

# Математический анализ

Бабин Руслан, Пономарев Николай  
Курс Широкова Н. А.

осень 2021 г.



# Оглавление

Оглавление	i
<b>1 Вещественные числа</b>	<b>1</b>
1.1 Обозначения и нотация . . . . .	1
1.2 Операции над множествами . . . . .	2
1.3 Определение вещественных чисел по Р.Дедекинду . . . . .	3
1.4 Упорядочивание по возрастанию и арифметические действия над $\mathbb{R}$ числами . . . . .	4
1.5 Произведение вещественных чисел . . . . .	9
1.6 Теорема Дедекинда, супремумы и инфимумы. . . . .	10
1.7 Десятичные дроби, определение корня, степени, экспонент и логарифма . . . . .	13
<b>2 Пределы</b>	<b>19</b>
2.1 Общее определение предела последовательности . . . . .	19
2.2 Предел числовой последовательности . . . . .	20
2.3 Распирение множества вещественных чисел . . . . .	20
2.4 Определение бесконечных пределов . . . . .	21
2.5 Предельные переходы в арифметических действиях . . . . .	22
2.6 Переход к пределу в неравенствах . . . . .	24
2.7 Предельные переходы и бесконечные пределы . . . . .	24
2.8 Число $e$ . . . . .	27
2.9 Подпоследовательности . . . . .	29
2.10 Верхний и нижний пределы последовательности . . . . .	30
2.11 Предел функции . . . . .	33



# Вещественные числа

## 1.1. Обозначения и нотация

В дальнейшем множество будем понимать как совокупность объектов, называемых его элементами. Приведенное высказывание не является определением, однако в дальнейшем при операциях с конкретными множествами, математический контекст рассматриваемые множества определяет.

Если  $a, b$  – некие элементы,  $A$  – множество, то запись  $a \in A$  означает, что  $a$  принадлежит множеству  $A$ ; запись  $b \notin A$  означает, что элемент  $b$  не принадлежит множеству  $A$ .

Символ  $\forall$  означает высказывание «для всякого», далее всегда будет следовать текст конкретизирующий это высказывание.

Символ  $\exists$  означает высказывание «существует» и также будет задан математическим контекстом.

Запись  $A \Rightarrow B$  или  $B \Leftarrow A$  означает «из  $A$  следует  $B$ »; запись  $A \Leftrightarrow B$  означает « $A$  эквивалентно  $B$ ».

Множества  $A$  и  $B$  называются совпадающими, что записывают формулой  $A = B$ , если  $(\forall a \in A) \Rightarrow (a \in B)$  и  $(\forall b \in B) \Rightarrow (b \in A)$ ; приведенная формальная запись означает, что  $A = B$  в том и только в том случае, когда они состоят из одних и тех же элементов.

Если множества  $A$  и  $B$  не совпадают, то пишут  $A \neq B$ .

Определяют также пустое множество, в котором нет элементов, которое будем обозначать символом  $\emptyset$ .

Запись  $A \subset B$  читается « $A$  содержится в  $B$ » и означает, что  $(\forall a \in A) \Rightarrow (a \in B)$ . Полагаем, что  $\emptyset \subset A$  для любого множества  $A$ . Понятно,

что

$$A = B \Leftrightarrow (A \subset B) \text{ и } (B \subset A).$$

В дальнейшем при рассмотрении сразу нескольких множеств в качестве синонима слова «множество» будем использовать слова «семейство», «класс», «совокупность».

## 1.2. Операции над множествами

Объединением  $A \cup B$  множеств  $A$  и  $B$  будем называть множество:

$$(a \in A \cup B) \Leftrightarrow (a \in A) \text{ или } (a \in B).$$

Если множество  $A$  задается каким-то условием, обозначим его «условие», то для задания множества  $A$  будем использовать обозначение

$$A = \{a : \text{«условие» на } a\}$$

*Пример.*

$$A_1 \cup A_2 = \{a : a \in A_1 \text{ или } a \in A_2\}$$

Если имеется произвольное непустое множество  $I$  и  $\forall \alpha \in I$  имеется множество  $A_\alpha$ , то

$$\bigcup_{a \in I} A_\alpha = \{a : \exists \alpha \in I \text{ такое, что } a \in A_\alpha\}$$

Пересечением  $A \cap B$  назовем множество

$$A \cap B = \{a : (a \in A) \text{ и } (a \in B)\}.$$

Если элементов  $a$ , принадлежащих  $A$  и  $B$ , не существует, пишем

$$A \cap B = \emptyset$$

и называем  $A$  и  $B$  дизъюнктивными. Если есть непустое множество  $I$ , то, предполагая, что  $\forall \alpha \in I \exists A_\alpha$ , Полагаем

$$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = \{a : \forall \alpha \in I \quad a \in A_\alpha\}$$

Теоретико-множественной разностью множеств  $A$  и  $B$ , обозначаемой  $A \setminus B$

$B$ , называется множество

$$A \setminus B = \{a : a \in A, a \notin B\}$$

**Теорема 1.1.** *Предположим, что имеется непустое множество  $I$  и для любого  $\alpha \in I$  имеется множество  $A_\alpha$ . Справедливы следующие формулы:*

$$B \cap \left( \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \right) = \bigcup_{\alpha \in I} (B \cap A_\alpha) \quad (1.1)$$

$$B \cup \left( \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \right) = \bigcap_{\alpha \in I} (B \cup A_\alpha) \quad (1.2)$$

$$B \setminus \left( \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \right) = \bigcap_{\alpha \in I} (B \setminus A_\alpha) \quad (1.3)$$

$$B \setminus \left( \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \right) = \bigcup_{\alpha \in I} (B \cup A_\alpha) \quad (1.4)$$

*Доказательство.* Докажем (1.1), остальные соотношения доказываются аналогично. Обозначим левую часть (1.1) через  $C$ , а правую через  $D$ . Если  $a \in C$ , то  $a \in B$  и  $a \in \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ , т.е.  $\exists \alpha_0 \in I$ , такое что  $a \in A_{\alpha_0}$ , тогда  $a \in B \cap A_{\alpha_0}$ ,  $a \in \bigcup_{\alpha \in I} (B \cap A_\alpha)$ ,  $a \in D$ , то есть  $C \subset D$ . Если  $b \in D$ , то  $\exists \alpha_1 \in I$  такое что  $b \in B \cap A_{\alpha_1}$ , то есть  $b \in B$  и  $b \in A_{\alpha_1}$ , тогда  $b \in \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ ,  $b \in B \cap \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ , т.е.  $b \in C$  и  $D \subset C$ , т.е.  $C = D$ , что и требовалось доказать. ■

### 1.3. Определение вещественных чисел по Р.Дедекинду

Далее будем считать известными натуральные числа, множество которых всегда обозначается через  $\mathbb{N}$ , множество целых чисел  $\mathbb{Z}$ , множество рациональных чисел  $\mathbb{Q}$ . Считаем, что свойства арифметических действий с числами из  $\mathbb{Q}$  и свойства, связанные с упорядочиванием рациональных чисел по возрастанию, известны.

**Определение 1.1.** Пусть  $\alpha$  - непустое множество, состоящее из рациональных чисел. Будем называть множество  $\alpha$  сечением, если выполняются следующие условия:

1.  $\alpha \neq \mathbb{Q}$
2. Если  $p \in \alpha, q \in \alpha, q < p$ , то  $q \in \alpha$

3. В  $\alpha$  нет наибольшего числа, т.е. не существует  $p_0 \in \alpha$ , такого что  $\forall p \in \alpha$  выполнено  $p \leq p_0$

**Утверждение 1.1.** Пусть  $\alpha$  – сечение. Если  $q \in \mathbb{Q}, p \in \alpha, q \notin \alpha$ , то  $p < q$ .

*Доказательство.* Из условия следует, что  $p \neq q$ . Если бы выполнялось  $q < p$ , то по п.2 определения сечения  $q \in \alpha$ , чего нет. Следовательно  $p > q$ , чтд. ■

**Термин 1.1.** Пусть  $\alpha$  – сечение. Числа из  $\mathbb{Q}$ , принадлежащие  $\alpha$ , называются нижними числами сечения  $\alpha$ , а числа из  $\mathbb{Q}$ , не принадлежащие  $\alpha$ , называются верхними числами сечения  $\alpha$ .

Сопоставим теперь  $\forall z \in \mathbb{Q}$  сечение, которое будем обозначать  $z^*$ . Далее запись  $A \stackrel{def}{=} B$  означает, что объект  $A$  определяется через объект  $B$ . Полагаем:

$$z^* = \{p \in \mathbb{Q} : p < z\} \quad (1.5)$$

Запись (1.5) является сокращением формальной записи (1.6)

$$z^* = \{p : p \in \mathbb{Q} \wedge p < z\} \quad (1.6)$$

Проверим, что  $z^*$  – сечение.  $z - 1 < z$ , т.е.  $z - 1 \in z^*$ , множество  $z^*$  непустое.  $z + 1 > z, z + 1 \notin z^*, z^* \neq \mathbb{Q}$ . Если  $p \in z^* \wedge q \in \mathbb{Q}, q < p$ , то  $q < p < z \Rightarrow q < z, q \in z^*$ . Если  $p_1 \in z^*$ , то  $p_1 < z$ ; пусть  $p_2 = \frac{p_1 + z}{2}$ , тогда  $p_1 < p_2 < z, p_2 \in z^*$ , т.е. в  $z^*$  нет наибольшего числа.

**Определение 1.2.** Множество всех сечений будет называться множеством вещественных чисел, а любое конкретное сечение будем называть вещественным числом. Обозначаем множество вещественных чисел  $\mathbb{R}$ .

Приведенный подход к определению вещественных чисел принадлежит немецкому математику Р. Дедекинду, поэтому сечения называются сечениями множества рациональных чисел по Дедекинду.

## 1.4. Упорядочивание по возрастанию и арифметические действия над $\mathbb{R}$ числами

**Определение 1.3.** Пишем  $\alpha < \beta$ , говорим, что  $\alpha$  меньше  $\beta$ , если  $\exists p \in \mathbb{Q}$ , т.ч.  $p \in \beta \wedge p \notin \alpha$ . Пишем  $\alpha \leq \beta$ , говорим, что  $\alpha$  не превосходит  $\beta$ , если  $\alpha < \beta \vee \alpha = \beta$ .



**Теорема 1.2.** Пусть  $\alpha, \beta$  – сечения. Тогда либо  $\alpha < \beta$ , либо  $\alpha = \beta$ , либо  $\alpha > \beta$ .

*Доказательство.* Если  $\alpha = \beta$ , то определение влечёт, что не может быть при этом  $\alpha < \beta$  или  $\alpha > \beta$ . Пусть  $\alpha \neq \beta$ . Докажем, что выполнено только одно соотношение  $\alpha < \beta$  или  $\alpha > \beta$ . Предположим, что выполнены оба, т.е.  $\alpha < \beta$  и  $\beta < \alpha$ . Тогда  $(\alpha < \beta) \Rightarrow (\exists p \in \mathbb{Q} | p \in \beta, p \notin \alpha)$ ;  $(\beta < \alpha) \Rightarrow (\exists q \in \mathbb{Q} | q \in \alpha, q \notin \beta)$ . По утверждению из предыдущей лекции  $(p \in \beta, q \notin \beta) \Rightarrow p < q$ ;  $(q \in \alpha, p \notin \alpha) \Rightarrow q < p$  – получили противоречие.

Таким образом,  $\alpha < \beta$  и  $\beta < \alpha$  вместе не могут выполняться. Но, если  $\alpha \neq \beta$ , то в каком-то из этих множеств, например в  $\beta$  имеется элемент  $r \in \mathbb{Q}$ , не принадлежащий  $\alpha$ , тогда по определению имеем  $\alpha < \beta$ . Аналогично для  $\beta < \alpha$ . Следовательно, в случае  $\alpha \neq \beta$  обязательно выполнится только одно условие  $\alpha < \beta$  или  $\beta < \alpha$ . Теорема доказана. ■

**Теорема 1.3.** Теорема о трех сечениях. Пусть  $\alpha, \beta, \gamma$  – сечения. Если  $\alpha < \beta \wedge \beta < \gamma$ , то  $\alpha < \gamma$ .

*Доказательство.*  $(\alpha < \beta) \Rightarrow (\exists p \in \mathbb{Q} | p \in \beta, p \notin \alpha)$ ;  $(\beta < \gamma) \Rightarrow (\exists q \in \mathbb{Q} | q \in \gamma, q \notin \beta)$ . Далее,  $(p \in \beta, q \notin \beta) \Rightarrow$  по утверждению из прошлой лекции  $p < q$ . Поскольку  $p \notin \alpha$ , то тогда и  $q \notin \alpha$ , в противоположном случае по свойству 2 в определении сечения было бы и  $p \in \alpha$ . Таким образом,  $q \in \gamma, q \notin \alpha$ , т.е.  $\alpha < \gamma$ . Теорема доказана. ■

**Определение 1.4.** Сумма вещественных чисел = сумма сечений.

**Теорема 1.4.** Пусть  $\alpha$  и  $\beta$  – сечения,  $\gamma$  – множество рациональных чисел  $r$ , т.ч.  $r = p + q$ , где  $p \in \alpha$  – произвольное число,  $q \in \beta$  – произвольное число. Тогда  $\gamma$  – сечение.

*Доказательство.* Поскольку  $\alpha \neq \emptyset, \beta \neq \emptyset$ , то  $\gamma \neq \emptyset$ . Поскольку  $\alpha \neq \mathbb{Q}, \beta \neq \mathbb{Q}$ , то  $\exists s \in \mathbb{Q}, s \notin \alpha$  и  $\exists t \in \mathbb{Q}, t \notin \beta$ . Пусть  $p \in \alpha, q \in \beta$ . По утверждению из прошлой лекции  $(p \in \alpha, s \notin \alpha) \Rightarrow (p < s)$ ;  $(q \in \beta, t \notin \beta) \Rightarrow (q < t)$ . Отсюда следует, что  $p + q < s + t \forall p \in \alpha \wedge \forall q \in \beta$ , т.ч.  $\forall r \in \gamma$  выполнено  $r < s + t$ , т.е.  $s + t \notin \gamma$ , т.е.  $\gamma \neq \mathbb{Q}$  – проверен п.1 в определении сечения.

Пусть  $r \in \gamma, s < r$ . Тогда  $r = p + q, p \in \alpha, q \in \beta$ . Пусть  $t = s - q$ , тогда  $t < r - q = (p + q) - q = p$ , из  $p \in \alpha$  и  $t < \alpha$  следует  $t \in \alpha$ , т.е.  $s = t + q, t \in \alpha, q \in \beta$ , т.е.  $s \in \gamma$  – проверен п.2 в определении сечения.

Пусть  $r \in \gamma, r = p + q, p \in \alpha, q \in \beta$ . По п.3 определения сечения  $\exists p_1 \in \alpha, p_1 > p$ , тогда  $r_1 = p_1 + q > p + q = r$ , в  $\gamma$  нет наибольшего элемента, проверен п.3 определения сечения.

Теорема доказана. ■

**Определение 1.5.** Сечение  $\gamma$ , построенное в предыдущей теореме, называется суммой сечений  $\alpha$  и  $\beta$ .

Поскольку вещественные числа определены как сечения, то вещественное число  $\gamma$  называют суммой вещественных чисел  $\alpha$  и  $\beta$ , пишут  $\gamma = \alpha + \beta$ .

### Свойства сложения

**Теорема 1.5.** Пусть  $\alpha, \beta, \gamma$  – вещественные числа. Тогда:

1.  $\alpha + \beta = \beta + \alpha$
2.  $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$
3.  $\alpha + 0^* = \alpha$

*Доказательство.* Пункты 1 и 2 следуют из определения сложения и свойств сложения рациональных чисел. Докажем п.3.

Пусть  $r \in \alpha + 0^*$ , тогда  $r = p + q, p \in \alpha, q \in 0^*$ , т.е.  $q < 0$ , поэтому  $r = p + q < p$ , тогда  $r \in \alpha$  по условию 2 определения сечений, т.ч.  $\alpha + 0^* \subset \alpha$ , если мы делаем акцент на том, что  $\alpha + 0^*$  и  $\alpha$  – множества. Пусть теперь  $t \in \alpha$ . Выберем  $s > t$ , но  $s \in \alpha$ , что возможно по п.3 определения сечений. Полагаем  $q_0 = t - s$ , тогда  $t - s < 0 \Rightarrow t - s \in 0^*, t = s + (t - s) \in \alpha + 0^*$ , т.е.  $\alpha \subset \alpha + 0^*$ , тогда  $\alpha = \alpha + 0^*$ . Теорема доказана. ■

**Теорема 1.6.** Теорема о разности верхних и нижних чисел сечения. Пусть  $\alpha$  – сечение, и пусть  $r \in \mathbb{Q}, r > 0$ . Тогда  $\exists p \in \mathbb{Q}, \exists q \in \mathbb{Q}$ , такие что  $p \in \alpha, q \notin \alpha$ ,  $q$  не является наименьшим из верхних чисел  $\alpha$  и  $q - p = r$ .

*Доказательство.* Возьмем  $s \in \alpha$ , и пусть  $s_n = s + nr, s_0 = s, n = 0, 1, \dots$ . Найдется  $m_0$ , т.ч.  $s_{m_0} \notin \alpha$ : если бы  $s_n \in \alpha \forall n \in \mathbb{N}$ , то возьмем  $\forall t \in \mathbb{Q}, t > s$ . По свойствам рациональных чисел  $\exists n_0$  т.ч.  $s = n_0 r > t$ , и тогда  $s_{n_0} \in \alpha \Rightarrow t \in \alpha$ , т.е.  $\alpha = \mathbb{Q}$  в силу произвольности  $t$ , что противоречит условию 1.

Таким образом,  $\exists m_0 \in \mathbb{N}$ , т.ч.  $s_{m_0} \notin \alpha$ . Поскольку  $s_0 \in \alpha$ , то имеется максимальное  $m \in \mathbb{N}$ , т.ч.  $s_m \in \alpha, m < m_0$ , тогда  $s_{m+1} \notin \alpha$ . Если

$s_{m+1}$  не является минимальным из верхних чисел сечения, то полагаем  $p = s_m, q = s_{m+1}$ , тогда  $q - p = s_{m+1} - s_m = (s + (m+1)r) - (s + mr) = r$ . Если же  $s_{m+1}$  является наименьшим из верхних чисел сечения, то пусть  $p = s_m + \frac{r}{2}, q = s_{m+1} + \frac{r}{2}, q - p = r, q > s_{m+1} \Rightarrow q \notin \alpha, s_{m+1}$  – наименьшее из верхних чисел  $\alpha$  и  $p = s_m + \frac{r}{2} = s + mr + \frac{r}{2} < s + (m+1)r$ , поэтому  $p \in \alpha$ . Теорема доказана. ■

### Существование противоположного числа

**Теорема 1.7.** Пусть  $\alpha$  – вещественное число. Тогда существует единственное число  $\beta$  такое, что  $\alpha + \beta = 0^*$

*Доказательство.* Вначале докажем единственность  $\beta$ . Предположим, что  $\exists \beta_0$  т.ч.  $\alpha + \beta_0 = 0^*$ . Тогда, по теореме о свойствах сложения имеем  $\beta_0 = 0^* + \beta_0 = (\alpha + \beta) + \beta_0 = (\beta + \alpha) + \beta_0 = \beta + (\alpha + \beta_0) = \beta + 0^* = \beta$  т.е.  $\beta$  – единственный, если существует.

Найдем теперь какое-то  $\beta$ , т.ч.  $\alpha + \beta = 0^*$ . Пусть  $\beta$  – множество всех рациональных чисел таких, что  $-p$  является верхним числом  $\alpha$ , но не наименьшим из верхних чисел.

Проверим, что  $\beta$  – сечение (= вещественное число). Взяв любое верхнее не наименьшее число  $t$  сечения  $\alpha$ , полагая  $p = -t$ , имеем  $p \in \beta$ , т.е.  $\beta \neq \emptyset$ . Взяв любое  $s \in \alpha$ , получаем, что  $-s \notin \beta$ , т.к.  $-(-s) = s \in \alpha$ ,  $s$  – нижнее число  $\alpha$ , т.е.  $\beta \neq \mathbb{Q}$  – проверено условие 1.

Если  $p \in \beta, q \in \mathbb{Q}$  и  $q < p$ , то  $-q > -p, -p$  – верхнее число  $\alpha \Rightarrow -q$  – верхнее число  $\alpha$  и  $-q$  – не наименьшее верхнее в  $\alpha$ , т.е.  $q \in \beta$  – проверено условие 2.

Если  $p \in \beta$ , то  $-p$  – верхнее число  $\alpha$  и  $\exists$  верхнее число  $\alpha$ , обозначим его  $-q$ , т.ч.  $-q < -p$ ; пусть  $-z \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{q+p}{2}$ , тогда  $-z > -q$ , т.е.  $-z$  – верхнее число в  $\alpha$  и не наименьшее, поэтому  $z \in \beta$ . Поскольку  $-z < -p$ , то  $z > p$ , в  $\beta$  нет наибольшего – проверено условие 3. Таким образом  $\beta$  – сечение.

Проверка свойства  $\alpha + \beta = 0^*$  Пусть  $p \in \alpha + \beta$ , тогда  $p = q + z, q \in \alpha, z \in \beta; z \in \beta \Rightarrow -z \notin \alpha$ , тогда  $q \in \alpha \Rightarrow q < -z, q + z < 0, p < 0, p \in 0^*$ , т.е.  $\alpha + \beta \subset 0^*$ , если трактовать  $\alpha, \beta, 0^*$  как множества.

Пусть  $p \in 0^*$ , тогда  $p < 0$ . По теореме о разности верхних и нижних чисел сечения  $\exists q \in \alpha, s \notin \alpha, s$  не является наименьшим верхним числом  $\alpha$ , т.ч.  $s - q = -p$ . Поскольку  $-s \in \beta$ , то тогда  $p = q - s = q + (-s) \in \alpha + \beta$ , т.е.  $0^* \subset \alpha + \beta$ ; в итоге  $0^* = \alpha + \beta$ , теорема доказана. ■

**Определение 1.6.** Вещественное число  $\beta$ , построенное в предыдущей теореме обозначается  $-\alpha$ , и называется числом, противоположным  $\alpha$ .

**Утверждение 1.2.** *О сохранении неравенства. Пусть  $\beta < \gamma$ , тогда  $\alpha + \beta < \alpha + \gamma$ . В частности, если  $0^* < \gamma, 0^* < \alpha$ , то  $(\alpha = 0^* + \alpha < \alpha + \gamma, 0^* < \alpha) \Rightarrow 0^* < \alpha + \gamma$ .*

*Доказательство.* Из определения сложения вещественных чисел следует, что  $\alpha + \beta \leq \alpha + \gamma$ . Если было бы  $\alpha + \beta = \alpha + \gamma$ , то тогда

$$\beta = 0^* + \beta = ((-\alpha) + \alpha) + \gamma = 0^* + \gamma = \gamma$$

, что противоречит условию. Утверждение доказано. ■

### Определение разности вещественных чисел

**Теорема 1.8.** *Пусть  $\alpha, \beta$  – вещественные числа. тогда существует единственное вещественное число  $\gamma | \alpha + \beta = \gamma$ .*

*Доказательство.* Полагаем  $\gamma = \beta + (-\alpha)$ . Тогда  $\alpha + \gamma = \alpha + (\beta + (-\alpha)) = \alpha + ((-\alpha) + \beta) = (\alpha + (-\alpha)) + \beta = 0^* + \beta = \beta$ .

Если бы существовало  $\gamma_1 | \alpha + \gamma_1 = \beta$ , то если бы  $\gamma \neq \gamma_1$ , то тогда либо  $\gamma < \gamma_1$ , либо  $\gamma_1 < \gamma$ . Не уменьшая общности, считаем  $\gamma < \gamma_1$ . Тогда по утверждению о сохранении неравенства мы получаем  $\alpha + \gamma < \alpha + \gamma_1$ , но  $\alpha + \gamma = \beta, \alpha + \gamma_1 = \beta$ , противоречие.

Итак, вещественное число  $\gamma$  одно. Оно называется разностью  $\beta$  и  $\alpha$ ,  $\gamma = \beta - \alpha$ . ■

**Определение 1.7.**  $|\alpha|$ . Полагаем

$$|\alpha| = \begin{cases} \alpha, & \alpha \geq 0^* \\ -\alpha, & \alpha < 0^* \end{cases}$$

**Утверждение 1.3.**  $|\alpha| \geq 0^* \forall \alpha \in \mathbb{R}$

*Доказательство.* Если  $\alpha \geq 0^*$ , это следует из определения  $|\alpha|$ . Пусть  $\alpha < 0^*$ , тогда  $\alpha \neq 0^*$  и, если неверно, что  $\alpha > 0^*$ , то  $-\alpha < 0^*$ . По утверждению о сохранении неравенства тогда бы выполнялось  $\alpha + (-\alpha) < \alpha + 0^* = \alpha$ , но  $\alpha < 0^*$ , тогда  $\alpha + (-\alpha) < 0^*, 0^* < 0^*$ , что невозможно. Итак  $|\alpha| \geq 0^*$ . Из определения видно, что  $|\alpha| = 0^* \Leftrightarrow \alpha = 0^*$ . Утверждение доказано. ■

**Теорема 1.9.**  $p^* < \alpha, p \in \mathbb{Q} \cdot p^* < \alpha \Leftrightarrow p \in \alpha, p \in \mathbb{Q}$

*Доказательство.* Пусть  $p \in \alpha; p \notin p^* \Rightarrow p^* < \alpha$ . Пусть теперь  $p^* < \alpha$ , тогда  $\exists q \in \mathbb{Q} | q \notin p^*$ , т.е.  $q \geq p$ , и  $q \in \alpha$ . Тогда  $p \in \alpha$ . Теорема доказана. ■

## 1.5. Произведение вещественных чисел

**Теорема 1.10.** Пусть  $\alpha, \alpha \geq 0^*$ , и  $\beta, \beta \geq 0^*$  - вещественные числа. Обозначим через  $\gamma$  следующее множество рациональных чисел: если  $p \in \mathbb{Q}, p < 0$ , то  $p \in \gamma$ ; если  $p = st, s \in \alpha, t \in \beta$  и  $s \geq 0, t \geq 0$ , то  $p \in \gamma$ . Другие рациональные числа в множество  $\gamma$  не входят. Если  $\alpha = 0^* \vee \beta = 0^*$ , то  $\gamma$  по определению состоит только из чисел  $p \in \mathbb{Q}, p < 0$ . Тогда  $\gamma$  - сечение.

*Доказательство.* Поскольку  $(\forall p \in \mathbb{Q}, p < 0) \Rightarrow p \in \gamma$ , то  $\gamma$  непусто; если  $\alpha = 0^* \vee \beta = 0^*$ , то  $(\forall q > 0) \Rightarrow q \notin \gamma$ , в этом случае  $\gamma \neq \mathbb{Q}$ ; если  $\alpha > 0^* \wedge \beta > 0^*$ , то пусть  $u \notin \alpha, v \notin \beta$ , тогда  $u > 0 \wedge v > 0$  и  $(\forall s \in \alpha, s \geq 0 \wedge \forall t \in \beta, t \geq 0) \Rightarrow (s < u \wedge t < v) \Rightarrow st < uv$ , т.е.  $uv \notin \gamma$ , т.е. всегда  $\gamma \neq \mathbb{Q}$ . Если  $\alpha = 0^* \vee \beta = 0^*$ , то из определения  $\gamma$  в этом случае следуют условия 2 и 3; если  $\alpha > 0^* \wedge \beta > 0^*$ , то пусть  $p \in \gamma, p > 0, 0 \leq q < p$ ; Пусть  $p = st, s > 0, t > 0, s \in \alpha, t \in \beta$ . Если  $q = 0$ , то  $0 = 0^* \cdot t, 0 \in \alpha, 0 \in \gamma$ ; если  $q > 0$ , то  $\frac{q}{p} \cdot t < t$ , поэтому  $\frac{q}{p} \cdot t \in \beta$ , тогда  $s \cdot \frac{q}{p} \cdot t \in \gamma$ , но  $s \cdot \frac{q}{p} \cdot t = \frac{q}{p} st = \frac{q}{p} \cdot p = q$ , т.е.  $q \in \gamma$ ; если  $p = st, s > 0, t > 0$ , то возьмем  $s_1 > s, s_1 \in \alpha$ , тогда  $s_1 t \in \gamma, s_1 t > p$ . ■

**Определение 1.8.** Пусть  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Полагаем

$$\alpha\beta \stackrel{def}{=} \begin{cases} -(|\alpha||\beta|) & \alpha < 0^*, \beta \geq 0^* \\ -(|\alpha||\beta|) & \alpha \geq 0^*, \beta < 0^* \\ (|\alpha||\beta|) & \alpha < 0^*, \beta < 0^* \end{cases}$$

**Теорема 1.11.** Справедливы следующие свойства:

1.  $\alpha\beta = \beta\alpha$ ;
2.  $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$ ;
3.  $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$ ;
4.  $\alpha \cdot 0^* = 0^*$ ;
5.  $\alpha\beta = 0^* \Leftrightarrow \alpha = 0^* \vee \beta = 0^*$ ;
6.  $\alpha \cdot 1^* = \alpha$ ;
7.  $\alpha < \beta, \gamma > 0^* \Rightarrow \alpha\gamma < \beta\gamma$

*Доказательство.* Следует из определения суммы и произведения и из соответствующих свойств рациональных чисел. ■

**Теорема 1.12.** Если  $\alpha \neq 0^*$ , то  $\forall \beta \in \mathbb{R} \exists ! : \alpha\gamma = \beta$ .

*Доказательство.* Аналогично доказательству существования и единственности  $-\alpha$  и  $\beta - \alpha$ ; в данном случае вначале проверяем, что  $\exists \delta : \alpha\delta = 1^*$ , затем полагают  $\gamma = \beta\delta$ . ■

**Обозначение 1.1.**  $\gamma = \frac{\beta}{\alpha}, \delta = \frac{1}{\alpha}, \gamma$  - частное вещественных чисел  $\beta, \alpha$ ,  $\delta$  - обратное к  $\alpha$  число. Отметим также связь действий над сечениями и рациональными числами.

**Теорема 1.13.** Пусть  $p, q \in \mathbb{Q}$ . Тогда  $p^* + q^* = (p+q)^*, (pq)^* = p^*q^*, p^* < q^* \Leftrightarrow p < q$ .

*Доказательство.* Доказывается аналогично предыдущим теоремам. ■

**Теорема 1.14.** О плотности рациональных сечений в  $\mathbb{R}$ . Пусть  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha < \beta$ . Тогда  $\exists r^*, r \in \mathbb{Q} : \alpha < r^* < \beta$ .

*Доказательство.*  $(\alpha < \beta) \Rightarrow \exists p \in \mathbb{Q} : p \in \beta, p \notin \alpha$ . Выберем  $r > p, r \in \beta$ . Тогда в силу  $r \notin r^*$  имеем  $r^* < \beta$ ; поскольку  $p \notin \alpha, p < r$ , то  $p \in r^*$ , поэтому  $\alpha < r^*$ . ■

## 1.6. Теорема Дедекинда, супремумы и инфимумы.

**Определение 1.9.** Будем говорить, что в множестве вещественных чисел  $\mathbb{R}$  определено сечение, если имеются множества  $A \subset \mathbb{R} \wedge B \subset \mathbb{R}$  со следующими свойствами.

1.  $A \neq 0^*, B \neq 0^*, A \neq \mathbb{R}, B \neq \mathbb{R}$
2.  $A \cup B = \mathbb{R}$
3.  $A \cap B = \emptyset$
4. Если  $\alpha \in A, \beta \in B$ , то  $\alpha < \beta$

При этом множество  $A$  называется нижним классом сечения, и числа  $\alpha \in A$  называются нижними числами, а множество  $B$  называется верхним классом сечения, и числа  $\beta \in B$  называются верхними числами сечения.

**Теорема 1.15.** *Теорема Дедекинда. Пусть имеется сечение  $(A, B)$  множества  $\mathbb{R}$ . Тогда существует единственное число  $\gamma : \alpha \leq \gamma \forall \alpha \in A \wedge \gamma \leq \beta \forall \beta \in B$ . При этом реализуется только одна возможность: либо  $\gamma \in A$  и  $\gamma$  является максимальным числом, либо  $\gamma \in B$  и  $\gamma$  является минимальным числом в  $B$ .*

*Доказательство.* Прежде всего проверим, что  $(\gamma \in A) \Rightarrow \gamma$  - максимальное число в  $A$ , в  $B$  нет минимального или  $(\gamma \in B) \Rightarrow \gamma$  - минимальное в  $B$ , в  $A$  нет максимального. Проверим первое из этих утверждений, второе доказывается аналогично. Мы пока предполагаем, что число (или числа)  $\gamma$ , удовлетворяющие заключению теоремы, существуют. Предположим, что, наряду с  $\gamma \in A$ ,  $\gamma$  - максимальное в  $A$ ,  $\exists \gamma_1 \in \beta$ ,  $\gamma_1$  - минимальное число в  $B$ . Тогда условие 4  $\Rightarrow \gamma < \gamma_1$ . По теореме о плотности рациональных сечений  $\exists r^* : \gamma < r^* < \gamma_1$ . Тогда по предположению о минимальности  $\gamma_1$  в  $B$  имеем  $r^* \notin B$ , но в силу условий 2 и 3 тогда получаем, что  $r^* \in \mathbb{R} \setminus B = A$ , т.к.  $\mathbb{R} \setminus B = A$ . В силу предположения о максимальной  $\gamma$  в  $A$  из  $r^* > \gamma \Rightarrow r^* \notin A$ , т.е.  $r^* \in \mathbb{R} \setminus A = B$ , т.е.  $r^* \in A \cap B$ , что противоречит условию 3 сечения.

Таким образом,  $\gamma_1$  не существует и в  $B$  нет наименьшего числа.

Докажем теперь, что  $\gamma$  существует. (Оперируем с сечениями рациональных чисел, другой трактовки у нас пока нет). Полагаем  $\gamma \stackrel{def}{=} \{\text{множество всех рациональных чисел } p \text{ т.ч. для какого-то } \alpha \in A, p \in \alpha\}$ . По-другому это определение можно записать так:

$$\gamma = \bigcap_{\alpha \in A} \alpha$$

Поскольку  $\alpha$  - множество, и мы рассматриваем объединение указанных объектов. Проверим, что  $\gamma$  - сечение  $\mathbb{Q}$ . Поскольку  $A \neq \emptyset$ , тогда  $\exists p \in \alpha, p \in \gamma$ , т.е.  $\gamma \neq \emptyset$ . Далее  $B \neq \emptyset$ , поэтому  $\exists \beta \in B, \beta \notin A \wedge \beta > \alpha \forall \alpha \in A$  по условию 4 сечения  $\mathbb{R}$ . Возьмем  $q \in \mathbb{Q}, q \notin \beta$ , тогда  $q \notin \alpha$ , если  $q \in A$ , поскольку в противном случае, если бы  $q \in \alpha$ , то  $q^* < \alpha, \alpha < \beta, q^* < \beta$ , но  $q \notin \beta \Rightarrow q^* \geq \beta$  - противоречие. Таким образом,  $q \notin \alpha \forall \alpha \in A$ , т.е.  $q \notin \gamma, \gamma \neq \mathbb{Q}$  - проверено условие 1 сечения  $\mathbb{Q}$ . Если  $p \in \gamma \wedge q < p$ , то по определению  $\gamma \exists \alpha \in A : p \in \alpha$ , но тогда и  $q \in \alpha$ , т.е.  $q \in \gamma$  - проверено условие 2 сечения  $\mathbb{Q}$ . Если  $p \in \gamma$ , то  $\exists \alpha \in A : p \in \alpha$ , тогда  $\exists q > p, q \in \alpha$ , т.е.  $q \in \gamma$  - проверено условие 3 сечения  $\mathbb{Q}$ . Таким образом,  $\gamma$  - сечение  $\mathbb{Q}$ . Из определения  $\gamma$  следует, что  $\alpha \subset \gamma \forall \alpha \in A$ , т.е.  $\alpha \leq \gamma \forall \alpha \in A$ . Докажем, что  $\forall \beta \in B \beta \geq \gamma$ . Предположим, что это не так, тогда  $\exists \beta_0 \in B : \beta_0 < \gamma$ . Тогда  $\exists p \in \mathbb{Q} : p \in \gamma$ , но  $p \notin \beta_0$ . Но если  $p \in \gamma$ , то  $\exists \alpha_0 \in A : p \in \alpha_0$ , что влечёт  $\beta_0 < \alpha_0$ , а это противоречит условию 4 сечения  $\mathbb{R}$ . ■

**Определение 1.10.** Пусть  $E \subset \mathbb{R}, E \neq \emptyset$ . Множество  $E$  называется ограниченным сверху, если  $\exists b \in \mathbb{R} : \forall a \in E$  выполнено  $a \leq b$ ; число  $b$  называют верхней границей множества  $E$ ; множество  $E$  называют ограниченным снизу, если  $\exists c \in \mathbb{R} : \forall a \in E$ , выполнено  $a \geq c$ ; число  $c$  называют нижней границей множества  $E$ .

Множество  $E$  называют ограниченным, если оно ограничено и снизу, и сверху.

Число  $b_0$  называют точной верхней границей  $E$  или супремумом  $E$ , обозначается  $b = \sup E$ , если  $b_0$  - верхняя граница  $E$  и  $\forall b_1 < b_0$   $b_1$  не является верхней границей  $E$ .

Число  $c_0$  называется точной нижней границей  $E$  или инфимумом  $E$ , обозначается  $c_0 = \inf E$ , если  $c_0$  - нижняя граница  $E$  и  $\forall c_1 > c_0$   $c_1$  не является нижней границей  $E$ .

**Теорема 1.16.** *О существовании супремума и инфимума. Пусть  $E \subset \mathbb{R}, E \neq \emptyset$ ,  $E$  - ограничено сверху. Тогда  $\exists \sup E$ . Пусть  $E \subset \mathbb{R}, E \neq \emptyset$ ,  $E$  - ограничено снизу. Тогда  $\exists \inf E$ .*

*Доказательство.* Докажем существование супремума, существование инфимума доказывается аналогично. Определим сечение  $(A, B)$  в  $\mathbb{R}$  следующим образом: множество  $A$  состоит из всех  $\alpha \in \mathbb{R} : \exists x \in E \wedge x > \alpha$ ,  $B = \mathbb{R} \setminus A$ . Из определения  $A$  следует, что  $\forall \alpha \in A$  число  $\alpha$  не является верхней границей  $E$ . Поскольку  $A$  ограничено сверху, то  $A \neq \mathbb{R}$ , а  $E \neq \emptyset \Rightarrow A \neq \emptyset$ , т.к. если  $x_0 \in E$ , то  $x_0 - 1^* < x_0, x_0 - 1^* \in A$ .

Если  $\beta \in B$ , то, по определению  $A$ ,  $\nexists x \in E : x > \beta$ , ибо иначе было бы  $\beta \in A$ , т.е.  $\forall x \in E$  имеем  $x \leq \beta$ , т.е.  $\beta$  - верхняя граница  $E$  для  $\forall \beta \in B$ . Условия 1-3 сечения  $\mathbb{R}$  для  $(A, B)$  проверены.

Проверим условие 4. Пусть  $\alpha \in A, \beta \in B$ . Тогда  $\exists x_0 \in E : x_0 > \alpha$ , но  $\beta \geq x_0$ , т.е.  $\beta > \alpha$  - условие 4 проверено.

Пусть  $\gamma \in \mathbb{R}$  - число, определяемое сечением  $(A, B)$  по теореме Дедекинда. Проверим, что  $\gamma \notin A$ . Если бы  $\gamma \in A$ , то  $\exists x_1 \in E : x_1 > \gamma$ . Выберем  $r^* : \gamma < r^* < x_1$ , тогда  $r^* \in A$  по определению  $A$ ,  $r^* > \gamma$ , т.е.  $\gamma$  - не наибольшее число в  $A$ , что противоречит теореме Дедекинда. Следовательно,  $\gamma \in B$ , т.е.  $\gamma$  - верхняя граница  $E$  и  $\gamma$  - наименьшее число в  $B$  по теореме Дедекинда, т.е.  $\forall \gamma_1 < \gamma$ ,  $\gamma_1$  не является элементом  $B$ , т.е.  $\gamma_1 \in A$ , тогда  $\exists x_2 \in E : x_2 > \gamma_1$ , т.е.  $\gamma_1$  - не верхняя граница  $E$ . Таким образом  $\gamma$  - точная верхняя граница  $E$ . ■



## 1.7. Десятичные дроби, определение корня, степени, экспонент и логарифма

**Определение 1.11.** Пусть  $E \neq \emptyset, G \neq \emptyset$  - множества. Отображением  $F : E \rightarrow G$  будем называть правило, по котором  $\forall x \in E$  сопоставляется  $F(x) \in G$ . Отображение задается набором  $E, G, F$ . Далее в качестве синонима слова "отображение" будем использовать слово "функция" или " $G$ -значная функция, определенная на  $E$ ". Отображение  $F$  называется инъективным или инъекцией, если из  $x, y \in E, x \neq y \Rightarrow F(x) \neq F(y)$ ; отображение  $F$  называется сюръективным или сюръекцией, если  $\forall q \in G \exists x \in E : F(x) = q$ ; отображение  $F$  называется биективным или биекцией, если оно одновременно инъективно и сюръективно. Мы будем обозначать биекцию так:  $F : E \longleftrightarrow G$ .

**Определение 1.12.** Множество  $X$  называется счетным, если существует биекция  $F : \mathbb{N} \longleftrightarrow X$ ,  $\mathbb{N}$  - множество натуральных чисел. Исторически счетные множества обозначаются так:  $F(n) = x_n, x_n \in X, n \in \mathbb{N}$ . Последовательностью будем называть любое отображение  $f : \mathbb{N} \rightarrow Y$ , при этом обычно ее обозначают  $y_1, y_2, \dots, y_n$ , или  $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ . Говорят при этом, что определена последовательность множества  $Y$ .

**Теорема 1.17.** Объединение конечного или счетного множества попарно дизъюнктивных счетных множеств счетно.

*Доказательство.* Пусть  $X_k = \{a_{k1}, a_{k2}, \dots\}$ , где  $k = 1, \dots, n$  или  $k = 1, 2, \dots$ ; укажем способ нумерации  $\bigcup_{k=1}^n X_k$  или  $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} X_k$ . Учтем, что если  $k \neq 1$ , то  $a_{ki} \neq a_{kj}$ , а если  $k = 1$ , но  $i \neq j$ , то  $a_{ki} \neq a_{kj}$ . В случае  $k = 1, \dots, n$  запишем элементы  $a_{kj}$  в таблицу:

$a_{11}$	$a_{12}$	$\dots$	$a_{1s}$	$\dots$
$a_{21}$	$a_{22}$	$\dots$	$a_{2s}$	$\dots$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$a_{n1}$	$a_{n2}$	$\dots$	$a_{ns}$	$\dots$

и будем "перенумеровывать" получившееся объединение  $\bigcup_{k=1}^n X_k$  змейкой:  $a_{11} \rightarrow a_{21} \rightarrow \dots \rightarrow a_{n1} \rightarrow a_{n2} \rightarrow a_{n-12} \rightarrow \dots$

В случае  $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} X_k$  укажем перенумерацию:  $a_{11} \rightarrow a_{21} \rightarrow a_{12} \rightarrow a_{13} \rightarrow a_{22} \rightarrow a_{31} \rightarrow \dots$

При этом в каждом из двух случаев получаем перенумерацию всего объединения. ■

**Утверждение 1.4.** Пусть  $X$  - счетное множество,  $Y \subset X$ ,  $Y$  - бесконечное множество (т.е. в нем не конечное множество элементов). Тогда  $Y$  - счетное.

*Доказательство.* Пусть  $X = \{x_1, x_2, \dots\} \forall y \in Y \exists n : y = x_n$ . Пусть  $k \stackrel{\text{def}}{=} \{n \in \mathbb{N} : \exists y \in Y : y = x_n\}$ . Пусть  $n_1$  - минимальное число в множества  $K$ , тогда  $\exists y \in Y : y = x_{n_1}$ , положим  $1 \leftrightarrow y$ , т.е. присвоим  $y$  номер 1, считаем его  $y_1$ . Пусть  $K_1 = K \setminus n_1$ , тогда  $K \neq \emptyset$ , т.к.  $K$  бесконечное множество, пусть  $n_2 \in K_1$  - минимальное число;  $\exists y_2 \in Y : y_2 = x_{n_2}$ , положим  $K_2 = K_1 \setminus n_2$ , и т.д. Таким образом мы построим биекцию  $\mathbb{N} \leftrightarrow Y$ . ■

**Следствие 1.1.** Пусть  $Y = \bigcup_{k=1}^n X_k$  или  $Y = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} X_k$ , где  $X_k$  - счетны, но необязательно дизъюнкты. Тогда  $Y$  счетно.

*Доказательство.* Слудует из теоремы и утверждения. ■

## Сопоставление вещественным числам десятичных разложений

Будем рассматривать только  $\alpha > 0^*$ , случай  $\alpha < 0^*$  получается добавлением знака ”-”.

Прежде всего биективно сопоставляем любому натуральному числу  $n$  сечения  $n^*$ , для  $n$  считаем известным его десятичное представление. Для  $n^* < x < (n+1)^*, n \geq 0, n \in \mathbb{Z}$ , положим  $\alpha = x - n^*$ , тогда  $0^* < \alpha < 1^*$ . Определим

$$E \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \left( \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_k}{10^k} \right)^* : 0 \leq a_j \leq 9, 1 \leq j \leq k, k \geq 1, \right. \\ \left. \left( \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_k}{10^k} \right)^* \leq \alpha \right\}$$

**Теорема 1.18.**  $\alpha = \sup E$

*Доказательство.* Определение  $E$  показывает, что множество  $E \neq \emptyset$ , т.к.  $0^* \in E$ , и ограничено сверху, поэтому  $\exists \sup E \stackrel{\text{def}}{=} \beta, \beta \leq \alpha$ , поскольку  $\alpha$  - верхняя граница  $E$ . Предположим, что  $\alpha > \beta$ . Тогда  $\exists r_1 \in \mathbb{Q} : \beta < r_1^* < \alpha \wedge \exists r_2 \in \mathbb{Q} : r_1^* < r_2^* < \alpha$ . Пусть  $t = r_2^* - r_1^*$ . Выберем  $k_0 \in \mathbb{N}$  так, чтобы  $k^* > \frac{1}{t}$ , тогда  $((10^{k_0})^* > k_0^* > \frac{1}{t}) \Leftrightarrow \left( \frac{1}{10^{k_0}} \right)^* < \left( \frac{1}{k_0} \right)^* < t$ . По определению числа  $\beta \exists q = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_{k_1}}{10^{k_1}}$ , т.ч.  $q^* > \beta - \frac{1}{10^{k_0}} \Leftrightarrow \beta < q^* + \frac{1}{10^{k_0}}$ . Считаем, что  $k_1 \geq k_0$ , если это не так, то полагаем

$a_{k_1+1} = \dots = a_{k_0} = 0$ , что даёт возможность этому предположению.

Считаем также, что  $k_0$  выбрано так, чтобы  $\alpha + \left(\frac{1}{10^{k_0}}\right) < 1$ .

Если бы выполнялось соотношение  $q^* + \left(\frac{1}{10^{k_0}}\right)^* > \alpha, q^* \leq \beta$ , что влечёт неравенство

$$\left(q^* + \left(\frac{1}{10^{k_0}}\right)^*\right) - q^* > \alpha - \beta > r_2^* - r_1^* = t$$

т.е.  $\left(\frac{1}{10^{k_0}}\right)^* > t$ , что противоречит выбору  $k_0$ , т.е.  $\alpha = \beta$ . ■

Пользуясь теоремой, сопоставим  $\alpha, 0 < \alpha < 1$ , последовательность  $\{a_k\}_{k=1}^\infty, a_k \in \{0, 1, \dots, 9\}$

**Обозначение 1.2.** В дальнейшем полагаем

$$[a, b] \stackrel{def}{=} x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b$$

$$(a, b) \stackrel{def}{=} x \in \mathbb{R} : a < x < b$$

$$[a, b) \stackrel{def}{=} x \in \mathbb{R} : a \leq x < b$$

$$(a, b] \stackrel{def}{=} x \in \mathbb{R} : a < x \leq b$$

Новым по сравнению со школой является использование построенных по Дедекинду вещественных чисел.

Определим теперь числа  $a_k(\alpha) \in \{0, 1, \dots, 9\}$  и  $P_k(\alpha) \in \mathbb{Q}$ . Из  $0 < \alpha < 1$  следует, что  $\exists$  единственный промежуток вида  $\left[0, \frac{1}{10}\right)^*, \left[\frac{1}{10}, \frac{2}{10}\right)^*, \dots, \left[\frac{9}{10}, 1\right)^*$ , которому принадлежит  $\alpha$ . Пусть  $\alpha \in \left[\left(\frac{a_1(\alpha)}{10}\right)^*, \left(\frac{a_1(\alpha)+1}{10}\right)^*\right)$ , что даёт  $a_1(\alpha)$  и пусть  $P_1(\alpha) \stackrel{def}{=} \frac{a_1(\alpha)}{10}$ . Далее  $\exists$  единственный промежуток  $\left[\frac{a_1(\alpha)}{10} + \frac{a_2(\alpha)}{10^2}, \frac{a_1(\alpha)}{10} + \frac{a_2(\alpha)+1}{10^2}\right)$ , т.ч.  $\alpha \in \left[\left(\frac{a_1(\alpha)}{10}\right)^* + \left(\frac{a_2(\alpha)}{10^2}\right)^*, \left(\frac{a_1(\alpha)}{10}\right)^* + \left(\frac{a_2(\alpha)+1}{10^2}\right)^*\right)$ , что задаёт  $a_2(\alpha)$ , и полагаем  $p_2(\alpha) = \frac{a_1(\alpha)}{10} + \frac{a_2(\alpha)}{10^2}$ . Если уже определили  $a_1(\alpha), \dots, a_k(\alpha)$ , и  $P_k(\alpha) = \frac{a_1(\alpha)}{10} + \frac{a_2(\alpha)}{10^2} + \dots + \frac{a_k(\alpha)}{10^k}$ , то существует единственный промежуток

$$\left[P_k(\alpha) + \frac{a_{k+1}(\alpha)}{10^{k+1}}, P_k(\alpha) + \frac{a_{k+1}(\alpha) + 1}{10^{k+1}}\right)$$

такой что

$$\alpha \in \left[P_k(\alpha) + \left(\frac{a_{k+1}(\alpha)}{10^{k+1}}\right)^*, (P_k(\alpha))^* + \left(\frac{a_{k+1}(\alpha) + 1}{10^{k+1}}\right)^*\right)$$

тогда полагаем  $P_{k+1}(\alpha) = P_k(\alpha) + \frac{a_{k+1}(\alpha)+1}{10^{k+1}}$ .

Из построения следует, что  $\forall k = 1, 2, \dots$  выполнено  $P_k^*(\alpha) \leq \alpha < P_k^*(\alpha) + \left(\frac{1}{10^k}\right)^*$ . Положим  $E_0 \stackrel{def}{=} \{r^* \in \mathbb{Q} : \exists k \in \mathbb{N} : r^* = (P_k^*(\alpha))^*\}$

**Утверждение 1.5.**  $\alpha = \sup E_0$

*Доказательство.* Из определений  $E$  и  $E_0$  следует, что  $E_0 < E$ , поэтому  $\alpha_0 \stackrel{def}{=} \sup E_0 \leq \sup E = \alpha$ . Тогда имеем неравенства, справедливые  $\forall k \in \mathbb{N}$ :

$$P_k^*(\alpha) \leq \alpha_0 \leq \alpha < P_k^*(\alpha) + \left(\frac{1}{10^k}\right)^* \Rightarrow 0 \leq \alpha - \alpha_0 \leq \left(\frac{1}{10^k}\right)^* \quad (1.7)$$

Если бы  $\alpha - \alpha_0 > 0$ , то можно найти  $k_0 : \alpha - \alpha_0 > \left(\frac{1}{10^{k_0}}\right)^*$ , что противоречит соотношению 1.7 при  $k \geq k_0$ . ■

В результате предыдущих рассуждений построено отображение  $A(\alpha) : \alpha \rightarrow a_1(\alpha), a_2(\alpha), \dots$  из промежутка  $(0; 1)$  в множество последовательностей, состоящих из элементов  $0, 1, \dots, 9$ , что можно трактовать, как бесконечную десятичную дробь.

**Утверждение 1.6.** *Отображение  $A(\alpha)$  инъективно.*

*Доказательство.* Пусть  $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < 1, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ . Выберем минимальное  $k_0$  такое, что  $\alpha_2 - \alpha_1 \geq \left(\frac{1}{10^{k_0}}\right)^*$ . Если  $k_0 = 1$ , то  $a_1(\alpha_1) < a_1(\alpha_2)$ , поэтому  $A(\alpha_1) \neq A(\alpha_2)$ . Если  $k_0 > 1$  и  $\exists j, 1 \leq j \leq k_0 - 1 : a_j(\alpha_1) \neq a_j(\alpha_2)$ , то  $A(\alpha_1) \neq A(\alpha_2)$ ; если же  $a_j(\alpha_1) = a_j(\alpha_2), 1 \leq j \leq k_0 - 1$ , то  $a_{k_0}(\alpha_1) < a_{k_0}(\alpha_2)$  и  $A(\alpha_1) \neq A(\alpha_2)$ . ■

Начиная с этого момента будем трактовать вещественное число также как  $\pm$  (натуральное число + бесконечная десятичная дробь), поэтому не будем ставить знак у рациональных чисел. Важно заметить все привычные свойства вещественных чисел строго определены и обоснованы, если их определяют как сечения. Пока речь шла только об арифметических действиях и неравенствах, в которых вещественные числа участвуют.

## Существование корня из вещественного числа

**Теорема 1.19.** *Пусть  $x > 0, n \geq 2, n \in \mathbb{N}$ . Тогда  $\exists! a > 0 : a^n = x$ .*

*Доказательство.* Проверим единственность числа  $a$ , если оно существует. Пусть  $a_0^n = x, a_0 > 0$ , тогда  $0 = a^n - a_0^n = (a - a_0) * A$ , где  $A = (a^{n-1} + a^{n-2}a_0 + \dots + a_0^{n-1})$ . Поскольку  $A > 0$ , то  $(a - a_0) = 0 * \frac{1}{A} = 0, a = a_0$ . ■

**Определение 1.13.** Полагаем  $0! \stackrel{def}{=} 1, 1! \stackrel{def}{=} 1, n! \stackrel{def}{=} 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ ,  $C_n^m \stackrel{def}{=} \frac{n!}{(n-m)!m!}, 0 \leq m \leq n$ ; или  $C_n^m = C_n^{n-m}, C_n^0 = 1, C_n^1 = n$ .

Бином Ньютона: пусть  $n \geq 2; a, b \in \mathbb{R}$ , тогда  $(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + b^n$ .

Пусть  $E = \{t \in \mathbb{R} : t > 0, t^n \leq x\}$ . Если  $t_0 \stackrel{def}{=} \frac{x}{1+x}$ , то  $t_0 > 0, t_0 < 1, t_0^n = t_0^{n-1} * t_0 < 1^{n-1} \cdot t_0 < x$ , т.е.  $E \neq \emptyset$ ; если  $t_1 = 1 + x$ , то  $t_1 > 1, t_1^n = t_1^{n-1} * t_1 > 1^{n-1} \cdot t_1 > x$ , поэтому  $t_1 \notin E$  и является верхней границей  $E$ , т.е.  $\exists \sup E$ . Утверждается, что  $a = \sup E$ . Предположим, что  $b \stackrel{def}{=} \sup E, b^n < x$ . Выберем  $0 < h < 1$  и также

$$h < \frac{x - b^n}{(1+b)^n - b^n} \quad (1.8)$$

Тогда

$$\begin{aligned} (b+h)^n &= b^n + C_n^1 b^{n-1} h + \dots + C_n^{n-1} b h^{n-1} + h^n < \\ b^n + C_n^1 b^{n-1} h + \dots + C_n^{n-1} b h + h &= b^n + h(C_n^1 b^{n-1} + \dots + C_n^{n-1} b + h) = \\ b^n + h((1+b)^n - 1) &\stackrel{1.8}{<} b^n + x - b^n = x \end{aligned}$$

т.е.  $b+h \in E$ , что противоречит тому, что  $b = \sup E$ . Предположим, что  $b^n > x$ . Выберем  $0 < v < 1, v < b$  и

$$v < \frac{b^n - x}{(1+b)^n - b^n} \quad (1.9)$$

Тогда

$$\begin{aligned} (b-v)^n &= b^n - C_n^1 b^{n-1} v + C_n^2 b^{n-2} v^2 - \dots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} b v^{n-1} + (-1)^n v^n = \\ b^n - v(C_n^1 b^{n-1} + C_n^2 b^{n-2} v^1 - \dots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} b v^{n-1} + (-1)^n v^{n-1}) &\geq \\ b^n - v(C_n^1 b^{n-1} + C_n^2 b^{n-2} v^1 + \dots + C_n^{n-1} b v^{n-1} + v^{n-1}) &> \\ b^n - v(C_n^1 b^{n-1} + C_n^2 b^{n-2} + \dots + C_n^{n-1} b + 1) &= b^n - v((1+b)^n - b^n) \stackrel{1.9}{>} b^n - (b^n - x) = x \end{aligned}$$

т.е.  $b-v$  - верхняя граница  $E$ , что противоречит тому, что  $b = \sup E$ . Итак,  $b^n = x, b = a$ .

Далее приводится определение степени и логарифма без доказательств.

**Определение 1.14.**  $a^r, a > 0, r \in \mathbb{Q}$ : если  $r = \frac{p}{q}, q \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{Z}$ , то полагаем  $a^r \stackrel{\text{def}}{=} \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p$ . При  $r > 0$  полагаем  $0^r = 0$ .

**Определение 1.15.**  $a^\alpha, a > 1, \alpha \in \mathbb{R} : E = \{a^r : r \in \mathbb{Q}, r \leq \alpha\}$ , тогда  $a^\alpha = \sup E$ .  $1^\alpha = 1 \forall \alpha \in \mathbb{R}$ . Если  $0 < a < 1$ , то  $a^\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{1}{a}\right)^{-\alpha}$ .

**Определение 1.16.**  $\log_a b, a > 0, a \neq 1, b > 0$ : если  $a > 1$ , то  $E = \{x \in \mathbb{R} : a^x \leq b\}$ , тогда  $\log_a b = \sup E$ ; если  $0 < a < 1$ , то  $\log_a b \stackrel{\text{def}}{=} -\log_{\frac{1}{a}} b$ .

**Теорема 1.20.** Для выражений  $a^\alpha, \log_a b$  справедливы все равнее встречающиеся в школьном курсе утверждения.

## Пределы

### 2.1. Общее определение предела последовательности

**Определение 2.1.** Пусть  $E \neq \emptyset$ ,  $\exists$  по крайней мере 2 точки  $x_1, x_2 \in E$ . Множество  $E$  называется метрическим пространством, если  $\forall x, y \in E$  определена функция  $\rho(x, y)$ , удовлетворяющая следующим свойствам:

1.  $\rho(x, y) \geq 0$ ;  $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2.  $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
3.  $\forall x, y, z \in E \rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$

Функцию  $\rho$  называют метрикой, заданной на  $E$ , а  $\rho(x, y)$  называют расстоянием в  $E$  между  $x, y$ . Соотношение 3 называется неравенством треугольника в  $E$ . Точка  $a \in E$  называется точкой сгущения множества  $E$ , если  $\forall \epsilon > 0 \exists x_\epsilon \in E : x_\epsilon \neq a \wedge \rho(x_\epsilon, a) < \epsilon$ . Точка  $b \in E$  называется изолированной точкой множества  $E$ , если  $\exists \epsilon_0 > 0 : \forall x \in E, x \neq b$ , выполнено  $\rho(x, b) \geq \epsilon_0$ . Последовательностью  $\{v_n\}_{n=1}^\infty$  в  $E$  называется отображение  $F : \mathbb{N} \rightarrow E, F(n) = v_n$ .

**Определение 2.2.** Пусть  $E$  - метрическое пространство с метрикой  $\rho$ ,  $a \in E$  - точка сгущения,  $\{v_n\}_{n=1}^\infty, v_n \in E$ , - последовательность в  $E$ . Говорят, что  $v_n$  стремится к  $a$  при  $n$ , стремящимся к бесконечности, пишут  $v_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$ , или, что равносильно, что предел  $v_n$  при  $n$ , стремящемся к бесконечности, равен  $a$ , пишут  $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = a$ , если

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \rho(v_n, a) < \epsilon \quad (2.1)$$

**Теорема 2.1.** *О единственности предела. Пусть  $E$  - метрическое пространство с метрикой  $\rho$ ,  $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$  - последовательность элементов  $E$  и предположим, что  $v_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a_1$  и  $v_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a_2$ ,  $a_1, a_2 \in E$ . Тогда  $a_1 = a_2$*

*Доказательство.* Предположим, что  $a_1 \neq a_2$ , тогда  $\rho(a_1, a_2) \stackrel{def}{=} \delta > 0$ . Положим  $\epsilon = \frac{\delta}{4}$ . Тогда  $\exists N_1 : \forall n > N_1 \rho(v_n, a_1) < \epsilon$  и  $\exists N_2 : \forall n > N_2 \rho(v_n, a_2) < \epsilon$ . Пусть  $n_0 = N_1 + N_2 + 1$ , тогда  $n_0 > N_1, n_0 > N_2$ , поэтому  $\rho(v_{n_0}, a_1) < \epsilon \wedge \rho(v_{n_0}, a_2) < \epsilon$ . Тогда получаем

$$\rho(a_1, a_2) \leq \rho(a_1, v_{n_0}) + \rho(v_{n_0}, a_2) < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon = \delta/2 < \delta$$

что противоречит выбору  $\delta$ . ■

**Теорема 2.2.** *Об ограниченности последовательности, имеющей предел. Пусть  $E$  - метрическое пространство с метрикой  $\rho$ ,  $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$  - последовательность элементов  $E$  и  $v_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$ . Тогда  $\exists M > 0 : \forall n \in \mathbb{N}$  имеем соотношение*

$$\rho(v_n, a) \leq M \quad (2.2)$$

*Доказательство.* Выберем  $\epsilon = 1$ , тогда  $\exists N_0 : \forall n > N_0 \rho(v_n, a) < 1$ . Пусть  $M_1 = \max(\rho(v_1, a), \dots, \rho(v_{N_0}, a))$ . Тогда для  $M = \max(M_1, 1)$  соотношение 2.2 выполнено  $\forall n \in \mathbb{N}$ . ■

## 2.2. Предел числовой последовательности

Множество вещественных чисел является метрическим пространством: для  $a, b \in \mathbb{R}$  положим  $\rho(a, b) \stackrel{def}{=} |a - b|$ , нужные свойства следуют из свойства модуля. Поэтому, если  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  - последовательность в  $\mathbb{R}$ ,  $a \in \mathbb{R}$ , то общее определение предела переносится так:

$$x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a, \text{ если } \forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N |x_n - a| < \epsilon$$

Если  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a, a \in \mathbb{R}$ , то по теореме об ограниченности последовательности, имеющей предел,  $\exists M : |x_n - a| \leq M \forall n$ . Тогда

$$|x_n| = |x_n - a + a| \leq |x_n - a| + |a| \leq M + |a| \forall n \quad (2.3)$$

## 2.3. Расширение множества вещественных чисел

Добавим к множеству  $\mathbb{R}$  два элемента,  $\{+\infty\}, \{-\infty\}$ . Полагаем, что по определению,  $a < +\infty \forall a \in \mathbb{R}, -\infty < a \forall a \in \mathbb{R}, -\infty < +\infty$ .



## 2.4. Определение бесконечных пределов

Пусть  $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$  - последовательность вещественных чисел. Говорят, что  $y_n$  стремится к  $+\infty$ , пишут  $y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$ , или, что предел  $y_n$  равен  $+\infty$  при  $n$ , стремящемся к бесконечности. Пишут  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty$ , если  $\forall K > 0 \exists N : \forall n > N y_n > K$ .

Аналогично, для последовательности  $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$   $t_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty$  или  $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = -\infty$ , если  $\forall L < 0 \exists N_1 : \forall n > N_1 t_n < L$ .

Если предел некоторой последовательности вещественное число, то говорят, что её конечен, а если равен  $\pm\infty$ , то говорят, что предел бесконечен.

**Теорема 2.3.** *Критерий Коши существования конечного предела последовательности. Пусть  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  - последовательность вещественных чисел. Для того, чтобы эта последовательность имела конечный предел, необходимо и достаточно, чтобы  $\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n_1 > N, n_2 > N$  выполнялось соотношение*

$$|x_{n_2} - x_{n_1}| < \epsilon \quad (2.4)$$

*Доказательство.* Достаточность. Построим сечение  $\mathbb{R}$  с нижним классом  $A$  и верхним классом  $A'$  следующим образом:  $\alpha \in A \Leftrightarrow \exists N_{\alpha}$ , зависящее от  $\alpha$ , т.ч.  $\forall n > N_{\alpha}$  выполнено

$$x_n > \alpha \quad (2.5)$$

$$A' \stackrel{def}{=} \mathbb{R} \setminus A.$$

Проверим, что  $A \neq \emptyset$ : возьмем  $\epsilon = 1$ , тогда 2.4  $\Rightarrow \exists N_1 : \forall n_1, n_2 > N_1$  выполнено  $|x_{n_2} - x_{n_1}| < 1$ , что эквивалентно соотношению

$$x_{n_1} - 1 < x_{n_2} < x_{n_1} + 1 \quad (2.6)$$

Положим  $n_1 = N_1 + 1$ , тогда 2.6 выполнено при  $n_2 \geq n_1$ , т.е.  $x_{n_1} - 1 \in A$ . Поскольку правое неравенство в 2.6 тоже выполнено при  $n_2 \geq N_1 + 1$ , то определение 2.5  $\Rightarrow x_{n_1} + 1 \notin A$ , т.е.  $x_{n_1} + 1 \in A'$ , т.е.  $A \neq \mathbb{R}$ .

Определение  $A, A' \Rightarrow A \cup A' = \mathbb{R}, A \cap A' = \emptyset$ .

Возьмем  $\forall \alpha \in A, \forall \beta \in A'$ . Тогда 2.5  $\Rightarrow \exists N_{\alpha} : \forall n > N_{\alpha}$  выполнено 2.5. Поскольку  $\beta \notin A$ , то  $\exists n_0 > N_{\alpha} : x_{n_0} \leq \beta$ , поскольку в противоположном случае при отсутствии такого  $n_0$  из 2.5  $\Rightarrow \beta \in A$ , что неверно. Таким образом

$$\alpha < x_{n_0} \leq \beta \Rightarrow \alpha < \beta$$

Итак,  $A, A'$  - сечения  $\mathbb{R}$ . По теореме Дедекинда  $\exists \gamma : \forall \alpha \in A \alpha \leq \gamma \wedge \forall \beta \in A' \gamma \leq \beta$ . Возьмем  $\forall \epsilon > 0$ , тогда  $\gamma - \frac{\epsilon}{2} \in A, \gamma + \frac{\epsilon}{2} \in A'$ . Выберем  $N_2$  так, чтобы при  $\forall n_1, n_2 > N_2$  выполнялось

$$|x_{n_1} - x_{n_2}| \leq \frac{\epsilon}{2} \quad (2.7)$$

Поскольку  $\gamma - \frac{\epsilon}{2} \in A$ , то  $\exists N_3 : \forall n > N_3$  выполняется

$$x_n > \gamma - \frac{\epsilon}{2} \quad (2.8)$$

Не уменьшая общности, считаем, что  $N_3 \geq N_2$ .

Поскольку  $\gamma + \frac{\epsilon}{2} \in A'$ , то

$$\exists n' > N_3 : x_{n'} \leq \gamma + \frac{\epsilon}{2} \quad (2.9)$$

Положим теперь  $N = n'$ , тогда 2.8, 2.9  $\Rightarrow$

$$\left( \gamma - \frac{\epsilon}{2} < x_{n'} \leq \gamma + \frac{\epsilon}{2} \right) \Rightarrow |x_{n'} - \gamma| \leq \frac{\epsilon}{2} \quad (2.10)$$

Теперь 2.7 и 2.10 при  $n > N = n'$  влекут:

$$|x_n - \gamma| = |(x_n - x_{n'}) + (x_{n'} - \gamma)| \leq |x_n - x_{n'}| + |x_{n'} - \gamma| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \quad (2.11)$$

Т.е. из определения предела  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \gamma$ . Достаточность доказана.

Доказательство необходимости. Пусть  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a, a \in \mathbb{R}$ , тогда  $\forall \epsilon > 0 \exists N : \forall n > N$  выполнено

$$|x_n - a| < \frac{\epsilon}{2} \quad (2.12)$$

Возьмем  $\forall n_1, n_2 > N$ , тогда 2.12  $\Rightarrow$

$$|x_{n_2} - x_{n_1}| = |(x_{n_2} - a) - (x_{n_1} - a)| \leq |x_{n_2} - a| + |x_{n_1} - a| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Необходимость доказана. ■

## 2.5. Предельные переходы в арифметических действиях

Далее для сокращения вместо  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$  пишем  $x_n \rightarrow a$ . Далее  $a, b, \dots \in \mathbb{R}$ .

**Теорема 2.4.** 1. Пусть  $x_n = a, n \geq 1 \Rightarrow x_n \rightarrow a$

2. Пусть  $x_n \rightarrow a, c \in \mathbb{R} \Rightarrow cx_n \rightarrow ca$

3. Пусть  $x_n \rightarrow a, y_n \rightarrow b \Rightarrow x_n + y_n \rightarrow a + b$

4. Пусть  $x_n \rightarrow a, y_n \rightarrow b \Rightarrow x_n y_n \rightarrow ab$

5. Пусть  $x_n \rightarrow a, a \neq 0, x_n \neq 0 \forall n \Rightarrow \frac{1}{x_n} \rightarrow \frac{1}{a}$

6. Пусть  $x_n \rightarrow a, a \neq 0, x_n \neq 0 \forall n, y_n \rightarrow b \Rightarrow \frac{y_n}{x_n} \rightarrow \frac{b}{a}$

*Доказательство.* 1) следует из определения.

Для 2): возьмем  $\forall \epsilon > 0, \exists N : \forall n > N, |x_n - a| < \epsilon$ , что влечет  $|c||x_n - a| < (|c|+1)\epsilon, |cx_n - ca| < (|c|+1)\epsilon$ . Поскольку  $\epsilon > 0$  произвольно, то и  $(|c|+1)\epsilon$  произвольно.

Для 3): возьмем  $\forall \epsilon > 0, \exists N_1 : \forall n > N_1, |x_n - a| < \frac{\epsilon}{2}, \exists N_2 : \forall n > N_2, |y_n - b| < \frac{\epsilon}{2}$ , пусть  $N = \max(N_1, N_2), \forall n > N$  имеем:

$$|(x_n + y_n) - (a + b)| \leq |x_n - a| + |y_n - b| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Для 4):  $x_n y_n - ab = (x_n - a)y_n + a(y_n - b)$ . Поскольку  $y_n \rightarrow b$ , то  $\exists M > 0 : |y_n| \leq M \forall n$ . Возьмем  $\forall \epsilon > 0, \exists N_1 : \forall n > N_1, |x_n - a| < \epsilon \wedge \exists N_2 : \forall n > N_2, |y_n - b| < \epsilon; N \stackrel{\text{def}}{=} \max(N_1, N_2) \Rightarrow \forall n > N \Rightarrow$

$$|x_n y_n - ab| \leq |x_n - a| |y_n| + |a| |y_n - b| < \epsilon * M + |a| * \epsilon = (M + |a|)\epsilon$$

Выражение  $(M + |a|)\epsilon$  может быть выбрано произвольным  $> 0$  вместе с  $\epsilon$ .

Для 5):  $\exists N_1 : \forall n > N_1, |x_n - a| < \frac{|a|}{2}$ , тогда  $\forall n > N_1$  имеем:

$$|x_n| = |(x_n - a) + a| \geq |a| - |x_n - a| > |a| - \frac{|a|}{2} = \frac{|a|}{2}$$

т.е. при  $n > N_1, \frac{1}{x_n} < \frac{2}{|a|}, \frac{1}{x_n} - \frac{1}{a} = \frac{a - x_n}{x_n a}$ . Возьмем  $\forall \epsilon > 0, \exists N_2 : \forall n > N_2, |x_n - a| < \epsilon$ , пусть  $N = \max(N_1, N_2)$ . При  $n > N$  имеем:

$$\left| \frac{1}{x_n} - \frac{1}{a} \right| = \frac{|a - x_n|}{|x_n| |a|} < \frac{2}{|a|} \cdot \frac{1}{|a|} \epsilon = \frac{2}{a^2} \epsilon$$

$\frac{2}{a^2} \epsilon$  может быть любым положительным числом.

Для 6)  $\frac{y_n}{x_n} = \frac{1}{x_n} \cdot y_n$ , тогда 4) и 5)  $\Rightarrow$  6). ■

## 2.6. Переход к пределу в неравенствах

**Теорема 2.5.** *О двух милиционерах??*

1. Пусть  $x_n \leq y_n \forall n, x_n \rightarrow a, y_n \rightarrow b; a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow a \leq b$

2. Пусть  $x_n \leq y_n \leq z_n \forall n, x_n \rightarrow a, z_n \rightarrow a, a \in \mathbb{R} \Rightarrow y_n \rightarrow a$

*Доказательство.* 1. Пусть  $a > b, a - b = \delta > 0 \Rightarrow \exists N_1 : \forall n > N_1 |x_n - a| \leq \frac{\delta}{4}, \exists N_2 : \forall n > N_2 |y_n - b| < \frac{\delta}{4}$ , возьмем  $n_0 = N_1 + N_2 + 1 \Rightarrow$

$$x_{n_0} > a - \frac{\delta}{4} = b + \delta - \frac{\delta}{4} = b + \frac{3}{4}\delta = (b + \frac{\delta}{4}) + \frac{\delta}{2} > y_{n_0} + \frac{\delta}{2} > x_{n_0}$$

что противоречит условию.

2. Возьмем  $\forall \epsilon > 0, \exists N_1 : \forall n < N_1 |x_n - a| < \epsilon, \exists N_2 : \forall n > N_2 |z_n - a| < \epsilon$ , тогда для  $N = \max(N_1, N_2)$  имеем при  $n > N$

$$a - \epsilon < x_n \leq y_n \leq z_n < a + \epsilon \Rightarrow |y_n - a| < \epsilon$$

■

**Термин 2.1.** Если  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ , то говорят, что  $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$  бесконечно малая; если  $|y_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$ , то говорят, что последовательность  $\{y_n\}_{n=1}^{+\infty}$  бесконечно большая.

**Утверждение 2.1.** Пусть последовательность  $\{y_n\}_{n=1}^{+\infty}$  бесконечно большая,  $y_n \neq 0 \forall n, x_n = \frac{1}{y_n}$ . Тогда  $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$  бесконечно малая последовательность. Пусть  $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$  бесконечно малая последовательность,  $x_n \neq 0 \forall n, y_n = \frac{1}{x_n}$ . Тогда  $\{y_n\}_{n=1}^{+\infty}$  бесконечно большая последовательность.

*Доказательство.* Докажем первое, второе доказывается аналогично. Возьмем  $\forall \epsilon > 0$ , пусть  $L = 1/\epsilon$ . Тогда  $\exists N : \forall n > N |y_n| > L$ , но  $|y_n| > L \Leftrightarrow \frac{1}{|y_n|} < \frac{1}{L} = \epsilon$ , т.е.  $|x_n - 0| = |x_n| = \frac{1}{|y_n|} < \epsilon$  ■

## 2.7. Предельные переходы и бесконечные пределы

**Дополнение к предельным переходам в арифметических действиях**

**Теорема 2.6.** *Справедливы следующие утверждения:*

## 2.7. ПРЕДЕЛЬНЫЕ ПЕРЕХОДЫ И БЕСКОНЕЧНЫЕ ПРЕДЕЛЫ

1.  $c > 0, x_n \rightarrow +\infty, y_n \rightarrow -\infty \Rightarrow cx_n \rightarrow +\infty, cy_n \rightarrow -\infty; d < 0, dx_n \rightarrow -\infty, dy_n \rightarrow +\infty$
2.  $x_n \rightarrow +\infty, y_n \rightarrow a \in \mathbb{R}, z_n \rightarrow +\infty \Rightarrow x_n + y_n \rightarrow +\infty, x_n + z_n \rightarrow +\infty$   
 $u_n \rightarrow -\infty, v_n \rightarrow b \in \mathbb{R}, w_n \rightarrow -\infty \Rightarrow u_n + v_n \rightarrow -\infty, u_n + w_n \rightarrow -\infty$
3.  $x_n \rightarrow +\infty, y_n \rightarrow a > 0, z_n \rightarrow b < 0 \Rightarrow x_n y_n \rightarrow +\infty, x_n z_n \rightarrow -\infty$   
 $u_n \rightarrow -\infty, v_n \rightarrow c > 0, w_n \rightarrow d < 0 \Rightarrow u_n v_n \rightarrow -\infty, u_n w_n \rightarrow +\infty$   
 $x_n \rightarrow +\infty, t_n \rightarrow +\infty, s_n \rightarrow -\infty \Rightarrow x_n t_n \rightarrow +\infty, x_n s_n \rightarrow -\infty$   
 $u_n \rightarrow -\infty, v_n \rightarrow -\infty \Rightarrow u_n v_n \rightarrow +\infty;$

### Дополнение к предельным переходам в неравенствах

**Теорема 2.7.** *Справедливы следующие утверждения:*

1. Пусть  $x_n \leq y_n \forall n, x_n \rightarrow a \in \overline{\mathbb{R}}, y_n \rightarrow b \in \overline{\mathbb{R}} \Rightarrow a \leq b$
2. Пусть  $x_n \leq y_n \leq z_n \forall n, x_n \rightarrow a \in \overline{\mathbb{R}}, z_n \rightarrow a \in \overline{\mathbb{R}} \Rightarrow y_n \rightarrow a$

*Доказательство.* Доказательство приведенных выше теорем проще доказательств соответствующих теорем для конечных пределов и в дальнейшем курсе не используются, поэтому будут приняты без доказательства. ■

**Определение 2.3.** Последовательность  $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$  называется возрастающей, если  $x_n \leq x_{n+1} \forall n$ ; последовательность  $\{y_n\}_{n=1}^{+\infty}$  называется строго возрастающей, если  $y_n < y_{n+1} \forall n$ . Последовательность  $\{u_n\}_{n=1}^{+\infty}$  называется убывающей, если  $u_n \geq u_{n+1} \forall n$ ; последовательность  $\{v_n\}_{n=1}^{+\infty}$  называется строго убывающей, если  $v_n > v_{n+1} \forall n$ . Последовательность  $\{t_n\}_{n=1}^{+\infty}$  называется монотонной, если она возрастающая или убывающая; последовательность  $\{w_n\}_{n=1}^{+\infty}$  называется строго монотонной, если она строго возрастающая или строго убывающая.

**Теорема 2.8.** 1. Пусть  $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$  - монотонная последовательность. Тогда  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in \overline{\mathbb{R}}$

2. Пусть  $\{y_n\}_{n=1}^{+\infty}$  - возрастающая. Тогда  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R} : y_n \leq M \forall n$
3. Пусть  $\{u_n\}_{n=1}^{+\infty}$  - убывающая. Тогда  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \exists K \in \mathbb{R} : u_n \geq K \forall n$

4. Пусть  $\{v_n\}_{n=1}^{+\infty}$  - строго возрастающая и  $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n \in \mathbb{R}$ . Тогда  $v_n < \lim_{n \rightarrow \infty} v_n \forall n$
5. Пусть  $\{w_n\}_{n=1}^{+\infty}$  - строго убывающая и  $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n \in \mathbb{R}$ . Тогда  $w_n > \lim_{n \rightarrow \infty} w_n \forall n$

*Доказательство.* Доказательство соотношений 1), 2), 4). Предположим, что последовательность  $\{y_n\}_{n=1}^{+\infty}$  неограничена сверху. Возьмем  $\forall L > 0$ , тогда  $\exists N : y_N > L \Rightarrow \forall n > N \ y_n \geq y_{n-1} \geq \dots \geq y_N > L \Rightarrow y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$ . Предположим, что  $\{y_n\}_{n=1}^{+\infty}$  ограничена сверху, т.е.  $\exists M : y_n \leq M \forall n$ . Пусть  $E = \{y \in \mathbb{R} : \exists n : y = y_n\}$ . Тогда множество  $E$  непусто и ограничено сверху,  $M$  - его верхняя граница. Пусть  $a = \sup E$ . Тогда  $y_n \leq a \forall n$ . Возьмем  $\epsilon > 0$ , тогда  $a - \epsilon$  - не верхняя граница  $E$ , тогда  $\exists N : y_N > a - \epsilon$ . Тогда при  $\forall n > N$  имеем  $y_n \geq y_{n-1} \geq \dots \geq y_N > a - \epsilon, y_n \leq a$ , т.е.  $|y_n - a| < \epsilon$ , т.е.  $y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$ . Утверждение 1) для возрастающей последовательности и достаточность в утверждении 2) доказаны. Необходимость в утверждении 2) следует из ограниченности последовательности, имеющей конечный предел. Для доказательства 4) пишем  $(y_n < y_{n+1} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} y_n)$ ,  $(v_n < v_{n+1} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} v_n)$ . Доказательство утверждений 1), 3), 5) следуют из того, что если  $u_n$  - убывающая, то  $y_n \stackrel{\text{def}}{=} -u_n$  - возрастающая, если  $w_n$  - строго убывающая, то  $v_n \stackrel{\text{def}}{=} -w_n$  - строго возрастающая, и далее применим утверждения 1), 2), 4). ■

**Теорема 2.9.** *Теорема о вложенных промежутках. Пусть  $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n], n = 1, 2, \dots, n; b_n - a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ . Тогда  $\exists! c \in \mathbb{R} : c \in [a_n, b_n] \forall n$ .*

*Замечание.* Условие замкнутости промежутков существенно: имеем  $(0, \frac{1}{n+1}] \subset (0, \frac{1}{n}]$ ,  $\frac{1}{n} - 0 = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ , но  $\bigcap_{n=1}^{\infty} (0, \frac{1}{n}] \neq \emptyset$ .

*Доказательство.* Имеем неравенство  $a_n < b_n \leq b_{n-1} \leq \dots \leq b_1, b_n > a_n \geq a_{n-1} \geq \dots \geq a_1 \forall n$ , т.е.  $a_n \leq b_1 \forall n, b_n \geq a_1 \forall n$ . Тогда в силу возрастания  $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$  и убывания  $\{b_n\}_{n=1}^{+\infty}$  по предыдущей теореме  $\exists c_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n; \exists c_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n; c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ . По свойству перехода к пределу в неравенстве имеем:

$$a_n < b_n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \Rightarrow c_1 \leq c_2$$

По доказательству предыдущей теоремы имеем  $a_n \leq c_1 \forall n; b_n \geq c_2 \forall n$ , поэтому  $0 \leq c_2 - c_1 \leq b_n - a_n$ , тогда

$$0 \leq c_2 - c_1 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 \stackrel{\text{def}}{=} c$$

Тогда имеем  $a_n \leq c \leq b_n$ , т.е.  $c \in [a_n, b_n] \forall n$ , то  $|c_0 - c| \leq b_n - a_n$ ,  $|c_0 - c| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$ , т.е.  $c$  - единственно. ■

## 2.8. Число $e$

**Теорема 2.10.** Пусть  $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ,  $y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Тогда  $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$  строго возрастает,  $y_n$  строго убывает,  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \stackrel{\text{def}}{=} e \wedge x_n < e < y_n \forall n$ , в частности  $2 < e < 3$ .

*Замечание.* Вычислено, что  $e = 2,718\dots$

*Доказательство.* Докажем строгое возрастание  $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ . Считаем  $n \geq 3$ , при  $n = 1, n = 2$  - явные вычисления. Применяя бином Ньютона, имеем:

$$\begin{aligned} x_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1^n + \sum_{k=1}^{n-1} C_n^k \cdot 1^{n-k} \cdot \frac{1}{n^k} + \frac{1}{n^n} = \\ &= 1 + C_n^1 \cdot \frac{1}{n} + \sum_{k=2}^{n-1} C_n^k \cdot \frac{1}{n^k} + \frac{1}{n^n} = 2 + \sum_{k=2}^{n-1} \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{1}{n^k} + \frac{1}{n^n} \end{aligned} \quad (2.13)$$

Преобразуем отдельно:

$$\begin{aligned} \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{1}{n^k} &= \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)(n-k)!}{k!(n-k)!n^k} = \\ &= \frac{n(n-1)(n-k+1)}{k!n^k} = \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\frac{1}{n^n} = \frac{n!}{n^n} \cdot \frac{1}{n!} = \frac{(n-1)!}{n^{n-1}} \cdot \frac{1}{n!} = \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \quad (2.15)$$

Тогда соотношения 2.13, 2.14, 2.15 влекут

$$x_n = 2 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \quad (2.16)$$

Тогда 2.16  $\Rightarrow$

$$x_{n+1} = 2 + \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right) \quad (2.17)$$

Поскольку  $1 - \frac{e}{n} < 1 - \frac{e}{n+1}$ ,  $1 \leq e \leq n-1$ , и в 2.17 есть ещё одно слагаемое по сравнению с  $x_n$ , то  $x_n < x_{n+1}$

Докажем строгое убывание  $y_n$ . Пусть  $n \geq 0$ .

$$\begin{aligned} \frac{y_{n-1}}{y_n} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{n}{n+1} \cdot \frac{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \\ &= \frac{n}{n+1} \left(\frac{n}{n-1}\right)^n \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \frac{n}{n+1} \frac{n^{2n}}{(n^2-1)^n} = \\ &= \frac{n}{n+1} \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n = \frac{n}{n+1} \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^n \quad (2.18) \end{aligned}$$

Применяя бином Ньютона к выражению  $(1+x)^n$ ,  $x > 0$ ,  $n \geq 2$ , имеем  $(1+x)^n = 1^n + C_n^1 1^{n-1}x + \dots = 1 + nx + \dots$ , где многоточие означает положительные слагаемые, поэтому получаем неравенство Бернулли:

$$(1+x)^n > 1 + nx, n \geq 2, x > 0 \quad (2.19)$$

Применим 2.18 к 2.19 с  $x = \frac{1}{n^2-1}$ . Тогда 2.18, 2.19  $\Rightarrow$

$$\frac{y_{n-1}}{y_n} > \frac{n}{n+1} \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right) = \frac{n(n^2+n-1)}{(n+1)(n^2-1)} = \frac{n^3+n^2-n}{n^3+n^2-n-1} > 1$$

Строгое убывание  $\{y_n\}_{n=1}^{+\infty}$  доказано.

Далее,

$$y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) x_n \quad (2.20)$$

2.20  $\Rightarrow y_n > x_n$ ,  $y_n - x_n = \frac{1}{n}x_n$ . Теперь доказано, что  $x_n < x_{n+1} < y_{n+1} < y_n$ , т.е.  $[x_{n+1}, y_{n+1}] \subset [x_n, y_n]$ ,  $0 < x_n < y_n < y_{n-1} < y_5 < 3$ ,  $n \geq 5 \Rightarrow y_n - x_n < \frac{3}{n}$ ,  $n \geq 5 \Rightarrow y_n - x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

К промежуткам  $[x_n, y_n]$  применим теорему о вложенных промежутках, тогда  $\exists! e \in [x_n, y_n] \forall n$ , из доказательства теоремы о вложенных промежутках следует, что  $e = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ . По утверждениям 4 и 5 теоремы о пределах монотонных последовательностей в силу строгого возрастания  $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$  и строгого убывания  $\{y_n\}_{n=1}^{+\infty}$  имеем  $x_n < e < y_n \forall n$  ■



## 2.9. Подпоследовательности

**Определение 2.4.** Пусть  $F : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  - последовательность,  $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  - инъективное отображение и  $\phi(n) < \phi(m), n < m$ . Подпоследовательностью последовательности  $F$  называется  $G \stackrel{\text{def}}{=} F(\phi) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ .  $G$  - тоже последовательность.

В приведенном определении фигурируют последовательности вещественных чисел, но определение сохраняется, если рассматривать любую последовательность  $F : \mathbb{N} \rightarrow E$  из элементов множества  $E$ , подпоследовательность будет определяться как суперпозиция  $F(\phi) : \mathbb{N} \rightarrow E$ .

Исторически сложившееся обозначение подпоследовательности следующее. Обозначают  $\phi(k) = n_k$ , тогда, если  $F(n) = x_n$ , то  $F(\phi(k)) = x_{n_k}$ , т.е. рассматриваются элементы с номерами  $x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}, \dots$ , стандартное обозначение  $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{+\infty}$  и говорят, что подпоследовательность выбрана из последовательности, т.е. выбраны номера  $n_1, n_2, \dots; n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$ , и рассматриваются элементы  $x_{n_k}$  только с этими номерами.

**Утверждение 2.2.** Предположим, что  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a, a \in \overline{\mathbb{R}}, \{x_{n_k}\}_{k=1}^{+\infty}$  - подпоследовательность. Тогда  $x_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} a$ .

*Доказательство.* Для  $a \in \mathbb{R}$ , для  $a = \pm\infty$  аналогично. Поскольку  $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$ , то  $n_k \geq k$ ; возьмем  $\epsilon > 0$  и пусть  $N : \forall n > N |x_n - a| < \epsilon$ . Тогда  $\forall k > N$  имеем  $n_k \geq k > N$ , поэтому  $\forall k > N |x_{n_k} - a| < \epsilon$ . ■

**Теорема 2.11.** Принцип выбора Больцано — Вейерштрасса. Пусть  $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$  - последовательность  $M > 0, |x_n| \leq M \forall n$ . Тогда  $\exists a, a \in [-M, M]$  и подпоследовательность  $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{+\infty} : x_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} a$ .

*Доказательство.* Положим  $a_1 = -M, b_1 = M, c_1 = 0 = \frac{a_1 + b_1}{2}$ . Тогда либо для  $[a_1, c_1]$ , либо для  $[c_1, b_1]$ , либо для обоих, выполнено следующее утверждение 1: существует бесконечно много номеров  $n$  таких, что  $x_n$  принадлежит  $x_n$  лежит на этом промежутке. Пусть  $[a_2, b_2]$  - именно этот промежуток,  $n_1 : x_{n_1} \in [a_2, b_2]$ . Здесь либо  $a_2 = a_1, b_2 = c_1$ , либо  $a_2 = c_1, b_2 = b_1$ . Пусть  $c_2 = \frac{a_2 + b_2}{2}$ . Тогда либо для  $[a_2, c_2]$ , либо для  $[c_2, b_2]$ , либо для обоих выполнено утверждение 2: существует бесконечно много номеров  $n > n_1 : x_n$  лежит на этом промежутке. Пусть  $[a_3, b_3]$  именно этот промежуток, т.е. либо  $a_3 = a_2, b_3 = c_2$ , либо  $a_3 = c_2, b_3 = b_2$ , и пусть  $x_{n_2} \in [a_3, b_3], n_2 > n_1$ . Далее по индукции пусть уже выбраны  $[a_k, b_k], n_{k-1} > n_{k-2}$ . Пусть  $c_k = \frac{a_k + b_k}{2}$ . Для  $[a_k, c_k]$

или для  $[c_k, b_k]$ , или для обоих выполнено утверждение  $k$ : существует бесконечно много номеров  $n > n_{k-1} : x_n$  лежит на этом промежутке. Пусть  $[a_{k+1}, b_{k+1}]$  этот промежуток, т.е. либо  $a_{k+1} = a_k, b_{k+1} = c_k$ , либо  $a_{k+1} = c_k, b_{k+1} = b_k$ , и пусть  $x_{n_k} \in [a_{k+1}, b_{k+1}], n_k > n_{k-1}$ .

Построена последовательность  $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{+\infty}$  и последовательность вложенных промежутков  $\dots [a_{k+1}, b_{k+1}] \subset [a_k, b_k] \subset \dots \subset [a_1, b_1]$ , при этом

$$b_k - a_k = \frac{2M}{2^{k-1}} = 2^{-k+1}M \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

По теореме о вложенных промежутках  $\exists a \in [a_k, b_k] \forall k, a_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} a, b_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} a$ , при этом  $x_{n_k} \in [a_{k+1}, b_{k+1}]$ , т.е.  $a_{k+1} \leq x_{n_k} \leq b_{k+1}$ .

По утверждению 2 теоремы о переходе к пределу в неравенстве  $x_n \xrightarrow{k \rightarrow \infty} a$ . ■

## 2.10. Верхний и нижний пределы последовательности

**Определение 2.5.** Пусть  $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}, a_n \in \mathbb{R}$  - произвольная последовательность. Если она не ограничена сверху, то полагаем  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ , читаем "верхний предел последовательности  $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$  равен  $+\infty$ ". В этом случае  $\forall n \in \mathbb{N} \exists N_n > n : a_{N_n} > n$ , при этом можно считать, что  $N_n > N_{n-1}, n \geq 2$ . Таким образом,  $a_{N_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$ .

Предположим, что  $\exists M : a_n \leq M \forall n$ . Положим  $E_n = \{a \in \mathbb{R} : a = a_m \text{ для какого-то } m, m \geq n\}$ . Множество  $E_n$  непусто и ограничено сверху.  $E_{n+1} \subset E_n, n \geq 1$ . Пусть  $v_n \stackrel{\text{def}}{=} \sup E_n$ , тогда  $v_n \geq v_{n+1}, n \geq 1$ , поэтому по теореме о пределе монотонной последовательности  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} v_n \in \overline{\mathbb{R}}$ . Полагаем  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n$ .

Таким образом  $\forall$  последовательности  $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty} \exists \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n \in \overline{\mathbb{R}}$

Если последовательность  $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$  неограничена снизу, то полагаем  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ , читаем "нижний предел последовательности  $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$  равен  $-\infty$ ". В этом случае  $\forall n \in \mathbb{N} \exists N'_n > n : a_{N'_n} < -n$ , можно считать, что  $N'_n > N'_{n-1}, n \geq 2$ . Тогда  $a_{N'_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty$ .

Если  $\exists L : a_n \geq L \forall n$ , рассматриваем уже определенное множество  $E_n$  и полагаем  $w_n \stackrel{\text{def}}{=} \inf E_n$ . Тогда  $w_n \leq w_{n+1}$ , по теореме о пределе монотонной последовательности  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} w_n \in \overline{\mathbb{R}}$ . Полагаем  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} w_n$  для  $\forall$  последовательности  $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty} \exists \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$

### Свойства верхних и нижних пределов

**Теорема 2.12.** 1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}$

*Доказательство.* Это соотношение выполнено, если  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty \vee \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n} = +\infty$ . Если  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n > -\infty \vee \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n} < +\infty$ , то определено множество  $E_n$ ,  $w_n = \inf E_n \leq \sup E_n = v_n$ , поэтому  $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} v_n$  ■

**Теорема 2.13.** 2. Если  $a^+ = \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n} \in \mathbb{R}$ , то  $\forall \epsilon > 0 \exists N : \forall n > N a_n < a^+ + \epsilon$

*Доказательство.*  $a^+ = \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} v_n}$ , по теореме о пределе монотонной последовательности  $v_n \geq a^+ \forall n \wedge \exists N : v_n < a^+ + \epsilon$  при  $\forall n > N$ . Тогда  $\forall n > N a_n \in E_n \Rightarrow a_n \leq \sup E_n = v_n, a_n < a^+ + \epsilon \forall n > N$  ■

**Теорема 2.14.** 3.  $\forall \epsilon > 0 \wedge \forall N \exists n > N : a_n > a^+ - \epsilon$

*Доказательство.* Имеем  $v_{N+1} \geq a^+$ , но  $v_{N+1} = \sup E_{N+1}$ , поэтому  $\exists a_n \in E_{N+1} : a_n > a^+ - \epsilon$ . ■

**Теорема 2.15.** 4.  $\exists \{a_{n_k}\}_{k=1}^{+\infty} : a_{n_k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}$

*Доказательство.* В случае  $\overline{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n} = +\infty$  это доказано, аналогично доказывается в случае  $\overline{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n} = -\infty$ . Пусть  $\overline{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n} = a^+ \in \mathbb{R}$ . Выберем  $N_k$  так, чтобы  $\forall n > N_k a_n < a^+ + \frac{1}{k}$ ; выберем  $n_k > N_k, n_k > n_{k-1}$  так, что  $a_{n_k} > a^+ - \frac{1}{k}$ . Тогда  $|a_{n_k} - a^+| < \frac{1}{k}, a_{n_k} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} a^+$ . ■

**Теорема 2.16.** 5. Пусть последовательность  $\{a_{n_l}\}_{l=1}^{+\infty}$  такая, что  $\exists \lim_{l \rightarrow \infty} a_{n_l} \in \overline{\mathbb{R}}$ . Тогда

$$\lim_{l \rightarrow \infty} a_{n_l} \leq \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}$$

*Доказательство.* Если  $\overline{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n} = +\infty$ , то верно. Предположим, что  $a^+ \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n} < +\infty$ . Если  $\lim_{l \rightarrow \infty} a_{n_l} = -\infty$ , то верно. Предположим, что  $\lim_{l \rightarrow \infty} a_{n_l} > -\infty$ , тогда можно предполагать, что  $\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{l \rightarrow \infty} a_{n_l} \in \mathbb{R}$ . Возьмем  $\forall \epsilon > 0 \Rightarrow \exists L : \forall l > L \alpha - \epsilon < a_{n_l} < \alpha + \epsilon$ . Имеем соотношение  $a_{n_l} \in E_{n_l} \Rightarrow a_{n_l} \leq v_{n_l}, \alpha < a_{n_l} + \epsilon \leq v_{n_l} + \epsilon, l > L$ . Тогда  $\alpha \leq \lim_{l \rightarrow \infty} (v_{n_l} + \epsilon) = \lim_{n \rightarrow \infty} (v_n + \epsilon) = a^+ + \epsilon$ . В силу произвольности  $\epsilon > 0 \alpha \leq a^+$ . ■

**Теорема 2.17.** 6. Пусть  $c_n > 0, \exists \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = c > 0$ . Тогда  $\forall$  последовательности  $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ , имеем  $\overline{\lim_{n \rightarrow \infty} c_n a_n} = c \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}$

*Доказательство.* Положим  $\overline{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n} = a^+, \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} c_n a_n} = d$ . Пусть подпоследовательность  $\{c_{n_l}, a_{n_l}\}_{l=1}^{+\infty} : c_{n_l} a_{n_l} \xrightarrow{l \rightarrow \infty} d$ , тогда  $c_{n_l} \xrightarrow{l \rightarrow \infty} c, a_{n_l} \xrightarrow{l \rightarrow \infty} \frac{d}{c}$ . Пусть  $\tilde{a} = \lim_{l \rightarrow \infty} a_{n_l}$ . Тогда по 2.16.  $\tilde{a} \leq a^+$ , т.е.  $\frac{d}{c} \leq a^+ \Leftrightarrow d \leq c a^+$ , т.к.  $c > 0$ . Пусть последовательность  $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{+\infty}$  т.ч.  $a_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} a^+$ , что возможно по 2.15. Тогда  $c_{n_k} a_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} c a^+$ , но по 2.16  $\lim_{k \rightarrow \infty} (c_{n_k}, a_{n_k}) \leq \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} c_n a_n} = d$ , т.е.  $c a^+ \leq d, c a^* = d$ . ■

Положим для  $E \neq \emptyset, E \subset \mathbb{R} - E \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} : \exists y \in E : y = -x\}$ . Из определения  $E$  получаем следующее.

**Утверждение 2.3.**  $\inf E = -\sup(-E)$

Применяя это утверждение к определению  $\overline{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}$  и  $\underline{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}$ , из свойств 2-6 получаем следующие утверждения:

**Утверждение 2.4.**

2'. Если  $\bar{a} \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n} \in \mathbb{R}$ , то  $\forall \epsilon > 0 \exists N : \forall n > N a_n > \bar{a} - \epsilon$

3'.  $\forall \epsilon > 0 \wedge \forall N \exists n > N : a_n < \bar{a} + \epsilon$

4'.  $\exists \{a_{n_l}\}_{l=1}^{+\infty} : a_{n_l} \xrightarrow{l \rightarrow \infty} \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}$

5'. Пусть  $\{a_{n_m}\}_{m=1}^{+\infty} : \exists \lim_{m \rightarrow \infty} a_{n_m}$ . Тогда  $\lim_{m \rightarrow \infty} a_{n_m} \geq \underline{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}$

6'. Пусть  $c_n > 0, \exists \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = c > 0$ . Тогда  $\overline{\lim_{n \rightarrow \infty} c_n a_n} = c \cdot \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}$

Для того, чтобы  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \in \bar{\mathbb{R}}$  необходимо и достаточно, чтобы  $\underline{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n} = \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}$ . Тогда  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \underline{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n} = \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}$ .

*Доказательство.* Рассмотрим случай  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \in \mathbb{R}$  и  $\overline{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n} \in \mathbb{R}$ , случай бесконечных пределов рассматривается аналогично.

*Необходимость.* Пусть  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  и пусть  $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{+\infty}$  и  $\{a_{n_l}\}_{l=1}^{+\infty}$  т.ч.  $a_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}, a_{n_l} \xrightarrow{l \rightarrow \infty} \underline{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}$ . Тогда  $a_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n, a_{n_l} \xrightarrow{l \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ , т.е.  $\underline{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n} = \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}$ .

*Достаточность.* Пусть  $\underline{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n} = \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n} \stackrel{\text{def}}{=} \alpha \in \mathbb{R}$ . Возьмем  $\forall \epsilon > 0$  по 2  $\exists N_1 : \forall n > N_1 a_n < \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n} + \epsilon = \alpha + \epsilon$ , по 2'  $\exists N_2 : \forall n > N_2 a_n > \underline{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n} - \epsilon = \alpha - \epsilon$ , т.е.  $\forall n > \max(N_1, N_2) \alpha - \epsilon < a_n < \alpha + \epsilon \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ . ■

## 2.11. Предел функции

**Определение 2.6.** Пусть  $X$  - метрическое пространство с метрикой  $\rho$ ,  $a \in X$  - точка сгущения. Окрестностью точки  $a$  в  $X$  будем называть множество  $w \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in X : \rho(x, a) < r\}$  при каком-нибудь  $r > 0$ . Для множества  $\overline{\mathbb{R}}$  окрестностью  $+\infty$  будем называть любой луч  $(a, +\infty)$ , а окрестностью  $-\infty$  - любой луч  $(-\infty, a)$ . Для  $x \in \mathbb{R}$  будем называть окрестностью любой промежуток  $(x - \epsilon, x + \epsilon)$ ,  $\epsilon > 0$ .

**Определение 2.7.** Определение предела функции. Пусть  $X$  - метрическое пространство с метрикой  $\rho$ ,  $a \in X$  - точка сгущения,  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  - функция, заданная на  $X$ ,  $A \in \mathbb{R}$ . Говорят, что  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} A$ , или, что равносильно,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ , если  $\forall$  окрестности  $W$  элемента  $A$   $\exists$  окрестность  $w$  точки  $a : \forall x \in w \setminus \{a\}$  выполнено:

$$f(x) \in W \quad (2.21)$$

Если функция  $f : (L, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \vee f : (-\infty, M) \rightarrow \mathbb{R}$ , то говорят, что  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} A$ , соответственно,  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} A$ , если  $\forall$  окрестности  $W$  элемента  $A$   $\exists$  окрестность  $w$  элемента  $+\infty$ , соответственно, элемента  $-\infty$ , т.ч.  $\forall x \in w$  выполнено:

$$f(x) \in W \quad (2.22)$$

**Утверждение 2.5.** Пусть  $X$  - метрическое пространство с метрикой  $\rho$ ,  $a \in X$  - точка сгущения. Тогда  $\exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a, x_n \neq a \forall n, x_n \in X$ .

*Доказательство.* Возьмем  $x_1 \neq a$ , пусть  $\epsilon_1 = \rho(x_1, a)$ , тогда  $\epsilon_1 > 0 \exists x_2 \neq a : \rho(x_2, a) < \frac{1}{2}\epsilon_1$ . Положим  $\epsilon_2 = \rho(x_2, a)$ . Предположим, что выбраны  $x_1, \dots, x_n : x_k \neq a, 1 \leq k \leq n, \epsilon_k = \rho(x_k, a) < \frac{1}{2}\epsilon_{k-1}, k \geq 2$ . Тогда  $\exists x_{n+1} \neq a : \rho(x_{n+1}, a) < \frac{1}{2}\epsilon_n$ . Полагаем  $\epsilon_{n+1} = \rho(x_{n+1}, a)$ . Имеем:  $\epsilon_n < \frac{1}{2}\epsilon_{n-1} < \frac{1}{2^2}\epsilon_{n-2} < \dots < \frac{1}{2^{n-1}\epsilon_1}$ , т.е.  $\rho(x_n, a) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ . ■

**Теорема 2.18.** О пределе функции и пределах последовательности. Пусть  $X$  - метрическое пространство с метрикой  $\rho$ ,  $f : X \rightarrow \mathbb{R}, A \in \overline{\mathbb{R}}$ . Для того чтобы  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} A$ , необходимо и достаточно, что для  $\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, x_n \in X, x_n \neq a \forall n, x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$ , выполнялось  $f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A$ .

*Доказательство.* Необходимость. Пусть  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} A, \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  - любая упомянутая в условии последовательность. Возьмем  $\forall$  окрестности

$W$  элемента  $A$ , т.е. либо промежуток  $(A - \epsilon, A + \epsilon)$ , если  $A \in \mathbb{R}$ , либо луч  $(L, +\infty)$ , если  $A = +\infty$ , либо луч  $(-\infty, M)$ , если  $A = -\infty$ . Тогда  $\exists$  окрестность  $w$  точки  $a : \forall x \in w \setminus \{a\}$  выполнено  $f(x) \in W$ , т.е. либо  $|f(x) - A| < \epsilon$ , либо  $f(x) > L$ , либо  $f(x) < M$ . Пусть  $w = \{x \in X : \rho(x, a) < r\}$ . Поскольку  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$ , то  $\exists N : \forall n > N \rho(x_n, a) < r$ , что влечет  $f(x_n) \in W \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A$ .

Достаточность. Предположим, что  $\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  с требуемыми свойствами  $f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A$ , но неверно, что  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} A$ . Тогда  $\exists$  окрестность  $W_0$  элемента  $A : \forall$  окрестности  $w$  точки  $a \exists x \in w \setminus \{a\} : f(x) \notin W_0$ . Пусть  $w_1 = \{x : \rho(x, a) < 1\}$ ,  $x_1 \in w_1 \setminus \{a\}$ , но  $f(x_1) \notin W_0$ . Положим  $\epsilon_1 = \rho(x_1, a)$ ,  $\epsilon_1 < 1$ .  $\exists x_2 \neq a, \rho(x_2, a) < \frac{1}{2}\epsilon_1 : f(x_2) \notin W_0$ . Пусть  $\epsilon_2 = \rho(x_2, a)$ ,  $\epsilon_2 < \frac{1}{2}\epsilon_1$ . Пусть построены точки  $x_1, \dots, x_n : f(x_k) \notin W_0, x_k \neq a, 1 \leq k \leq n, \epsilon_k = \rho(x_k, a) < \frac{1}{2}\epsilon_{k-1} < \dots < \frac{1}{2^{n-1}\epsilon_1}$ , т.е.  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a, x_n \neq a \forall n \wedge f(x_n) \notin W_0$ , т.е.  $f(x_n)$  не стремится к  $A$ , что противоречит предположению достаточности, т.к.  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} A$ . ■

*Дополнение.* Аналогичное утверждение справедливо, если  $f : (a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  или  $f : (-\infty, b)$  и  $x \rightarrow +\infty$  или  $x \rightarrow -\infty$ .