Математический анализ

Бабин Руслан, Пономарев Николай
Курс Широкова Н. А.

осень 2021 г.

Оглавление

ГЛАВА 1

Вещественные числа

1.1. Обозначения и нотация

В дальнейшем множество будем понимать как совокупность объектов, называемых его элементами. Приведенное высказывание не является определением, однако в дальнейшем при операциях с конкретными множествами, математический контекст рассматриваемые множества определяет.

Если a, b – некие элементы, A – множество, то запись $a \in A$ означает, что a принадлежит множеству A; запись $b \notin A$ означает, что элемент b не принадлежит множеству A.

Символ $\forall$ означает высказывание «для всякого», далее всегда будет следовать текст конкретизирующий это высказывание.

Символ $\exists$ означает высказывание «существует» и также будет задан математическим контекстом.

Запись $A \Rightarrow B$ или $B \Leftarrow A$ означает «из A следует B»; запись $A \Leftrightarrow B$ означает «A эквивалентно B».

Множества A и B называются совпадающими, что записывают формулой $A = B$, если $(\forall a \in A) \Rightarrow (a \in B)$ и $(\forall b \in B) \Rightarrow (b \in A)$; приведенная формальная запись означает, что $A = B$ в том и только в том случае, когда они состоят из одних и тех же элементов.

Если множества A и B не совпадают, то пишут $A \neq B$.

Определяют также пустое множество, в котором нет элементов, которое будем обозначать символом $\varnothing$.

Запись $A \subset B$ читается «A содержится в B» и означает, что $(\forall a \in A) \Rightarrow (a \in B)$. Полагаем, что $\varnothing \subset A$ для любого множества A. Понятно,

что
$$A = B \Leftrightarrow (A \subset B) \text{ и } (B \subset A).$$

В дальнейшем при рассмотрении сразу нескольких множеств в качестве синонима слова «множество» будем использовать слова «семейство», «класс», «совокупность».

1.2. Операции над множествами

Объединением $A \cup B$ множеств A и B будем называть множество:
$$(a \in A \cup B) \Leftrightarrow (a \in A) \text{ или } (a \in B).$$

Если множество A задается каким-то условием, обозначим его «условие», то для задания множества A будем использовать обозначение
$$A = \{a : \text{«условие» на } a\}$$
Пример.
$$A_1 \cup A_2 = \{a : a \in A_1 \text{ или } a \in A_2\}$$

Если имеется произвольное непустое множество I и $\forall \alpha \in I$ имеется множество A_α, то
$$\bigcup_{a \in I} A_\alpha = \{a : \exists \alpha \in I \text{ такое, что } a \in A_\alpha\}$$

Пересечением $A \cap B$ назовем множество
$$A \cap B = \{a : (a \in A) \text{ и } (a \in B)\}.$$

Если элементов a, принадлежащих A и B, не существует, пишем
$$A \cap B = \varnothing$$
и называем A и B дизъюнктивными. Если есть непустое множество I, то, предполагая, что $\forall \alpha \in I \exists A_\alpha$, Полагаем
$$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = \{a : \forall \alpha \in I \quad a \in A_\alpha\}$$

Теоретико-множественной разностью множеств A и B, обозначаемой A
B, называется множество
$$AB = \{a : a \in A, a \notin B\}$$

Теорема 1.1. *Предположим, что имеется непустое множество I и для любого $\alpha \in I$ имеется множество A_α. Справедливы следующие формулы:*

$$B \cap \left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \right) = \bigcup_{\alpha \in I} (B \cap A_\alpha) \tag{1.1}$$

$$B \cup \left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \right) = \bigcap_{\alpha \in I} (B \cup A_\alpha) \tag{1.2}$$

$$B \setminus \left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \right) = \bigcap_{\alpha \in I} (B \setminus A_\alpha) \tag{1.3}$$

$$B \setminus \left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \right) = \bigcup_{\alpha \in I} (B \cup A_\alpha) \tag{1.4}$$

Доказательство. Докажем (**??**), остальные соотношения доказываются аналогично. Обозначим левую часть (**??**) через C, а правую через D. Если $a \in C$, то $a \in B$ и $a \in \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$, т.е. $\exists \alpha_0 \in I$, такое что $a \in A_\alpha$, тогда $a \in B \cap A_{\alpha_0}$, $a \in \bigcup_{\alpha \in I}(B \cap A_\alpha)$, $a \in D$, то есть $C \subset D$. Если $b \in D$, то $\exists \alpha_1 \in I$ такое что $b \in B \cap A_{\alpha_1}$, то есть $b \in B$ и $b \in A_{\alpha_1}$, тогда $b \in \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$, $b \in B \cap \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$, т.е. $b \in C$ и $D \subset C$, т.е. $C = D$, что и требовалось доказать. ■

1.3. Определение вещественных чисел по Р.Дедекинду

Далее будем считать известными натуральные числа, множество которых всегда обозначается через $\mathbb{N}$, множество целых чисел $\mathbb{Z}$, множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$. Считаем, что свойства арифметических действий с числами из $\mathbb{Q}$ и свойства, связанные с упорядочиванием рациональных чисел по возрастанию, известны.

Определение 1.1. Пусть α - непустое множество, состоящее из рациональных чисел. Будем называть множество α сечением, если выполняются следующие условия:

1. $\alpha \neq \mathbb{Q}$

2. Если $p \in \alpha, q \in \alpha, q < p$, то $q \in \alpha$

3. В α нет наибольшего числа, т.е. не существует $p_0 \in \alpha$, такого что $\forall p \in \alpha$ выполнено $p \leq p_0$

Утверждение 1.1. *Пусть α – сечение. Если $q \in \mathbb{Q}, p \in \alpha, q \notin \alpha$, то $p < q$.*

Доказательство. Из условия следует, что $p \neq q$. Если бы выполнялось $q < p$, то по п.2 определения сечения $q \in \alpha$, чего нет. Следовательно $p > q$, чтд. ■

Термин 1.1. Пусть α – сечение. Числа из $\mathbb{Q}$, принадлежащие α, называются нижними числами сечения α, а числа из $\mathbb{Q}$, не принадлежащие α, называются верхними числами сечения α.

Сопоставим теперь $\forall z \in \mathbb{Q}$ сечение, которое будем обозначать z^*. Далее запись $A \stackrel{def}{=} B$ означает, что объект A определяется через объект B. Полагаем:

$$z^* = \{p \in \mathbb{Q} : p < z\} \tag{1.5}$$

Запись (**??**) является сокращением формальной записи (**??**)

$$z^* = \{p : p \in \mathbb{Q} \wedge p < z\} \tag{1.6}$$

Проверим, что z^* – сечение. $z - 1 < z$, т.е. $z - 1 \in z^*$, множество z^* непустое. $z + 1 > z, z + 1 \notin z^*, z^* \neq \mathbb{Q}$. Если $p \in z^* \wedge q \in \mathbb{Q}, q < p$, то $q < p < z \Rightarrow q < z, q \in z^*$. Если $p_1 \in z^*$, то $p_1 < z$; пусть $p_2 = \frac{p_1+z}{2}$, тогда $p_1 < p_2 < z$, $p_2 \in z^*$, т.е. в z^* нет наибольшего числа.

Определение 1.2. Множество всех сечений будет называться множеством вещественных чисел, а любое конкретное сечение будем называть вещественным числом. Обозначаем множество вещественных чисел $\mathbb{R}$.

Приведенный подход к определению вещественных чисел принадлежит немецкому математику Р. Дедекинду, поэтому сечения называются сечениями множества рациональных чисел по Дедекинду.

1.4. Упорядочивание по возрастанию и арифметические действия над $\mathbb{R}$ числами

Определение 1.3. Пишем $\alpha < \beta$, говорим, что α меньше β, если $\exists p \in \mathbb{Q}$, т.ч. $p \in \beta \wedge p \notin \alpha$. Пишем $\alpha \leq \beta$, говорим, что α не превосходит β, если $\alpha < \beta \vee \alpha = \beta$.

Теорема 1.2. *Пусть α, β – сечения. Тогда либо $\alpha < \beta$, либо $\alpha = \beta$, либо $\alpha > \beta$.*

Доказательство. Если $\alpha = \beta$, то определение влечёт, что не может быть при этом $\alpha < \beta$ или $\alpha > \beta$. Пусть $\alpha \neq \beta$. Докажем, что выполнено только одно соотношение $\alpha < \beta$ или $\alpha > \beta$. Предположим, что выполнены оба, т.е. $\alpha < \beta$ и $\beta < \alpha$. Тогда $(\alpha < \beta) \Rightarrow (\exists p \in \mathbb{Q} | p \in \beta, p \notin \alpha)$; $(\beta < \alpha) \Rightarrow (\exists q \in \mathbb{Q} | q \in \alpha, q \notin \beta)$. По утверждению из предыдущей лекции $(p \in \beta, q \notin \beta) \Rightarrow p < q; (q \in \alpha, p \notin \alpha) \Rightarrow q < p$ – получили противоречие.

Таким образом, $\alpha < \beta$ и $\beta < \alpha$ вместе не могут выполняться. Но, если $\alpha \neq \beta$, то в каком-то из этих множеств, например в β имеется элемент $r \in \mathbb{Q}$, не принадлежащий α, тогда по определению имеем $\alpha < \beta$. Аналогично для $\beta < \alpha$. Следовательно, в случае $\alpha \neq \beta$ обязательно выполнится только одно условие $\alpha < \beta$ или $\beta < \alpha$. Теорема доказана. ■

Теорема 1.3. *Теорема о трех сечениях. Пусть α, β, γ – сечения. Если $\alpha < \beta \wedge \beta < \gamma$, то $\alpha < \gamma$.*

Доказательство. $(\alpha < \beta) \Rightarrow (\exists p \in \mathbb{Q} | p \in \beta, p \notin \alpha)$; $(\beta < \gamma) \Rightarrow (\exists q \in \mathbb{Q} | q \in \gamma, q \notin \beta)$. Далее, $(p \in \beta, q \notin \beta) \Rightarrow$ по утверждению из прошлой лекции $p < q$. Поскольку $p \notin \alpha$, то тогда и $q \notin \alpha$, в противоположном случае по свойству 2 в определении сечения было бы и $p \in \alpha$. Таким образом, $q \in \gamma, q \notin \alpha$, т.е. $\alpha < \gamma$. Теорема доказана. ■

Определение 1.4. Сумма вещественных чисел = сумма сечений.

Теорема 1.4. *Пусть α и β – сечения, γ – множество рациональных чисел r, т.ч. $r = p + q$, где $p \in \alpha$ - произвольное число, $q \in \beta$ - произвольное число. Тогда γ – сечение.*

Доказательство. Поскольку $\alpha \neq \varnothing$, $\beta \neq \varnothing$, то $\gamma \neq \varnothing$. Поскольку $\alpha \neq \mathbb{Q}, \beta \neq \mathbb{Q}$, то $\exists s \in \mathbb{Q}, s \notin \alpha$ и $\exists t \in \mathbb{Q}, t \notin \beta$. Пусть $p \in \alpha$, $q \in \beta$. По удтверждению из прошлой лекции $(p \in \alpha, s \notin \alpha) \Rightarrow (p < s); (q \in \beta, t \notin \beta) \Rightarrow (q < t)$. Отсюда следует, что $p + q < s + t$ $\forall p \in \alpha \wedge \forall q \in \beta$, т.ч. $\forall r \in \gamma$ выполнено $r < s + t$, т.е. $s + t \notin \gamma$, т.е. $\gamma \neq \mathbb{Q}$ – проверен п.1 в определении сечения.

Пусть $r \in \gamma$, $s < r$. Тогда $r = p + q, p \in \alpha, q \in \beta$. Пусть $t = s - q$, тогда $t < r - q = (p + q) - q = p$, из $p \in \alpha$ и $t < \alpha$ следует $t \in \alpha$, т.е. $s = t + q, t \in \alpha, q \in \beta$, т.е. $s \in \gamma$ – проверен п.2 в определении сечения.

Пусть $r \in \gamma, r = p + q, p \in \alpha, q \in \beta$. По п.3 определения сечения $\exists p_1 \in \alpha, p_1 > p$, тогда $r_1 = p_1 + q > p + q = r$, в γ нет наибольшего элемента, проверен п.3 определения сечения.

Теорема доказана. ■

Определение 1.5. Сечение γ, построенное в предыдущей теореме, называется суммой сечений α и β.

Поскольку вещественные числа определены как сечения, то вещественное число γ называют суммой вещественных чисед α и β, пишут $\gamma = \alpha + \beta$.

Свойства сложения

Теорема 1.5. *Пусть α, β, γ – вещественные числа. Тогда:*

1. $\alpha + \beta = \beta + \alpha$
2. $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$
3. $\alpha + 0^* = \alpha$

Доказательство. Пункты 1 и 2 следуют из определения сложения и свойств сложения рациональных чисел. Докажем п.3.

Пусть $r \in \alpha + 0^*$, тогда $r = p + q$, $p \in \alpha, q \in 0^*$, т.е. $q < 0$, поэтому $r = p + q < p$, тогда $r \in \alpha$ по условию 2 определения сечений, т.ч. $\alpha + 0^* \subset \alpha$, если мы делаем акцент на том, что $\alpha + 0^*$ и α – множества. Пусть теперь $t \in \alpha$. Выберем $s > t$, но $s \in \alpha$, что возможно по п.3 определения сечений. Полагаем $q_0 = t - s$, тогда $t - s < 0 \Rightarrow t - s \in 0^*, t = s + (t - s) \in \alpha + 0^*$, т.е. $\alpha \subset \alpha + 0^*$, тогда $\alpha = \alpha + 0^*$. Теорема доказана. ■

Теорема 1.6. *Теорема о разности верхних и нижних чисел сечения. Пусть α – сечение, и пусть $r \in \mathbb{Q}, r > 0$. Тогда $\exists p \in \mathbb{Q}, \exists q \in \mathbb{Q}$, такие что $p \in \alpha, q \notin \alpha$, q не является наименьшим из верхних чисел α и $q - p = r$.*

Доказательство. Возьмем $s \in \alpha$, и пусть $s_n = s + nr, s_0 = s, n = 0, 1, ...$. Найдется m_0, т.ч. $s_{m_0} \notin \alpha$: если бы $s_n \in \alpha \forall n \in \mathbb{N}$, то возьмем $\forall t \in \mathbb{Q}, t > s$. По свойствам рациональных чисел $\exists n_0$ т.ч. $s = n_0 r > t$, и тогда $s_{n_0} \in \alpha \Rightarrow t \in \alpha$, т.е. $\alpha = \mathbb{Q}$ в силу произвольности t, что противоречит условию 1.

Таким образом, $\exists m_0 \in \mathbb{N}$, т.ч. $s_{m_0} \notin \alpha$. Поскольку $s_0 \in \alpha$, то имеется максимальное $m \in \mathbb{N}$, т.ч. $s_m \in \alpha, m < m_0$, тогда $s_{m+1} \notin \alpha$. Если

s_{m+1} не является минимальным из верхних чисел сечения, то полагаем $p = s_m, q = s_{m+1}$, тогда $q-p = s_{m+1}-s_m = (s+(m+1)r)-(s+mr) = r$. Если же s_{m+1} является наименьшим из верхних чисел сечения, то пусть $p = s_m+\frac{r}{2}, q = s_{m+1}+\frac{r}{2}, q-p = r, q > s_{m+1} \Rightarrow q \notin \alpha$, s_{m+1} – наименьшее из верхних чисел α и $p = s_m + \frac{r}{2} = s + mr + \frac{r}{2} < s + (m+1)r$, поэтому $p \in \alpha$. Теорема доказана. ■

Существование противоположного числа

Теорема 1.7. *Пусть α - вещественное число. Тогда существует единственное число β такое, что $\alpha + \beta = 0^*$*

Доказательство. Вначале докажем единственность β. Предположим, что $\exists \beta_0$ т.ч. $\alpha+\beta_0 = 0^*$. Тогда, по теореме о свойствах сложения имеем

$$\beta_0 = 0^* + \beta_0 = (\alpha + \beta) + \beta_0 = (\beta + \alpha) + \beta_0 = \beta + (\alpha + \beta_0) = \beta + 0^* = \beta$$

т.е. β - единственный, если существует.

Найдем теперь какое-то β, т.ч. $\alpha + \beta = 0^*$. Пусть β – множество всех рациональных чисел таких, что $-p$ является верхним числом α, но не наименьшим из верхним чисел.

Проверим, что β – сечение (= вещественное число). Взяв любое верхнее не наименьшее число t сечения α, полагая $p = -t$, имеем $p \in \beta$, т.е. $\beta \neq \varnothing$. Взяв любое $s \in \alpha$, получаем, что $-s \notin \beta$, т.к. $-(-s) = s \in \alpha$, s - нижнее число α, т.е. $\beta \neq \mathbb{Q}$ – проверено условие 1.

Если $p \in \beta$, $q \in \mathbb{Q}$ и $q < p$, то $-q > -p$, $-p$ – верхнее число $\alpha \Rightarrow -q$ – верхнее число α и $-q$ – не наименьшее верхнее в α, т.е. $q \in \beta$ – проверено условие 2.

Если $p \in \beta$, то $-p$ – врехнее число α и $\exists$ верхнее число α, обозначим его $-q$, т.ч. $-q < -p$; пусть $-z =^{def} -\frac{q+p}{2}$, тогда $-z > -q$, т.е. $-z$ – верхнее число в α и не наименьшее, поэтому $z \in \beta$. Поскольку $-z < -p$, то $z > p$, в β нет наибольшего – проверено условие 3. Таким образом β – сечение.

Проверка свойства $\alpha + \beta = 0^*$ Пусть $p \in \alpha + \beta$, тогда $p = q + z, q \in \alpha, z \in \beta$; $z \in \beta \Rightarrow -z \notin \alpha$, тогда $q \in \alpha \Rightarrow q < -z, q + z < 0, p < 0, p \in 0^*$, т.е. $\alpha + \beta \subset 0^*$, если трактовать $\alpha, \beta, 0^*$ как множества.

Пусть $p \in 0^*$, тогда $p < 0$. По теореме о разности верхних и нижних чисел сечения $\exists q \in \alpha, s \notin \alpha, s$ не является наименьшим верхним числом α, т.ч. $s-q = -p$. Поскольку $-s \in \beta$, то тогда $p = q-s = q+(-s) \in \alpha+\beta$, т.е. $0^* \subset \alpha + \beta$; в итоге $0^* = \alpha + \beta$, теорема доказана. ■

Определение 1.6. Вещественное число β, построенное в предыдущей теореме обозначается $-\alpha$, и называется числом, противоположным α.

Утверждение 1.2. *О сохранении неравенства. Пусть* $\beta < \gamma$, *тогда* $\alpha + \beta < \alpha + \gamma$. *В частности, если* $0^* < \gamma, 0^* < \alpha$, *то* $(\alpha = 0^* + \alpha < \alpha + \gamma, 0^* < \alpha) \Rightarrow 0^* < \alpha + \gamma$.

Доказательство. Из определения сложения вещественных чисел следует, что $\alpha + \beta \leq \alpha + \gamma$. Если было бы $\alpha + \beta = \alpha + \gamma$, то тогда

$$\beta = 0^* + \beta = ((-\alpha) + \alpha) + \gamma = 0^* + \gamma = \gamma$$

, что противоречит условию. Утверждение доказано. ■

Определение разности вещественных чисел

Теорема 1.8. *Пусть* α, β *– вещественные числа. тогда существует единственное вещественное число* $\gamma | \alpha + \beta = \gamma$.

Доказательство. Полагаем $\gamma = \beta + (-\alpha)$. Тогда $\alpha + \gamma = \alpha + (\beta + (-\alpha)) = \alpha + ((-\alpha) + \beta) = (\alpha + (-\alpha)) + \beta = 0^* + \beta = \beta$.

Если бы существовало $\gamma_1 | \alpha + \gamma_1 = \beta$, то если бы $\gamma \neq \gamma_1$, то тогда либо $\gamma < \gamma_1$, либо $\gamma_1 < \gamma$. Не уменьшая общности, считаем $\gamma < \gamma_1$. Тогда по удтверждению о сохранении неравенства мы получаем $\alpha + \gamma < \alpha + \gamma_1$, но $\alpha + \gamma = \beta, \alpha + \gamma_1 = \beta$, противоречие.

Итак, вещественное число γ одно. Оно называется разностью β и α, $\gamma = \beta - \alpha$. ■

Определение 1.7. $|\alpha|$. Полагаем

$$|\alpha| = \begin{cases} \alpha, & \alpha \geq 0^* \\ -\alpha, & \alpha < 0^* \end{cases}$$

Утверждение 1.3. $|\alpha| \geq 0^* \forall \alpha \in \mathbb{R}$

Доказательство. Если $\alpha \geq 0^*$, это следует из определения $|\alpha|$. Пусть $\alpha < 0^*$, тогда $\alpha \neq 0^*$ и, если неверно, что $\alpha > 0^*$. то $-\alpha < 0^*$. По удтверждению о сохранении неравенства тогда бы выполнялось $\alpha + (-\alpha) < \alpha + 0^* = \alpha$, но $\alpha < 0^*$, тогда $\alpha + (-\alpha) < 0^*, 0^* < 0^*$, что невозможно. Итак $|\alpha| \geq 0^*$. Из определения видно, что $|\alpha| = 0^* \Leftrightarrow \alpha = 0^*$. Удтверждение доказано. ■

Теорема 1.9. $p^* < \alpha, p \in \mathbb{Q}. p^* < \alpha \Leftrightarrow p \in \alpha, p \in \mathbb{Q}$

Доказательство. Пусть $p \in \alpha; p \notin p^* \Rightarrow p^* < \alpha$. Пусть теперь $p^* < \alpha$, тогада $\exists q \in \mathbb{Q} | q \notin p^*$, т.е. $q \geq p$, и $q \in \alpha$. Тогда $p \in \alpha$. Теорема доказана. ■

1.5. Произведение вещественных чисел

Теорема 1.10. *Пусть α, $\alpha \geq 0^*$, и β, $\beta \geq 0^*$ - вещественные числа. Обозначим через γ следующее множество рациональных чисел: если $p \in \mathbb{Q}, p < 0$, то $p \in \gamma$; если $p = st, s \in \alpha, t \in \beta$ и $s \geq 0, t \geq 0$, то $p \in \gamma$. Другие рациональные числа в множество γ не входят. Если $\alpha = 0^* \vee \beta = 0^*$, то γ по определению состоит только из чисел $p \in \mathbb{Q}, p < 0$. Тогда γ - сечение.*

Доказательство. Поскольку $(\forall p \in \mathbb{Q}, p < 0) \Rightarrow p \in \gamma$, то γ непусто; если $\alpha = 0^* \vee \beta = 0^*$, то $(\forall q > 0) \Rightarrow q \notin \gamma$, в этом случае $\gamma \neq \mathbb{Q}$; если $\alpha > 0^* \wedge \beta > 0^*$, то пусть $u \notin \alpha, v \notin \beta$, тогда $u > 0 \wedge v > 0$ и $(\forall s \in \alpha, s \geq 0 \wedge \forall t \in \beta, t \geq 0) \Rightarrow (s < u \wedge t < v) \Rightarrow st < uv$, т.е. $uv \notin \gamma$, т.е. всегда $\gamma \neq \mathbb{Q}$. Если $\alpha = 0^* \vee \beta = 0^*$, то из определения γ в этом случае следуют условия 2 и 3; если $\alpha > 0^* \wedge \beta > 0^*$, то пусть $p \in \gamma, p > 0, 0 \leq q < p$; Пусть $p = st, s > 0, t > 0, s \in \alpha, t \in \beta$. Если $q = 0$, то $0 = 0 * t, 0 \in \alpha, 0 \in \gamma$; если $q > 0$, то $\frac{q}{p} \cdot t < t$, поэтому $\frac{q}{p} \cdot t \in \beta$, тогда $s \cdot \frac{q}{p} \cdot t \in \gamma$, но $s \cdot \frac{q}{p} \cdot t = \frac{q}{p} st = \frac{q}{p} \cdot p = q$, т.е. $q \in \gamma$; если $p = st, s > 0, t > 0$, то возьмем $s_1 > s, s_1 \in \alpha$, тогда $s_1 t \in \gamma s_1 t > p$. ■

Определение 1.8. Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Полагаем

$$\alpha\beta \overset{def}{=} \begin{cases} -(|\alpha||\beta|) & \alpha < 0^*, \beta \geq 0^* \\ -(|\alpha||\beta|) & \alpha \geq 0^*, \beta < 0^* \\ (|\alpha||\beta|) & \alpha < 0^*, \beta < 0^* \end{cases}$$

Теорема 1.11. *Справедливы следующие свойства:*

1. $\alpha\beta = \beta\alpha$;
2. $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$;
3. $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$;
4. $\alpha \cdot 0^* = 0^*$;
5. $\alpha\beta = 0^* \Leftrightarrow \alpha = 0^* \vee \beta = 0^*$;
6. $\alpha \cdot 1^* = \alpha$;
7. $\alpha < \beta, \gamma > 0^* \Rightarrow \alpha\gamma < \beta\gamma$

Доказательство. Следуем из определения суммы и произведения и из соотвествующих свойств рациональных чисел. ■

Теорема 1.12. *Если* $\alpha \neq 0^*$, *то* $\forall \beta \in \mathbb{R} \exists ! : \alpha\gamma = \beta$.

Доказательство. Аналогично доказательству существования и единственности $-\alpha$ и $\beta - \alpha$; в данном случае вначале проверяем, что $\exists \delta : \alpha\delta = 1^*$, затем полагают $\gamma = \beta\delta$. ■

Обозначение 1.1. $\gamma = \frac{\beta}{\alpha}, \delta = \frac{1}{\alpha}, \gamma$ - частное вещественных чиселβ, α, δ - обратное к α число. Отметим также связь действий над сечениями и рациональными числами.

Теорема 1.13. *Пусть* $p, q \in \mathbb{Q}$. *Тогда* $p^* + q^* = (p+q)^*, (pq)^* = p^*q^*, p^* < q^* \Leftrightarrow p < q$.

Доказательство. Доказывается аналогично предыдущим теоремам. ■

Теорема 1.14. *О плотности рациональных сечений в* $\mathbb{R}$. *Пусть* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha < \beta$. *Тогда* $\exists r^*, r \in \mathbb{Q} : \alpha < r^* < \beta$.

Доказательство. $(\alpha < \beta) \Rightarrow \exists p \in \mathbb{Q} : p \in \beta, p \notin \alpha$. Выберем $r > p, r \in \beta$. Тогда в силу $r \notin r^*$ имеем $r^* < \beta$; поскольку $p \notin \alpha, p < r$, то $p \in r^*$, поэтому $\alpha < r^*$. ■

1.6. Теоема Дедекинда, супремумы и инфимумы.

Определение 1.9. Будем говорить, что в множестве вещественных чисел $\mathbb{R}$ определено сечение, если имеются множества $A \subset \mathbb{R} \wedge B \subset \mathbb{R}$ со следующими свойствами.

1. $A \neq 0^*, B \neq 0^*, A \neq \mathbb{R}, B \neq \mathbb{R}$
2. $A \cup B = \mathbb{R}$
3. $A \cap B = \varnothing$
4. Если $\alpha \in A, \beta \in B$, то $\alpha < \beta$

При этом множество A называется нижним классом сечения, и числа $\alpha \in A$ называются нижними числами, а множество B называется верхним классом сечения, и числа $\beta \in B$ называются верхними числами сечения.

Теорема 1.15. *Теорема Дедекинда. Пусть имееется сечение* (A, B) *множества* $\mathbb{R}$. *Тогда существует единственное число* $\gamma : \alpha \leq \gamma \forall \alpha \in A \land \gamma \leq \beta \forall \beta \in B$. *При этом реализуется только одна возможность: либо в* A *и* $\gamma \in A$ *и является максимальным числом, либо* $\gamma \in B$ *и* γ *является минимальным числом в* B.

Доказательство. Прежде всего проверим, что $(\gamma \in A) \Rightarrow \gamma$ - максимальное число в A, в B нет минимального или $(\gamma \in B) \Rightarrow \gamma$ - минимальное в B, в A нет максимального. Проверим первое из этих утверждений, второе доказывается аналогично. Мы пока предполагаем, что число (или числа) γ, удволетворяющие заключению теоремы, существуют. Предположим, что, наряду с $\gamma \in A$, γ - максимальное в A, $\exists \gamma_1 \in \beta$, γ_1 - минимальное число в B. Тогда условие $4 \Rightarrow \gamma < \gamma_1$. По теореме о плотности рациональных сечений $\exists r^* : \gamma < r^* < \gamma_1$. Тогда по предположению о минимальности γ_1 в B имеем $r^* \notin B$, но в силу условий 2 и 3 тогда получаем, что $r^* \in \mathbb{R} \setminus B = A$, т.к. $\mathbb{R} \setminus B = A$. В силу преположения о максимальности γ в A из $r^* > \gamma \Rightarrow r^* \notin A$, т.е. $r^* \in \mathbb{R} \setminus A = B$, т.е. $r^* \in A \cap B$, что противоречит условию 3 сечения. Таким образом, γ_1 не существует и в B нет наименьшего числа.
Докажем теперь, что γ существует. (Оперируем с сечениями рациональных чисел, другой трактовки у нас пока нет). Полагаем $\gamma \overset{def}{=}$ {множество всех рациональных чисел p т.ч. для какого-то $\alpha \in A, p \in \alpha$}. По-другому это определение можно записать так:

$$\gamma = \bigcap_{\alpha \in A} \alpha$$

Поскольку α - множество, и мы рассматриваем объединение указанных объектов. Проверим, что γ - сечение $\mathbb{Q}$. Поскольку $A \neq \varnothing$, тогда $\exists p \in \alpha, p \in \gamma$, т.е. $\gamma \neq \varnothing$. Далее $B \neq \varnothing$, поэтому $\exists \beta \in B, \beta \notin A \land \beta > \alpha \forall \alpha \in A$ по условию 4 сечения $\mathbb{R}$. Возьмем $q \in \mathbb{Q}$, $q \notin \beta$, тогда $q \notin \alpha$, если $q \in A$, поскольку в противном случае, если бы $q \in \alpha$, то $q^* < \alpha, \alpha < \beta, q^* < \beta$, но $q \notin \beta \Rightarrow q^* \geq \beta$ - противоречие. Таким образом, $q \notin \alpha \forall \alpha \in A$, т.е. $q \notin \gamma, \gamma \neq \mathbb{Q}$ - проверено условие 1 сечения $\mathbb{Q}$. Если $p \in \gamma \land q < p$, то по определению γ $\exists \alpha \in A : p \in \alpha$, но тогда и $q \in \alpha$, т.е. $q \in \gamma$ - проверено условие 2 сечения $\mathbb{Q}$. Если $p \in \gamma$, то $\exists \alpha \in A : p \in \alpha$, тогда $\exists q > p, q \in \alpha$, т.е. $q \in \gamma$ - проверено условие 3 сечения $\mathbb{Q}$. Таким образом, γ - сечение $\mathbb{Q}$. Из определения γ следует, что $\alpha \subset \gamma \forall \alpha \in A$, т.е. $\alpha \leq \gamma \forall \alpha \in A$. Докажем, что $\forall \beta \in B \beta \geq \gamma$. Предположим, что это не так, тогда $\exists \beta_0 \in B : \beta_0 < \gamma$. Тогда $\exists p \in \mathbb{Q} : p \in \gamma$, но $p \notin \beta_0$. Но если $p \in \gamma$, то $\exists \alpha_0 \in A : p \in \alpha_0$, что влечёт $\beta_0 < \alpha_0$, а это противоречит условию 4 сечения $\mathbb{R}$. ■

Определение 1.10. Пусть $E \subset \mathbb{R}, E \neq \varnothing$. Множество E называется ограниченным сверху, если $\exists b \in \mathbb{R} : \forall a \in E$ выполнено $a \leq b$; число b называют верхней границей множества E; множество E называют ограниченным снизу, если $\exists c \in \mathbb{R} : \forall a \in E$, выполнено $a \geq c$; число c называют нижней границей множества E.
Множество E называют ограниченным, если оно ограниченно и снизу, и сверху.
Число b_0 называют точной верхней границей E или супремумом E, обозначается $b = supE$, если b_0 - верхняя граница E и $\forall b_1 < b_0$ b_1 не является верхней границей E.
Число c_0 называется точной нижней границей E или инфимумом E, обозначается $c_0 = infE$, если c_0 - нижняя граница E и $\forall c_1 > c_0$ c_1 не является нижней границей E.

Теорема 1.16. *О существовании супремума и инфимума. Пусть $E \subset \mathbb{R}, E \neq \varnothing$, E - ограничено сверху. Тогда $\exists supE$. Пусть $E \subset \mathbb{R}, E \neq \varnothing$, E - ограничено снизу. Тогда $\exists infE$.*

Доказательство. Докажем существование супремума, существование инфимума доказывается аналогично. Определим сечение (A, B) в $\mathbb{R}$ следующим образом: множество A состоит из всех $\alpha \in \mathbb{R} : \exists x \in E \wedge x > \alpha$, $B = \mathbb{R} \setminus A$. Из определения A следует, что $\forall \alpha \in A$ число α не является верхней границей E. Поскольку A ограничено сверху, то $A \neq \mathbb{R}$, а $E \neq \varnothing \Rightarrow A \neq \varnothing$, т.к. если $x_0 \in E$, то $x_0 - 1^* < x_0, x_0 - 1^* \in A$.
Если $\beta \in B$, то, по определению A, $\nexists x \in E : x > \beta$, ибо иначе было бы $\beta \in A$, т.е. $\forall x \in E$ имеем $x \leq \beta$, т.е. β - верхняя граница E для $\forall \beta \in B$. Условия 1-3 сечения $\mathbb{R}$ для (A, B) проверены.
Проверим условие 4. Пусть $\alpha \in A, \beta \in B$. Тогда $\exists x_0 \in E : x_0 > \alpha$, но $\beta \geq x_0$, т.е. $\beta > \alpha$ - условие 4 проверено.
Пусть $\gamma \in \mathbb{R}$ - число, определяемое сечением (A, B) по теореме Дедекинда. Проверим, что $\gamma \notin A$. Если бы $\gamma \in A$, то $\exists x_1 \in E : x_1 > \gamma$. Выберем $r^* : \gamma < r^* < x_1$, тогда $r^* \in A$ по определению A, $r^* > \gamma$, т.е. γ - не наибольшее число в A, что противоречит теореме Дедекинда. Следовательно, $\gamma \in B$, т.е. γ - верхняя граница E и γ - наименьшее число в B по теореме Дедекинда, т.е. $\forall \gamma_1 < \gamma$, γ_1 не является элементом B, т.е. $\gamma_1 \in A$, тогда $\exists x_2 \in E : x_2 > x_1$, т.е. γ_1 - не верхняя граница E.
Таким образом γ - точная верхняя граница E. ■

1.7. Десятичные дроби, определение корня, степени, экспонент и логарифма

Определение 1.11. Пусть $E \neq \varnothing, G \neq \varnothing$ - множества. Отображением $F : E \to G$ будем называть правило, по котором $\forall x \in E$ сопоставляется $F(x) \in G$. Оторбражение задается набором E, G, F. Далее в качестве синонима слова "отображение" будем использовать слово "функция" или "G-значная функция, определенная на E". Отображение F называется инъективным или инъекцией, если из $x, y \in E, x \neq y \Rightarrow F(x) \neq F(y)$; отображение F называется сюръективным или сюръекцией, если $\forall q \in G \exists x \in E : F(x) = q$; отображение F называется биективным или биекцией, если оно одновременно инъективно и сюръективно. Мы будем обозначать биекцию так: $F : E \longleftrightarrow G$.

Определение 1.12. Множество X называется счетным, если существует биекция $F : \mathbb{N} \longleftrightarrow X$, $\mathbb{N}$ - множество натуральных чисел. Исторически счетные множества обозначаются так: $F(n) = x_n, x_n \in X, n \in \mathbb{N}$. Последовательностью будем называть любое отображение $f : \mathbb{N} \to Y$, при этом обычно ее обозначают $y_1, y_2, ... y_n$, или $\{y_n\}_{n-1}^{\infty}$. Говорят при этом, что определена последовательность множества Y.

Теорема 1.17. *Объединение конечного или счетного множества попарно дизъюнктных счетных множеств счетно.*

Доказательство. Пусть $X_k = \{a_{k1}, a_{k2}, ...\}$, где $k = 1, \ldots, n$ или $k = 1, 2, ...$; укажем способ нумерации $\bigcup_{k=1}^{n} X_k$ или $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} X_k$. Учтем, что если $k \neq 1$, то $a_{ki} \neq a_{kj}$, а если $k = 1$, но $i \neq j$, то $a_{ki} \neq a_{kj}$. В случае $k = 1, \ldots, n$ запишем элементы a_{kj} в таблицу:

$$\begin{array}{ccccc}
a_{11} & a_{12} & ... & a_{1s} & ... \\
a_{21} & a_{22} & ... & a_{2s} & ... \\
... & ... & ... & ... & ... \\
a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{ns} & ...
\end{array}$$

и будем "перенумеровывать" получившееся объединение $\bigcup_{k=1}^{n} X_k$ змейкой: $a_{11} \to a_{21} \to ... \to a_{n1} \to a_{n2} \to a_{n-12} \to ....$
В случае $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} X_k$ укажем перенумерацию: $a_{11} \to a_{21} \to a_{12} \to a_{13} \to a_{22} \to a_{31} \to ....$
При этом в каждом из двух случаев получаем перенумерацию всего объединения. ■

Утверждение 1.4. *Пусть X - счетное множество, $Y \subset X$, Y - бесконечное множество (т.е. в нем не конечное множество элементов). Тогда Y - счетное.*

Доказательство. Пусть $X = \{x_1, x_2, ...\}$ $\forall y \in Y \exists n : y = x_n$. Пусть $k \overset{def}{=} \{n \in \mathbb{N} : \exists y \in Y : y = x_n\}$. Пусть n_1 - минимальное число в множества K, тогда $\exists y \in Y : y = x_{n_1}$, положим $1 \longleftrightarrow y$, т.е. присвоим y номер 1, считаем его y_1. Пусть $K_1 = K \setminus n_1$, тогда $K \neq \varnothing$, т.к. K бесконечное множество, пусть $n_2 \in K_1$ - минимальное число; $\exists y_2 \in Y : y_2 = x_{n_2}$, положим $K_2 = K_1 \setminus n_2$, и т.д. Таким образом мы построим биекцию $\mathbb{N} \longleftrightarrow Y$. ■

Следствие 1.1. *Пусть $Y = \bigcup_{k=1}^{n} X_k$ или $Y = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} X_k$, где X_k - счетны, но необязательно дизъюнктны. Тогда Y счетно.*

Доказательство. Слудует из теоремы и утверждения. ■

Сопоставление вещественным числам десятичных разложений

Будем рассматривать только $\alpha > 0^*$, случай $\alpha < 0^*$ получается добавлением знака "–".
Прежде всего биективно сопоставляем любому натуральному числу n сечения n^*, для n считаем известным его десятичное представление. Для $n^* < x < (n+1)*, n \geq 0, n \in \mathbb{Z}$, положим $\alpha = x - n^*$, тогда $0^* < \alpha < 1^*$. Определим

$$E \overset{def}{=} \left\{ \left(\frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + ... + \frac{a_k}{10^k} \right)^* : 0 \leq a_j \leq 9, 1 \leq j \leq k, k \geq 1, \right.$$
$$\left. \left(\frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + ... + \frac{a_k}{10^k} \right)^* \leq \alpha \right\}$$

Теорема 1.18. $\alpha = supE$

Доказательство. Определение E показывает, что множество $E \neq \varnothing$, т.к. $0^* \in E$, и ограничено сверху, поэтому $\exists supE \overset{def}{=} \beta, \beta \leq \alpha$, поскольку α - верхняя граница E. Предположим, что $\alpha > \beta$. Тогда $\exists r_1 \in \mathbb{Q} : \beta < r_1^* < \alpha \wedge \exists r_2 \in \mathbb{Q} : r_1^* < r_2^* < \alpha$. Пусть $t = r_2^* - r_1^*$. Выберем $k_0 \in \mathbb{N}$ так, чтобы $k^* > \frac{1}{t}$, тогда $\left((10^{k_0})^* > k_0^* > \frac{1}{t} \right) \Leftrightarrow \left(\frac{1}{10^{k_0}} \right)^* < \left(\frac{1}{k_0} \right)^* < t$. По определению числа β $\exists q = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + ... + \frac{a_{k_1}}{10^{k_1}}$, т.ч. $q^* > \beta - \frac{1}{10^{k_0}} \Leftrightarrow \beta < q^* + \frac{1}{10^{k_0}}$. Считаем, что $k_1 \geq k_0$, если это не так, то полагаем

$a_{k_1+1} = ... = a_{k_0} = 0$, что даёт возможность этому предположению. Считаем также, что k_0 выбрано так, чтобы $\alpha + \left(\frac{1}{10^{k_0}}\right) < 1$.
Если бы выполнялось соотношение $q^* + \left(\frac{1}{10^{k_0}}\right)^* > \alpha, q^* \leq \beta$, что влечёт неравенство

$$\left(q^* + \left(\frac{1}{10^{k_0}}\right)^*\right) - q^* > \alpha - \beta > r_2^* - r_1^* = t$$

т.е. $\left(\frac{1}{10^{k_0}}\right)^* > t$, что противоречит выбору k_0, т.е. $\alpha = \beta$. ■

Пользуясь теоремой, сопоставим $\alpha, 0 < \alpha < 1$, последовательность $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}, a_k \in \{0, 1, ..., 9\}$

Обозначение 1.2. В дальнейшем полагаем

$$[a, b] \stackrel{def}{=} x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b$$
$$(a, b) \stackrel{def}{=} x \in \mathbb{R} : a < x < b$$
$$[a, b) \stackrel{def}{=} x \in \mathbb{R} : a \leq x < b$$
$$(a, b] \stackrel{def}{=} x \in \mathbb{R} : a < x \leq b$$

Новым по сравнению со школой является исопльзование построенных по Дедекинду вещественных чисел.

Определим теперь числа $a_k(\alpha) \in \{0, 1, ..., 9\}$ и $P_k(\alpha) \in \mathbb{Q}$. Из $0 < \alpha < 1$ следует, что $\exists$ единственный промежуток вида $\left[0, \frac{1}{10}\right)^*, \left[\frac{1}{10}, \frac{2}{10}\right)^*, ... \left[\frac{9}{10}, 1\right)^*$, которому принадлежит α. Пусть $\alpha \in \left[\left(\frac{a_1(\alpha)}{10}\right)^*, \left(\frac{a_1(\alpha)+1}{10}\right)^*\right)$, что дает $a_1(\alpha)$ и пусть $P_1(\alpha) \stackrel{def}{=} \frac{a_1(\alpha)}{10}$. Далее $\exists$ единственный промежуток $\left[\frac{a_1(\alpha)}{10} + \frac{a_2(\alpha)}{10^2}, \frac{a_1(\alpha)}{10} + \frac{a_2(\alpha)+1}{10^2}\right)$, т.ч. $\alpha \in \left[\left(\frac{a_1(\alpha)}{10}\right)^* + \left(\frac{a_2(\alpha)}{10^2}\right)^*, \left(\frac{a_1(\alpha)}{10}\right)^* + \left(\frac{a_2(\alpha)+1}{10^2}\right)^*\right)$, что задает $a_2(\alpha)$, и полагаем $p_2(\alpha) = \frac{a_1(\alpha)}{10} + \frac{a_2(\alpha)}{10^2}$. Если уже определили $a_1(\alpha), ..., a_k(\alpha)$, и $P_k(\alpha) = \frac{a_1(\alpha)}{10} + \frac{a_2(\alpha)}{10^2} + ... + \frac{a_k(\alpha)}{10^k}$, то существует единственный промежуток

$$\left[P_k(\alpha) + \frac{a_{k+1}(\alpha)}{10^{k+1}}, P_k(\alpha) + \frac{a_{k+1}(\alpha) + 1}{10^{k+1}}\right)$$

такой что

$$\alpha \in \left[P_k(\alpha) + \left(\frac{a_{k+1}(\alpha)}{10^{k+1}}\right)^*, (P_k(\alpha))^* + \left(\frac{a_{k+1}(\alpha) + 1}{10^{k+1}}\right)^*\right)$$

тогда полагаем $P_{k+1}(\alpha) = P_k(\alpha) + \frac{a_{k+1}(\alpha)+1}{10^{k+1}}$.

Из построения следует, что $\forall k = 1, 2, ...$ выполнено $P_k^*(\alpha) \leq \alpha < P_k^*(\alpha) + \left(\frac{1}{10^k}\right)^*$. Положим $E_0 \overset{def}{=} \left\{r^* \in \mathbb{Q} : \exists k \in \mathbb{N} : r^* = (P_k^*(\alpha))^*\right\}$

Утверждение 1.5. $\alpha = supE_0$

Доказательство. Из определений E и E_0 следует, что $E_0 < E$, поэтому $\alpha_0 \overset{def}{=} supE_0 \leq supE = \alpha$. Тогда имеем неравенства, справедливые $\forall k \in \mathbb{N}$:

$$P_k^*(\alpha) \leq \alpha_0 \leq \alpha < P_k^*(\alpha) + \left(\frac{1}{10^k}\right)^* \Rightarrow 0 \leq \alpha - \alpha_0 \leq \left(\frac{1}{10^k}\right)^* \tag{1.7}$$

Если бы $\alpha - \alpha_0 > 0$, то можно найти $k_0 : \alpha - \alpha_0 > \left(\frac{1}{10^{k_0}}\right)^*$, что противоречит соотношению **??** при $k \geq k_0$. ■

В результате предыдущих рассуждений построено отображение $A(\alpha) : \alpha \to a_1(\alpha), a_2(\alpha), ...$ из промежутка $(0; 1)$ в множество последовательностей, состоящих из элементов $0, 1, ..., 9$, что можно трактовать, как бесконечную десятичную дробь.

Утверждение 1.6. *Отображение $A(\alpha)$ инъективно.*

Доказательство. Пусть $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < 1, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. Выберем минимальное k_0 такое, что $\alpha_2 - \alpha_1 \geq \left(\frac{1}{10^{k_0}}\right)^*$. Если $k_0 = 1$, то $a_1(\alpha_1) < a_1(\alpha_2)$, поэтому $A(\alpha_1) \neq A(\alpha_2)$. Если $k_0 > 1$ и $\exists j, 1 \leq j \leq k_0 - 1 : a_j(\alpha_1) \neq a_j(\alpha_2)$, то $A(\alpha_1) \neq A(\alpha_2)$; если же $a_j(\alpha_1) = a_j(\alpha_2), 1 \leq j \leq k_0 - 1$, то $a_{k_0}(\alpha_1) < a_{k_0}(\alpha_2)$ и $A(\alpha_1) \neq A(\alpha_2)$. ■

Начиная с этого момента будем трактовать вещественное число также как $\pm$ (натуральное число + бесконечная десятичная дробь), поэтому не будем ставить знак у рациональных чисел. Важно заметить все привычне свойства вещественных чисел строго определены и обоснованы, если их определяют как сечения. Пока речь шла только об арифметических действиях и неравенствах, в которых вещественные числа участвуют.

Существование корня из вещественного числа

Теорема 1.19. *Пусть $x > 0, n \geq 2, n \in \mathbb{N}$. Тогда $\exists! a > 0 : a^n = x$.*

Доказательство. Проверим единственность числа a, если оно существует. Пусть $a_0^n = x, a_0 > 0$, тогда $0 = a^n - a_0^n = (a - a_0) * A$, где $A = (a^{n-1} + a^{n-2}a_0 + ... + a_0^n)$. Поскольку $A > 0$, то $(a - a_0) = 0 * \frac{1}{A} = 0, a = a_0$. ■

Определение 1.13. Полагаем $0! \overset{def}{=} 1, 1! \overset{def}{=} 1, n! \overset{def}{=} 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n$, $C_n^m \overset{def}{=} \frac{n!}{(n-m)!m!}, 0 \leq m \leq n$; или $C_n^m = C_n^{n-m}, C_n^0 = 1, C_n^1 = n$.

Бином Ньютона: пусть $n \geq 2; a, b \in \mathbb{R}$, тогда $(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}b + ... + C_n^{n-1}ab^{n-1} + b^n$.

Пусть $E = \{t \in \mathbb{R} : t > 0, t^n \leq x\}$. Если $t_0 \overset{def}{=} \frac{x}{1+x}$, то $t_0 > 0, t_0 < 1, t_0^n = t_0^{n-1} * t_0 < 1^{n-1} \cdot t_0 < x$, т.е. $E \neq \varnothing$; если $t_1 = 1 + x$, то $t_1 > 1$, $t_1^n = t_1^{n-1} * t_1 > 1^{n-1} \cdot t_1 > x$, поэтому $t_1 \notin E$ и является верхней границей E, т.е. $\exists supE$. Утверждаетсяя, что $a = supE$. Предположим, что $b \overset{def}{=} supE, b^n < x$. Выберем $0 < h < 1$ и также

$$h < \frac{x - b^n}{(1+b)^n - b^n} \tag{1.8}$$

Тогда

$$(b+h)^n = b^n + C_n^1 b^{n-1}h + ... + C_n^{n-1}bh^{n-1} + h^n <$$
$$b^n + C_n^1 b^{n-1}h + ... + C_n^{n-1}bh + h = b^n + h(C_n^1 b^{n-1} + ... + C_n^{n-1}b + h) =$$
$$b^n + h\left((1+b)^n - 1\right) \overset{??}{<} b^n + x - b^n = x$$

т.е. $b + h \in E$, что противоречит тому, что $b - E$. Предположим, что $b^n > x$. Выберем $0 < v < 1, v < b$ и

$$v < \frac{b^n - x}{(1+b)^n - b^n} \tag{1.9}$$

Тогда

$$(b-v)^n = b^n - C_n^1 b^{n-1}v + C_n^2 b^{n-2}v^2 - ... + (-1)^{n-1}C_n^{n-1}bv^{n-1} + (-1)^n v^n =$$
$$b^n - v(C_n^1 b^{n-1} + C_n^2 b^{n-2}v^1 - ... + (-1)^{n-1}C_n^{n-1}bv^{n-1} + (-1)^n v^{n-1}) \geq$$
$$b^n - v(C_n^1 b^{n-1} + C_n^2 b^{n-2}v^1 + ... + C_n^{n-1}bv^{n-1} + v^{n-1}) >$$
$$b^n - v(C_n^1 b^{n-1} + C_n^2 b^{n-2} + ... + C_n^{n-1}b + 1) = b^n - v((1+b)^n - b^n) \overset{??}{>} b^n - (b^n - x) = x$$

т.е. $b - v$ - верхняя граница E, что противоречит тому, что $b = supE$. Итак, $b^n = x, b = a$.

Далее приводится определение степени и логарифма без доказательств.

Определение 1.14. $a^r, a > 0, r \in \mathbb{Q}$: если $r = \frac{p}{q}, q \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{Z}$, то полагаем $a^r \overset{def}{=} \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p$. При $r > 0$ полагаем $0^r = 0$.

Определение 1.15. $a^\alpha, a > 1, \alpha \in \mathbb{R} : E = \{a^r : r \in \mathbb{Q}, r \leq \alpha\}$, тогда $a^\alpha = supE$. $1^\alpha = 1 \forall \alpha \in \mathbb{R}$. Если $0 < a < 1$, то $a^\alpha \overset{def}{=} \left(\frac{1}{a}\right)^{-\alpha}$

Определение 1.16. $log_a b, a > 0, a \neq 1, b > 0$: если $a > 1$, то $E = \{x \in \mathbb{R} : a^x \leq b\}$, тогда $log_a b = supE$; если $0 < a < 1$, то $log_a b \overset{def}{=} -log_{\frac{1}{a}} b$.

Теорема 1.20. *Для выражений $a^\alpha, log_a b$ справедливы все равнее встречающиеся в школьном курсе утверждения.*

ГЛАВА 2

Пределы

2.1. Общее определение предела последовательности

Определение 2.1. Пусть $E \neq \varnothing, \exists$ по крайней мере 2 точки $x_1, x_2 \in E$. Множество E называется метрическим пространством, если $\forall x, y \in E$ определена функция $\rho(x, y)$, удовлетворяющая следующим свойствам:

1. $\rho(x, y) \geq 0; \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
3. $\forall x, y, z \in E \rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$

Функцию ρ называют метрикой, заданной на E, а $\rho(x, y)$ называют расстоянием в E между x, y. Соотношение 3 называется неравенством треугольника в E. Точка $a \in E$ называется точкой сгущения множества E, если $\forall \epsilon > 0 \exists x_\epsilon \in E : x_\epsilon \neq a \wedge \rho(x_\epsilon, a) < \epsilon$. Точка $b \in E$ называется изолированной точкой множества E, если $\exists \epsilon_0 > 0 : \forall x \in E, x \neq b$, выполнено $\rho(x, b) \geq \epsilon_0$. Последовательностью $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ в E называется отображение $F : \mathbb{N} \to E, F(n) = v_n$.

Определение 2.2. Пусть E - метрическое пространство с метрикой ρ, $a \in E$ - точка сгущения, $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}, v_n \in E$, - последовательность в E. Говорят, что v_n стремится к a при n, стремящимся к бесконечности, пишут $v_n \underset{n\to\infty}{\to} a$, или, что равносильно, что предел v_n при n, стремящемся к бесконечности, равен a, пишут $\lim_{n\to\infty} v_n = a$, если

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \rho(v_n, a) < \epsilon \tag{2.1}$$

Теорема 2.1. *О единственности предела. Пусть E - метрическое пространство с метрикой ρ, $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ - последовательность элементов E и предположим, что $v_n \underset{n\to\infty}{\to} a_1$ и $v_n \underset{n\to\infty}{\to} a_2$, $a_1, a_2 \in E$. Тогда $a_1 = a_2$*

Доказательство. Предположим, что $a_1 \neq a_2$, тогда $\rho(a_1, a_2) \overset{def}{=} \delta > 0$. Положим $\epsilon = \frac{\delta}{4}$. Тогда $\exists N_1 : \forall n > N_1 \rho(v_n, a_1) < \epsilon$ и $\exists N_2 : \forall n > N_2 \rho(v_n, a_2) < \epsilon$. Пусть $n_0 = N_1 + N_2 + 1$, тогда $n_0 > N_1, n_0 > N_2$, поэтому $\rho(v_{n_0}, a_1) < \epsilon \wedge \rho(v_{n_0}, a_2) < \epsilon$. Тогда получаем

$$\rho(a_1, a_2) \leq \rho(a_1, v_{n_0}) + \rho(v_{n_0}, a_2) < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon = \delta/2 < \delta$$

что противоречит выбору δ. ■

Теорема 2.2. *Об ограниченности последовательности, имеющей предел. Пусть E - метрическое пространство с метрикой ρ, $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ - последовательность элементов E и $v_n \underset{n\to\infty}{\to} a$. Тогда $\exists M > 0 : \forall n \in N$ имеем соотношение*

$$\rho(v_n, a) \leq M \tag{2.2}$$

Доказательство. Выберем $\epsilon = 1$, тогда $\exists N_0 : \forall n > N_0 \rho(v_n, a) < 1$. Пусть $M_1 = max(\rho(v_1, a), \dots, \rho(v_{N_0}, a))$. Тогда для $M = max(M_1, 1)$ соотношение **??** выполнено $\forall n \in \mathbb{N}$. ■

2.2. Предел числовой последовательности

Множество вещественных чисел является метрическим пространством: для $a, b \in \mathbb{R}$ положим $\rho(a, b) \overset{def}{=} |a - b|$, нужные свойства следуют из свойства модуля. Поэтому, если $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ - последовательность в $\mathbb{R}, a \in \mathbb{R}$, то общее определение предела переносится так:

$$x_n \underset{n\to\infty}{\to} a, \text{ если} \forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N |x_n - a| < \epsilon$$

Если $x_n \underset{n\to\infty}{\to} a, a \in \mathbb{R}$, то по теореме об ограниченности последовательности, имеющей предел, $\exists M : |x_n - a| \leq M \forall n$. Тогда

$$|x_n| = |x_n - a + a| \leq |x_n - a| + |a| \leq M + |a| \forall n \tag{2.3}$$

2.3. Расширение множества вещественных чисел

Добавим к множеству $\mathbb{R}$ два элемента, $\{+\infty\}, \{-\infty\}$. Полагаем, что по определению, $a < +\infty \forall a \in \mathbb{R}, -\infty < a \forall a \in \mathbb{R}, -\infty < +\infty$.

2.4. Определение бесконечных пределов

Пусть $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ - последовательность вещественных чисел. Говорят, что y_n стремится к $+\infty$, пишут $y_n \underset{n\to\infty}{\to} +\infty$, или, что предел y_n равен $+\infty$ при n, стремящемся к бесконечности. Пишут $\lim_{n\to\infty} y_n = +\infty$, если $\forall K > 0 \exists N : \forall n > N y_n > K$.

Аналогично, для последовательности $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ $t_n \underset{n\to\infty}{\to} -\infty$ или $\lim_{n\to\infty} t_n = -\infty$, если $\forall L < 0 \exists N_1 : \forall n > N_1 t_n < L$.

Если предел некоторой последовательности вещественное число, то говорят, что её конечен, а если равен $\pm\infty$, то говорят, что предел бесконечен.

Теорема 2.3. *Критерий Коши существования конечного предела последовательности. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ - последовательность вещественных чисел. Для того, чтобы эта последовательность имела конечный предел, необходимо и достаточно, чтобы $\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n_1 > N, n_2 > N$ выполнялось соотношение*

$$|x_{n_2} - x_{n_1}| < \epsilon \tag{2.4}$$

Доказательство. Достаточность. Построим сечение $\mathbb{R}$ с нижним классом A и верхним классом A' следующим образом: $\alpha \in A \Leftrightarrow \exists N_\alpha$, зависящее от α, т.ч. $\forall n > N_\alpha$ выполнено

$$x_n > \alpha \tag{2.5}$$

$A' \stackrel{def}{=} R \setminus A$.

Проверим, что $A \neq \varnothing$: возьмем $\epsilon = 1$, тогда **??** $\Rightarrow \exists N_1 : \forall n_1, n_2 > N_1$ выполнено $|x_{n_2} - x_{n_1}| < 1$, что эквивалентно соотношению

$$x_{n_1} - 1 < x_{n_2} < x_{n_1} + 1 \tag{2.6}$$

Положим $n_1 = N_1 + 1$, тогда **??** выполнено при $n_2 \geq n_1$, т.е. $x_{n_1} - 1 \in A$. Поскольку правое неравенство в **??** тоже выполнено при $n_2 \geq N_1 + 1$, то определение **??** $\Rightarrow x_{n_1} + 1 \notin A$, т.е. $x_{n_1} + 1 \in A'$, т.е. $A \neq \mathbb{R}$.

Определение $A, A' \Rightarrow A \cup A' = \mathbb{R}, A \cap A' = \varnothing$.

Возьмем $\forall \alpha \in A, \forall \beta \in A'$. Тогда **??** $\Rightarrow \exists N_\alpha : \forall n > N_\alpha$ выполнено **??**. Поскольку $\beta \notin A$, то $\exists n_0 > N_\alpha : x_{n_0} \leq \beta$, поскольку в противоположном случае при отсутсвии такого n_0 из **??** $\Rightarrow \beta \in A$, что неверно. Таким образом

$$\alpha < x_{n_0} \leq \beta \Rightarrow \alpha < \beta$$

Итак, A, A' - сечения $\mathbb{R}$. По теореме Дедекинда $\exists\gamma : \forall\alpha \in A\alpha \leq \gamma \wedge \forall\beta \in A'\gamma \leq \beta$. Возьмем $\forall\epsilon > 0$, тогда $\gamma - \frac{\epsilon}{2} \in A, \gamma + \frac{\epsilon}{2} \in A'$. Выберем N_2 так, чтобы при $\forall n_1, n_2 > N_2$ выполнялось

$$|x_{n_1} - x_{n_2}| \leq \frac{\epsilon}{2} \tag{2.7}$$

Поскольку $\gamma - \frac{\epsilon}{2} \in A$, то $\exists N_3 : \forall n > N_3$ выполняется

$$x_n > \gamma - \frac{\epsilon}{2} \tag{2.8}$$

Не уменьшая общности, считаем, что $N_3 \geq N_2$.

Поскольку $\gamma + \frac{\epsilon}{2} \in A'$, то

$$\exists n' > N_3 : x_{n'} \leq \gamma + \frac{\epsilon}{2} \tag{2.9}$$

Положим теперь $N = n'$, тогда **??**, **??** $\Rightarrow$

$$\left(\gamma - \frac{\epsilon}{2} < x_{n'} \leq \gamma + \frac{\epsilon}{2}\right) \Rightarrow |x_{n'} - \gamma| \leq \frac{\epsilon}{2} \tag{2.10}$$

Теперь **??** и **??** при $n > N = n'$ влекут:

$$|x_n - \gamma| = |(x_n - x_{n'}) + (x_{n'} - \gamma)| \leq |x_n - x_{n'}| + |x_{n'} - \gamma| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \tag{2.11}$$

Т.е. из определения предела $x_n \underset{n\to\infty}{\to} \gamma$. Достаточность доказана.

Доказательство необходимости. Пусть $x_n \underset{n\to\infty}{\to} a, a \in \mathbb{R}$, тогда $\forall\epsilon > 0 \exists N : \forall n > N$ выполнено

$$|x_n - a| < \frac{\epsilon}{2} \tag{2.12}$$

Возьмем $\forall n_1, n_2 > N$, тогда **??** $\Rightarrow$

$$|x_{n_2} - x_{n_1}| = |(x_{n_2} - a) - (x_{n_2} - a)| \leq |x_{n_2} - a| + |x_{n_2} - a| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Необходимость доказана. ■

2.5. Предельные переходы в арифметических действиях

Далее для сокращения вместо $x_n \underset{n\to\infty}{\to} a$ пишем $x_n \to a$. Далее $a, b, ... \in \mathbb{R}$.

Теорема 2.4. *1. Пусть* $x_n = a, n \geq 1 \Rightarrow x_n \to a$

2. Пусть $x_n \to a, c \in \mathbb{R} \Rightarrow cx_n \to ca$

3. Пусть $x_n \to a, y_n \to b \Rightarrow x_n + y_n \to a + b$

4. Пусть $x_n \to a, y_n \to b \Rightarrow x_n y_n \to ab$

5. Пусть $x_n \to a, a \neq 0, x_n \neq 0 \forall n \Rightarrow \frac{1}{x_n} \to \frac{1}{a}$

6. Пусть $x_n \to a, a \neq 0, x_n \neq 0 \forall n, y_n \to b \Rightarrow \frac{y_n}{x_n} \to \frac{b}{a}$

Доказательство. 1) следует из определения.

Для 2): возьмем $\forall \epsilon > 0, \exists N : \forall n > N, |x_n - a| < \epsilon$, что влечет $|c||x_n - a| < (|c|+1)\epsilon, |cx_n - ca| < (|c|+1)\epsilon$. Поскольку $\epsilon > 0$ произвольно, то и $(|c| + 1)\epsilon$ произвольно.

Для 3): возьмем $\forall \epsilon > 0, \exists N_1 : \forall n > N_1, |x_n - a| < \frac{\epsilon}{2}, \exists N_2 : \forall n > N_2 |y_n - b| < \frac{\epsilon}{2}$, пусть $N = max(N_1, N_2), \forall n > N$ имеем:

$$|(x_n + y_n) - (a + b)| \leq |x_n - a| + |y_n - b| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Для 4): $x_n y_n - ab = (xn - a)yn + a(y_n - b)$. Поскольку $y_n \to b$, то $\exists M > 0 : |y_n| \leq M \forall n$. Возьмем $\forall \epsilon > 0, \exists N_1 : \forall n > N_1 |x_n - a| < \epsilon \wedge \exists N_2 : \forall n > N_2 |y_n - b| < \epsilon; N \overset{def}{=} max(N_1, N_2) \Rightarrow \forall n > N \Rightarrow$

$$|x_n y_n - ab| \leq |x_n - a| y_n + |a||y_n - b| < \epsilon * M + |a| * \epsilon = (M + |a|)\epsilon$$

Выражение $(M + |a|)\epsilon$ может быть выбрано произвольным > 0 вместе с ϵ.

Для 5): $\exists N_1 : \forall n > N_1 \ |x_n - a| < \frac{|a|}{2}$, тогда $\forall n > N_1$ имеем:

$$|x_n| = |(x_n - a) + a| \geq |a| - |x_n - a| > |a| - \frac{|a|}{2} = \frac{|a|}{2}$$

т.е. при $n > N_1 \ \frac{1}{x_n} < \frac{2}{|a|}, \frac{1}{x_n} - \frac{1}{a} = \frac{a - x_n}{x_n a}$. Возьмем $\forall \epsilon > 0, \exists N_2 : \forall n > N_2 \ |x_n - a| < \epsilon$, пусть $N = max(N_1, N_2)$. При $n > N$ имеем:

$$|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{a}| = \frac{|a - x_n|}{|x_n||a|} < \frac{2}{|a|} \cdot \frac{1}{|a|}\epsilon = \frac{2}{a^2}\epsilon$$

$\frac{2}{a^2}\epsilon$ может быть любым положительным числом.

Для 6) $\frac{y_n}{x_n} = \frac{1}{x_n} \cdot y_n$, тогда 4) и 5) $\Rightarrow$ 6). ■

2.6. Переход к пределу в неравенствах

Теорема 2.5. *О двух миллиционерах??*

1. *Пусть* $x_n \le y_n \forall n, x_n \to a, y_n \to b; a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow a \le b$
2. *Пусть* $x_n \le y_n \le z_n \forall n, x_n \to a, z_n \to a, a \in \mathbb{R} \Rightarrow y_n \to a$

Доказательство. 1. Пусть $a > b, a - b = \delta > 0 \Rightarrow \exists N_1 : \forall n > N_1\ |x_n - a| \le \frac{\delta}{4}, \exists N_2 : \forall n > N_2\ |y_n - b| < \frac{\delta}{4}$, возьмем $n_0 = N_1 + N_2 + 1 \Rightarrow$

$$x_{n_0} > a - \frac{\delta}{4} = b + \delta - \frac{\delta}{4} = b + \frac{3}{4}\delta = (b + \frac{\delta}{4}) + \frac{\delta}{2} > y_{n_0} + \frac{\delta}{2} > x_{n_0}$$

что противоречит условию.

2. Возьмем $\forall \epsilon > 0, \exists N_1 : \forall n < N_1\ |x_n - a| < \epsilon, \exists N_2 : \forall n > N_2\ |z_n - a| < \epsilon$, тогда для $N = max(N_1, N_2)$ имеем при $n > N$

$$a - \epsilon < x_n \le y_n \le z_n < a + e \Rightarrow |y_n - a| < \epsilon$$

■

Термин 2.1. Если $x_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$, то говорят, что $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ бесконечно малая; если $|y_n| \underset{n\to\infty}{\to} +\infty$, то говорят, что последовательность $\{y_n\}_{n=1}^{+\infty}$ бесконечно большая.

Утверждение 2.1. *Пусть последовательность* $\{y_n\}_{n=1}^{+\infty}$ *бесконечно большая,* $y_n \ne 0 \forall n, x_n = \frac{1}{y_n}$*. Тогда* $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ *бесконечно малая последовательность. Пусть* $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ *бесконечно малая последовательность,* $x_n \ne 0 \forall n, y_n = \frac{1}{x_n}$*. Тогда* $\{y_n\}_{n=1}^{+\infty}$ *бесконечно большая последовательность.*

Доказательство. Докажем первое, второе доказывается аналогично. Возьмем $\forall \epsilon > 0$, пусть $L = 1/\epsilon$. Тогда $\exists N : \forall n > N\ |y_n| > L$, но $|y_n| > L \Leftrightarrow \frac{1}{|y_n|} < \frac{1}{L} = \epsilon$, т.е. $|x_n - 0| = |x_n| = \frac{1}{|y_n|} < \epsilon$ ■

2.7. Предельные переходы и бесконечные пределы

Дополнение к предельным переходам в арифметических действиях

Теорема 2.6. *Справедливы следующие утвреждения:*

1. $c > 0, x_n \to +\infty, y_n \to -\infty \Rightarrow cx_n \to +\infty, cy_n \to -\infty; d < 0, dx_n \to -\infty dy_n \to +\infty$

2. $x_n \to +\infty, y_n \to a \in \mathbb{R}, z_n \to +\infty \Rightarrow x_n + y_n \to +\infty, x_n + z_n \to +\infty$ $u_n \to -\infty, v_n \to b \in \mathbb{R}, w_n \to -\infty \Rightarrow u_n + v_n \to -\infty, u_n + w_n \to -\infty$

3. $x_n \to +\infty, y_n \to a > 0, z_n \to b < 0 \Rightarrow x_n y_n \to +\infty, x_n z_n \to -\infty$ $u_n \to -\infty, v_n \to c > 0, w_n \to d < 0 \Rightarrow u_n v_n \to -\infty, u_n w_n \to +\infty$ $x_n \to +\infty, t_n \to +\infty, s_n \to -\infty \Rightarrow x_n t_n \to +\infty, x_n s_n \to -\infty$ $u_n \to -\infty, v_n \to -\infty \Rightarrow u_n v_n \to +\infty$;

Дополнение к предельным переходам в неравенствах

Теорема 2.7. *Справедливы следующие утверждения:*

1. *Пусть* $x_n \le y_n \forall n, x_n \to a \in \overline{\mathbb{R}}, y_n \to b \in \overline{\mathbb{R}} \Rightarrow a \le b$

2. *Пусть* $x_n \le y_n \le z_n \forall n, x_n \to a \in \overline{\mathbb{R}}, z_n \to a \in \overline{\mathbb{R}} \Rightarrow y_n \to a$

Доказательство. Доказательство приведенных выше теорем проще доказательств соответсвующих теорем для конечных пределов и в дальнейшем курсе не используются, поэтому будут приняты без доказательства. ■

Определение 2.3. Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ называется возрастающей, если $x_n \le x_{n+1} \forall n$; последовательность $\{y_n\}_{n=1}^{+\infty}$ называется строго возрастающей, если $y_n < y_{n+1} \forall n$. Последовательность $\{u_n\}_{n=1}^{+\infty}$ называется убывающей, если $u_n \ge u_{n+1} \forall n$; последовательность $\{v_n\}_{n=1}^{+\infty}$ называется строго убывающей, если $v_n > v_{n+1} \forall n$. Последовательность $\{t_n\}_{n=1}^{+\infty}$ называется монотонной, если она возрастающая или убывающая; последовательность $\{w_n\}_{n=1}^{+\infty}$ называется строго монотонной, если она строго возрастающая или строго убывающая.

Теорема 2.8.

1. *Пусть* $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ *- монотонная последовательность. Тогда* $\exists \lim_{n\to\infty} x_n \in \overline{\mathbb{R}}$

2. *Пусть* $\{y_n\}_{n=1}^{+\infty}$ *- возрастающая. Тогда* $\lim_{n\to\infty} y_n \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R} : y_n \le M \forall n$

3. *Пусть* $\{u_n\}_{n=1}^{+\infty}$ *- убывающая. Тогда* $\lim_{n\to\infty} u_n \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \exists K \in \mathbb{R} : u_n \ge K \forall n$

4. *Пусть* $\{v_n\}_{n=1}^{+\infty}$ *- строго возрастающая и* $\lim_{n\to\infty} v_n \in \mathbb{R}$*. Тогда* $v_n < \lim_{n\to\infty} v_n \forall n$

5. *Пусть* $\{w_n\}_{n=1}^{+\infty}$ *- строго убывающая и* $\lim_{n\to\infty} w_n \in \mathbb{R}$*. Тогда* $w_n > \lim_{n\to\infty} w_n \forall n$

Доказательство. Доказательство соотношений 1), 2), 4). Предположим, что последовательность $\{y_n\}_{n=1}^{+\infty}$ неограничена сверху. Возьмем $\forall L > 0$, тогда $\exists N : y_N > L \Rightarrow \forall n > N \ y_n \geq y_{n-1} \geq ... \geq y_N > L \Rightarrow y_n \underset{n\to\infty}{\to} +\infty$. Предположим, что $\{y_n\}_{n=1}^{+\infty}$ ограничена сверху, т.е. $\exists M : y_n \leq M \forall n$. Пусть $E = \{y \in \mathbb{R} : \exists n : y = y_n\}$. Тогда множество E непусто и ограничено сверху, M - его верхняя граница. Пусть $a = supE$. Тогда $y_n \leq a \forall n$. Возьмем $\epsilon > 0$, тогда $a - \epsilon$ - не верхняя граница E, тогда $\exists N : y_N > a - \epsilon$. Тогда при $\forall n > N$ имеем $y_n \geq y_{n-1} \geq ... \geq y_N > a - \epsilon, y_n \leq a$, т.е. $|y_n - a| < \epsilon$, т.е. $y_n \underset{n\to\infty}{\to} a$. Утверждение 1) для возрастающей последовательности и достаточность в утверждении 2) доказаны. Необходимость в утверждении 2) следует из ограниченности последовательности, имеющей конечный предел. Для доказательства 4) пишем $(y_n < y_{n+1} \leq \lim_{n\to\infty} y_n)$, $(v_n < v_{n+1} \leq \lim_{n\to\infty} v_n)$. Доказательство утверждений 1), 3), 5) следуют из того, что если u_n - убывающая, то $y_n \overset{def}{=} -u_n$ - возрастающая, если w_n - строго убывающая, то $v_n \overset{def}{=} -w_n$ - строго возрастающая, и далее применим утверждения 1), 2), 4). ■

Теорема 2.9. *Теорема о вложенных промежутках. Пусть* $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n], n = 1, 2, ..., n;\ b_n - a_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$*. Тогда* $\exists!\ c \in \mathbb{R} : c \in [a_n, b_n] \forall n$*.*

Замечание. Условие замкнутости промежутков существенно: имеем $\left(0, \frac{1}{n+1}\right] \subset \left(0, \frac{1}{n}\right], \frac{1}{n} - 0 = \frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\to} 0$, но $\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(0, \frac{1}{n}\right] \neq \varnothing$.

Доказательство. Имеем неравенство $a_n < b_n \leq b_{n-1} \leq ... \leq b_1, b_n > a_n \geq a_{n-1} \geq ... \geq a_1 \forall n$, т.е. $a_n \leq b_1 \forall n, b_n \geq a_1 \forall n$. Тогда в силу возрастания $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ и убывания $\{b_n\}_{n=1}^{+\infty}$ по предыдущей теореме $\exists c_1 = lim_{n\to\infty} a_n; \exists c_2 = lim_{n\to\infty} b_n; c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. По свойству перехода к пределу в неравенстве имеем:

$$a_n < b_n \Rightarrow lim_{n\to\infty} a_n \leq lim_{n\to\infty} b_n \Rightarrow c_1 \leq c_2$$

По доказательству предыдущей теоремы имеем $a_n \leq c_1 \forall n; b_n \geq c_2 \forall n$, поэтому $0 \leq c_2 - c_1 \leq b_n - a_n$, тогда

$$0 \leq c_2 - c_1 \leq lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 \overset{def}{=} c$$

Тогда имеем $a_n \le c \le b_n$, т.е. $c \in [a_n, b_n]$. Если бы $\exists c_0 \in [a_n, b_n] \forall n$, то $|c_0 - c| \le b_n - a_n, |c_0 - c| \le lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$, т.е. c - единственно. ■

2.8. Число e

Теорема 2.10. *Пусть* $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}, n = 1, 2, \ldots$. *Тогда* $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ *строго возрастает,* y_n *строго убывает,* $\exists lim_{n\to\infty} x_n = lim_{n\to\infty} y_n \overset{def}{=} e \wedge x_n < e < y_n \forall n$, *в частности* $2 < e < 3$.

Замечание. Вычислено, что $e = 2,718\ldots$

Доказательство. Докажем строгое возрастание $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$. Считаем $n \ge 3$, при $n = 1, n = 2$ - явные вычисления. Применяя бином Ньютона, имеем:

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1^n + \sum_{k=1}^{n-1} C_n^k \cdot 1^{n-k} \cdot \frac{1}{n^k} + \frac{1}{n^n} =$$
$$1 + C_n^1 \cdot \frac{1}{n} + \sum_{k=2}^{n-1} C_n^k \cdot \frac{1}{n^k} + \frac{1}{n^n} = 2 + \sum_{k=2}^{n-1} \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{1}{n^k} + \frac{1}{n^n} \quad (2.13)$$

Преобразуем отдельно:

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{1}{n^k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)(n-k)!}{k!(n-k)!n^k} =$$
$$\frac{n(n-1)(n-k+1)}{k!n^k} = \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \quad (2.14)$$

$$\frac{1}{n^n} = \frac{n!}{n^n} \cdot \frac{1}{n!} = \frac{(n-1)!}{n^{n-1}} \cdot \frac{1}{n!} = \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \quad (2.15)$$

Тогда соотношения **??**, **??**, **??** влекут

$$x_n = 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \ldots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \quad (2.16)$$

Тогда **??** $\Rightarrow$

$$x_{n+1} = 2 + \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \ldots \left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right) \quad (2.17)$$

Поскольку $1-\frac{e}{n} < 1-\frac{e}{n+1}, 1 \le e \le n-1$, и в **??** есть ещё одно слагаемое по сравнению с x_n, то $x_n < x_{n+1}$

Докажем строгое убывание y_n. Пусть $n \geq 0$.

$$\frac{y_{n-1}}{y_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{n}{n+1} \cdot \frac{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} =$$
$$\frac{n}{n+1}\left(\frac{n}{n-1}\right)^n\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \frac{n}{n+1}\frac{n^{2n}}{(n^2-1)^n} =$$
$$\frac{n}{n+1}\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n = \frac{n}{n+1}\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n \quad (2.18)$$

Применяя бином Ньютона к выражению $(1+x)^n, x > 0, n \geq 2$, имеем $(1+x)^n = 1^n + C_n^1 1^{n-1}x + ... = 1 + nx + ...$, где многоточие означает положительные слагаемые, поэтому получаем неравенство Бернулли:

$$(1+x)^n > 1 + nx, n \geq 2, x > 0 \quad (2.19)$$

Применим **??** к **??** с $x = \frac{1}{n^2-1}$. Тогда **??**, **??** $\Rightarrow$

$$\frac{y_{n-1}}{y_n} > \frac{n}{n+1}\left(1+\frac{n}{n^2-1}\right) = \frac{n(n^2+n-1)}{(n+1)(n^2-1)} = \frac{n^3+n^2-n}{n^3+n^2-n-1} > 1$$

Строгое убывание $\{y_n\}_{n=1}^{+\infty}$ доказано.

Далее,

$$y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)x_n \quad (2.20)$$

?? $\Rightarrow y_n > x_n, y_n - x_n = \frac{1}{n}x_n$. Теперь доказано, что $x_n < x_{n+1} < y_{n+1} < y_n$, т.е. $[x_{n+1}, y_{n+1}] \subset [x_n, y_n], 0 < x_n < y_n < y_{n-1} < y_5 < 3, n \geq 5 \Rightarrow y_n - x_n < \frac{3}{n}, n \geq 5 \Rightarrow y_n - x_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$

К мромежуткам $[x_n, y_n]$ применим теорему о вложенных промежутках, тогда $\exists! e \in [x_n, y_n] \forall n$, из доказательства теоремы о вложенных промежутках следует, что $e = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n$. По утверждениям 4 и 5 теоремы о пределах монотонных последовательностей в силу строгого возрастания $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ и строгого убывания $\{y_n\}_{n=1}^{+\infty}$ имеем $x_n < e < y_n \forall n$ ■

2.9. Подпоследовательности

Определение 2.4. Пусть $F : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ - последовательность, $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ - инъективное отображение и $\phi(n) < \phi(m), n < m$. Подпоследовательностью последовательности F называется $G \stackrel{def}{=} F(\phi) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. G - тоже последовательность.

В приведенном определении фигурируют последовательности вещественных чисел, но определение сохраняется, если рассматривать любую последовательность $F : \mathbb{N} \to E$ из элементов множества E, подпоследовательность будет определяться как суперпозиция $F(\phi) : \mathbb{N} \to E$.

Исторически сложившееся обозначение подпоследовательности следующее. Обозначают $\phi(k) = n_k$, тогда, если $F(n) = x_n$, то $F(\phi(k)) = x_{n_k}$, т.е. рассматриваются элементы с номерами $x_{n_1}, x_{n_2}, ..., x_{n_k}, ...$, стандартное обозначение $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{+\infty}$ и говорят, что подпоследовательность выбрана из последовательности, т.е. выбраны номера $n_1, n_2, ... ; n_1 < n_2 < ... < n_k < ...$, и рассматриваются элементы x_{n_k} только с этими номерами.

Утверждение 2.2. *Предположим, что* $x_n \underset{n\to\infty}{\to} a, a \in \overline{\mathbb{R}}, \{x_{n_k}\}_{k=1}^{+\infty}$ *- подпоследотвальность. Тогда* $x_{n_k} \underset{k\to\infty}{\to} a$.

Доказательство. Для $a \in \mathbb{R}$, для $a = \pm\infty$ аналогично. Поскольку $n_1 < n_2 < ... < n_k < ...$, то $n_k \geq k$; возьмем $\epsilon > 0$ и пусть $N : \forall n > N\ |x_n - a| < \epsilon$. Тогда $\forall k > N$ имеем $n_k \geq k > N$, поэтому $\forall k > N |x_{n_k} - a| < \epsilon$. ■

Теорема 2.11. *Принцип выбора Больцано — Вейерштрасса. Пусть* $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ *- последовательность* $M > 0, |x_n| \leq M \forall n$. *Тогда* $\exists a, a \in [-M, M]$ *и подпоследовательность* $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{+\infty} : x_{n_k} \underset{k\to\infty}{\to} a$.

Доказательство. Положим $a_1 = -M, b_1 = M, c_1 = 0 = \frac{a_1+b_1}{2}$. Тогда либо для $[a_1, c_1]$, либо для $[c_1, b_1]$, либо для обоих, выполнено следующее утверждение 1: существует бесконечно много номеров n таких, что x_n принадлежит x_n лежит на этом промежутке. Пусть $[a_2, b_2]$ - именно этот промежуток, $n_1 : x_{n_1} \in [a_2, b_2]$. Здесь либо $a_2 = a_1$, $b_2 = c_1$, либо $a_2 = c_1$, $b_2 = b_1$. Пусть $c_2 = \frac{a_2+b_2}{2}$. Тогда либо для $[a_2, c_2]$, либо для $[c_2, b_2]$, либо для обоих выполнено утверждение 2: существует бесконечно много номеров $n > n_1 : x_n$ лежит на этом промежутке. Пусть $[a_3, b_3]$ именно этот промежуток, т.е. либо $a_3 = a_2$, $b_3 = c_2$, либо $a_3 = c_2$, $b_3 = b_2$, и пусть $x_{n_2} \in [a_3, b_3], n_2 > n_1$. Далее по индкуции пусть уже выбраны $[a_k, b_k], n_{k-1} > n_{k-2}$. Пусть $c_k = \frac{a_k+b_k}{2}$. Для $[a_k, c_k]$

или для $[c_k, b_k]$, или для обоих выполнено утверждение k: существует бесконечно много номеров $n > n_{k-1} : x_n$ лежит на этом промежутке. Пусть $[a_{k+1}, b_{k+1}]$ этот промежуток, т.е. либо $a_{k+1} = a_k, b_{k+1} = c_k$, либо $a_{k+1} = c_k, b_{_{k+1=b_k}}$, и пусть $x_{n_k} \in [a_{k+1}, b_{k+1}], n_k > n_{k-1}$.

Построена последовательность $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{+\infty}$ и последовательность вложенных промежутков $... [a_{k+1}, b_{k+1}] \subset [a_k, b_k] \subset ... \subset [a_1, b_1]$, при этом

$$b_k - a_k = \frac{2M}{2^{k-1}} = 2^{-k+1}M \underset{k\to\infty}{\to} 0$$

По теореме о вложенных промежутках $\exists a \in [a_k, b_k]\forall k, a_k \underset{k\to\infty}{\to} a, b_k \underset{k\to\infty}{\to} a$, при этом $x_{n_k} \in [a_{k+1}, b_{k+1}]$, т.е. $a_{k+1} \leq x_{n_k} \leq b_{k+1}$.

По утверждению 2 теоремы о переходе к пределу в неравенстве $x_n \underset{k\to\infty}{\to} a$. ■