогда существует $\varepsilon > 0$ (число Лебега, зависит от покрытия): $\forall x_0 \in I (x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon) \subset U_i$ для некоторого i .

Доказательство. Допустим такого ε не существует. $\varepsilon_i := 1/2^i$ (или $\varepsilon_i \rightarrow 0$).

$\exists x_i : (x_i - \varepsilon_i; x_i + \varepsilon_i)$ не попадает ни в одно U_i . $\{x_i\}_{i=1}^\infty$ – последовательность точек I . $\exists x_{i_j} \rightarrow x_0$ в $[0, 1]$. $x_0 \in U_i$, U_i открыто, значит $\exists \varepsilon > 0 : (x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon) \subset U_i$

$\exists N_1$: если $j > N_1$, то $|x_0 - x_j| < \varepsilon/2$. Так же $\exists N_2 : \varepsilon_{N_2} < \varepsilon/2$. Выберем $N := \max\{N_1, N_2\}$, тогда

$$(x_{i_j} - \varepsilon_{i_j}; x_{i_j} + \varepsilon_{i_j}) \subset (x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon) \subset U_i$$

Противоречие, значит число Лебега существует. ■

Теорема 5.9. $[0, 1]$ компактен

Доказательство. $\{U_i\}$ покрывает $I = [0, 1]$, тогда по теореме 5.8 $\exists \varepsilon$ – число Лебега. $x_0 = 0, x_k = k\varepsilon \implies \exists N : x_N > 1$. Тогда $(x_{k-1}; x_{k+1}) = (x_k - \varepsilon; x_k + \varepsilon) \subset U_{i_k}$. Рассмотрим $U_{i_1}, U_{i_2}, \dots, U_{i_{N-1}}$ – покрытие $[0; 1]$. ■

Замечание. $(0, 1)$ не компактно. $U_k = (1/k, 1)$. Нельзя выбрать конечное подпокрытие

Следствие 5.9.1. $[a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ компактно в \mathbb{R}^n

Определение 5.4. $A \subset \mathbb{R}^n$, A называется ограниченным, если $A \subset B(0, N)$, такое N существует. Или $A \subset [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$

Теорема 5.10 (Компактность подмножества в \mathbb{R}^n). $A \subset \mathbb{R}^n$, A компактно $\Leftrightarrow A$ – замкнуто и ограничено.

Доказательство. Прямое доказательство A замкнуто по 5.6, A ограничено, иначе $\{B(0, n)\}_{n=1}^{\infty}$ – покрытие, из которого нельзя выбрать конечное.

Обратное доказательство: A ограничено, значит $A \subset X = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$, X компактно по 5.9.1, A замкнуто в X , значит по 5.1 A компактно. ■

Теорема 5.11. $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ – непрерывная функция, X компактен, тогда $\exists x_0 : f(x_0) \geq f(x) \forall x \in X$. (т.е. непрерывная функция на компакте достигает своего максимума)

Доказательство. $f(X)$ компактна в \mathbb{R} , значит $f(X)$ замкнута и ограничена. Ограничена, значит $\sup f(X) < +\infty$. Замкнута, значит $\sup f(X) \in f(X) \Rightarrow \sup$ достигается. ■

Пример 5.8. В прошлом семестре: брали квадратичную форму

$$F(x, y, z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz$$

Поворотом можно избавиться от двойных слагаемых.

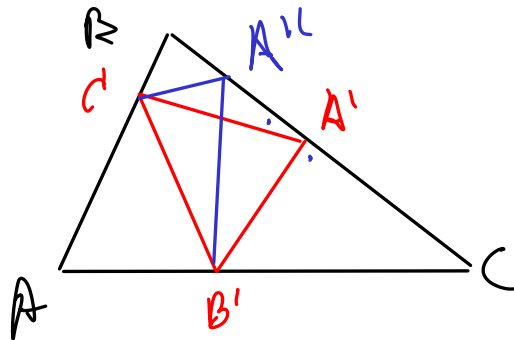
Для этого мы проецировали на сферу

$$F(x, y, z)|_{S^2} \quad S^2 := \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

(x_*, y_*, z_*) – максимум F на S^2

F – непрерывна, S^2 – компактна, значит существует максимум.

Пример 5.9 (Задача Фаньяно). ABC – остроугольный треугольник. Хотим выбрать $A' \in [BC], B' \in [AC], C' \in [AB]$, так чтобы $P_{A'B'C'} \rightarrow \min$. Ответ: это основания высот.

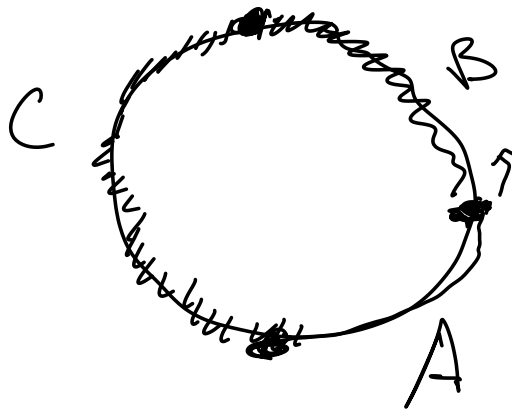


Пример 5.12. Есть n сотрудников, существует k групп из них, таких, что любые 2 группы пересекаются. Требуется доказать, что сотрудников можно расположить на окружности длиной 1, так чтобы любая группа была растянута по дуге не меньше чем $\frac{1}{3}$.

Решение: пусть x – расстановка сотрудников, $S(x)$ – минимальная длина дуги, которая покрывает какую-то группу.

Хотим доказать: $\exists x_* : S(x_*) \geq \frac{1}{3}$.

Возьмем x_* , для нее $S(x_*) = \max S \geq \frac{1}{3}$



5.4. Локальная компактность

Определение 5.5. X называется локально компактным, если

$$\forall x_0 \exists U_{x_0} : \text{Cl } U_{x_0} \text{ компактна}$$

Теорема 5.12 (Компактификация по П.С. Александрову). X – локально компактное хаусдорфово пространство, тогда

$$\exists \hat{X} = X \cup \{\infty\}$$

X – подпространство \hat{X} и \hat{X} – компактно и хаусдорфово.

Пример 5.13.

$$\mathbb{R} \cup \{\infty\} \simeq S^1$$

$$\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\} \simeq S^2$$

$$\mathbb{R}^n \cup \{\infty\} \simeq S^n$$

Доказательство. $\hat{X} = X \cup \{\infty\}$, но какая топология?

Пусть $U \subset \hat{X}$. Если $\infty \notin U$, то U открыто в $\hat{X} \Leftrightarrow U$ открыто в X .

Если $\infty \in U \Rightarrow U$ открыто $\Leftrightarrow X \setminus U$ компактно.

Это топология: $X \setminus U$ компактно, значит по хаусдорфовости замкнуто.

$$X \setminus \bigcup_{i \in I} U_i = \bigcap_{i \in I} (X \setminus U_i) \subset X \setminus U_{i_0}$$

$$X \setminus \bigcap_{i=1}^n U_i = \bigcup_{i=1}^n (X \setminus U_i) - \text{компактно}$$

Это топология, $X \subset \hat{X}$ (в смысле топологии) (упражнение)

Почему \hat{X} компактен?

$\{U_i\}_{i \in I}$ – покрытие \hat{X} , $\infty \in U_{i_0}$. $X \setminus U_{i_0}$ – компактно. (т.е. остальные множества покрывают компакт, можно выбрать конечное число)

\hat{X} – хаусдорфово?

$x, y \neq \infty$, тогда по хаусдорфовости $X \exists U_x, U_y : U_x \cap U_y = \emptyset$.

x, ∞ как определить? $\exists U_x : \text{Cl } U_x$ компактна. $U_\infty := \hat{X} \setminus \text{Cl } U_x$. U_∞ открыто в \hat{X} . ■

Замечание. Пересечение компактов не обязательно компакт! Но в хаусдорфовых пространствах пересечение компактов компактно. Потому что в хаусдорфовом пространстве компакт – это замкнутое подмножество некоторого компакта.

Замечание. Объединение конечного числа компактов – компакт.

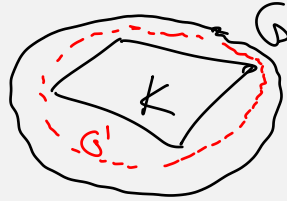
Пример 5.14. $\hat{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$.

$\infty \in U$. U открыто $\Leftrightarrow \mathbb{Q} \setminus U$ компактно.

Докажем, что ∞ и 0 не разделяются. Пусть они разделяются, тогда U_0 и U_∞ , $U_0 \supset (-\varepsilon, \varepsilon) \cap \mathbb{Q} \Rightarrow \hat{\mathbb{Q}} \setminus U_\infty$ не компактно.

Теорема 5.13.

1. X локально компактно и хаусдорфово, $x_0 \in X$, U_{x_0} – открытая окрестность x_0 , тогда $\exists V_{x_0} : \text{Cl } V_{x_0} \subset U_{x_0}$ и $\text{Cl } V_{x_0}$ компактно. (X локально компактно и хаусдорфово, $U \subset X$ открыто, тогда U локально компактно и хаусдорфово)
2. X локально компактно и хаусдорфово, $K \subset X$ компакт. $K \subset G$, G открытое, тогда \exists открытое $G' : G \supset \text{Cl } G' \supset G' \supset K$



Доказательство.

1. X локально компактно, значит существует $W_{x_0} : \text{Cl } W_{x_0}$ компактно. $x_0 \in X \ \forall y \notin U$. Существуют непересекающиеся окрестности $W_{x_0, y}$ и W_y . Если $y \in \text{Cl } W_{x_0} \cap (X \setminus U)$. $\text{Cl } W_{x_0} \cap (X \setminus U)$ компакт (пересечение замкнутых – замкнуто, оно подмножество $\text{Cl } W_{x_0}$ – компакт).

$\{W_y\}$ – покрытие $F \implies \exists$ конечное подпокрытие $y_1, \dots, y_n : \{W_{y_i}\}_{i=1}^n$ – подпокрытие F .

$V_{x_0} = \bigcap_{i=1}^n W_{x_0, y_i}$ – открытая окрестность x_0 .

$$\text{Cl } V_{x_0} \subset \bigcap_{i=1}^n \text{Cl } W_{x_0, y_i} \subset U$$

$$\text{Cl } W_{x_0, y_i} \subset X \setminus W_{y_i} \implies \bigcap \text{Cl } W_{x_0, y_i} \subset X \setminus \left(\bigcup_{i=1}^n W_{y_i} \right) \subset U$$

2. $K \subset U, \forall x \in K \exists V_x : V_x \subset \text{Cl } V_x \subset U$ (по 1 пункту).

$\{V_x\}_{x \in K}$ – покрытие K , значит существует конечное подпокрытие $\{V_{x_1}, \dots, V_{x_k}\}$.

$$G' := \text{Cl} \left(\bigcup_{i=1}^k V_{x+i} \right)$$

■

Глава 6

Аксиомы счетности

6.1. Сепарабельность

Определение 6.1. (X, Ω) – топологическое пространство. Говорят, что X обладает второй аксиомой счетности, если у X есть счетная база.

Определение 6.2. (X, Ω) – топологическое пространство. $A \subset X$ называется всюду плотным в X , если $\text{Cl } A = X$

Определение 6.3. X называется сепарабельным, если существует счетное всюду плотное множество в X .

Теорема 6.1. Из второй аксиомы счетности следует сепарабельность

Доказательство. $\{U_i\}_{i \in I}^\infty$ – счетная база. $x_i \in U_i \implies \{x_i\}_{i=1}^\infty$ – счетное всюду плотное. Тогда $\text{Cl}\{x_i\}_{i=1}^\infty = X$?
Допустим противное: $y \in \text{Ex}\{x_i\}_{i=1}^\infty$, значит $\text{Ex}\{x_i\}_{i=1}^\infty = \bigcup_j U_{i_j} \ni x_{i_j}$. Внешность множества $\{x_i\}_{i=1}^\infty$ содержит x_{i_j} – противоречие. ■

Замечание. Вторая аксиома счетности и сепарабельность – топологические свойства.

Здесь и далее в этой главе под словом «счетное» подразумевается «не более чем счетное».

Пример 6.1. X НБЧС, тогда X сепарабельно.

Пример 6.2. X – антидискретное, тогда вторая аксиома счетности и сепарабельность есть.

Пример 6.3. X – дискретное:

1. X счетное, тогда есть вторая аксиома счетности: база – одноточечные подмножества
2. X более чем счетное, нет ни сепарабельности, ни второй аксиомы счетности. $\text{Cl } A = A$ в дискретной топологии.

Пример 6.4. На \mathbb{R}^n со стандартной топологией, есть вторая аксиома счетности и сепарабельность

Рассмотрим $\mathfrak{B} = \{B(x, \varepsilon) : x, \varepsilon > 0 \in \mathbb{Q}\}$. Это счетная база. Возьмем $y_0 \in B(x_0, \varepsilon)$, где x_0, ε не обязательно рациональные. $\rho := \rho(x_0, y_0)$, тогда существует z_0 с рациональными координатами: $\rho(z_0, y_0) < \frac{\varepsilon - \rho}{2}$, выберем $r \in \mathbb{Q}_+$ $\rho(z_0, y_0) < r < \frac{\varepsilon - \rho}{2}$. Рассмотрим $B(z_0, r)$ такой что y_0 принадлежит ему. $B(z_0, r) \subset B(x_0, \varepsilon)$.

Сепарабельность: множество точек с рациональными координатами – счетное всюду плотное.

Замечание. НЕ любое метрическое пространство обладает второй аксиомой счетности или сепарабельностью.

Пусть X континуальное, $\rho(x, y) = 1$ если $x \neq y$, тогда порождается дискретная топология.

Пример 6.5. $X = \mathbb{R}$ с топологией Зариского (замкнутые, значит конечные). X сепарабельно (любое бесконечное множество всюду плотно). Второй аксиомы счетности нет.

Предположим, что она есть: $\{U_i\}_{i \in I}^\infty$ – счетная база. $U_i = X \setminus \{x_{i_1}, \dots, x_{i_{n_i}}\}$, тогда $\bigcup_{i=1}^\infty \{x_{i_1}, \dots, x_{i_{n_i}}\}$ счетно. А \mathbb{R} несчетно, тогда $\exists y \in U_i \forall i$. $U = X \setminus \{y\}$, $y \notin U \neq \bigcup_j U_j \ni y$, значит счетной базы нет.

Теорема 6.2 (Линделёфа). Если на X есть вторая аксиома счетности, тогда из любого открытого покрытия X можно выбрать НБЧС подпокрытие.

Доказательство. $X = \bigcup_{i \in I} U_i, \mathfrak{B} = \{B_i\}_{i=1}^{\infty}$ – счетная база.
 $\forall i U_i = \bigcup_j B_j$
 $\{U_i\}$ вполне упорядочены (по теореме Цермело так можно). Рассмотрим U_{i_1} , отметим все $B_j \subset U_{i_1}$. Пусть $x_2 \notin U_{i_1} \Rightarrow \exists U_{i_2} \ni x_2$ тогда $U_{i_2} = \bigcup_j B_j$, отметим все такие B_j . На этом шаге мы отметили как минимум одно новое B_j .
 Продолжаем: $x_3 \notin U_{i_1} \cup U_{i_2} \Rightarrow x_3 \in U_3 = \bigcup_j B_j$, отметили новое B_j .
 Таких шагов нельзя сделать более чем счетное количество. Таких U_{i_k} НБЧС количество, после которых новую точку, не входящую в их объединение, нельзя выбрать. ■

6.2. Секвенциальная компактность

Определение 6.4. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность в X . Говорим, что $x_0 \in \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ если $(\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \text{ выполнено } \rho(x_n, x_0) < \varepsilon \text{ или } x_n \in B(x_0, \varepsilon))$
 $\forall U_{x_0}$ окрестность $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N x_n \in U_{x_0}$

Пример 6.6. \mathbb{R} с топологией Зариского. Пусть $x_i \neq x_j \Rightarrow \forall x_0 x_n \rightarrow x_0$

$$\forall U_{x_0} = X \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \exists N : \forall n > N x_n \neq a_n \Rightarrow x_n \in U_{x_0}$$

Пример 6.7. \mathbb{R} с топологией типа Зариского: замкнутые = НБЧС. Если $x_i \neq x_j$, то $\nexists x_0 : x_n \rightarrow x_0$. Возьмем любой x_0 (считаем, что $x_0 \neq x_n$, иначе начнем последовательность с x_{n+1})

$$U_{x_0} = \mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2, \dots\} \text{ – открыто}$$

U_{x_0} не содержит ни одного члена последовательности.

Замечание. Если X хаусдорфово, тогда предел не более чем единственный.

Доказательство. Допустим x_0 и \tilde{x}_0 – пределы x_n .

$$U_{x_0} \cap U_{\tilde{x}_0} = \emptyset$$

Тогда с некоторого места: все $x_n \in U_{x_0}$ и все $x_n \in U_{\tilde{x}_0}$. Но это противоречит с хаусдорфовостью. ■

Определение 6.5. X называется секвенциально компактным пространством, если $\{x_i\}_{i=1}^{\infty} \subset X \exists x_{n_k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} x_0$ (из любой подпоследовательности можно выбрать сходящуюся).

Определение 6.6. X обладает первой аксиомой счетности если $\forall x_0 \in X$, существует счетная база окрестностей x_0 , т.е. $\exists \{B_{x_0,i}\}_{i=1}^{\infty} : x_0 \in B_{x_0,i} \ x_0 \in \forall U$ открытому $\exists B_i : x_0 \in B_{x_0,i} \subset U \implies \{B_{x_0,i}\}_{i,x_0}$ – база топологии.
Это обобщение $B(x_0, \varepsilon)$.

Замечание. X – метрическое пространство, тогда X обладает первой аксиомой счетности. $B(x_0, \varepsilon)$, где $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+$.

Пример 6.8. \mathbb{R} с топологией Зариского не обладает первой аксиомой счетности.

Допустим: есть счетное $\{U_{x_0,i}\} \forall x_0$. Рассмотрим $U_{x_0,1}, U_{x_0,2}$ и так далее, каждое из них НЕ содержит счетное число точек, в итоге счетный набор точек НЕ содержится в каком-то из этих множеств. Значит $\exists y \in U_{x_0,i} \forall i$. Возьмем $U = \mathbb{R} \setminus \{y\}$ – окрестность x_0 . $\nexists U_{x_0,i} \subset U$ т.к. $U \not\ni y$.

Замечание. Из второй аксиомы счетности следует первая аксиома счетности.

Определение 6.7. a называется точкой накопления, если для любой U_a выполнено: $U_a \cap A$ – бесконечно.

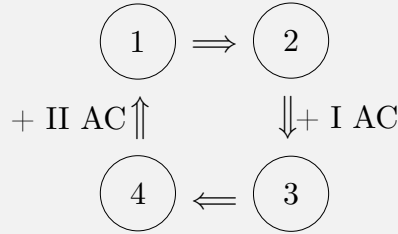
Замечание. Точка накопления не обязательно лежит в A .

[Примечание редактора: для следующих теорем большое доказательство будет разбито на несколько блоков для простоты восприятия]

Теорема 6.3. Для утверждений:

1. X компактно
2. $A \subset X : |A| = \infty \implies \exists a$ – точка накопления A .
3. X секвенциально компактно
4. $\forall F_1 \supset F_2 \supset \dots$ и $F_i \neq \emptyset$ – замкнутое, тогда $\bigcap_{i=1}^{\infty} F_i \neq \emptyset$

выполнено:



Доказательство. Из 1 в 2:

Допустим противное: любая $a \in X$ – не точка накопления. Тогда $\exists U_a : U_a \cap A$ – конечна.

Соберем все $\{U_a\}_{a \in X}$ – открытое покрытие X , значит $\exists U_{a_1}, \dots, U_{a_n}$ – конечное подпокрытие.

Каждое $U_{a_i} \cap A$ – конечное, тогда $\bigcup_{i=1}^n (U_{a_i} \cap A)$ – конечное. Но это объединение есть A – противоречие. ■

Доказательство. Из 2 в 3:

Хотим для любой последовательности иметь сходящуюся подпоследовательность. A – множество членов последовательности.

Если A конечно, то какой-то член повторяется бесконечное количество раз, его возьмем как подпоследовательность.

Пусть A бесконечное, тогда возьмем x_0 – точка накопления. По первой аксиоме счетности: существует $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ – счетная база окрестностей x_0 и считаем, что $U_1 \supset U_2 \supset U_3 \supset \dots$

Пусть V_1, V_2, \dots – какая-то счетная база окрестностей. Тогда $U_1 := V_1, U_2 := V_1 \cap V_2, U_3 := V_1 \cap V_2 \cap V_3$ и т.д.

$|U_i \cap A| = \infty$, значит выберем $a_i \in U_i \cap A$ так, чтобы все a_i различны и номер a_i в последовательности больше номеров предыдущих выбранных. Тогда $a_i \rightarrow x_0$. Почему?

$\forall U$ – окрестность x_0 $\exists U_n \subset U, U_{n+1} \subset U, U_{n+2} \subset U \dots$ Рассмотрим

$a_n \in U_n \subset U$, $a_{n+1} \in U_{n+1} \subset U$ и т.д. $\forall k \geq n \ a_k \in U \implies \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0$. ■

Доказательство. Из 3 в 4:

$F_1 \supset F_2 \supset F_3 \supset \dots$ – замкнутые, $F_i \neq \emptyset$. $F_i \neq F_{i+1}$ (иначе сократим). Хотим $\bigcap F_i \neq \emptyset$.

Выберем $x_n \in F_n \setminus F_{n-1}$. Отсюда $\{x_n\}$ – последовательность. Тогда $\exists x_{n_k} \rightarrow x_0$. Утверждение: $x_0 \in \bigcap_{i=1}^{\infty} F_i$. Покажем, что $x_0 \in F_i \ \forall i$.

Допустим: $x_0 \notin F_m$. Выберем $U_m := X \setminus F_m$ – открытое. $x_0 \in U_m$ значит $\exists N : \forall k \geq N \ x_{n_k} \in U_m$. Все $x_{n_k} \notin F_m$.

НО если $n_k \geq m$, то $x_{n_k} \in F_{n_k} \subset F_m$. Противоречие. ■

Доказательство. Из 4 в 1:

X удовлетворяет второй аксиоме счетности. Пусть $\{U_i\}$ – любое открытое покрытие X . Считаем, что $\{U_i\}$ счетно (по 6.2), т.е. $\{U_i\} = \{U_1, U_2, \dots\}$.

Построим замкнутые множества: $V_1 = U_1, V_2 = U_1 \cup U_2, \dots, V_n := \bigcup_{i=1}^n U_i$. $V_1 \subset V_2 \subset V_3 \subset \dots$ – открытые.

Тогда $F_i := X \setminus V_i$ – замкнутые. $F_1 \supset F_2 \supset F_3 \supset \dots$ Почему $F_i \neq \emptyset$?

Если $F_k = \emptyset \implies V_k = X$. $U_1 \cup \dots \cup U_k = X$ – победа.

Иначе по (3) $\bigcap_{k=1}^{\infty} F_k \neq \emptyset \implies \bigcup_{k=1}^{\infty} V_k \neq X$. Тогда и $\bigcup_{k=1}^{\infty} U_k \neq X$ значит $\{U_k\}$ не покрытие, НО изначально брали покрытие – противоречие. ■

6.3. Компактность в метрических пространствах

Замечание. $A \subset \mathbb{R}^n$ компактно $\Leftrightarrow A$ – замкнуто и ограничено. Если $A \subset (M, \rho)$ – не обязательно.

Пример 6.9. Есть \mathbb{R} с дискретной топологией. $\rho(x, y) = 1$, если $x \neq y$.

$\forall U$ – замкнуто и ограничено. $B(x_0, 2) = X \supset U$, значит U – ограничено, U замкнуто, т.к. любое множество замкнуто в дискретной топологии. Но если U бесконечное множество, тогда U не компактно.

Определение 6.8. (M, ρ) – метрическое пространство. $\{x_n\}$ – последовательность. $\{x_n\}$ называется фундаментальной, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) : \text{если } \forall n, k \geq N \text{ то } \rho(x_n, x_k) < \varepsilon$$

Определение 6.9. Пространство M называется полным, если любая фундаментальная последовательность сходится.

Пример 6.10. \mathbb{Q} – не полное, \mathbb{R} – полное.

Теорема 6.4 (из курса матанализа). Следующие определения равносильны:

1. $[a_1; b_1] \supset [a_2; b_2] \supset \dots \implies \exists x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n; b_n]$
2. Любая фундаментальная последовательность сходится

Определение 6.10. Пусть $\varepsilon > 0$, тогда $\{x_i\}_{i \in I}$ называем ε -сетью пространства M , если $\forall y \in M \exists x_i : \rho(x_i, y) < \varepsilon$.
Переформулируем: $\{B(x_i, \varepsilon)\}_{i \in I}$ – покрытие M .

Задача: Есть код из n бинарных символов. При передаче портится не более чем k символов. Сколько различных кодов можно передать?

Пусть K_1, \dots, K_l – коды, которые можем передать. Это означает $\rho(K_i, K_j) \geq 2k$ (расстояние – количество отличающихся бит). Если набор K_1, \dots, K_l – максимальный, тогда $\nexists K_{l+1} : \rho(K_{l+1}, K_i) \geq 2k \implies \{K_i\}$ – $2k$ -сеть.

Определение 6.11. Если $\forall \varepsilon \exists$ конечная ε -сеть, то M называется вполне ограниченным.

Предложение 6.5. Если M вполне ограничено, то M удовлетворяет второй аксиоме счетности.

Доказательство. Пусть $\varepsilon_k = \frac{1}{k}$, X – множество точек, входящих в какую либо из ε_k -сетей. Значит X – счетное множество, как счетное объединение счетных множеств. $\{B(x_k, \frac{1}{l}) : x_k \in X, l \in \mathbb{N}\}$ – база.

Пусть $U \subset M$ – открытое, $y_0 \in U$ – точка. Докажем: $\exists B(x_k, \frac{1}{l}) \subset U$, y_0 лежит в этом шаре.
 $\exists B(y_0, \varepsilon) \subset U$ (т.к. U открыто). Скажем, что $\frac{1}{l} < \frac{\varepsilon}{2}$, тогда $\exists x_n : \rho(x_n, y_0) < \frac{1}{l}$, $B(x_n, \frac{1}{l})$ подходит. ■

Замечание. Первая аксиома счетности выполняется в любом метрическом пространстве.

Теорема 6.6. (M, ρ) – метрическое пространство. Следующие определения равносильны:

1. M компактно
2. M секвенциально компактно
3. M полное и вполне ограниченное

План доказательства: $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 2, 2 \& 3 \Rightarrow 1$.

Доказательство. $1 \Rightarrow 2$

M – метрическое пространство, значит первая аксиома счетности выполнена, тогда из компактности следует секвенциальная компактность по 6.3. [далее прямой ссылки на теорему при применении нет] ■

Доказательство. $2 \Rightarrow 3$

Полнота:

Допустим, что $\{x_n\}$ – фундаментальная, но не сходящаяся последовательность. M – секвенциально компактно, тогда существует $\{x_{n_k}\} : x_{n_k} \rightarrow x_0$, тогда и $x_n \rightarrow x_0$.

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N : \text{если } n_k > N \text{ то } \rho(x_{n_k}, x_0) < \varepsilon/2$$

Если $l > N$, то $\rho(x_{n_k}, x_l) < \varepsilon/2$, значит $\rho(x_l, x_0) < \varepsilon$ и x_n сходится.

Вполне ограниченность:

Допустим $\exists \varepsilon$, что нет конечной ε -сети. Тогда

$$\exists x_1, x_2, \dots : \rho(x_n, x_k) > \varepsilon.$$

Выберем $x_1, \exists x_2 : \rho(x_1, x_2) \geq \varepsilon, \exists x_3 : \rho(x_3, x_1) \geq \varepsilon$ и $\rho(x_3, x_2) \geq \varepsilon$ и т.д. $\{x_i\}$ – последовательность. У нее нет сходящейся подпоследовательности. ■

Доказательство. 3 \implies 2

Пусть $\{x_n\}$ – последовательность, хотим выбрать фундаментальную подпоследовательность. (из-за полноты она будет сходящейся) Возьмем $\varepsilon_1 = 1$, тогда существует конечная ε_1 -сеть.

Пусть y_1 точка из конечной ε_1 -сети. Тогда в $B(y_1, 1)$ есть бесконечно много x_i . Выберем один из них: x_{n_1} . В следующих выборках будем брать только из x_i , входящих в $B(y_1, 1)$. Пусть $\varepsilon_2 = 1/2$. Существует конечная ε_2 -сеть. В $B(y_2, 1/2)$ есть бесконечно много x_i . Выберем один из них: x_{n_2} . Пусть $\varepsilon_3 = 1/3$ и т.д.

Получим $\{x_{n_k}\} : x_{n_k} \in \bigcap_{i=1}^k B(y_i, \varepsilon_i)$. Тогда $|x_{n_k} - x_{n_l}| < 2 \cdot \max\left\{\frac{1}{k}, \frac{1}{l}\right\}$. Пусть $k < l$, тогда $x_{n_k}, x_{n_l} \in B(y_k, \frac{1}{k})$. Отсюда $\rho(x_{n_k}, x_{n_l}) < \frac{2}{k}$ и это означает, что $\{x_{n_k}\}$ – фундаментальная. ■

Доказательство. 2 & 3 \implies 1

Из вполне ограниченности следует вторая аксиома счетности. Секвенциальная компактность со второй аксиомой счетности дает компактность. ■

Глава 7

Аксиомы отделимости

7.1. Аксиомы отделимости

Теорема 7.1 (T_0 , аксиома Колмогорова). $\forall x, y \in X \exists U$ – открытое, которое содержит ровно одну из этих точек.

Теорема 7.2 (T_1). $\forall x, y \in X \exists U_x$ – открытое, т.ч. $x \in U_x, y \notin U_x$.

Теорема 7.3 (T_2 , аксиома Хаусдорфа). $\forall x, y \in X \exists U_x, U_y$ – открытые окрестности, т.ч. $U_x \cap U_y = \emptyset$

Теорема 7.4 (T_3). $\forall x \forall F$ – замкнутое: $x \notin F \exists U_x, U_F$ – открытые, $x \in U_x; F \subset U_F, U_x \cap U_F = \emptyset$

Теорема 7.5 (T_4). $\forall F_1, F_2 \subset X$ – замкнутые, $F_1 \cap F_2 = \emptyset$, $\exists U_{F_1}, U_{F_2}$ – открытые окрестности: $U_{F_1} \cap U_{F_2} = \emptyset$

Тривиальная связь: $T_2 \implies T_1 \implies T_0$. Других подобных связей нет.

Упражнение. Какими аксиомами отделимости обладают дискретная, антидискретная, стрелка, Зариского и стандартная топологии?

Теорема 7.6. Следующие условия равносильны:

1. $X - T_0$
2. X не содержит двухточечного антидискретного пространства
3. $\text{Cl}\{x_0\} \neq \text{Cl}\{y_0\}$

Доказательство. (1) в (3)

Допустим противное: если $\text{Cl}\{x_0\} = \text{Cl}\{y_0\} = F$. Тогда $\exists U$ НУО $x_0 \in U, y_0 \notin U$. $F \cap (X \setminus U)$ – замкнутое множество, содержащие y_0 , но не x_0 , значит оно меньше замыкания – противоречие (замыкание наименьшее).

(3) в (2)

Если $\{x_0, y_0\}$ – антидискретное множество, тогда ни одно открытое или замкнутое множество не различает x_0, y_0 . Тогда $\text{Cl}\{x_0\} = \text{Cl}\{y_0\}$.

(2) в (1) $\forall \{x_0, y_0\}$ – не антидискретное, тогда в индуцированной топологии $\{x_0\}$ – открыто (или $\{y_0\}$), значит $\exists U \subset X$ – открытое: $U \cap \{x_0, y_0\} = \{x_0\}, x_0 \in U, y_0 \notin U$ ■

Теорема 7.7. $X - T_1$ пространство \Leftrightarrow любая точка замкнута \Leftrightarrow любое конечное подмножество замкнуто.

Доказательство. Прямое доказательство: $\text{Cl}\{x_0\} = \bigcap_{x_0 \in F} F$

докажем, что это пересечение равно $\{x_0\}$. $\forall y \neq x_0 \exists U_y : U_y \not\ni x_0$; $F_y := X \setminus U_y$, тогда $x_0 \in F_y, y \notin F_y$, значит раз F_y лежит в пересечении, то $y \notin \text{Cl}\{x_0\} \Rightarrow \text{Cl}\{x_0\} = \{x_0\}$

Обратное доказательство: $\{x_0\}$ – замкнуто, значит $U_y := X \setminus \{x_0\} \forall y$. ■

Определение 7.1. Пространства $T_1 + T_3$ называются регулярными. Пространства $T_1 + T_4$ называются нормальными.

Замечание. Регулярные $T_0 - T_3$. Нормальные $T_0 - T_4$.

Определение 7.2. Топологическое свойство A называется наследственным, если $X \in A$ (X удовлетворяет A), $Y \subset X \implies Y \in A$

Пример 7.1. T_0, T_1, T_2, T_3 – наследственные. T_4 – не наследственное (почему?).

Замечание. $X, Y \in T_0, T_1, T_2$ или T_3 , то $X \times Y$ тоже. Для T_4 не выполняется (есть примеры, но они очень непростые).

Теорема 7.8. $f, g : X \rightarrow Y$ – непрерывные отображения. Y хаусдорфово. Рассматриваем $\{x : f(x) = g(x)\}$. Оно замкнуто.

Доказательство. Докажем открытость дополнения: $\{x : f(x) \neq g(x)\}$. $f(x), g(x) \in Y$. Если $f(x) \neq g(x)$, то $\exists U_{f(x)} \cap U_{g(x)} = \emptyset$ (по хаусдорфовости Y).

$$U := f^{-1}(U_{f(x)}) \cap f^{-1}(U_{g(x)})$$

открытое. $x \in U$ (т.к. попадает в обе окрестности).

Утверждение: $U \cap F = \emptyset$ ($F := \{x : f(x) = g(x)\}$).

Если $y \in U \cap F \implies f(y) \in U_{f(x)}, g(y) \in U_{g(x)}$. Тогда $f(y) = g(y)$, но окрестности не пересекались – противоречие. ■

Следствие 7.8.1. $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ – непрерывное, тогда множество корней f замкнуто (положим, что $g(x) = 0$).

Из него следует всякое: $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ – замкнутое и т.д.

Замечание. X хаусдорфово $\Leftrightarrow \{(x, x)\} \subset X \times X$ – замкнуто. (упражнение)

7.2. Нормальные пространства

Теорема 7.9. X – метрическое пространство, то X – нормально.

Доказательство. Сначала докажем, что метрическое пространство хаусдорфово:

Пусть $x \neq y$, значит $\exists \rho(x, y) \neq 0$. Пусть $\varepsilon := \rho(x, y)/2 \implies B(x, \varepsilon) \cap B(y, \varepsilon) = \emptyset$

Докажем, что метрическое пространство T_3 :

Пусть $x \notin F$, F – замкнуто.

$$\rho(x, F) = \inf\{\rho(x, y) : y \in F\} > 0$$

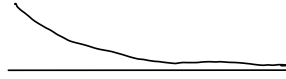
Почему > 0 ? Допустим это не так:

$$\begin{aligned} \exists y_n : \rho(x, y_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 &\implies y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x \\ (\forall \varepsilon > 0 \exists N : \rho(x, y_n) < \varepsilon \forall n > N) &y_n \in B(x, \varepsilon) \end{aligned}$$

F – замкнуто и $y_n \rightarrow x \implies x \in F$ – противоречие.

Теперь докажем, что метрическое пространство T_4 .

Доказать аналогично T_3 не получится: $\rho(F_1, F_2) = \inf\{\rho(x, y) : x \in F_1, y \in F_2\}$ но может быть $\rho(f_1, f_2) = 0$ пример (график и асимптота):



Выберем $\forall x_0 \in F_1 \implies$ по T_3 выберем $\varepsilon_{x_0} = \rho(x_0, F_2)/2$
 $U_1 := \bigcup_{x_0 \in F_1} B(x_0, \varepsilon_{x_0})$. $\forall y_0 \in F_2$ выберем $\varepsilon_{y_0} = \rho(y_0, F_1)/2$
 $U_2 := \bigcup_{y_0 \in F_2} B(y_0, \varepsilon_{y_0})$
 $U_1 \supset F_1, U_2 \supset F_2, U_1 \cap U_2 = \emptyset$: если $z_0 \in U_1 \cap U_2$, то $z_0 \in B(x_0, \varepsilon_{x_0}) \cap B(y_0, \varepsilon_{y_0})$, это значит, что $\rho(x_0, y_0) < \varepsilon_{x_0} + \varepsilon_{y_0} < 2 \max\{\varepsilon_{x_0}, \varepsilon_{y_0}\}$.

Пусть $\varepsilon_{y_0} \geq \varepsilon_{x_0}$ тогда $\rho(x_0, y_0) < 2\varepsilon_{y_0} = \rho(y_0, F_1)$. Получили противоречие. ■

Замечание. Почти верно обратное: если X нормально и X удовлетворяет второй аксиоме счетности, тогда X – метризуемо.

Теорема 7.10. X – хаусдорфово, тогда X нормально $\Leftrightarrow \forall$ замкнутого F , \forall открытого $G : G \supset F \exists G' -$ открытое: $F \subset G' \subset \text{Cl } G' \subset G$ (замкнутое \subset открытое \subset замкнутое \subset открытое) [так можно делать бесконечно].

Доказательство. Это переформулировка нормальности:

$$F \subset G \Leftrightarrow F \cap (X \setminus G) = \emptyset$$

$$F \subset G' \subset \text{Cl } G' \subset G$$

$$\begin{cases} G' - \text{окрестность } F \\ X \setminus \text{Cl } G' - \text{окрестность } X \setminus G \end{cases} \Rightarrow G' \cap (X \setminus \text{Cl } G') = \emptyset$$

■

Теорема 7.11. X компактно + хаусдорфово, тогда X нормально.

Напоминание: в X замкнутость равносильна компактности.

Доказательство. F_1, F_2 – замкнуты, $F_1 \cap F_2 = \emptyset$. $\forall x, y : x \in F_1, y \in F_2$ выберем $U_{x,y} \cap V_{x,y} = \emptyset, x \in U_{x,y}, y \in V_{x,y}$
Зафиксируем $y, \{U_{x,y}\}_{x \in F_1}$ – покрытие F_1 , значит существует конечное подпокрытие: $\exists U_{x_1,y}, \dots, U_{x_n,y}$ – конечное подпокрытие.

$$U_y := \bigcup_{i=1}^n U_{x_i,y}$$

окрестность F_1 , не содержит y .

$$W_y := \bigcap_{i=1}^n V_{x_i,y}$$

окрестность $y : U_y \cap W_y = \emptyset$

$\{W_y\}_{y \in F_2}$ – покрытие F_2 . Существуют $y_1, \dots, y_m : W_{y_1}, \dots, W_{y_m}$ – покрытие F_2

$$U_{F_1} := \bigcap_{i=1}^m U_{y_i} \quad U_{F_2} := \bigcup_{i=1}^m W_{y_i}$$

Допустим $z \in U_{F_1} \cap U_{F_2} \exists i : z \in W_{y_i}, z \in U_{y_i}$, но $W_{y_i} \cap U_{y_i} = \emptyset$ по построению – противоречие. ■

Теорема 7.12 (Урысон). X – нормальное пространство. F_1, F_2 – непересекающиеся замкнутые множества $\Leftrightarrow \exists$ непрерывная $f : X \rightarrow \mathbb{R} : f|_{F_1} = 0, f|_{F_2} = 1$ (функциональная делимость).

Схема доказательства: Обратно: $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ – непрерывная:

$$f|_{F_1} = 0, f|_{F_2} = 1$$

$$U_{F_1} := f^{-1}((-\infty, 1/2)) \quad U_{F_2} := f^{-1}((1/2, +\infty))$$

Прямо: X нормально, $F_0 \cap F_1 = \emptyset$, значит $G_1 := X \setminus F_1, F_0 \subset G_1$

$$\implies \exists G_{1/2} : F_0 \subset G_{1/2} \subset \text{Cl } G_{1/2} \subset G_0$$

$$\implies \exists G_{1/4}, G_{3/4} \quad F_i := \text{Cl } G_i$$

$$F_0 \subset G_{1/4} \subset F_{1/4} \subset G_{1/2} \subset F_{1/2} \subset G_{3/4} \subset F_{3/4} \subset G_1$$

и так далее. Получаем $G_{k/2^n}$ и $F_{k/2^n} := \text{Cl } G_{k/2^n}$. Если $k_1/2^{n_1} < k_2/2^{n_2}$, тогда $G_{k_1/2^{n_1}} \subset F_{k_1/2^{n_1}} \subset G_{k_2/2^{n_2}} \subset F_{k_2/2^{n_2}}$.

Рассмотрим $f(x) := \inf\{\alpha : x \in F_\alpha\}$. Если $x \in F_0 \implies f(x) = 0$, если $x \in F_1 \implies f(x) = 1$. В качестве упражнения надо доказать непрерывность f , тогда f – искомая функция.