Алгебра и теория чисел

Курс Жукова И.Б.

Осень 2022 г.

Оглавление

Глава 1

Алгебра линейных операторов

07.09.22

Определение 1.1 (Линейный оператор). V — линейное пространство над полем K. Линейный оператор на V — линейное отображение $V \to V$ (эндоморфизм линейного пространства V).

Определение 1.2 (Множество линейных операторов). $\operatorname{End} V = \operatorname{Hom}(V, V)$ — множество линейных операторов.

$$\mathcal{A} \in \operatorname{Hom}(V, W) \quad [\mathcal{A}]_{E,F}$$

Имея два пространства V и W, базисы E и F можно выбрать так, что матрица получится окаймленной единичной.

Теперь же мы имеем одно пространство, соответственно, и один базис и все еще хотим, чтобы матрица была наиболее простой.

Определение 1.3 (Алгебра)**.** Говорят, что задана алгебра над полем K, если задано множество A, бинарные операции $+$, $\times$ на нем и отбражение $K \cdot A \to A$, т.ч.:

1. $(A, +, \times)$ - кольцо
2. $(A, +, \cdot)$ - линейное пространство над полем K
3. $\forall \alpha \in K \ \forall a, b \in A : \alpha \cdot (a \times b) = (\alpha \cdot a) \times b = a \times (\alpha \cdot b)$

Пример 1.1. $A = M_n(K)$, $A_0 = \{\alpha E_n | \alpha \in K\}$ — подкольцо скалярных матриц, изоморфное полю K.

Пример 1.2. $A = K[x]$

Пример 1.3. Любая ситуация, где поле $K \subset R$ (R — кольцо) $\implies R$ — K-алгебра.

В обратную сторону тоже верно, если алгебра содержит единицу. Тогда там найдется подкольцо, которое можно отожествить с полем K.

Почему алгебра с единицей:

Пусть A — алгебра с $1 (\neq 0)$ над полем K. Рассмотрим множество $A_0 = \{\alpha \cdot 1 | \alpha \in K\}$.

$$K \xrightarrow{\varphi} A_0 \quad \alpha \mapsto \alpha_1$$

Идеал в поле либо нулевой, либо все поле. $\varphi(1) \neq 0 \Rightarrow Ker(\varphi) \neq K$. Значит, φ — изоморфизм. A_0 — подкольцо, изоморфное полю K.

Линейные операторы тоже образуют алгебру. Заметим, что в End V есть сложение и композиция операторов, а также умножение на скаляр. (End $V, +$) — абелева группа. Проверка дистрибутивности операторов:

$$\mathcal{A} \circ (\mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2) = \mathcal{A} \circ \mathcal{B}_1 + \mathcal{A} \circ \mathcal{B}_2$$
$$(\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2) \circ \mathcal{B} = \mathcal{A}_1 \circ \mathcal{B} + \mathcal{A}_2 \circ \mathcal{B}$$

(End $V, +, \circ$) — линейное пространство над полем K. Наконец, $(\alpha \cdot \mathcal{A}) \circ \mathcal{B} = \mathcal{A} \circ (\alpha \cdot \mathcal{B}) = \alpha \cdot (\mathcal{A} \circ \mathcal{B})$.

Таким образом, (End $V, +, \circ, \cdot$) — алгебра над полем K.

Предложение 1.1. Пусть $\dim V = n$. E — базис V. Тогда отображение $\lambda_E : \operatorname{End} V \to M_n(K)$, $\mathcal{A} \mapsto [\mathcal{A}]_E$ — изоморфизм алгебр над полем K (т.е. биекция, сохраняющая все операции).

Доказательство. Знаем: λ_E — изоморфизм линейных пространств. $\lambda_E(\mathcal{B} \circ \mathcal{A}) = [\mathcal{B}\mathcal{A}]_E = [\mathcal{B}]_E \cdot [\mathcal{A}]_E = \lambda_E(\mathcal{B})\lambda_E(\mathcal{A})$. ■

Следствие 1.1.1. $\dim \operatorname{End}\ V = (\dim\ V)^2$

lil friendly reminder: $U_E \xrightarrow{\mathcal{A}} V_F \xrightarrow{\mathcal{B}} W_G,\ [\mathcal{B}\mathcal{A}]_{EG} = [\mathcal{B}]_{FG}[\mathcal{A}]_{EF}$ - стандартный случай.

$\mathcal{A} : U_{EE'} \to V_{FF'}$. Как связаны матрицы этого линейного отображения в двух базисах? $[\mathcal{A}]_{EF} = A$ – знаем, $[\mathcal{A}]_{E'F'} = ?$ Нужны матрицы перехода: $M_{E\to E'} = C,\ M_{F\to F'} = D$. Можем записать: $E' = EC,\ E = (e_1, \dots, e_n),\ C = c_{ij}$ (E - вектор, C - квадратная матрица). Тогда $EC = (c_{11}e_1 + \dots + c_{m1}e_n, c_{12}e_1 + \dots + c_{n2}e_n, \dots)$. Что происходит с матрицей при такой замене базиса?

Предложение 1.2. Пусть $\mathcal{A} \in \operatorname{End} V, E$ и E' — базисы, $[\mathcal{A}]_E = A,\ M_{E\to E'} = C$, тогда $[\mathcal{A}]_{E'} = C^{-1}AC$.

Доказательство.

$$\begin{tikzcd}
U_E \arrow[r, "\mathcal{A}"] & V_F \arrow[d, "\mathscr{E}_V = id_V"] \\
U_{E'} \arrow[u, "\mathscr{E}_U"] & V_{F'} \arrow[l, "\mathcal{A}"]
\end{tikzcd}$$

$$[\mathcal{A}]_{E'F'} = \underbrace{[\mathscr{E}_V]_{FF'}}_{D^{-1}}\underbrace{[\mathcal{A}]_{EF}}_{A}\underbrace{[\mathscr{E}_U]_{E'E}}_{C}$$

В нашем случае $(U = V, E = F, E' = F')$. ■

Определение 1.4 (Эквивалентность матриц оператора в разных базисах)**.** Пусть A' эквивалентно A, если $\exists C \in \mathrm{GL}_n(K)$: $A' = C^{-1}AC$. Проверка симметричности и транзитивности:

$$A = (C^{-1})^{-1}A'C^{-1}$$
$$A'' = D^{-1}A'D = D^{-1}C^{-1}ACD = (DC)^{-1}A(CD)$$

Глава 2

Инвариантные подпространства

Определение 2.1 (Инвариантность пространств относительно оператора)**.** V — линейное конечномерное пространство, $\mathcal{A} \in \mathrm{End}\ V$. Пусть $W \subset\ V$ — линейное подпространство. W — называется инвариантным относительно $\mathcal{A}$, если $\forall w \in W : \mathcal{A}(w) \in W$.

Свойства.

1. $0, W$ — $\mathcal{A}$-инвариантны
2. $\operatorname{Ker} \mathcal{A}$ — $\mathcal{A}$-инвариантно
3. $\operatorname{Im} \mathcal{A}$ — $\mathcal{A}$-инвариантен

Пусть W — $\mathcal{A}$-инвариант. Следовательно, $\mathcal{A}|_W$ можно рассматривать как элемент End W. Более формально, $\exists\ \mathcal{A}_1 \in \mathrm{End}\ W\ \forall w \in W :$ $\mathcal{A}_1 w = \mathcal{A}w$

$$W \xrightarrow{\mathcal{A}_1} W \quad w \mapsto \mathcal{A}w$$

$\mathcal{A}_1$ — оператор индуцированный оператором $\mathcal{A}$ на инвариантном подпространстве W.

$W \subset V,\ V/W = \{v + w | v \in V\}$ — фактор-пространство. W — $\mathcal{A}$-инвариант. Определим $\mathcal{A}_2$.

$$\mathcal{A}_2 : V/W \to V/W \quad v + W \mapsto \mathcal{A}v + W$$

Проверка корректности: пусть $v_1 + W = v_2 + W$, нужно проверить, что $\mathcal{A}v_1 + W = \mathcal{A}v_2 + W$. Так, $\mathcal{A}v_2 = \mathcal{A}(v_1 + (v_2 - v_1)) = \mathcal{A}v_1 + \mathcal{A}\underbrace{(v_2 - v_1)}_{\in W} \Rightarrow \mathcal{A}v_2 + W = \mathcal{A}v_1 + W$.

Предложение 2.1. $\mathcal{A}_2 \in \mathrm{End}\ V/W$

Доказательство. Проверка линейности:

$$\mathcal{A}_2((v_1 + W) + (v_2 + W)) = \mathcal{A}_2((v_1 + v_2) + W) = \\ \mathcal{A}(v_1 + v_2) + W = \mathcal{A}v_1 + \mathcal{A}v_2 + W = \\ (\mathcal{A}v_1 + W) + (\mathcal{A}v_2 + W)$$

$$\mathcal{A}_2(\alpha(v + W)) = \mathcal{A}_2(\alpha v + W) = \\ \mathcal{A}(\alpha v) + W = \alpha\mathcal{A}v + W = \\ \alpha(\mathcal{A}v + W) = \alpha\mathcal{A}_2(v + W)$$

■

$\mathcal{A}_2$ — индуцированный оператор на фактор-пространстве.

Предложение 2.2. Пусть $\mathcal{A} \in \mathrm{End}\ V, W \subset V, e_1, \dots, e_m$ — базис W, $e_{m+1}, \dots, e_n$ — дополнение до базиса V. Тогда эквивалентны 2 утверждения:

1. W — $\mathcal{A}$-инвариант
2. $[\mathcal{A}]_{e_1,\dots,e_n} = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & B \\ \hline 0 & A_2 \end{array}\right)$, $A_1 \in M_m(K)$

При этом $A_1 = [\mathcal{A}_1]_{e_1,\dots,e_m}$, $A_2 = [\mathcal{A}_2]_{e_{m+1}+W,\dots,e_n+W}$, где $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ — соответствующие индуцированные операторы.

Доказательство. $1 \Rightarrow 2$: векторы $e_1, \dots, e_m \in W \Rightarrow \mathcal{A}e_1, \dots, \mathcal{A}e_m \in W = \mathrm{Lin}(e_1, \dots, e_m) \Rightarrow [\mathcal{A}]_{e_1,\dots,e_n} = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & B \\ \hline 0 & A_2 \end{array}\right)$
Очевидно, $[\mathcal{A}_1]_{e_1,\dots e_m} = A_1$.

Пусть $[\mathcal{A}]_{e_1,\dots,e_n} = (a_{ij})$.
$\mathcal{A}e_j = \underbrace{a_{1j}e_1 + \dots + a_{mj}e_m}_{\in W} + a_{m+1j}e_{m+1} + \dots + a_{nj}e_n$, $j \geqslant m+1$

$\underbrace{\mathcal{A}e_j + W}_{=\mathcal{A}_2(e_j+W)} = \underbrace{a_{m+1j}e_{m+1} + \dots + a_{nj}e_n + W}_{=a_{m+1j}(e_{m+1}+W)+\dots+a_{nj}(e_n+W)}$ (первые m элементов станут нулевым классом). Таким образом, $[\mathcal{A}_2]_{e_{m+1}+W,\dots,e_n+W} = \begin{pmatrix} a_{m+1m+1} & \dots & a_{m+1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{nm+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = A_2$

$2 \Rightarrow 1$: $[\mathcal{A}]_{e_1,\dots,e_n} = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & B \\ \hline 0 & A_2 \end{array}\right) \Rightarrow \mathcal{A}e_1, \dots, \mathcal{A}e_m \in \mathrm{Lin}(e_1, \dots, e_m) \in W$. Пусть $w \in W \Rightarrow w = \beta_1 e_1 + \dots + \beta_m e_m \Rightarrow \mathcal{A}w = \beta_1 \underbrace{\mathcal{A}_1 e_1}_{\in W} + \dots + \beta_m \underbrace{\mathcal{A}_m e_m}_{\in W} \in W$. ∎

14.09.22

Итак, мы выяснили, что если в нашем подпространсве V есть инвариантное подпространство меньшей размерности (ненулевое) $W \subset V$, то это позволяет нам составить блочно-треугольную матрицу $\left(\begin{array}{c|c} A_1 & B \\ \hline 0 & A_2 \end{array}\right)$, где A_1, A_2 – квадратные матрицы, $A_1 \in M_m(K)$, $m = \dim W$.

В ситуации $V = W_1 \oplus W_2$ можно получить $\left(\begin{array}{c|c} A_1 & 0 \\ \hline 0 & A_2 \end{array}\right)$.

Предложение 2.3. Пусть $\mathcal{A} \in \mathrm{End}\, V$, $V = W_1 \oplus W_2$, $\underbrace{e_1, \dots, e_m}_{E_1}$ — базис W_1, $\underbrace{e_{m+1}, \dots, e_n}_{E_2}$ — базис W_2, $E = E_1 + E_2$. Тогда эквивалентны 2 утверждения:

1. $W_1, W_2 - \mathcal{A}$-инвариантны
2. $[\mathcal{A}]_E = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & 0 \\ \hline 0 & A_2 \end{array}\right)$, $A_1 \in M_m(K)$, $A_2 \in M_{n-m}(K)$. При этом $A_1 = [\mathcal{A}|_{W_1}]_{E_1}$, $A_2 = [\mathcal{A}|_{W_2}]_{E_2}$

Доказательство. Аналогично предыдущему предложению.
$1 \Rightarrow 2$: $\mathcal{A}e_1, \dots, \mathcal{A}e_m \in W_1 \Rightarrow \left(\begin{array}{c|c} A_1 & \\ \hline 0 & \end{array}\right)$, $\mathcal{A}e_{m+1}, \dots, \mathcal{A}e_n \in W_2 \Rightarrow \left(\begin{array}{c|c} & 0 \\ \hline & A_2 \end{array}\right)$.

$2 \Rightarrow 1$: $\left(\begin{array}{c|c} & \\ \hline 0 & \end{array}\right) \Rightarrow \mathcal{A}e_1, \dots, \mathcal{A}e_m \in \mathrm{Lin}(e_1, \dots, e_m) = W_1 \Rightarrow \forall w \in W_1,\ \mathcal{A}w \in W_1,\ W_1$ — $\mathcal{A}$-инвариант.
$\left(\begin{array}{c|c} & 0 \\ \hline & \end{array}\right) \Rightarrow \mathcal{A}e_{m+1}, \dots, \mathcal{A}e_n \in \mathrm{Lin}(e_{m+1}, \dots, e_n) = W_2 \Rightarrow \forall w \in W_2,\ \mathcal{A}w \in W_2,\ W_2$ — $\mathcal{A}$-инвариант. ■

Что означает в терминах оператора, что матрица получилась диагональной? Например, образ первого базисного вектора будет прямо пропорционален первому базисному вектору: $\mathcal{A}e_1 = \lambda_1 e_1,\ \mathcal{A}e_2 = \lambda_2 e_2$ и т.д.

Глава 3

Собственные значения и собственные векторы

Пусть $\mathcal{A} \in \operatorname{End} V$. Скаляр $\lambda \in K$ называется собственным значением оператора $\mathcal{A}$, если $\exists v \in V,\ v \neq 0 : \mathcal{A}v = \lambda v$. Можно написать иначе: $\mathcal{A}v = \lambda v \Leftrightarrow \mathcal{A}v - (\lambda \mathscr{E})v = 0 \Leftrightarrow (\mathcal{A} - \lambda \mathscr{E})v = 0 \Leftrightarrow v \in \operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda \mathscr{E})$, $\mathscr{E} = \mathrm{id}$.

Определение 3.1 (Собственное значение). Таким образом, λ — собственное значение $\mathcal{A} \Leftrightarrow \operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda \mathscr{E}) \neq 0$. Если K — числовое поле, то «собственное число = собственное значение».

Определение 3.2 (Собственный вектор). Пусть $v \in V$, λ — собственное значение $\mathcal{A}$. Говорят, что v — собственный вектор $\mathcal{A}$, принадлежащий собственному значению λ, если $v \neq 0$ и $\mathcal{A}v = \lambda v$, т.е. $v \in \operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda \mathscr{E}) \backslash \{0\}$.

Определение 3.3 (Собственной подпространства). $V_\lambda = \operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda \mathscr{E})$ — собственное подпространство, принадлежащее собственному значению λ.

Определение 3.4 (Диагонализируемость оператора). $\mathcal{A} \in \operatorname{End} V$ называется диагонализируемым, если в V существует базис E, такой что $[\mathcal{A}]_E$ диагональна.

Предложение 3.1. Пусть $\mathcal{A} \in \operatorname{End} V$. Тогда: $\mathcal{A}$ диагонализируем $\Leftrightarrow$ в V существует базис из собственных векторов $\mathcal{A}$.

Доказательство. $\Rightarrow$:

$$[\mathcal{A}]_E = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$E = (e_1, \dots, e_n),\ \mathcal{A}e_i = \lambda_i e_i,\ i = 1, \dots, n,\ e_i \neq 0$, так как входит в базис $\Rightarrow e_i$ — собственный.
$\Leftarrow$: Пусть $E = (e_1, \dots, e_n)$ — базис из собственных векторов. $\mathcal{A}e_i = \lambda_i e_i$ для некоторых $\lambda_i \in K,\ i = 1, \dots, n \Rightarrow [\mathcal{A}]_E = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. ∎

Лемма 3.2. Пусть $\mathcal{A} \in \operatorname{End} V$. Тогда: 0 — собственное значение $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{A} \notin \mathrm{GL}(V)$.

Доказательство. 0 — собственное значение оператора $\mathcal{A} \Leftrightarrow \operatorname{Ker}(\mathcal{A} - 0\mathcal{E}) \neq 0 \Leftrightarrow \operatorname{Ker} \mathcal{A} \neq 0 \Leftrightarrow \mathcal{A} \notin \mathrm{GL}(V)$. ∎

Определение 3.5 (Геометрическая кратность). Пусть λ — собственное значение $\mathcal{A}$. Его геометрической кратностью называется $g_\lambda = \dim \operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}),\ 1 \leqslant g_\lambda \leqslant n = \dim V$.

Предложение 3.3. Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, где k — конечное число, — различные собственные значения $\mathcal{A}$. $v_1, \dots, v_k$ — принадлежащие им собственные векторы. Тогда $v_1, \dots, v_k$ — ЛНЗ.

Доказательство. Индукция по k.
База: $k = 1$. По определению $v_1 \neq 0 \Rightarrow v_1$ — ЛНЗ.
Переход: $k - 1 \to k$. Пусть $v_1, \dots, v_k$ — собственные векторы, принадлежащие $\lambda_1, \dots, \lambda_k$. Предположим, $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k =$

$0(*)$. $\mathcal{A}(\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_k v_k) = \alpha_1\lambda_1 v_1 + ... + \alpha_k\lambda_k v_k = 0$. Домножим $(*)$ на λ_k: $\alpha_1\lambda_k v_1 + ... + \alpha_k\lambda_k v_k = 0$. Вычтем: $\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_k)v_1 + ... + \alpha_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k)v_{k-1} = 0$
По индукционному предположению: $v_1, ..., v_{k-1}$ — ЛНС $\Rightarrow$ $\alpha_1 \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_k)}_{\neq 0} = ... = \alpha_{k-1} \underbrace{(\lambda_{k-1} - \lambda_k)}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow \alpha_1 = ... = \alpha_{k-1} = 0 \Rightarrow$ $\alpha_k v_k = 0$ ($v_k \neq 0$, т.к. собственный вектор) $\Rightarrow \alpha_k = 0 \Rightarrow v_1, ..., v_k$ — ЛНЗ. ■

Следствие 3.3.1. Пусть $\lambda_1, ..., \lambda_k$ — различные собственные значения $\mathcal{A}$. Тогда $V_{\lambda_1} + ... + V_{\lambda_k} = V_{\lambda_1} \oplus ... \oplus V_{\lambda_k}$.

Доказательство. Нужно доказать: если $v_1 + ... + v_k = v'_1 + ... + v'_k$ (где $v_i,\ v'_i \in V_{\lambda_i}, i = 1, ..., k$). Таким образом, $v_1 = v'_1, ..., v_k = v'_k$.

$$(v_1 - v'_1) + ... + (v_k - v'_k) = 0 \qquad (**)$$

Предположим, $\exists i : v_i \neq v'_i$. Тогда в $(**)$ есть ненулевое слагаемое: $v_i - v'_i \in V_{\lambda_i}$. Оставим в $(**)$ только ненулевые слагаемые, получится, что сумма собственных векторов из разных собственных подпространств будет равна нулю - противоречие с линейной независимостью. ■

Следствие 3.3.2. Пусть $\dim V = n,\ \mathcal{A} \in \operatorname{End} V$. Тогда у $\mathcal{A}$ есть $\leqslant n$ собственных значений (для каждого собственного значению по собственному вектору, прямо следует из предложения).

Следствие 3.3.3. Пусть $\lambda_1, ..., \lambda_m$ — все собственные значение $\mathcal{A}$. Тогда $g_{\lambda_1} + ... + g_{\lambda_m} \leqslant n = \dim V$.

Доказательство. $V_{\lambda_1} + ... + V_{\lambda_m} < V \Rightarrow \dim(\underbrace{V_{\lambda_1} + ... + V_{\lambda_m}}_{g_{\lambda_1} + ... + g_{\lambda_m}}) \leq n$ (по следствию 3.3.1). ■

Предложение 3.4. Критерий диагонализируемости оператора в терминах геометрических кратностей.
Пусть $\mathcal{A} \in \operatorname{End} V$, $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ — все его собственные значения, $\dim V = n$. Тогда $\mathcal{A}$ диагонализируем $\Leftrightarrow g_{\lambda_1} + \dots + g_{\lambda_m} = n$.

Доказательство. $\Rightarrow$: найдется базис E, такой что: $[\mathcal{A}]_E = diag(\underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_1}_{c_1}, \underbrace{\lambda_2, \dots, \lambda_2}_{c_2}, \dots, \underbrace{\lambda_m, \dots, \lambda_m}_{c_m})$, $c_1, \dots, c_m \geq 0$. Первые c_1 векторов — собственные, принадлежащие собственным значениям λ_1. Они ЛНЗ, так как являются часть базиса $\Rightarrow c_1 \leq g_{\lambda_1}$. Аналогично, $c_i \leq g_{\lambda_i}$, $2 \leq i \leq m$. $n = c_1 + \dots + c_m \leq g_{\lambda_1} + \dots + g_{\lambda_m} = n \Rightarrow g_{\lambda_1} + \dots + g_{\lambda_m} = n$
$\Leftarrow$: $\dim(V_{\lambda_1} + \dots + V_{\lambda_m}) = g_{\lambda_1} + \dots + g_{\lambda_m} = n \Rightarrow V = V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_m}$. E_1 — любой базис V_{λ_1}, ..., E_m — любой базис V_{λ_m}. E — диагонализирующий базис для $\mathcal{A}$. ■

Замечание. При этом получили, если

$$[\mathcal{A}]_E = diag(\underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_1}_{c_1}, \underbrace{\lambda_2, \dots, \lambda_2}_{c_2}, \dots, \underbrace{\lambda_m, \dots, \lambda_m}_{c_m}),$$

то $c_1 = g_{\lambda_1}, \dots, c_m = g_{\lambda_m}$.

Глава 4

Характеристический многочлен оператора

$\mathcal{A} \in \operatorname{End} V$, $[\mathcal{A}]_E = A$. Задача: найти собственное значение $\mathcal{A}$. λ – собственое значение $\mathcal{A} \Leftrightarrow \operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\mathscr{E}) \neq 0 \Leftrightarrow \underbrace{[\mathcal{A} - \lambda\mathscr{E}]_E}_{=A-\lambda E_n} \notin \mathrm{GL}_n(K) \Leftrightarrow |\mathcal{A} - \lambda\mathscr{E}| = 0$. Задача сводится к нахождению таких λ, при которых определитель матрицы равен нулю.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$|A - \lambda E_n| = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix}$$

Например, $\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{pmatrix} = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21} = \lambda^2 - \lambda(a_{11} + a_{22}) + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Определитель обращается в ноль, когда λ является корнем этого многочлена.

Определение 4.1 (Характеристический многочлен)**.** Пусть $A \in M_n(K)$. Его характеристический многочлен называется $\chi_A = \underbrace{|A - X \cdot E_n|}_{\in M_n(K[x]) \subset M_n(K(x))} \in K[x]$.
$\begin{vmatrix} \ddots & \\ & \ddots \end{vmatrix} = (a_{11} - x)(a_{22} - x) \dots (a_{nn} - x) + G = (-1)^{n-1}x^n + (-1)^{n-1} \underbrace{(a_{11} + \dots + a_{nn})}_{\operatorname{Tr} A} x^{n-1} + \dots + |A|$, где $A = (a_{ij})$, $\deg G \leq n - 2$, $\operatorname{Tr} A$ – след матрицы.

Определение 4.2. Пусть $\mathcal{A} \in \operatorname{End} V$. Его характеристическим многочленом $\chi_{\mathcal{A}}$ называется $\chi_{[\mathcal{A}]_E}$, где E — любой базис V.

Проверка корректности независимости выбора базиса: пусть $A = [\mathcal{A}]_E$, $A_1 = [\mathcal{A}]_{E_1}$, $C = M_{E \to E_1}$. Нужно: $\chi_A = \chi_{A_1}$.

$$A_1 = C^{-1}AC$$

$$\begin{aligned} \chi_{A_1} &= |A_1 - XE_n| = |C^{-1}AC - XC^{-1}C| = \\ &= |C^{-1}AC - C^{-1}XE_nC| = |C^{-1}(A - XE_n)C| = \underbrace{|C^{-1}|}_{|C|^{-1}} |A - XE_n||C| = \\ &= |A - XE_n| = \chi_A \end{aligned}$$

У эквивалентных матриц след одинаков. 21.09.22

Определение 4.3 (Алгебраическая кратность)**.** Кратность корня λ многочлена $\chi_{\mathcal{A}}$ называется алгебраической кратностью собственного значения λ (обозначается a_λ).

Предложение 4.1. Пусть $\mathcal{A} \in \operatorname{End} V$

1. Пусть W – $\mathcal{A}$-инвариантное подпространство V; $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}|_W \in W$. Тогда $\chi_{\mathcal{A}_1} | \chi_{\mathcal{A}}$.
2. Пусть $V = W_1 \oplus W_2$; W_1, W_2 – $\mathcal{A}$-инвариантны. $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}|_{W_1}$, $\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}|_{W_2} \Rightarrow \chi_{\mathcal{A}} = \chi_{\mathcal{A}_1}\chi_{\mathcal{A}_2}$.

Доказательство. 1: E – базис V, начальная часть которого – базис W.
$[\mathcal{A}]_E = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & B \\ \hline 0 & A_2 \end{array}\right)$, $A_1 = [\mathcal{A}_1]_{E_1}$, E_1 – начальная часть E.
$\chi_{\mathcal{A}} = |\left(\begin{array}{c|c} A_1 & B \\ \hline 0 & A_2 \end{array}\right) - XE_n| = |\left(\begin{array}{c|c} A_1 - XE_m & B \\ \hline 0 & A_2 - XE_{n-m} \end{array}\right)| =$
$|A_1 - XE_m||A_2 - XE_{n-m}| = \underbrace{\chi_{A_1}}_{=\chi_{\mathcal{A}_1}} \chi_{A_2}$.
2: аналогично, в подходящем E $[\mathcal{A}]_E = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & 0 \\ \hline 0 & A_2 \end{array}\right)$: $A_1 =$ $[\mathcal{A}_1]_{E_1}$, $A_2 = [\mathcal{A}_2]_{E_2} \Rightarrow \chi_{\mathcal{A}} = \chi_{A_1}\chi_{A_2} = \chi_{\mathcal{A}_1}\chi_{\mathcal{A}_2}$. ■

Следствие 4.1.1. Допустим, λ – собственное значение $\mathcal{A}$, тогда $g_\lambda \leq a_\lambda$.

Доказательство. Применим предложение к $W = V_\lambda$. Очевидно, W – $\mathcal{A}$-инвариантно $\Rightarrow \chi_{\mathcal{A}|_{V_\lambda}} | \chi_{\mathcal{A}}$.
В любом базисе $[\mathcal{A}|_{V_\lambda}] = diag(\underbrace{\lambda, \lambda, \dots, \lambda}_{g_\lambda}) \Rightarrow \chi_{\mathcal{A}|_{V_\lambda}} =$ $|diag(\underbrace{\lambda - x, \dots, \lambda - x}_{g_\lambda})| = (\lambda - x)^{g_\lambda} \Rightarrow (\lambda - x)^{g_\lambda} | \chi_{\mathcal{A}} \Rightarrow a_\lambda \geq g_\lambda$. ■

Теорема 4.2. Пусть $\mathcal{A} \in \operatorname{End} V$. Тогда эквивалентны 2 условия:

1. $\mathcal{A}$ – диагонализируем.
2. $\chi_{\mathcal{A}}$ раскладывается на линейные множители, и для любого собственного значения λ выполнено: $g_\lambda = a_\lambda$.

Доказательство. $1 \Rightarrow 2$: существует базис E, такой что $A =$ $[\mathcal{A}]_E = diag(\underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_1}_{g_{\lambda_1}}, \underbrace{\lambda_2, \dots, \lambda_2}_{g_{\lambda_2}}, \dots, \underbrace{\lambda_k, \dots, \lambda_k}_{g_{\lambda_k}})$, где $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ – различные собственные значения.
$\chi_{\mathcal{A}} = (\lambda_1 - x)^{g_{\lambda_1}} \dots (\lambda_k - x)^{g_{\lambda_k}}$ – раскладывается на линейные множители (кратность – степень) $\Rightarrow g_{\lambda_i} = a_{\lambda_i}$.
$2 \Rightarrow 1$: $\chi_{\mathcal{A}}$ раскладывается на линейные множители $\Rightarrow \chi_{\mathcal{A}} =$ $\pm(x - \lambda_1)^{a_{\lambda_1}} \dots (x - \lambda_k)^{a_{\lambda_k}}$, $g_{\lambda_i} = a_{\lambda_i} \Rightarrow g_{\lambda_1} + \dots + g_{\lambda_k} = a_{\lambda_1} + \dots +$ $a_{\lambda_k} = n \Rightarrow \chi$ – диагонализируем. ■

Теорема указывает на два обстоятельства, которые мешают оператору быть диагонализируемым: многочлен может не раскладываться на линейные множители (т.е. не только не быть диагонализируемым, но и не иметь собственных значений), геометрическая и алгебраическиая кратности могут не совпадать.

Пример 4.1. 1. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\chi_{\mathcal{A}} = \begin{vmatrix} -x & -1 \\ 1 & -x \end{vmatrix} = x^2 + 1$ $(K = \mathbb{R})$.

2. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\chi_{\mathcal{A}} = \begin{vmatrix} -x & 0 \\ 1 & -x \end{vmatrix} = x^2$, единственное собственное значение – 0, $a_0 = 2$ и $g_0 = 1$.

Глава 5

Многочлены от операторов

Пусть $\mathcal{A} \in \operatorname{End} V$ (V над K), $f \in K[X]$. $f = \alpha_n x^n + ... + \alpha_1 x + \alpha_0$. $f(\mathcal{A}) = \alpha_n \mathcal{A}^n + \alpha_{n-1}\mathcal{A}^{n-1} + ... + \alpha_1 \mathcal{A} + \alpha_0 \mathscr{E}_V \in \operatorname{End} V$.

Предложение 5.1. $f, g \in K[X]$

1. $(f+g)(\mathcal{A}) = f(\mathcal{A}) + g(\mathcal{A})$.
2. $(fg)(\mathcal{A}) = f(\mathcal{A})g(\mathcal{A}) = g(\mathcal{A})f(\mathcal{A}) = gf(\mathcal{A})$ (т.к. многочлены коммутируют).

Доказательство. Непосредственная проверка. ■

Следствие 5.1.1. Пусть $\mathcal{A} \in \operatorname{End} V$, $f \in K[X]$, тогда $\operatorname{Ker} f(\mathcal{A}), \operatorname{Im} f(\mathcal{A})$ – $\mathcal{A}$-инвариантные подпространства.

Доказательство. $v \in \operatorname{Ker} f(\mathcal{A})$, т.е. $f(\mathcal{A})(v) = 0$. Действуем на v оператором $\mathcal{A}$: $f(\mathcal{A})(\mathcal{A}v) = (f(\mathcal{A})\mathcal{A})(v) = (\mathcal{A}f(\mathcal{A}))(v) = \mathcal{A}(0) = 0$. Таким образом, $\mathcal{A}v \in \operatorname{Ker} f(\mathcal{A})$.
$\operatorname{Im} f(\mathcal{A})$ – $\mathcal{A}$-инвариантное подпространство. Пусть $v \in \operatorname{Im} f(\mathcal{A})$. Это означает, что $\exists\ w$: $v = f(\mathcal{A})(w) \Rightarrow \mathcal{A}v = (\mathcal{A}f(\mathcal{A}))(w) = (f(\mathcal{A})\mathcal{A})(w) = f(\mathcal{A})(\mathcal{A}w) \in \operatorname{Im} f(\mathcal{A})$. ■

R – коммутативное ассоциативное кольцо с 1. Подмножество $I \subset R$ называется идеалом, если:

1. I – подгруппа по сложению.
2. $\forall a \in I \; \forall r \in \mathbb{R} : ra \in I$.

Пусть $c \subset R$, $(c) = \{cx | x \in K\}$ – идеал в R, главный идеал, порожденный c.

Следствие 5.1.2. В $K[X]$, где K – поле, все идеалы главные.

Доказательство. Пусть $I \subset K[X]$.
$I = 0$. $I = (0)$.
$I \neq 0$, h - многочлен наименьшей степени, входящий в $I \setminus \{0\}$.
Докажем: $I = (h)$. $h \in I \Rightarrow (h) \subset I$. Осталось: $I \subset (h)$. $f \in I \Rightarrow f = hq + r$, где $\deg r < \deg h \Rightarrow r = \underbrace{f}_{\in I} - \underbrace{h}_{\in I} q \in I \Rightarrow r = 0 \Rightarrow f = hq \in (h)$. ■

Замечание. Аналогично доказывается, что любая евклидова область – ОГИ (область главных идеалов).

Замечание. $\mathbb{Z}[x]$ - не ОГИ. Например, $I = \{f | f(0) \vdots 2\} \neq (2), \neq (x), \neq (\pm 1)$.

Определение 5.1 (Аннулятор)**.** Пусть $\mathcal{A} \in \operatorname{End} V : v \in V$. $f \in K[X]$ называется аннулятором v по отношению к оператору $\mathcal{A}$, если $f(\mathcal{A})(v) = 0$.

Лемма 5.2. $I = \{f \mid f$ – аннулятор $v\}$ – идеал в $K[X]$.

Доказательство. $f, g \in I, \; (f - g)(\mathcal{A})(v) = (f(\mathcal{A}) - g(\mathcal{A}))(v) = f(\mathcal{A})(v) - g(\mathcal{A})(v) = 0$.
$f \in I, \; h \in K[X]$. $(hf)(\mathcal{A})(v) = h(\mathcal{A})(\underbrace{f(\mathcal{A})(v)}_{0}) = 0 \Rightarrow hf \in I$. ■

Пусть $\dim V = n$. $v, \mathcal{A}v, \mathcal{A}^2 v, \dots, \mathcal{A}^n v$ - ЛЗС. $f(\mathcal{A})(v) = \alpha_0 v + \alpha_1 \mathcal{A} v + \dots + \alpha_n \mathcal{A}^n v = 0$, не все $\alpha_i = 0$. $f = \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_n x^n \neq 0 \Rightarrow f$ – аннулятор v.

I – главный идеал $\Rightarrow I = (f_0), f_0 \neq 0$. f_0 – минимальный аннулятор v (минимальный аннулирующий многочлен).

Есть вектор $v \in V$, можно ли найти минимальное подпространство, содержащее этот вектор? $v \in W$, W – инвариант $\Rightarrow \mathcal{A}v \in W \Rightarrow \mathcal{A}^2 v \in W \Rightarrow ... \Rightarrow \mathcal{A}^k v \in W,\ \forall k \in \mathbb{N}$. Отсюда понятно, как построить искомое подпрострнство: нужно «натянуть» пространство на все векторы вида $\mathcal{A}^k v \in W$. Тогда пространство представляет собой линейную оболочку и как раз является инвариантным.

Определение 5.2 (Циклическое подпространство)**.** Циклическим подпространством, порожденным v, называется $C_v = Lin(v, \mathcal{A}v, \mathcal{A}^2 v, ...)$.

Предложение 5.3. Пусть f_0 – минимальный аннулятор v, $d = deg f_0$. Тогда C_v – $\mathcal{A}$-инвартное подпространство с базисом $v, \mathcal{A}v, \mathcal{A}^2 v, \dots, \mathcal{A}^{d-1} v$.

Доказательство. Всякое подпространство – линейная оболочка, это проверять не нужно.
Проверим $\mathcal{A}$-инвариантность: $w \in C_v \Rightarrow w = \alpha_0 v + \alpha_1 \mathcal{A}v + ... + \alpha_m \mathcal{A}^m v \Rightarrow \mathcal{A}w = \alpha_0 \mathcal{A}v + \alpha_1 \mathcal{A}^2 v + ... + \alpha_m \mathcal{A}^{m+1} v \in C_v$.
Проверим базис. Предположим, $v, \mathcal{A}v, \mathcal{A}^2 v, \dots, \mathcal{A}^{d-1} v$ – ЛЗС. $g(\mathcal{A})(v) = \beta_0 v + \beta_1 \mathcal{A}v + ... + \beta_{d-1}\mathcal{A}^{d-1} = 0$, не все $\beta = 0$.
$g = \beta_0 + \beta_1 x + ... + \beta_{d-1} x^{d-1} \neq 0 \Rightarrow g$ – аннулятор $v \Rightarrow g \in (f_0) \Rightarrow f_0 | g \Rightarrow deg g \leq d - 1$, пришли к противоречию. Таким образом, $v, \mathcal{A}v, \mathcal{A}^2 v, \dots, \mathcal{A}^{d-1} v$ – ЛНС.
Осталось проверить $C_v = \underbrace{Lin(v, \mathcal{A}v, \mathcal{A}^2 v, \dots, \mathcal{A}^{d-1} v)}_{W}$.
Докажем индукцией по k: $\mathcal{A}^k v \in W$.
База: $k = 0, 1, \dots, d-1 \Rightarrow \mathcal{A}^k \in W$ по определению.
Переход: $k \geq d$.
По индукционному предположению: $\mathcal{A}^{k-1} v \in W$, т.е. $\mathcal{A}^{k-1} v = \gamma_0 v + \gamma_1 \mathcal{A}v + ... + \gamma_{d-1}\mathcal{A}^{d-1} v \Rightarrow \mathcal{A}^k v = \underbrace{\gamma_0 \mathcal{A}v + \gamma_1 \mathcal{A}^2 v + ... + \gamma_{d-2}\mathcal{A}^{d-1} v}_{W} + \gamma_{d-1}\mathcal{A}^d v$.
$\mathcal{A}^d v \in W$?
$f_0 = \beta_0 + \beta_1 x + ... + \beta_{d-1} x^{d-1} + \beta_d x^d$ – минимальный аннулятор, $B_d \neq 0$.
$0 = f_0(\mathcal{A})v = \underbrace{\beta_0 v + \beta_1 \mathcal{A}v + ... + \beta_{d-1}\mathcal{A}^{d-1} v}_{\in W} + \beta_d \mathcal{A}^d v \Rightarrow \mathcal{A}^d v \in$

$W \Rightarrow \mathcal{A}^k v \in W, \ \forall \ k \in \mathbb{N}$.

■

28.09.22

Пусть $v \in V$, $\mathcal{A} \in \operatorname{End} V$.

$C_v = Lin(v, \mathcal{A}v, \mathcal{A}^2 v, ...) = Lin(v, \mathcal{A}v, \mathcal{A}^2 v, \ldots, \mathcal{A}^{d-1}v)$, где $d = deg f_0$, f_0 – минимальный аннулятор v.

Итак, что представляет собой $\chi_{\mathcal{A}|_{C_v}} = ?$

$f_0 = \beta_0 + \beta_1 x + ... + \beta_{d-1}x^{d-1} + \beta_d x^d$, $\beta_d \neq 0$.

Домножив f_0 на ненулевую константу, мы можем считать $\beta_d = 1$.

$E = (v, \mathcal{A}v, \mathcal{A}^2 v, \ldots, \mathcal{A}^{d-1}v)$ – базис C_v.

Легко видеть:

$$[\mathcal{A}|_{C_v}]_E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & ... & 0 & -\beta_0 \\ 1 & 0 & 0 & ... & 0 & -\beta_1 \\ 0 & 1 & 0 & ... & 0 & -\beta_2 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 & -\beta_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & -\beta_{d-2} \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 & -\beta_{d-1} \end{pmatrix} = L_{f_0}$$

L_{f_0} – сопровождающая матрица многочлена f_0.

получаем последний столбец

$f_0(\mathcal{A})v = 0 = \beta_0 v = \beta_1 \mathcal{A}v + ... + \beta_{d-1}\alpha_{d-1}v + \alpha_d v.$

${\mathcal{A}_v}^d = -\beta_0 v - \beta_1 \mathcal{A}v - ... - \beta_{d-1}\mathcal{A}^{d-1}v$ – разложение по базису E

получаем последний столбец

$$\chi_{\mathcal{A}|_{C_v}} = \begin{vmatrix} -x & 0 & 0 & \dots & 0 & -\beta_0 \\ 1 & -x & 0 & \dots & 0 & -\beta_1 \\ 0 & 1 & -x & \dots & 0 & -\beta_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -x & -\beta_{d-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -\beta_{d-1} - x \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{d+1}(-\beta_0) +$$

$$+ (-1)^{d+2}(-\beta_1) \underbrace{\begin{vmatrix} -x & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -x & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}}_{-x} +$$

$$+ (-1)^{d+3}(-\beta_2) \underbrace{\begin{vmatrix} -x & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -x & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -x & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}}_{x^2} + \dots +$$

$$+ (-1)^{2d-1}(-\beta_{d-2})(-x)^{d-2} +$$

$$+ (-1)^{2d}(-\beta_{d-1} - x)(-x)^{d-1} =$$

$$= (-1)^{d+1} \sum_{i=0}^{d-1} (-1)^i(-\beta_i)(-x)^i + (-x)^d =$$

$$= (-1)^{d+1}(\sum_{i=1}^{d-1} \beta_i x^i + x^d) =$$

$$= (-1)^d f_0$$

Короче, $\chi_{\mathcal{A}|_v} = (-1)^d f_0$.

Глава 6

Теорема Гамильтона-Кэли

Теорема 6.1. Пусть $\mathcal{A} \in \operatorname{End} V$, тогда $\chi_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) = 0$.

Доказательство. Рассмотрим $v \in V$. $\chi_{\mathcal{A}|_{C_v}}$ – минимальный аннулятор $v \Rightarrow \chi_{\mathcal{A}|_{C_v}}(\mathcal{A})(v) = 0$. $\chi_{\mathcal{A}|_{C_v}} | \chi_{\mathcal{A}} \Rightarrow \chi_{\mathcal{A}}(\mathcal{A})(v) = 0$, v – любой элемент V. Таким образом, $\chi_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) = 0$. ■

Следствие 6.1.1 (Матричная теорема Гамильтона – Кэли). Допустим, $A \in M_n(K)$, тогда $\chi_A(A) = 0$.

Доказательство. Представим A как $[\mathcal{A}]_E$, тогда $\chi_A = \chi_{\mathcal{A}}$.
$\chi_A(A) = \chi_A([\mathcal{A}]_E) = [\chi_A(\mathcal{A})]_E = [\chi_{\mathcal{A}}(\mathcal{A})]_E = 0$. ■

Как подставляется матрица в многочлен?

Если $f = \alpha_0 + \alpha_1 x + ... + \alpha_n x^n$, $A \in M_n(K)$, то $f(A) = \alpha_0 E_n + \alpha_1 A + ... + \alpha_n A^n$.

Почему мы можем представить матрицу как матрицу какого-то оператора?

1. V – любое пространство с $\dim V = n$, E – фиксированный базис. $\operatorname{End} V \to M_n(K)$, $\beta \mapsto [\beta]_E$ – изоморфизм $\Rightarrow$ существует $\mathcal{A} \in \operatorname{End} V$: $[\mathcal{A}]_E = A$.

2. $V = K^n$, $\mathcal{A}$: $K^n \to K^n$, $b \mapsto Ab$, E – стандартный базис K^n, $A = [\mathcal{A}]_E$.

Предложение 6.2. Пусть $\mathcal{A} \in \operatorname{End} V$, тогда $I_\mathcal{A} = \{f \in K[X] | f(\mathcal{A}) = 0\}$ – идеал $K[X]$, где $f(\mathcal{A})$ – нулевой оператор.

Доказательство. $f, g \in I_\mathcal{A} \Rightarrow f + g \in I_\mathcal{A}$ - очевидно.
$f \in I_\mathcal{A}$, $g \in K[X]$: $(gf)(\mathcal{A}) = g(\mathcal{A}) \circ \underbrace{f(\mathcal{A})}_{0} = 0$.
$\chi_\mathcal{A} \in I_\mathcal{A}$, по теореме Гамильтона–Кэли $\Rightarrow I_\mathcal{A} \neq 0$. ■

Образующую $I_\mathcal{A}$ называют минимальным многочленом оператора $\mathcal{A}$.

Замечание. $(f) = (g) \Leftrightarrow \begin{cases} f | g \\ g | f \end{cases} \Rightarrow g = \varepsilon f$, $\varepsilon \in K^*$.

Определение 6.1 (Минимальный многочлен оператора). $\mu_\mathcal{A}$ называется минимальным многочленом оператора, если $(\mu_\mathcal{A}) = I_\mathcal{A}$ (является порождающим идеала $I_\mathcal{A}$).

По теореме Гамильтона–Кэли $\mu_\mathcal{A} | \chi_\mathcal{A}$ $(\chi_\mathcal{A} \in I_\mathcal{A} = (\mu_\mathcal{A}))$.
$\mu_{\mathcal{A},v}$ - минимальный аннулятор вектора v.

Предложение 6.3.
1. $\mu_{\mathcal{A},v} | \mu_\mathcal{A}$
2. $V = Lin(v_1, \dots, v_n)$, тогда $\mu_\mathcal{A} = \text{НОК } (\mu_{\mathcal{A},v_1}, \dots, \mu_{\mathcal{A},v_n})$

Доказательство. 1.

$$\mu_\mathcal{A}(\mathcal{A}) = 0 \Rightarrow \mu_\mathcal{A}(\mathcal{A})(v) = 0 \Rightarrow \mu_\mathcal{A} \in (\mu_{\mathcal{A},v})$$

2.

$$f = \text{НОК } (\dots)$$
$$\mu_{\mathcal{A},v_i} | f \Rightarrow f(\mathcal{A})(v_i) = 0,\ i = 1, \dots, n$$
$$v \in V \Rightarrow v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$$
$$v_1, \dots, v_n \in \operatorname{Ker} f(\mathcal{A}) \Rightarrow v \in \operatorname{Ker} f(\mathcal{A})$$

$$f(\mathcal{A}) = 0 \Rightarrow \mu_{\mathcal{A}} \mid f$$

$$1 \Rightarrow \mu_{\mathcal{A},v_i} \mid \mu_{\mathcal{A}},\ i = 1, \dots, n \Rightarrow f \mid \mu_{\mathcal{A}} \Rightarrow f = \varepsilon\mu_{\mathcal{A}},\ \varepsilon \in K^*.$$

$\blacksquare$

Глава 7

Примарные подпространства

Определение 7.1 (Примарное подпространство)**.** Допустим, p – неприводимый многочлен, $\mathcal{A} \in \operatorname{End} V$, $W \subset V$ называется p-примарным, если W – $\mathcal{A}$-инвариантно и $\forall v \in W : \ \mu_{\mathcal{A},v} = p^m, \ m \geq 0$, p – неприводимый.

$$W_p = \{w \in V \mid \mu_{\mathcal{A},w} = p^m, \ m \geq 0\}$$

Предложение 7.1. W_p – максимальное по включению p-примарное подпространство.

Доказательство. Нужно проверить:

1. $W_p < V$:

$$\lambda \neq 0 \Rightarrow \mu_{\mathcal{A},\lambda w} = \mu_{\mathcal{A},w}.$$
$$W_1, \ W_2 \in W_p$$
$$\mu_{\mathcal{A},w_1} = p^{m_1}, \ \mu_{\mathcal{A},w_2} = p^{m_2}$$
$$m = max(m_1, \ m_2).$$
$$p^m(\mathcal{A})(W_1 + W_2) = p^{m_1}(\mathcal{A})(W_1) + p^{m_2}(\mathcal{A})(W_2) = 0$$
$$\mu_{\mathcal{A},W_1+W_2}|p^m \Rightarrow \mu_{\mathcal{A},W_1+W_2} = p^l, \text{ где } l \leq m \Rightarrow W_1 + W_2 \subset W_p$$

2. W_p – $\mathcal{A}$-инвариантно:

$$w \in W_p \Rightarrow \mu_{\mathcal{A},w} = p^m$$
$$p^m(\mathcal{A})(w) = 0$$
$$p^m(\mathcal{A})(\mathcal{A}w) - \mathcal{A}\underbrace{(p^m(\mathcal{A})(w))}_{0} = 0$$
$$\mu_{\mathcal{A},\mathcal{A}_w} | p^m \Rightarrow \mu_{\mathcal{A},\mathcal{A}_w} = p^l,\ l \leq m \Rightarrow \mathcal{A}w \in W_p$$

■

Предложение 7.2. Допустим $f(\mathcal{A}) = 0,\ f = gh,\ (g,h) = 1$, тогда $V = W_1 \oplus W_2$, где W_1, W_2 – $\mathcal{A}$-инвариантны, $g(\mathcal{A}|_{W_1}) = 0,\ h(\mathcal{A}|_{W_2}) = 0$.

Доказательство. Предположим, $W_1 = \operatorname{Ker} g(\mathcal{A}),\ W_2 = \operatorname{Ker} h(\mathcal{A}),\ W_1, W_2$ – $\mathcal{A}$-инвариантные пространства. $(g,h) = 1 \Rightarrow \exists\ a,\ b \in K[X]$ такие, что $ag + bh = 1$.

1. Проверим, что $W_1 + W_2 = V$:

$$g(\mathcal{A})a(\mathcal{A}) + h(\mathcal{A})b(\mathcal{A}) = \mathscr{E}_V$$
$$v \in V,\ v = \underbrace{g(\mathcal{A})a(\mathcal{A})(v)}_{\in W_2} + \underbrace{h(\mathcal{A})b(\mathcal{A})(v)}_{\in W_1}.$$
$$h(\mathcal{A})(g(\mathcal{A})a(\mathcal{A})v(\mathcal{A})) = \underbrace{(hg)}_{f}(\mathcal{A})a(\mathcal{A})(v) = 0$$
$$\Rightarrow g(\mathcal{A})a(\mathcal{A})(v) \in W_2$$

Аналогично, $h(\mathcal{A})b(\mathcal{A})(v) \in W_1$.

Таким образом, $\forall v \in W_1 + W_2$.

2. Проверим, что $W_1 \bigcap W_2 = 0$:

$$v \in W_1 \bigcap W_2$$
$$a(\mathcal{A})g(\mathcal{A}) + b(\mathcal{A})h(\mathcal{A}) = \mathscr{E}_V$$
$$a(\mathcal{A})\underbrace{g(\mathcal{A})(v)}_{0} + b(\mathcal{A})\underbrace{h(\mathcal{A})(v)}_{0} = v$$

Таким образом, $v = 0$.

■

05.10.22

Предложение 7.3. Пусть $f(\mathcal{A}) = 0$, $f = \varepsilon {p_1}^{r_1} \ldots {p_s}^{r_s}$, $\varepsilon \in K^*$, p_i попарно неассоциативные неприводимые многочлены. Тогда $V = W_{p_1} \oplus \ldots \oplus W_{p_s}$, т.е.

1. $V = W_{p_1} + \ldots + W_{p_s}$
2. $0 = w_1 + \ldots + w_s$, $w_j \in W_{p_j} \Rightarrow w_1 = \ldots = w_s = 0$ (равносильно условию, что V единственным образом представляется в виде суммы $W_{p_1}, \ldots, W_{p_s}$: $v = w_1 + \ldots + w_s = w_1' + \ldots + w_s' \Rightarrow (w_1 - w_1') + \ldots + (w_s - w_s') = 0 \Rightarrow w_i - w_i' = 0$).

Доказательство. Индукция по s.
База: $s = 1$. ${p_1}^{r_1}(\mathcal{A}) = 0 \Rightarrow \mu_{\mathcal{A},v} | {p_1}^{r_1} \Rightarrow W_{p_1} = V$.
Переход: $f = gh$, $g = \mathscr{E} {p_1}^{r_1} \ldots {p_{s-1}}^{r_{s-1}}$, $h = {p_s}^{r_s}$, $(g, h) = 1 \Rightarrow V = V' \oplus V''$, $g(\mathcal{A}|_{V'}) = 0$, $h(\mathcal{A}|_{V''}) = 0$ (по предложению 7.2).
По индукционному предположению, $V' = \tilde{W}_{p_1} \oplus \ldots \oplus \tilde{W}_{p_s - 1}$.
$\tilde{W}_{p_j}$ - максимальной p_j-примарное подпространство для $\mathcal{A}|_{V'}$.
$\forall v \in \tilde{W}_{p_j}$: $\mu_{\mathcal{A}|_{V'},v} = \mu_{\mathcal{A},v} \Rightarrow \tilde{W}_{p_j} \subset W_{p_j}$.
${p_s}^{r_s}(\mathcal{A}|_{V''}) = 0 \Rightarrow V'' - p_s$-примарное $\Rightarrow V'' \subset W_{p_s}$.
$V = \tilde{W}_{p_1} \oplus \ldots \oplus \tilde{W}_{p_{s-1}} \oplus V'' \subset W_{p_1} + \ldots + \tilde{W}_{p_{s-1}} \subset W_{p_1} + \ldots + W_{p_s}$.
Таким образом, $V = W_{p_1} + \ldots + W_{p_s}$.
Предположим, $w_1 + \ldots + w_s = 0$, $w_j \in W_{p_j}$, $j = 1, \ldots, s$.
Проверим: $w_s = 0$ (аналогично $w_j = 0\ \forall j$).
$w_s = -w_1 - w_2 - \ldots - w_{s-1}$.
$w_j \in W_{p_j} \Rightarrow \mu_{\mathcal{A},w_j} = p_j^{l_j}$, $j = 1, \ldots, s$.
${p_1}^{l_1} \ldots {p_{s-1}}^{l_{s-1}}(\mathcal{A})(w_j) = 0$, $j = 1, \ldots, s-1 \Rightarrow {p_1}^{l_1} \ldots {p_{s-1}}^{l_{s-1}}(\mathcal{A}) \underbrace{(w_1 + \ldots + w_{s-1})}_{-w_s} = 0 \Rightarrow {p_s}^{l_s} \mid {p_1}^{l_1} \ldots {p_{s-1}}^{l_{s-1}} \Rightarrow$
$l_s = 0 \Rightarrow w_s = 0$. ■

Следствие 7.3.1. Пусть $\mathcal{A} \in \operatorname{End} V$. Тогда $V = \bigoplus_{p | \chi_{\mathcal{A}}} W$, p – неприводимый приведеннный.

Замечание. $p \nmid \chi_{\mathcal{A}} \Rightarrow W_p = 0$ (т.е. $\mu_{\mathcal{A},v} \mid \mu_{\mathcal{A}} \mid \chi_{\mathcal{A}}$) $\Rightarrow V = \bigoplus_p W_p$, p – неприводимый приведеннный.

Замечание. $p \mid \chi_{\mathcal{A}} \Rightarrow W_p \neq 0$.

Замечание. Пусть V – p-примарное, тогда $V = \bigoplus_{i=1}^t C_{v_i},\ \mu_{\mathcal{A}_i,v_i} = p^{m_i}$.

В частном подходящем базисе:

$[\mathcal{A}]_E = \left(\begin{array}{c|c|c} L_{p^{m_1}} & & \\ \hline & & \\ \hline & & L_{p^{m_t}} \end{array}\right)$, где L_f – сопровождающая матрица многочлена f.

$$f = x^d + \alpha_{d-1}x^{d-1} + ... + dx + \alpha \Rightarrow L_f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & ... & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & ... & -\alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & -\alpha_{d-1} \end{pmatrix}$$

Глава 8

Жорданова нормальная форма

Пусть $\mathcal{A} \in \operatorname{End} V$, $\chi_{\mathcal{A}}$ раскладывается на линейные множители.

$p | \chi_{\mathcal{A}}$ неприводимый приведенный $\Rightarrow p = X - \lambda$, λ - собственное значение $\mathcal{A}$.

$W_{X-\lambda} = R_\lambda = \{v \mid \exists j : (X-\lambda)^j(\mathcal{A})(v) = 0\} = \{v \mid (\mathcal{A} - \lambda\mathscr{E})^j(v) = 0\}$ – корневые векторы, принадлежащее собственному значению λ.

Определение 8.1 (Корневой вектор и корневое подпространство). Корневым вектором, принадлежащим собственному значению λ называется $v \in V$ такое, что $(\mathcal{A} - \lambda\mathscr{E})^j(v) = 0$ для некоторого j. R_λ – корневое подпространство, принадлежащее собственному значению λ.

Свойства.

1. $V_\lambda \subset R_\lambda$, т.к. $V_\lambda = \operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\mathscr{E})$
2. $R_\lambda \neq 0 \Leftrightarrow \lambda$ – собственное значение $\mathcal{A}$

   Доказательство. $\Rightarrow$: $R_\lambda = W_{X-\lambda}$ (по опр.). $R_\lambda \neq 0 \Rightarrow (X-\lambda) \mid \chi_{\mathcal{A}} \Rightarrow \lambda$ – собственное значение.
   $\Leftarrow$: λ – собственное значение $\Rightarrow V_\lambda \neq 0 \Rightarrow R_\lambda \neq 0$ ■

3. $V = \bigoplus_\lambda R_\lambda$ (интерпретация основного определения) $V = \bigoplus_{p | \chi_{\mathcal{A}}} W_p$

Определение 8.2 (Высота корневого вектора). Высота корневого вектора v – это минимальное h такое, что $(\mathcal{A} - \lambda\mathscr{E})^h(v) = 0$.

Корневой вектор высоты 0 – это 0, 1 – собсвтенные векторы, 2 – такие v, что $(\mathcal{A} - \lambda\mathscr{E})(v)$ - собственный вектор, h – $\mathrm{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\mathscr{E})^h \setminus \mathrm{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\mathscr{E})^{h-1}$.

Очевидно, $R_\lambda = \bigcup_{h\in\mathbb{N}} \underbrace{Ker(\mathcal{A} - \lambda\mathscr{E})^h}_{=R_{\lambda,h}}$.

$\underbrace{R_{\lambda,0}}_{=0} \subset \underbrace{R_{\lambda,1}}_{=V_\lambda} \subset R_{\lambda,2} \subset \dots \subsetneq R_{\lambda,N_\lambda} = R_{\lambda,N_\lambda+1} \Rightarrow R_\lambda = R_{\lambda,N_\lambda}$.

Предложение 8.1. Пусть N_λ – минимальное натуральное число такое, что $R_\lambda = R_{\lambda,N_\lambda}$, $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ – все собственные значения $\mathcal{A}$. Тогда $\mu_\mathcal{A} = \underbrace{\prod_{i=1}^s (x-\lambda)^{N_{\lambda_i}}}_{=f}$.

Доказательство. $R_{\lambda_i} = R_{\lambda_i,N_{\lambda_i}} \Rightarrow (x-\lambda_i)^{N_{\lambda_i}}(\mathcal{A}|_{R_{\lambda_i}}) = 0 \Rightarrow f(\mathcal{A}|_{R_{\lambda_i}}) = 0,\ i = 1,\dots,s \Rightarrow f(\mathcal{A}) = 0 \Rightarrow \mu_\mathcal{A}|f$.
Докажем: $(x-\lambda)^{\lambda_i} \mid \mu_\mathcal{A},\ i = 1,\dots,s$.
$\exists v \in R_{\lambda_i,N_{\lambda_i}} \setminus R_{\lambda_i,N_{\lambda_i}-1}$
$\mu_{\mathcal{A},v} = (x-\lambda_i)^{N_{\lambda_i}},\ \mu_{\mathcal{A},v} \mid \mu_\mathcal{A} \Rightarrow f \mid \mu_\mathcal{A}$. ■

Следствие 8.1.1. Множества корней $\chi_\mathcal{A}$ и $\mu_\mathcal{A}$ совпадают.

Доказательство. $\mu_\mathcal{A}$ делит $\chi\mathcal{A}$, и у $\chi\mathcal{A}$ нет других корней, так как $N_{\lambda_i} \geq 1$. ■

Определение 8.3 (Жорданова клетка порядка n). Пусть $\lambda \in K$, $n \in \mathbb{N}$. Жордановой клеткой порядка n с собственным значением λ называется

$$\mathcal{J}_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

Жорданова матрица – блочно-диагональная матрица, блоки которой – некоторые жордановы клетки.
$\chi_{\mathcal{J}_n(\lambda)} = (\lambda - x)^n = \pm(x-\lambda)^n,\ (a_\lambda = n,\ g_\lambda = 1)$ для $\mathcal{J}_n(\lambda)$.
Базис E пространство V называется Жордановым базисом (для $\mathcal{A}$), если $[\mathcal{A}]_E$ жорданова.

Определение 8.4 (Нильпотентный оператор). $\mathcal{A}$ называется нильпотентным, если $\exists\ N > 0 :\ \mathcal{A}^N = 0$ (т.е. $\mu_{\mathcal{A}} = x^{\cdots}$).

$V = \bigoplus R_\lambda$

$(x-\lambda)^{N_\lambda}(\mathcal{A}|_{R_\lambda}) = 0 \Rightarrow (\mathcal{A}|_{R_\lambda} - \mathcal{E}|_{R_\lambda})^{N_\lambda} = 0$. Таким образом, $\mathcal{A}|_{R_\lambda} - \mathcal{E}_{R_\lambda}$ – нильпотентный. Минимальное N называется индексом нильпотентности $\mathcal{A}$.

Замечание. E – жорданов базис для $\mathcal{A} \Rightarrow E$ – жорданов базис для $\mathcal{A}+\alpha\mathcal{E}$. $[\mathcal{A}+\alpha\mathcal{E}]_E = [\mathcal{A}]_E + [\alpha\mathcal{E}]_E = [A]_E + diag(\alpha, \dots, \alpha)\ \mathcal{J}_n(\lambda) + \alpha E_n = \mathcal{J}_n(\lambda+\alpha)$

Построение жорданового базиса для нильпотентного оператора.
$\mathcal{B}$ - нильпотент, N - индекс нильпотентности.
$\mu_{\mathcal{B}} = x^N,\ V = R_0 = R_{0,N} \supsetneq R_{0,N-1} \supset \dots \supset R_{0,1} \supset R_{0,0} = \{0\}$
Пусть $e_{N,1}, e_{N,2}, \dots, e_{N,q_N}$ – базис $R_{0,N}$ относительно $R_{0,N-1}$.

Лемма 8.2. Пусть $v_1, \dots, v_s \in R_{0,m}$ ЛНЗ относительно $R_{0,m-1}$. Тогда: $\mathcal{B}v_1, \dots, \mathcal{B}v_s \in R_{0,m-1}$. $\mathcal{B}^m v_i = 0 = \mathcal{B}^{m-1}(\mathcal{B}v_i) = 0 \Rightarrow \mathcal{B}v_i \in R_{0,m-1}$.

Доказательство. Пусть $\alpha_1\mathcal{B}v_1 + \dots + \alpha_s\mathcal{B}v_s \in R_{0,m-2}$. $\mathcal{B}^{m-2}(\alpha_1\mathcal{B}v_1 + \dots \alpha_s\mathcal{B}v_s) = \mathcal{B}^{m-1}(\alpha_1\mathcal{B}v_1 + \dots \alpha_s\mathcal{B}v_s) = 0 \Rightarrow$

$\alpha_1 \mathcal{B} v_1 + ... \alpha_s \mathcal{B} v_s \in \operatorname{Ker} B^{m-1} = R_{0,m-1} \Rightarrow \alpha_1 = ... = \alpha_s = 0.$ ∎